

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



Université A. Mira de Bejaia
Faculté des Sciences Exactes
Département de Recherche Opérationnelle

MÉMOIRE DE FIN DE CYCLE

En vue de l'obtention du diplôme de Master en Recherche
Opérationnelle

Option

Mathématiques financières

Thème

Oscillations dans un modèle de compétition et de
coopération entre deux entreprises avec retards

Présenté par : *Mlle.* ZERKAK Nesma

Soutenue le 12/10/2020 devant le jury composé de :

Président	<i>Mr.</i> Larbi ASLI	M.C.B	U. A/Mira Bejaia.
Examineur	<i>Mr.</i> Rachid BOUKOUCHA	M.C.A	U. A/Mira Bejaia.
Examinatrice	<i>Mme.</i> Leila YOUNSI	M.A.A	U. A/Mira Bejaia.
Encadreur	<i>Mr.</i> Mohammed Salah M'HAMDI	M.C.B	U. A/Mira Bejaia.

Bejaia, 2019-2020

Remerciement

Alhamdulillah au plus gracieux et puissant Allah qui nous a donné la force et la patience d'accomplir ce modeste travail .

En premier lieu je tiens à remercier mon encadreur Mr Mohammed Salah M'HAMDI pour m'avoir proposer et digérer durant ce travail,pour ses conseils précieux et la compétence de son encadrement .

Je tiens aussi à remercier les membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail.

Mes vifs remerciements vont également à tous les enseignants du département Recherche Opérationnelle.

Enfin, je remercie tout ceux qui ont contribué à la réalisation de ce travail.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail : .

A mes très chers parents, qui m'ont toujours soutenu, encouragé et aidé tout au long de mon cursus, pour leurs confiance, leurs sacrifices et toutes les valeurs qu'ils ont su m'inculquer. .

A ma famille et en particulier mes deux frères, ma petite nièce ainsi que mes belles sœurs , pour m'avoir soutenu tout au long de ce travail .

A mes plus proches, cousins, cousines et amis .

Je tiens également à remercier toute personne qui a participé de près ou de loin à l'exécution de ce modeste travail .

Table des matières

Table des figures	i
Liste des tableaux	ii
Notations	iii
Introduction générale	1
1 Modèle de Loteka-Voltera	4
1.1 Notions et définitions	4
1.1.1 Équations différentielles à retard	4
1.1.2 Modèle de Lotka-Volterra pour deux espèces	6
1.1.3 Problème d'existence et d'unicité des solutions	8
1.1.4 Déterminer les points d'équilibre	9
1.1.5 La stabilité	9
1.1.6 La Stabilité globale	14
1.2 Oscillations : fonctions presque-périodiques et pseudo presque-périodiques	16
1.3 Modèle de compétition, coopération, compétition et coopération de Lotka-Volterra	18
1.3.1 Modèle de compétition	20
1.3.2 Modèle de coopération	25
1.3.3 Modèle de compétition et de coopération	26
1.3.4 Rappel sur les solutions de quelques modèles de compétition et/ou de coopération entre deux entreprises	27
2 Solution pseudo presque-périodiques d'un modèle de compétition et de coopération entre deux entreprises avec retards	32
2.1 compétition et coopération entre deux entreprises	32
2.2 Présentation du modèle et des hypothèses	34

2.3 Résultats	34
3 Application et simulation	49
3.1 Simulink de matlab et système dynamique	50
3.1.1 Présentation du MATLAB et simulink	50
3.2 Exemple numérique sous Simulink	55
Conclusion générale et perspectives	73
Bibliographie	78

Table des figures

1.1	Notion de stabilité.	10
1.2	La nature des trajectoires.	12
1.3	Représentation graphique des équilibres et l'ensemble des trajectoires.	14
1.4	Exemple de fonction presque-périodique (de f_1).	17
1.5	Exemple de fonction pseudo presque-préiodique (de f_2).	19
1.6	Isoclines pour les équations de compétition de Lotka-Volterra des deux entreprises A et B	22
1.7	Les cas d'interaction compétitive	23
3.1	Interface de Simulink	49
3.2	Interface de MATLAB	50
3.3	Les bibliothèques du Simulink	52
3.4	Simulink Library Browser	53
3.5	Exemple	54
3.6	Graphe associé au modèle construit	54
3.7	Graphe associé au modèle construit	55
3.8	Programme sous Simulink de modèle (3.1) pour $R_{11} = R_{21} = 0$, $R_{12} = 5$, et R_{22}	57
3.9	Les sorties x_1 et x_2 de programme de modèle (3.1).	58
3.10	La trajectoire des solutions x_1 de modèle (3.1) avec $T = 100$	58
3.11	La trajectoire des solutions x_2 de modèle (3.1) avec $T = 100$	59
3.12	Les trajectoires des solutions x_1 et x_2 de modèle (3.1) avec $T = 100$	59
3.13	Les trajectoires des solutions x_1 et x_2 de modèle (3.1) avec $T = 1000$ et $r_1 = \sin(t) + 6$, $r_2 = \cos(t) + 6$	60
3.14	Les trajectoires des solutions x_1 et x_2 de modèle (3.1) avec $T = 100$ et $r_1 = \sin(t) + 7$, $r_2 = \cos(t) + 7$	61
3.15	Les trajectoires des solutions x_1 ancien et x_1 nouveau de modèle (3.1) avec $T = 100$	62

3.16	La trajectoire des solutions x_1 de modèle (3.1) avec $T = 100$ et $r_1 = \cos(t) + 6, r_2 = \cos(t) + 6$	64
3.17	La trajectoire des solutions x_2 de modèle (3.1) avec $T = 100$ et $r_1 = \cos(t) + 6, r_2 = \cos(t) + 6$	65
3.18	Les trajectoires des solutions x_1 et x_2 de modèle (3.1) avec $T = 100$ et $r_1 = \cos(t) + 6, r_2 = \cos(t) + 6$	66
3.19	La trajectoire des solutions x_1 de modèle (3.1) avec $T = 100$ et $r_1 = \cos(t) + 10, r_2 = \cos(t) + 10$	67
3.20	La trajectoire des solutions x_2 de modèle (3.1) avec $T = 100$ et $r_1 = \cos(t) + 10, r_2 = \cos(t) + 10$	67
3.21	Les trajectoires des solutions x_1 et x_2 de modèle (3.1) avec $T = 100$ et $r_1 = \cos(t) + 10, r_2 = \cos(t) + 10$	68
3.22	Les trajectoires des solutions x_1 et x_2 de modèle (3.1) avec $T = 100$ et $r_1 = \cos(t) + 1, r_2 = \cos(t) + 1$	69
3.23	Les trajectoires des solutions x_1 de modèle (3.1) avec $T = 100$ et $r_1 = \cos(t) + 1, r_2 = \cos(t) + 1$	70
3.24	Les trajectoires des solutions x_2 de modèle (3.1) avec $T = 100$ et $r_1 = \cos(t) + 1, r_2 = \cos(t) + 1$	70
3.25	Les trajectoires des solutions x_1 et x_2 de modèle (3.1) avec $T = 1000$ et $r_1 = \cos(t) + 1, r_2 = \cos(t) + 1$	71

Liste des tableaux

1.1	Tableau des quatre points d'équilibre et leurs conditions de stabilité du modèle de compétition de <i>Lotka – Voltera</i>	24
1.2	Tableau des quatre points d'équilibre et leurs conditions de stabilité du modèle de coopération de <i>Lotka – Voltera</i>	26
1.3	Tableau des quatre points d'équilibre et leurs conditions de stabilité du modèle de compétition et de coopération de <i>Lotka – Voltera</i>	26

P : périodique (periodic);
 BC : espace de Banach;
 AP : presque périodique (almost-periodic);
 PAP : pseudo-presque-périodique (pseudo almost-periodic);
 τ : Le retard;
 Γ : (Gamma)opérateur non linéaire;
 \mathbb{R} : ensemble des réels;
 \dot{L} : Fonction de *Lyapounov*;
 $tr()$: la trace d'une matrice;
 $det()$: déterminant d'une matrice;
 Δ : déterminant de l'équation caractéristique d'une matrice;
 $\| \cdot \|$: La norme.

Introduction générale

Des mathématiciens se sont préoccupés depuis 1896 des problèmes dynamiques, en utilisant les équations différentielles, parmi eux on trouve *Euler* [13] et *Bernoulli* [10]. Tandis que les économistes ne se sont intéressés aux problèmes dynamiques que dans les années 1920 avec les travaux de *Hotelling* et *Ramesey*. Cependant, il a fallu attendre les années 1960 pour que les techniques des mathématiques dynamiques soient largement introduites en économie, principalement dans la théorie sur la croissance, de la finance de marché ainsi de suite. Aujourd'hui, ces techniques de mathématiques dynamiques font partie de la boîte à outils de l'économiste et se sont devenues indispensables pour comprendre l'évolution de certains modèles, en exemple voir [21]. Parmi les champs d'application de ces équations différentielles on cite : la macroéconomie (modélisation de la croissance d'une économie), la finance (évolution du cours d'une action), l'électronique, démographie (évolution d'une population) ..etc.

Les modèles dynamiques se caractérisent par l'introduction du temps. Ce dernier peut être introduit soit comme un indice (de manière discrète), soit comme une variable (de manière continue). On distingue donc deux types de dynamique : la dynamique en temps discret et la dynamique en temps continu.

Dans ce travail on va utiliser les équations différentielles comme outils mathématiques pour l'étude d'un modèles économique qu'on présente par la suite, afin de comprendre l'évolution de l'état de ce système c'est-à-dire la sortie du système au cours du temps et en fonction de son état initial.

Notre but est de présenter un modèle en finance qui modélise la compétition et la coopération entres deux ou plusieurs entreprises. Certains modèles de compétition et coopération sont à l'origine de *Lotka – Voltera* et ce dernier modélisé par des systèmes d'équations différentielles.

Dans notre travail on s'intéressera en particulier aux équations différentielles avec retards dont les entrées (les poids de connexion et les fonctions retards de

type périodiques, presque-périodiques ou pseudo presque-périodique) et les sorties de type aussi périodiques, presque-périodiques ou pseudo presque-périodique.

Ce mémoire est organisé comme suit :

– On a commencé notre travail par une introduction générale.

– Premier chapitre

Dans le premier chapitre qu'on a nommé préliminaires, on va collecter certaines définitions, lemmes, théorèmes et autres résultats auxiliaires utilisés dans ce mémoire. On va commencer par une brève présentation des systèmes différentiels qu'on va utiliser par la suite dans la modélisation et la résolution du modèle simple de *Lotka–Volterra*, le modèle de compétition et de coopération entre deux entreprises sans retard, et le cas où ce dernier modèle est influencé par un retard. Dans la dernière partie de ce chapitre on va exposer quelques résultats d'existence et de stabilité des solutions de quelques modèles de compétition et de coopération entre deux entreprises ou plus avec retards.

– Deuxième chapitre

Dans ce chapitre, on va exposer notre modèle à étudié ainsi que quelques résultats d'existence et d'unicité de la solution pseudo presque-périodique d'un modèle de compétition et de coopération entre deux entreprises avec retard variables dans le temps, sous certaines hypothèses tout en basant sur les lemmes 4, 5, 6 et 7 ainsi que le théorème 8.

Les principaux résultats obtenus dans ce chapitre sont présentés comme suit :

► On considère le modèle suivant de de compétition et de coopération entre deux entreprises avec retards variables dans le temps suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = x_1(t) [r_1(t) - a_1(t)x_1(t) - b_1(t)(x_2(t - \tau_2(t)) - c_2(t))^2], \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = x_2(t) [r_2(t) - a_2(t)x_2(t) + b_2(t)(x_1(t - \tau_1(t)) - c_1(t))^2]. \end{cases} \quad (1)$$

Pour le système (1), on montre que, sous certaines hypothèses, on a le résultat suivant :

• Le modèle étudié (1) admet une unique solution pseudo presque-périodique.

– Troisième chapitre

Dans ce dernier chapitre on va appliquer les résultats obtenues précédemment pour traiter un exemple numérique d'un modèle de compétition et de

coopération entre deux entreprises avec retard , en utilisant une simulation avec Simulink de MATLAB, on va présenter les résultats obtenus sous forme graphique (les trajectoires des solutions).

- On terminera notre travail par une conclusion générale.

Modèle de Loteka-Voltera

Cette section est consacré à la fois à la présentation du modèle de *Lotka – Voltera* ainsi que les différents théorèmes qui peuvent être considérés comme des critères assurant l’existence des équilibres ainsi que les solutions d’un système différentiel et les différents types de stabilité de ces derniers. En particulier, dans la première partie, on présentera quelques définitions et propriétés. Dans la deuxième partie, on étudie les équilibres et leurs stabilité du modèle simple de *Lotka – voltera*. En troisième partie, on fait la même chose que la deuxième partie pour le modèle de compétition et de coopération de *Lotka – voltera*. Dans la quatrième partir on parlera des fonctions presque-périodiques et pseudo presque-périodiques en générale. Dans la dernière partie, on donnera un aperçu de quelques rappels sur les solutions de quelques modèles de compétition et/ou de coopération entre deux entreprises.

1.1 Notions et définitions

1.1.1 Équations différentielles à retard

En mathématiques, une équation différentielle est une relation entre une ou plusieurs fonctions inconnues et leurs dérivées. L’ordre d’une équation différentielle correspond au degré maximal de dérivation auquel l’une des fonctions inconnues a été soumise.

Considérons une quantité $y(t)$ la taille d’une population à une instant t . Afin de modéliser son évolution au cours du temps, il est naturel de postuler une relation entre cette quantité et sa dérivée c’est-à-dire entre $y(t)$ et $y'(t)$. On obtient alors

une équation différentielle de premier ordre s'écrit comme suit

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t)) \tag{1.1}$$

où

$$\begin{aligned} f & : U \rightarrow \mathbb{R}^m \\ (t, y) & \mapsto f(t, y) = (f_1(t, y), f_2(t, y), \dots, f_m(t, y)). \end{aligned}$$

est une fonction continue et U est un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$.

La résolution de (1.1) consiste à trouver toutes les fonctions $y(t)$ inconnues qui satisfont cette équation (1.1).

Équations autonomes

L'équation différentielle (1.1) est dite :

- autonome si f ne dépend pas de t .
- non-autonome sinon .

Une équation différentielle autonome est donc du type

$$y'(t) = f(y(t)).$$

Exemple 1.1.1. Les équation différentielles suivantes :

- $y'(t) = y(t)$ est autonome.
- $y'(t) = y(t) + t$ est non autonome.

Définition 1. [17] Une fonction $(t, y) \mapsto f(t, y)$ est dite continument dérivable ou de classe C^1 sur un domaine $D \subseteq \mathbb{R}^2$ si elle admet des dérivées partielles sur D et si ces dérivées sont continues.

Exemple 1.1.2. Les fonctions usuelles : polynôme, fraction rationnelle, exponentielle, logarithme, fonction trigonométrique,... etc, sont continument dérivables sur leur domaine de définition.

Définition 2. [17] (**Fonction de classe C^1**) Soit $a \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$ et $\varphi : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}^+$ une application continue, on dit que φ appartient à la classe C^1 si :

1. φ est strictement croissante.
2. $\varphi(0) = 0$.

Définition 3. (Equations différentielles à retard)[7]

Soit $t \geq 0$. On note par $C([-\tau, 0], \mathbb{R}_+)$ l'espace de Banach des fonctions continues définies sur $[-\tau, 0]$ et à valeurs dans \mathbb{R}_+ muni de la topologie de la convergence uniforme

$$\| \phi \| = \sup\{\phi(\theta) : -\tau \leq \theta \leq 0\}.$$

Soit $\phi \in C([-\tau, 0], \mathbb{R}_+)$, et $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donnée ainsi que, soit le problème à valeur initiale suivant

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t), x(t - \tau)), & t > 0; \\ x(t) = \phi(t) & t \in [-\tau, 0]. \end{cases} \quad (1.2)$$

Cette dernière (1.2) est une équations différentielles à retard.

1.1.2 Modèle de Lotka-Volterra pour deux espèces

A. L'histoire

Ce modèle d'interaction proies-prédateurs, a été proposé par Volterra après la première guerre mondiale. Il s'agissait d'explicitier la dynamique de deux populations (population de poissons) : la première de sardines et la deuxième de requins en mer Adriatique. Expliquer notamment pourquoi les quantités de sardines pêchées après l'interruption due à la guerre n'étaient plus aussi importantes que précédemment et pourquoi à la reprise de la pêche la proportion observée de requins avait augmenté.

Ce modèle proposé par *Voltera* prend en compte deux types d'espèces, les poissons pêchés à valeur commerciale, les sardines (x) et leurs prédateurs, les requins (y).

- Il avait supposé que le taux de croissance des populations des proies, en absence de prédateurs, était donné par une constante a et qu'il décroissait linéairement en fonction de la densité y des prédateurs. Ceci donne :

$$\dot{x} = ax - bxy$$

- De plus il avait supposé qu'en absence de proies, le taux de croissance des populations des prédateurs était négatif (ce qui conduit à la disparition de la population) et qu'il croissait linéairement en fonction de la densité x des proies, ceci implique :

$$\dot{y} = -cy + dxy$$

On peut donc écrire le système des équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - bxy \\ \dot{y} = -cy + dxy \end{cases} \quad (1.3)$$

B. But de l'étude

On désire obtenir des informations sur les solutions du système (1.3) autrement dit connaître l'évolution des quantités x et y au cour du temps pour répondre au questions suivantes :

- est-ce-que $x(t)$ et $y(t)$ restent des quantités positives au cour du temps ?
- est-ce-que l'une des deux population s'éteint en temps fini ? en temps infini ? ... etc.
- et la question la plus importante que le modèle soit fidèle aux observations faites dans la nature afin d'être utile ou non.

C. Analyse basique du modèle

Le but est de résoudre les équations (1.4), c-à-d trouver des fonctions $x(t)$ et $y(t)$ en fonction du paramètre temps t telles que

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax(t) - bx(t)y(t) \\ \frac{dy}{dt} = -cy(t) + dx(t)y(t), \end{cases} \quad (1.4)$$

avec les conditions initiales $x(t_0) = x_0$ et $y(t_0) = y_0$, où a, b, c et d sont des constantes strictement positives (autrement dit des poids de connexion dans le modèle (1.4)).

Pour que le modèle ait un intérêt, on suppose que les deux espèces sont présentes au départ, c'est-à-dire

$$\forall t \in \mathbb{R}, x(t) > 0, y(t) > 0$$

Le système défini répond aux conditions initiales x_0, y_0 et exprime la prise en compte de dynamiques intrinsèques de croissance exponentielles pour x et décroissance pour y (du fait de la compétition entre les individus au sein de l'espèce).

1. En absence de prédateurs (si $y = 0$) :

$$\frac{dx}{dt} = ax(t) \Rightarrow x(t) = x_0 \exp^{at}$$

on remarque que la population des proies croit exponentiellement (la population des proies explosera)

2. En absence de proies (si $x = 0$) :

$$\frac{dy}{dt} = -cy(t) \Rightarrow y(t) = y_0 \exp^{-ct}$$

En absence des proies les prédateurs ne peuvent pas survivre.

L'évolution en temps continu du système (1.4) peut simplement être modélisée par une équation gouvernant sa variation dans \mathbb{R}^2 comme suit

$$\begin{cases} u'(t) = f(u(t)) \\ u_0 = (x_0, y_0) \end{cases} \quad (1.5)$$

avec

$$f(u) = f(x, y) = (ax - bxy, -cy + dxy)$$

tel que :

$$u = (x, y), (x(0), y(0)) = (x_0, y_0) \text{ et } t > 0 \text{ et } f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \text{ et } u_0 \in \Omega.$$

1.1.3 Problème d'existence et d'unicité des solutions

A. Existence locale

Définition 4.

Théorème 1. (Cauchy-Lipschitz) *Si f est localement lipschitzienne, alors il existe une unique solution maximale $u \in (C([0, T]), \mathbb{R}^2)$ pour $t < T$.*

La démonstration de ce théorème repose sur le théorème du point fixe contractant (donc le résultat est encore vrai en dimension infinie).

théorèmes du point fixe :

Ce théorème est dit aussi le théorème de l'application contractante, c'est la base de la théorie du point fixe. Ce théorème garantit l'existence d'un point fixe unique pour toute application contractante d'un espace métrique complet dans lui même.

On va appliquer quelques théorèmes du point fixe pour établir l'existence et l'unicité des solutions des équations différentielles .

Théorème 2. [11] *Soit F une application continue sur un espace de Banach X . alors les assertions suivantes sont vraies :*

– *S'il existe $x, y \in X$ tels que*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F^n(x) = y$$

alors, y est un point fixe de f , i.e. $F(y) = y$.

– *Si $F(X)$ est un ensemble compact dans X et pour tout $\epsilon > 0$ il existe un $x_\epsilon \in X$ tel que*

$$\|F(x_\epsilon) - x_\epsilon\| < \epsilon,$$

alors F admet un point fixe.

Théorème 3. (Théorème du point fixe de Banach)[11] *Soient X un espace de Banach et $f : X \rightarrow X$ une application contractante. Alors f admet un point fixe unique, autrement dit :*

$$\exists x \in X : f_x = x.$$

Remarque 1.1.1. Si f est seulement supposée continue, on conserve l'existence (théorème de Cauchy-Péano) mais on perd l'unicité.

B. Existence globale

On se place dans le cadre d'application du théorème de Cauchy – Liptchitz. Le résultat suivant donne une condition suffisante pour $T = +\infty$.

Théorème 4. [37] Soit u la solution maximale de (1.5) définie pour tout $t < T$; Si u est bornée sur $[0, T)$, alors $T = +\infty$.

C. Existence locale et positivité des solutions du système Lotka – voltera

f étant polynomiale, elle est donc de classe C^1 . Ainsi le théorème de Cauchy – Lipschitz nous assure que pour toute condition initiale (t_0, x_0, y_0) , le problème de Cauchy (1.5) admet une unique solution maximale.

Comme f est de classe C^1 (c'est-à-dire continûment différentiables) alors les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent en tout point (x, y) et qui sont des fonctions continues.

Théorème 5. (Positivité des solutions) Soient x_0, y_0 des réels strictement positifs et t_0 un réel quelconque. Alors la solution du problème de Cauchy (1.5) est vérifiée pour tout réel t

$$\begin{cases} x(t) > 0, \\ y(t) > 0. \end{cases}$$

1.1.4 Déterminer les points d'équilibre

On ramène le système (1.5) à la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(a - by) = 0, \\ \frac{dy}{dt} = y(-c + dx) = 0, \end{cases} \quad (1.6)$$

(x^*, y^*) est un point d'équilibre $\Leftrightarrow x(a - by) = 0$ et $y(-c + dx) = 0$ donc
 $\Leftrightarrow (x, y) = (0, 0)$ ou $(x, y) = (\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$,

les deux points d'équilibre sont

$$E_1 = (0, 0) \text{ et } E_2 = (\frac{c}{d}, \frac{a}{b}).$$

1.1.5 La stabilité

En mathématiques, la théorie de la stabilité traite la stabilité des solutions d'équations différentielles et des trajectoires des systèmes dynamiques sous des petites perturbations des conditions initiales.

Notion de stabilité

- Équilibre stable : après une petite perturbation, le système revient à y^* .
- Équilibre instable : une petite perturbation déstabilise le système.

On considère le problème de *Cauchy* (1.5) pour lequel on suppose une existence globale .

Définition 5. [28] $\bar{u} \in \mathbb{R}^n$ est un point d'équilibre (stationnaire) ssi $f(\bar{u}) = 0$.

Définition 6. [28] Soit $\bar{u} \in \mathbb{R}^n$ un point d'équilibre , \bar{u} est stable ssi :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \eta > 0, \| u_0 - \bar{u} \| < \eta \implies \forall t > 0, \| u(t) - \bar{u} \| < \varepsilon$$

Si, de plus

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \| u_0 - \bar{u} \| = 0$$

Le point u est dit asymptotiquement stable.

La figure 1.1 suivante illustre les notions qu'on vient d'introduire dans les définitions précédentes :

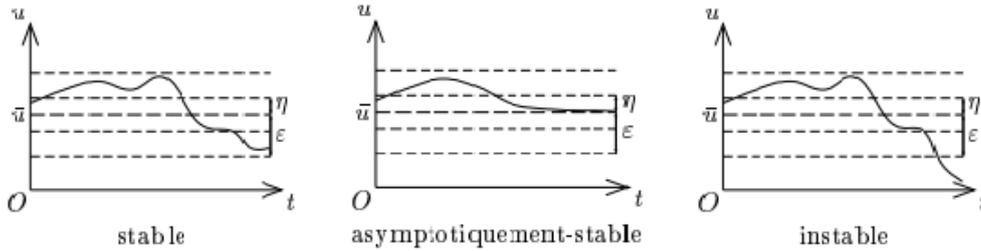


FIGURE 1.1 – Notion de stabilité.

1. Stabilité dans le cas linéaire

Supposons que f est linéaire, c-à-d le système (1.5) est de la forme :

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad \text{avec } A \in M_n(\mathbb{R}) \quad (1.7)$$

tel que : $\xi(A)$ désigne le spectre de la matrice carrée A ($A \in M_n(\mathbb{R})$).

Soit 0 le point d'équilibre de ce système (1.7), alors :

Théorème 6. [4] , [15] On considère le système (1.7)

- 0 est asymptotiquement stable ssi $\forall \lambda \in \xi(A), \text{Re } \lambda < 0$.
- 0 est stable ssi

- $\forall \lambda \in \xi(A), \operatorname{Re} \lambda \leq 0$
- $\forall \lambda \in \xi(A), (\operatorname{Re} \lambda = 0 \implies \lambda \text{ n'est pas défective}).$

Le théorème précédent fournit une condition nécessaire et suffisante de stabilité.

2. Stabilité dans le cas non linéaire

A. Méthode de linéarisation

C'est une méthode qui permet de prédire le comportement local des trajectoires (ou des solutions) de tout système différentiel, c'est-à-dire le comportement au voisinage des équilibres. En effet, au voisinage de chaque équilibre, le système est localement linéaire. La nature d'un équilibre d'un système non linéaire sera simplement la nature de son linéarisé au voisinage de cet équilibre.

Supposons que (x^*, y^*) soit un équilibre du système différentiel

$$\begin{cases} x' = f(x, y), \\ y' = g(x, y). \end{cases} \quad (1.8)$$

On calcule la matrice jacobienne A associée au système (1.8) à partir des dérivées partielles de f et g calculées au point d'équilibre (x^*, y^*) . Ainsi on a :

$$A(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}$$

les valeurs propres de la matrice A en chaque point d'équilibre (x^*, y^*) caractérisent le comportement des points à proximité.

B. Type de point d'équilibre

Le type de point d'équilibre du système dépend du nombre, du type (complexe ou réel), et du signe de la partie réelle, des valeurs propres de la matrice Jacobienne du système $A(x^*, y^*)$. Ces valeurs propres sont solutions de polynôme caractéristique de $A(x^*, y^*)$ suivant

$$\operatorname{Det}(A(x^*, y^*) - \lambda I) = \lambda^2 - \operatorname{Tr}(A)\lambda + \operatorname{Det}(A) = 0,$$

avec I est la matrice identité, $\operatorname{tr}(A)$ est la trace de la matrice A et λ une constante réelle ou complexe.

Le signe du déterminant de l'équation caractéristique permet de préciser la nature des trajectoires qui ramènent à l'équilibre. Ce déterminant s'écrit :

$$\Delta = (\operatorname{Tr}(A))^2 - 4\operatorname{det}(A).$$

- Si $\Delta > 0$ (les valeurs propres sont réelles), la trajectoire est dite « en puits » : pour x proche de x^* et y proche de y^* , les trajectoires convergent vers l'équilibre stationnaire comme l'eau vers un puits.
- Si $\Delta < 0$ (les valeurs propres sont complexes, avec α leurs partie réelle), la trajectoire est dite « foyer » : pour x proche de x^* et y proche de y^* , les trajectoires convergent vers l'équilibre (x^*, y^*) en décrivant une spirale autour de leur point initial, soit vers l'extérieur (lorsque $\alpha > 0$), soit vers l'intérieur (lorsque $\alpha < 0$) et on a un foyer instable ou stable respectivement. Lorsque $\alpha = 0$ la solution est un cercle (voir Figure 1.2).

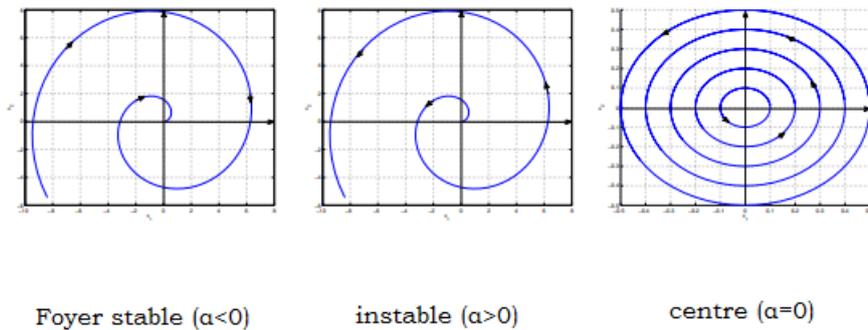


FIGURE 1.2 – La nature des trajectoires.

- Si $\Delta = 0$. Il y a une valeur propre double, alors on obtient un nœud, soit stable (si $\lambda < 0$), soit instable (si $\lambda > 0$).

Les valeurs propres de A sont

$$\lambda_{1,2} = \frac{Tr(A) \pm \sqrt{(Tr(A))^2 - 4Det(A)}}{2}.$$

C. Résultats

- Si $Det(A) > 0$, alors $\sqrt{(Tr(A))^2 - 4Det(A)} < |Tr(A)|$ et λ_1, λ_2 sont du signe de $Tr(A)$. le point d'équilibre est un nœud stable ou instable.
- Si $Det(A) < 0$, alors $\sqrt{(Tr(A))^2 - 4Det(A)} > |Tr(A)|$ et λ_1, λ_2 sont du signe opposé. Le point d'équilibre est un point selle.

Si A possède deux valeurs propres complexes conjuguées

$$\lambda_{1,2} = \frac{Tr(A)}{2} \pm i \frac{\sqrt{|(Tr(A))^2 - 4Det(A)|}}{2}$$

alors

- Si $Tr(A) > 0$, le point d'équilibre est un foyer instable.
- Si $Tr(A) < 0$, le point d'équilibre est un foyer stable.
- Si $Tr(A) = 0$, le point d'équilibre est un centre.

Définition 7. [5] *Le point d'équilibre (x^*, y^*) du système (1.8) est dit hyperbolique lorsque toutes les valeurs propres de la matrice A sont de partie réelle non nulle.*

On calcule la matrice Jacobienne associée au système (1.6)

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} a - by & -bx \\ dy & -c + dx \end{pmatrix}$$

Note :

Une condition suffisante pour prouver la stabilité de cet équilibre est que les valeurs propres de la matrice $A(x^*, y^*)$ des dérivées premières de \dot{x} et \dot{y} en (x^*, y^*) soient toutes deux négatives ou, si elles sont complexes, que leur partie réelle soit négative.

La matrice jacobienne en chaque points d'équilibres E_1 et E_2 sont comme suit

- **Au point $E_1 = (0, 0)$:**

$$A(0, 0) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}$$

cette matrice diagonale qui a deux valeurs propres de signe opposé, donc $E_1(0, 0)$ est un col (point selle) instable.

- **Au point $E_2 = (\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$:**

$$A\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-bc}{d} \\ \frac{ad}{b} & 0 \end{pmatrix}$$

on a

$$\det(A) = \lambda^2 + ac > 0 \text{ et } Tr(A) = 0$$

donc d'après les résultats précédentes l'équilibre est un centre (voir Figure 1.3).

Définition 8. Portrait d'état est la représentation (schématique) de l'ensemble des trajectoires.

- **Discussion :** d'après le portrait d'état présenté dans la figure 1.3, on remarque que :
 - Dans la région I , par exemple $\dot{x} < 0$ car $y > y^*$ et $\dot{y} < 0$ car $x < x^*$, donc le champ de vecteurs pointe vers la gauche et vers le bas. Et ainsi de suite.

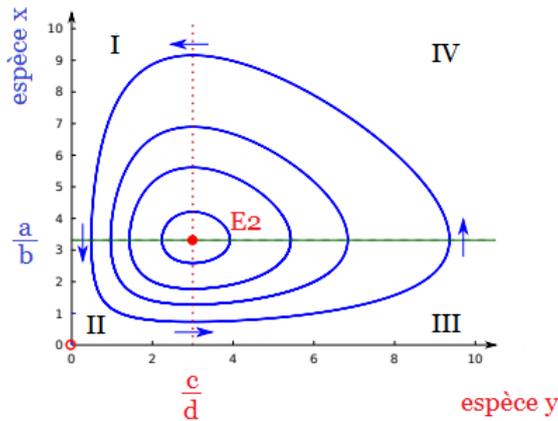


FIGURE 1.3 – Représentation graphique des équilibres et l'ensemble des trajectoires.

- On conclut que si on part d'une densité initiale (x_0, y_0) de proies et de prédateurs dans la région I , la solution $(x(t), y(t))$ va aller dans la région II , puis dans la région III , puis dans la région IV , puis à nouveau dans la partie I , et ainsi de suite.
- Cette première analyse du portrait d'état montre que, pour des populations initiales strictement positives et différentes de l'équilibre E_2 , les densités de proies et de prédateurs vont fluctuer au cour du temps autour de cet équilibre puisque les solutions $(x(t), y(t))$ tournent autour de lui.

Remarque 1.1.2. (Note importante)

Bien que le système (1.6) ait un équilibre dont le linéarisé est un centre, rien ne permet, à priori, d'affirmer que ses solutions sont périodiques, c'est-à-dire que l'équilibre

$$E_2 = \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b} \right)$$

est effectivement un centre et non un foyer. Pour s'en assurer, on a recours à l'existence d'une intégrale première pour ce système.

1.1.6 La Stabilité globale

Dans le cas du modèle de *Lotka – Volterra*, afin de déterminer le type de dynamique à long terme, on va assurer l'existence d'une intégrale première qui reste constante le long des trajectoires.

Définition 9. [5] On dit qu'un point $(x^*, y^*) \in \mathbb{R}_+^n$ est un point d'équilibre de (1.8) si $f(x^*, y^*) = 0$. (x^*, y^*) est dit attractif ou globalement attractif si pour toute solution positive (x, y) de (1.8) on a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (x, y)(t) = (x^*, y^*).$$

A. La recherche d'une intégrale première

L'importance des lois de conservation pour l'étude des systèmes différentiels comme ceux de Lotka-Volterra est facile à comprendre. Dès que la fonction H est connue, on peut, en utilisant ses dérivées partielles, tracer ses courbes de niveau et en déduire les trajectoires de la dynamique.

Dans le cas du système de Lotka – Volterra (1.6), il n'est pas difficile de vérifier que la fonction suivante est une loi de conservation

$$\forall t \in [0, T] : H : (x, y) = dx + by - c \ln x - a \ln y = Cte,$$

autrement dit, l'application suivante :

$$t \longmapsto H(x(t), y(t))$$

est constante pour (x, y) une solution de (1.6).

Définition 10. Soient $((x(t), y(t)))$ la dynamique de deux espèces comme par exemple les proies et les prédateurs du système de Lotka Volterra, on dit que la fonction $H(x, y)$ est une intégrale première ou loi de conservation de cette dynamique lorsque la quantité $H(x(t), y(t))$ reste constante au cours du temps.

Lemme 1. La solution maximale $(x(t), y(t))$ est bornée.

On conclure que E_2 est globalement stable.

Remarque 1.1.3. Théorème de Lyapounov s'applique avec $L = H$.

Fonction de Lyapounov

Les fonctions de Lyapounov permettent d'étudier la stabilité d'équilibres dans des situations où l'analyse linéaire ne fonctionne pas. Même si le système linéarisé nous donne des informations, elles ne sont que locales, c'est-à-dire qu'on apprend le comportement qualitatif des orbites dans un voisinage d'un équilibre. Autrement dit, l'ensemble des solutions tendes vers l'équilibre lorsque t tend vers $+\infty$. Considérant toujours $f(0) = 0$ tel que 0 le point d'équilibre.

Définition 11. [25] Soient U un voisinage de 0 dans Ω et $L : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et différentiable sur $U - \{0\}$ tel que

- $L(0) = 0$ et $\forall u \neq 0, V(u) > 0$.
- $\dot{L}(u) = \langle f(u); \nabla V(u) \rangle \leq 0, \forall u \in U \setminus 0$.

On appelle une telle fonction une fonction de Lyapounov.

L'utilité de cette fonction réside dans le résultat suivant (qui fournit une condition suffisante pour la stabilité) :

Théorème 7. (Lyapounov)[4], [15]

S'il existe une fonction de Lyapounov pour 1.5, alors l'équilibre (x^, y^*) est stable.*

1.2 Oscillations : fonctions presque-périodiques et pseudo presque-périodiques

Dans ce qui suit on donne quelques définitions, notations et résultats sur les fonctions périodiques, presque-périodiques et pseudo presque-périodiques qu'on utilisera par la suite.

Définition 12. *On appelle solution périodique du système différentiel*

$$\frac{dx}{dt} = f(x),$$

toute solution $X(t)$ pour laquelle il existe un réel $T > 0$ tel que

$$\forall t \in [0; T] : X(t + T) = X(t).$$

Le plus petit nombre T qui convient s'appelle alors période de cette solution.

Définition 13. [12] *Soit $(BC(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), \| \cdot \|)$ un espace de Banach. La fonction :*

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}$$

est dite presque-périodique au sens de Bohr si

- i) *f est continue,*
- ii) *pour chaque $\epsilon > 0$, il existe un $l(\epsilon) > 0$, tel que tout intervalle I de longueur $l(\epsilon)$ contient un nombre τ vérifiant la propriété suivante :*

$$\| f(t + \tau) - f(t) \| < \epsilon, \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Le nombre τ ci-dessus est appelé le nombre ϵ -translation de f .

Notons $AP(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions presque-périodiques.

Exemple 1.2.1.

1. Toute fonction continue et T -périodique est une fonction presque-périodique. En effet, soit $l = T$ et soit I un intervalle quelconque de longueur T : $I = [\gamma, \gamma + T]$ avec γ un réel. Si $\gamma = (n - 1)T + \delta$ où $n \in \mathbb{Z}$ et $0 \leq \delta \leq T$, alors I contient un point de forme $nT = \tau$ et on a

$$f(t + \tau) - f(t) = f(t + nT) - f(t) = 0.$$

2. Soit la fonction définie par $f_1(t) = \sin t + \sin \pi t$ (voir la Figure 1.4). Il est clair que f n'est pas périodique, par ailleurs, on vérifie bien qu'elle est presque-périodique.

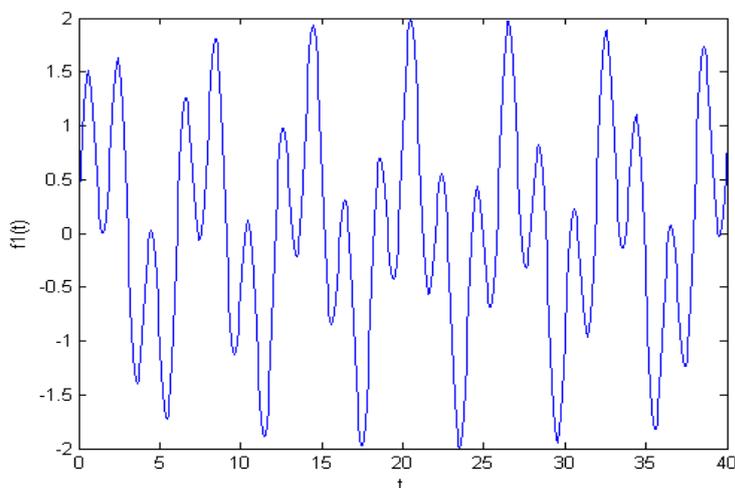


FIGURE 1.4 – Exemple de fonction presque-périodique (de f_1).

Définition 14. [8] soit $f \in BC(\mathbb{R}, \mathbb{R}_n)$. On dit que f est presque périodique (Bohra.p) ou uniformément presque périodique, lorsque la propriété suivante est satisfaite.

Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $l_\epsilon > 0$ tel que :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \exists \tau \in [\alpha, \alpha + l_\epsilon], \|f(\cdot + \tau) - f(\cdot)\|_\infty \leq \epsilon.$$

Nous désignons par $AP(\mathbb{R}, \mathbb{R}_n)$ l'ensemble des fonctions de l'a.p. de Bohr de \mathbb{R} à \mathbb{R}^n . Il est bien connu que l'ensemble $AP(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ est un espace de Banach avec la norme sup. Par ailleurs, le concept de pseudo presque périodicité (PAP) a été introduit par Zhang [4, 5] dans le au début des années 1990. C'est une généralisation

naturelle de la quasi-périodicité classique.

Définie la classe de fonctions

$$PAP_0(\mathbb{R}, \mathbb{R}_n) = \{f \in BC(\mathbb{R}, \mathbb{R}_n), \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \|f(t)\| dt = 0\}.$$

Définition 15. [8] Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}$ est dite pseudo presque-périodique si

$$f = g + h$$

où $g \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ et $h \in PAP_0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$.

g et h sont appelées respectivement la composante presque-périodique et la perturbation ergodique, respectivement, de la fonction f .

La collection de toutes les fonctions pseudo presque-périodiques de \mathbb{R} dans \mathbb{E} est dénotée par $PAP(\mathbb{R}, \mathbb{E})$.

Exemple 1.2.2. [6] La fonction f suivante :

$$f(t) = \sin t + \sin \sqrt{2}t + \frac{1}{1+t^2}.$$

est pseudo presque périodique (voir la Figure 1.5), autrement dit :

$$\begin{aligned} f(t) &= \sin t + \sin \sqrt{2}t + \frac{1}{1+t^2} \\ &= g(t) + h(t) \end{aligned}$$

avec $g(t) = \sin t + \sin \sqrt{2}t$ est une fonction presque périodique (de $AP(\mathbb{R}, \mathbb{R})$), $h(t) = \frac{1}{1+t^2}$ est la perturbation ergodique de f (de $PAP_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$).

Remarque 1.2.1. Les fonctions g et h dans la définition ci-dessus sont respectivement appelées la composante presque-périodique et la perturbation ergodique de la fonction pseudo-presque-périodique f . En outre, la décomposition donnée dans la définition ci-dessus est unique.

Remarque 1.2.2. Notons que $PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \|\cdot\|_\infty$ est un espace de Banach et $AP(\mathbb{R}, \mathbb{R}_n)$ est un véritable sous-espace de $PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, par exemple, la fonction $f(t) = \cos^2(t) + \sin^2(t) + \frac{1}{1+t^2}$ est une fonction pseudo presque-périodique mais pas presque-périodique.

1.3 Modèle de compétition, coopération, compétition et coopération de Lotka-Volterra

Dans la nature, la compétition seule entre deux espèces ne peut pas être le moyen le plus performant pour être le meilleurs, sans tenant compte de la coopération, car toute espèce vivante est en coopération au moins avec une autre espèce

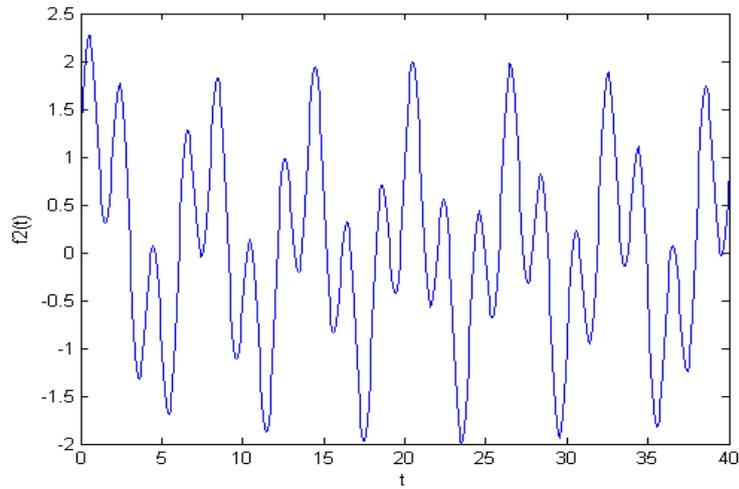


FIGURE 1.5 – Exemple de fonction pseudo presque-périodique (de f_2).

voir plusieurs, elle assure la coexistence des deux espèces et elle permet de mutualiser les ressources.

c'est une nouvelle approche qui assure aux entreprises à la fois le bénéfice de la compétition qui les pousse à améliorer constamment leurs offres, et de la coopération qui permet de mettre en commun des ressources difficiles à acquérir. Elles n'ont pas intérêt à baisser la compétition pour augmenter la coopération ou l'inverse, mais à augmenter simultanément la compétition et la coopération avec le même partenaire-adversaire. Elles sont toutes les deux utiles et nécessaires. Le problème n'est donc pas de faire régner l'une sur l'autre, mais d'assurer une bonne tension entre les deux (autrement dit l'existence pour survivre).

De manière plus réaliste, ce n'est pas seulement à la coopération ou à la compétition qu'il faut travailler, mais à un bon équilibre entre les deux. Il faut travailler ensemble pour comprendre les mesure des décisions qui se sont prises : quel sera l'impact sur le secteur, les conditions de vie des producteurs, ou l'environnement.

cette nouvelle stratégie apportent à l'entreprise le double bénéfice procuré par la coopération et par la compétition. La concurrence pousse l'entreprise à introduire de nouvelles combinaisons de produits, à innover, à améliorer les produits-services. Quant à La coopération elle permet à l'entreprise d'avoir accès à des ressources quasi gratuites, à des compétences et à des connaissances qui lui sont nécessaires ou indispensables .Elles deviennent donc la stratégie relationnelle à privilégier par les dirigeants pour augmenter la performance de l'entreprise.

Donc les relations entre les entreprises peuvent être divisée en trois types : compétition,coopération et la compétition et la coopération ([27]).

1.3.1 Modèle de compétition

compétition :

La compétition au sens économique se produit entre des individus d'espèces différentes qui partagent l'utilisation d'une ressource qui limite leurs croissance, leurs survie ou leurs reproduction..

Elle se définit par l'existence d'une rivalité entre des entreprises en concurrence sur un même marché.

On propose un modèle de *Lotka – Volterra* qui modélise la compétition entre deux populations qui ont une ressource commune. Pour aboutir à ce modèle , Il suffit d'apporter des changement au système logistique.

Présentation et étude du modèle

le modèle logistique de Verhulst L'équation $x'(t) = rx(t)$ décrit la croissance du nombre d'individus dans une population dont le taux de croissance est r . C'est le fameux modèle de *Malthus* qui prédit une croissance exponentielle. En pratique, l'épuisement des ressources limite la croissance de la population. Un modèle plus réaliste proposé en 1837 par *Pierre – Franois Verhulst* [19]. L'idée de son modèle logistique, est qu'il est plus réaliste de considérer des taux qui changent avec la densité de la population x et qui impliquent une limitation de la croissance de la population. Le modèle se présente comme suit :

$$x'(t) = rx\left(1 - \frac{x}{k}\right)$$

où

x : le nombre initial de la population .

r : taux de croissance .

k : capacité de charge .

Remarque 1.3.1. *Tant que la constante K n'est pas atteinte, la population peut augmenter, mais si la population excède cette capacité, elle est forcée de diminuer pour tendre vers K*

Si on a deux entreprises A et B en compétition ,le modèle de *Lotka – voltera* intervient en rajoutant les termes d'interactions au système logistique , ainsi on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = r_1x_1\left(1 - \frac{x_1}{K_1} - \frac{\alpha x_2}{K_1}\right) \\ \frac{dx_2}{dt} = r_2x_2\left(1 - \frac{x_2}{K_2} - \frac{\beta x_1}{K_2}\right) \end{cases} \quad (1.9)$$

qui est équivalent à :

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = r_1 x_1 \left(1 - \left[\frac{x_1 + \alpha x_2}{K_1}\right]\right) \\ \frac{dx_2}{dt} = r_2 x_2 \left(1 - \left[\frac{x_2 + \beta x_1}{K_2}\right]\right) \end{cases} \quad (1.10)$$

- x_1 , x_2 sont les sorties des entreprises A et B respectivement .
- r_1 , r_2 représentent le taux de croissance .
- α , β représentent les coefficients concurrentiels de deux entreprises, c'est à dire α c'est l'effet que l'entreprise B a sur la population de l'entreprise A , et β représente l'effet que l'entreprise A a sur la population de l'entreprise B (Ces valeurs n'ont pas à être égales).
- K désigne la capacité de charge de la marque dans des conditions de nature illimitées .

Remarque 1.3.2. *Comme il s'agit de la version compétitive du modèle, toutes les interactions doivent être positives.*

Les isoclines :

Le comportement asymptotique du modèle à deux espèces peut être facilement exploré en faisant une analyse des isoclines : une analyse graphique de la position des isoclines-zéro (courbes le long desquelles la croissance d'une espèce est nulle) dans l'espace des phases qui est ici le plan(x_1, x_2).

Chaque espèce a deux isoclines(isocline triviale et non triviale). Pour calculer les équilibres ,on doit résoudre les système suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = r_1 x_1 \left[\frac{k_1 - x_1 + \alpha x_2}{K_1}\right] = 0 \\ \frac{dx_2}{dt} = r_2 x_2 \left[\frac{k_2 - x_2 + \beta x_1}{K_2}\right] = 0 \end{cases} \quad (1.11)$$

isoclines triviales :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 & \text{ici on dit que l'axe } x_1 = 0 \text{ est l'isocline triviale} \\ \dot{x}_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0 & \text{ici on dit que l'axe } x_2 = 0 \text{ est l'isocline triviale} \end{cases}$$

$$\text{isoclines non triviales : } \begin{cases} \left(\frac{k_1 - x_1 + \alpha x_2}{K_1}\right) = 0 \Rightarrow k_1 - x_1 - \alpha x_2 = 0 & \text{avec } k_1 \neq 0 \\ \left(\frac{k_2 - x_2 + \beta x_1}{K_2}\right) = 0 \Rightarrow k_2 - x_2 - \beta x_1 = 0 & \text{avec } k_2 \neq 0 \end{cases}$$

$$x_1 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 = k_1 - \alpha x_2 = 0 \Rightarrow \\ x_1 = k_1 & \text{si } x_2 = 0 \\ x_2 = \frac{k_1}{\alpha} & \text{si } x_1 = 0 \end{cases}$$

donc on obtient les points $(k_1, 0)$ et $(0, \frac{k_1}{\alpha})$

$$x_2 = 0 \begin{cases} k_2 - x_2 - \beta x_1 = 0 \Rightarrow & x_2 = k_2 - \beta x_1 = 0 \\ \Rightarrow & x_2 = k_2 \text{ si } x_1 = 0 \\ \text{et} & x_1 = \frac{k_2}{\beta} \text{ si } x_2 = 0 \end{cases}$$

donc on obtient les points $(0, k_2)$ et $(\frac{k_2}{\beta}, 0)$

grâce à ces résultats on peut représenter graphiquement les isoclines pour les équations de compétition de *Lotka – Volterra* à deux espèces.

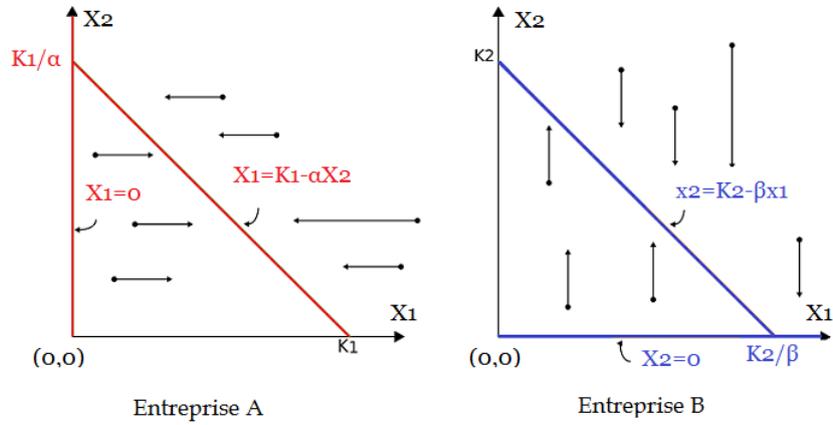


FIGURE 1.6 – Isoclines pour les équations de compétition de Lotka-Volterra des deux entreprises A et B

Les quatre cas d'interaction compétitive :

Selon les résultats obtenus, quatre cas d'interaction peuvent se reproduire entre les deux entreprises

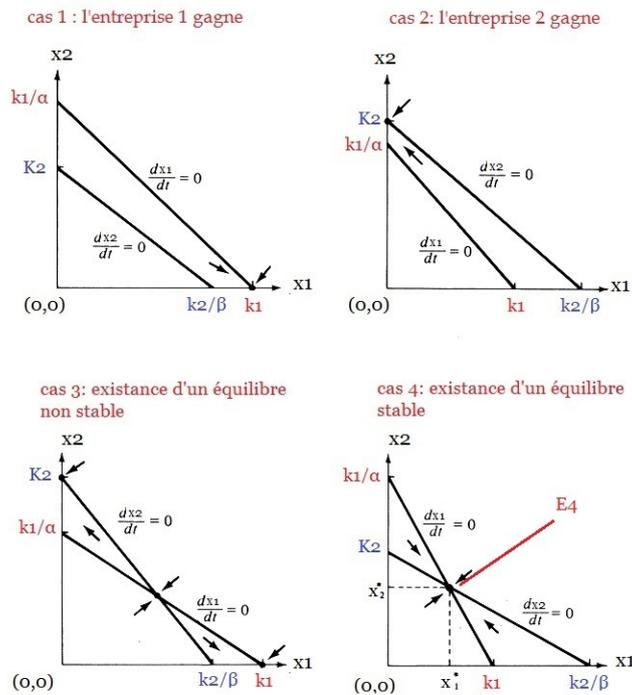


FIGURE 1.7 – Les cas d'interaction compétitive

- **Cas 01** : l'isocline x_1 se trouve au-dessus de l'isocline x_2 et l'entreprise 1 gagne toujours en compétition. Le seul équilibre stable (point) est à $x_1 = k_1$ et $x_2 = 0$
- **Cas 02** : L'inverse, dans lequel l'entreprise 2 est le concurrent supérieur et exclut toujours l'entreprise 1. Ici, le seul équilibre stable (point) est à $x_2 = k_2$ et $x_1 = 0$
- **Cas 03** : Chaque espèce est capable de contenir l'autre, c'est-à-dire que chacune inhibe la croissance de l'autre population plus que la sienne. Trois équilibres possibles existent (points), mais l'équilibre commun des deux espèces (où les deux isoclines se croisent) est instable. Les autres équilibres stables sont $x_2 = k_2$ et $x_1 = 0$ ou $x_1 = k_1$ et $x_2 = 0$. Selon les proportions initiales des deux espèces, l'une ou l'autre peut gagner.
- **Cas 04** : ce cas se présente lorsqu'aucune des deux entreprises n'est capable d'atteindre des densités suffisamment élevées pour éliminer l'autre. Un seul

équilibre existe à x_1^* et x_2^* ; les deux espèces coexistent donc à des densités inférieures à leurs capacités de charge respectives. c-à-d : $k_1 < \frac{k_2}{\beta}$ et $k_2 < \frac{k_1}{\alpha}$ donc les équilibres sont $E_1(0, 0)$, $E_2(k_1, 0)$, $E_3(k_2, 0)$, $E_4(x_1^*, x_2^*)$ tel que les coordonnées de E_4 sont $(\frac{k_1 - \alpha k_2}{1 - \alpha\beta}, \frac{k_2 - \alpha k_1}{1 - \alpha\beta})$

Pour calculer les coordonnées du point $E_4(x_1^*, x_2^*)$, on résout le système

$$\begin{cases} k_1 - x_1 - \alpha x_2 = 0 & \dots (A) \\ k_2 - x_2 - \beta x_1 = 0 & \dots (B) \\ x_1 = k_1 - \alpha x_2 \\ k_2 - x_2 - \beta x_1 = 0 \end{cases}$$

on remplace x_1 dans (B)

$$\begin{aligned} k_2 - x_2 - \beta x_1 = 0 & \Rightarrow k_2 - x_2 - \beta[k_1 - \alpha x_2] = 0 \\ & \Rightarrow (k_2 - \beta k_1) - x_2(1 + \alpha\beta) = 0 \\ & \Rightarrow x_2 = \frac{(k_2 - \beta k_1)}{(1 + \alpha\beta)} \end{aligned}$$

on remplace maintenant x_2 dans A, on obtient

$$x_1 = \frac{(k_1 - \alpha k_2)}{(1 + \alpha\beta)}$$

On résume ces résultats dans le tableau suivant (1.3.1) :

Points d'équilibre	stabilité	condition de stabilité
$(k_1; 0)$	stable	si $\alpha < 0, \beta > 0$
$(0; k_2)$	stable	si $\alpha > 0, \beta < 0$
$(\frac{k_1 - \alpha k_2}{1 - \alpha\beta}, \frac{k_2 - \alpha k_1}{1 - \alpha\beta})$	stable	si $\alpha < 1, \beta < 1$
$(0; 0)$	instable	

TABLE 1.1 – Tableau des quatre points d'équilibre et leurs conditions de stabilité du modèle de compétition de *Lotka – Volterra*

Problème

Un problème majeur qu'une l'entreprise peut engendrer ,est d' être la seule (à un moment donné) à produire un type particulier de biens ou de services ,car elle s'est placée avec succès sur tout les créneaux particuliers (qualité élevée, innovation, etc.) sur les quels ses concurrents n'ont pas travaillé.et cela ne fait pas preuve

de compétitivité : elle pratique une stratégie qui lui permet de s'isoler momentanément ou durablement de la concurrence.

c'est pourquoi la coopération est importante dans ce cas .

1.3.2 Modèle de coopération

coopération

La coopération est une forme d'organisation collective qui entend promouvoir dans le domaine économique et social un système fondé sur une vision partagée des différents acteurs, dans un esprit d'intérêt général .

Remarque 1.3.3. *En cas de coopération les entreprises gardent tout de même une certaine indépendance. Il ne faut pas oublier qu'il s'agit ici de coopération, et non de fusion. Ce type de partenariats est donc garant d'une grande autonomie et liberté.*

On considère toujours deux entreprises A et B mais cette fois en coopération ,le modèle de Lotka-voltera intervient en rajoutant les termes d'interactions au système logistique , ainsi on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{K_1} + \frac{\alpha x_2}{K_1}\right) \\ \frac{dx_2}{dt} = r_2 x_2 \left(1 - \frac{x_2}{K_2} + \frac{\beta x_1}{K_2}\right) \end{cases} \quad (1.12)$$

qui est équivalent à :

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = r_1 x_1 \left(1 - \left[\frac{x_1 - \alpha x_2}{K_1}\right]\right) \\ \frac{dx_2}{dt} = r_2 x_2 \left(1 - \left[\frac{x_2 - \beta x_1}{K_2}\right]\right) \end{cases} \quad (1.13)$$

Les équilibres : Quatre équilibres sont : $(0, 0)$, $(0, k_2)$, $(K_1, 0)$ et $\left(\frac{k_1 + \alpha k_1}{1 - \alpha\beta}, \frac{k_2 + \alpha k_2}{1 - \alpha\beta}\right)$ deux situations qualitativement différentes apparaissant dans le modèle (on a pris $r = 1$) :

- quand $(\alpha\beta > 1)$, on s'attend à ce que les trajectoires issues de $\text{int}(\mathbb{R}_+^2)$ tendent vers l'infini, Les solutions donc croient indéfiniment (voir [29])
- quand $\alpha\beta < 1$, on s'attend à ce que les solutions issues de $\text{int}(\mathbb{R}_+^2)$ tendent vers l'équilibre intérieur

On résume ces résultats dans le tableau (1.2) suivant :

lorsque $0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1$ on dit que l'équilibre $\left(\frac{k_1 + \alpha k_1}{1 - \alpha\beta}, \frac{k_2 + \alpha k_2}{1 - \alpha\beta}\right)$ stable, ce qui signifie que les entreprises A et B contribuent chacune à la production de l'autre, principalement par la technologie de modélisation commune et la gestion et le partage des produits et de la demande, qui diffèrent des autres modèles .([36])

TABLE 1.2 – Tableau des quatre points d'équilibre et leurs conditions de stabilité du modèle de coopération de *Lotka – Volterra*

Points d'équilibre	stabilité	condition de stabilité
$(k_1; 0)$	stable	si $\alpha < 1, \beta > 1$
$(0; k_2)$	stable	si $\alpha > 1, \beta < 1$
$(\frac{k_1 + \alpha k_1}{1 - \alpha\beta}, \frac{k_2 + \alpha k_2}{1 - \alpha\beta})$	stable	si $0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1$
$(0; 0)$	instable	

1.3.3 Modèle de compétition et de coopération

Soit le modèle de compétition et de coopération suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = r_1 x_1 (1 - \frac{x_1}{k_1} - c_1 x_2 + \alpha \frac{x_2}{K_2}) \\ \frac{dx_2}{dt} = r_2 x_2 (1 - \frac{x_2}{k_2} - c_2 x_1 + \beta \frac{x_1}{K_1}) \end{cases} \quad (1.14)$$

Où c_1 et c_2 sont des coefficients de corrélation entre les deux entreprises. Les équilibres de ce système et leurs stabilité locale est résumée dans le tableau (1.3) ci dessus :

TABLE 1.3 – Tableau des quatre points d'équilibre et leurs conditions de stabilité du modèle de compétition et de coopération de *Lotka – Volterra*

Points d'équilibre	stabilité	condition de stabilité
$(k_1; 0)$	stable	si $1 - c_2 k_1 + c_2 < 0$
$(0; k_2)$	stable	si $1 - c_1 k_2 + c_1 < 0$
$(\frac{k_1(k_2 c_1 - \alpha - 1)}{(k_2 c_1 - \alpha)(k_1 c_2 - \beta) - 1}, \frac{k_2(k_1 c_2 - \beta - 1)}{(k_2 c_1 - \alpha)(k_1 c_2 - \beta) - 1})$	stable	si $1 - c_2 k_1 + c_2 > 0$ et $1 - c_1 k_2 + c_1 < 0$
$(0; 0)$	instable	

Où $1 - c_2 k_1 + c_2 < 0$ ou $1 - c_1 k_2 + c_1 < 0$ exprime le degré de concurrence de l'entreprise *A* et de l'entreprise *B*. Au-delà la capacité de coopération entre les entreprises, qui conduisent à une plus grande inhibition de l'entreprise, et déclinent

progressivement. Une seule entreprise qui continue à exister.

$1 - c_2k_1 + c_2 > 0$ ou $1 - c_1k_2 + c_2 < 0$ exprime la coopération entre les entreprises est très efficace. Bien que la concurrence continue d'exister.

Les risques de la compétition et la coopération

Si cette stratégie a de nombreux avantages, elle n'est pas sans risques. Si trop de compétition génère des tensions entre les entreprises, trop de coopération freine incontestablement le marché. Chacune attend que l'autre propose quelque chose de nouveau, sans oser prendre les devants et rien ne se passe. Ce qui est, à terme, contre-productif.

Note :

On déduit que chacun des modèles présentés précédemment possède un équilibre stable qui assure la coexistence des deux espèces.

1.3.4 Rappel sur les solutions de quelques modèles de compétition et/ou de coopération entre deux entreprises

dans ce qui suit on va présenter quelques modèles étudiés :

★ **Li, Yongkun et Zhang, Tianwei [18]** ont étudié le modèle de compétition et de coopération entre n entreprises impliquant des retards variables dans le temps et des contrôles de rétroaction basés sur la théorie de l'écologie modélisé comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_i(t)}{dt} = x_i(t)(r_i(t) - a_i(t)x_i(t) - \sum_{j=1, j \neq i}^n b_{ij}(t)x_j(t - \tau_j(t)) \\ \quad - c(t)[y(t - \gamma(t)) - d(t)]^2 - e_i(t)u_i(t - \lambda_i(t))), i = 1, 2, \dots, n, \\ \frac{du_i(t)}{dt} = -\alpha_i(t)u_i(t) + \sum_{j=1}^n \beta_j(t)x_j(t - \eta_j(t)), i = 1, 2, \dots, n, \\ \frac{dy(t)}{dt} = y(t)(r(t) - a(t)y(t) + \sum_{i=1}^n c_i(t)[x_i(t - \delta_i(t)) - d_i(t)]^2 - e(t)v(t - \lambda(t)) \\ \frac{dv(t)}{dt} = -\mu(t)v(t) + v(t)y(t - \theta(t)) \end{array} \right. \quad (1.15)$$

Des conditions fonctionnelles suffisantes qui garantissent l'existence, l'unicité et la stabilité d'une solution quasi périodique positive du système 1.15 en appliquant le théorème de comparaison des équations différentielles et la construction d'un modèle approprié de Lyapounov.

★ **Mohamadi Ahmad Soltan, Pourabbas Abdolrasoul et Vaezpour Seyed Mansour**, dans [24] ont établi certains critères pour prouver l'existence de solution périodique positive du système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_i(t)}{dt} = x_i(t)(r_i(t) - a_i(t)x_i(t) - \sum_{j=1, j \neq i}^n b_{ij}(t)x_j(t - \tau_j(t)) \\ \quad - c(t)[y(t - \gamma(t)) - d(t)]^2 - e_i(t)u_i(t - \lambda_i(t))) \\ \frac{du_i(t)}{dt} = -\alpha_i(t)u_i(t) + \sum_{j=1}^n \beta_j(t)x_j(t - \eta_j(t)), \\ \frac{dy(t)}{dt} = y(t)[r(t) - a(t)y(t) + b(t)\frac{dy(t)}{dt} - \sum_{i=1}^n c_i(t)[x_i(t - \delta_i(t)) - d_i(t)]^2 - e(t)v(t - \lambda(t))] \\ \frac{dv(t)}{dt} = -\mu(t)v(t) + v(t)y(t - \theta(t)) \end{array} \right. \quad (1)$$

Des conditions suffisantes sont présentées assurant l'existence d'au moins une solution périodique positive du système 1.16, (En s'appuyant sur le théorème de point fixe de Banach ainsi que des techniques d'inégalité)

★ **Liao Maoxin e, Xu Changjin et Tang Xianhua [19]** ont étudié les comportements dynamiques pour un modèle de concurrence et de coopération entre deux entreprises avec deux retards :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{y}_1(t) = (y_1(t) + c_1)(d_1 - a_1y_1(t - \tau_1) - b_1y_2^2(t - \tau_2)) \\ \dot{y}_2(t) = (y_2(t) + c_2)(d_2 - a_2y_2(t - \tau_1) - b_2y_1^2(t - \tau_2)) \end{array} \right. \quad (1.17)$$

où $d_i = r_i - a_i c_i (i = 1, 2)$ Des conditions suffisantes sont présentées en assurant la stabilité et l'existence d'un unique équilibre positif ainsi que l'existence de la bifurcation de Hopf à l'équilibre de 1.17 .En clôturant leurs étude par plusieurs simulations numériques .

★ **Xu CJ et Liao MX [32]** ont traité un modèle stochastique de concurrence et de coopération entre deux entreprises.

$$\left\{ \begin{array}{l} dx_1 = x_1(t) \left[1 - \frac{x_1(t)}{K} - \frac{\alpha(x_2(t) - c_2)^2}{K} \right] [r_1 dt + \sigma_1 dW_1(t)] \\ dx_2 = x_2(t) \left[1 - \frac{x_2(t)}{K} - \frac{\beta(x_1(t) - c_1)^2}{K} \right] [r_2 dt + \sigma_2 dW_2(t)] \end{array} \right. \quad (1.18)$$

Quelques critères très vérifiables sur la stabilité globale des l'équilibre du système 1.18 sont établis.Des simulations sont données pour illustrer leurs principaux résultats théoriques.

★ **Sirghi NICOLETA , Neamtu M et Cismas LM [26]** ont étudié un modèle de concurrence et de coopération entre deux entreprises avec un délai réparti. Lorsqu'une entreprise subit un dommage par la concurrence, l'autre pourrait en bénéficier. Les deux entreprises peuvent simultanément profiter de la coopération. Le temps de production moyen est pris en compte. Le modèle mathématique est décrit par un système à deux équations différentielles non linéaires avec des retards distribués. Deux types de noyaux sont

considérés : *Dirac* et faible.

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = r_1 x_1(t) \left[1 - \frac{\int_{-\infty}^t h_1(t-s)x_1(s)ds}{K_1} - \frac{\alpha(\int_{-\infty}^t h_2(t-s)x_2(s)ds - c_2)^2}{K_2} \right] \\ \dot{x}_2(t) = r_2 x_2(t) \left[1 - \frac{\int_{-\infty}^t h_1(t-s)x_2(s)ds}{K_2} - \frac{\beta(\int_{-\infty}^t h_2(t-s)x_1(s)ds - c_1)^2}{K_1} \right] \end{cases} \quad (1.19)$$

Des conditions suffisantes sont présentées assurant la stabilité ,ainsi une diffusion stochastique de la technologie.En suite ils ont illustré leurs résultats par des simulations numériques.

- ★ **Xu Changjin et Li Peiluan [30]** ont proposé et traité un modèle de concurrence et de coopération entre deux entreprises avec des délais variables dans le temps et des contrôles de retour d'informations, qui peuvent décrire efficacement la concurrence et la coopération dans des environnements économiques réels.

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = x_1(t) [r_1(t) - a_1(t)x_1(t) - b_1(t)(x_2(t) - c_2(t))^2 - e_1(t)u_1(t - \tau_1(t))] \\ \frac{du_1(t)}{dt} = -\alpha(t)u_1(t) + \beta_1(t)x_1(t - \sigma_1(t)) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = x_2(t) [r_2(t) - a_2(t)x_2(t) - b_2(t)(x_1(t) - c_1(t))^2 - e_2(t)u_2(t - \tau_2(t))] \\ \frac{du_2(t)}{dt} = -\alpha(t)u_2(t) + \beta_2(t)x_2(t - \sigma_2(t)) \end{cases} \quad (1.20)$$

Des conditions suffisantes assurant l'existence d'une unique solution presque-périodique asymptotiquement stable, non négative du système 1.20 , en construisant une fonction de Lyapounov ,et en présentant un exemple pour expliquer la la signification économique des résultats mathématiques obtenus.

- ★ **Guerrini Luca [14]** a traité des comportements dynamiques d'un modèle de compétition et de coopération entre deux entreprises avec deux petits délais modélisé comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x} = x(r_1 - a_1 x_{d_1}) - b_1(y_{d_2} - c_2)^2 \\ \dot{y} = y(r_2 - a_2 x_{d_1}) - b_2(y_{d_2} - c_1)^2 \end{cases} \quad (1.21)$$

La simplicité des racines caractéristiques du système 1.21 est prouvée et une analyse du modèle avec de petits délais est fournie.

- ★ **Lu Lin et Lian Yi and Li, Chaoling [20]** ont étudié le modèle de concurrence et de coopération entre deux entreprises à retards multiples et

des contrôles de retour d'information suivant :

$$\begin{cases} x_1(n+1) = x_1(n) \exp\{r_1(n) - a_1(n)x_1(n - \tau_1(n)) \\ \quad - b_1(n)(x_2(n - \tau_2(n)) - c_2(n))^2 - \beta_1(n)u_1(n)\} \\ x_2(n+1) = x_2(n) \exp\{r_2(n) - a_2(n)x_2(n - \tau_1(n)) \\ \quad - b_2(n)(x_1(n - \tau_2(n)) - c_1(n))^2 - \beta_2(n)u_2(n)\} \\ \Delta u_1(n) = -\gamma_1(n)u_1(n) + \eta_1(n)x_1(n) \\ \Delta u_2(n) = -\gamma_2(n)u_2(n) + \eta_2(n)x_2(n) \end{cases} \quad (1.22)$$

Des conditions suffisantes garantissent l'existence et la stabilité globale d'une solution périodique du modèle 1.22 grâce à la théorie d'inégalité différentielle

★ **Zhang.Xin, Zhang.Zizhen et Wade.Matthew.J [35]** ont étudié le système de concurrence et de coopération entre deux entreprises avec de multiples retards constants suivant :

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = (y_1(t) + c_1)(d_1 - a_1y_1(t - \tau_1) - b_1y_2^2(t - \tau_2)), \\ \dot{y}_2(t) = (y_2(t) + c_2)(d_2 - a_2y_2(t - \tau_1) - b_2y_1^2(t - \tau_3)) \end{cases} \quad (1.23)$$

En analysant l'équation caractéristique associée au système 1.23 l'existence des bifurcations de Hopf est démontrée ainsi que La stabilité de l'unique équilibre positif. En outre, les formules explicites déterminent la stabilité et la direction des solutions périodiques bifurquant de Hopf les bifurcations sont obtenues en appliquant la théorie du centre multiple et la méthode de la forme normale. Enfin, une attention particulière est accordée à certaines simulations numériques afin de soutenir les résultats obtenus .

★ **Xu Changjin , Li Peiluan ,Xiao Qimei et Yuan Shuai [31]** ont étudié un modèle de concurrence et de coopération entre deux entreprises avec de multiples retards et des contrôles de retour d'informations.suivant :

$$\begin{cases} \dot{u}_1(t) = u_1(t)[\gamma_1(t) - \alpha_1(t)u_1(t) - \beta_1(u_2(t) - \sigma_2(t))^2 - a_1(t)v_1(t - \eta_1(t))] \\ \dot{v}_1(t) = -\delta_1(t)v_1(t) + \varrho(t)u_1(t - \zeta_1(t)) \\ \dot{u}_2(t) = u_2(t)[\gamma_2(t) - \alpha_2(t)u_2(t) - \beta_2(u_1(t) - \sigma_1(t))^2 - a_2(t)v_2(t - \eta_2(t))] \\ \dot{v}_2(t) = -\delta_2(t)v_2(t) + \varrho(t)u_2(t - \zeta_2(t)) \end{cases} \quad (1.24)$$

Un ensemble de conditions suffisantes qui garantissent l'existence d'une solution périodique de (1.24) sont établis en appliquant le théorème du point fixe de contraction stricte. Un exemple est donné afin de vérifier les résultats théoriques obtenus.

L'existence, l'unicité et la stabilité des solutions périodique et presque-périodiques sont d'une grande importance dans l'étude de la dynamique d'un système différentiel .

Conclusion

Dans ce chapitre on a rappelé quelques propriétés, définitions intéressantes qui sont nécessaires pour l'étude de l'existence de la solution pseudo presque-périodiques d'un type d'un modèle de compétition et de coopération entre deux entreprises avec retards dans le chapitre suivant .

Chapitre 2

Solution pseudo presque-périodiques d'un modèle de compétition et de coopération entre deux entreprises avec retards

2.1 compétition et coopération entre deux entreprises

Dans le monde réel, les concurrents envahissent toujours les actifs essentiels des entreprises par des contre-plans et apportent la perte réelle, qui est pas transitoire s'est produit, il y a un délai. En outre, un long délai peut nuire à la stabilité d'un système. En outre, comme nous le savons, la situation des entreprises est souvent distribuée par des forces imprévisibles qui peuvent entraîner des changements dans les entreprises".

Il est donc nécessaire d'étudier des modèles avec des variables de contrôle qui sont des fonctions de perturbation [16, 34], les phénomènes périodiques et presque-périodiques sont très répandus dans la nature, et le phénomène presque-périodique est plus fréquent que le phénomène périodique. C'est pourquoi ils ont été l'objet de l'analyse intensive de nombreux auteurs (voir les travaux dans la partie (1.3.4) de préliminaire). Un problème très important pour certaines applications est la recherche de solution périodique de système du type $\frac{dx}{dt} = f(x, t)$, où $f(x, t)$, application continue dans \mathbb{R}^n , est supposée périodique par rapport à la variable réelle t de période T .

On ne dispose d'aucune méthode d'investigation assez puissante pour répondre à ces questions de manière générale. Les méthodes existantes sont de deux sortes : méthode de perturbation, méthode de centrage, permettant l'étude de systèmes

quasi linéaires, c'est-à-dire de systèmes dans lesquels la partie non linéaire apparaît multipliée par un paramètre qu'on suppose petit ; le calcul de représentations asymptotiques des solutions périodiques est généralement possible, ainsi que l'étude de la stabilité de ces solutions. Les autres sont des méthodes topologiques qui fournissent pour certains systèmes fortement non linéaires des résultats d'existence de solutions périodiques.

Dans ce travail, on part du principe que deux entreprises sont constamment en concurrence, et lorsqu'une entreprise subit un préjudice de la part d'une autre entreprise du fait de la concurrence, une autre pourrait et deux entreprises peuvent bénéficier simultanément de la coopération. En attendant, la durée de temps de production pour les entreprises jouerait également un rôle important. Nous avons donc constaté ce qui suit modèle de concurrence et de coopération de deux entreprises avec deux délais [23] :

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = x_1(t)[r_1(t) - a_1(t)x_1(t) - b_1(t)(x_2(t - \tau_2(t)))^2] \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = x_2(t)[r_2(t) - a_2(t)x_2(t)^2 + b_2(t)(x_1(t - \tau_1(t)))^2] \end{cases} \quad (2.1)$$

lorsque les conditions initiales sont de la forme suivante

$$\begin{cases} x_1(s) = \varphi_1(s) \geq 0, & s \in [-\tau, 0], \varphi_1(0) > 0, \\ x_2(s) = \varphi_2(s) \geq 0, & s \in [-\tau, 0], \varphi_2(0) > 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

où $\varphi_1(\cdot)$, $\varphi_2(\cdot)$ désignent des fonctions continues bornées à valeur réelle définies sur $[-\tau, 0]$, avec

$$\tau = \max \sup_{s \in \mathbb{R}} \tau_1(s), \sup_{s \in \mathbb{R}} \tau_2(s)$$

τ est une constante non négative qui représente la gestation périodique de la production pour deux entreprises, τ_2 dans la première équation du système (2.1) indique le retard de blocage de l'entreprise B par rapport à A , et τ_1 dans la deuxième équation du système (2.1) indique le retard de promotion de l'entreprise A à B .

Des conditions suffisantes seront présentées assurant l'existence, l'unicité et la stabilité exponentielle de la solution presque-périodique de (2.1), en s'appuyant sur le théorème du point fixe de *Banach*, la construction d'une fonction de *Lyapounov* ainsi que des techniques d'inégalités différentielles.

Dans la section suivante on donne quelques définitions, notations et résultats sur les fonctions presque-périodiques qu'on utilisera par la suite

2.2 Présentation du modèle et des hypothèses

Soit le modèle de compétition et de coopération entre deux entreprises avec retards

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = x_1(t) [r_1(t) - a_1(t)x_1(t) - b_1(t)(x_2(t - \tau_2(t)) - c_2(t))^2], \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = x_2(t) [r_2(t) - a_2(t)x_2(t) + b_2(t)(x_1(t - \tau_1(t)) - c_1(t))^2], \end{cases} \quad (2.3)$$

Où

x_1 , x_2 sont les sorties des entreprises A et B respectivement .

r_1 , r_2 représentent les taux de croissance de A et B respectivement .

a_1 , a_2, b_1 et b_2 représentent les coefficients concurrentiels de deux entreprises (Ces valeurs n'ont pas à être égales).

K désigne la capacité de charge dans des conditions de nature illimitées .

c_1 et c_2 représentent les quantités de production initiales de l'entreprise A et B respectivement .

On impose les hypothèses suivantes :

(H1) Les fonctions retards $t \mapsto \tau_1(t)$, $t \mapsto \tau_2(t)$ sont presque-périodiques, bornées, positives, continuellement différentiables et satisfait

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \{\tau_1'(t), \tau_2'(t)\} < 1.$$

(H2) Les fonctions $t \mapsto r_1(t)$, $t \mapsto r_2(t)$ sont presque-périodiques avec

$$\inf_{t \in \mathbb{R}} (r_1(t)) = r_{1*} > 0, \inf_{t \in \mathbb{R}} (r_2(t)) = r_{2*} > 0.$$

(H3) Les fonctions $t \mapsto a_1(t)$, $t \mapsto a_2(t)$, $t \mapsto b_1(t)$, $t \mapsto b_2(t)$, $t \mapsto c_1(t)$, $t \mapsto c_2(t)$ sont pseudo presque-périodiques et les fonctions avec

$$a_1^+ = \sup_{t \in \mathbb{R}} |a_1(t)|, \quad a_2^+ = \sup_{t \in \mathbb{R}} |a_2(t)|,$$

$$b_1^+ = \sup_{t \in \mathbb{R}} |b_1(t)|, \quad b_2^+ = \sup_{t \in \mathbb{R}} |b_2(t)|,$$

$$c_1^+ = \sup_{t \in \mathbb{R}} |c_1(t)|, \quad c_2^+ = \sup_{t \in \mathbb{R}} |c_2(t)|.$$

2.3 Résultats

Définition 16. [9] soit $x \in \mathbb{R}^n$ et $Q(t)$ soit une matrice $n \times n$ continue définie sur \mathbb{R} . Le système linéaire

$$x'(t) = Q(t)x(t) \quad (2.4)$$

admettrait une dichotomie exponentielle sur \mathbb{R} s'il existe une projection P , des constantes positives $\alpha_i, \beta_i, i = 1, 2$ et la solution fondamentale de la matrice $X(t)$ du système (2.4) satisfaisant

$$\begin{aligned} |X(t)PX^{-1}(s)| &\leq \beta_1 \exp^{-\alpha_1(t-s)}, t \geq s, \\ |X(t)(I - PX^{-1}(s))| &\leq \beta_2 \exp^{-\alpha_2(s-t)}, t \leq s, \end{aligned}$$

où I est la matrice d'identité .

Lemme 2. [9] Supposons que $Q(t)$ soit une fonction matricielle presque périodique et $g(t) \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}_n)$.

Si le système linéaire (2.4) admet une dichotomie exponentielle, alors le système pseudo-périodique

$$x'(t) = Q(t)x(t) + g(t)$$

a une solution pseudo-périodique unique $x(t)$, et

$$x(t) = \int_{-\infty}^t X(t)PX^{-1}(s)f(s)ds - \int_t^{+\infty} X(t)(I - P)X^{-1}(s)f(s)ds$$

Lemme 3. soit $c_i(t)$ une fonction presque périodique sur \mathbb{R} et

$$M[c_i] = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_t^{t+T} c_i(s)ds > 0, i = 1, 2, \dots, n$$

Alors , le système linéaire suivant

$$x'(t) = \text{diag}(c_1(t), c_2(t), \dots, c_n(t))x(t)$$

admet une dichotomie exponentielle sur \mathbb{R}

Lemme 4. [22] Si $\varphi(\cdot) \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, alors $\varphi(\cdot - h) \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$.

Démonstration. Par définition, on peut écrire

$$\varphi(\cdot) = \varphi_1(\cdot) + \varphi_2(\cdot)$$

où $\varphi_1(\cdot) \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ et $\varphi_2(\cdot) \in PAP_0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. Ainsi

$$\varphi(\cdot - h) = \varphi_1(\cdot - h) + \varphi_2(\cdot - h), h \in \mathbb{R}.$$

Sachant que $\varphi_1(\cdot - h) \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$.

On montre que $\varphi_2(\cdot - h) \in PAP_0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, c'est-à-dire

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \|\varphi_2(t - h)\| dt = 0,$$

on distingue deux cas ($h \geq 0$ et $h \leq 0$) :

A) Pour $h \geq 0$

On pose

$$s = t - h \Rightarrow ds = dt,$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
& \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \|\varphi_2(t-h)\| dt \\
&= \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T-h}^{+T-h} \|\varphi_2(s)\| ds \\
&= \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T-h}^{+T-h} \|\varphi_2(s)\| ds + \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{+T-h}^{+T+h} \|\varphi_2(s)\| ds \\
&\quad - \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{+T-h}^{+T+h} \|\varphi_2(s)\| ds \\
&= \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T-h}^{+T+h} \|\varphi_2(s)\| ds - \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{+T-h}^{+T+h} \|\varphi_2(s)\| ds \\
&\leq \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T-h}^{+T+h} \|\varphi_2(s)\| ds,
\end{aligned}$$

B) Pour $h \leq 0$ on a :

$$\begin{aligned}
& \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \|\varphi_2(t-h)\| dt \\
&= \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T-h}^{+T-h} \|\varphi_2(s)\| ds \\
&= \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T-h}^{+T-h} \|\varphi_2(s)\| ds + \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T+h}^{-T-h} \|\varphi_2(s)\| ds \\
&\quad - \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T+h}^{-T-h} \|\varphi_2(s)\| ds \\
&= \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T+h}^{+T-h} \|\varphi_2(s)\| ds - \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T+h}^{-T-h} \|\varphi_2(s)\| ds \\
&\leq \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T+h}^{+T-h} \|\varphi_2(s)\| ds,
\end{aligned}$$

de A et B, donc on a

$$\begin{aligned}
\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \|\varphi_2(t-h)\| dt &= \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T-|h|}^{+T+|h|} \|\varphi_2(s)\| ds \\
&= \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{2(T+|h|)}{2T} \frac{1}{2(T+|h|)} \int_{-T-|h|}^{+T+|h|} \|\varphi_2(s)\| ds \\
&= \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{2(T+|h|)}{2T} \times \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2(T+|h|)} \int_{-T-|h|}^{+T+|h|} \|\varphi_2(s)\| ds \\
&= 1 \times 0 \\
&= ,0
\end{aligned}$$

d'où $\varphi_2(\cdot - h) \in PAP_0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$.

Comme $\varphi_1(\cdot - h) \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ et $\varphi_2(\cdot - h) \in PAP_0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, alors $\varphi(\cdot - h) \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$.

Lemme 5. [22] Si $\varphi, \psi \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, alors $\varphi \times \psi \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Démonstration. Par définition, on peut écrire

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2, \psi = \psi_1 + \psi_2$$

tel que $\varphi_1, \psi_1 \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et $\varphi_2, \psi_2 \in PAP_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |\varphi_2| dt &= 0 \\
\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |\psi_2| dt &= 0
\end{aligned}$$

ainsi

$$\varphi\psi = \varphi_1\psi_1 + \varphi_1\psi_2 + \varphi_2\psi_1 + \varphi_2\psi_2$$

On sait que $\varphi_1\psi_1 \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

maintenant on montre que $(\varphi_1\psi_2 + \varphi_2\psi_1 + \varphi_2\psi_2) \in PAP_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, c'est-à-dire

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |\varphi_1(t)\psi_2(t) + \varphi_2(t)\psi_1(t) + \varphi_2(t)\psi_2(t)| dt = 0.$$

On a

$$\begin{aligned} & \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T | \varphi_1(t)\psi_2(t) + \varphi_2(t)\psi_1(t) + \varphi_2(t)\psi_2(t) | dt \\ & \leq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T (| \varphi_1(t)\psi_2(t) | + | \varphi_2(t)\psi_1(t) | + | \varphi_2(t)\psi_2(t) |) dt \end{aligned}$$

comme $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1 \in BC(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (car $AP(\mathbb{R}, \mathbb{R}), PAP_0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subset BC(\mathbb{R}, \mathbb{R})$) donc

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} | \varphi_1(t) | = A < +\infty$$

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} | \varphi_2(t) | = B < +\infty$$

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} | \psi_2(t) | = C < +\infty$$

avec A, B et C des constantes de \mathbb{R}_+ donc

$$\begin{aligned} & \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T | \varphi_1(t)\psi_2(t) + \varphi_2(t)\psi_1(t) + \varphi_2(t)\psi_2(t) | dt \\ & \leq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T (| \varphi_1(t)\psi_2(t) | + | \varphi_2(t)\psi_1(t) | + | \varphi_2(t)\psi_2(t) |) dt \\ & = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T | \varphi_1(t)\psi_2(t) | dt + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T | \varphi_2(t)\psi_1(t) | dt + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T | \varphi_2(t)\psi_2(t) | dt \\ & = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T | \varphi_1(t) | | \psi_2(t) | dt + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T | \varphi_2(t) | | \psi_1(t) | dt \\ & + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T | \varphi_2(t) | | \psi_2(t) | dt \\ & = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \sup_{t \in \mathbb{R}} (| \varphi_1(t) |) | \psi_2(t) | dt + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T | \varphi_2(t) | \sup_{t \in \mathbb{R}} (| \psi_1(t) |) dt \\ & + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \sup_{t \in \mathbb{R}} (| \psi_2(t) |) | \varphi_2(t) | dt \\ & = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T A | \psi_2(t) | dt + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T | \varphi_2(t) | B dt + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T C | \varphi_2(t) | dt \\ & = A \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T | \psi_2(t) | dt + B \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T | \varphi_2(t) | dt + C \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T | \varphi_2(t) | dt \\ & = A \times 0 + B \times 0 + C \times 0 \\ & = 0, \end{aligned}$$

d'où

$$(\varphi_1\psi_2 + \varphi_2\psi_1 + \varphi_2\psi_2) \in PAP_0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n).$$

Comme $(\varphi_1\psi_1) \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ et $(\varphi_1\psi_2 + \varphi_2\psi_1 + \varphi_2\psi_2) \in PAP_0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, alors $\varphi \times \psi \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Remarque 2.3.1. *Les deux Lemmes (4) et (5) sont plus détaillées que les lemmes (1) et (2) de l'article [3] sur l'existence et unicité de la solution pseudo presque-périodique d'un système dynamique nommé réseau de neurones récurrent avec poids ainsi que retard variables dans le temps.*

Lemme 6. [1] *Si $f(\cdot) \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$, $\tau(\cdot) \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\sup_t \{\tau'(t)\} \leq \tau^+ < 1$, alors $f(\cdot - \tau(\cdot)) \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$.*

Démonstration. Soit

$$f = f_1 + f_2 \text{ et } \tau = \tau_1 + \tau_2$$

où $f_1(\cdot), \tau_1(\cdot) \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $f_2(\cdot), \tau_2(\cdot) \in PAP_0(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$.

Pour tout $t \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} f(t - \tau(t)) &= f_1(t - \tau(t)) + f_2(t - \tau(t)) \\ &= f_1(t - \tau_1(t)) + f_1(t - \tau_1(t)) - f_1(t - \tau_1(t)) + f_2(t - \tau(t)) \\ &= X_1(t) + X_2(t) + X_3(t), \end{aligned}$$

où $X_1(t) = f_1(t - \tau_1(t))$, $X_2(t) = f_2(t - \tau(t))$ et $X_3(t) = f_1(t - \tau(t)) - f_1(t - \tau_1(t))$.
Maintenant on doit prouver que $X_1(t) \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

De la continuité uniforme de $f_1(\cdot)$, on peut choisir, pour toute $\epsilon > 0$, une constante

$$0 < \delta - \delta(\epsilon) < \frac{\epsilon}{2}$$

de sorte que pour tout $t', t'' \in \mathbb{R}$ satisfaisant $|t' - t''| < \delta$ et l'estimation suivante

$$|x_1(t') - x_1(t'')| < \frac{\epsilon}{2}. \quad (2.5)$$

En outre, à partir de la théorie des fonctions presque-périodiques, il s'ensuit que pour $\delta > 0$, il est possible de trouver un nombre réel $l = l(\delta) > 0$ pour tout intervalle de longueur l , il existe un nombre $\tau = \tau(\epsilon)$ dans ce intervalle tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$|\tau(t + \eta) - \tau(t)| < \delta, |f_1(t + \eta) - f_1(t)| < \frac{\delta}{2} < \delta. \quad (2.6)$$

En combinant (2.5) et (2.6), on obtient

$$\begin{aligned}
| f_1((t + \eta) - \tau(t + \eta)) - x_1(t - \tau(t)) | &\leq | f_1((t + \eta) - \tau(t + \eta)) - f_1((t + \eta) - \tau(t)) | \\
&+ | f_1((t + \eta) - \tau(t)) - f_1(t - \tau(t)) | \\
&\leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta,
\end{aligned}$$

ce qui prouve que $X_1(\cdot) \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Ensuite, on doit prouver que $X_2(\cdot), X_3(\cdot) \in PAP_0(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$. Il faut prouver

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T | X_2(t) | dt = 0,$$

on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2T} \int_{-T}^T | X_2(t) | dt &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T | f_2(t - \tau(t)) | dt \\
&= \frac{1}{2T} \int_{-T-\tau(T)}^{T-\tau(T)} \frac{1}{1 - \tau'(t)} | f_2(s) | ds \\
&\leq \frac{1}{\inf_t (1 - \tau'(t))} \frac{T + \bar{\tau}}{T} \frac{1}{2(T + \bar{\tau})} \int_{-(T+\bar{\tau})}^{(T+\bar{\tau})} | f_2(s) | ds,
\end{aligned}$$

Ce qui prouve que $X_2(\cdot) \in PAP_0(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$. Maintenant, on doit prouver que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T | X_3(t) | dt = 0.$$

Puisque $f_1(\cdot) \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, alors f_1 est uniformément continu, c'est-à-dire pour tous $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $t, s \in \mathbb{R}_+, |t - s| < \eta$, on a

$$| f_1(t) - f_1(s) | < \frac{\varepsilon}{2}$$

D'autre part, $\tau_2(\cdot) \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$, puis l'ensemble $C_\delta = \{ t \in \mathbb{R} : |\tau_2(t) - \tau_1(t)| \geq \delta \}$ est un sous-ensemble ergodique zéro dans \mathbb{R} pour tous $\delta > 0$ (voir [?]). En particulier, on peut trouver $\gamma > 0$ de sorte que pour tout $T > \gamma$ on a

$$\frac{m([-T, T] \cap C_\eta)}{2T} < \frac{\varepsilon}{4 \| x_1 \|_\infty}.$$

donc

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f_1(t - \tau(t)) - f_1(t - \tau_1(t))| dt &= \frac{1}{2T} \int_{[-T, T] \setminus C_\eta} |f_1(t - \tau(t)) - f_1(t - \tau_1(t))| dt \\
&+ \frac{1}{2T} \int_{[-T, T] \cap C_\eta} |f_1(t - \tau(t)) - f_1(t - \tau_1(t))| dt \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + 2 \|f_1\|_\infty \frac{m([-T, T] \cap C_\eta)}{2T} \\
&< \varepsilon,
\end{aligned}$$

ça montre que $X_3(\cdot) \in PAP_0(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$.

Lemme 7. [22] *Sous les hypothèses (H1)-(H3) et définissons l'opérateur non linéaire Γ comme suit, pour tout $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$, $(\Gamma\varphi)(t) := x_\varphi(t)$ où*

$$x_\varphi(t) = \begin{pmatrix} \int_t^{+\infty} e^{-\int_t^s r_1(u) du} F_1(s) ds \\ \int_t^{+\infty} e^{-\int_t^s r_2(u) du} F_2(s) ds \end{pmatrix},$$

et

$$\begin{cases} F_1(s) = \varphi_1(t) \left[a_1(t)\varphi_1(t) + b_1(t)(\varphi_2(t - \tau_2(t)) - c_2(t))^2 \right], \\ F_2(s) = \varphi_2(t) \left[a_2(t)\varphi_2(t) - b_2(t)(\varphi_1(t - \tau_1(t)) - c_1(t))^2 \right], \end{cases}$$

alors Γ opérateur de $PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ dans $PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, \rho)$.

Démonstration Premièrement, notant que les fonctions suivantes

$$F_1 : s \mapsto \varphi_1(s) \left[a_1(s)\varphi_1(s) + b_1(t)(\varphi_2(s - \tau_2(s)) - c_2(s))^2 \right],$$

and

$$F_2 : s \mapsto \varphi_2(s) \left[a_2(s)\varphi_2(s) - b_2(s)(\varphi_1(s - \tau_1(s)) - c_1(s))^2 \right],$$

sont pseudo-presque-périodique, en utilisant les lemmes 4, 5, 6 et les théorèmes des fonctions pseudo-périodiques ([2],[33]).

Par conséquent, F_1 et F_2 peuvent être exprimées par

$$F_1 = F_{11} + F_{12}, \quad F_2 = F_{21} + F_{22}$$

où $F_{11}, F_{21} \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $F_{12}, F_{22} \in PAP_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. donc

$$\begin{aligned}
(\Gamma_\varphi)(t) &= \begin{pmatrix} \int_t^{+\infty} e^{-\int_t^s r_1(u)du} F_1(s)ds \\ \int_t^{+\infty} e^{-\int_t^s r_2(u)du} F_2(s)ds \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \int_t^{+\infty} e^{-\int_t^s r_1(u)du} [F_{11}(s) + F_{12}(s)]ds \\ \int_t^{+\infty} e^{-\int_t^s r_2(u)du} [F_{21}(s) + F_{22}(s)]ds \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \int_t^{+\infty} e^{-\int_t^s r_1(u)du} F_{11}(s)ds + \int_t^{+\infty} e^{-\int_t^s r_1(u)du} F_{12}(s)ds \\ \int_t^{+\infty} e^{-\int_t^s r_2(u)du} F_{21}(s)ds + \int_t^{+\infty} e^{-\int_t^s r_2(u)du} F_{22}(s)ds \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} G_{11}(t) + G_{12}(t) \\ G_{21}(t) + G_{22}(t) \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

Où

$$\begin{cases} G_{11}(t) = \int_t^{+\infty} e^{-\int_t^s r_1(u)du} F_{11}(s)ds, \\ G_{12}(t) = \int_t^{+\infty} e^{-\int_t^s r_1(u)du} F_{12}(s)ds, \\ G_{21}(t) = \int_t^{+\infty} e^{-\int_t^s r_2(u)du} F_{21}(s)ds, \\ G_{22}(t) = \int_t^{+\infty} e^{-\int_t^s r_2(u)du} F_{22}(s)ds. \end{cases}$$

Prouvons la quasi-périodicité de

$$G_{11} : t \mapsto \int_t^{+\infty} e^{-\int_t^s r_1(u)du} F_{11}(s)ds$$

et

$$G_{21} : t \mapsto \int_t^{+\infty} e^{-\int_t^s r_2(u)du} F_{21}(s)ds.$$

Pour $\epsilon > 0$, tenant compte de la quasi-périodicité de F_{11} , on considère un nombre L_ϵ tel que dans tout intervalle $[\alpha, \alpha + L_\epsilon]$ on trouve un nombre δ , avec une propriété :

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |F_{11}(t + \delta) - F_{11}(t)| < \epsilon.$$

Ensuite, on peut écrire

$$\begin{aligned}
& | G_{11}(t + \delta) - G_{11}(t) | \\
= & \left| \int_{t+\delta}^{+\infty} e^{-\int_{t+\delta}^s r_1(u)du} F_{11}(s)ds - \int_t^{+\infty} e^{-\int_t^s r_1(u)du} F_{11}(s)ds \right| \\
= & \left| \int_{t+\delta}^{+\infty} e^{-\int_{t+\delta}^{s-\delta} r_1(m+\delta)dm} F_{11}(s)ds - \int_t^{+\infty} e^{-\int_t^s r_1(u)du} F_{11}(s)ds \right| \\
= & \left| \int_t^{+\infty} e^{-\int_t^s r_1(m+\delta)dm} F_{11}(s + \delta)ds - \int_t^{+\infty} e^{-\int_t^s r_1(u)du} F_{11}(s)ds \right| \\
= & \left| \int_t^{+\infty} e^{-\int_t^s r_1(m+\delta)dm} F_{11}(s + \delta)ds - \int_t^{+\infty} e^{-\int_t^s r_1(m+\delta)dm} F_{11}(s)ds \right. \\
& \left. + \int_t^{+\infty} e^{-\int_t^s r_1(m+\delta)dm} F_{11}(s)ds - \int_t^{+\infty} e^{-\int_t^s r_1(u)du} F_{11}(s)ds \right| \\
\leq & \int_t^{+\infty} e^{-\int_t^s r_1(m+\delta)dm} | F_{11}(s + \delta) - F_{11}(s) | ds \\
& + \int_t^{+\infty} | e^{-\int_t^s r_1(m+\delta)dm} - e^{-\int_t^s r_1(m)dm} | | F_{11}(s) | ds
\end{aligned}$$

Par le théorème de *Lebesgue* de convergence dominée , on obtient immédiatement , $G_{11} \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et de la même manière, on prouve que $G_{21} \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Maintenant, on s'intéresse à G_{12} and G_{22} . On doit prouver que

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T | G_{12}(t) | dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \left| \int_t^{+\infty} e^{-\int_t^s r_1(u)du} F_{12}(s) \right| ds dt = 0,$$

et

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T | G_{22}(t) | dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \left| \int_t^{+\infty} e^{-\int_t^s r_2(u)du} F_{22}(s) \right| ds dt = 0.$$

évidemment

$$\begin{aligned}
\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T | G_{12}(t) | dt &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \left| \int_t^{+\infty} e^{-\int_t^s r_1(u)du} F_{12}(s)ds \right| dt \\
&\leq \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_t^{+\infty} e^{-(s-t)r_{1*}} | F_{12}(s) | ds dt \\
&= I_1 + I_2,
\end{aligned}$$

où

$$I_1 = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_t^T e^{-(s-t)r_{1*}} | F_{12}(s) | ds dt$$

et

$$I_2 = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_T^{+\infty} e^{-(s-t)r_{1*}} |F_{12}(s)| ds dt$$

On a,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_t^T e^{-(s-t)r_{1*}} |F_{12}(s)| ds dt &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_0^{T-t} e^{-(m)r_{1*}} |F_{12}(m+t)| dm dt \\ &\leq \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_0^{+\infty} e^{-(m)r_{1*}} |F_{12}(m+t)| dm dt \\ &\leq \int_0^{+\infty} e^{-(m)r_{1*}} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |F_{12}(m+t)| dt dm. \end{aligned}$$

Puisque la fonction $F_{12} \in PAP_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et de Lemme 3 $F_{12}(\cdot + m) \in PAP_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, la fonction définie par

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^T |F_{12}(m+t)| dt$$

est limitée et satisfaite

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |F_{12}(m+t)| dt = 0$$

Par conséquent, par le théorème de convergence dominée de *Lebesgue*, on obtient

$$I_1 = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_t^T e^{-(s-t)r_{1*}} |F_{12}(s)| ds dt = 0.$$

D'autre part, notant $\text{quesup}_{t \in \mathbb{R}} |F_{12}(s)| < \infty$, alors

$$\begin{aligned} I_2 &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \left[\int_T^{+\infty} e^{-(s-t)r_{1*}} |F_{12}(s)| ds \right] dt \\ &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \left[\int_{T-t}^{+\infty} e^{-mr_{1*}} |F_{12}(t+m)| dm \right] dt \end{aligned}$$

Théorème 8. [22] *Sous les conditions (H1)-(H3), et supposons qu'il existe une constante non négative r telle que*

$$\begin{aligned} r &= \max \left\{ \frac{1}{r_{1*}} \left[(2a_1^+ R_{12} + b_1^+ R_{22}^2 + 2b_1^+ c_2^+ R_{22} + b_1^+ \sup_{s \in \mathbb{R}} (c_2^2(s))) + b_1^+ (2R_{12} R_{22} + 2c_2^+ R_{12}) \right] \right. \\ &\quad \left. , \frac{1}{r_{2*}} \left[(2a_2^+ R_{22} + b_2^+ R_{12}^2 + 2b_2^+ c_1^+ R_{12} + b_2^+ \sup_{s \in \mathbb{R}} (c_1^2(s))) + b_2^+ (2R_{22} R_{12} + 2c_1^+ R_{22}) \right] \right\} < 1, \end{aligned}$$

Alors le modèle de compétition et coopération entre deux entreprises (2.3) admet une unique solution pseudo presque-périodique dans la région

$$\mathbb{B} = \{\varphi/\varphi \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2), R_{11} \leq \varphi_1(t) \leq R_{12}, R_{21} \leq \varphi_2(t) \leq R_{22} \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}\}.$$

Démonstration. Pour tout $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$, on introduit l'équation auxiliaire suivante

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = x_1(t)r_1(t) + \varphi_1(t) \left[-a_1(t)\varphi_1(t) - b_1(t)(\varphi_2(t - \tau_2(t)) - c_2(t))^2 \right], \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = x_2(t)r_2(t) + \varphi_2(t) \left[-a_2(t)\varphi_2(t) + b_2(t)(\varphi_1(t - \tau_1(t)) - c_1(t))^2 \right]. \end{cases} \quad (2.7)$$

Notons que $M[r_i] > 0$ ($i = 1, 2$), on sait du Lemme 3 que l'équation linéaire

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = r_1(t)x_1(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = r_2(t)x_2(t), \end{cases}$$

admet une dichotomie exponentielle sur \mathbb{R} . Par conséquent, par le lemme 2, nous savons que le modèle (2.7) a exactement une solution donnée par

$$x_\varphi(t) = \begin{pmatrix} \int_t^{+\infty} e^{-\int_t^s r_1(u)du} \varphi_1(s) \left[a_1(s)\varphi_1(s) + b_1(s)(\varphi_2(s - \tau_2(s)) - c_2(s))^2 \right] ds \\ \int_t^{+\infty} e^{-\int_t^s r_2(u)du} \varphi_2(s) \left[a_2(s)x_2(s) - b_2(s)(x_1(s - \tau_1(s)) - c_1(s))^2 \right] ds \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

On peut observer à partir du lemme 7 que $x_\varphi \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$.

Soit l'ensemble suivant :

$$\mathbb{B} = \{x/x \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2), R_{11} \leq x_1(t) \leq R_{12}, R_{21} \leq x_2(t) \leq R_{22} \text{ for all } t \in \mathbb{R}\},$$

Il est clair que \mathbb{B} est un sous ensemble convexe fermé et borné de $PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$.

Montrons que l'opérateur Γ défini dans le Lemme 7 par :

$$\begin{aligned} (\Gamma\varphi)(t) &= \begin{pmatrix} (\Gamma\varphi)_1(t) \\ (\Gamma\varphi)_2(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \int_t^{+\infty} e^{-\int_t^s r_1(u)du} \varphi_1(s) \left[a_1(s)\varphi_1(s) + b_1(s)(\varphi_2(s - \tau_2(s)) - c_2(s))^2 \right] ds \\ \int_t^{+\infty} e^{-\int_t^s r_2(u)du} \varphi_2(s) \left[a_2(s)\varphi_2(s) - b_2(s)(\varphi_1(s - \tau_1(s)) - c_1(s))^2 \right] ds \end{pmatrix} \quad (2.9) \end{aligned}$$

envoie \mathbb{B} dans \mathbb{B} , de plus, pour tout $\varphi \in \mathbb{B}$, en utilisant (H1) on a

$$\begin{aligned} |(\Gamma\varphi)_1(t)| &\leq \left[\frac{a_1^+ R_{12} + b_1^+ (R_{22}^2 + 2R_{22}c_2^+ + (c_2^+)^2)}{r_{1*}} \right] \times R_{12} \\ &\leq R_{12} \end{aligned}$$

où

$$\left[\frac{a_1^+ R_{12} + b_1^+ (R_{22}^2 + 2R_{22}c_2^+ + (c_2^+)^2)}{r_{1*}} \right] < 1$$

et

$$\begin{aligned} |(\Gamma\varphi)_2(t)| &\leq \left[\frac{a_2^+ R_{22} + b_2^+ (R_{12}^2 + 2R_{12}c_1^+ + (c_1^+)^2)}{r_{2*}} \right] \times R_{22} \\ &\leq R_{22} \end{aligned}$$

où

$$\left[\frac{a_2^+ R_{22} + b_2^+ (R_{12}^2 + 2R_{12}c_1^+ + (c_1^+)^2)}{r_{2*}} \right] < 1$$

ceci implique que $(\Gamma\varphi) \in \mathbb{B}$. Donc, l'opérateur $(\Gamma\varphi)$ est un opérateur de \mathbb{B} dans lui même (de \mathbb{B} à \mathbb{B}).

Ensuite, prouvons que l'opérateur $(\Gamma\varphi)$ est contractant sur \mathbb{B} . Tenant compte de (H2) et (H3), pour tous $\phi, \psi \in \mathbb{B}$, on aura

$$\begin{aligned} |(\Gamma\phi)(t) - (\Gamma\psi)(t)| &= \left| \begin{pmatrix} (\Gamma\phi)_1(t) \\ (\Gamma\phi)_2(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (\Gamma\psi)_1(t) \\ (\Gamma\psi)_2(t) \end{pmatrix} \right| \\ &\leq \max\left\{ \sup_{t \in \mathbb{R}} |(\Gamma\phi)_1(t) - (\Gamma\psi)_1(t)|, \sup_{t \in \mathbb{R}} |(\Gamma\phi)_2(t) - (\Gamma\psi)_2(t)| \right\}. \end{aligned}$$

de plus

$$\begin{aligned} &|(\Gamma\phi)_1(t) - (\Gamma\psi)_1(t)| \\ &= \left| \int_t^{+\infty} e^{-\int_t^s r_1(u)du} \phi_1(s) \left[a_1(s)\phi_1(s) + b_1(s)(\phi_2(s - \tau_2(s)) - c_2(s))^2 \right] ds \right. \\ &\quad \left. - \int_t^{+\infty} e^{-\int_t^s r_1(u)du} \psi_1(s) \left[a_1(s)\psi_1(s) + b_1(s)(\psi_2(s - \tau_2(s)) - c_2(s))^2 \right] ds \right| \\ &\leq \frac{1}{r_{1*}} \left[(2a_1^+ R_{12} + b_1^+ R_{22}^2 + 2b_1^+ c_2^+ R_{22} + b_1^+ \sup_{s \in \mathbb{R}} (c_2^2(s))) + b_1^+ (2R_{12}R_{22} + 2c_2^+ R_{12}) \right] \times \|\phi - \psi\|_\infty \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& | (\Gamma\phi)_2(t) - (\Gamma\psi)_2(t) | \\
= & \left| \int_t^{+\infty} e^{-\int_t^s r_2(u)du} \phi_2(s) \left[a_2(s)\phi_2(s) - b_2(s)(\phi_1(s - \tau_1(s)) - c_1(s))^2 \right] ds \right. \\
& \left. - \int_t^{+\infty} e^{-\int_t^s r_2(u)du} \psi_2(s) \left[a_2(s)\psi_2(s) - b_2(s)(\psi_1(s - \tau_1(s)) - c_1(s))^2 \right] ds \right| \\
\leq & \int_t^{+\infty} e^{-(s-t)r_{1*}} | \phi_2(s) \left[a_2(s)\phi_2(s) - b_2(s)(\phi_1(s - \tau_1(s)) - c_1(s))^2 \right] \right. \\
& \left. - \psi_2(s) \left[a_2(s)\psi_2(s) - b_2(s)(\psi_1(s - \tau_1(s)) - c_1(s))^2 \right] \right| ds \\
\leq & \frac{1}{r_{2*}} \left[(2a_2^+ R_{22} + b_2^+ R_{12}^2 + 2b_2^+ c_1^+ R_{12} + b_2^+ \sup_{s \in \mathbb{R}}(c_1^2(s))) + b_2^+(2R_{22}R_{12} + 2c_1^+ R_{22}) \right] \times \| \phi - \psi \|_\infty
\end{aligned}$$

il en résulte que

$$\begin{aligned}
\| \Gamma\phi - \Gamma\psi \|_\infty &= \max \left\{ \sup_{t \in \mathbb{R}} | (\Gamma\phi)_1(t) - (\Gamma\psi)_1(t) |, \sup_{t \in \mathbb{R}} | (\Gamma\phi)_2(t) - (\Gamma\psi)_2(t) | \right\} \\
&\leq \max \left\{ \frac{1}{r_{1*}} \left[(2a_1^+ R_{12} + b_1^+ R_{22}^2 + 2b_1^+ c_2^+ R_{22} + b_1^+ \sup_{s \in \mathbb{R}}(c_2^2(s))) + b_1^+(2R_{12}R_{22} + 2c_2^+ R_{22}) \right] \times \right. \\
&\quad , \left. \frac{1}{r_{2*}} \left[(2a_2^+ R_{22} + b_2^+ R_{12}^2 + 2b_2^+ c_1^+ R_{12} + b_2^+ \sup_{s \in \mathbb{R}}(c_1^2(s))) + b_2^+(2R_{22}R_{12} + 2c_1^+ R_{22}) \right] \times \right. \\
&= \max \left\{ \frac{1}{r_{1*}} \left[(2a_1^+ R_{12} + b_1^+ R_{22}^2 + 2b_1^+ c_2^+ R_{22} + b_1^+ \sup_{s \in \mathbb{R}}(c_2^2(s))) + b_1^+(2R_{12}R_{22} + 2c_2^+ R_{22}) \right] \times \right. \\
&\quad , \left. \frac{1}{r_{2*}} \left[(2a_2^+ R_{22} + b_2^+ R_{12}^2 + 2b_2^+ c_1^+ R_{12} + b_2^+ \sup_{s \in \mathbb{R}}(c_1^2(s))) + b_2^+(2R_{22}R_{12} + 2c_1^+ R_{22}) \right] \right\} \\
&= r \times \| \phi - \psi \|_\infty
\end{aligned}$$

ce qui prouve que Γ est un opérateur contractant. Ainsi, en vertu du théorème du point fixe de *Banach*, Γ admet un unique point fixe qui correspond à la solution pseudo presque-périodique (2.3) dans $\mathbb{B} \subset PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$.

□

Conclusion

Dans la nature il n'y a pas de phénomènes qui soient purement périodiques, et cela donne l'idée de considérer des oscillation presque-périodiques, ainsi que des situations pseudo presque-périodiques. Dans ce chapitre, des conditions suffisantes sont présentées pour assurer l'existence et l'unicité de la solution pseudo presque-périodique du modèle de compétition et de coopération entre deux entreprises avec retards (2.1), en effet, on a établi l'existence de la solutions de (2.1) dont

l'ensemble des fonctions pseudo presque-périodiques est plus grand que celui des fonctions presque-périodiques

Chapitre 3

Application et simulation

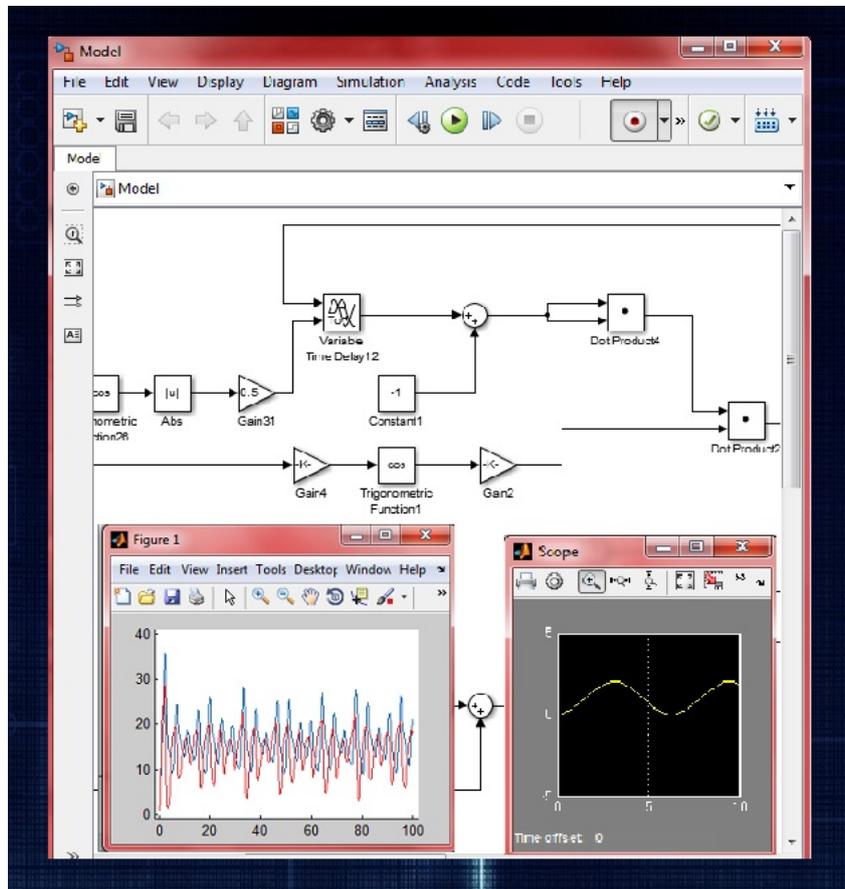


FIGURE 3.1 – Interface de Simulink

3.1 Simulink de matlab et système dynamique

3.1.1 Présentation du MATLAB et simulink

Afin de résoudre les différents problèmes scientifiques et techniques, des millions d'ingénieurs et de scientifiques partout dans le monde ont opter pour MATLAB tout en le considérant le logiciel le plus accessible et le plus productif .

MATLAB est un langage de haut niveau pour le calcul scientifique et technique ,Il permet d'analyser et concevoir de différents systèmes et de résoudre des problèmes de calcul très complexes d'une façon simple et rapide comparée aux langages de programmation traditionnels .Il est utilisé dans les domaines de l'apprentissage automatique, en industrie, en finance, la géométrie algorithmique, la robotique et bien plus.

Grâce à sa vaste bibliothèque de boîtes à outils prédéfinies et aux graphiques intégrés, la visualisation des données nous permet de dégager des informations facilement .

L'interface de MATLAB est présentée dans la figure(3.2) suivante :

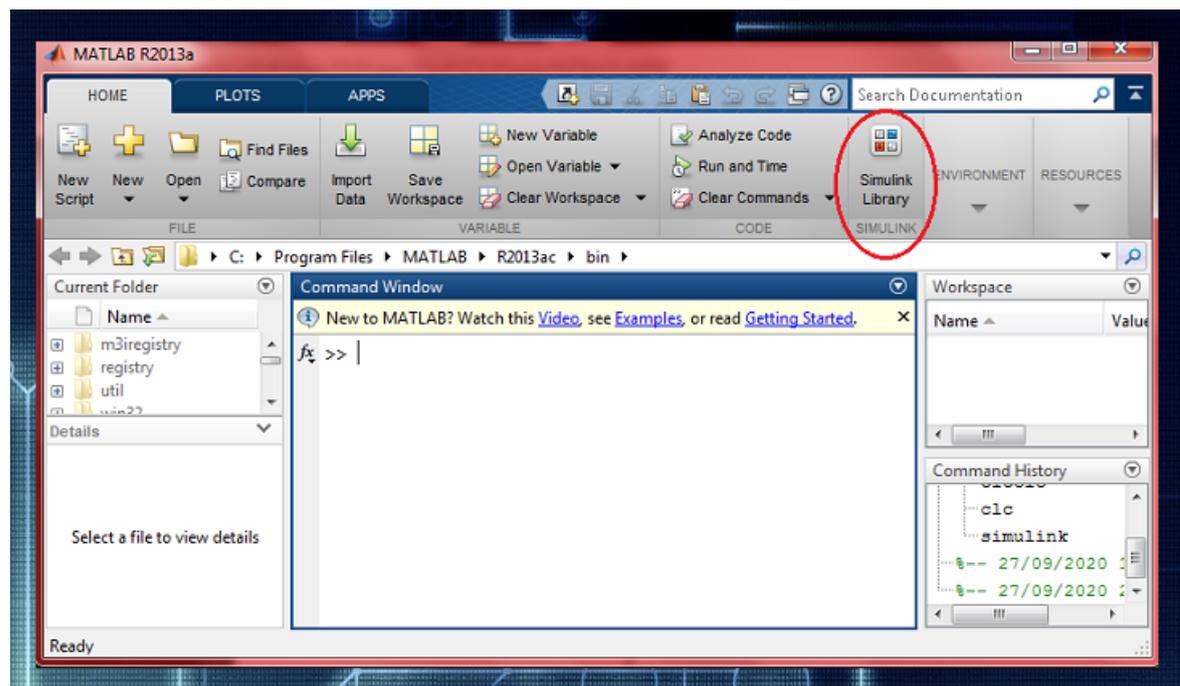


FIGURE 3.2 – Interface de MATLAB

Présentation du Simulink

Simulink est un environnement de diagramme fonctionnel destiné à la simulation multi-domaine et à l'approche de conception par modélisation. Il prend en charge la conception et la simulation, la génération automatique de code, ainsi que le test et la vérification des systèmes étudiés.

Simulink propose un éditeur graphique, un ensemble personnalisable de bibliothèques de blocs et des solveurs pour la modélisation et la simulation des systèmes dynamiques. Il est intégré à MATLAB, ce qui nous permet d'incorporer les algorithmes MATLAB des modèles et d'exporter le résultat des simulations vers MATLAB pour compléter les analyses.

Les principales fonctionnalités de Simulink sont :

- Éditeur graphique pour la création et la gestion de diagrammes fonctionnels hiérarchiques.
- Moteur de simulation avec des solveurs ODE à pas fixes ou variables.
- Scopes et affichage de données pour la consultation du résultat de la simulation.
- Outils de gestion de données et de projets pour les données et fichiers des modèles.

Les bibliothèques

Les bibliothèques sont des ensembles de blocs répartis selon la catégorie de fonctions réalisées. Parmi ces bibliothèques les plus utilisées on trouve :

- Sources : Générateurs de signaux, lecture dans fichiers de données.
 - Sinks : Blocs d'affichage, enregistrement dans fichiers de données.
 - Math operations : Opérations mathématiques.
 - Signal Routing : Routage des fils de liaison entre blocs.
 - Additional Math & Discrete : Blocs additionnels d'opérations mathématiques et de systèmes discrets.
 - Logic and Bit Operations Blocs d'opérations logiques et binaires.
- On présente l'ensemble des bibliothèques sur la figure (3.3) suivante :

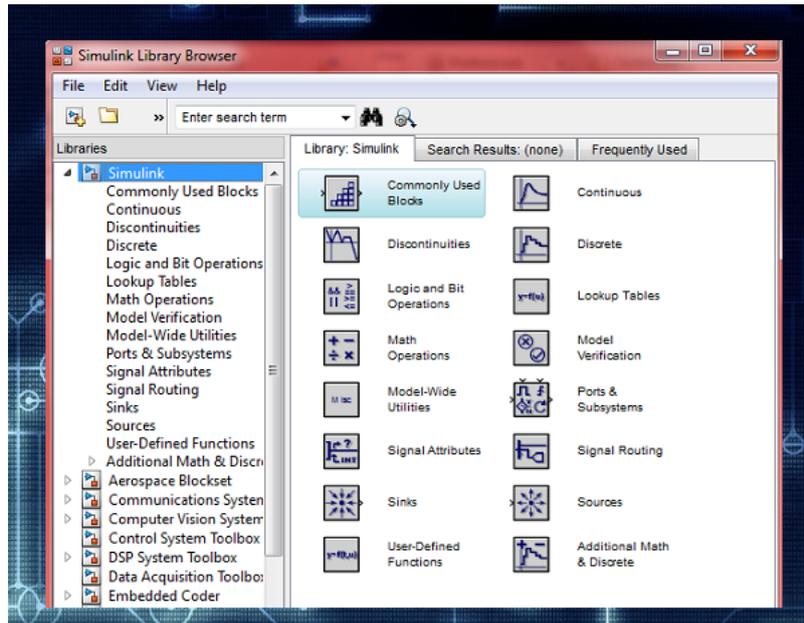


FIGURE 3.3 – Les bibliothèques du Simulink

L'intérêt principal de Simulink réside dans la possibilité de travailler directement sur le schéma-bloc en lieu et place de placer des équations mathématiques d'un système quelconque .

Remarque 3.1.1. *Simulink communique parfaitement avec MATLAB dont il profite de toutes les fonctionnalités .Il est possible par exemple de recevoir la réponse d'un modèle et de la visualiser dans MATLAB pour l'analyser et tirer des informations*

Construire un modèle

Simulink manipule des blocs fonctionnels disponibles dans des bibliothèques spécialisées , et qu'on copie dans une fenêtre d'édition en les reliant selon le schéma bloc pour représenter le système à étudier . Pour cela il faut :

Ouvrir une session Simulink

- Aller sur MATLAB et cliquer sur l'icône Simulink de la barre des tâches (ou taper Simulink puis entrer dans la fenêtre commande de MATLAB). Cette action ouvre la fenêtre :Simulink Library Browser (voir fig 3.3)
- Ouvrir une fenêtre d'édition ,en cliquant sur l'icône (*a new model*)



commencer la construction du modèle

Ouvrir une bibliothèque , par exemple (Maths opérations) , ensuite on fait glisser le bloc choisi à l'aide de la souris et le placer la on veut sur la fenêtre créée . ou bien en cliquant sur le bouton droit de la souris sur le bloc et choisir (add to model), expliqué sur la figure(3.4)

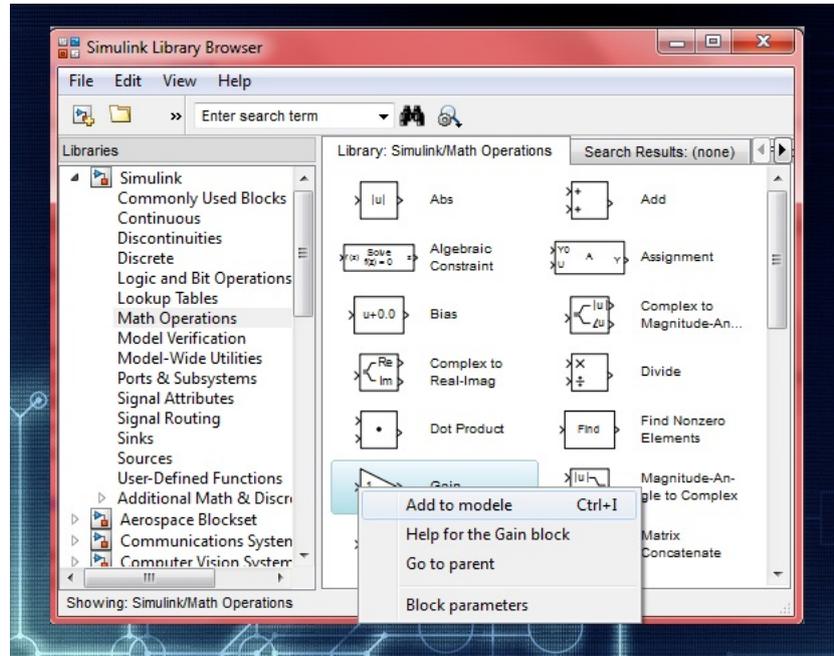


FIGURE 3.4 – Simulink Library Browser

On peut modifier ce qui est à l'intérieur du bloc selon nos besoins . Une fois on a ramené tout les blocs souhaités ,on relié entre eux en utilisant la souris . voici un exemple dans la figure (3.5) d'un modèle simple qu'on a créé qui calcule :

$$\begin{cases} y' = \sin(t) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

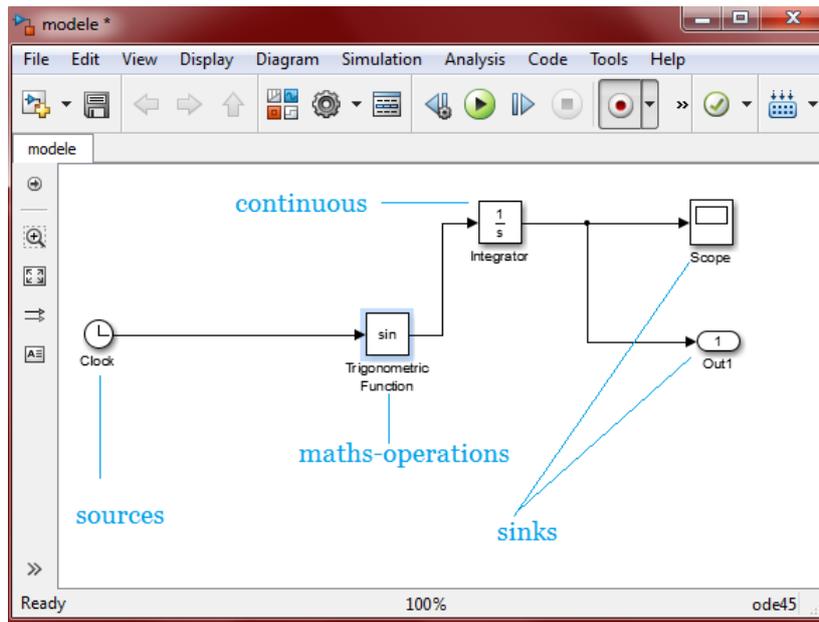


FIGURE 3.5 – Exemple

Pour afficher le graphe associé a notre modèle, il y'a deux différentes méthodes : Soit on fait double clique sur le bloc (scoop) et on obtient le graphe présenté dans la figure(3.6) suivante

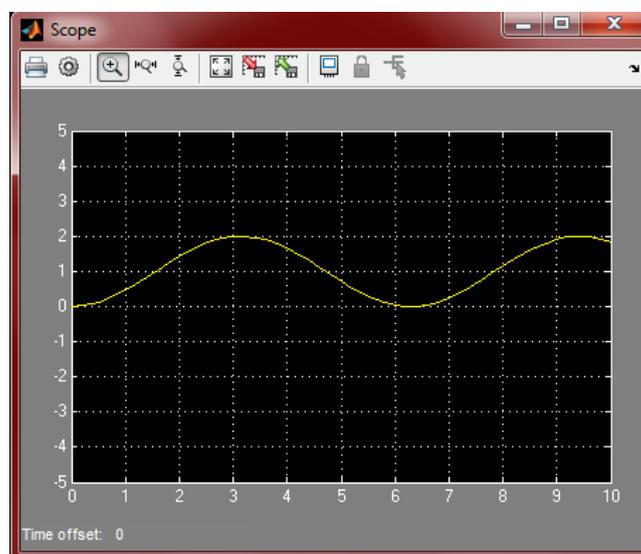


FIGURE 3.6 – Graphe associé au modèle construit

Soit en suivant une autre méthode qui nous fournit plus d'options (nommer les axe, saisir un titre pour la figure ...) tout en cliquant sur le bouton "Run" de l'exécution , il nous affiche un lien "Simulation Data Inspector" ,en clique dessus , ça nous mène directement à la fenêtre des graphes dans la figure (3.7)

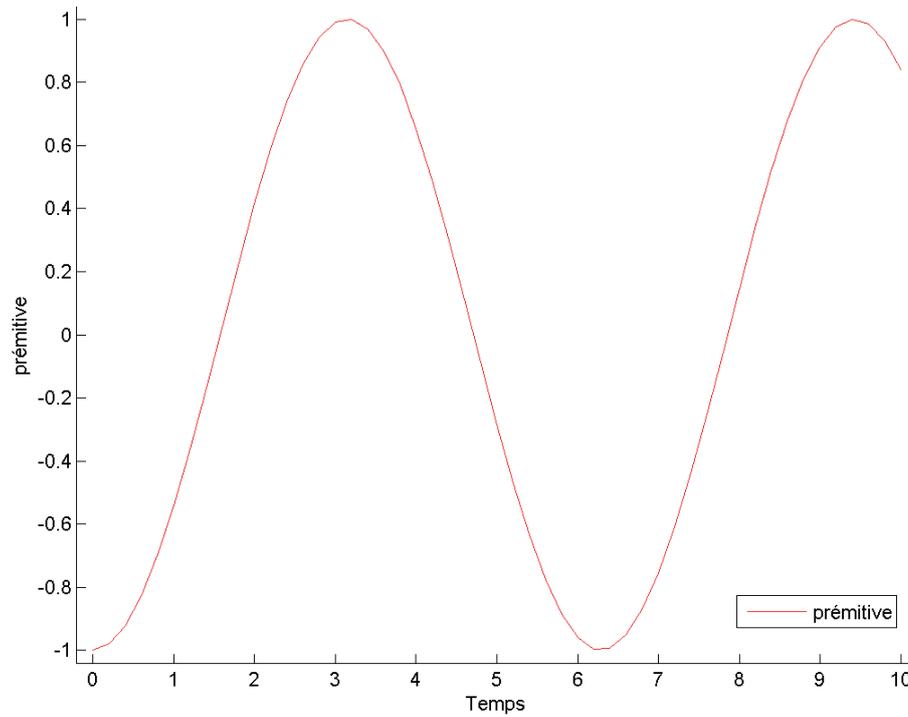


FIGURE 3.7 – Graphe associé au modèle construit

3.2 Exemple numérique sous Simulink

On considère le modèle de compétition et de coopération entre deux entreprises avec retards suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = x_1(t) \left[r_1(t) - a_1(t)x_1(t) - b_1(t)(x_2(t - \tau_2(t)) - c_2(t))^2 \right], \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = x_2(t) \left[r_2(t) - a_2(t)x_2(t) + b_2(t)(x_1(t - \tau_1(t)) - c_1(t))^2 \right], \end{cases} \quad (3.1)$$

Où,

$$R_{11} = R_{21} = 0 \text{ et } R_{12} = 5, R_{22} = 4,$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$a_1(t) = 0.4, \quad a_2(t) = 0.1 \Rightarrow a_1^+ = 0.4, \quad a_2^+ = 0.4,$$

$$b_1(t) = 0.01\cos(\sqrt{2}t), \quad b_2(t) = 0.01\sin(\sqrt{2}t) + \frac{0.01}{1+t^2} \Rightarrow b_1^+ = 0.01, \quad b_2^+ = 0.02,$$

$$c_1(t) = 1, \quad c_2(t) = 1 \Rightarrow c_1^+ = 1, \quad c_2^+ = 1,$$

$$\tau_1(t) = \frac{1}{2} |\cos(t)|, \quad \tau_2(t) = \frac{1}{2} |\cos(t)|,$$

On va étudier ce modèle en plusieurs cas, tout en apportant des changements des valeurs des taux de production :

• **Cas 01 :**

On considère les taux de production r_1 et r_2 comme suit :

$$r_1(t) = 6 + \sin(t), \quad r_2(t) = 6 + \cos(t) \Rightarrow r_1^* = 5, \quad r_2^* = 5,$$

alors :

$$\begin{aligned} r &= \max \left\{ \frac{1}{r_{1*}} \left[(2a_1^+ R_{12} + b_1^+ R_{22}^2 + 2b_1^+ c_2^+ R_{22} + b_1^+ \sup_{s \in \mathbb{R}}(c_2^2(s))) + b_1^+ (2R_{12}R_{22} + 2c_2^+ R_{12}) \right] \right. \\ &\quad \left. , \frac{1}{r_{2*}} \left[(2a_2^+ R_{22} + b_2^+ R_{12}^2 + 2b_2^+ c_1^+ R_{12} + b_2^+ \sup_{s \in \mathbb{R}}(c_1^2(s))) + b_2^+ (2R_{22}R_{12} + 2c_1^+ R_{22}) \right] \right\} \\ &= \max \left\{ \frac{4.75}{5}, \frac{4.88}{5} \right\} \\ &= \max \left\{ 0.95, 0.97 \right\} \\ &= 0.95 < 1, \end{aligned}$$

puisque les conditions du Théorème(8) sont satisfaites, alors le modèle de compétition et de coopération entre deux entreprises avec retards (3.1) admet une unique solution pseudo presque périodique dans la région

$$\mathbb{B} = \{x/x \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2), \quad 0 \leq x_1(t) \leq 5, \quad 0 \leq x_2(t) \leq 4, \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}\}.$$

A. La présentation du programme :

Une image explicative du programme de simulation sous Simulink de MATLAB présenté dans la Figure (3.8).

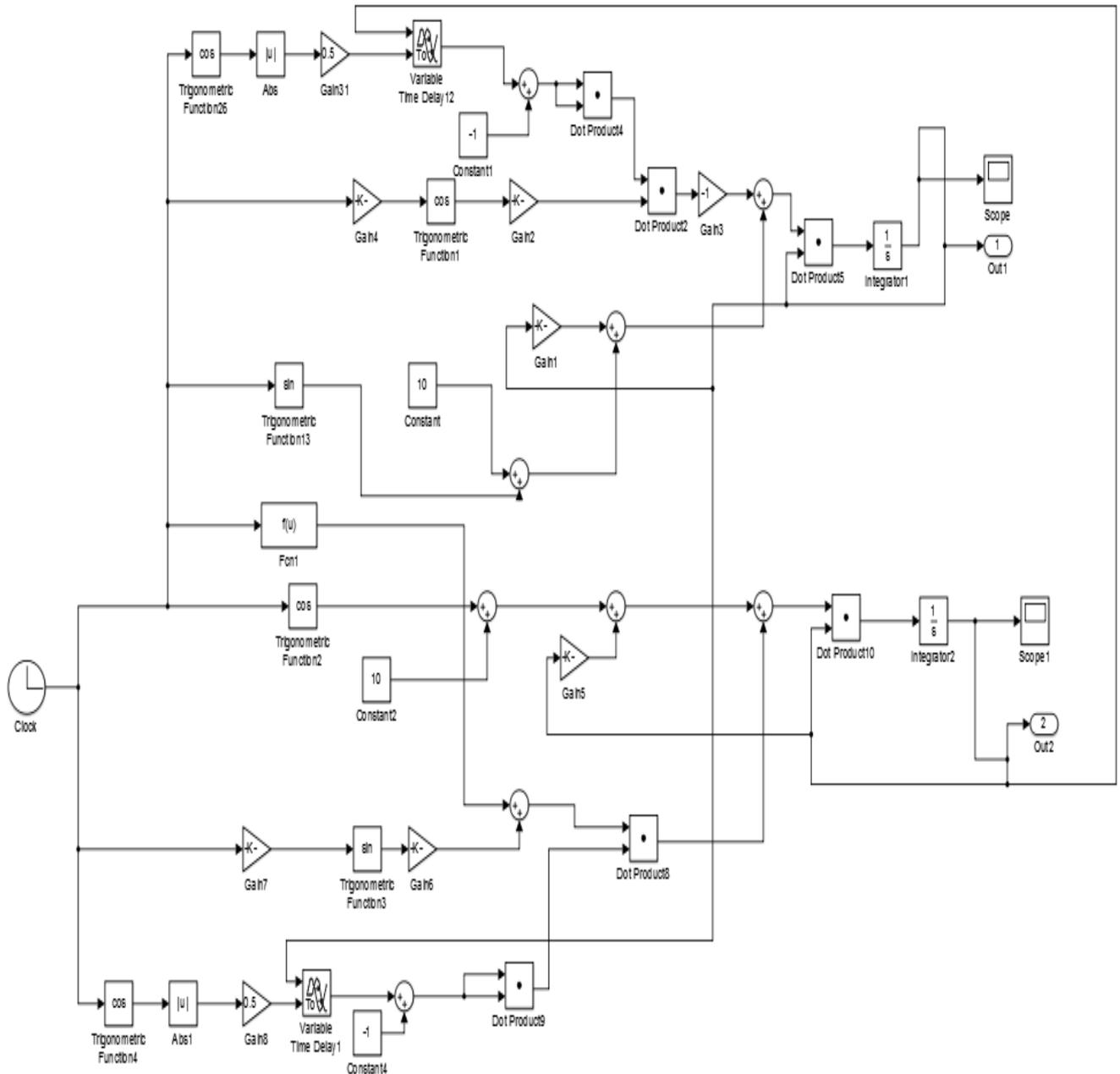


FIGURE 3.8 – Programme sous Simulink de modèle (3.1) pour $R_{11} = R_{21} = 0$, $R_{12} = 5$, et R_{22} .

B. Explication des composantes importantes :

Dans la Figure (3.9), on présente les deux composantes $\frac{dx_1(t)}{dt}$ et $\frac{dx_2(t)}{dt}$. la composante (**Out1**) en haut pour calculer à la sortie x_1 et la composante en bas (**Out2**) pour calculer en sortie x_2 .

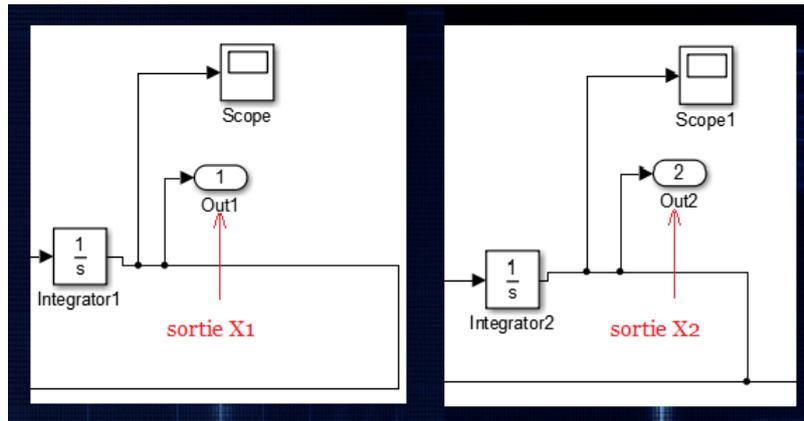


FIGURE 3.9 – Les sorties x_1 et x_2 de programme de modèle (3.1).

C. La simulation :

Les résultats théoriques sont confirmés par des simulations numériques dans Figure (3.10), (Figure 3.11) et (Figure 3.12) suivantes :

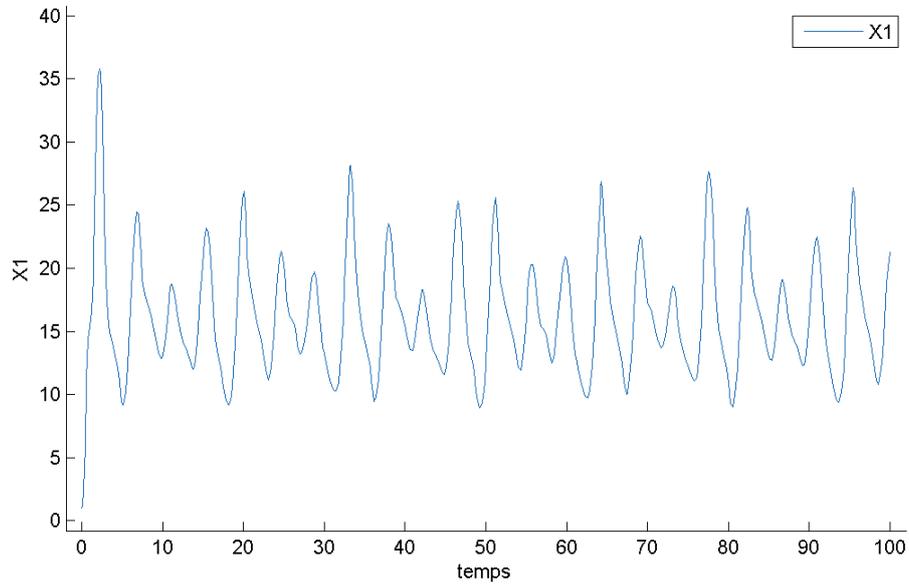


FIGURE 3.10 – La trajectoire des solutions x_1 de modèle (3.1) avec $T = 100$.

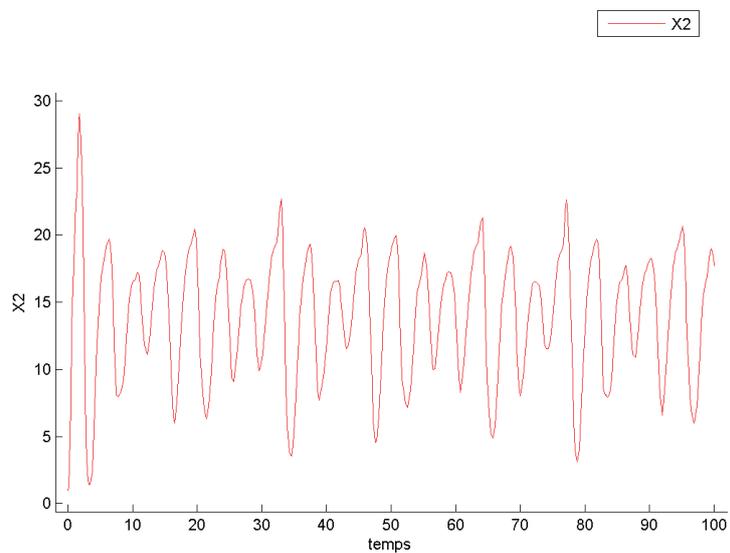


FIGURE 3.11 – La trajectoire des solutions x_2 de modèle (3.1) avec $T = 100$.

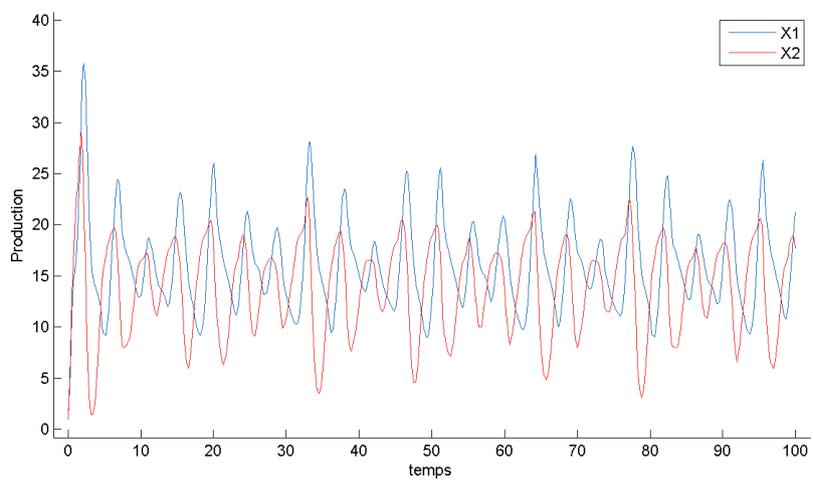


FIGURE 3.12 – Les trajectoires des solutions x_1 et x_2 de modèle (3.1) avec $T = 100$.

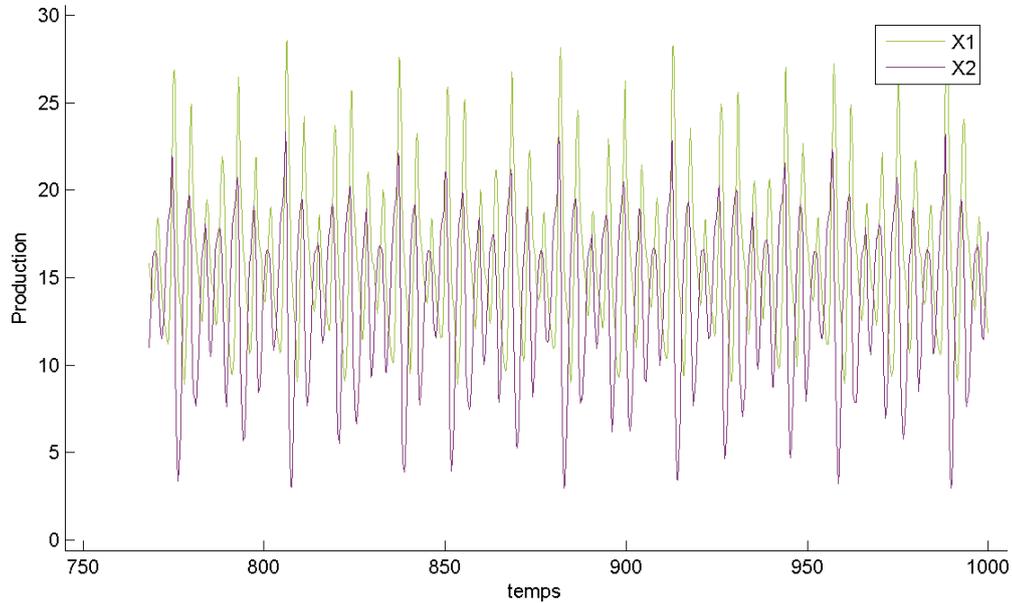


FIGURE 3.13 – Les trajectoires des solutions x_1 et x_2 de modèle (3.1) avec $T = 1000$ et $r_1 = \sin(t) + 6$, $r_2 = \cos(t) + 6$.

D. Discussion :

On note les points suivants :

- Les simulations sur les figures (3.10), (3.11) et (3.12) montrent que les solutions suivent un comportement pseudo-presque-périodique.
- On remarque que les deux courbes (la courbe de x_1 et la courbe x_2) de la figure (3.12) coïncide dans quelques points pour un taux de production différent c'est-à-dire $r_1(t)$ le taux de production de la première entreprise est différent du $r_2(t)$ le taux de production de la deuxième entreprise sur $t \in [0, T]$ avec $T = 100$ unités de mesure.

On remarque sur la figure (3.13) que les solutions existent toujours et elles suivent un comportement pseudo presque-périodique pour $T = 1000$

•Cas 02 :

Pour le même modèle précédent (3.1), on augmente les taux de production, on les fixe comme suit :

$$r_1(t) = 7 + \sin(t), \quad r_2(t) = 7 + \cos(t) \Rightarrow r_1^* = 6, \quad r_2^* = 6,$$

on a

$$\begin{aligned}
 r &= \max \left\{ \frac{1}{r_{1*}} \left[(2a_1^+ R_{12} + b_1^+ R_{22}^2 + 2b_1^+ c_2^+ R_{22} + b_1^+ \sup_{s \in \mathbb{R}}(c_2^2(s))) + b_1^+ (2R_{12}R_{22} + 2c_2^+ R_{12}) \right] \right. \\
 &\quad \left. , \frac{1}{r_{2*}} \left[(2a_2^+ R_{22} + b_2^+ R_{12}^2 + 2b_2^+ c_1^+ R_{12} + b_2^+ \sup_{s \in \mathbb{R}}(c_1^2(s))) + b_2^+ (2R_{22}R_{12} + 2c_1^+ R_{22}) \right] \right\} \\
 &= \max \left\{ \frac{4.75}{6}, \frac{4.88}{6} \right\} = \max \left\{ 0.79, 0.81 \right\} \\
 &= 0.81 < 1.
 \end{aligned}$$

puisque les conditions du Théorème(8) sont satisfaites, alors le modèle de compétition et de coopération entre deux entreprises avec retards (3.1) admet une unique solution pseudo presque périodique dans la région

$$\mathbb{B} = \{x/x \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2), 0 \leq x_1(t) \leq 5, 0 \leq x_2(t) \leq 4, \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}\}.$$

Le comportement des solutions est présenté dans la figures (3.21) suivante :

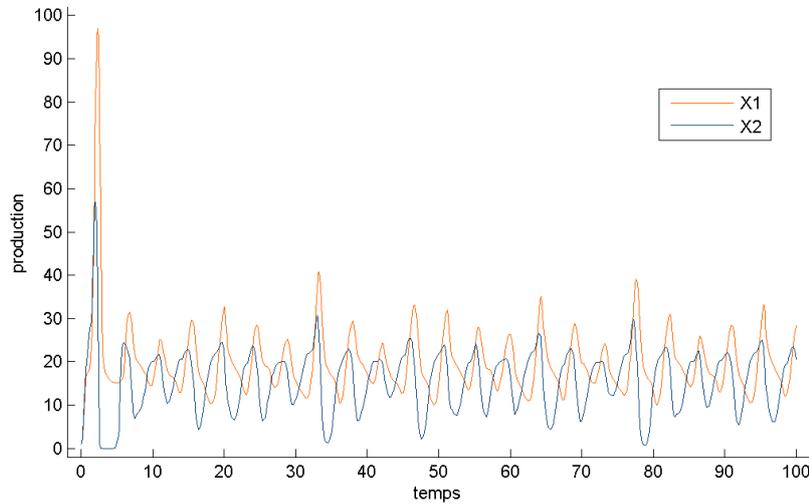


FIGURE 3.14 – Les trajectoires des solutions x_1 et x_2 de modèle (3.1) avec $T = 100$ et $r_1 = \sin(t) + 7$, $r_2 = \cos(t) + 7$.

On compare les trajectoires de x_1 du premier exemple et x_1 de deuxième exemple dans la figure (3.15)

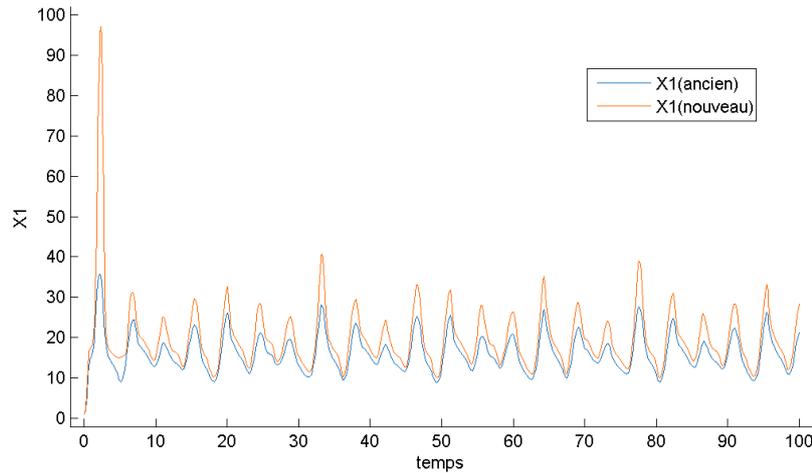


FIGURE 3.15 – Les trajectoires des solutions x_1 ancien et x_1 nouveau de modèle (3.1) avec $T = 100$.

Discutions :

- Les simulations sur la figures (3.21) montrent que les solutions suivent un comportement pseudo-presque-périodique.
- On remarque sur la figure (3.15) que lorsqu'on augmente le tau de production d'une unité , la production augmente (la courbe associée à x_{a1} dépasse celle de x_{n1}
 x_{a1} : production ancienne calculée en 1^{er} exemple x_{n1} : production nouvelle calculée dans le 2^{me} exemple .
- Donc on conclut que plus on augmente le tau r la production sera plus élevée , mais à condition que le r choisi vérifie la condition du théorème(8) .

• **Cas 03 :**

Dans ce cas on considère que les deux entreprises possèdent le même tau de production, c-à-d :

$$r_1(t) = 6 + \cos(t), \quad r_2(t) = 6 + \cos(t) \Rightarrow r_1^* = 5, \quad r_2^* = 5,$$

on a

$$\begin{aligned} r &= \max \left\{ \frac{1}{r_1^*} \left[(2a_1^+ R_{12} + b_1^+ R_{22}^2 + 2b_1^+ c_2^+ R_{22} + b_1^+ \sup_{s \in \mathbb{R}}(c_2^2(s))) + b_1^+ (2R_{12}R_{22} + 2c_2^+ R_{12}) \right] \right. \\ &\quad \left. , \frac{1}{r_2^*} \left[(2a_2^+ R_{22} + b_2^+ R_{12}^2 + 2b_2^+ c_1^+ R_{12} + b_2^+ \sup_{s \in \mathbb{R}}(c_1^2(s))) + b_2^+ (2R_{22}R_{12} + 2c_1^+ R_{22}) \right] \right\} \\ &= \max \left\{ \frac{4.75}{5}, \frac{4.88}{5} \right\} = \max \left\{ 0.95, 0.49 \right\} \\ &= 0.97 < 1, \end{aligned}$$

puisque les conditions du Théorème(8) sont satisfaites, alors le modèle de compétition et de coopération entre deux entreprises avec retards (3.1) admet une unique solution pseudo presque périodique dans la région

$$\mathbb{B} = \{x/x \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2), \quad 0 \leq x_1(t) \leq 5, \quad 0 \leq x_2(t) \leq 4, \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}\}.$$

On a obtenu les figures (3.18) , (3.16) et (3.17) suivantes :

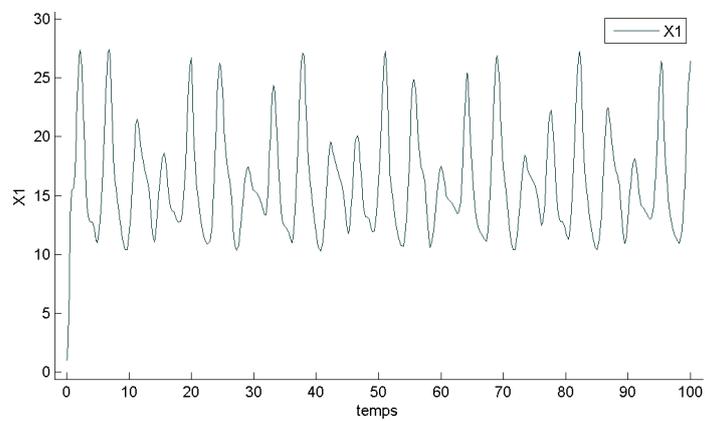


FIGURE 3.16 – La trajectoire des solutions x_1 de modèle (3.1) avec $T = 100$ et $r_1 = \cos(t) + 6$, $r_2 = \cos(t) + 6$.

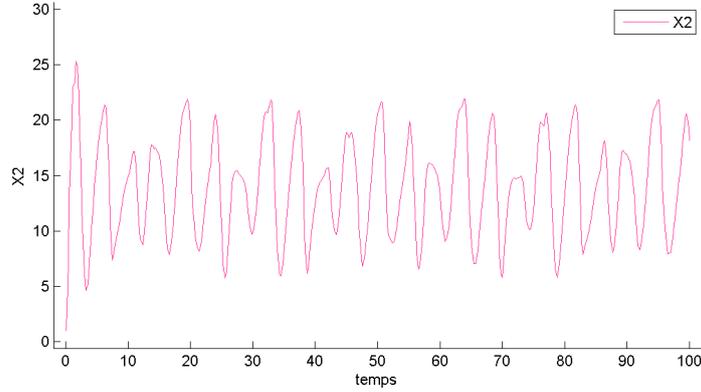


FIGURE 3.17 – La trajectoire des solutions x_2 de modèle (3.1) avec $T = 100$ et $r_1 = \cos(t) + 6$, $r_2 = \cos(t) + 6$.

Discutions :

- Les simulations sur les figures (3.16), (3.17) et (3.18) montrent que les solutions suivent un comportement pseudo presque-périodique.
- On remarque que même avec un taux $r_1 = r_2 = \cos(t) + 6$ on a pas eu des courbes identique de x_1 et x_2 , la production de la première entreprise plus élevée que celle de la deuxième.

• Cas 04 :

Dans ce cas on augmente les tau de production jusqu'à :

$$r_1(t) = 10 + \cos(t), \quad r_2(t) = 10 + \cos(t) \Rightarrow r_1^* = 9, \quad r_2^* = 9,$$

on a

$$\begin{aligned} r &= \max \left\{ \frac{1}{r_{1*}} \left[(2a_1^+ R_{12} + b_1^+ R_{22}^2 + 2b_1^+ c_2^+ R_{22} + b_1^+ \sup_{s \in \mathbb{R}}(c_2^2(s))) + b_1^+ (2R_{12}R_{22} + 2c_2^+ R_{12}) \right] \right. \\ &\quad \left. , \frac{1}{r_{2*}} \left[(2a_2^+ R_{22} + b_2^+ R_{12}^2 + 2b_2^+ c_1^+ R_{12} + b_2^+ \sup_{s \in \mathbb{R}}(c_1^2(s))) + b_2^+ (2R_{22}R_{12} + 2c_1^+ R_{22}) \right] \right\} \\ &= \max \left\{ \frac{4.75}{9}, \frac{4.88}{9} \right\} = \max \left\{ 0.52, 0.54 \right\} \\ &= 0.54 < 1, \end{aligned}$$

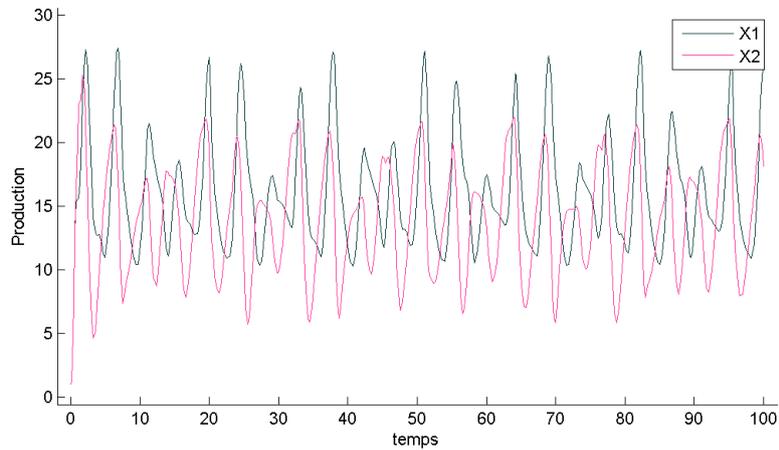


FIGURE 3.18 – Les trajectoires des solutions x_1 et x_2 de modèle (3.1) avec $T = 100$ et $r_1 = \cos(t) + 6$, $r_2 = \cos(t) + 6$.

puisque les conditions du Théorème sont satisfaites, alors le modèle de compétition et de coopération entre deux entreprises avec retards (3.1) admet une unique solution pseudo presque périodique dans la région

$$\mathbb{B} = \{x/x \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2), 0 \leq x_1(t) \leq 5, 0 \leq x_2(t) \leq 4, \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}\}.$$

On a obtenu les figures (3.19) et (3.20)

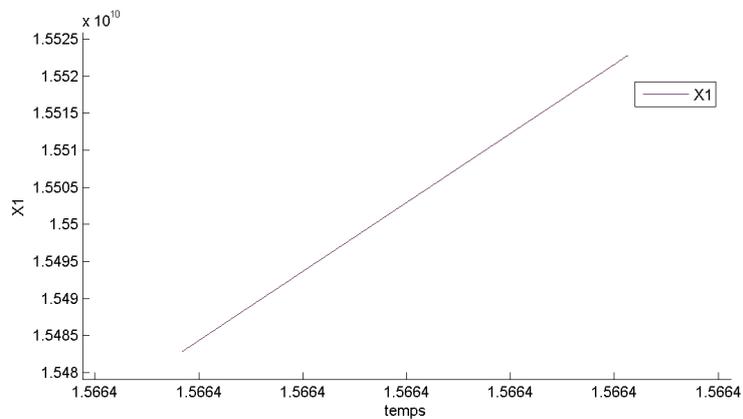


FIGURE 3.19 – La trajectoire des solutions x_1 de modèle (3.1) avec $T = 100$ et $r_1 = \cos(t) + 10$, $r_2 = \cos(t) + 10$.

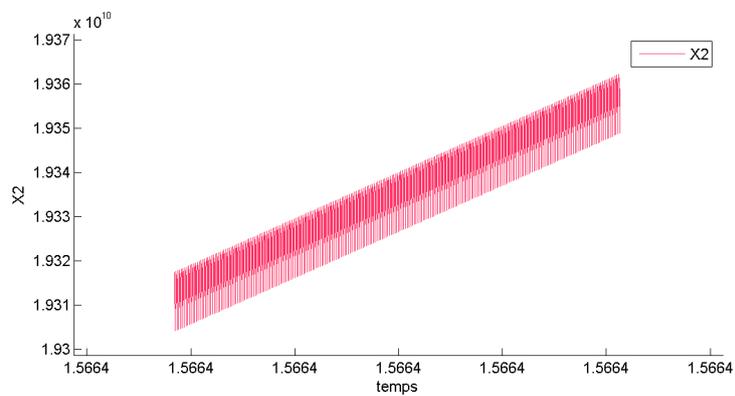


FIGURE 3.20 – La trajectoire des solutions x_2 de modèle (3.1) avec $T = 100$ et $r_1 = \cos(t) + 10$, $r_2 = \cos(t) + 10$.

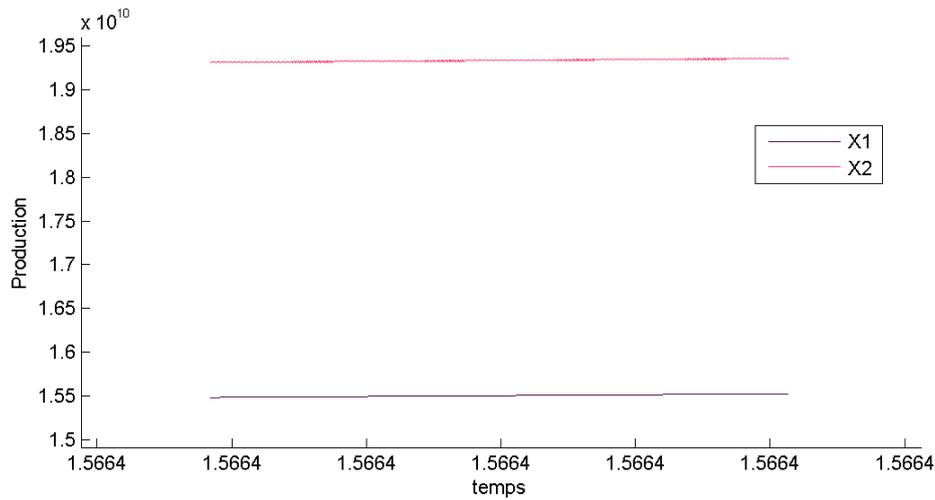


FIGURE 3.21 – Les trajectoires des solutions x_1 et x_2 de modèle (3.1) avec $T = 100$ et $r_1 = \cos(t) + 10$, $r_2 = \cos(t) + 10$.

Discutions :

- Les simulations sur les figures (3.19) et (3.20) montrent que les solutions existent, elles sont uniques et elles suivent un comportement pseudo-presque-périodique, mais elles dépassent trop la région \mathbb{B} , à cause des taux r_1 et r_2 trop élevés.

• **Cas 05 :**

Dans ce cas on prend des valeurs de r_1, r_2 de telle sorte que la condition du théorème sera pas vérifiée :

$$r_1(t) = 2 + \sin(t), \quad r_2(t) = 2 + \cos(t) \Rightarrow r_1^* = 1, \quad r_2^* = 1,$$

on a

$$\begin{aligned}
 r &= \max \left\{ \frac{1}{r1^*} \left[(2a_1^+ R_{12} + b_1^+ R_{22}^2 + 2b_1^+ c_2^+ R_{22} + b_1^+ \sup_{s \in \mathbb{R}}(c_2^2(s))) + b_1^+ (2R_{12}R_{22} + 2c_2^+ R_{12}) \right] \right. \\
 &\quad \left. , \frac{1}{r2^*} \left[(2a_2^+ R_{22} + b_2^+ R_{12}^2 + 2b_2^+ c_1^+ R_{12} + b_2^+ \sup_{s \in \mathbb{R}}(c_1^2(s))) + b_2^+ (2R_{22}R_{12} + 2c_1^+ R_{22}) \right] \right\} \\
 &= \max \left\{ \frac{4.75}{1}, \frac{4.88}{1} \right\} = \max \left\{ 4.75, 4.88 \right\} \\
 &= 4.88 > 1,
 \end{aligned}$$

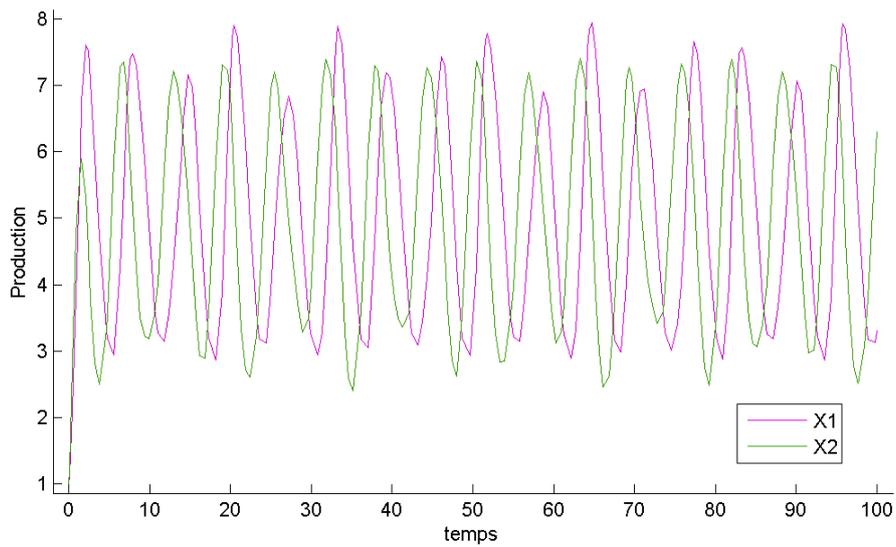


FIGURE 3.22 – Les trajectoires des solutions x_1 et x_2 de modèle (3.1) avec $T = 100$ et $r_1 = \cos(t) + 1$, $r_2 = \cos(t) + 1$.

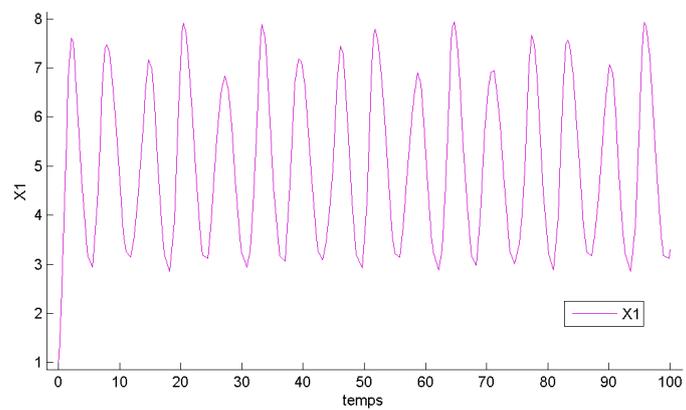


FIGURE 3.23 – Les trajectoires des solutions x_1 de modèle (3.1) avec $T = 100$ et $r_1 = \cos(t) + 1$, $r_2 = \cos(t) + 1$.

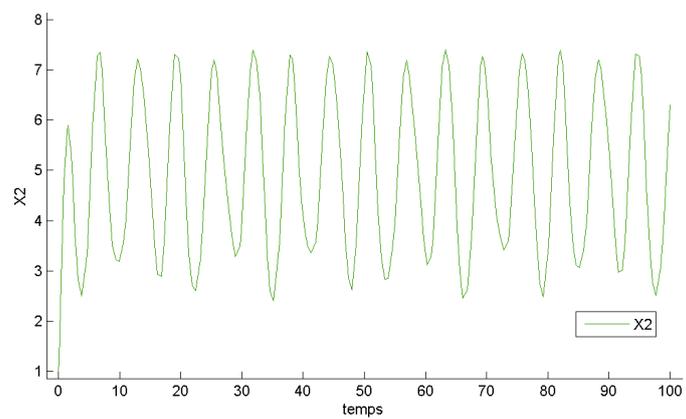


FIGURE 3.24 – Les trajectoires des solutions x_2 de modèle (3.1) avec $T = 100$ et $r_1 = \cos(t) + 1$, $r_2 = \cos(t) + 1$.

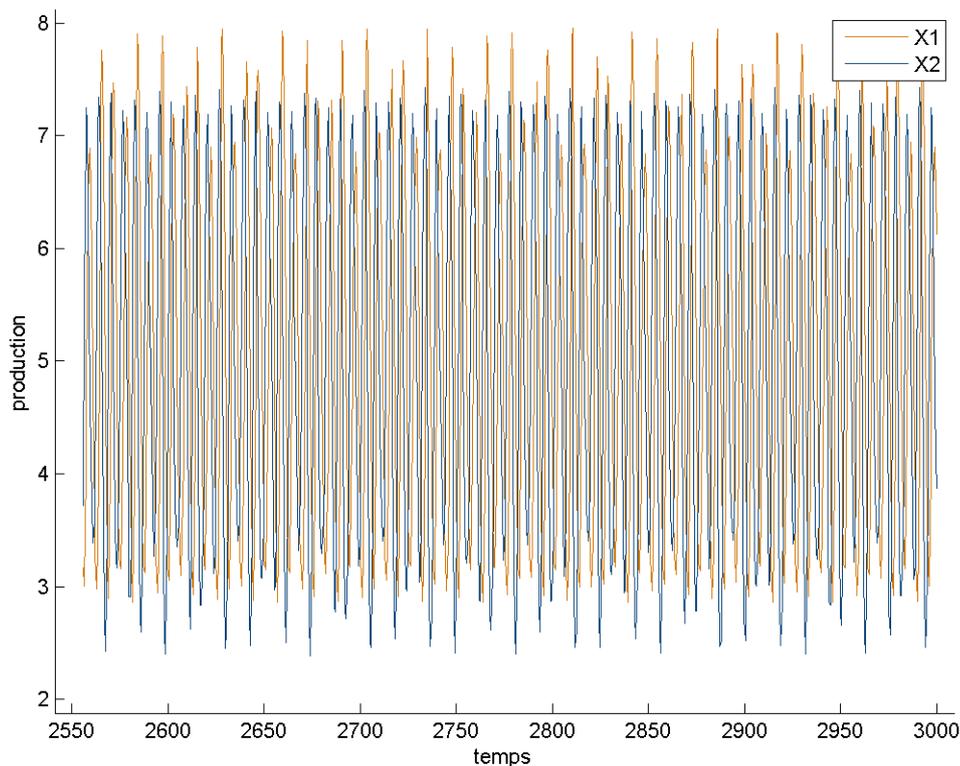


FIGURE 3.25 – Les trajectoires des solutions x_1 et x_2 de modèle (3.1) avec $T = 1000$ et $r_1 = \cos(t) + 1$, $r_2 = \cos(t) + 1$.

Discussions :

- On remarque que sur $T = 100$ les solutions suivent un comportement pseudo presque-périodique comme on le voit sur les figures (3.22), (3.25) et elles se rapprochent de plus en plus de la région \mathbb{B} , et même lorsqu'on a augmenté le T jusqu'à $T = 1000$ les solutions suivent toujours le même comportement, mais tant que la condition du théorème (8) n'est pas vérifiée, on ne peut pas affirmer l'existence des solutions à long terme, c'est-à-dire à un certain T les courbes divergent, d'où les solutions n'existent pas pour tout $T \in \mathbb{R}^+$

Remarque 3.2.1. *Plus on diminue les taux de production r_1 et r_2 plus les solutions se rapprochent de la région \mathbb{B} , mais tant que les conditions initiales du théorème ne sont pas vérifiées, cette hypothèse sera rejetée.*

Conclusion

Dans cette partie on a présenté un exemple sous forme d'équations différentielles d'un modèle de compétition et de coopération entre deux entreprises, on s'est intéressé à l'existence et l'unicité des solutions et le comportement de leurs trajectoires au fil du temps sous les conditions du théorème(8) , on a apporté quelques changements pour les valeurs des taux de production r_1 ,et r_2 en plusieurs cas , puis on a fait la simulation pour chacun de ces cas .

D'autre part on a conclu que les solutions sont pseudo-presque-périodique qu'on peut voir directement sur les figures obtenu par notre simulation .

On déduit que les solutions existent et elle sont uniques si seulement si elle vérifient les conditions du théorème (8) , ç-à-d les solutions sont bornées , et elles ne divergent pas au cours du temps .

On a remarqué que les solutions obtenues sous les conditions du théorème(8) ne sont pas forcément dans la région qu'on a fixé au départ, c'est par ce que on n'a pas tenu compte des conditions de la stabilité , autrement dit on a étudié l'existence et l'unicité sans la stabilité .

Conclusion générale et perspectives

Vu que la croissance économique est fondée sur des facteurs tels que la quantité de capital, de travail, ou encore la productivité, l'étude de la dynamique d'un modèle économique modélisé par un système d'équations différentielles associé à ces facteurs est très important pour connaître le comportement de ces derniers au cours du temps, dans notre étude on s'est intéressé au facteur de production.

Dans ce travail, on a présenté dans un premier temps le modèle simple de *Lotka – Volterra* qui est modélisé par un système des équations différentielles, tout en présentant ses équilibres associés ainsi que leurs stabilité (locale et globale).

On a contribué principalement à l'étude qualitative d'un modèle de compétition et de coopération entre deux entreprises avec retard, qui est à l'origine de modèle *Lotka – Volterra*. On a modélisé notre problème par un système des équations différentielles, on s'est basé sur le théorème de point fixe de *Banach* pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution pseudo-presque-périodique sous conditions suffisantes qu'on a présenté dans le deuxième chapitre.

On a clôturé notre travail par une simulation numérique sous Simulink de Matlab, où on a donné une brève présentation de Simulink, puis on a traité un exemple d'un modèle de compétition et de coopération entre deux entreprises avec retard dans plusieurs cas, on s'est intéressé à l'existence des solutions pseudo-presque-périodiques pour ce modèle sous les conditions du théorème (8), tout en présentant leurs trajectoires au cours du temps.

Toutefois, plusieurs questions fondamentales n'ont pas été abordés dans ce travail, notamment :

- La stabilité de la solution du modèle de compétition et de coopération entre deux entreprises avec retards.

- L'influence de la taille du retard sur la stabilité de la solution du modèle de compétition et de coopération entre deux entreprises avec retards variables en dans le temps.
- La manière dont modèle de compétition et de coopération entre deux entreprises pourraient résoudre des problèmes réels au niveau des entreprise comme les banque CNEP.
- L'étude de solutions pseudo presque-périodiques d'autres types de modèles :
 - stochastique,
 - avec retards mixte,
 - avec impulsion.

Bibliographie

- [1] AMDOUNI, M., AND CHÉRIF, F. The pseudo almost periodic solutions of the new class of lotka–volterra recurrent neural networks with mixed delays. *Chaos, Solitons Fractals* 113 (2018), 79–88. 39
- [2] AMIR, B., AND MANIAR, L. Composition of pseudo almost periodic functions and cauchy problems with operator of non dense domain. In *Annales Mathématiques Blaise Pascal* (1999), vol. 6, pp. 1–11. 41
- [3] AMMAR, B., CHERIF, F., AND ALIMI, M. Existence and uniqueness of pseudo almost-periodic solutions of recurrent neural networks with time-varying coefficients and mixed delays. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems* 23, 1 (2012), 109–118. 39
- [4] ANTOINE, C.-L., FERMIGIER, S., AND MAILLOT, V. *Exercices de mathématiques pour l’agrégation : analyse 1 : Antoine Chambert-Loir, Stéphane Fermigier, Vincent Maillot*. masson, 1995. 10, 16
- [5] BEROUAL, N. *Modèles mathématiques appliqués à la dynamique des populations*. PhD thesis, 2018. 13, 15
- [6] BOUKLI-HACENE, N. *Dichotomie Exponentielle pour les Equations Différentielles à Retard*. PhD thesis, 2009. 18
- [7] CHERRAF, A. Sur les solutions périodiques de modèles avec retard de dynamiques de population d’une seule espèce. Master’s thesis, Tlemcen, Algeria, 2016/2017. 5
- [8] CHUANYI, Z. *Almost periodic type functions and ergodicity*. Springer Science & Business Media, 2003. 17, 18
- [9] COPPEL, W. A. *Dichotomies in stability theory*, vol. 629. Springer, 2006. 34, 35
- [10] DARRIGOL, O. *Worlds of flow : A history of hydrodynamics from the Bernoullis to Prandtl*. Oxford University Press, 2005. 1

- [11] DENG, K., AND LEVINE, H. The role of critical exponents in blow-up theorems : the sequel. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 243, 1 (2000), 85–126. 8
- [12] DIAGANA, T. Weighted pseudo-almost periodic solutions to some differential equations. *Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications* 68, 8 (2008), 2250–2260. 16
- [13] EULER, L. Principes généraux du mouvement des fluides. *Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin* (1757), 274–315. 1
- [14] GUERRINI, L. Small delays in a competition and cooperation model of enterprises. *Applied Mathematical Sciences* 10, 52 (2016), 2571–2574. 29
- [15] HIRSCH, M. W., DEVANEY, R. L., AND SMALE, S. *Differential equations, dynamical systems, and linear algebra*, vol. 60. Academic press, 1974. 10, 16
- [16] HUO, H.-F., AND LI, W.-T. Positive periodic solutions of a class of delay differential system with feedback control. *Applied Mathematics and Computation* 148, 1 (2004), 35–46. 32
- [17] JEAN-PIERRE, D. *Analyse numérique et équations différentielles-4ème Ed.* EDP sciences, 2016. 5
- [18] LI, Y., AND ZHANG, T. Global asymptotical stability of a unique almost periodic solution for enterprise clusters based on ecology theory with time-varying delays and feedback controls. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 17, 2 (2012), 904–913. 27
- [19] LIAO, M., XU, C., AND TANG, X. Dynamical behaviors for a competition and cooperation model of enterprises with two delays. *Nonlinear Dynamics* 75, 1-2 (2014), 257–266. 20, 28
- [20] LU, L., LIAN, Y., AND LI, C. Dynamics for a discrete competition and cooperation model of two enterprises with multiple delays and feedback controls. *Open Mathematics* 15, 1 (2017), 218–232. 29
- [21] MAFOUTA-BANTSIMBA, G. P. *Mathématiques pour l'économie : méthodes et exercices corrigés.* De Boeck Supérieur, 2005. 1
- [22] M'HAMDI, M. S. *Oscillations et stabilité des réseaux de neurones récurrents à retards.* PhD thesis, Université de Carthage Faculté des Sciences de Bizerte, 2016. 35, 37, 41, 44
- [23] M'HAMDI, M. S. Stability and existence a unique pseudo almost-periodic solution of a competition and cooperation model for two enterprises with time-varying delay. *Conférence Internationale sur les Mathématiques Financières, Outils et Applications, MFOA'2019, Université de Bejaia, Algérie* (Octobre 2019). 33

- [24] MOHAMADI, A. S., POURABBAS, A., AND VAEZPOUR, S. M. Periodic solutions of delay differential equations with feedback control for enterprise clusters based on ecology theory. *Journal of Inequalities and Applications* 2014, 1 (2014), 1–15. 27
- [25] REINHARD, H. *ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.*, vol. 34002. Gauthier-Villars Paris, 1982. 15
- [26] SIRGHI, N., NEAMTU, M., AND CISMAS, L. The analysis of a competition and cooperation model of two enterprises with distributed time delay. In *Proceedings of the International Conference ‘Current Economic Trends in Emerging and Developing Countries’, Timisoara, Romania* (2015), pp. 18–20. 28
- [27] TIAN, X., NIE, Q., XIA, J., AND LI, Y. On model construction of enterprises’ interactive relationship from the perspective of business ecosystem. *South. Econ. J* 4 (2006), 50–57. 19
- [28] VIAL, G. Le système proie-prédateur de volterra-lotka. *Mars* (2011). 10
- [29] WALTMAN, P. *Competition models in population biology.* SIAM, 1983. 25
- [30] XU, C., AND LI, P. Almost periodic solutions for a competition and cooperation model of two enterprises with time-varying delays and feedback controls. *Journal of Applied Mathematics and Computing* 53, 1-2 (2017), 397–411. 29
- [31] XU, C., LI, P., XIAO, Q., AND YUAN, S. New results on competition and cooperation model of two enterprises with multiple delays and feedback controls. *Boundary Value Problems* 2019, 1 (2019), 36. 30
- [32] XU, C., AND LIAO, M. Global asymptotic stability for a stochastic competition and cooperation model of two enterprises. *Ital. J. Pure Appl. Math* 34 (2015), 705–716. 28
- [33] XU LI, H., HUANG, F.-L., AND LI, J.-Y. Composition of pseudo almost-periodic functions and semilinear differential equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 255, 2 (2001), 436–446. 41
- [34] ZHANG, T., LI, Y., AND YE, Y. Persistence and almost periodic solutions for a discrete fishing model with feedback control. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 16, 3 (2011), 1564–1573. 32
- [35] ZHANG, X., ZHANG, Z., AND WADE, M. J. Dynamical analysis of a competition and cooperation system with multiple delays. *Boundary Value Problems* 2018, 1 (2018), 111. 30
- [36] ZHIJUN, C. The model of ecological system of real estate enterprises and the research on dynamic strategic cost. *Canadian Social Science* 11, 12 (2015), 122–126. 25

- [37] ZUILY, C., AND HERVÉ, Q. *Éléments d'analyse pour l'agrégation*. Masson, 1996. 9

resumé

Les économistes ne se sont intéressés aux problèmes dynamiques qu'à partir des années 1920 avec les travaux de *Hotelling* et *Ramesey*. Cependant, il a fallu attendre les années 1960 pour que les techniques des mathématiques dynamiques soient largement introduites en économie. Aujourd'hui, ces techniques de mathématiques dynamiques font partie de la boîte à outils de l'économiste et se sont devenues indispensables pour comprendre l'évolution de certains modèles.

Ce travail est consacré principalement à l'étude qualitative d'un modèle de compétition et de coopération entre deux entreprises avec retard, qui est à l'origine de modèle proie prédateur de *Lotka – Voltera*. Ce problème est modélisé par un système des équations différentielles, afin de comprendre l'évolution de l'état de ce système c'est-à-dire la sortie du système au cours du temps et en fonction de son état initial. On se basant sur le théorème de point fixe de *Banach*, on a démontré l'existence et l'unicité de la solution pseudo-presque-périodique de ce modèle sous condition suffisante qu'on a présenté .

Une simulation numérique est réalisée afin de traiter un exemple d'un modèle de compétition et de coopération entre deux entreprises avec retard, tout en assurant l'existence des solutions pseudo-presque-périodique pour ce modèle, ainsi que leurs trajectoires au cours du temps.

abstract

Economists' interest in dynamic problems grew since 1920 starting from *Hotelling* and *Ramesey's* works, but the technics of dynamic mathematics were widely introduced into economics from the 1960s only nowadays, this technics are mostly the biggest components of the economist's toolbox, by the way, they became requisite for understanding the evolution of some models.

This work is mainly devoted to the qualitative study of a competition and cooperation model between two companies with delay, which is at the origin of the predatory prey model of *Lotka – Voltera*. This problem is modeled by a system of differential equations, in order to understand the evolution of the state of this system, i.e. the output of the system over time and as a function of its initial state. Based on the fixed point theorem of *Banach*, the existence and uniqueness of the pseudo-almost periodic solution of this model has been demonstrated under the sufficient condition that we have presented .

A numerical simulation is carried out in order to deal with an example of a competition and cooperation model between two companies with a delay, while ensuring the existence of pseudo-almost periodic solutions for this model, as well as their trajectories over time.