

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université A.Mira de Béjaïa  
Faculté des Sciences Exactes  
Département de Mathématiques



# Mémoire de Fin de Cycle

En vue de l'obtention d'un Master académique en Mathématiques

Option : Probabilités Statistique et Applications

## Thème

Quantification de l'incertitude dans le système  
M/M/1/N avec "working vacations" par des  
intervalles (P-box)

Présenté par :

*Mr BEKKA Nadir*

Devant le jury composé de :

Mme BOURAINE Louiza	Professeur	Univ. Bejaia	Présidente
Mr OUAZINE Sofiane	M.C.B	Univ. Bejaia	Rapporteur
Mme TABTI Hadjila	M.C.B	Univ. Bejaia	Examinatrice
Mme TAKHEDMIT Baya	M.C.B	Univ. Bejaia	Examinatrice

Année universitaire : 2019/2020

# Remerciements

*Au terme de mon modeste travail, je tiens à remercier tous d'abord Dieu, le tout puissant de m'avoir accordé la volonté, force, santé, détermination et courage afin d'accomplir mon mémoire.*

*Je tiens à exprimer mes profondes gratitudees à mon promoteur **M. OUAZINE** pour la manière dont il m'a encadré. Je lui suis également reconnaissant pour la confiance qu'il m'a accordée. Ses remarques constructives m'ont beaucoup apporté tout au long de ce travail.*

*Je remercie chaleureusement les membres de jury **Mme. BOURAINE** en sa qualité de présidente, **Mme. TABTI** et **Mme. TAKHEDMIT** qui m'ont honorés de leurs présence et d'avoir accepté d'évaluer ce modeste travail à sa juste valeur.*

*Que toute personne qui a contribué, de près ou de loin, à l'élaboration de ce mémoire, veuillez bien trouver ici l'expression de mes sincères remerciements.*

*et pour finir, mes derniers mots de remerciements vont tout naturellement à mes chers parents pour leur soutien et leur confiance en moi.*

# Dédicaces

*Je dédie ce travail à ...*

*À mes très chers parents ; aucune dédicace ne saurait être assez éloquente pour exprimer ce que vous méritez pour tous les sacrifices que vous n'avez cessé de me donner depuis ma naissance, durant mon enfance et même à l'âge adulte.*

*À mon cher frère, et ma chère soeur.*

*À mes amis, Djaber, Sami, Sabrina, Mouna, Lilia,...*

*À mes oncles et tantes et tous mes cousins et cousines.*

*À tout ceux qui me sont chers.*

*À toute la promotion de 2<sup>ème</sup> et 1<sup>ère</sup> année PSA (2019/2020).*

*À toi ...*

*BEKKA Nadir.*

---

# Table des matières

---

<b>Table des figures</b>	<b>iv</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>iv</b>
<b>Introduction Générale</b>	<b>1</b>
<b>1 Généralités sur les files d'attente</b>	<b>4</b>
1.1 Rappels sur les chaînes de Markov . . . . .	5
1.1.1 Processus stochastique . . . . .	5
1.1.2 Processus de Markov . . . . .	5
1.1.3 Processus de naissance et de mort . . . . .	8
1.2 Systèmes de files d'attente classiques . . . . .	9
1.2.1 Description du modèle d'attente classique . . . . .	9
1.2.2 Notation de Kendall . . . . .	11
1.2.3 Analyse mathématique d'un système d'attente . . . . .	12
1.2.4 Type de modèles . . . . .	12
1.2.5 Mesures de performance d'une file d'attente . . . . .	13
1.3 Systèmes de files d'attente avec vacances . . . . .	14
1.3.1 Système de files d'attente avec vacance unique et vacances multiples . . . . .	15
1.3.2 Politiques de vacances . . . . .	16
1.3.3 Systèmes de file d'attente avec "working vacation" . . . . .	17
<b>2 Analyse d'incertitudes et de sensibilité dans les modèles stochastique</b>	<b>19</b>
2.1 Analyse de sensibilité globale . . . . .	20
2.1.1 Les indices de Sobol . . . . .	20
2.1.2 Estimation des indices de Sobol . . . . .	21
2.2 Incertitude paramétrique . . . . .	22
2.2.1 Description de l'incertitude paramétrique . . . . .	23
2.2.2 Sources d'incertitudes . . . . .	23

2.2.3	Quantification et propagation de l'incertitude . . . . .	24
2.3	Quantification de incertitudes dans un intervalle "P-Box" . . . . .	26
2.3.1	Les probabilités d'intervalle (P-Box) . . . . .	26
2.3.2	Propagation d'incertitude par "P-box" . . . . .	29
2.3.3	Estimation de la moyenne et la variance dans un (box) . . . . .	30
<b>3</b>	<b>Quantification de l'incertitude paramétrique dans le modèle d'attente M/M/1/N avec "working vacations"</b>	<b>31</b>
3.1	Description du modèle . . . . .	31
3.2	Analyse de sensibilité du modèle . . . . .	33
3.2.1	Indice de sensibilité de Sobol de premier ordre . . . . .	34
3.2.2	Sensibilité de la distribution stationnaire . . . . .	35
3.2.3	Sensibilité des mesures de performance . . . . .	37
3.3	Quantification de l'incertitude du modèle . . . . .	38
3.3.1	Simulation de la fonction de répartition dans un intervalle . . . . .	40
3.3.2	Simulation de la moyenne et la variance . . . . .	42
	<b>Conclusion générale</b>	<b>46</b>
	<b>A Annexes A</b>	<b>48</b>
A.1	Notions de théorie des probabilités . . . . .	48
	<b>B Annexes B</b>	<b>50</b>
B.1	Analyse de sensibilité du modèle (M/M/1/N-WV) . . . . .	50
B.1.1	Analyse de sensibilité via les indices de Sobol . . . . .	51
	<b>Bibliographie</b>	<b>53</b>

---

# Table des figures

---

1.1	Graphe de transition d'une chaîne de Markov. . . . .	7
1.2	Schéma de transition d'un processus de naissance et de mort. . . . .	9
1.3	Modèle de files d'attente à un serveur. . . . .	10
2.1	Les étapes d'une étude d'incertitudes. . . . .	25
2.2	P-box d'une variable gaussienne pour $\mu_x$ et $\sigma_x$ deux paramètres-intervale. . .	27
2.3	Limites d'une "p-box" paramétrique et d'autres réalisations pour des valeurs de paramètres spécifiques . . . . .	28
2.4	Approche Monte Carlo imbriquée - Propagation de probabilités imprécises par échantillonnage des paramètres $\theta$ (boucle externe) et les vecteurs d'entrée $x \sim F_X(x, \theta)$ (boucle interne). . . . .	29
3.1	Distribution stationnaire : Indices de Sobol associés aux paramètres du modèle ( $M/M/1/5 - WV$ ). . . . .	36
3.2	Nombre moyen de clients dans le système : Indices de Sobol associés aux paramètres du modèle ( $M/M/1/5 - WV$ ). . . . .	37
3.3	Durée moyenne de séjours dans le système : Indices de Sobol associés aux paramètres du modèle ( $M/M/1/5 - WV$ ). . . . .	38
3.4	Histogramme et graphe du paramètre incertain $\lambda$ . . . . .	40
3.5	Histogramme et graphe du paramètre incertain $\mu_b$ . . . . .	40
3.6	Les fonctions de répartitions estimées pour chaque composante de la distribution stationnaire dans un (P-Box). . . . .	42
3.7	Comparez les moyennes aléatoires de différentes composantes de la distribution stationnaire. . . . .	44
3.8	Comparez les variances aléatoires de différentes composantes de la distribution stationnaire. . . . .	44
A.1	Représentation graphique d'une loi normale. . . . .	49

---

# Liste des tableaux

---

3.1	Indices de Sobol associés aux paramètres du modèle ( $M/M/1/5 - WV$ ). . .	36
-----	--	----

---

# Introduction Générale

---

LA modélisation est un outil de la formulation simplifiée d'un "système réel" dans sa complexité, et qui permet de prévoir le comportement dans un intervalle de temps et d'échelle de grandeur. En simplifiant le système réel, le modèle fournira des résultats plus proches de la réalité, même si son analyse est un peu plus complexe à mener. Ainsi, la modélisation repose sur un compromis entre adéquation du modèle et du système, et facilité l'analyse du modèle ; cependant plus l'analyse du modèle est complexe et plus on a besoin d'information sur le système réel. En effet, l'informations est souvent déterminée par des estimations statistiques, tout en se basant sur des données réelles. Il en résulte que les mesures de performance qui en découlent peuvent être sujettes à une certaine variation due à l'incertitude.

Les modèles stochastiques décrits par les chaînes de Markov [5], que ce soit à temps continu ou à temps discret, facilitent l'analyse des performances des systèmes dynamiques dans de nombreux domaines pratiques, et elles sont particulièrement bien adaptées à l'étude de systèmes et réseaux de files d'attente qui joue un rôle très important dans la modélisation des problèmes de la vie réelle.

Ce domaine de recherche, né en 1917, lors des travaux de l'ingénieur Danois Erlang [29] sur la gestion des réseaux téléphoniques entre 1909 et 1920, étudie notamment les systèmes d'arrivée dans une file, les différentes priorités de chaque nouvel arrivant, ainsi que la modélisation statistique des temps d'exécution ultérieurement. Depuis les travaux de ce pionnier, les modèles de files d'attente sont reconnus largement comme outil puissant pour l'analyse et l'optimisation de performances des systèmes à flux discret.

Ces dernières années, il y a eu des contributions significatives aux files d'attente avec vacances [46, 50]. Ce genre de files d'attente sont de grande importance, parce qu'elles sont applicables dans l'analyse et la modélisation des systèmes informatiques, des réseaux de transmission, de la fabrication et des systèmes de production, systèmes de transport, etc. Dans les modèles de files d'attente classiques, les serveurs sont toujours disponibles. Cepen-

dant, dans plusieurs situations pratiques, les serveurs peuvent devenir indisponibles pendant une période. Cette période d'absence de serveur peut représenter les serveurs travaillant sur quelques travaux supplémentaires ou simplement faisant une pause.

Dans l'étude du modèle d'attente avec vacances, on suppose généralement que le serveur arrête le service au cours de la période de vacances. Cependant, il y a de nombreuses situations où le serveur ne restera pas complètement inactif au cours de la période de vacances plutôt qu'il rendra le service à la file d'attente avec un taux de service différent. C'est la politique des vacances : "working vacations" [41, 26], qu'on considérera dans ce mémoire.

Cette politique a une grande importance, plus que celle des vacances normales, car les clients qui arrivent dans cette période seront servis avec un taux faible de service et non pas à quitter la file sans être servie, donc il seront satisfaits.

Les files d'attente avec "working vacation" ont été largement utilisées pour modéliser de nombreux problèmes pratiques [41].

Lors de la modélisation des phénomènes réels par des modèles de file d'attente, les paramètres de ces derniers sont considérés comme des constantes. Cependant, la plupart de ces paramètres sont déterminés sous une certaine incertitude épistémique. Ce qui nous ramène, durant la résolution du problème posé, à déterminer les métriques de performances du modèle étudié avec incertitude, car les valeurs de ces performances dépendent des valeurs des paramètres d'entrée. Pour ce, plusieurs approches ont été développées pour l'analyse et la quantification de cette incertitude. La majorité d'elles consistent à remplacer les paramètres considérés par des variables aléatoires, tout en utilisant des techniques statistiques, où on néglige souvent l'incertitude paramétrique.

L'un des outils qui nous permet d'évaluer les métriques de performance et de maîtriser l'incertitude impliquée dans la résolution du problème posé est la méthode de Monte Carlo par des probabilités d'intervalles (P-Box), qui consiste à déterminer et évaluer la variabilité des sorties (résultats) d'un modèle à des perturbations sur les variables d'entrée.

L'objectif de notre travail est de faire une analyse de sensibilité pour la file d'attente ( $M/M/1/N$ ) avec "working vacation". En fait, Nous essayons de déterminer les paramètres les plus influents sur la variabilité de la distribution stationnaire et les caractéristiques du modèle à l'aide des indices de sensibilité globale tels que les indices de Sobol [43]. À fin de propager l'incertitude épistémique des paramètres d'entrée, nous proposons une approche numérique basée sur l'estimation de la fonction de répartition, l'espérance et la variance des composantes de la distribution stationnaire, avec des probabilités d'intervalle "P-box".

Ce mémoire se compose d'une introduction générale, trois chapitres, une conclusion générale, une bibliographie et deux annexes.

- ◇ Dans le premier chapitre, nous présentons les chaînes de Markov et les concepts de base des systèmes de file d'attente. Par la suite nous présenterons une synthèse bibliographique concernant les systèmes de files d'attente avec vacances. Une attention particulière sera portée aux systèmes de files d'attente avec "working vacation".
- ◇ Dans le deuxième chapitre, nous présentons au premier lieu, l'analyse de l'incertitude, où on va s'intéresser à une méthode de propagation de l'incertitude paramétrique qui est la méthode de Monte Carlo, en deuxième lieu, l'analyse de sensibilité globale en se centrant sur les indices de Sobol et sur leur estimation [43, 44]. Ensuite, nous discutons sur la quantification de l'incertitude et sur l'estimation de la moyenne et la variance par des probabilités d'intervalles (P-Box).
- ◇ Le dernier chapitre est consacré à la partie pratique de notre travail qui s'agit d'une application sur l'analyse de sensibilité de la distribution stationnaire et quelques caractéristiques du modèle  $(M/M/1/N)$  avec "working vacation" à l'aide de l'estimation des indices de Sobol, ainsi, la quantification de l'incertitude à l'aide de l'estimation de la fonction de répartition, l'espérance et la variance des composantes de la distribution stationnaire, avec des probabilités d'intervalle "P-box".

Le travail s'achève par une conclusion générale mettant l'accent sur des perspectives et des directions de recherches induites par les résultats obtenus dans ce travail. En annexes, nous présentons d'une manière assez détaillée toutes les procédures associées aux algorithmes que nous avons développés dans le cadre de l'analyse de sensibilité.

# Chapitre 1

---

## Généralités sur les files d'attente

---

La théorie des files d'attente, ou queues, et des réseaux de files d'attente sont des outils analytiques les plus puissants pour la modélisation de systèmes logistiques et de communication. En quelques mots, cette théorie a pour objet l'étude des systèmes où des entités, appelées clients, cherchant à accéder à des ressources, généralement limitées, afin d'obtenir un service. La demande concurrente d'une même ressource par plusieurs clients engendre des délais dans la réalisation des services et la formation de files de clients désirant accéder à une ressource indisponible. L'analyse théorique de tels systèmes permet d'établir à l'avance les performances de l'ensemble, d'identifier les éléments critiques ou, encore, d'appréhender les effets d'une modification des conditions de fonctionnement.

Dans ce chapitre, nous introduisons les concepts généraux et quelques résultats classiques concernant les systèmes de files d'attente. Nous accordons une attention particulière à la présentation des systèmes de files d'attente avec "working vacation". Puisque la modélisation des systèmes de files d'attente est basée sur les chaînes de Markov, nous présentons d'abord les concepts essentiels des chaînes de Markov discrètes à espace d'état fini.

## 1.1 Rappels sur les chaînes de Markov

L'analyse des chaînes de Markov est une étape préliminaire importante pour l'étude des systèmes de files d'attente. Les chaînes de Markov sont aujourd'hui de plus en plus utilisées comme modèles mathématiques de divers phénomènes réels.

Les chaînes de Markov sont des classes de processus aléatoires qui se caractérisent par la propriété que l'état présent du processus résume toute l'information utile pour connaître son évolution future.

### 1.1.1 Processus stochastique

Un processus stochastique permet de modéliser l'état d'un système évoluant de manière aléatoire dans le temps. L'observation du système au cours du temps peut se faire de manière continue ou discrète et son état au temps  $t$  est représenté par la variable aléatoire  $X_t$ .

**Définition 1.1.1.** [5] *Un processus stochastique est défini comme une famille de variables aléatoires  $\{X_t, t \in T\}$ , où chaque variable aléatoire  $X_t$  est indexé par un paramètre  $t \in T$  qui est généralement appelé le paramètre de temps si  $T \subseteq \mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ . L'ensemble de toutes les valeurs possibles de  $X_t$  (pour chaque  $t \in T$ ) est connu comme l'espace d'état  $E$  du processus stochastique.*

- Lorsque  $T \subseteq \mathbb{Z}$ , on parlera de processus à temps discret (suite stochastique) noté  $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ ,
- Lorsque  $T$  est un intervalle  $T \subseteq \mathbb{R}_+$ , on parlera de processus à temps continu.

### 1.1.2 Processus de Markov

**Définition 1.1.2.** [19] *Soit  $\{X(t), t \geq 0\}$  un processus stochastique à valeurs dans un espace d'état  $E$  fini ou dénombrable.*

*$\{X(t), t \geq 0\}$  est un processus de Markov si  $\forall s, t \in \mathbb{R}_*^+, \forall i, j, l_u \in E$*

$$\mathbb{P}\{X_{t+s} = j \mid X_t = i, X_u = l_u, u < t\} = \mathbb{P}\{X_{t+s} = j \mid X_t = i\}. \quad (1.1)$$

*En d'autres termes, un processus de Markov est un processus ayant la propriété suivante : La loi conditionnelle de la variable future  $X_{t+s}$  sachant l'état présent  $X_t$  et toute l'histoire du processus jusqu'au temps  $t$  ne dépend que du présent et indépendante du passé.*

On distingue deux types de chaîne de Markov :

### Chaîne de Markov à temps discret

Les chaînes de Markov sont une classe de processus stochastiques à temps discret dont la définition est assez élémentaire et qui permettent d'autre part une description mathématique de nombreux phénomènes aléatoires rencontrés dans la pratique.

**Définition 1.1.3.** *Une chaîne de Markov (C.M) à temps discret est un processus stochastique  $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$  satisfaisant les trois restrictions suivantes :*

- \* *Le processus est à temps discret.*
- \* *L'espace des états  $E$  est fini ou dénombrable.*
- \* *Le processus satisfait la propriété suivante :*  
pour tout  $n \geq 0$ , pour tout état  $i \in E$

$$\begin{aligned} p_{ij}(n) &= \mathbb{P}\{X_{n+1} = j \mid X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i\} \\ &= \mathbb{P}\{X_{n+1} = j \mid X_n = i\}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

pour tout  $i_0, \dots, i_{n-1}, i, j \in E$ .

On s'intéresse aux chaînes de Markov homogènes, c'est-à-dire pour lesquelles les probabilités  $p_{ij}$  sont indépendantes du temps  $n$  pour tout  $i, j \in E$  et on écrit

$$p_{ij} = \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i) \quad \forall i, j \in E,$$

$p_{ij}$  est la probabilité de transition de l'état  $i$  vers l'état  $j$ .

La probabilité de transition en  $n$  étapes est définie par la probabilité de passage d'état à un autre en  $n$  étapes.

soit  $p_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}(X_{n+k} = j \mid X_k = i) = \mathbb{P}(X_n = j \mid X_0 = i) \quad n \geq 1, k \geq 1$

**Définition 1.1.4.** [7] *La matrice (ou noyau) de transition  $P$  de la chaîne discrète  $(X_n)_{n \in E}$  est la matrice carrée éventuellement de dimension infinie si  $E$  est infini, constituée par les probabilités de transition en une étape noté  $P$ , est donnée par :*

$$P = [p_{ij}]_{i,j \in E},$$

$$P = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & \cdots & p_{0j} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & \cdots & p_{1j} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{i0} & p_{i1} & \cdots & p_{ij} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix},$$

avec

$$0 \leq p_{ij} \leq 1 \quad \forall i, j \in E, \quad (1.3)$$

$$\sum_{j \in E} p_{ij} = 1 \quad \forall i \in E. \quad (1.4)$$

Une matrice qui vérifie les équations (1.3) et (1.4) est appelée matrice stochastique, ou matrice des transitions.

### \* Graphe de transition

Le graphe de transition est formé de points représentant les états du processus correspondant aux transitions possibles, c'est-à-dire pour lesquelles les probabilités  $p_{ij}$  sont strictement positives.

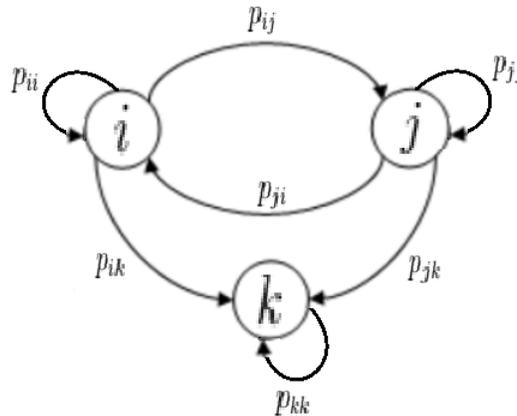


FIGURE 1.1 – Graphe de transition d'une chaîne de Markov.

**Théorème 1.1.1.** *On considère une chaîne de Markov sur l'espace d'états  $E$  de matrice de transition  $P$  d'espace d'états  $E$ . On a :*

$$P_{ij}^n = \sum_{k \in E} P_{ik}^{n-1} P_{kj}$$

### \* Loi de probabilité de $X_n$

Soit  $\pi_k(n)$  les probabilités d'états d'une chaîne de Markov  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  à l'espace d'états  $E$  :

$$\pi_k(n) = \mathbb{P}(X_n = k) \quad n = 0, 1, \dots, \quad \text{et } k = 1, 2, \dots$$

La distribution de  $X_n$  peut être écrite sous forme de vecteur ligne  $\pi(n) = (\pi_1(n), \pi_2(n), \dots)$  dont la somme des termes égale à 1 pour calculer  $\pi(n)$  il faut connaître soit la valeur prise par  $X_0$ , soit sa distribution initiale  $\pi(0)$ .

D'après le théorème des probabilités totales, on a :

$$\pi_k(n) = \sum_{i \in E} \pi_i(0) p_{ij}^{(n)} \quad \text{sous forme matricielle} \quad \pi(n) = \pi(0)P^n.$$

De façon analogue, on obtient

$$\pi(n+1) = \pi(n)P.$$

### \* Distribution stationnaire

Une distribution de probabilité discrete  $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots)$  est appelée stationnaire par rapport à une matrice stochastique  $P$  si :

$$\pi.P = \pi \text{ et } \sum_{i \in E} \pi_i = 1$$

Une distribution de probabilité stationnaire n'est donc pas affectée par une ou par plusieurs transitions d'une chaîne de Markov.

### Chaînes de Markov à temps continu

Par rapport aux chaînes de Markov à temps discret  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la différence se situe dans le fait que la chaîne peut changer d'état à n'importe quel moment de  $t \in [0, \infty[$  et non uniquement à des instants entiers.

**Définition 1.1.5.** [29] *Un processus stochastique  $\{X(t), t \geq 0\}$  à temps continu et à espace d'état  $E$  discret est une chaîne de Markov, si pour tout  $\tau$  et  $t$  et pour tout état  $i, j$  et  $x(u), 0 \leq u < \tau$  dans  $E$ ,*

$$\mathbb{P}\{X(t+\tau) = j \mid X(\tau) = i, X(u) = x(u), 0 \leq u < \tau\} = \mathbb{P}\{X(t+\tau) = j \mid X(\tau) = i\}. \quad (1.5)$$

### 1.1.3 Processus de naissance et de mort

Ces processus permettent de façon générale de décrire l'évolution temporelle de la taille d'une population d'un type donné. Dans le cas d'un système d'attente, on considère par exemple des populations comprenant tous les clients qui sont dans le système à l'instant  $t$ .

Les processus de naissance et de mort sont des processus stochastiques à temps continu et à espace d'états discrets  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Ils sont sans mémoire, et à partir d'un état donné

$n$ , seules les transitions vers l'un des états voisins  $(n + 1)$  et  $(n - 1)$  avec  $n \geq 1$  sont possibles. On parle alors de "naissances" et de "morts". Ces processus sont utilisés pour modéliser les systèmes d'attente et l'évolution de populations.

**Définition 1.1.6.** Soit un processus stochastique  $\{X(t), t \geq 0\}$  à états discrets  $n \in \mathbb{N}$ , et homogène dans le temps, c'est à dire :

$$\mathbb{P}(X(t + s) = j \mid X(s) = i) = p_{ij}(t), \text{ ne dépend pas de } s.$$

Le processus  $\{X(t), t \geq 0\}$  est un processus de naissance et de mort s'il satisfait les conditions suivantes :

$$\begin{cases} p_{i,i+1}(\Delta t) = \lambda_i \Delta t + o(\Delta t) & (i \geq 0); \\ p_{i,i-1}(\Delta t) = \mu_i \Delta t + o(\Delta t) & (i \geq 1); \\ p_{i,i}(\Delta t) = 1 - (\lambda_i + \mu_i) \Delta t + o(\Delta t) & (i \geq 0); \\ p_{i,j}(\Delta t) = +o(\Delta t) & |i - j| \geq 2. \end{cases}$$

Les coefficients positifs  $\lambda_i$  et  $\mu_i$  sont appelés taux de transition, plus particulièrement taux de naissance (ou de croissance) pour  $\lambda_i$  est taux de mort (ou de décroissance) pour  $\mu_i$ .

**\* Graphe de transition**

Le graphe de transition décrit en chaque état le flux entrant et le flux sortant ;

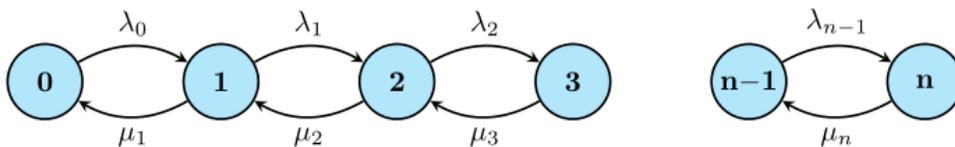


FIGURE 1.2 – Schéma de transition d'un processus de naissance et de mort.

## 1.2 Systèmes de files d'attente classiques

### 1.2.1 Description du modèle d'attente classique

Le modèle général d'un système de files d'attente peut être résumé comme suit, Les demandes de service (clients) arrivent à un certain endroit et réclament un certain service. Si un dispositif de service (serveur) est libre, le client qui arrive se dirige vers ce dernier où il sera servi. Dans le cas contraire, on a deux possibilités : soit le client quitte le système,

soit il prend une place dans une file d'attente. À un moment donné, le client est sélectionné pour le service selon une discipline donnée. Une représentation graphique est donnée par la *figure 1.3*. Un système de files d'attente comprend donc, un espace de service et un espace d'attente. Pour identifier un système de files d'attente, on doit spécifier :

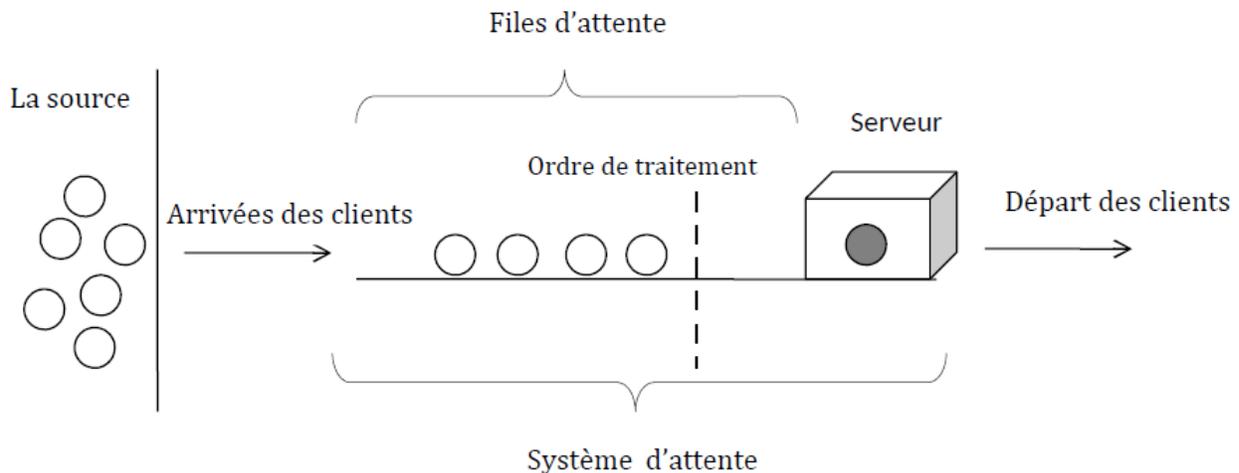


FIGURE 1.3 – Modèle de files d'attente à un serveur.

**1. Le processus des arrivées des clients :** Les arrivées des clients sont caractérisées par l'ensemble des instants d'arrivées de chaque client ou d'un groupe de clients dans le système. La collection de ces instants forment un processus des arrivées. Souvent, on suppose que les temps entre deux arrivées consécutives sont indépendants et identiquement distribués.

**2. La source des clients :** La population source, d'où proviennent les clients, peut être finie ou infinie, unique ou multiples.

**3. La capacité du système :** Elle représente le nombre maximal de clients dans le système. Un client arrivant et trouvant ce nombre de clients présents dans le système sera perdu.

**4. La durée de service :** Le temps de service d'un client est défini par le temps séparant le début et la fin de son service. En général, on suppose que les durées de service sont indépendantes et identiquement distribuées, et indépendantes des temps d'inter-arrivées.

**5. La discipline de service :** Elle spécifie la manière avec laquelle le serveur sélectionne le prochain client à servir. Cependant, plusieurs possibilités existent quant à l'ordre selon

lequel les clients seront servis. Les principales disciplines de service sont :

\* **FIFO** (First In First Out) : Cette discipline est la plus usuelle. Les clients quittent le système dans l'ordre suivant lequel ils sont entrés.

\* **LIFO** (Last In First Out) : Le dernier client dans la file est le premier à être servi.

\* **Random** : Tous les clients ont la même probabilité d'être servis en premier.

\* **Prioritaire** : Les clients sont servis suivant un attribut qui leur est associé.

**6. Le nombre de serveurs** : Il s'agit du nombre de serveurs composant l'espace de service. La plupart du temps, les serveurs sont considérés identiques et indépendants les uns des autres.

Puisque les instants d'arrivée et les durées de service sont généralement des quantités aléatoires, la modélisation décrivant le fonctionnement d'un système de files d'attente est un processus stochastique. Par ailleurs, on suppose généralement que toutes les variables aléatoires introduites pour décrire un système d'attente sont mutuellement indépendantes.

### 1.2.2 Notation de Kendall

Pour la classification, les systèmes d'attente on fait recours à une notation symbolique dite notation de Kendall, qui est utilisée pour décrire les six caractéristiques d'une file d'attente. Elle se présente sous la forme d'un symbole  $A/B/s/N/M/D$ , où chacune des lettres désigne une caractéristique de la file [45] :

La signification de chacun de ces symboles est :

- $A$  : nature du processus des arrivées ;
- $B$  : nature du processus de service ;
- $s$  : nombre de serveurs ;
- $N$  : capacité d'accueil de la file d'attente ;
- $M$  : taille de la population ;
- $D$  : discipline de la file.

Dans la description des processus d'arrivée et de service, les symboles les plus courants sont :

- $M$  : loi Exponentielle (memoryless) ;
- $G$  : loi Générale (quelconque) ;
- $D$  : loi constante (déterministe) ;
- $E_k$  : loi d'Erlang d'ordre  $k$  ;
- $H_k$  : loi hyperexponentielle d'ordre  $k$ .

La forme abrégé :  $A/B/s$  signifie que  $N$  et  $M$  sont infinies.

### 1.2.3 Analyse mathématique d'un système d'attente

L'étude mathématique d'un système d'attente se fait plus souvent par l'introduction d'un processus stochastique défini de façon appropriée. En premier lieu, on s'intéresse au nombre  $X(t)$  de clients se trouvant dans le système à l'instant  $t$ , ( $t \geq 0$ ).

En fonction des quantités qui définissent la structure du système, on cherche à calculer :

- Les probabilités d'état  $p_n(t) = P(X(t) = n)$  qui définissent le régime transitoire du processus stochastique  $\{X(t), t \geq 0\}$ , les fonctions  $p_n(t)$  dépendent de l'état initial ou de la distribution initiale du processus.
- Le régime stationnaire du processus stochastique est défini par :

$$\pi_n = \lim_{t \rightarrow +\infty} p_n(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} P(X(t) = n) \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$\{\pi_n\}_{n \geq 0}$  est appelée distribution stationnaire du processus  $\{X(t), t \geq 0\}$ .

Le calcul explicite du régime transitoire s'avère généralement pénible ; voire impossible, pour la plupart des modèles donnés. On se contente donc de déterminer le régime stationnaire.

### 1.2.4 Type de modèles

#### Modèles markoviens

Les systèmes markoviens sont des systèmes où les temps des inter-arrivées et les temps de services des clients sont des variables aléatoires indépendantes, exponentiellement distribuées. Leur notation de Kendall sera de la forme  $M/M/\dots$  ( $M$  comme markovien...). La propriété d'absence de mémoire de la loi exponentielle facilite l'étude de ces modèles.

#### Modèles non markoviens

L'étude des modèles non markoviens est cependant beaucoup plus difficile que celles des modèles markoviens. On est ainsi amené à considérer des systèmes de files d'attente,

non markoviens (modèles non markoviens), où la propriété de Markov du processus de base  $\{X(t), t \geq 0\}$  facilitant l'analyse des systèmes de files d'attente markoviens n'est plus valable, ce qui rend leur analyse très délicate, voire impossible. Grâce aux nombreuses méthodes analytiques, on se ramène à choisir un processus markovien particulier [1] :

1. **Méthode des étapes d'Erlang** : Son principe est d'approximer toute loi de probabilité ayant une transformée de Laplace rationnelle par une loi de Cox (mélange de lois exponentielles), cette dernière possède la propriété d'absence de mémoire par étapes ;
2. **Méthode de la chaîne de Markov induite** : Cette méthode, élaborée par Kendall, est souvent utilisée. Elle consiste à choisir une séquence d'instantanés  $1, 2, 3, \dots, n$  (déterministes ou aléatoires) telle que la chaîne induite  $\{X_n, n \geq 0\}$ , où  $X_n = X(n)$ , soit markovienne et homogène ;
3. **Méthode des variables auxiliaires** : Elle consiste à compléter l'information sur le processus  $\{X(t), t \geq 0\}$  de telle manière à lui donner le caractère markovien. Ainsi, on se ramène à l'étude du processus  $\{X(t), A(t_1), A(t_2), \dots, A(t_n)\}$ . Les variables  $A(t_k)$ ,  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$  sont dites auxiliaires ;
4. **Méthode des événements fictifs** : Le principe de cette méthode est d'introduire des événements fictifs qui permettent de donner une interprétation probabiliste aux transformées de Laplace et aux variables aléatoires décrivant le système étudié ;
5. **Simulation** : C'est un procédé d'imitation artificielle d'un processus réel donné sur ordinateur. Elle nous permet d'étudier les systèmes les plus complexes, de prévoir leurs comportements et de calculer leurs caractéristiques. Les résultats obtenus ne sont qu'approximatifs, mais peuvent être utilisés avec une bonne précision. Cette technique se base sur la génération de variables aléatoires suivant les lois gouvernant le système.

### 1.2.5 Mesures de performance d'une file d'attente

L'étude d'une file d'attente ou d'un réseau de files d'attente a pour but de calculer ou d'estimer les performances d'un système dans des conditions de fonctionnement données. Ce calcul se fait le plus souvent pour le régime stationnaire uniquement, et les mesures les plus fréquemment utilisées sont :

- $L$  : le nombre moyen de clients dans le système ;
- $L_q$  : le nombre moyen de clients dans la file d'attente ;
- $T$  : le temps de séjours dans le système ;
- $W$  : la durée moyenne de séjours dans le système ;
- $W_q$  : la durée moyenne d'attente d'un client ;

Ces valeurs ne sont pas indépendantes les unes des autres, mais sont liées par les relations suivantes (Formules de Little).

### Formules de Little

La formule de Little (démontrée par Little [25]) est une relation qui s'applique à une grande classe de systèmes, la seule condition d'application de la loi de Little est que le système soit stable.

**Théorème 1.2.1.** *La relation entre le nombre moyen de clients dans le système et le temps moyen de séjour d'un client dans le système est donnée par la formule :*

$$L = \lambda_e \cdot W,$$

où  $\lambda_e$  est le taux d'entrée des clients dans le système.

On trouve aussi une relation entre le nombre moyen de clients dans la file et le temps moyen d'attente d'un client :

$$L_q = \lambda_e \cdot W_q.$$

Où,  $\lambda_e$  est le taux d'entrée dans le système.

**Remarque 1.2.1.** Si la capacité du système est infinie on a :

$$\lambda_e = \lambda \text{ sinon on a } \lambda_e < \lambda.$$

D'autres relations

$$\begin{cases} L &= L_q + \frac{\lambda_e}{\mu} \\ W &= W_q + \frac{1}{\mu} \end{cases}$$

**Remarque 1.2.2.** Il est à noter que ces formules sont valables sous la vérification de la condition que le système est en régime stationnaire  $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$  ou  $\mu > \lambda$ . (capacité infinie et un seul serveur)

## 1.3 Systèmes de files d'attente avec vacances

Dans un modèle de file d'attente classique, les serveurs sont toujours disponibles. Toutefois, dans de nombreux systèmes d'application pratiques, les serveurs peuvent ne plus être disponibles pendant un certain temps pour diverses raisons. Cette période d'absence du serveur peut signifier que le serveur travaille sur certaines tâches supplémentaires, par exemple en cours de maintenance ou simplement une pause. Pour analyser ces systèmes, nous introduisons les vacances de service dans les modèles de files d'attente afin de représenter la

période d'absence temporaire du serveur. Le fait de laisser les serveurs prendre des vacances rend les modèles de file d'attente plus réalistes et plus flexibles lors de l'étude des systèmes de files d'attente.

Les systèmes de file d'attente avec des vacances sur serveur ont attiré l'attention de nombreux chercheurs depuis que l'idée a été discutée pour la première fois dans l'article de Levy et Yechiali [24].

Les systèmes de files d'attente avec vacances ont fait l'objet de nombreuses études au cours des trois dernières décennies et ont été appliquées avec succès dans les systèmes de fabrication, de production, les systèmes de service et les systèmes de communication. Pour des aperçus sur des modèles en attente avec des vacances du serveur voir, par exemple, Falin et Templeton [49]. Servi et Finn [15] ont introduit une classe spécifique de politique de vacances appelée vacances actives. En fait, pendant la période de vacances, les serveurs travaillent sur des tâches supplémentaires, cette période peut, par exemple, modéliser le cas d'une inspection et d'une réparation et de maintenance du serveur, ou des échecs de serveur interrompant le service client.

Pour plus de détails sur ce domaine de recherche actif, les lecteurs sont invités à se reporter à l'excellente étude sur les travaux antérieurs de modèles de vacances rapportés par Takagi [46, 47], Tian et Zhang [50], Doshi [10, 11] et Ke et Al. [23].

### 1.3.1 Système de files d'attente avec vacance unique et vacances multiples

Un système de files d'attente avec vacances est un système dans lequel un serveur peut devenir indisponible pendant une période aléatoire à partir d'un centre de service principal. Le temps passé loin du centre de service principal s'appelle des vacances et peut être le résultat de nombreux facteurs. Dans certains cas, les vacances peuvent résulter d'une panne du serveur, ce qui signifie que le système doit être réparé et remis en service.

Il peut également s'agir d'une action de libérer le serveur pour l'utiliser dans un centre de service secondaire lorsqu'il n'y a aucun client présent dans le centre de service principal.

Ainsi, les vacances de serveur sont utiles pour les systèmes dans lesquels le serveur souhaite utiliser son temps d'inactivité à différentes fins, ce qui permet d'appliquer le modèle de files d'attente à une variété de systèmes de service stochastiques du monde réel [31].

#### Système de files d'attente avec vacance unique

Vacances uniques : à la fin de chaque période de service, le serveur passe en vacances et revient immédiatement après la fin des vacances, même si le système est vide. Dans ce cas là

il devient inactif jusqu'à l'arrivée d'un client. Le client est servi dès son arrivée. Par exemple, la maintenance des machines dans un processus de production est considérée comme une vacance unique.

### Système de files d'attente avec vacances multiples

Vacances multiples : le serveur prend des vacances à chaque fois que le système devient vide. Si le serveur revient de vacances et trouve un système non vide, il démarre immédiatement le service et continue jusqu'à ce que le système devienne vide (service exhaustif). Si le serveur revient de vacances pour retrouver un système vide, il commence immédiatement une autre vacance et continue jusqu'à ce qu'il trouve un ou plusieurs clients à son retour.

Il existe différents types de systèmes de files d'attente avec vacances, selon la politique de service :

- \* La politique de service exhaustif, le serveur servira tous les clients en attente ainsi que ceux qui arrivent pendant qu'il sert encore. Il prend une autre vacance lorsque la file d'attente est vide.
- \* La politique de service bloqué, le serveur ne servira que les clients qu'il trouvera dans la file d'attente à son retour de vacances. À la fin de leur service, le serveur commencera une autre vacance et tous les clients qui arriveraient alors que le serveur servait déjà à la station seront servis au retour des vacances.
- \* La stratégie de service limité, le serveur ne servira qu'un nombre maximum prédéfini de clients, puis commencera par une autre vacance. Le programme de service de vacance unique dans lequel un seul client est servi est un type spécial de cette stratégie.

### 1.3.2 Politiques de vacances

Un modèle de files d'attente classique se compose de trois parties : le processus d'arrivée, le processus de service, et discipline de file d'attente (voir Gross et Harris [18]). Un modèle de files d'attente avec vacances a une partie supplémentaire : un processus de vacances gouverné par une politique de vacances. Une politique de vacances peut se caractériser par trois règles [32] :

#### Règle de démarrage de vacances

Cette règle détermine quand le serveur démarre ces vacances. Il y a deux types majeurs de service, à savoir, exhaustif et non-exhaustif. Avec un service exhaustif, le serveur ne peut

pas prendre des vacances jusqu'à ce que le système devienne vide. D'une part, le serveur dans un système de service non-exhaustif peut prendre des vacances, même lorsque le système n'est pas vide. Dans un système multiserveur, une règle semi-exhaustive de service peut être employée si certains des serveurs prennent des vacances.

### Règle d'arrêt de vacances

Cette règle détermine quand le serveur reprend le service. Deux politiques sont importantes : les vacances multiples et les vacances simples. La politique des vacances multiples exige au serveur de continuer ses vacances jusqu'à ce qu'il trouve au moins un client présent dans le système à l'instant d'accomplissement de vacances.

En revanche, dans le cadre d'une politique de vacances simples, le serveur prend seulement une vacance à la fin de chaque période d'activité. Après ces vacances simples, le serveur sert les clients qui sont en attente, si le système est vide, le serveur prend une autre vacance. Des règles plus générales, telles que la politique de seuil (également appelée la N-politique).

Dans les systèmes multiserveurs, en dehors des règles de démarrage et d'arrêt, il y a d'autres caractéristiques de la politique de vacances. Par exemple, tous les serveurs peuvent prendre des vacances ensemble (des vacances synchrones), ou les serveurs peuvent prendre des vacances individuellement et indépendamment (des vacances asynchrones).

### Distribution de la durée des vacances

On suppose souvent que les vacances de serveur sont (i.i.d) des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées avec une fonction de répartition générale  $V(x)$ . Cependant, quelques modèles de vacances exigent différents types de vacances et suivent différentes distributions.

### 1.3.3 Systèmes de file d'attente avec "working vacation"

Au cours des trois dernières décennies, les systèmes de files d'attente avec des vacances de serveur ont été bien étudiées en raison de leur large application dans de nombreux domaines. Dans les modèles avec diverses politiques de vacances, le serveur arrête complètement le service pendant les périodes de vacances, mais il peut prendre le travail d'assistant. Doshi [10] a présenté une méthodologie aperçu des modèles de vacances dans un cadre différent en donnant une vaste liste de références sur le sujet. Les détails peuvent être vus dans la monographie de Tian et Zhang [50].

Les "working vacations" (vacances-travail) sont une sorte de politique de semi-vacances et sont aussi de nouvelles politiques de vacances qui a été introduite par Servi et Finn [41] :

un client est servi à un taux inférieur plutôt que d'arrêter complètement le service pendant les vacances. Dans les modèles de file d'attente de vacances classiques, pendant la période de vacances, le serveur ne pas poursuivre le travail d'origine et une telle politique peut entraîner la perte ou l'insatisfaction des clients. Pour la politique de "working vacations", le serveur peut toujours travailler pendant les vacances et peut effectuer simultanément d'autres tâches d'assistant. Ainsi, les "working vacations" sont plus raisonnables que les vacances classiques dans certains cas. La période de vacances devient la période de fonctionnement à vitesse réduite du serveur de mise en file d'attente. Un exemple typique est souvent rencontré en cas de problème de maintenance ; la machine inactive peut être utilisée pour l'inspection et l'entretien préventif.

Servi et Finn [41] ont analysé une file d'attente  $M/M/1$  avec "working vacations", notée comme  $M/M/1/WV$ , et modélisé une optique de multiplexage par répartition en longueur d'onde accéder au réseau en utilisant plusieurs longueurs d'onde qui peuvent être reconfigurées. Xiu et Al. [52] ont étudié la file d'attente  $M/M/1$  avec des vacances uniques en utilisant la quasi-naissance et processus de mort et méthode matricielle, ils obtiennent la distribution du nombre de clients dans le système, le nombre moyen de clients et le temps de séjour moyen d'un client à l'état stationnaire. Liu et al. [26] ont obtenu les structures de décomposition stochastique et les caractéristiques de système dans la file d'attente  $M/M/1$  avec les "working vacations". Récemment, Banik et al. [4] ont étudié une file d'attente  $GI/M/1$  à capacité finie avec de multiples "working vacations". Ils ont développé des mesures de performance du système telles que probabilité de blocage et temps d'attente prévu dans le système. Baba [3] a étudié une file d'attente  $GI/M/1$  avec "working vacation" par la méthode d'analyse matricielle. De plus, Jain et Jain [22] ont développé un modèle de mise en file d'attente avec des "working vacations" et des pannes de serveur, qui nécessitent une séquence d'étapes de réparation avant que le service ne soit rétabli. Ils ont proposé une approche géométrique matricielle pour calculer la distribution stationnaire de la file d'attente.

## Chapitre 2

---

# Analyse d'incertitudes et de sensibilité dans les modèles stochastique

---

Un modèle mathématique est une représentation du phénomène étudié, dont la qualité dépend essentiellement de la connaissance de ce phénomène et des moyens dont on dispose pour construire le modèle. La connaissance étant souvent imparfaite (limitation de la compréhension du phénomène, du nombre de données et des expériences) et les moyens limités (scientifiques et numériques). D'ailleurs, à la majorité des modèles mathématiques sont associés différentes sources d'incertitudes.

Le contexte dans lequel nous nous intéressons à cette incertitude, est celui de l'analyse de sensibilité, qui consiste à déterminer, quantifier et analyser comment réagissent les sorties d'un modèle à des perturbations sur ses variables d'entrée avec des probabilités d'intervalle (P-Box). L'analyse de sensibilité informe sur la façon dont se répercutent les incertitudes d'entrée sur les variables de sortie. Comme ces informations sont utilisées pour prendre des décisions sur le phénomène étudié, il est important d'avoir à l'esprit que des incertitudes sont associées au modèle utilisé.

De nombreuses méthodes ont été déjà développées ces dernières années pour bien mener une analyse d'incertitudes et de sensibilité. Un vaste champ d'application de ces différentes techniques est présenté dans Saltelli et al [6], avec des exemples issus de divers domaines d'application (chimie, sûreté nucléaire, physique, économie, etc. . .).

## 2.1 Analyse de sensibilité globale

Considérons un modèle mathématique qui, à un ensemble de variables d'entrée aléatoires  $X$ , fait correspondre, via une fonction  $f$  déterministe, une variable de sortie  $Y$  (ou réponse) aléatoire [48] :

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R} \\ X &\mapsto Y = f(X). \end{aligned} \tag{2.1}$$

La fonction  $f$  du modèle peut être très complexe (solution d'un système d'équations différentielle, distribution stationnaire d'un système d'attente, etc...), et est en pratique évaluée à l'aide d'un code informatique, plus ou moins onéreux en temps de calcul. L'ensemble des variables d'entrée  $X = (X_1, \dots, X_p)$  regroupe toutes les entités considérées comme aléatoires dans le modèle.

L'analyse de sensibilité permet d'étudier l'influence des perturbations des variables d'entrée d'un modèle sur la ou les variables de sortie [6]. Il est possible de classer les méthodes d'analyse de sensibilité en deux groupes :

- les méthodes d'analyse de sensibilité locale [51], qui évaluent l'impact local des paramètres d'entrée sur les sorties du modèle ;
- les méthodes d'analyse de sensibilité globale qui s'intéressent à la contribution de chaque paramètre à la variance des sorties et qui permet d'étudier les interactions entre les paramètres d'entrée.

L'analyse de sensibilité globale étudie comment la variabilité des entrées se répercute sur celle de la sortie, en déterminant quelle part de variance de la sortie est due à telle entrée ou tel ensemble d'entrées. Si l'analyse de sensibilité locale s'intéresse plus à la valeur de la variable réponse, l'analyse de sensibilité globale s'intéresse, quant à elle, à sa variabilité. Dans ce document, seule l'analyse de sensibilité globale via les indices de Sobol [43] est présentée. Les autres méthodes sont présentées dans le livre de Saltelli et al. [40].

### 2.1.1 Les indices de Sobol

La mesure d'importance globale la plus répandue est une mesure basée sur les variances : en pratique, l'impact de la variation de chaque variable sur la variation de la sortie est calculé par un indice dit de sensibilité. Ces méthodes reposent sur le modèle (2.1) et se placent dans le cadre probabiliste défini précédemment, l'incertitude sur le vecteur des variables  $X$  étant alors modélisée par une loi de probabilité. Par exemple, pour une sortie  $Y$  et une variable  $X_i$ , l'indice de sensibilité  $S_i$  est défini comme suit :

**Définition 2.1.1.** [21] *L'indice de sensibilité exprimant la sensibilité de  $Y$  à  $X_i$  est défini par :*

$$S_i = \frac{V(E[Y/X_i])}{V(Y)}, \quad i = 1, \dots, p. \quad (2.2)$$

Les indices de sensibilité qui viennent d'être présentés peuvent parfois être calculés formellement, lorsque la forme analytique de la fonction  $f$  du modèle est connue et relativement simple. Nous avons émis l'hypothèse que cette fonction pouvait être très complexe et non connue analytiquement (c'est notre cas qu'on va présenter dans le chapitre 3 où la distribution stationnaire n'est pas connue analytiquement). Ne pouvant pas calculer ces indices de sensibilité, il est alors nécessaire de les estimer.

Plusieurs méthodes existent pour estimer les indices de sensibilité de Sobol. Nous présentons la méthode de Monte Carlo [44], qui est la plus simple à mettre en œuvre et la plus couramment utilisée en analyse de sensibilité.

## 2.1.2 Estimation des indices de Sobol

### Estimation de Monte Carlo

Dans beaucoup de problèmes scientifiques, on est amené à calculer une intégrale du type :

$$I = \int_D f(X) dX,$$

où  $D$  est un espace de plus ou moins grande dimension, et  $f$  une fonction (intégrable). Soit  $x_1, \dots, x_N$  la réalisation d'un  $N$ -échantillon d'une variable aléatoire uniforme sur  $D$ . Nous supposons cet échantillon pris de manière totalement aléatoire (échantillonnage aléatoire). Une approximation de  $I$  par la méthode de Monte Carlo est faite par :

$$I \approx \hat{I}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(X_i).$$

La convergence (presque sûre) de  $\hat{I}_N$  vers  $I$  découle directement de la loi forte des grands nombres. Cette méthode d'estimation permet alors d'estimer l'espérance de toute fonction d'une variable aléatoire de densité quelconque par

$$\hat{E}[f(X)] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i).$$

### Estimation des indices de sensibilité par Monte Carlo

Considérons un  $N$ -échantillon  $\hat{X}_{(N)} = (x_{k1}, \dots, x_{kp})_{k=1..N}$  de réalisations des variables d'entrée  $(X_1, \dots, X_p)$ .

Notons  $f_0$  et  $V$ , l'espérance et la variance de la variable de sortie  $Y$ . Ces deux là sont estimées par  $\hat{f}_0$  et  $\hat{V}$  à l'aide de la méthode de Monte Carlo :

$$\hat{f}_0 \approx \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(x_{k1}, \dots, x_{kp}). \quad (2.3)$$

$$\hat{V} \approx \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f^2(x_{k1}, \dots, x_{kp}) - \hat{f}_0^2. \quad (2.4)$$

L'estimation des indices de sensibilité nécessite l'estimation d'espérance de variance conditionnelle. Nous présentons une technique d'estimation due à Sobol [43].

L'estimation des indices de sensibilité de premier ordre (2.2) consiste à estimer la quantité :

$$V_i = V[E(Y|X_i)] = \underbrace{E[E(Y|X_i)^2]}_{U_i} - E[E(Y|X_i)]^2 = U_i - E(Y)^2. \quad (2.5)$$

La variance de  $Y$  étant estimée classiquement par (2.4). Sobol propose d'estimer la quantité  $U_i$ , c'est-à-dire l'espérance du carré de l'espérance de  $Y$  conditionnellement à  $X_i$ , comme une espérance classique, mais en tenant compte du conditionnement à  $X_i$  en faisant varier entre les deux appels à la fonction  $f$  toutes les variables sauf la variable  $X_i$ . Ceci nécessite deux échantillons de réalisations des variables d'entrée, que nous notons  $\hat{X}_{(N)}^{(1)}$  et  $\hat{X}_{(N)}^{(2)}$  :

$$\hat{U}_i = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(x_{k1}^{(1)}, \dots, x_{k(i-1)}^{(1)}, x_{ki}^{(1)}, x_{k(i+1)}^{(1)}, \dots, x_{kp}^{(1)}) \times f(x_{k1}^{(2)}, \dots, x_{k(i-1)}^{(2)}, x_{ki}^{(1)}, x_{k(i+1)}^{(2)}, \dots, x_{kp}^{(2)}).$$

Les indices de sensibilité de premier ordre sont alors estimés par :

$$\hat{S}_i = \frac{\hat{V}_i}{\hat{V}} = \frac{\hat{U}_i - \hat{f}_0^2}{\hat{V}}.$$

## 2.2 Incertitude paramétrique

Dans cette section, nous nous intéresserons donc à l'influence des facteurs de modèle (2.1) sur les sorties de ce modèle par propagation à travers la fonction  $f$  du modèle. Une analyse d'incertitude permet principalement de répondre à la question : quel est le niveau d'incertitude de la sortie  $Y$  du modèle induit par l'incertitude sur les entrées  $X_i$  ?

Les principales étapes d'une analyse d'incertitude sont identifier et caractériser les principales sources d'incertitude sur les entrées susceptibles d'affecter l'analyse, évaluer quantitativement leur impact sur la sortie des modèles en proposant une représentation de l'incertitude sur la sortie. Les analyses d'incertitude sont, de manière classique, mises en œuvre dans un cadre probabiliste particulièrement adapté pour apporter des réponses pertinentes aux questions posées.

### 2.2.1 Description de l'incertitude paramétrique

L'incertitude paramétrique est l'incertitude des valeurs observées ou mesurées [27]. Ces valeurs servent de paramètres entrants d'un modèle (les inputs). Leur incertitude se propage dans ce dernier et engendre de l'incertitude dans les résultats sortants (les outputs). Pour obtenir l'incertitude sur le résultat final, il ne s'agit que de propager l'incertitude des paramètres à l'aide d'une méthode mathématique [48].

### 2.2.2 Sources d'incertitudes

Selon Huijbregts [20] et Lloyd et Ries [27], les principales sources d'incertitudes des paramètres sont l'imprécision des mesures empiriques, leur mauvaise représentativité de la réalité et le manque de données.

L'incertitude sur les paramètres peut avoir deux origines. à savoir :

#### **Les incertitudes stochastiques (ou aléatoires)**

L'incertitude aléatoire peut être trouvée dans la littérature comme étant une incertitude irréductible, une variabilité et une incertitude inhérente. Cette incertitude est la variabilité naturelle intrinsèquement présente. Des exemples d'incertitude aléatoire apparaissent entre autres dans les conditions aux limites ou dans la description géométrique du modèle. La variabilité des conditions aux limites et des paramètres géométriques sera toujours présente en raison de la variabilité naturelle et de la précision limitée, par exemple, des processus de production.

#### **Les incertitudes épistémiques**

L'incertitude épistémique s'appelle également une incertitude réductible car, en augmentant les connaissances, l'incertitude peut être réduite. Pour ces incertitudes, qui contiennent une certaine imprécision, aucune fonction de densité de probabilité ne peut être spécifiée. Les exemples liés à ce type d'incertitudes sont des données expérimentales insuffisantes ou

des connaissances physiques insuffisantes du système analysé.

### 2.2.3 Quantification et propagation de l'incertitude

La démarche de quantification des incertitudes comprend quatre étapes qui sont résumées dans l'algorithme suivant [2] :

- **Étape 0** : Elle consiste à proposer un modèle mathématique du système physique étudié.
- **Étape 1** : Elle a pour objectif de modéliser les paramètres sujets à des variabilités (propriétés intrinsèques des matériaux, géométrie du modèle ou les champs sources) sous formes de variables ou champs aléatoires. Cette étape est cruciale pour une bonne analyse stochastique car elle requiert des essais expérimentaux et le jugement d'experts. Une modélisation insuffisamment représentative des paramètres aléatoires peut conduire à des conclusions erronées sur les réponses aléatoires du système réel. La mise en œuvre de méthodes probabilistes suppose que la loi conjointe de toutes les grandeurs d'entrée aléatoires est connue. Or, ce n'est souvent pas le cas en pratique du fait que les données expérimentales manquent ou sont inexistantes car très coûteuses à obtenir, voire même inaccessibles. De plus, dans la culture de l'ingénieur, les données d'entrée sont souvent supposées connues et il existe peu de modèles dans la littérature de lois de comportement probabilistes. Les analyses stochastiques des systèmes réels où les incertitudes sont identifiées à partir des mesures expérimentales sont rares. Dans le cas où suffisamment de mesures expérimentales sont disponibles, les méthodes les plus répandues dans la littérature pour modéliser les incertitudes sont la méthode de vraisemblance [9, 36], la méthode des noyaux [37, 39] ou les méthodes Bayésiennes [38].
- **Étape 2** : C'est l'étape de propagation des incertitudes de l'étape 1 à travers le modèle construit à l'étape 0. Elle peut nécessiter un effort plus au moins conséquent en implémentation informatique suivant la méthode de propagation retenue.
- **Étape 3** : Cette étape de post-traitement nous permet d'exploiter les résultats de l'étape 2. Elle permet en particulier d'obtenir les densités de probabilité des grandeurs locales et globales et de réaliser une étude de sensibilité. Cette dernière permet de classer les paramètres d'entrée aléatoires suivant leurs influences sur les solutions.

Ces étapes sont résumées dans la figure (2.1).

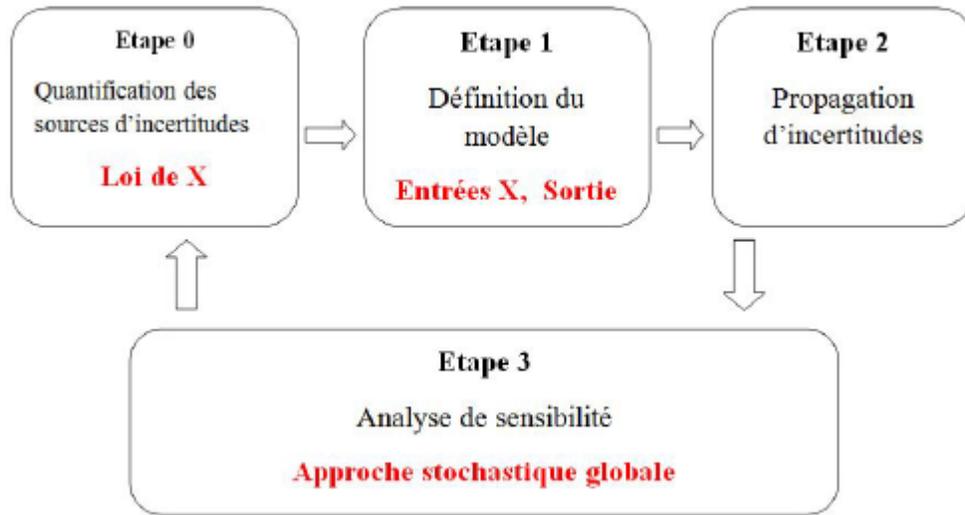


FIGURE 2.1 – Les étapes d’une étude d’incertitudes.

Une fois les différentes sources d’incertitude identifiées et caractérisées, elles doivent être propagées dans le modèle numérique, la propagation des incertitudes consiste à estimer l’incertitude sur la sortie qui est induite par les variables d’entrée incertaines lors de son évaluation par le modèle étudié. Si les paramètres incertains sont représentés par des variables aléatoires ou des champs stochastiques. Nous devons faire appel aux approches probabilistes, avec ces approches, les incertitudes liées aux entrées sont décrites par des distributions de probabilité. Il est important de choisir une approche pour modéliser cette incertitude. Pour cela, de nombreuses méthodes sont instorées dans ce sens, à savoir : l’ensembles flous, méthode des séries de Taylor [34, 35], l’arithmétique d’intervalles, ...etc. Dans le cadre de ce travail, nous nous intéressons à la simulation des paramètres d’entrés incertains par la méthode de Monte Carlo [28, 42].

## Méthodes d’échantillonnage Monte Carlo

L’une des méthodes les plus communément utilisées pour la propagation d’incertitudes est la méthode d’échantillonnage Monte Carlo (MC) ou l’une de ses variantes [17]. Pour un problème contenant  $p$  paramètres incertains  $(x_1, \dots, x_p)$ . L’idée fondamentale de cette méthode est résumée dans l’algorithme suivant :

- **Étape 1** : Affecter une densité de probabilité à chaque paramètre d’entré  $x_i$  ;  $i = 1, \dots, p$ .
- **Étape 2** : Générer un échantillon de taille  $N$  du vecteur  $x$  noté  $x^j$ ,  $j = \overline{1, N}$  et supposons que les paramètres sont indépendants.

- **Étape 3** : Déterminer d'une manière aléatoire une valeur à chaque paramètre selon leur densité de probabilité.
- **Étape 4** : Calculer les statistiques de la distribution de sortie : moyenne, variance,...

On répète la procédure un nombre considérable de fois afin d'obtenir un échantillon assez grand de valeurs sortantes pour estimer la distribution de probabilité du résultat.

Il est possible d'estimer l'espérance et la variance de la sortie  $Y$  en utilisant les expressions suivantes :

$$E(Y) \approx \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N f(x^j). \quad (2.6)$$

$$V(Y) \approx \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N [f(x^j) - E(Y)]^2. \quad (2.7)$$

L'avantage de la méthode de MC est dans sa simplicité à la mettre en œuvre. Son inconvénient réside dans le temps d'exécution, cela est dû à sa nécessité aux grands échantillons pour approximer précisément les statistiques (espérance, variance) du modèle étudié.

## 2.3 Quantification de incertitudes dans un intervalle "P-Box"

### 2.3.1 Les probabilités d'intervalle (P-Box)

**Définition 2.3.1.** *Une probabilité d'intervalle (ou p-box) est une caractérisation d'un nombre incertain composé à la fois d'incertitudes aléatoires et épistémiques qui est souvent utilisée dans l'analyse des risques ou la modélisation quantitative de l'incertitude (voir section 2.2) où des calculs numériques doivent être effectués. L'analyse des limites de probabilité est utilisée pour effectuer des calculs arithmétiques et logiques avec des "p-box".*

Considérons un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Soit  $\mathcal{P}$  une famille de mesures de probabilité sur un référentiel  $\Omega$  et soit  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une variable aléatoire réelle associée à la mesure de probabilité  $P$ . Pour tout ensemble mesurable  $A \subseteq \Omega$ , on peut définir :

$$\text{Sa probabilité haute} \quad \bar{P}(A) = \sup_{P \in \mathcal{P}} P(A).$$

$$\text{Sa probabilité basse} \quad \underline{P}(A) = \inf_{P \in \mathcal{P}} P(A).$$

En d'autres termes la valeur de la probabilité  $P(A)$  est imprécise :

$$\forall P \in \mathcal{P}, \underline{P}(A) \leq P(A) \leq \bar{P}(A).$$

La fonction de répartition ou probabilité cumulée (voir Annexe A) permet de définir entièrement une mesure de probabilité  $P$  sur  $\mathbb{R}$ . Un modèle naturel pour donner une approximation d'une mesure de probabilité mal connue, et de considérer une paire  $(\underline{F}, \overline{F})$  de fonctions de répartition haute et basse ( $\overline{F} \geq \underline{F}$ ) généralisant la notion d'intervalle. L'intervalle  $[\underline{F}, \overline{F}]$  est nommé p-box [14, 13] et représente la classe de mesures de probabilité dont les probabilités cumulées sont bornées par  $\underline{F}$  et  $\overline{F}$  telles que :

$$\underline{F}(x) \leq F(x) \leq \overline{F}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Les deux frontières  $(\underline{F}, \overline{F})$  forment un espace intermédiaire dans le graphique des fonctions de répartition qui ressemble à une boîte (voir figure 2.2), d'où le nom "P-Box".

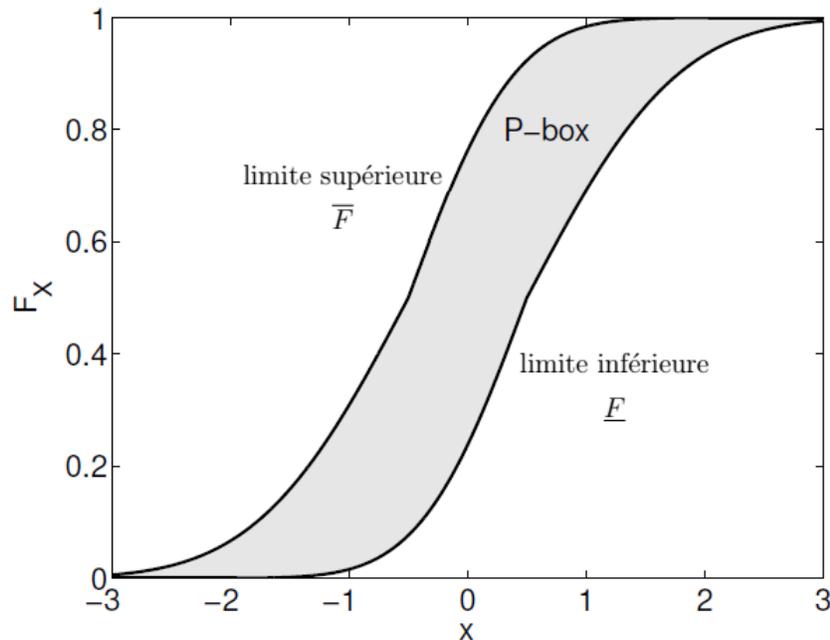


FIGURE 2.2 – P-box d'une variable gaussienne pour  $\mu_x$  et  $\sigma_x$  deux paramètres-intervale.

Une "p-box" est utilisée pour exprimer simultanément l'incertitude (incertitude épistémique), qui est représentée par la largeur entre les bords gauche et droit de la "p-box", et la variabilité (incertitude aléatoire), qui est représentée par l'inclinaison globale du p-boîte.

### P-box paramétriques

Dans la littérature, deux types de p-box sont identifiés, à savoir la "p-box" libre et la "p-box" paramétrique. Dans ce travail, nous nous concentrons sur les "p-box" paramétriques (également appelés "p-box" distributionnels).

Une "p-box" paramétrique nécessite des vrais connaissances sur la forme du fonction de répartition mais permet l'incertitude dans ses paramètres. La "p-box" est représentée par une famille de fonctions de distribution dont les paramètres  $\theta$  se situent dans un intervalle. Pour une seule variable  $X$  :

$$F_X(x) = F_X(x, \theta), \quad (2.8)$$

où  $\theta_i \in [\underline{\theta}_i, \bar{\theta}_i], i = 1, \dots, n_\theta$ . Cette construction ressemble à un modèle hiérarchique bayésien [16] dans laquelle la distribution des paramètres  $\theta$  est remplacé par un intervalle. Ce cadre permet pour une séparation claire entre l'incertitude aléatoire et épistémique : l'incertitude aléatoire est représentée par la famille des fonctions de distribution et l'incertitude épistémique est représenté par l'intervalle sur les paramètres  $\theta$ .

**Exemple 2.3.1.** La figure 2.3 illustre une "p-box" paramétrique générée par une variable aléatoire gaussienne de valeur moyenne et l'écart-type variant dans les intervalles  $\mu_X = [-0.5, 0.5]$  et  $\sigma_X = [0.7, 1.0]$ . Plusieurs réalisations du fonction de répartition sont représentés. Notez que dans le cas des "p-box" paramétriques en général, inférieur / supérieur les limites de la "p-box" sont composées de plusieurs réalisations de la "p-box".

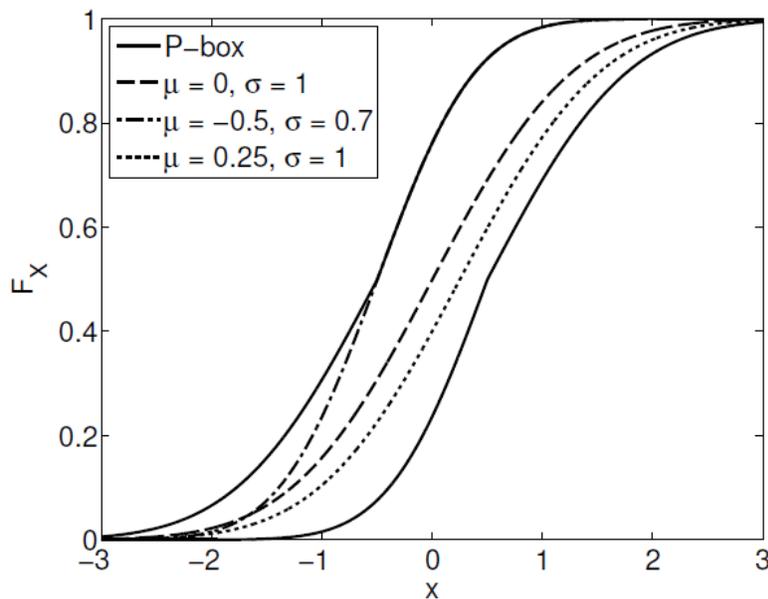


FIGURE 2.3 – Limites d'une "p-box" paramétrique et d'autres réalisations pour des valeurs de paramètres spécifiques .

### 2.3.2 Propagation d'incertitude par "P-box"

#### Propagation basée sur Monte-Carlo

La distinction de l'incertitude aléatoire et épistémique dans la formulation de la "p-box" paramétrique permet un pour les propager séparément. Un simple algorithme est l'algorithme de Monte Carlo imbriqué [12, 8] illustré à la figure 2.4. Dans la boucle extérieure, les paramètres du fonction de répartition sont échantillonnés, c'est-à-dire  $\theta^{(i)} \in \Theta_X$ . Dans la boucle interne, une simulation Monte Carlo est réalisée pour estimer la foction de répartition de la valeur de réponse  $Y$  pour une distribution d'entrée donnée  $F_X(x, \theta)$ . L'ensemble des fonctions de répartition résultant de différentes valeurs de  $\theta^{(i)}$  sont finalement combinés dans un "p-box". Les limites du "p-box" sont obtenus par :

$$\underline{F}_Y(y) = \min_i (F_Y(y, \theta^{(i)}), \quad \forall y \in \mathcal{D}_Y \quad (2.9)$$

$$\overline{F}_Y(y) = \max_i (F_Y(y, \theta^{(i)}), \quad \forall y \in \mathcal{D}_Y. \quad (2.10)$$

L'approche imbriquée de Monte Carlo nécessite un grand nombre d'évaluations de modèles pour prédire la "p-box" de la variable de sortie  $Y$ . Ainsi l'algorithme devient inefficace lorsque le coût de l'évaluation du modèle de calcul devient grand.

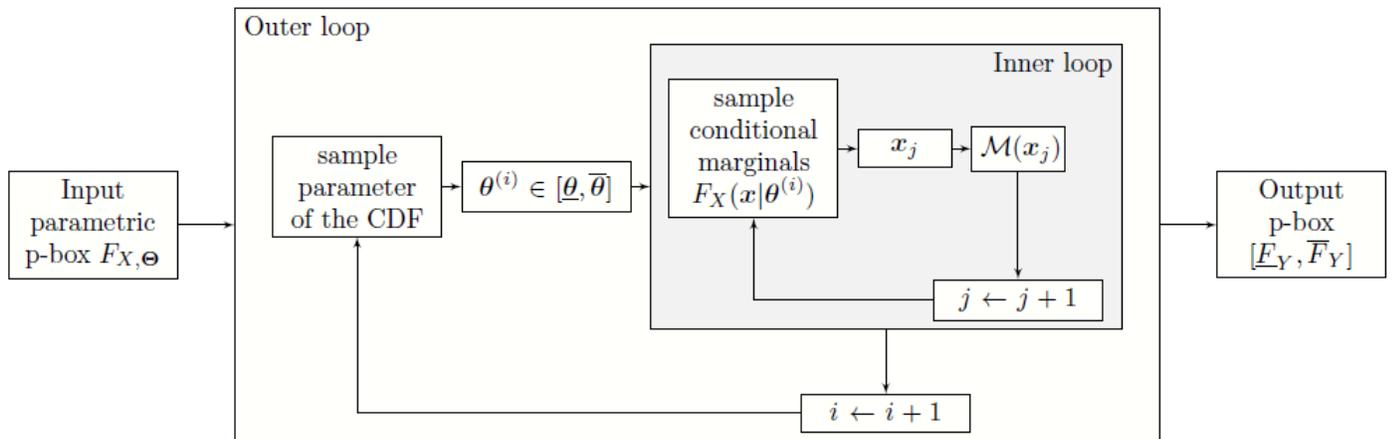


FIGURE 2.4 – Approche Monte Carlo imbriquée - Propagation de probabilités imprécises par échantillonnage des paramètres  $\theta$  (boucle externe) et les vecteurs d'entrée  $x \sim F_X(x, \theta)$  (boucle interne).

### 2.3.3 Estimation de la moyenne et la variance dans un (box)

On notera pour la suite  $\overline{X}_i$  la borne maximale d'un intervalle  $X_i$ , et par  $\underline{X}_i$  la borne minimale.

Dans le cadre des "p-box" paramétriques, l'estimation de la moyenne et la variance d'un pavé ou un vecteur d'intervalles, qui est défini comme étant un ensemble d'intervalles.

$$[X] = \begin{pmatrix} [\underline{X}_1; \overline{X}_1] \\ [\underline{X}_2; \overline{X}_2] \\ [\underline{X}_3; \overline{X}_3] \\ \vdots \\ [\underline{X}_n; \overline{X}_n] \end{pmatrix},$$

est données respectivement par

$$E([X]) = [E(\underline{X}_i); E(\overline{X}_i)], \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.11)$$

$$V([X]) = [V(\underline{X}_i); V(\overline{X}_i)], \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.12)$$

Où les bornes inférieures et les bornes supérieures estimées pour la moyenne et la variance de  $X$  sont données par :

$$E(\underline{X}_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \underline{X}_i,$$

$$E(\overline{X}_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \overline{X}_i,$$

$$V(\underline{X}_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\underline{X}_i - E(\underline{X}_i))^2,$$

$$V(\overline{X}_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\overline{X}_i - E(\overline{X}_i))^2.$$

## Chapitre 3

---

# Quantification de l'incertitude paramétrique dans le modèle d'attente $M/M/1/N$ avec "working vacations"

---

Dans ce chapitre, nous fournissons une analyse de sensibilité pour la file d'attente ( $M/M/1/N$ ) avec "working vacations". En fait, les paramètres de ce modèle ne sont pas connus exactement et sont sujets à des incertitudes car ils sont déterminés par des données statistiques insuffisantes (un nombre fini d'observations). L'incertitude paramétrique induite par les informations incomplètes concernant les paramètres du modèle est appelée incertitude épistémique [30]. Plus spécifiquement, nous nous intéressons principalement à l'effet de l'incertitude dans les paramètres du modèle sur la distribution stationnaire et les caractéristiques du modèle.

Nous essayons de déterminer les paramètres les plus influents à la variabilité de la distribution stationnaire et les caractéristiques du modèle à l'aide des indices de sensibilité globale tels que les indices de Sobol [43]. Nous estimons les indices de Sobol en utilisant la méthode de Monte Carlo [44]. A fin de propager l'incertitude épistémique du paramètre d'entrée, nous proposons une approche numérique basée sur l'estimation de la fonction de répartition, l'espérance et la variance des composantes de la distribution stationnaire, avec des probabilités d'intervalle "P-box".

### 3.1 Description du modèle

Considérons un système de file d'attente avec "working vacations" ( $M/M/1/N - WV$ ) à serveur unique avec une salle d'attente finie dans laquelle les clients arrivent au système suivant un flux de Poisson de paramètre  $\lambda$ . Supposons que les temps de service des clients

sont indépendants et identiquement distribués de manière exponentielle avec une moyenne de  $1/\mu$ . Le serveur commence des vacances d'une longueur aléatoire aux instants où la file d'attente devient vide (service exhaustif). Et la durée des vacances  $V$  suit une distribution exponentielle du paramètre  $\theta$ . Si des clients arrivent pendant la période des vacances, le serveur continue de fonctionner à un rythme inférieur. La période des vacances est une période de fonctionnement à une vitesse inférieure.

À chaque fin de service, s'il y a des clients dans le système pendant la période des vacances, le serveur reviendra au niveau de travail normal, c'est-à-dire une interruption de vacances. Sinon, une autre vacance commence. Cette politique de vacances est introduite par Zhang et Hou [53].

Pendant les périodes de vacances les clients sont servis à un taux moyen de  $\mu_v$ . Lorsque le serveur n'est pas en vacances, le taux de service est  $\mu_b$ . Il est supposé que les temps de service et les temps de vacances sont tous deux distribués de façon exponentielle, et  $\mu_b > \mu_v$ .

Nous supposons aussi que les temps inter-arrivées, les temps de service et les temps de vacances sont mutuellement indépendants. De plus, la discipline de service est du premier entré, premier sorti (FIFO).

D'après cette description, l'état du système à un instant arbitraire  $t$  peut être décrit par le processus stochastique à temps continu  $\{(X(t), J(t)), t \geq 0\}$  où :

- $X(t)$  : est le nombre de clients dans le système à l'instant  $t$ ,
- $J(t)$  : est l'état du serveur à l'instant  $t$ .

avec

$$J(t) = \begin{cases} 0, & \text{le système est en période de "working vacations" à l'instant } t, \\ 1, & \text{le système est dans une période d'occupation régulière à l'instant } t, \end{cases}$$

à valeurs dans l'espace d'état  $\Omega$  tel que :

$$\Omega = \{(0, 0) \cup (i, j), i = 1..N, j = 0, 1\}.$$

Notons que  $\{X(t); t \geq 0\}$  n'est pas markovienne car la distribution du temps de service n'a pas la propriété d'absence de mémoire. Considérons alors le processus  $\{L(t); t \geq 0\}$  aux instants de fin de service du  $n^{\text{ième}}$  client, et notons ces instants par  $t_n$ . Ainsi, le processus induit est à temps discret, noté  $\{L_n, n \in \mathbb{N}\}$ , qui est une chaîne de Markov induite de matrice de probabilités de transition définie par [33] :

$$P = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & p_{03} & \cdots & p_{0,N-1} & 1 - \sum_{k=0}^{N-1} p_{0k} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots & p_{1,N-1} & 1 - \sum_{k=0}^{N-1} p_{1k} \\ 0 & p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots & p_{2,N-1} & 1 - \sum_{k=0}^{N-1} p_{2k} \\ 0 & 0 & p_{32} & p_{33} & \cdots & p_{3,N-1} & 1 - \sum_{k=0}^{N-1} p_{3k} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & p_{N,N-1} & 1 - p_{N,N-1} \end{pmatrix},$$

où ses composantes sont données par :

$$p_{00} = \frac{\theta + \mu_v}{\lambda + \theta + \mu_v},$$

et pour  $1 \leq j \leq N - 1$

$$\begin{aligned} p_{0j} &= \left( \frac{\theta + \mu_v}{\lambda + \theta + \mu_v} \right) \left( \frac{\lambda}{\lambda + \theta + \mu_v} \right)^j, \\ &= p_{00} \left( \frac{\lambda}{\lambda + \theta + \mu_v} \right)^j, \end{aligned}$$

les valeurs de  $p_{ij}$  pour  $i > 0$  sont données par :

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{\lambda^{(j-i+1)} \mu_b}{(\lambda + \mu_b)^{(j-i+2)}}, & i - 1 \leq j \leq N - 1, \text{ et } 1 \leq i \leq N; \\ 1 - \sum_{k=i-1}^{N-1} p_{ik}, & j = N - 1, \text{ et } 1 \leq i \leq N; \\ 0, & j < N. \end{cases}$$

## 3.2 Analyse de sensibilité du modèle

L'analyse de sensibilité a pour objectif de quantifier la contribution à la sortie d'un modèle de certains paramètres d'entrée incertains et de leurs interactions. Comme le comportement de la sortie par rapport à l'entrée (par exemple, linéarité, monotonie, additivité) n'est généralement pas connue au préalable, une méthode est souhaitée qui ne fait aucune hypothèse à son sujet. L'analyse de sensibilité basée sur la variance est applicable à tous les modèles et peut être utilisée pour quantifier les variances totales de sortie qui est apportée par chaque

paramètres de modèle et leurs interactions. C'est utile pour la personnalisation du modèle, pour lequel il existe deux objectifs spécifiques : identifier les paramètres d'entrée qui ont peu ou pas d'effet sur la sortie de modèle seule ou par interaction (entrée fixation) et quantifier la réduction attendue de l'incertitude de sortie en cas d'incertitude les paramètres était connue exactement (priorisation de l'entrée). Sobol présente l'analyse de sensibilité globale, basée sur les indices de sensibilité qui peuvent être utilisés pour atteindre les deux objectifs.

Dans cette section, nous allons estimer les indices de Sobol en utilisant la technique de simulation de Monte Carlo [43]. Dans notre cas, nous allons approximer les indices de Sobol sur la distribution stationnaire d'un modèle de file d'attente avec "working vacations". Ainsi, les deux mesures de performance les plus fréquemment utilisées à savoir le nombre moyen de clients dans le système et la durée moyenne de séjours dans le système.

### 3.2.1 Indice de sensibilité de Sobol de premier ordre

Considérons la distribution stationnaire  $\pi$  en fonction de ses paramètres. En écriture  $\pi(\beta)$ , où  $\beta$  est un vecteur de paramètres de modèle. Soit :

$$\begin{aligned} \pi_l &: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R} \\ \beta &\mapsto \pi_l(\beta), \end{aligned} \quad (3.1)$$

où  $l = 0, 1, \dots, N$  et  $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) = (\lambda, \mu_v, \mu_b, \theta)$ . Supposons que les variables d'entrée ou les paramètres du modèle  $\beta_i, i = 1, \dots, 4$ , sont indépendants. L'indice de sensibilité exprimant la sensibilité de la distribution stationnaire  $\pi$  par rapport à chaque paramètre  $\beta_i$  est défini par :

$$S_i = \frac{\text{Var}(\mathbb{E}(\pi_l | \beta_i))}{\text{Var}(\pi_l)}. \quad (3.2)$$

Cet indice est appelé indice de sensibilité de premier ordre de Sobol [43]. Il quantifie la sensibilité de la distribution stationnaire  $\pi_l$  au paramètre  $\beta_i$ , ou la partie de la variance de  $\pi$  dû à la variable  $\beta_i$ .

**Remarque 3.2.1.** Les valeurs des indices de Sobol sont comprises entre zéro et un ( $0 \leq S_i \leq 1, i = 1, \dots, 4$ ). De plus, plus ces indices seront élevés, plus les paramètres associés seront considérables.

Afin d'estimer les indices de Sobol du premier ordre pour la file d'attente de type M/M/1/N avec "working vacations", on considère que les paramètres de ce modèle sont des variables aléatoires. Soit un n-échantillon de réalisations des variables d'entrée

$$\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) :$$

$$X_k = (\beta_{k1}, \beta_{k2}, \beta_{k3}, \beta_{k4})_{k=1, \dots, n}$$

Notons la moyenne de chaque composante de la distribution stationnaire  $\pi$  par  $\mathbb{E}(\pi_l) = \hat{\pi}_l$ , et sa variance par  $\mathbb{V}(\pi_l) = \hat{V}_l$ . Ces quantités d'intérêt peuvent être estimées comme suit :

$$\hat{\pi}_l = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \pi_l(\beta_{k1}, \beta_{k2}, \beta_{k3}, \beta_{k4}), \quad (3.3)$$

et

$$\hat{V}_l = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \pi_l^2(\beta_{k1}, \beta_{k2}, \beta_{k3}, \beta_{k4}) - \hat{\pi}_l^2. \quad (3.4)$$

Nous estimons aussi la variance par rapport à chaque paramètre  $\beta_i$ , notée  $V_i$  :

$$V_i = \mathbb{E}[\mathbb{E}(\pi_l/\beta_i)^2] - \mathbb{E}[\mathbb{E}(\pi_l/\beta_i)]^2 = U_i - \mathbb{E}(\pi_l)^2.$$

La quantité  $U_i$  peut être estimée par  $\hat{U}_i$  en tenant compte du conditionnement en  $\beta_i$ , en faisant varier entre les deux appels à la fonction  $\pi_l$  toutes les variables sauf la  $i^{\text{ème}}$  variable. Plus précisément, soient  $Y_n^{(1)}$  et  $Y_n^{(2)}$ , deux échantillons de variables aléatoires  $\beta_i$  :

$$\begin{aligned} \hat{U}_1 &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \pi_l(\beta_{k1}^{(1)}, \beta_{k2}^{(1)}, \beta_{k3}^{(1)}, \beta_{k4}^{(1)}) \times (\beta_{k1}^{(2)}, \beta_{k2}^{(2)}, \beta_{k3}^{(2)}, \beta_{k4}^{(2)}), \\ \hat{U}_2 &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \pi_l(\beta_{k1}^{(1)}, \beta_{k2}^{(1)}, \beta_{k3}^{(1)}, \beta_{k4}^{(1)}) \times (\beta_{k1}^{(2)}, \beta_{k2}^{(1)}, \beta_{k3}^{(2)}, \beta_{k4}^{(2)}), \\ \hat{U}_3 &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \pi_l(\beta_{k1}^{(1)}, \beta_{k2}^{(1)}, \beta_{k3}^{(1)}, \beta_{k4}^{(1)}) \times (\beta_{k1}^{(2)}, \beta_{k2}^{(2)}, \beta_{k3}^{(1)}, \beta_{k4}^{(2)}), \\ \hat{U}_4 &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \pi_l(\beta_{k1}^{(1)}, \beta_{k2}^{(1)}, \beta_{k3}^{(1)}, \beta_{k4}^{(1)}) \times (\beta_{k1}^{(2)}, \beta_{k2}^{(2)}, \beta_{k3}^{(2)}, \beta_{k4}^{(1)}). \end{aligned}$$

À l'aide de toutes ces estimations, on peut alors estimer les indices de Sobol de premier ordre :

$$\hat{S}_i = \frac{\hat{U}_i - \hat{\pi}_l^2}{\hat{V}}. \quad (3.5)$$

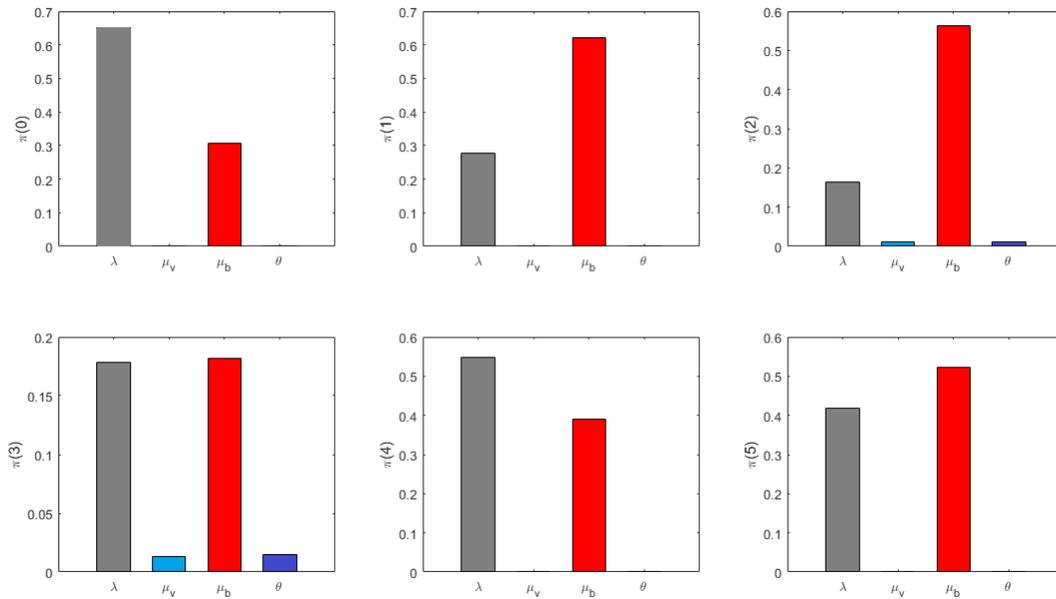
### 3.2.2 Sensibilité de la distribution stationnaire

**Exemple 3.2.1.** Supposons que les paramètres de modèle  $\lambda$ ,  $\mu_b$  et  $\theta$  sont uniformément répartis sur  $[1, 3]$ , et  $\mu_v$  sur  $]0, 1[$ . Nous fixons la capacité de la file à  $N = 5$  et estimons les valeurs des indices de sensibilité du premier ordre pour chaque composante de la distribution stationnaire en utilisant la formule donnée en (3.5). Les résultats numériques obtenus pour le modèle d'attente  $M/M/1/5$  avec "working vacations" (voir Annexe B) sont résumés dans le tableaux 3.1.

Paramètres	Indices de Sobol	$\pi(0)$	$\pi(1)$	$\pi(2)$	$\pi(3)$	$\pi(4)$	$\pi(5)$
$\lambda$	$\widehat{S}_1$	0.6504	0.2771	0.1651	0.1786	0.5491	0.4176
$\mu_v$	$\widehat{S}_2$	0.0028	0.0014	0.0109	0.0131	0.0005	0.0020
$\mu_b$	$\widehat{S}_3$	0.3067	0.6223	0.5636	0.1815	0.3890	0.5215
$\theta$	$\widehat{S}_4$	0.0003	0.0013	0.0112	0.0147	0.0004	0.0019

TABLE 3.1 – Indices de Sobol associés aux paramètres du modèle ( $M/M/1/5 - WV$ ).

Ces résultats sont illustré graphiquement par des histogrammes qui sont présentes dans la figure ci-dessous :

FIGURE 3.1 – Distribution stationnaire : Indices de Sobol associés aux paramètres du modèle ( $M/M/1/5 - WV$ ).

D'après les résultats obtenus dans la figure (3.1), il convient de noter que la plus grande valeur de l'indice de sensibilité est celles correspondant aux paramètres  $\lambda$  et  $\mu_b$  pour chaque composante de la distribution stationnaire, cela est suffisamment convenable pour dire que ces deux paramètres sont les plus influents sur le modèle étudié. Le reste des paramètres ( $\mu_v$  et  $\theta$ ) sont négligeables vu qu'ils n'ont pas une influence importante sur la distribution stationnaire, c'est la raison qui nous permet de les prendre comme déterministes (constant).

### 3.2.3 Sensibilité des mesures de performance

Dans cette partie, nous nous sommes intéressés à l'analyse de sensibilité des caractéristiques stationnaires du modèle d'attente  $M/M/1/N - (W, V)$  par rapport aux paramètres d'entrée qui sont incertains. Par conséquent, la distribution stationnaire du processus permet de calculer d'autres paramètres de performances du système telles que :

#### Nombre moyen de clients dans le système

Puisque nous sommes dans le cas des systèmes d'attente à capacité finie, Par définition, on a :

$$L = \sum_{n=0}^N n\pi_n, \quad (3.6)$$

Numériquement, nous allons calculer le nombre moyen de clients dans le système en utilisant la distribution stationnaire du processus (voir Annexe B), mais le fait que les paramètres d'entrée sont incertains, donc on est obligé de faire une analyse de sensibilité à fin de déterminer les paramètres qui contribuent le plus à la variabilité de la sortie, ainsi les paramètres les moins influents.

Les résultats numériques obtenus sont présentés dans la figure ci-dessous :

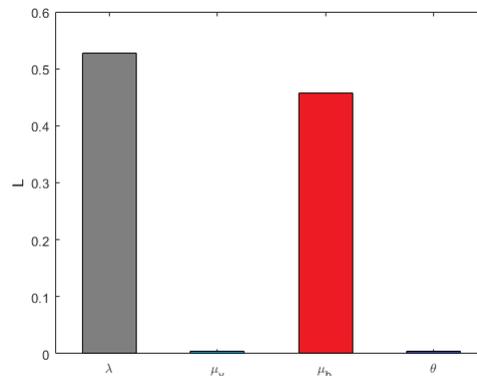


FIGURE 3.2 – Nombre moyen de clients dans le système : Indices de Sobol associés aux paramètres du modèle ( $M/M/1/5 - WV$ ).

D'après les résultats obtenus dans la figure(3.2), on peut constaté que les paramètres les plus influents sur le nombre moyen de clients dans le système sont celles correspondant aux paramètres  $\lambda$  et  $\mu_b$ . Les deux autres paramètres  $\mu_v$  et  $\theta$  sont les moins influents.

### Durée moyenne de séjours dans le système

En utilisant l'estimation du nombre moyen de clients dans un système d'attente  $L$  (voir (3.6)), on peut facilement déduire le temps moyen d'attente dans le système d'attente (à flux d'entrées markovien), et d'après les formules de Little on obtient :

$$W = \frac{L}{\lambda^*}, \quad (3.7)$$

où  $\lambda^*$  est le taux réel ( effectifs ) d'entrée dans le système, il est donné par :

$$\lambda^* = \lambda(1 - P_N);$$

les indices de sensibilité du premier ordre pour la durée moyenne de séjours dans le système (voir Annexe B), sont présentés par l'histogramme ci-dessous :

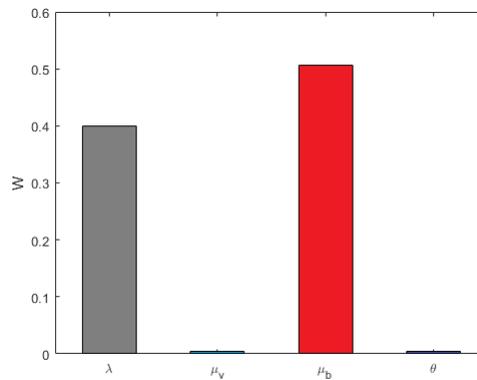


FIGURE 3.3 – Durée moyenne de séjours dans le système : Indices de Sobol associés aux paramètres du modèle ( $M/M/1/5 - WV$ ).

D'après les résultats obtenus dans la figure(3.3), on peut constaté que les paramètres les plus influents sur la durée moyenne de séjours dans le système sont celles correspondant aux paramètres  $\lambda$  et  $\mu_b$ . Les deux autres paramètres  $\mu_v$  et  $\theta$  sont les moins influents.

### 3.3 Quantification de l'incertitude du modèle

D'après l'analyse de sensibilité effectuée sur la distribution stationnaire et les caractéristiques stationnaires du modèle d'attente étudié, on constate que le modèle dépend de quatre paramètres. Deux d'entre eux sont contrôlables à savoir  $\mu_v$  et  $\theta$ . Par contre, les deux paramètres  $\lambda$  et  $\mu_b$  sont les plus influents sur le modèle étudié.

Par la suite, nous désirons étudier dans cette section l'évaluation numérique sous incertitude paramétrique de la distribution stationnaire dans la file d'attente ( $M/M/1/5 - WV$ ), qui

consiste à estimer la fonction de répartition, l'espérance et la variance des composantes de la distribution stationnaire, dans un contexte plus large tout en utilisant le P-box (probability-boxe).

Pour présenter cette incertitude dans ces paramètres, nous introduisons les deux nouveaux modèles associés aux paramètres incertains  $\lambda$  et  $\mu_b$ , définis comme suit :

$$\lambda = \bar{\lambda} + \sigma_\lambda \varepsilon_\lambda, \quad \varepsilon_\lambda \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1); \quad (3.8)$$

$$\mu_b = \bar{\mu}_b + \sigma_{\mu_b} \varepsilon_{\mu_b}, \quad \varepsilon_{\mu_b} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1), \quad (3.9)$$

avec

$$\lambda \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mathcal{U}[\underline{\mu}_\lambda, \bar{\mu}_\lambda], \mathcal{U}[\underline{\sigma}_\lambda, \bar{\sigma}_\lambda]); \quad (3.10)$$

et

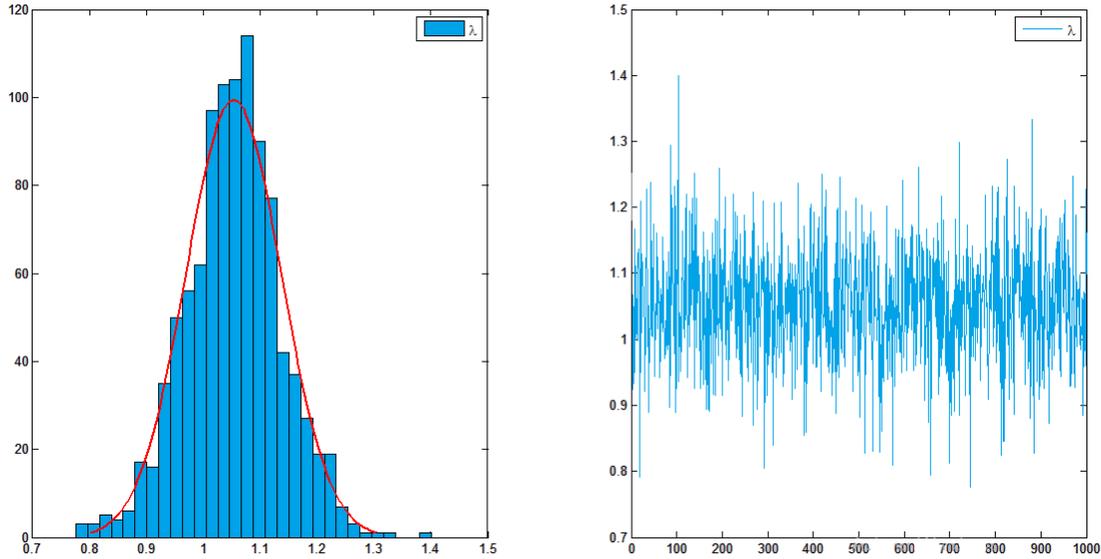
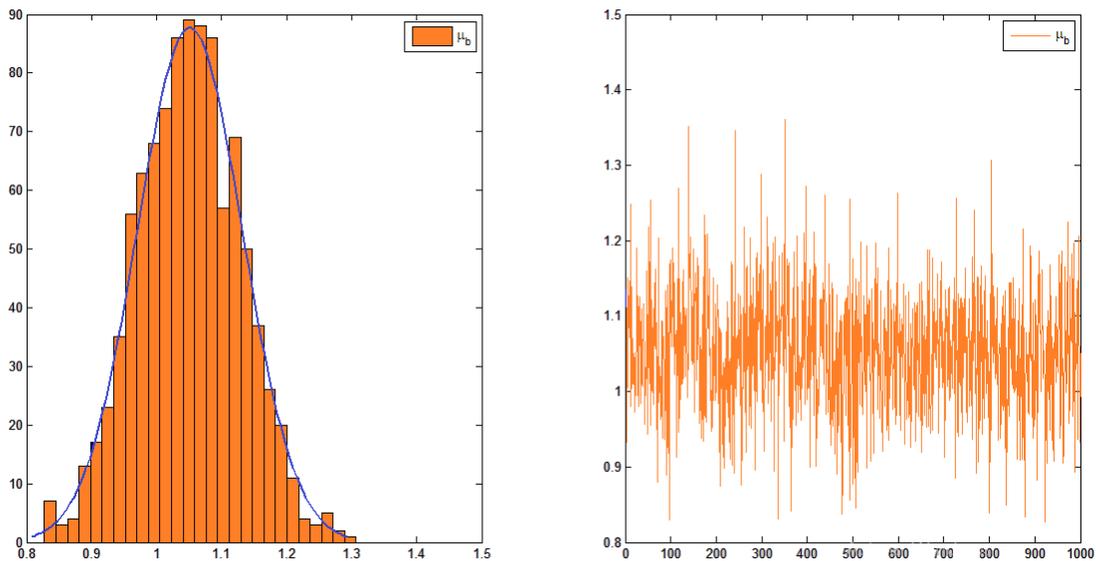
$$\mu_b \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mathcal{U}[\underline{\mu}_{\mu_b}, \bar{\mu}_{\mu_b}], \mathcal{U}[\underline{\sigma}_{\mu_b}, \bar{\sigma}_{\mu_b}]), \quad (3.11)$$

où

- \*  $\bar{\lambda}$  et  $\sigma_\lambda$  représentent respectivement la moyenne et l'écart-type de paramètre incertain  $\lambda$ ;
- \*  $\bar{\mu}_b$  et  $\sigma_{\mu_b}$  représentent respectivement la moyenne et l'écart-type de paramètre incertain  $\mu_b$ ;
- \*  $\varepsilon_\lambda$  et  $\varepsilon_{\mu_b}$  représentent le bruit blanc associés respectivement aux paramètres incertains  $\lambda$  et  $\mu_b$ , de loi normale centrée et réduite.

Dans la suite, nous allons fixer quelques paramètres :  $\underline{\mu}_\lambda = 1$ ,  $\bar{\mu}_\lambda = 1.2$ ,  $\underline{\sigma}_\lambda = 0.05$ ,  $\bar{\sigma}_\lambda = 0.1$ ,  $\underline{\mu}_{\mu_b} = 2$ ,  $\bar{\mu}_{\mu_b} = 2.2$ ,  $\underline{\sigma}_{\mu_b} = 0.05$ ,  $\bar{\sigma}_{\mu_b} = 0.1$ ,  $\mu_v = 1.5$ ,  $\theta = 3$ , et posons la taille de l'échantillon  $n = 1000$ .

La simulation d'un échantillon de taille  $n$  correspondant aux modèles introduit dans (3.8) et (3.9), nous a permis d'obtenir Les figures 3.4 et 3.5 qui représentent des histogrammes et des tracés pour les deux nouveaux modèles (3.8) et (3.9) attribués aux paramètres  $\lambda$  et  $\mu_b$  respectivement.

FIGURE 3.4 – Histogramme et graphe du paramètre incertain  $\lambda$ .FIGURE 3.5 – Histogramme et graphe du paramètre incertain  $\mu_b$ .

### 3.3.1 Simulation de la fonction de répartition dans un intervalle

Dans l'optique d'effectuer une analyse de la propagation de l'incertitude épistémique des paramètres incertains, à travers le calcul de la distribution stationnaire dans le système d'attente  $M/M/1/N$  avec "working vacation", nous envisageons d'appliquer l'approche numérique basée sur l'estimation de la fonction de répartition dans un intervalle (P-Box), pour chaque composante de la distribution stationnaire, et de valider les résultats numériques

par la technique graphique.

### Algorithme de la simulation

Les étapes de la simulation sont toujours les mêmes, mais on les refait  $n$  fois puisque nos paramètres d'entrée sont générés  $n$  fois suivants une loi normale.

---

#### Algorithm 1 Simulation de l'incertitude par un p-box

---

##### Début

**Entrer** :  $\underline{\mu}_\lambda, \bar{\mu}_\lambda, \underline{\sigma}_\lambda, \bar{\sigma}_\lambda, \underline{\mu}_{\mu_b}, \bar{\mu}_{\mu_b}, \underline{\sigma}_{\mu_b}, \bar{\sigma}_{\mu_b}, \mu_v, \theta, n, N$ ;

**Pour**  $k = 1 : N + 1$  faire

**Pour**  $i = 1 : n$  faire

1. Générer  $\bar{\lambda}(i) \rightsquigarrow \mathcal{U}[\underline{\mu}_\lambda, \bar{\mu}_\lambda]$ ;
2. Générer  $\bar{\mu}_b(i) \rightsquigarrow \mathcal{U}[\underline{\mu}_{\mu_b}, \bar{\mu}_{\mu_b}]$ ;
3. Générer  $\sigma_\lambda(i) \rightsquigarrow \mathcal{U}[\underline{\sigma}_\lambda, \bar{\sigma}_\lambda]$ ;
4. Générer  $\sigma_{\mu_b}(i) \rightsquigarrow \mathcal{U}[\underline{\sigma}_{\mu_b}, \bar{\sigma}_{\mu_b}]$ ;
5. Calculer  $\lambda = \bar{\lambda}(i) + \sigma_\lambda(i) * \varepsilon_\lambda$ ;      % avec  $\varepsilon_\lambda \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)_n$ ;
6. Calculer  $\mu_b = \bar{\mu}_b(i) + \sigma_{\mu_b}(i) * \varepsilon_{\mu_b}$ ;      % avec  $\varepsilon_{\mu_b} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)_n$ ;

**Pour**  $j = 1 : n$  faire

1. Calculer la distribution stationnaire  $\pi(k)$  pour chaque réalisation de vecteur  $(\lambda(j), \mu_v, \mu_b(j), \theta, N)$ ;

**Fin pour** ;

1. Estimer la densité de probabilité pour chaque composante de la distribution stationnaire ;  
% à l'aide de la fonction prédéfinie de Matlab "ksdensity" ;
2. Estimer la fonction de répartition pour chaque densité de probabilité ;  
% à l'aide de la méthode des trapèzes ;  
% on approche  $\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)dx$  par  $(a_{i+1} - a_i) \frac{f(a_i) + f(a_{i+1})}{2}$ ;
3. Tracer les courbes des fonctions de répartition;

**Fin pour** ;

**Fin pour** ;

**Sortie** : les graphes des fonctions de répartition.

**Fin.**

---

Les p-boxs des fonctions de répartition associés à chaque composante de la distribution stationnaire de notre modèle pour un échantillon  $n = 300$  sont représentés dans la figure (3.6).

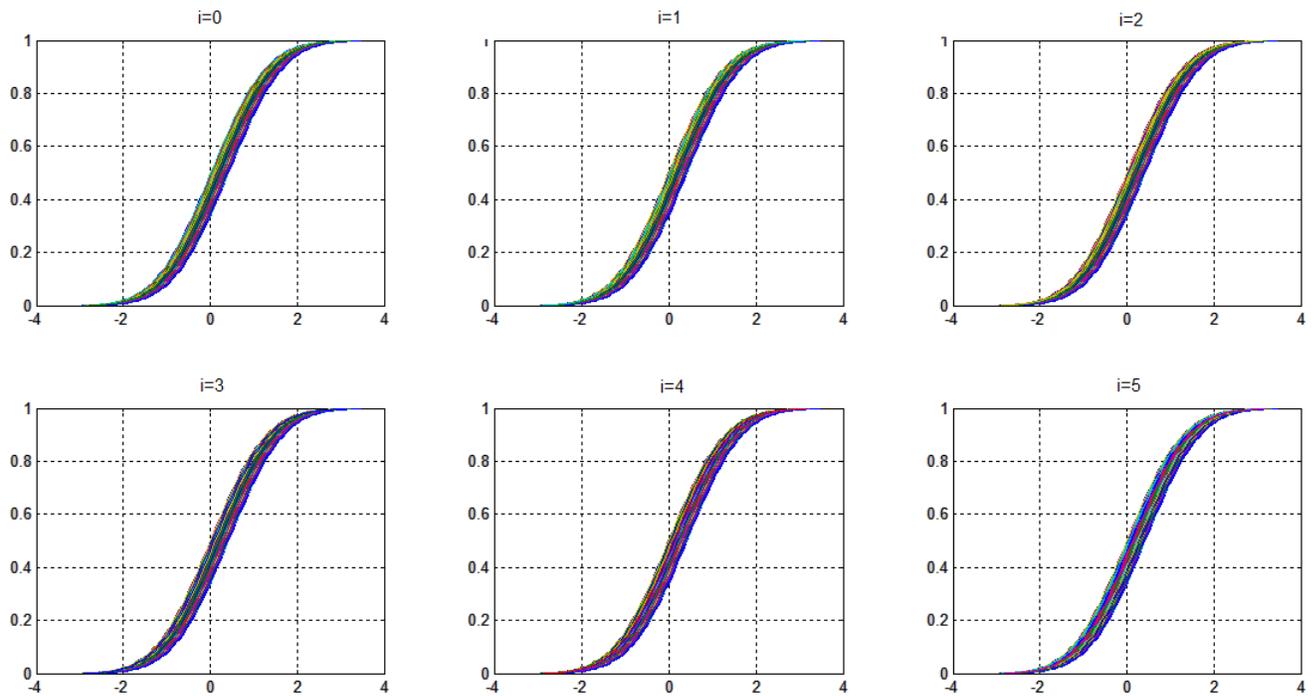


FIGURE 3.6 – Les fonctions de répartition estimées pour chaque composante de la distribution stationnaire dans un (P-Box).

Ce type de p-boxe nous permet d'avoir une idée sur la forme de la fonction de répartition mais garde l'incertitude dans ses paramètres. Plus la surface du p-boxe est plus petite plus qu'on est proche de l'exacte.

### 3.3.2 Simulation de la moyenne et la variance

En outre, nous allons simuler la moyenne et la variance de chaque composante de la distribution stationnaire du modèle ( $M/M/1/5 - WV$ ), qui sont calculées en fonction des deux variables aléatoire  $\lambda$  et  $\mu_b$ , tout en utilisant le principe de la simulation Monte-Carlo. Les principales étapes de la simulation sont résumées dans l'algorithme suivant :

---

**Algorithm 2** Simulation de la moyenne et la variance par des boites à moustache
 

---

**Début****Entrer** :  $\underline{\mu}_\lambda, \bar{\mu}_\lambda, \underline{\sigma}_\lambda, \bar{\sigma}_\lambda, \underline{\mu}_{\mu_b}, \bar{\mu}_{\mu_b}, \underline{\sigma}_{\mu_b}, \bar{\sigma}_{\mu_b}, \mu_v, \theta, n, N$ ;**Pour**  $i = 1 : n$  faire

- ◇ Générer  $\lambda$  et  $\mu_b$ ;      % (Voir Algorithme 1) ;

- Pour**  $j = 1 : n$  faire

- ◇ Calculer la distribution stationnaire  $\pi(i, \cdot)$  pour chaque réalisation de vecteur  $(\lambda(j), \mu_v, \mu_b(j), \theta, N)$ ;

- Fin pour** ;

- ◇ Calculer la moyenne et la variance de chaque composante de la distribution stationnaire, pour chaque  $i$  fixé;

- ◇ Représentation graphique par des boites à moustache ;

**Fin pour** ;**Sortie** : les boites à moustache.**Fin.**


---

Les boites à moustache des moyennes et variances de chaque composante de la distribution stationnaire associées à notre modèle pour un échantillon  $n = 300$  est représentées respectivement dans les figures (3.7) et (3.8).

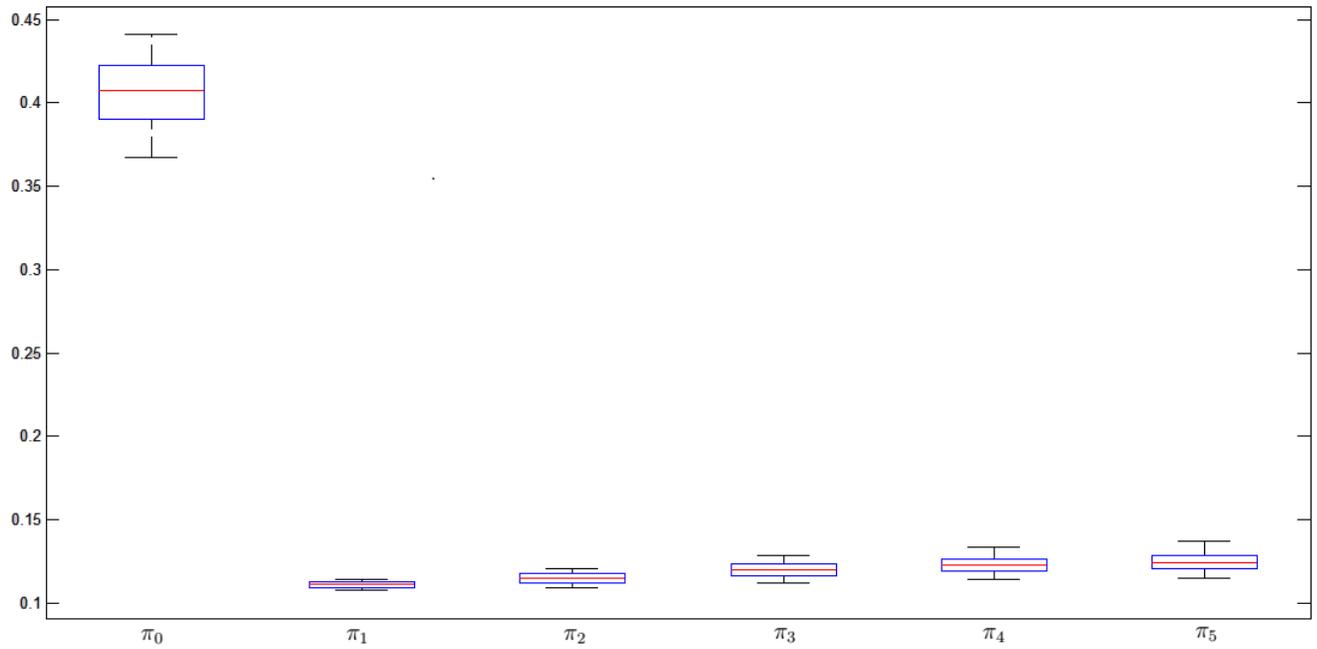


FIGURE 3.7 – Comparez les moyennes aléatoires de différentes composantes de la distribution stationnaire.

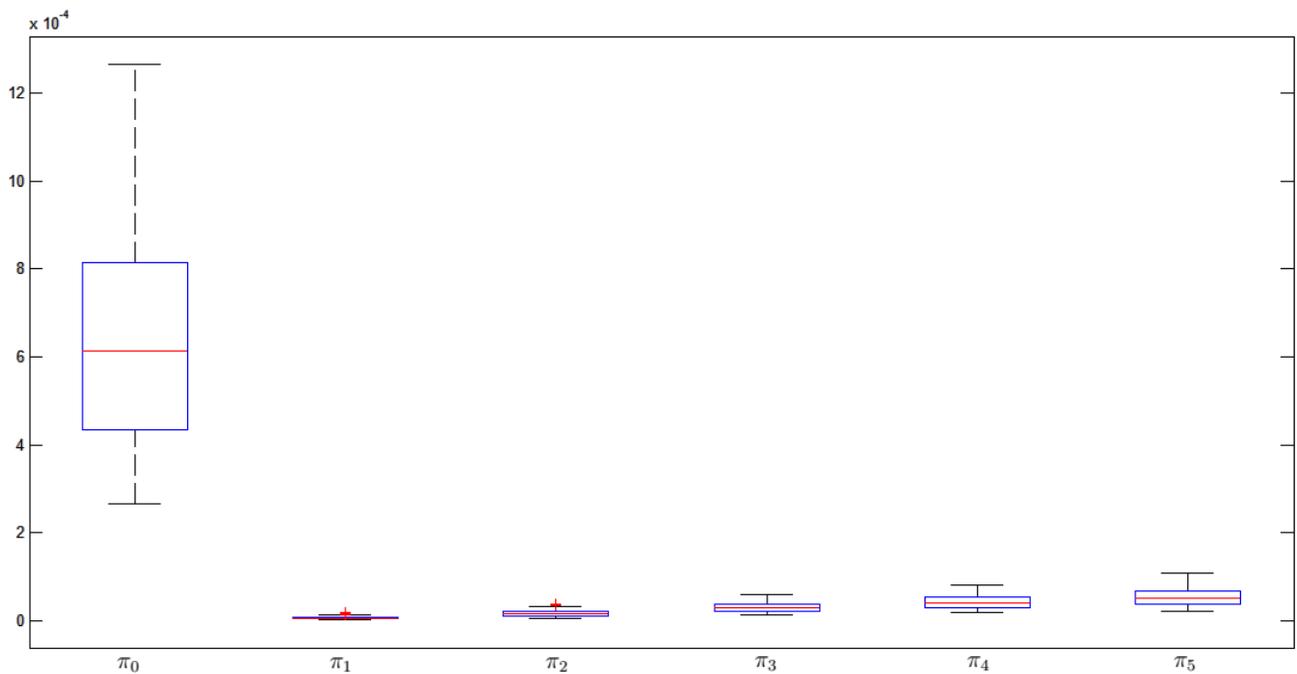


FIGURE 3.8 – Comparez les variances aléatoires de différentes composantes de la distribution stationnaire.

D'après les résultats obtenus précédemment, nous remarquons qu'une perturbation maximale de 10% de chaque paramètre entraîne une variance maximale de  $12 \times 10^{-04}$  de la distribution stationnaire, ce qui nous prouve la robustesse du modèle analysé, par rapport à l'incertitude infligée dans les paramètres influents. Spécifiquement, on remarque qu'une incertitude considérable lorsque le système est vide, par contre une légère incertitude est observée lorsque le système est occupé.

---

## Conclusion générale

---

L'INCERTITUDE est présente dans tous les domaines, en sciences appliquées, lorsqu'il s'agit de prédire des événements futurs grâce à des modèles, d'autres sources d'incertitude s'ajoutent et cette dernière devient difficilement quantifiable. Connaître le degré de précision d'un modèle n'en demeure pas moins essentiel. L'incertitude est un concept très vaste. Peu d'auteurs prennent le temps de la définir. Pour certains, l'incertitude est l'incapacité à connaître le vrai état d'un système. Quant aux autres, l'interprètent comme l'incomplétude de la connaissance en général due à des difficultés intrinsèques à acquérir de la connaissance. Les deux visions sont compatibles puisque l'incapacité à déterminer un état mène nécessairement à une connaissance incomplète.

Plusieurs sources et types d'incertitudes sont traitées dans la revue de littérature. Deux grands types se démarquent : l'incertitude paramétrique et l'incertitude de modélisation. La première est l'incertitude des paramètres entrants d'un modèle souvent exprimée à l'aide d'une distribution statistique ou d'un intervalle de confiance. Il est facile d'évaluer l'incertitude qu'elle génère sur les extrants du modèle en la propageant de façon analytique ou statistique. En revanche, le deuxième type est beaucoup plus difficile à quantifier. Il s'agit de l'erreur introduite par la façon dont le modèle est fait. Les présents travaux portent donc sur l'incertitude paramétrique puisque, bien que l'incertitude de modélisation peut être très importante, cette dernière ne peut pas être propagée par définition comme celle des paramètres.

Dans ce mémoire, nous avons développé quelques algorithmes permettant de réaliser une analyse de propagation et de quantification de l'incertitude paramétrique dans les modèles de files d'attente avec "working vacations". En effet, la part d'influence des paramètres d'entrées du modèle d'attente M/M/1/N-WV sur la distribution stationnaire et les caractéristiques de ce modèle a été quantifiée par les indices de sensibilité de Sobol qui sont estimés par la technique de simulation Monte-Carlo. En outre, les résultats obtenus sont généralisés en combinant les deux types d'incertitude (aléatoire et épistémique) en utilisant la technique de

p-boîte, qui consiste à estimer la fonction de répartition, la moyenne et la variance de chaque composante de la distribution stationnaire sur des intervalles.

Ce mémoire de recherche reste une opportunité pour aspirer à d'autres problématiques. En effet, ce dernier représente une base intéressante pour d'éventuelles perspectives prometteuses telles que :

- ▷ Estimation des indices de Sobol par d'autres approches comme les polynômes de chaos et la méthode de Taylor ;
- ▷ Analyse de sensibilité du même modèle tout en considérant d'autres lois de modélisation des bruits exogènes ;
- ▷ Élargir l'applicabilité de mêmes approches à l'analyse des autres modèles et réseaux plus compliqués ;
- ▷ Propagation de l'incertitude par l'approche basée sur les développements en séries de Taylor de la distribution stationnaire, et ce dans le cas de la perturbation de plusieurs paramètres.

---

# Annexes A

---

## A.1 Notions de théorie des probabilités

La théorie des probabilités permet de représenter de l'information précise entachée de variabilité. C'est à dire que l'on peut observer de façon précise les résultats d'une expérience mais ceux-ci sont différents à chaque observation (exemple pluviométrie).

Soit un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Toute mesure de probabilité  $P$  peut se définir à partir d'une distribution de probabilité  $p$  sur un ensemble  $\Omega$ .

$$p : \Omega \longrightarrow [0, 1]$$

telle que

$$\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1, \quad \text{dans le cas discret ;}$$

et

$$\int_{\Omega} p(\omega) d\omega = 1, \quad \text{dans le cas continu.}$$

On a pour tout sous-ensemble  $A \subseteq \Omega$ , appelé événement :

$$\text{Dans le cas discret } P(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega), \quad \forall A \subseteq \Omega \quad (\text{A.1})$$

$$\text{Dans le cas continu } P(A) = \int_A p(\omega) d\omega, \quad \forall A \text{ mesurable} \quad (\text{A.2})$$

Le nombre  $p(\omega)$  représente la fréquence d'apparition de  $\omega$  après plusieurs essais dans le cas discret, et la densité de  $\omega$  dans le cas continu. La mesure de probabilité  $P$  vérifie :

$$\forall A, B \subseteq \Omega \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B), \quad (\text{A.3})$$

$$\forall A \subseteq \Omega \quad P(A) = 1 - P(\bar{A}). \quad (\text{A.4})$$

Une variable aléatoire réelle  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  associée à  $P$  est définie comme variable dans  $\mathbb{R}$ , dont la valeur dépend du résultat  $\omega$  de l'expérience aléatoire.

On appelle fonction de répartition  $F_X$  ou probabilité cumulée de  $X$  la fonction  $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ , définie à partir d'une densité  $p$  telle que :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x p(\omega) d\omega, \quad x \in \mathbb{R} \quad (\text{A.5})$$

Cette fonction porte l'ensemble de l'information disponible sur la variable aléatoire.

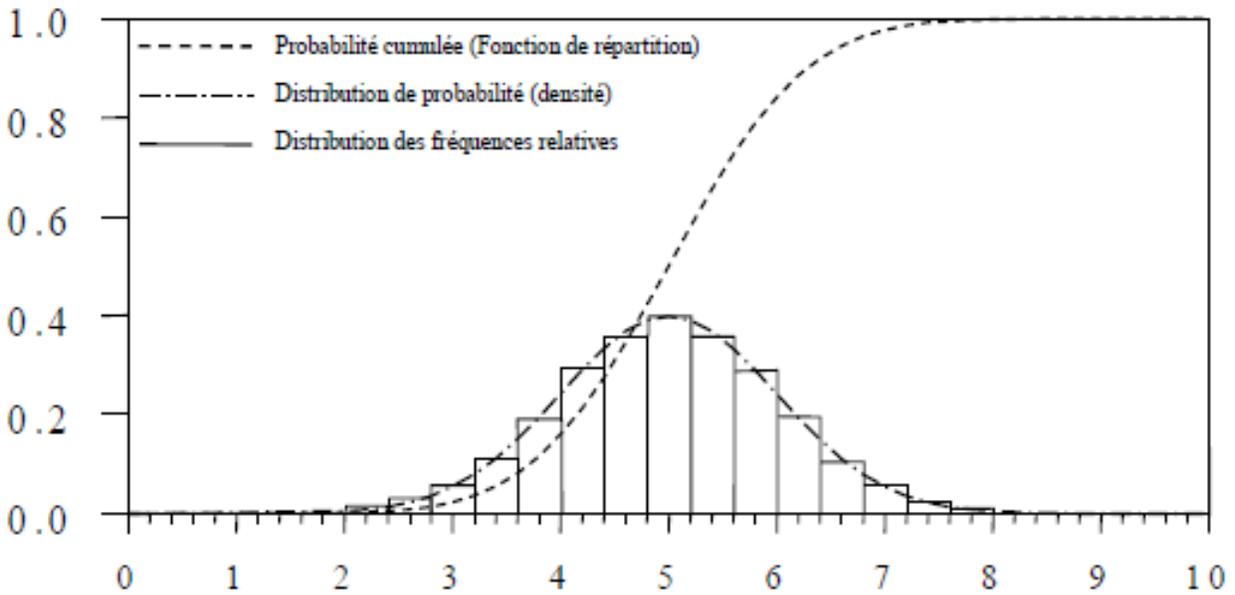


FIGURE A.1 – Représentation graphique d'une loi normale.

---

# Annexes B

---

## B.1 Analyse de sensibilité du modèle (M/M/1/N-WV)

Une analyse de sensibilité est une étape préalable à la propagation des incertitudes, utile afin d'identifier les principales sources d'incertitude parmi les différentes entrées d'un modèle d'effets. L'intérêt de cette analyse consiste à connaître les entrées dont les variations ont une forte influence sur la variation de la sortie du modèle. En effet, les autres entrées, qui ont une influence moindre, nécessitent moins d'attention lors de l'étape de modélisation où il n'est pas nécessaire de faire des efforts supplémentaires pour mieux connaître ces grandeurs incertaines et ainsi améliorer la précision de leurs supports (et par la même occasion avoir une meilleure connaissance de la sortie). Il peut même être intéressant de fixer ces entrées à des valeurs nominales pour réduire le nombre de grandeurs incertaines dans des modèles coûteux en temps de calcul, et ce sans trop porter atteinte à la complétude du modèle, c'est-à-dire sans perdre trop de solutions sur le support de la sortie.

L'analyse de sensibilité étudie comment la variation de la sortie d'un modèle peut être attribuée aux variations des différentes entrées. Nous souhaitons ainsi quantifier l'impact de l'incertitude attachée aux entrées du modèle sur la sortie prédite par le modèle. Plus particulièrement, nous souhaitons identifier les entrées par rapports auxquelles la sortie est "sensible". L'indice de sensibilité d'une entrée quantifie donc l'importance de l'influence de son incertitude sur la sortie. Il s'agit de la part de la variabilité de la sortie expliquée par la variabilité de l'entrée.

Dans la modélisation d'un système de file d'attente, l'analyse de sensibilité prend tout son sens. En effet, la nécessité de connaître l'influence des incertitudes affectant les para-

mètres d'entrée sur les caractéristiques de modèle (c'est-à-dire l'incertitude sur le niveau des paramètres d'entrée).

Donc L'analyse de sensibilité consiste à calculer les indices de sensibilité de chacune des entrées, ce qui permet de classer ces dernières en fonction de leur influence sur la sortie.

### B.1.1 Analyse de sensibilité via les indices de Sobol

Pour définir l'analyse de sensibilité globale via les indices de Sobol, il est nécessaire d'introduire la distribution stationnaire  $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_N)$  dont la forme analytique n'est pas exactement connue.

Les étapes essentielles pour l'estimation de la distribution stationnaire de modèle de file d'attente (M/M/1/N) avec "working vacations" sont données dans l'algorithme 3.

---

**Algorithm 3** la distribution stationnaire de modèle étudié

---

**Début**

**Etape 1** Introduction des paramètres d'entrés :

- ▷ la capacité de la file d'attente  $N$ ;
- ▷ le taux d'arrivée des clients dans le système  $\lambda$ ;
- ▷ Le taux du service au cours de la période de service normal  $\mu_b$ ;
- ▷ Le taux du service pendant "working vacation"  $\mu_v$ ;
- ▷ Le taux de vacances  $\theta$ ;

**Etape 2** La matrice de transition :

- ▷ Calculer les probabilités  $p_{00}$ ,  $p_{0j}$  et  $p_{ij}$  données en section 1 chapitre 3;
- ▷ Calculer la matrice de transition  $P$  donnée en section 1 chapitre 3;

**Etape 3** La distribution stationnaire de modèle :

- ▷ Calculer la distribution stationnaire  $\pi$  pour la matrice de transition  $P$ ;  
% à aide de la méthode d'inversion d'une matrice ;

**Fin.**

---

On va maintenant étudier si le modèle précédent est bien fidèle à la réalité. Pour cela, on va étudier l'influence des paramètres d'entrée  $\lambda, \mu_b, \mu_v$  et  $\theta$  sur la distribution stationnaire  $\pi$  et Les caractéristiques du modèle  $L$  et  $W$ , par les indices de Sobol.

Dans ce qui suit, nous présentons les étapes essentielles de l'algorithme permettant de calculer les indices de sensibilité de Sobol de premier ordre de la distribution stationnaire pour le système d'attente (M/M/1/N) avec "working vacations".

**Algorithm 4** Indices de sensibilité de Sobol de premier ordre**Début****Entrer** :  $A, B, C, D, n, N$ ;% avec  $A < B < C < D$ ;**Pour**  $i = 1 : n$  faire**Etape 1** Simulation des deux échantillons de chaque paramètres d'entrées :

$$\lambda(i) = (B - A) * u_1(i) + A ; \lambda'(i) = (B - A) * v_1(i) + A;$$

$$\mu_v(i) = (D - C) * u_2(i) + C ; \mu'_v(i) = (D - C) * v_2(i) + C;$$

$$\mu_b(i) = (B - A) * u_3(i) + A ; \mu'_b(i) = (B - A) * v_3(i) + A;$$

$$\theta(i) = (B - A) * u_4(i) + A ; \theta'(i) = (B - A) * v_4(i) + A;$$

% avec  $u_k(i)$  et  $v_k(i) \rightsquigarrow U[0, 1]; \forall k \in \{1..4\}$  et  $\forall i \in \{1..n\}$ **Pour**  $j = 1 : N$  faire**Etape 2** Calcul de la distribution stationnaire :

$$\triangleright \pi_1(j) = \text{la distribution stationnaire}(\text{Algo 3})[\lambda(i), \mu_v(i), \mu_b(i), \theta(i), N];$$

$$\triangleright \pi_2(j) = \text{la distribution stationnaire}(\text{Algo 3})[\lambda(i), \mu'_v(i), \mu'_b(i), \theta'(i), N];$$

$$\triangleright \pi_3(j) = \text{la distribution stationnaire}(\text{Algo 3})[\lambda'(i), \mu_v(i), \mu'_b(i), \theta'(i), N];$$

$$\triangleright \pi_4(j) = \text{la distribution stationnaire}(\text{Algo 3})[\lambda'(i), \mu'_v(i), \mu_b(i), \theta'(i), N];$$

$$\triangleright \pi_5(j) = \text{la distribution stationnaire}(\text{Algo 3})[\lambda'(i), \mu'_v(i), \mu'_b(i), \theta(i), N];$$

**Etape 3** Estimation de la moyenne  $\hat{f}_0$ 

$$\hat{f}_0 \approx \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \pi_1(j);$$

**Etape 4** Estimation de la variance  $\hat{V}$ 

$$\hat{V} \approx \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N [\pi_1(j)]^2 - \hat{f}_0^2;$$

**Etape 5** Estimation de la quantité  $\hat{U}_j$ 

$$\hat{U}_\lambda = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \pi_1(j) \times \pi_2(j);$$

$$\hat{U}_{\mu_b} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \pi_1(j) \times \pi_4(j);$$

$$\hat{U}_{\mu_v} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \pi_1(j) \times \pi_3(j);$$

$$\hat{U}_\theta = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \pi_1(j) \times \pi_5(j);$$

**Fin pour ;****Fin pour ;****Sortie** : les indices de Sobol  $[\hat{S}_\lambda, \hat{S}_{\mu_v}, \hat{S}_{\mu_b}, \hat{S}_\theta]$ ;% avec  $\hat{S}_\alpha = \frac{\hat{U}_\alpha - \hat{f}_0^2}{\hat{V}}$ ;**Fin.**

Le calcul des ces indices, nous permet de hiérarchiser les paramètres d'entrée en fonction de leurs influence sur la distribution stationnaire.

---

# Bibliographie

---

- [1] Abbas, k. Stabilité Forte dans un système d'attente M/G/1 à Serveur Non Fiable. Thèse de Magister. Université de béjaia. **(2003)**.
- [2] Ameer, L. Analyse des systèmes de files d'attente avec rappels : Estimation de l'incertitude paramétrique. thèse. Université de bejaia. **(2019)**.
- [3] Baba, Y. **(2005)** Analysis of a GI/M/1 queue with multiple working vacations. Operations Research Letters **33(2)** : 201-209.
- [4] Banik, A.D. Gupta, U.C. and Pathak, S.S. **(2007)** On the GI/M/1/N queue with multiple working vacations-analytic analysis and computation. Applied Mathematical Modelling **31(9)** : 1701-1710.
- [5] Bolch, G. Greiner, S. Meer, H. and Trivedi, K.S. Queueing Networks and Markov Chains : Modeling and Performance Evaluation with Computer Science Applications, 2nd edition. Wiley-Interscience. Canada. **2006**.
- [6] Cacuci, D.G. Sensitivity & Uncertainty Analysis, Volume 1 : Theory. Chapman and Hall/CRC. London **2003**.
- [7] Caumel, Y. Probabilités et processus stochastiques. Springer Paris. Verlag France. **2011**.
- [8] Chowdhary, K. and Dupuis, P. **(2013)** Distinguishing and integrating aleatoric and epistemic variation in uncertainty quantification. ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis **47(3)** : 635-662.
- [9] Desceliers, C. Ghanem, R. and Soize, C. **(2006)** Maximum likelihood estimation of stochastic chaos representations from experimental data. International Journal for Numerical Methods in Engineering **66(6)** : 978-1001.
- [10] Doshi, B.T. **(1986)** Queueing systems with vacations - A survey. Queueing systems **1(1)** : 29-66.
- [11] Doshi, B.T. **(1990)** Single server queues with vacations. Stochastic Analysis of Computer Communication Systems **38(9)** : 217-265.

- [12] Eldred, M.S. and Swiler, L.P. (2009) Efficient algorithms for mixed aleatory-epistemic uncertainty quantification with application to radiation-hardened electronics part I : algorithms and benchmark results. Sandia National Laboratories **41(18)** : 13-69.
- [13] Ferson, S. Ginzburg, L. and Akcakaya, R. (2003) Whereof one cannot speak : when input distributions are unknown. A paraître dans Risk Analysis.
- [14] Ferson, S. Ginzburg, L. Kreinovich, V. and Myers, D.M. (2003) Construction Probability Boxes and Dempster-Shafer structures. Sandia National Laboratories, Technical report SANDD.
- [15] Finn, S.G. and Servi, L.D. (2002) M/M/1 queues with working vacations (M/M/1/WV). Performance Evaluation **50(1)** : 41-52.
- [16] Gelman, A. (2006) Prior distributions for variance parameters in hierarchical models (comment on article by Browne and Draper). Bayesian Anal **1(3)** : 515-534.
- [17] Gentle, J.E. Random number generation and Monte Carlo methods, 2nd edition. Springer. New York. **2003**.
- [18] Gross, D. and Harris, C.M. Fundamentals of Queueing Theory, 2nd edition. John Wiley. New York. **1985**.
- [19] Guenatri, S. Etude de files d'attente avec serveur non fiable, service groupé et vacances multiples. thèse. USTHB. (2014).
- [20] Heijungs, R. (2010) Sensitivity coefficients for matrix-based LCA. The International Journal of Life Cycle Assessment **15(5)** : 511-520.
- [21] Jacques, J. (2011) Pratique de l'analyse de sensibilité : comment évaluer l'impact des entrées aléatoires sur la sortie d'un modèle mathématique. IRMA, LILLE **71(3)** : 3-19.
- [22] Jain, M. and Jain, A. (2010) Working vacations queueing model with multiple types of server breakdowns. Applied Mathematical Modelling **34(1)** : 1-13.
- [23] Ke, J.C. Wu, C.H. and Zhang, Z.G. (2010) Recent developments in vacation queueing models : A short survey. International Journal of Operations Research **7(4)** : 3-8.
- [24] Levy, Y. and Yechiali, U. (1975) Utilization of idle time in an M/G/1 queueing system. Management Science **22(2)** : 202-211.
- [25] Little, J.D.C. (1961) A proof of the queueing formula  $L = \lambda W$ . Operations Research **9(3)** : 383-387.
- [26] Liu, W. Xu, X. and Tian, N. (2007) Stochastic decompositions in the M/M/1 queue with working vacations. Operations Research Letters **35(5)** : 595-600.

- [27] Lloyd, S. and Ries, R. **(2007)** Characterizing, propagating, and analyzing uncertainty in life-cycle assessment a survey of quantitative approaches. *Journal of Industrial Ecology* **11(1)** : 161-179.
- [28] McKay, M.D. Beckman, R.J. and Conover, W.J. **(1979)** Comparison of three methods for selecting values of input variables in the analysis of output from a computer code. *Technometrics* **21(2)** : 239-245.
- [29] Medhi, J. *Stochastic models in queueing theory*, 2nd edition. Academic Press. New York. **1991**.
- [30] Mishra, K. and Trivedi, K.S. **(2010)** A non-obtrusive method for uncertainty propagation in analytic dependability models. In *Proceedings of 4th Asia Pacific symposium on advanced reliability and maintenance modeling*.
- [31] Nouari, C.A. *Système de file d'attente Markovien avec multiple vacances*. mémoire. Université Dr Tahar Moulay - Saïda. **(2019)**.
- [32] Ouazine, S. *Approche des développements en séries de Taylor pour l'approximation fonctionnelle des systèmes et réseaux de files d'attente*. thèse. Université de bejaia. **(2016)**.
- [33] Ouazine, S. and Abbas, K. **(2014)** A Numerical Analysis of the M/G/1/N Queue with Vacations. *IFAC, Elsevier* **47(2)** : 504-509.
- [34] Ouazine, S. and Abbas, K. **(2016)** Development of computational algorithm for multiserver queue with renewal input and synchronous vacation. *Applied Mathematical Modeling* **40(2)** :1137-1156.
- [35] Ouazine, S. and Abbas, K. **(2016)** A functional approximation for retrial queues with two way communication. *Annals of Operations Research* **247(1)** : 211-227.
- [36] Pascual, M.A. and Kareiva, P. **(1996)** Predicting the outcome of competition using experimental data : maximum likelihood and Bayesian approaches. *Ecology* **77(2)** : 337-349.
- [37] Pradlwarter, H.J. and Schueller, G.I. **(2008)** The use of kernel densities and confidence intervals to cope with insufficient data in validation experiments. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **197(29-32)** : 2550-2560.
- [38] Robert, C.P. *The Bayesian choice : from decision-theoretic foundations to computational implementation*, 2nd edition. Springer. New York. **2007**.
- [39] Romero, V. Rutherford, B. Swiler, L. and Urbina, A. **(2011)** An initial comparison of methods for representing and aggregating experimental uncertainties involving sparse

- data. In 52nd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference 19th AIAA/ASME/AHS Adaptive Structures Conference 13t : 1705.
- [40] Saltelli, A. Chan, K. and Scott, E.M. Sensitivity Analysis. Wiley. New York. **2000**.
- [41] Servi, L.D. and Finn, S.G. (**2002**) M/M/1 queues with working vacations (M/M/1/WV). Performance Evaluation **50(1)** : 41-52.
- [42] Sobol, I. (**1967**) On the distribution of points in a cube and the approximate evaluation of integrals. USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics **7(4)** : 784-802.
- [43] Sobol, I.M. (**1993**) Sensitivity estimates for nonlinear mathematical models. Mathematical Modelling and Computational Experiments **1(5)** : 407-414.
- [44] Sobol, I.M. (**2001**) Global sensitivity indices for nonlinear mathematical models and their Monte Carlo estimates. Mathematics and computers in simulation **55(1-3)** : 271-280.
- [45] Stewart, W.J. Probability, Markov Chains, Queues, and Simulation : The Mathematical Basis of Performance Modeling. Princeton University Press. Oxford Street. **2009**.
- [46] Takagi, H. Queueing Analysis, Vol. 1 : Vacation and Priority Systems. North-Holland. Amsterdam. **1991**.
- [47] Takagi, H. Queueing Analysis : A Foundation of Performance Evaluation, Vol. 2 : Finite Systems. North-Holland. New York. **1993**.
- [48] Takhedmit, B. Analyse de sensibilité non paramétrique des systèmes d'attente avec vacances. thèse. Université de bejaia. (**2018**).
- [49] Templeton, J.G.C. and Falin, G.I. Retrial Queues. Monographs on statistics and applied probability, 1st edition. Chapman and Hall. London. **1997**.
- [50] Tian, N. and Zhang, Z.G. Vacation Queueing Models : Theory and Applications. Springer Science & Business Media. New York. **2006**.
- [51] Turányi, T. (**1990**) Sensitivity analysis of complex kinetic systems. Tools and applications. Journal of mathematical chemistry **5(3)** : 203-248.
- [52] Xiu, C. Tian, N. and Liu, Y. (**2010**) The M/M/1 Queue with Single Working Vacation Serving at a Slower Rate during the Start-up Period. Journal of Mathematics Research **2(1)** : 98-102.
- [53] Zhang, M. and Hou. Z. (**2010**) Performance analysis of M/G/1 queue with working vacations and vacation interruption. Journal of Computational and Applied Mathematics **234(10)** : 2977-2985.

---

## Résumé

---

Dans ce mémoire, nous avons considéré l'analyse de sensibilité, basée sur le concept de Sobol, sur le modèle d'attente  $M/M/1/N$  avec working vacations. En particulier, nous avons pu estimer les indices de Sobol de premier ordre avec la méthode de Monte-Carlo, afin de voir et de déterminer les paramètres auxquels la distribution stationnaire et les caractéristiques de modèle sont sensibles. Dans ce contexte, nous avons quantifié l'incertitude des paramètres d'entrée les plus influents sur ce modèle, en estimant la fonction de répartition, la moyenne et la variance de chaque composante de la distribution stationnaire par l'approche basée sur la perturbation des paramètres incertains dans des intervalles (p-box).

**Mots clés :** "working vacations"; Analyse de sensibilité; Indices de Sobol; Simulation Monte Carlo; incertitude paramétrique; P-Box.

---

## Abstract

---

In this thesis, we have considered the sensitivity analysis, based on the Sobol concept, in the  $M/M/1/N$  queue with working vacations. In particular, we could estimate the first order Sobol's indices with the Monte Carlo method, in order to determine the parameters to which the stationary distribution and model characteristics are sensitive. In this context, we quantify the uncertainty of most influential input parameters on the model. We estimate the distribution function, the mean and the variance of each component of the stationary distribution by the approach based on the perturbation of the uncertain parameters in (p-box).

**Keywords :** "working vacations"; Sensitivity analysis; Sobol's indices; Monte Carlo simulation; Parametric uncertainty; P-Box.