

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université A / MIRA de Bejaia  
Faculté des Sciences Exactes  
Département de Recherche Opérationnelle

---



# Mémoire de Master

Mathématiques Appliquées

Option :

Modélisation Mathématique et Techniques de Décisions

*Thème*

*Problème de brouillage dans les réseaux sans fil. Approche par la théorie des jeux*

Présenté par :

*M<sup>lle</sup> BENDJELILI Hanane et M<sup>lle</sup> BENFARES Lydia*

Devant le jury composé de :

Présidente	<i>M<sup>lle</sup> AOUDIA Zohra</i>	M.A.A	Université de Béjaïa.
Encadreur	<i>M<sup>me</sup> ANZI AICHA</i>	M.C.B	Université de Béjaïa.
Examinatrice	<i>M<sup>me</sup> HALIMI Naouel</i>	M.C.B	Université de Béjaïa.
Examinatrice	<i>M<sup>lle</sup> BOUIBED Karima</i>	M.C.B	Université de Béjaïa.

Année Universitaire 2018 – 2019

*Remerciement*

---

## Remerciement

*N*ous tenons tout d'abord à remercier **DIEU** Le Tous Miséricordieux, qui nous a donné la santé et le courage d'accomplir ce modeste travail.

*N*ous tenons à remercier vivement M<sup>me</sup> **AINZI-TOUCHE Aicha**, pour nous avoir honoré par son encadrement, pour sa disponibilité, ses orientations, ses précieux conseils et ses encouragements qui nous ont permis de mener à bien ce travail.

*N*ous tenons à remercier M<sup>lle</sup> **AOUDIA Zohra**, qui nous a fait l'honneur de présider ce jury.

*N*ous adressons nos vifs remerciements à M<sup>me</sup> **HALIMI Naouel** et M<sup>lle</sup> **BOUIBED, Karima** pour avoir accepté de juger ce travail.

*N*ous remercions tous les membres de nos familles pour leurs soutiens et leurs encouragements particulièrement nos parents.

*E*nfin, Merci à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce mémoire.

*Dédicaces*

---

## Dédicaces

*J'ai l'honneur de dédier ce travail à :*

*M*A source de courage, Mes **parents**, les personnes les plus chères à mes yeux, pour m'avoir donné une éducation exemplaire, pour leur amour, leur tendresse et leur accompagnement dans tout mon parcours.

*M*A petite princesse **Dania**, Mes très chers frères **Billal** et **Nadjem**

*L*A mémoire de mes chers grands pères. Que Dieu le tout-puissant les accueille dans son vaste paradis.

*M*ES chères cousines Samira, Naouel, Sara, Ryane, Liza et Mejeda ainsi que toute ma famille.

*C*elui qui a été toujours présent pour moi dans les moments les plus difficiles **Nassim**.

*M*A chère copine et ma binome **Lydia** avec laquelle j'ai passé des moments inoubliable ainsi toute sa famille

*M*ES chères copines ♡ **Nabila** ♡, Saida, Souraya, Lynda, Tinhinane M6, Léliane et Tinhinane qui m'ont soutenus moralement et psychologiquement lors des moments difficiles. Je les remercie pour la joie et le bonheur qu'elles m'ont apportés.

*T*outes les personnes qui m'ont apportés de l'aide.

***BENDJELILI Hanane***

*Dédicaces*

---

## Dédicaces

*J'ai l'honneur de dédier ce travail à :*

*AL'homme de ma vie, mon exemple éternel mon très cher père disparu trop tôt. Que  
Dieu le tous  
puissant l'accueille dans son vaste paradis.*

*MA source de courage, Ma **mère**, si Dieu a mis le paradis sous les pieds des mères, ce n'est  
pas pour rien. Adorable, honorable, aimable : tu représentes pour moi  
le symbole de la bonté par excellence, la source de tendresse,  
et l'exemple du dévouement qui n'a pas cessé de m'encourager  
et de prier pour moi*

*MES jolies soeurs **Fatiha, Samira**  
Mes très chers frères **Lyes** et **Farid**  
qui m'ont toujours encouragée et soutenue  
ainsi que leurs épouses **Fatiha** et **Hakima**.*

*MON unique neveu, mon adorable ange **Aris**.*

*MON soutien moral et source de joie et de bonheur à celui qui a été toujours à mes côtés  
aux moments difficiles qui m'a encouragée et soutenue **Nabil**.*

*MA chère copine et ma binome **Hanane** avec laquelle j'ai passé des moments  
inoubliable ainsi toute sa famille*

*MES chères copines **Hakima hb**, Saida, Nassima, Souraya, Lycia, Lynda, Nabila,  
Léliane, Amel, Sousou.*

***BENFARES Lydia***

# Table des matières

Liste des figures . . . . .	IV
Liste des algorithmes . . . . .	V
<i>Introduction générale</i>	<b>1</b>
<b>1 Généralités sur la théorie des jeux</b>	<b>5</b>
Introduction . . . . .	5
1.1 Définition d'un jeu . . . . .	6
1.1.1 Joueurs . . . . .	6
1.1.2 Stratégies . . . . .	6
1.1.3 Utilité . . . . .	7
1.2 Classification des jeux . . . . .	7
1.2.1 Selon l'ordre . . . . .	7
1.2.2 Selon les relations entre les joueurs . . . . .	7
1.2.3 Selon le nombre de stratégies . . . . .	7
1.2.4 Selon l'information . . . . .	8
1.3 Représentation des jeux . . . . .	8
1.3.1 Jeu sous forme normale (forme stratégique) . . . . .	8
1.3.2 Jeu sous forme extensive . . . . .	9
1.4 Jeux finis à deux joueurs . . . . .	9
1.5 Jeux bi-matriciels . . . . .	11
1.5.1 Jeu bi-matriciel en stratégies pures . . . . .	11
1.5.2 Jeu bi-matriciel en stratégies mixtes . . . . .	12
1.5.3 Concept de solution . . . . .	13
1.6 Équilibre de Nash . . . . .	14
1.6.1 Équilibre de Nash en stratégies pures . . . . .	14
1.6.2 Équilibre de Nash en stratégies mixtes . . . . .	15

1.7	Formulations équivalentes d'un jeu bi-matriciel . . . . .	15
1.7.1	Programmation linéaire bivalente . . . . .	16
1.7.2	Programmation bi-linéaire . . . . .	18
1.8	Jeux avec contraintes . . . . .	19
	Conclusion . . . . .	21
<b>2</b>	<b>Introduction à la programmation DC et DCA</b>	<b>23</b>
	Introduction . . . . .	23
2.1	Éléments de base de l'analyse <i>DC</i> . . . . .	24
2.1.1	Ensembles convexes . . . . .	24
2.1.2	Fonctions convexes . . . . .	27
2.1.3	Sous-différentiabilité . . . . .	30
2.1.4	Calcul sous-différentiel . . . . .	33
2.1.5	Fonction <i>DC</i> . . . . .	34
2.2	Optimisation <i>DC</i> . . . . .	34
2.2.1	Programme <i>DC</i> . . . . .	34
2.2.2	Programme <i>DC</i> avec contraintes . . . . .	35
2.2.3	Dualité en programmation <i>DC</i> . . . . .	35
2.2.4	Optimalité globale en optimisation <i>DC</i> . . . . .	36
2.2.5	Optimalité locale en optimisation <i>DC</i> . . . . .	37
2.3	Algorithme d'optimisation <i>DC</i> ( <i>DCA</i> ) . . . . .	38
2.3.1	Principe de <i>DCA</i> . . . . .	38
2.3.2	Existence des suites générées . . . . .	39
2.3.3	Convergence de <i>DCA</i> . . . . .	40
2.3.4	Optimisation <i>DC</i> polyédrale et convergence finie de <i>DCA</i> . . . . .	41
2.3.5	Illustration géométrique de <i>DCA</i> . . . . .	42
<b>3</b>	<b>Etat de l'art</b>	<b>44</b>
	Introduction . . . . .	44
3.1	les réseaux sans fil . . . . .	45
3.2	La transmission dans les réseaux sans fil . . . . .	45
3.2.1	Schéma de base d'une chaîne de transmission . . . . .	45
3.2.2	Le canal de transmission . . . . .	46
3.2.3	L'émetteur . . . . .	47
3.2.4	Le récepteur . . . . .	47
3.3	La sécurité des réseaux sans fil . . . . .	47

3.3.1	Attaques dans les réseaux sans fil . . . . .	48
3.3.2	La technologie des communications à étalement de spectre . . . . .	50
3.4	Etat de l'art . . . . .	51
3.4.1	Littérature connexe et motivation . . . . .	52
3.4.2	Performances des liaisons de communication sans fil par paquets adaptatifs en présence de brouillage . . . . .	53
3.4.3	Problème de brouillage dans un canal <i>AWGN</i> avec un brouilleur limité en puissance . . . . .	56
	Conclusion . . . . .	58
<b>4</b>	<b>Modélisation et résolution du problème</b>	<b>59</b>
	Introduction . . . . .	59
4.1	Position du problème . . . . .	60
4.2	Modélisation du problème . . . . .	61
4.3	Résolution du problème . . . . .	66
4.3.1	Conversion du jeu vers un problème de programmation quadratique	66
4.3.2	Résolution du problème de programmation quadratique . . . . .	69
4.3.3	Algorithme <i>DCA</i> . . . . .	70
4.4	Simulation et interprétation des résultats . . . . .	73
4.4.1	Variation de la valeur du jeu en fonction de $x_{max}$ . . . . .	73
4.4.2	Variation de la valeur du jeu en fonction de $y_{max}$ . . . . .	74
4.4.3	Variation de la valeur du jeu en fonction de $SNR_{thr}$ . . . . .	76
	Conclusion . . . . .	77
	<b>Conclusion générale</b>	<b>79</b>
	<b>Bibliographie.</b>	<b>85</b>

# Table des figures

1.1	Jeu sous forme extensive. . . . .	10
2.1	Ensemble convexe et non convexe. . . . .	25
2.2	Polyèdre convexe et Polyèdre non convexe . . . . .	27
2.3	Fonction convexe. . . . .	28
2.4	Epigraphe d'une fonction . . . . .	29
2.5	Fonction différentiable. . . . .	31
2.6	Fonction non différentiable. . . . .	32
2.7	Interprétation géométrique de <i>DCA</i> . . . . .	43
3.1	Un réseau sans fil. . . . .	45
3.2	Schéma de base d'une chaîne de transmission. . . . .	46
3.3	Types de brouillage. . . . .	49
3.4	Modèle général du système de communication à spectre étalé. . . . .	50
3.5	Étalement de spectre à séquence directe vs étalement de spectre par saut de fréquence. . . . .	51
3.6	Lien AWGN par paquets sous brouillage limité en puissance. . . . .	56
4.1	Variation de la valeur de jeu du lien légitime en fonction de $x_{max}$ . . . . .	73
4.2	Variation de la valeur de jeu du brouilleur en fonction de $x_{max}$ . . . . .	74
4.3	Variation de la valeur de jeu du lien légitime en fonction de $y_{max}$ . . . . .	75
4.4	Variation de la valeur de jeu du brouilleur en fonction de $y_{max}$ . . . . .	75
4.5	La variation de la valeur de jeu du lien légitime en fonction de SNR(thr). . . . .	76
4.6	La variation de la valeur de jeu du brouilleur en fonction de SNR(thr). . . . .	77

# Liste des Algorithmes

1	Algorithme DCA	39
2	Algorithme DCABC	72

# Introduction générale

≍ *La connaissance s'acquiert par l'expérience,  
tout le reste n'est que de l'information.*

*"Albert Einstein" ≍*

La théorie des jeux est la discipline mathématique qui étudie les situations où le sort de chaque décideur (appelé joueur en théorie des jeux) dépend non seulement des décisions qu'il prend mais également des décisions prises par d'autres décideurs [35]. On dit que les joueurs se trouvent en situation *d'interaction stratégique* dans un cadre déterminé à l'avance. Donc, l'objectif principal de la théorie des jeux est de créer des modèles mathématiques permettant de décrire ces interactions [21], puis d'introduire des concepts de solution pour prédire les issues possibles d'un jeu, et enfin d'appliquer tous ces outils pour prédire les conséquences d'une interaction stratégique.

La théorie des jeux fut fondée par *Von Neumann* et *Morgenstern* en 1944 [38] lors de la parution de leur ouvrage *"Theory of Games and Economic Behavior"*. Bien sûr, il y eut des précurseurs, parmi les principaux, il faut citer *Cournot* et *Edgeworth*. Toutefois, c'est depuis la publication du livre de *von Neumann* et *Morgenstern* que la théorie des jeux est véritablement considérée comme une nouvelle discipline. Ces deux auteurs ont proposé une solution dans le cas particulier d'un jeu où le gain d'un joueur correspond exactement à la perte subie par l'autre (jeu à somme nulle). En 1951, *Nash* [37] a montré comment les idées développées par *Cournot* dès 1838 pouvaient servir de base pour construire une théorie de l'équilibre (*l'équilibre de Nash*) non coopératif qui généralise la solution proposée par *Von Neumann* et *Morgenstern*.

Il existe des problèmes de jeu dans la réalité où les joueurs sont obligés de satisfaire certaines conditions plutôt que d'être dans un espace de stratégie complet. Ces problèmes de

décision mènent à des *jeux avec contraintes* introduits pour la première fois par *Charnes* 1953. Ces jeux ont été utilisé pour modéliser de nombreux problèmes pratiques dans de nombreuses disciplines, y compris le *brouillage* dans les *réseaux de télécommunication*.

La réalisation de la première transmission radio en 1896 par *Guglielmo Marconi* a donné naissance à un nouveau monde de communication. Et depuis, ce monde ne cesse pas de s'améliorer d'un jours à l'autre, par des nouvelles idées et techniques que proposent les scientifiques pour faciliter et en même temps accélérer l'action de communication. Les réseaux sans fil sont des moyens de communications modernes. Ils sont actuellement très largement utilisés dans des différents domaines de la vie. Grâce aux différents services qu'ils offrent, ils sont devenus indispensables et présents dans la plupart de nos activités quotidiennes tel que, la téléphonie, la télévision, l'internet ...

Les communications sans fil présentent des vulnérabilités sérieuses en termes de sécurité à cause de la nature ouverte du canal radio. Un adversaire peut facilement brouiller le canal radio et ainsi empêcher les utilisateurs légitimes de l'accès au réseau. Les mécanismes de sécurité ont pour but de protéger les réseaux contre les attaques et d'assurer les services de confidentialité, intégrité, authentification, disponibilité, etc. Parmi ces attaques il y a l'attaque d'interférence (brouillage ou jamming). Il s'agit d'une attaque sévère dans laquelle l'attaquant monopolise le canal de communication, empêchant ainsi les noeuds légitimes de communiquer. Pour se protéger contre cette attaque, la littérature propose plusieurs solutions qui se basent principalement sur le saut de fréquences et l'étalement du spectre (*FHSS*) [3].

*FHSS* est une technique de transmission permettant à l'émetteur d'utiliser alternativement plusieurs canaux pour effectuer sa transmission. Ceci lui permettra d'éviter les interférences et d'atténuer le brouillage. Il faut donc trouver une stratégie de transmission efficace pour atteindre cet objectif.

Dans le cadre de notre mémoire, nous nous intéressons au problème de *brouillage* dans un réseau sans fil à saut de fréquences. Notre travail consiste à modéliser le problème sous forme d'un jeu bi-matriciel avec contraintes.

Une relation de ce type de jeux avec la programmation quadratique a été établie dans [17]. Ainsi, pour le calcul de l'équilibre de *Nash* de notre modèle nous formulons le problème de programmation quadratique correspondant. Le problème résultant n'est pas convexe à cause de la non convexité de la fonction objectif. Pour sa résolution nous avons choisi une technique d'optimisation non convexe basée sur l'optimisation *DC* (Différence de deux

fonctions Convexes) et *DCA* (*DC* Algorithmes).

La programmation *DC* est une méthode primale-duale de sous-gradient basée sur l'optimalité locale et la dualité en optimisation *DC*. C'est une technique qui traite des problèmes d'optimisation non convexe dans lesquels la fonction objectif peut être représentée sous la forme de différence de deux fonction convexes dites composantes *DC* de la fonction. Ainsi, l'algorithme *DCA* s'applique non pas à la fonction *DC* elle même, mais plutôt à ses composantes *DC*. L'algorithme *DCA* a été appliqué avec succès pour un grand nombre de problèmes d'optimisation non convexe dans différents domaines de la science appliquée [56][54]. Sur le plan algorithmique, l'essentiel repose sur les algorithmes de l'optimisation *DC* (*DCA*) introduits par *Pham Dinh Tao* en 1985 à l'état préliminaire comme une extension naturelle et logique des travaux de *P.D. Tao* depuis 1975 et de *J.F. Toland* en 1979. Ces outils théoriques et algorithmiques ont été intensivement développés par *P.D. Tao* et *L.T. Hoai An* depuis 1993 [56][54] pour devenir maintenant classiques et de plus en plus populaires.

Notre mémoire est structuré autour de quatre chapitres :

Dans le premier chapitre, nous donnons un aperçu général sur les notions de base de la théorie des jeux à savoir les éléments essentiels d'un jeu, les différentes classifications des jeux ainsi que quelques concepts de solutions des jeux non coopératifs. Nous terminons par introduire un cas particulier des jeux qui sont les jeux avec contraintes.

Dans le deuxième chapitre nous rappelons brièvement quelques notions de base sur la théorie de l'analyse et l'optimisation convexe dont nous aurons besoin dans notre travail. Ensuite, nous introduisons la méthode *DC* et exposons la théorie relative à cette méthode. Nous décrivons également l'algorithme *DCA* et sa construction.

Le troisième chapitre est consacré à une introduction aux réseaux sans fil en général et aux transmissions dans ces réseaux en particulier. Nous passons ensuite à la définition de la sécurité et ses objectifs ainsi que ses principales attaques, nous nous penchons beaucoup plus sur le brouillage et les techniques de défense anti-brouillage afin de présenter une synthèse bibliographique des travaux déjà réalisés ces dernières années sur la modélisation et le traitement de ce problème.

Dans le quatrième et le dernier chapitre, nous présentons notre modèle qui traite le

problème de brouillage dans les réseaux sans fils. La partie qui suit comporte l'application de la programmation  $DC$  pour la résolution de notre problème. Pour cela, on transforme notre jeu en un programme quadratique, puis nous reformulons le problème considéré comme des problèmes  $DC$  standard, i.e minimisation d'une fonction  $DC$  sous les contraintes convexes. Nous développons ensuite un algorithme approprié basé sur  $DCA$  pour résoudre le problème  $DC$  résultant.

Notre travail s'achève par des tests numériques dont l'objectif est de :

- Voir l'influence des contraintes du notre modèle sur les performances de lien légitime et de brouilleur et déduire l'influence de la technique anti-brouillage ( $FH$ ) sur la transmission dans les réseaux sans fils.

- Evaluer le débit moyen et le taux de brouillage réussi par rapport au seuil ( $SNR_{thr}$ ) pour différentes limites du nombre de canaux

On clôture ce mémoire par une conclusion.

# 1

## Généralités sur la théorie des jeux

≃ *Qui joue perd, c'est mathématique.*

*Les statistiques ne trompent pas.*

*Et pourtant, il faut jouer pour gagner, même si les chances sont minces.*

*"Normand Reid" ≃*

### Introduction

La théorie des jeux est une branche des mathématiques consacrée à l'étude des choix d'individus rationnels en interaction et les conséquences de leurs choix. Elle a connu une véritable explosion au cours de ces dernières années et est devenue un outil central dans plusieurs disciplines comme la biologie, le transport routier, la télécommunication, ... Dans ce chapitre, nous allons donner quelques définitions et notions fondamentales de la théorie des jeux auxquelles nous ferons référence dans les chapitres suivants.

## 1.1 Définition d'un jeu

Un "jeu" est un ensemble de règles qui encadre le comportement des joueurs pour faire des choix stratégiques parmi un certain nombre d'actions possibles, dans un cadre défini à l'avance qui seront les règles du jeu. Le résultat de ces choix constituent une issue du jeu, à laquelle est associée un gain (ou paiement), positif ou négatif, pour chacun des participants.

Un jeu suppose une définition claire des règles de comportements des joueurs qui spécifient :

### 1.1.1 Joueurs

Un joueur est l'entité de base de la théorie des jeux pouvant être interprété comme une personne, un groupe de personnes, une société, etc. Donc dans un jeu on doit préciser un ensemble de  $N$  joueurs, chacun étant caractérisé par un indice  $i$ ,  $i = \overline{1, N}$ . On notera par  $I = \{1, 2, \dots, N\}$  l'ensemble de ces joueurs.

### 1.1.2 Stratégies

Une stratégie est un plan d'actions spécifiant l'ensemble des décisions que doit prendre le joueur au cours du jeu. Le résultat des choix de tous les joueurs constitue une "issue" ou un profil d'action du jeu.

Il existe différents types de stratégies [43]

#### a) *Stratégie pure*

Une stratégie pure est un plan d'actions qui est choisi par chaque joueur avec certitude. On note par  $X_i$  l'ensemble des stratégies pures du  $i^{eme}$  joueur et par  $x_i$  l'une de ces stratégies pures.

#### b) *Stratégie mixte*

Une stratégie mixte  $\alpha$  est une distribution de probabilité des stratégies pures. Si un joueur  $i \in I$  admet  $n_i$  stratégies pures, alors :

$$\Delta_{n_i} = \{\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n_i}) \in \mathbb{R}^{n_i}, \sum_{j=1}^{n_i} \alpha_j = 1, \alpha_j \geq 0, j = \overline{1, n_i}\}. \quad (1.1)$$

### 1.1.3 Utilité

L'utilité est le gain que ce soit négatif ou positif qui résulte lors des actions d'un joueur. L'objectif de chaque joueur dans un conflit est toujours de maximiser son gain, par apport aux conditions qui l'entourent.

Formellement, dans un jeu  $J$  on désigne par  $u_i(x) = u_i(x_i, x_{-i}) \in \mathbb{R}$  la fonction utilité du joueur  $i$ . On peut dire alors, que l'utilité du joueur  $i$ ,  $i \in I$ , dépend non seulement de sa stratégie  $x_i$ , mais également de celles des autres joueurs résumées en  $x_{-i}$ .

## 1.2 Classification des jeux

Il existe plusieurs classifications possibles des jeux. Nous allons définir quelques catégories :

### 1.2.1 Selon l'ordre

#### a) *Jeux statiques*

Un jeu est dit statique lorsque les joueurs choisissent simultanément leurs actions et reçoivent ensuite leurs gains respectifs. La représentation adéquate est la forme normale.

#### b) *Jeux séquentiels*

Un jeu séquentiel est un jeu dont les joueurs interviennent les uns après les autres, la représentation la plus adéquate est la forme extensive.

### 1.2.2 Selon les relations entre les joueurs

#### a) *Jeux coopératifs* [32]

Un jeu est dit coopératif, si les joueurs peuvent se grouper dans des coalitions où le choix de leurs stratégies est décidé en commun, afin d'améliorer le gain des joueurs coalisés.

#### b) *Jeux non coopératifs* [32]

Dans ce type de jeux, chaque joueur essaye de maximiser sa fonction d'utilité en tenant compte de la stratégie des autres, il n'est donc pas possible de former des coalitions.

### 1.2.3 Selon le nombre de stratégies

#### a) *Jeu fini*

Un jeu est dit fini, si les ensembles de stratégies  $X_i$ ,  $\forall i \in I$  sont des ensembles finis

$(|X_i| < \infty, \forall i \in I)$ .

#### b) *Jeu infini*

Un jeu est dit infini, si les ensembles de stratégies  $X_i, \forall i \in I$  sont des ensembles infinis.

### 1.2.4 Selon l'information

#### a) *Jeux à information parfaite*[\[61\]](#)

Un jeu est à information parfaite, si chaque joueur, au moment de choisir sa stratégie, a une connaissance parfaite de l'ensemble des décisions prises antérieurement par les autres joueurs. La représentation qui semble appropriée à ce type de jeux est la forme extensive.

#### b) *Jeux à information imparfaite*[\[61\]](#)

On dit qu'un jeu est à information imparfaite lorsqu'un joueur atteint un point de décision où il ne connaît pas toutes les actions des autres joueurs qui l'ont précédés.

#### c) *Jeux à information complète*[\[61\]](#)

Un jeu est dit à information complète si tous les joueurs connaissent parfaitement la structure du jeu.

#### d) *Jeux à information incomplète*[\[61\]](#)

Un jeu est dit à information incomplète si au moins un des joueurs ne connaît pas parfaitement la structure du jeu.

## 1.3 Représentation des jeux

### 1.3.1 Jeu sous forme normale (forme stratégique)

#### Définition 1.3.1 [\[43\]](#)

Un jeu sous forme normale peut être représenté sous la forme

$$J_N = \langle I, \{X_i\}_{i \in I}, \{u_i\}_{i \in I} \rangle, \quad (1.2)$$

où

1.  $I = \{1, 2, \dots, N\}$  est l'ensemble des joueurs.
2.  $X_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$  désigne l'ensemble des stratégies du joueur  $i$ .  $X = \prod_{i=1}^N X_i$  est l'ensemble des issues du jeu.

3.  $u_i : X \longrightarrow \mathbb{R}$  est la fonction de gain du  $i^{\text{ème}}$  joueur.

### 1.3.2 Jeu sous forme extensive

#### Définition 1.3.2 [22]

La forme extensive est représentée par un arbre appelé arbre de Kuhn qui décrit le déroulement du jeu et les coups des joueurs. Chaque sommet représente le joueur et l'ensemble d'informations dont il dispose lors de la prise de décision et les branches correspondent aux actions possibles. Les gains que chaque joueur peut réaliser sont donnés aux sommets terminaux de l'arbre selon le chemin emprunté.

#### Remarque 1.3.1

Un jeu sous forme normale peut être toujours représenté sous la forme extensive sans perte d'information. Dans le sens inverse, un jeu sous forme extensive peut être transformé sous forme normale si les joueurs prennent leurs décisions non alternativement mais simultanément.

## 1.4 Jeux finis à deux joueurs

Un jeu fini à deux joueurs est un cas particulier d'un jeu, lorsque l'ensemble des joueurs est réduit à deux ( $I = \{1, 2\}$ ). Il est représenté par :

$$J_2 = \langle X_1, X_2, u_1, u_2 \rangle, \quad (1.3)$$

où

1.  $X_1$  désigne l'ensemble constitué d'un nombre fini de  $m$  stratégies du joueurs 1

$$X_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}.$$

2.  $X_2$  désigne l'ensemble constitué d'un nombre fini de  $n$  stratégies du joueurs 2

$$X_2 = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}.$$

3.  $X = X_1 \times X_2$  est l'ensemble des issues du jeu.

4.  $u_1 : X_1 \times X_2 \longrightarrow \mathbb{R}$  est la fonction de gain du joueur 1.

5.  $u_2 : X_1 \times X_2 \longrightarrow \mathbb{R}$  est la fonction de gain du joueur 2.

## 1.4. JEUX FINIS À DEUX JOUEURS

---

**Exemple 1.4.1** (Le jeu pierre,ciseaux, feuille)

Considérons deux joueurs  $P_1$  et  $P_2$ , ayant à leur disposition les actions : pierre, ciseaux et feuille. Nous avons donc :

- $I = \{P_1, P_2\}$ .
- $X_1 = X_2 = \{\text{pierre, ciseaux, feuille}\}$ .

Les gains associés à chaque combinaison d'actions sont représentés comme suit :

**La forme normale :**

	<i>pierre</i>	<i>ciseaux</i>	<i>feuille</i>
<i>pierre</i>	(0, 0)	(5, 0)	(0, 5)
<i>ciseaux</i>	(0, 5)	(0, 0)	(5, 0)
<i>feuille</i>	(5, 0)	(0, 5)	(0, 0)

**La forme extensive :**

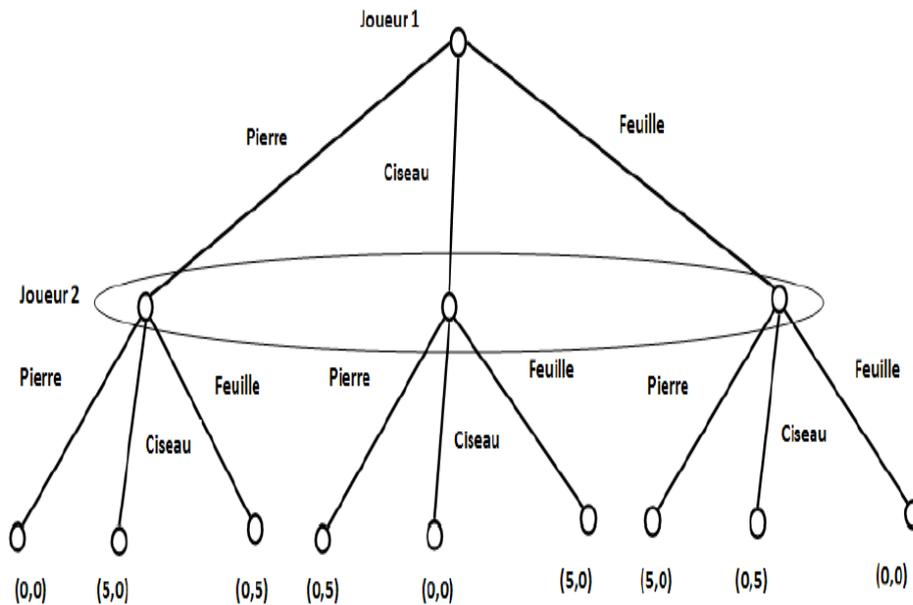


FIGURE 1.1 – Jeu sous forme extensive.

## Jeux à somme nulle (Jeux matriciels)

Un jeu fini à deux joueurs est dit à somme nulle, si dans toute situation du jeu, les valeurs des fonctions de gains des deux joueurs sont diamétralement opposées, c'est-à-dire :[\[43\]](#)

$$\sum_{i=1}^2 u_i(x, y) = 0, \forall x \in X_1, \forall y \in X_2. \quad (1.4)$$

Le jeu à deux joueurs à somme nulle sera noté par :

$$J_1 = \langle X_1, X_2, A \rangle, \quad (1.5)$$

où

1.  $X_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  est l'ensemble des stratégies pures du joueur 1.
2.  $X_2 = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  est l'ensemble des stratégies pures du joueur 2.
3.  $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ , avec  $a_{ij} = u_1(x_i, y_j)$ ,  $\forall i = 1, \dots, m$ ,  $\forall j = 1, \dots, n$ .

On notera  $A_i$  la  $i^{eme}$  ligne et  $A_j$  la  $j^{eme}$  colonne de la matrice  $A$ .

## 1.5 Jeux bi-matriciels

Un jeu bi-matriciel est un jeu fini à deux joueurs à somme non nulle. Les valeurs des fonctions de gains des deux joueurs sont décrites par deux  $n \times m$ -matrices de gains  $A$  et  $B$  des joueurs 1 et 2 respectivement.

### 1.5.1 Jeu bi-matriciel en stratégies pures

On notera un jeu bi-matriciel en stratégies pures par :

$$J_2 = \langle X_1, X_2, A, B \rangle, \quad (1.6)$$

où

1.  $X_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  est l'ensemble des stratégies pures du joueur 1.
2.  $X_2 = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  est l'ensemble des stratégies pures du joueur 2.
3.  $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ , où  $a_{ij} = u_1(x_i, y_j)$ ,  $\forall i = 1, \dots, m$ ,  $\forall j = 1, \dots, n$ .
4.  $B = (b_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ , où  $b_{ij} = u_2(x_i, y_j)$ ,  $\forall i = 1, \dots, m$ ,  $\forall j = 1, \dots, n$ .

## 1.5. JEUX BI-MATRICIELS

---

$a_{ij}$  et  $b_{ij}$  sont les gains respectifs des joueurs 1 et 2 s'ils ont choisi respectivement leurs stratégies pures  $x_i \in X_1$  et  $y_j \in X_2$ .

### Exemple 1.5.1 (Le dilemme du prisonnier)

Deux prisonniers, Alice et Bob sont accusés d'avoir commis ensemble un délit et sont interrogés dans des pièces séparées. la police expose la situation à chacun d'entre eux de la façon suivante :

Nous te demandons d'avouer ton crime, nous savons bien que tu es à priori peu enclin à coopérer avec nous, mais nous souhaiterions attirer ton attention sur ceci :

- Si ton complice avoue mais que tu nies, il sera libéré tandis que tu auras 14 ans de prison.
- Si vous avouez tous les deux, la justice sera compréhensive et vous n'aurez qu'une peine de 4 ans.
- Si vous refusez de parler tous les deux, vous ferez un an de prison chacun.

Les évaluations des différentes situations du jeu pour chacun des deux joueurs sont données sous la forme de deux matrices notées :  $A$  pour le joueur 1 (Alice) et  $B$  pour le joueur 2 (Bob).

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{Avouer} & \text{Nier} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{Avouer} \\ \text{Nier} \end{array} & \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 14 & 1 \end{pmatrix}, \end{array} \quad B = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{Avouer} & \text{Nier} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{Avouer} \\ \text{Nier} \end{array} & \begin{pmatrix} 4 & 14 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Comme on peut l'écrire sous la forme :

$$(A, B) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{Avouer} & \text{Nier} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{Avouer} \\ \text{Nier} \end{array} & \begin{pmatrix} (4, 4) & (0, 14) \\ (14, 0) & (1, 1) \end{pmatrix} \end{array}$$

### 1.5.2 Jeu bi-matriciel en stratégies mixtes

L'extension du jeu bi-matriciel (1.6) en stratégies mixtes s'écrit sous la forme :

$$\langle \Delta_m, \Delta_n, E_1(\alpha, \beta), E_2(\alpha, \beta) \rangle, \quad (1.7)$$

où

1.  $\Delta_m = \{\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m, \alpha_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, m, \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1\}$ , est l'ensemble des stratégies mixtes du joueur 1.

2.  $\Delta_n = \{\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n, \beta_j \geq 0, \forall j = 1, \dots, n, \sum_{j=1}^n \beta_j = 1\}$ , est l'ensemble des stratégies mixtes du joueur 2.
3.  $\alpha_i$  représente la probabilité avec la quelle le joueur 1 joue la stratégie pure  $x_i \in X_1$ , et  $\beta_j$  celle avec la quelle le joueur 2 joue la stratégie pure  $y_j \in X_2$ .
4.  $E_1(\alpha, \beta) = \alpha^t A \beta$  est l'espérance des gains du premier joueur relative à la stratégie  $(\alpha, \beta) \in \Delta_m \times \Delta_n$ .
5.  $E_2(\alpha, \beta) = \alpha^t B \beta$  est l'espérance des gains du deuxième joueur relative à la stratégie  $(\alpha, \beta) \in \Delta_m \times \Delta_n$ .

### 1.5.3 Concept de solution

Considérons le jeu bi-matriciel (1.6), sous l'hypothèse que les deux joueurs sont rationnels (chacun agit d'une manière qui lui permettant d'obtenir le plus de succès possible) et doivent prendre leurs décisions simultanément, l'issue du jeu ou bien les actions choisies par chaque joueur seront déterminées sur la base de plusieurs concepts.

#### 1. *Équilibres en stratégies dominantes*[4]

##### **Définition 1.5.1 (Stratégies dominées)**

Une stratégie  $x_i \in X_i$  du joueur  $i$  est dominée si

$$\exists y_i \in X_i, \forall x_{-i} \in X_{-i}, u_i(x_i, x_{-i}) \leq u_i(y_i, x_{-i}).$$

On dit alors que  $x_i$  est dominée par  $y_i$ .

##### **Définition 1.5.2 (Stratégies dominantes)**

Une stratégie  $x_i \in X_i$  est dite dominante pour le joueur  $i$ , si

$$u_i(x_i, x_{-i}) \geq u_i(y_i, x_{-i}), \forall x_{-i} \in X_{-i}, \forall y_i \in X_i, y_i \neq x_i.$$

Autrement dit,  $x_i$  donne un meilleur gain que toute autre stratégie.

##### **Définition 1.5.3 (Équilibre en stratégies dominantes)**

Une issue  $(x_i^*, y_j^*) \in X_1 \times X_2$  est appelée équilibre en stratégies dominantes dans un jeu bi-matriciel, si la stratégie  $x_i^* \in X_1$  (respectivement  $y_j^* \in X_2$ ), est une stratégie dominante pour le joueur 1 (respectivement 2).

## 2. Équilibres en stratégies de sécurité

### Définition 1.5.4 [43]

Une paire  $(x_{i^*}, y_{j^*}) \in X_1 \times X_2$  est une paire de stratégies de sécurité pour les deux joueurs dans le jeu bi-matriciel (1.6), si

$$\begin{cases} \underline{V}_1 = \min_{j \in X_2} a_{i^*j} = \max_{i \in X_1} \min_{j \in X_2} a_{ij}, \\ \bar{V}_2 = \min_{i \in X_1} b_{ij^*} = \max_{j \in X_2} \min_{i \in X_1} b_{ij}. \end{cases} \quad (1.8)$$

Les niveaux de sécurité correspondants aux joueurs 1 et 2 respectivement sont  $\underline{V}_1$  et  $\bar{V}_2$ .

### Exemple 1.5.2

Dans l'exemple de dilemme du prisonnier, l'équilibre en stratégie de sécurité est  $(x_{i^*}, y_{j^*}) = (\text{Avouer}, \text{Avouer})$  et  $\underline{V}_1 = 4$  et  $\bar{V}_2 = 4$ .

## 1.6 Équilibre de Nash

Le concept clé de la théorie des jeux est le concept d'équilibre de Nash introduit par le mathématicien *John Nash* en 1950. Un équilibre de Nash correspond donc à une situation où aucun joueur n'a intérêt à dévier unilatéralement de la situation d'équilibre.

### 1.6.1 Équilibre de Nash en stratégies pures

#### Définition 1.6.1 [43]

Une situation  $(x_{i^*}, y_{j^*}) \in X_1 \times X_2$  est un équilibre de Nash en stratégies pures dans le jeu bi-matriciel (1.6), si

$$\begin{cases} a_{i^*j^*} \geq a_{ij^*}, \quad \forall i = \overline{1, m}, \\ b_{i^*j^*} \geq b_{i^*j}, \quad \forall j = \overline{1, n}, \end{cases} \quad (1.9)$$

tel que :

- $a_{i^*j^*}$  représente le gain du premier joueur lorsqu'il joue sa stratégie  $x_{i^*}$  et le second joue  $y_{j^*}$ .
- $b_{i^*j^*}$  représente le gain du second joueur lorsqu'il joue sa stratégie  $y_{j^*}$  et le premier joue  $x_{i^*}$ .

**Exemple 1.6.1**

La situation (Avouer, Avouer) constitue un équilibre de Nash dans le dilemme du prisonnier.

**1.6.2 Équilibre de Nash en stratégies mixtes**

**Définition 1.6.2** [43]

Un couple de stratégies mixtes  $(\alpha^*, \beta^*) \in \Delta_m \times \Delta_n$  est un équilibre de Nash en stratégies mixtes dans le jeu bi-matriciel (1.6), si

$$\begin{cases} (\alpha^*)^t A \beta^* \geq \alpha^t A \beta^* & \forall \alpha \in \Delta_m, \\ (\alpha^*)^t B \beta^* \geq (\alpha^*)^t B \beta & \forall \beta \in \Delta_n. \end{cases} \quad (1.10)$$

**Remarque 1.6.1**

Toute stratégie pure peut-être écrite sous la forme d'une stratégie mixte, mais la réciproque n'est pas forcément vraie.

En effet si  $x_{i^*}$  est une stratégie pure, alors on peut l'écrire sous la forme  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ ,  $\alpha_i = 0, \forall i = 1 \dots m, i \neq i^*$  et  $\alpha_{i^*} = 1$ .

**Théorème 1.6.1** [32]

Tout jeu fini sous forme stratégique admet un équilibre de Nash en stratégies mixtes.

**1.7 Formulations équivalentes d'un jeu bi-matriciel**

L'une des formulations possibles du problème de la recherche d'un équilibre de Nash en stratégies pures dans le jeu bi-matriciel (1.6) est la programmation linéaire bivalente.

**Programme linéaire**

Un programme linéaire s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} & \min_x C^T x \\ & \begin{cases} Ax \geq b, \\ x \geq 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (1.11)$$

où

- $x = (x_1, \dots, x_n)$ .
- $x_j \geq 0, j = 1, \dots, n$ , sont les variables de décision.

- $C^T x$  est appelée fonction objectif, telle que  $C^T x = \sum_{j=1}^n c_j x_j$ .
- $Ax \geq b$  sont les contraintes du problème linéaire, que l'on peut écrire sous la forme :

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b, \quad i = 1, \dots, m.$$

- $A = (a_{ij})$  est une  $m \times n$ -matrice,  $C \in \mathbb{R}^n$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ .

### Programme linéaire dual

Le dual du programme linéaire(1.11) s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \max_y b^T y \\ y^T A \leq C^T, \\ y \geq 0, \end{cases} \quad (1.12)$$

où  $y \in \mathbb{R}^m$ .

### 1.7.1 Programmation linéaire bivalente

Considérons le jeu suivant à deux joueurs :[43]

$$\langle U, V, f^1, f^2 \rangle, \quad (1.13)$$

où

- $U = \{u = (u_1, u_2, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^m \setminus u_i \in \{0, 1\}, \forall i = 1, \dots, m, \sum_{i=1}^m u_i = 1\}$  est l'ensemble des stratégies du joueur (P1),
- $V = \{v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n \setminus v_j \in \{0, 1\}, \forall j = 1, \dots, n, \sum_{j=1}^n v_j = 1\}$  est l'ensemble des stratégies pures du joueur (P2),
- $f^1$  est la fonction des gains du joueur (P1) définie par :

$$\begin{aligned} f^1 : U \times V &\rightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\rightarrow f^1(u, v) = u^t A v, \end{aligned}$$

- $f^2$  est la fonction des gains du joueur (P2) définie par :

$$\begin{aligned} f^2 : U \times V &\rightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\rightarrow f^2(u, v) = u^t B v, \end{aligned}$$

**Proposition 1.7.1** [43]

1. Une situation  $(x_i^*, y_j^*) \in X_1 \times X_2$  est un équilibre de Nash en stratégies pures dans le jeu bi-matriciel (1.6), si et seulement si il existe une situation  $(u^*, v^*) \in U \times V$  qui est un équilibre de Nash en stratégies pures dans le jeu (1.13),

où

$$u^* = (u_1^*, u_2^*, \dots, u_{i^*}^*, \dots, u_m^*) \in \mathbb{R}^m \text{ avec } u_k^* = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq i^*, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.14)$$

et

$$v^* = (v_1^*, v_2^*, \dots, v_{j^*}^*, \dots, v_n^*) \in \mathbb{R}^n \text{ avec } v_l^* = \begin{cases} 0 & \text{si } l \neq j^*, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.15)$$

2. Une situation  $(u^*, v^*) \in U \times V$  est un équilibre de Nash en stratégies pures d'un jeu bi-matriciel (1.13), si et seulement si

$$\begin{aligned} \max_u u^T A v^* &= u^{*T} A v^* \\ \begin{cases} e_m^T u = 1, \\ u \in \{0, 1\}^m, \end{cases} & \end{aligned} \quad (1.16)$$

et

$$\begin{aligned} \max_v u^{*T} B v &= u^{*T} B v^* \\ \begin{cases} e_n^T v = 1, \\ v \in \{0, 1\}^n, \end{cases} & \end{aligned} \quad (1.17)$$

où  $e_m = (1, 1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^m$  et  $e_n = (1, 1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^n$ .

**Théorème 1.7.1** [43]

Une situation  $(x_i^*, y_j^*) \in X_1 \times X_2$  est un équilibre de Nash en stratégies pures dans le jeu bi-matriciel (1.6), si et seulement si  $(u^*, v^*, t^*, q^*)$  est une solution du problème de programmation bi-linéaire suivant :

$$\begin{aligned} \max_{u, v, t, q} \{ & u^T A v + u^T B v + t + q \} \\ \begin{cases} A v \leq -t e_m, \\ B u \leq -q e_n, \\ u^T e_m = 1, \\ v^T e_n = 1, \\ u \in \{0, 1\}^m, \\ v \in \{0, 1\}^n, \end{cases} & \end{aligned} \quad (1.18)$$

tels que :

$t$  est la valeur du jeu pour le premier joueur.

$q$  est la valeur du jeu pour le deuxième joueur.

## 1.7.2 Programmation bi-linéaire

L'une des formulations possibles du problème de la recherche d'un équilibre de Nash en stratégies mixtes dans le jeu bimatriciel (1.7) est sa transformation en un problème de programmation bilinéaire.

### Proposition 1.7.2 [43]

Une situation  $(\alpha^*, \beta^*) \in \Delta_m \times \Delta_n$  est un équilibre de Nash en stratégies mixte dans le jeu bi-matriciel (1.7), si et seulement si  $\alpha^* \in \Delta_m$  est une situation du problème

$$\begin{aligned} & \max_{\alpha \in \Delta_m} \alpha^T A \beta^* \\ & \begin{cases} e_m^T \alpha = 1, \\ \alpha \geq 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (1.19)$$

et  $\beta \in \Delta_n$  est solution optimal du problème

$$\begin{aligned} & \max_{\beta \in \Delta_n} (\alpha^*)^T B \beta \\ & \begin{cases} e_n^T \beta = 1, \\ \beta \geq 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (1.20)$$

où

$e_m = (1, 1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^m$  et  $e_n = (1, 1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^n$ .

### Théorème 1.7.2 [43]

Une situation  $(\alpha^*, \beta^*) \in \Delta_m \times \Delta_n$  est un équilibre de Nash en stratégies mixte dans le jeu bi-matriciel (1.7), si et seulement si  $(\alpha^*, \beta^*, t, q)$  est une solution du problème de programmation bi-linéaire suivant :

$$\begin{aligned} & \max_{u, v, t, q} \{ \alpha^T A \beta + \alpha^T B \beta + t + q \} \\ & \begin{cases} A \beta \leq -t e_m, \\ B^T \alpha \leq -q e_n, \\ \alpha^T e_m = 1, \\ \beta^T e_n = 1, \\ \alpha \geq 0, \\ \beta \geq 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (1.21)$$

où :

$$e_m = (1, 1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^m \text{ et } e_n = (1, 1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^n.$$

## 1.8 Jeux avec contraintes

Dans la vie réelle, il existe des problèmes de jeux dans lesquels les joueurs sont confrontés à certaines restrictions dans le choix de leur stratégie. Ces problèmes conduisent à des jeux avec contraintes introduits pour la première fois par *Charnes* (1953) [6][7]. Il a prouvé que les jeux avec contraintes peuvent être résolus en résolvant un problème de programmation quadratique. Plus tard, ces jeux ont été étudiés par *Kawaguchi* et *Maruyama* (1972) [30] dans des cas plus général, ce qui élargit le champ des approches basées sur la théorie des jeux. Plus récemment, des contraintes ont été introduites dans les jeux de coalition et les jeux de Markov [19][2]. En outre, un certain jeu dynamique avec contrainte s'avère équivalent à une paire de problèmes de variation dual symétriques [28].

Considérons le jeu bi-matriciel défini par (1.7) dans lequel toutes les stratégies mixtes  $\alpha$  et  $\beta$  doivent être choisies dans deux ensembles  $S_1$  et  $S_2$  décrits par des contraintes linéaires.

Un jeu bi-matriciel avec contraintes est donc noté  $JBC = \langle S_1, S_2, A, B \rangle$  avec

$$S_1 = \{\alpha \in \mathbb{R}^m, e_m^T \alpha = 1, C\alpha \leq c, \alpha \geq 0\},$$

et

$$S_2 = \{\beta \in \mathbb{R}^n, e_n^T \beta = 1, D^T \beta \geq d, \beta \geq 0\},$$

où

$$c \in \mathbb{R}^s, d \in \mathbb{R}^t, A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}, C \in \mathbb{R}^{s \times m}, D \in \mathbb{R}^{n \times t}.$$

$e_m \in \mathbb{R}^m$  et  $e_n \in \mathbb{R}^n$  sont des vecteurs contenant des 1 partout.

Lorsque le joueur 1 choisit une stratégie mixte  $\alpha \in S_1$  et le joueur 2 choisit une stratégie mixte  $\beta \in S_2$ , les valeurs  $\alpha^T A \beta$  et  $\alpha^T B \beta$  sont les gains espérés pour les joueurs 1 et 2 respectivement.

**Définition 1.8.1** [15](Equilibre de Nash d'un jeu (*JBC*))

Pour le jeu bi-matriciel avec contraintes (*JBC*), une issue  $(\alpha^*, \beta^*) \in S_1 \times S_2$  est un équilibre de Nash, si

$$\begin{cases} \alpha^T A \beta^* \leq \alpha^{*T} A \beta^*, & \forall \alpha \in S_1. \\ \alpha^{*T} B \beta \leq \alpha^{*T} B \beta^*, & \forall \beta \in S_2. \end{cases} \quad (1.22)$$

et  $(\alpha^*, \beta^*)$  doit être choisie parmi un hyper polyèdre défini par des inégalités linéaires  $(S_1, S_2)$ .

Un résultat principal dû à *Charnes* [6] dans la théorie des jeux, affirme que chaque jeu matriciel avec contrainte (*JMC*) est équivalent à deux problèmes de programmation linéaire primal-dual et pour le jeu bi-matriciel avec contrainte (*JBC*), il existe un problème de programmation quadratique équivalent où :

- Les contraintes sont linéaires,
- L'ensemble de stratégies  $S_1$  du joueur 1 (resp.  $S_2$  du joueur 2) est un ensemble convexe,
- $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\}$  (resp.  $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t\}$ ) sont les sommets de  $S_1$  (resp.  $S_2$ ).

Nous avons alors le théorème d'équivalence suivant :

**Théorème 1.8.1** [15](Théorème d'équivalence )

Une condition nécessaire et suffisante pour que  $(\alpha^*, \beta^*)$  soit un point équilibre de Nash dans le jeu bi-matriciel avec contraintes (*JBC*) est qu'il soit solution du problème de programmation quadratique suivant :

$$\begin{aligned} & \max_{\alpha, \beta, v, \nu} \{ \alpha^T (A + B) \beta - v - \nu \}. \\ \text{s.c. } & \begin{cases} \alpha_i^T A \beta - v \leq 0, & i = 1, 2, \dots, s, \\ \alpha^T B \beta_j - \nu \leq 0, & j = 1, 2, \dots, t, \\ C \alpha \leq c, \\ D^T \beta \geq d, \\ e^T \alpha - 1 = 0, \\ e^T \beta - 1 = 0, \\ \alpha, \beta \geq 0, \\ v, \nu \in \mathbb{R}. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.23)$$

**Exemple 1.8.1** [15]

Considérons un jeu bi-matriciel avec les matrices de gains suivantes :

$$(A, B) = \begin{pmatrix} (1, 1) & (2, 0) & (0, 2) \\ (0, 2) & (1, 1) & (2, 0) \\ (2, 0) & (0, 2) & (1, 1) \end{pmatrix}$$

le point d'équilibre unique de ce jeu est  $\alpha^* = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})^T$ ,  $\beta^* = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})^T$ .

Supposons maintenant que le premier joueur soit confronté à la restriction suivante :

$\alpha_1 \geq \frac{1}{2}$ , donc le point d'équilibre précédent n'est plus réalisable. L'espace de stratégie du premier joueur dans ce cas est  $S_1 = \{\alpha \in \mathbb{R}_+^m, \alpha_1 \geq \frac{1}{2}, e^T \alpha = 1\}$ , qui est un triangle à trois sommets, à savoir  $\{(1, 0, 0)^T, (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)^T, (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})^T\}$ .

En appliquant le théorème précédents, on aura le problème de programmation quadratique suivant :

$$\begin{aligned} & \max_{\alpha, \beta, v, \nu} \{ \alpha^T (A + B) \beta - v - \nu \} \\ & \text{s.c.} \left\{ \begin{array}{l} \beta_1 + 2\beta_2 - v \leq 0, \\ \frac{1}{2}\beta_1 + \frac{3}{2}\beta_2 + \beta_3 - v \leq 0, \\ \frac{3}{2}\beta_1 + \beta_2 + \frac{1}{2}\beta_3 - v \leq 0, \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 - \nu \leq 0, \\ \alpha_2 + 2\alpha_3 - \nu \leq 0, \\ 2\alpha_1 + \alpha_3 - \nu \leq 0, \\ \alpha_1 \geq \frac{1}{2}, \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1, \\ \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 1, \\ \alpha, \beta \geq 0, \\ v, \nu \in \mathbb{R}. \end{array} \right. \end{aligned} \quad (1.24)$$

L'équilibre de ce jeu bi-matriciel avec contrainte est le couple  $(\alpha^*, \beta^*) = \{(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6})^T, (\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3})^T\}$ , le gain de premier joueur est  $v^* = \frac{5}{6}$  et celui de deuxième joueur est  $\nu^* = \frac{7}{5}$ .

## Conclusion

Ce chapitre a été consacré à la présentation des éléments de base de la théorie des jeux. Pour cela, nous avons présenté quelques classes et types de jeux les plus utilisés savoir les jeux à information complète ou incomplète et les jeux dynamiques ensuite nous avons

## 1.8. JEUX AVEC CONTRAINTES

---

introduit certains concepts de solutions connus dans la littérature pour déterminer les choix stratégiques des joueurs vérifiant certaines propriétés. On a terminé par la présentation des jeux avec contraintes, et leurs équivalences aux programmation quadratique.

# 2

## Introduction à la programmation DC et DCA

≃ *The great watershed in optimization isn't between  
linearity or non linearity but between  
convexity and nonconvexity ≃*

### Introduction

L'OPTIMISATION offre un cadre de modélisation et d'algorithmique très riche pour tous les domaines de sciences appliquées. *DC* (Difference of Convex functions) et *DCA* (*DC Algorithms*) jouent un rôle central dans la plupart des problèmes d'optimisation convexe et non convexe qui sont formulés/reformulés sous la forme de programmes *DC*.

Dans ce chapitre, nous rappelons d'abord quelques notions de base sur la théorie de l'analyse et l'optimisation convexe dont nous aurons besoin dans notre travail, ensuite nous présentons la méthode *DC* et l'algorithme *DCA*.

## 2.1 Éléments de base de l'analyse DC

Nous considérons l'espace euclidien  $X = \mathbb{R}^n$ , muni du produit scalaire usuel noté  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  où  $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = x^T y$ ,  $x^T$  est le transposé du vecteur  $x$  et de la norme euclidienne associée  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ .  $Y$  désignera l'espace dual de  $X$  relatif au produit scalaire, que l'on peut identifier à  $X$ . On note par  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$  muni d'une structure algébrique déduite de celle de  $\mathbb{R}$  avec la convention :  $(+\infty) - (+\infty) = (+\infty)$  [46].

Dans cette section, nous allons rappeler quelques définitions et théorèmes d'analyse convexe et introduire la définition des fonctions *DC* et leurs propriétés qui fondent la base de la programmation *DC* [33] [42] [46] [26] [25].

### 2.1.1 Ensembles convexes

**Définition 2.1.1** (Segment de ligne)

Un segment de ligne entre deux points  $x, y \in \mathbb{R}^n$  est un ensemble défini par :

$$[x, y] = \{\lambda x + (1 - \lambda)y, \lambda \in [0, 1]\}. \quad (2.1)$$

**Définition 2.1.2** (Ensemble affine)

Un ensemble  $C$  est dit affine si toute ligne entre deux points  $x, y \in C$  est incluse dans  $C$ , i.e. si

$$\forall x, y \in C, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda x + (1 - \lambda)y \in C. \quad (2.2)$$

Un ensemble affine est appelé également variété affine ou variété linéaire.

**Définition 2.1.3** (Envloppé affine)

Envloppé affine de  $C$  est l'ensemble de toutes les combinaisons affines des points d'un ensemble affine  $C$  et est donnée par :

$$\text{aff}(C) = \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i, \lambda_i \in \mathbb{R}, x_i \in C, \forall i = 1, \dots, k \text{ et } \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \right\}. \quad (2.3)$$

**Remarque 2.1.1**

1. L'ensemble  $\mathbb{R}^n$  est un ensemble affine.
2.  $\text{aff}(C)$  est le plus petit ensemble affine qui contient  $C$ .

**Définition 2.1.4** (Ensemble convexe)

Un ensemble  $C \subset \mathbb{R}^n$  est dit convexe s'il contient le segment  $[x, y]$  liant chaque paire  $x, y$  de ses points, i.e.

$$\forall x, y \in C, \quad \forall \lambda \in [0, 1], \quad \lambda x + (1 - \lambda)y \in C. \quad (2.4)$$

La figure suivante illustre cette notion.

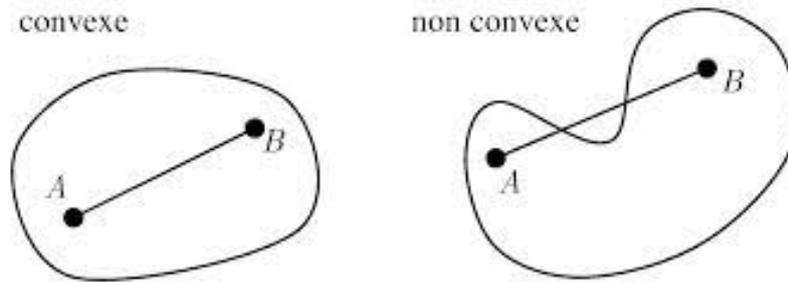


FIGURE 2.1 – Ensemble convexe et non convexe.

On note  $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$  l'ensemble de tous les sous-ensembles convexes de  $\mathbb{R}^n$ .

**Théorème 2.1.1**

- Soient  $C \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$  et  $\mu$  un réel. Alors  $\mu C \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ .
- Soient  $C_1, C_2 \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ . Alors  $C_1 + C_2 \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ .
- Soient  $C_1 \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^{n_1})$  et  $C_2 \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^{n_2})$ , où  $n_1$  et  $n_2$  sont deux entiers strictement positifs. Alors  $C_1 \times C_2 \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^{n_1+n_2})$ .

**Proposition 2.1.1**

Si  $(C_i)_{i \in I}$  est une famille quelconque de convexes, leur intersection  $\bigcap_{i \in I} C_i$  est convexe.

**Remarque 2.1.2**

Tous les ensembles affines (y compris  $\emptyset$  et  $\mathbb{R}^n$ ) sont convexes.

**Définition 2.1.5** (Envolpe convexe)

Soit  $S \subset \mathbb{R}^n$ . L'enveloppe convexe de  $S$ , notée  $Co(S)$ , est l'intersection de tous les sous-ensembles convexes de  $\mathbb{R}^n$  qui contiennent  $S$ .

Sachant que  $\mathbb{R}^n$  est un espace vectoriel de dimension finie, on peut déduire que  $Co(S)$  est

## 2.1. ÉLÉMENTS DE BASE DE L'ANALYSE DC

---

l'ensemble des points  $x \in \mathbb{R}^n$  qui peuvent s'écrire sous forme de combinaison convexe finie d'éléments de  $S$ , c-à-d :

$$Co(S) = \left\{ x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i, \lambda_i \geq 0, x_i \in S, \forall i = 1, \dots, m \text{ et } \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1 \right\}. \quad (2.5)$$

L'enveloppe convexe de  $S$  est le plus petit ensemble convexe de  $\mathbb{R}^n$  qui contient  $S$ .

### Théorème 2.1.2

- $aff(C)$  est l'ensemble de toutes les combinaisons affines d'éléments de  $C$ .
- $Co(S)$  est l'ensemble de toutes les combinaisons convexes d'éléments de  $S$ .

### Définition 2.1.6 (Intérieurs relatifs)

On appelle intérieur relatif d'un ensemble convexe  $C$ , notée  $ir(C)$ , l'intérieur de  $C$  relativement à sa variété affine  $aff(C)$ , c-à-d :

$$ir(C) = \{x \in C : \exists r > 0, B(x, r) \cap aff(C) \subset C\},$$

où  $B(x, r)$  est la boule euclidienne de centre  $x$  et de rayon  $r$ .

### Remarque 2.1.3

1.  $B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| \leq r\}$ .
2. En dimension finie, l'intérieur relatif d'un convexe  $C$  non vide n'est jamais vide et a la même dimension que  $C$ .
3. L'intérieur relatif  $ir(C)$  est vide si et seulement si  $C$  l'est.

### Définition 2.1.7 (Ensemble polyédral)

Un ensemble  $C$  est dit polyédral, s'il peut être exprimé comme une intersection d'une famille finie de demi-espaces, i.e. comme un ensemble de solutions d'un système fini d'inégalités :

$$\langle a_i, x \rangle \leq b_i, i = \overline{1, m}. \quad (2.6)$$

### Définition 2.1.8 (Polyèdre convexe)

Un polyèdre est convexe si chaque point d'un segment de droite qui joint deux points quelconques appartient au polyèdre.

Un ensemble convexe  $C$  est dit polyèdre convexe s'il est l'intersection de nombre fini de demi-espaces de  $\mathbb{R}^n$  :

$$C = \bigcap_{i=1}^n \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a_i, x \rangle - b_i \leq 0, a_i \in \mathbb{R}^n, b_i \in \mathbb{R}\}. \quad (2.7)$$

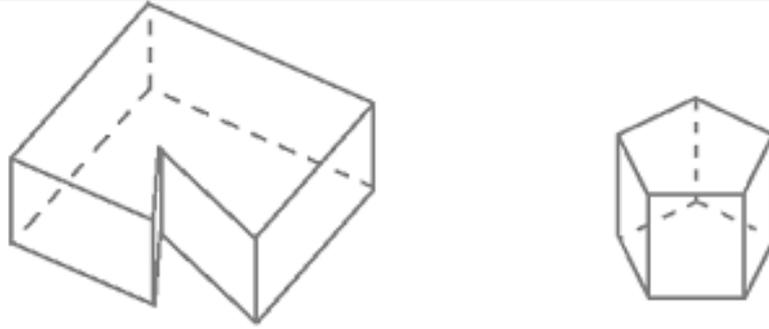


FIGURE 2.2 – Polyèdre convexe et Polyèdre non convexe .

### 2.1.2 Fonctions convexes

**Définition 2.1.9** (Domaine d'une fonction)

Soit  $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ . On appelle domaine de  $f$ , notée  $\text{dom}(f)$ , l'ensemble

$$\text{dom}(f) = \{x \in X, f(x) < +\infty\}.$$

**Définition 2.1.10** (Fonction propre)

La fonction  $f$  est dite propre si  $\text{dom}(f) \neq \emptyset$  et  $f(x) > -\infty$  pour tout  $x \in X$ .

**Définition 2.1.11** (Fonction affine)

Une fonction  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  est dite affine si elle est définie comme la somme d'une fonction linéaire et une constante, i.e. elle possède la forme :

$$f(x) = ax + b \text{ avec } a \in \mathbb{R}^{m \times n} \text{ et } b \in \mathbb{R}^m,$$

où les paramètres  $a$  et  $b$  ne dépendent pas de  $x$ .

**Définition 2.1.12** (Fonction convexe)

La fonction  $f : C \rightarrow \mathbb{R} \cup +\infty$  est dite convexe si, pour tout  $\lambda \in [0, 1]$  on a

$$f(\lambda a + (1 - \lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b) \quad \forall a, b \in C. \quad (2.8)$$

Géométriquement, la fonction  $f : C \rightarrow \mathbb{R} \cup +\infty$  est convexe si le segment entre les points  $(a, f(a))$  et  $(b, f(b))$  se trouve au dessus du graphe de  $f$  (voir Figure 2.3). Si l'inégalité stricte est vérifiée pour tout  $\lambda \in [0, 1]$  et pour tout  $a, b \in C$  avec  $a \neq b$  alors  $f$  est dite strictement convexe.

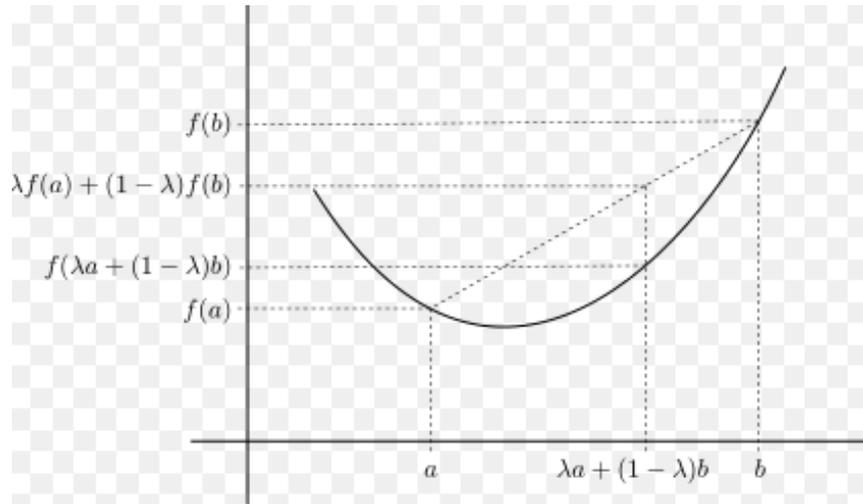


FIGURE 2.3 – Fonction convexe.

On dit que  $f$  est fortement convexe sur un ensemble convexe  $C$  s'il existe un nombre  $\rho > 0$  tel que :

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) - (1 - \lambda)\lambda \frac{\rho}{2} \|x - y\|^2 .$$

**Remarque 2.1.4**

1.  $f$  fortement convexe  $\Rightarrow f$  strictement convexe  $\Rightarrow f$  convexe.
2. si  $f$  est convexe alors  $\text{dom}(f)$  est convexe.
3. Une fonction  $f$ , définie sur un domaine convexe, est dite concave, si  $(-f)$  est convexe.

**Proposition 2.1.2 [1]**

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions convexes, alors les fonctions :

- $f + g$ ,
- $\max\{f, g\}$ ,
- $\lambda f$  avec  $\lambda \geq 0$ ,

sont des fonctions convexes, mais la fonction  $(f - g)$  n'est pas nécessairement convexe.

**Définition 2.1.13** (Fonction indicatrice)

- On appelle fonction indicatrice de  $C$ , notés  $\chi_C(x)$ , la fonction définie par :

$$\chi_C(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in C, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.9)$$

- Soit  $C \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble convexe. La fonction  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$  est convexe si, et seulement si la fonction  $f + \chi_C$  est convexe.

**Définition 2.1.14** (Épigraphe)

L'épigraphe de la fonction  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$  noté  $\text{epi}(f)$  est l'ensemble

$$\text{epi}(f) = \{(x, \alpha) \in C \times \mathbb{R} : f(x) \leq \alpha\}. \quad (2.10)$$

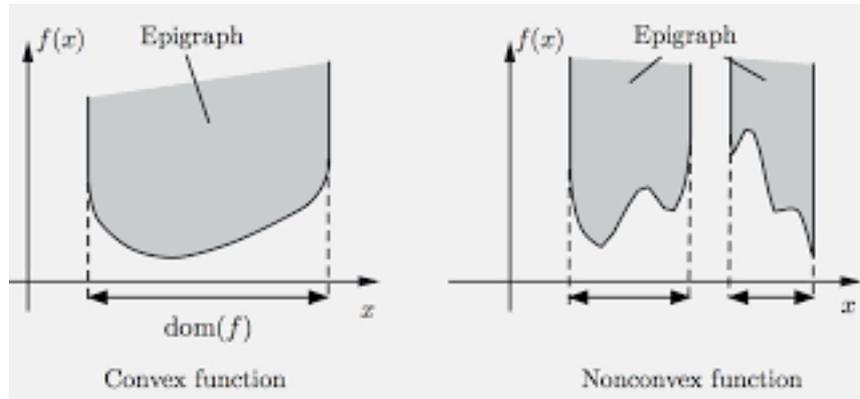


FIGURE 2.4 – Epigraphe d'une fonction .

**Définition 2.1.15** (Fonction s.c.i.)

La fonction  $f$  est dite semi-continue inférieurement (s.c.i.) au point  $x \in \mathbb{R}^n$  si :

$$\liminf_{y \rightarrow x} f(y) = f(x).$$

On note  $\Gamma_0(\mathbb{R}^n)$  l'ensemble des fonctions convexes s.c.i. et propres sur  $\mathbb{R}^n$ .

**Remarque 2.1.5** [14]

Une fonction  $f$  est semi-continue inférieurement si et seulement si son épigraphe est fermé.

**Définition 2.1.16** (Fonction conjuguée)

La fonction conjuguée de  $f$ , notée  $f^* : Y \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ , est définie par :

$$f^*(y) = \sup\{\langle x, y \rangle - f(x) : x \in X\}. \quad (2.11)$$

La fonction  $f^{**} = (f^*)^* : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  est appelée la biconjuguée de  $f$ . Elle est donnée par :

$$f^{**}(x) = \sup\{\langle x, y \rangle - f^*(y) : y \in Y\}. \quad (2.12)$$

**Propriété 2.1.1** [39]

1.  $f^*$  est toujours convexe.
2. S'il existe  $x \in X$  tel que  $f(x) = -\infty$ , alors  $f^*(y) = -\infty, \forall y \in Y$ .
3. On a  $f^{**} \leq f$ .

**Remarque 2.1.6** [39]

1. Pour la propriété 3, si de plus  $f \in \Gamma_0(X)$ , alors  $f^{**} = f$ .
2. Soit  $\chi_C$  la fonction indicatrice de l'ensemble  $C$ , sa conjuguée est donnée par :

$$\chi_C^*(y) = \sup_{x \in C} \langle x, y \rangle,$$

qui est aussi appelée fonction d'appui de l'ensemble  $C$ .

**Définition 2.1.17** (Fonction convexe polyédrale)

Une fonction  $f$  est dite convexe polyédrale, si son épigraphe est un ensemble polyédrale. En d'autres termes,  $f$  est convexe polyédrale si et seulement si elle peut être exprimée sous la forme :

$$f(x) = \max\{\langle a_i, x \rangle - b_i, i = \overline{1, m}\} + \chi_C(x), \quad (2.13)$$

avec  $a_i \in \mathbb{R}^n$ ,  $b_i \in \mathbb{R}$  pour  $i = \overline{1, m}$  et  $C$  est un sous ensemble non vide et convexe de  $\mathbb{R}^n$  et  $\chi_C$  est la fonction indicatrice de l'ensemble  $C$ .

**Théorème 2.1.3**

La conjuguée d'une fonction convexe polyédrale est polyédrale.

**Remarque 2.1.7**

Les fonctions affines et la fonction indicatrice d'un ensemble convexe, sont des fonctions convexes polyédrales.

### 2.1.3 Sous-différentiabilité

Pour une fonction convexe  $f$  différentiable, le gradient en un point  $x^0$ ,  $\nabla(x^0)$ , vérifie l'inégalité

$$f(x) \geq f(x^0) + \langle y, x - x^0 \rangle \forall x \in X. \quad (2.14)$$

Pour une fonction convexe non différentiable partout, la notion de sous-gradient qui est défini ci-dessous généralise celle de gradient.

**Définition 2.1.18** (Sous-gradient)

Un vecteur  $y^0 \in Y$  est dit sous-gradient de la fonction convexe  $f$  au point  $x^0 \in X$  si :

$$f(x) \geq f(x^0) + \langle \nabla f(x^0), x - x^0 \rangle \forall x \in X. \quad (2.15)$$

Cette relation possède une interprétation géométrique : elle signifie que le graphe de la fonction affine  $\varphi(x) = f(x^0) + \langle y, x - x^0 \rangle$  est un hyperplan de support non vertical à l'ensemble convexe  $\text{epi}(f)$  au point  $(x^0, f(x^0))$ . Pour une fonction différentiable, cet hyperplan est vertical au point  $x^0$ .

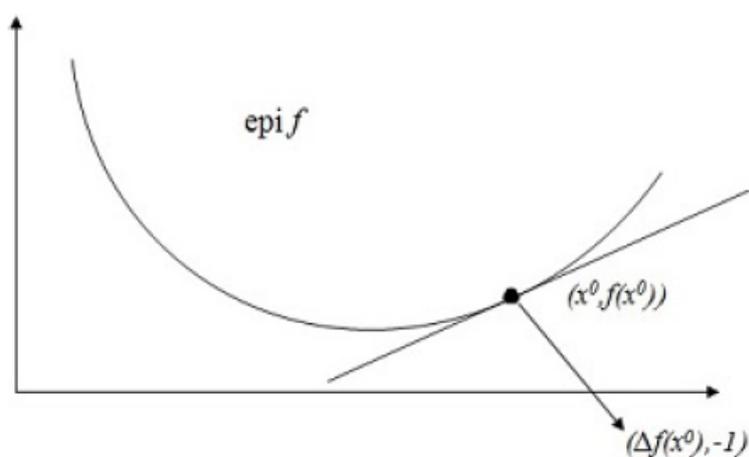


FIGURE 2.5 – Fonction différentiable.

**Remarque 2.1.8** [5]

Une fonction peut admettre plusieurs sous gradients en un point ou elle n'est pas différentiable.

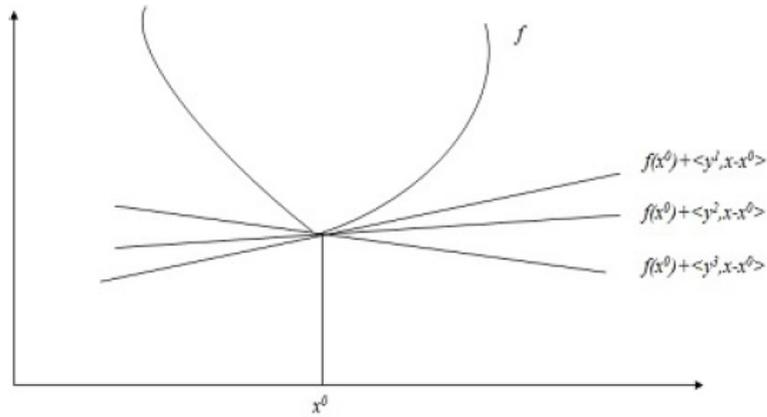


FIGURE 2.6 – Fonction non différentiable.

Les points  $y^1, y^2, y^3$  sont des sous-gradients de  $f$  au point  $x^0$ .

**Définition 2.1.19** (Sous-différentiel)

Le sous-différentiel de  $f$  au point  $x^0$ , noté  $\partial f(x^0)$ , est l'ensemble de tous les sous-gradients de  $f$  en ce point, et il est donné par :

$$\partial f(x^0) = \{y^0 \in Y, f(x) \geq f(x^0) + \langle y^0, x - x^0 \rangle, \forall x \in X\}.$$

Soit  $\epsilon$  un réel positif. Alors l'ensemble

$$\partial f(x^0) = \{y^0 \in Y, f(x) \geq f(x^0) + \langle y^0, x - x^0 \rangle - \epsilon, \forall x \in X\},$$

est appelé le  $\epsilon$ -sous-différentiel de  $f$  au point  $x^0$ .

**Remarque 2.1.9**

1. Le domaine du sous-différentiel de  $f$  est  $\text{dom}(\partial f) = \{x : \partial f(x) \neq \emptyset\}$ .
2. Si  $\partial f(x^0)$  est réduit à un singleton, i.e.  $\partial f(x^0) = \{y^0\}$ , alors  $f$  est différentiable en  $x^0$  et  $y^0 = \nabla f(x^0)$ .

**Proposition 2.1.3**

Les fonctions convexes polyédrales possèdent les propriétés suivantes :

- Si  $f_1$  et  $f_2$  sont convexes polyédrales, alors  $f_1 + f_2$  et  $\max\{f_1, f_2\}$  sont convexes polyédrales.
- Si  $f$  est polyédrale alors  $\partial f(x)$  (sous-différentiel de  $f$  au point  $x$ ) est une partie convexe polyédrale non vide  $\forall x \in \text{dom}(f)$ .

• Soient  $f_1, \dots, f_l$  des fonctions convexes polyédrales sur  $X$  telles que les ensembles convexes  $\text{dom}(f_i)$ ,  $i = \overline{1, l}$  aient un point commun. Alors

$$\partial(f_1 + \dots + f_l)(x) = \partial f_1(x) + \dots + \partial f_l(x), \forall x \in X.$$

### 2.1.4 Calcul sous-différentiel

Soient  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  deux fonctions et  $\lambda > 0$ . De la définition du sous-différentiel, nous avons la règle suivante :

$$\partial(\lambda f(x)) = \lambda \partial f(x). \quad (2.16)$$

Une autre règle est donnée dans le théorème suivant :

#### Théorème 2.1.4

Soient  $f_1, f_2, \dots, f_m$  des fonctions propres et convexes sur  $\mathbb{R}^n$ , et soit  $f = f_1 + f_2 + \dots + f_m$ . Nous avons donc

$$\partial f(x) \subset \partial f_1(x) + \partial f_2(x) + \dots + \partial f_m(x). \quad (2.17)$$

#### Remarque 2.1.10 [29]

Dans la formule (2.17), l'inclusion devient une égalité, si de plus les fonctions  $f_i$ ,  $i = \overline{1, m}$  sont semi-continues inférieurement .

Une autre condition suffisante pour l'égalité dans le cas de deux fonctions  $f$  et  $g$  est donnée dans la proposition suivante :

#### Proposition 2.1.4 [59]

Soient  $f, g : C \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  deux fonctions convexes sur l'ensemble convexe  $C$ . S'il existe  $x^0 \in \partial f(x) \cap \partial g(x)$  où  $f$  est continue, alors pour tout  $x \in C$  :

$$\partial(f + g)(x) = \partial f(x) + \partial g(x). \quad (2.18)$$

#### Remarque 2.1.11

Nous avons ci-dessous deux remarques concernant le calcul sous-différentiel :

1. Dans le cas où les fonctions  $f$  et  $g$  sont convexes et continues, l'égalité dans (2.18) reste toujours vraie [8].
2. Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions différentiables, alors le sous-différentiel de la fonction  $\inf\{f(x), g(x)\}$  est donnée par [9] :

$$\partial\{f(x), g(x)\} = \begin{cases} = \{f'(x)\} & \text{si } f(x) < g(x), \\ \subseteq \text{Co}\{f'(x), g'(x)\} & \text{si } f(x) = g(x), \\ = \{g'(x)\} & \text{si } f(x) > g(x). \end{cases}$$

### 2.1.5 Fonction DC

**Définition 2.1.20** (Fonction DC)

Une fonction  $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  est dite DC si elle peut être représentée sous forme de différence de deux fonctions convexes  $g, h : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  :

$$f(x) = g(x) - h(x), \quad (2.19)$$

où  $g$  et  $h$  sont deux fonctions de  $\Gamma_0(\mathbb{R}^n)$ . Elles sont appelées composantes DC de  $f$ . La représentation (2.19) est appelée décomposition DC de  $f$ . L'ensemble des fonctions DC sur  $X$  est noté  $DC(X)$ .

**Remarque 2.1.12** [42]

Etant donnée une fonction DC  $f = g - h$ , pour toute fonction convexe finie  $\varphi$ ,  $f = (g + \varphi) - (h + \varphi)$  donne une autre représentation DC de  $f$ . Ainsi, une fonction DC admet une infinité de décomposition DC.

**Proposition 2.1.5** [27]

Soient  $f$  et  $f_i, i = 1, \dots, m$ , des fonctions DC. Les fonctions suivantes sont aussi DC :

- $\sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x), \lambda_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, m$ .
- $\max_{i=1, \dots, m} f_i(x), \min_{i=1, \dots, m} f_i(x)$ .
- $|f(x)|, f^+(x) = \max\{0, f(x)\}, f^-(x) = \min\{0, f(x)\}$ .
- $\prod_{i=1}^m f_i(x)$ .

## 2.2 Optimisation DC

Dans cette partie, nous allons présenter la méthode DC et l'algorithme DCA[53] [39].

### 2.2.1 Programme DC

La programmation DC traite la minimisation de fonctions DC. Un programme DC standard a la forme :

$$(P_{dc}) \quad \alpha = \inf\{f(x) = g(x) - h(x) : x \in X\}, \quad (2.20)$$

où  $g$  et  $h$  sont des fonctions de  $\Gamma_0(X)$ .

### 2.2.2 Programme DC avec contraintes

Un programme DC standard avec contraintes de la forme :

$$\alpha = \inf\{f(x) = g(x) - h(x) : x \in C\}, \quad (2.21)$$

où  $C$  est un ensemble non vide convexe et fermé, peut être exprimé sous la forme de  $(P_{dc})$  en ajoutant la fonction indicatrice  $\chi_C$  de l'ensemble  $C$  à la fonction  $g$

$$\alpha = \inf\{f(x) = g(x) + \chi_C - h(x) : x \in X\}. \quad (2.22)$$

#### Propriété 2.2.1

1. *Tous les résultats obtenus concernant la théorie de l'optimisation DC (dualité, conditions d'optimalité, ...) sont basés uniquement sur les composantes DC de  $f$  ainsi que leurs conjuguées et non pas sur  $f$  elle-même.*
2. *L'algorithme DCA que nous allons voir plus tard est également construit à partir des composantes DC et leurs conjuguées. De plus, il y a autant de DCA que de décompositions DC pour la fonction  $f$ . Il est donc nécessaire de trouver la bonne décomposition DC pour  $f$  puisqu'elle influence considérablement l'efficacité de DCA ainsi que la solution qu'il calcule.*

### 2.2.3 Dualité en programmation DC

La dualité est une notion fondamentale pour l'étude des problèmes d'optimisation. Elle a été établie depuis longtemps pour les problèmes convexes et plus particulièrement linéaires. Ensuite, les résultats obtenus ont été généralisés au cas des problèmes non convexes. Dans le cadre de l'optimisation DC, Toland (1978) [57] fut le premier à étudier la dualité comme généralisation des travaux de Pham Dinh Tao (1975) sur la maximisation convexe [10]. Dans ce paragraphe, nous donnons l'essentiel sur cette théorie.

Soient  $g$  et  $h$  deux fonctions convexes propres sur  $X$  ( $g, h \in \Gamma_0(X)$ ), considérons le problème DC

$$\inf\{f(x) = g(x) - h(x) : x \in X\}.$$

Puisque  $h \in \Gamma_0(X)$ , on a donc  $h^{**} = h$ . En utilisant la définition de la conjuguée, nous aurons :

$$h(x) = (h^*)^*(x) = \sup\{\langle x, y \rangle - h^*(y) : y \in Y\}. \quad (2.23)$$

En remplaçant  $h$  par son expression (2.23) dans (2.20), on obtient

$$\alpha = \inf\{f(x) = g(x) - \sup\{\langle x, y \rangle - h^*(y) : y \in Y\} : x \in X\}$$

$$\begin{aligned}
 &= \inf_{x \in X} \inf_{y \in Y} \{g(x) + \{h^*(y) - \langle x, y \rangle\}\} \\
 &= \inf_{y \in Y} \inf_{x \in X} \{g(x) + \{h^*(y) - \langle x, y \rangle\}\} \\
 &= \inf_{y \in Y} \inf_{x \in X} \{h^*(y) - \langle x, y \rangle + g(x)\} \\
 &= \inf_{y \in Y} \{h^*(y) + \inf_{x \in X} \{-\langle x, y \rangle + g(x)\}\} \\
 &= \inf_{y \in Y} \{h^*(y) - \sup_{x \in X} \{\langle x, y \rangle - g(x)\}\}. \\
 &= \inf_{y \in Y} \{h^*(y) - g^*(y)\}
 \end{aligned}$$

Le problème

$$D_{dc} \quad \alpha = \inf\{h^*(y) - g^*(y) : y \in Y\}, \quad (2.24)$$

est le problème dual du problème DC (2.20). On remarque que le problème (2.20) et son dual (2.24) sont symétriques. Par ce fait, la résolution de l'un implique la résolution de l'autre. En pratique, ceci est très utile quand l'un des deux problèmes est plus facile à résoudre que l'autre. Nous avons les résultats suivants.

**Théorème 2.2.1** [27]

1. Si le problème (2.20) possède une solution optimale, alors nous avons

$$\inf\{f(x) = g(x) - h(x) : x \in X\} = \inf\{f(x) = h^*(y) - g^*(y) : y \in Y\}. \quad (2.25)$$

2. Le problème dual de (2.24) est le problème (2.20).

### 2.2.4 Optimalité globale en optimisation DC

En optimisation convexe,  $x^*$  minimise une fonction  $f \in \Gamma_0(X)$  si et seulement si :  $0 \in \partial f(x^*)$ .

En optimisation DC, la condition d'optimalité globale suivante est formulée à l'aide des  $\epsilon$ -sous-différentiels de  $g$  et  $h$  ([58]).

**Théorème 2.2.2** [42](Optimalité globale DC)

Soit  $f = g - h$  où  $h, g \in \Gamma_0(X)$  alors.  $x^*$  est un minimum global de  $g(x) - h(x)$  sur  $X$  si et seulement si,

$$\partial_\epsilon h(x^*) \subset \partial_\epsilon g(x^*) \quad \forall \epsilon \geq 0. \quad (2.26)$$

**Remarque 2.2.1** [42]

1. Si  $f \in \Gamma_0(X)$ , on peut écrire  $g = f$  et  $h = 0$ . Dans ce cas, l'optimalité globale de la programmation DC est identique à celle de la programmation convexe :  $0 \in \partial f(x^0)$ , du fait que  $\partial_\epsilon h(x^*) = \partial_\epsilon g(x^*) = \{0\}$ ,  $\forall \epsilon > 0$ .
2. D'une manière plus générale, considérons les décompositions DC de  $f \in \Gamma_0(X)$  de la forme  $f = g - h$  avec  $g = f + h$  et  $h \in \Gamma_0(X)$  finie partout sur  $X$ . Le problème DC correspondant est un "faux" problème DC car c'est un problème d'optimisation convexe. Dans ce cas, la condition d'optimalité  $0 \in \partial f(x^*)$  équivaut à  $\partial h(x^*) \subset \partial g(x^*)$ .

### 2.2.5 Optimalité locale en optimisation DC

**Définition 2.2.1** [42]

Soient  $g$  et  $h \in \Gamma_0(X)$ . Un point  $x^* \in \text{dom}(g) \cap \text{dom}(h)$  est un minimum local de  $g(x) - h(x)$  sur  $X$  si et seulement si

$$g(x) - h(x) \geq g^*(x) - h^*(x) \quad \forall x \in V, \quad (2.27)$$

où  $V$  désigne un voisinage de  $x$ .

**Définition 2.2.2**

$x^*$  est un point critique de  $(g - h)$ , si

$$\partial h(x^*) \cap \partial g(x^*) \neq 0.$$

**Théorème 2.2.3** [14](Condition nécessaire d'optimalité locale)

Si  $x^*$  est un minimum local de  $g - h$  alors

$$\partial h(x^*) \subset \partial g(x^*).$$

**Théorème 2.2.4** [55](Condition suffisante d'optimalité locale)

Si  $x^*$  admet un voisinage  $V$  tel que

$$\partial h(x) \cap \partial g(x^*) \neq 0, \quad \forall x \in V,$$

alors  $x^*$  est un minimum local de  $g - h$ . Plus précisément,  $g(x) - h(x) \geq g(x^*) - h(x^*)$ ,  $\forall x \in V$ .

**Corollaire 2.2.5** [42]

Si  $h \in \Gamma_0(X)$  est convexe polyédrale alors  $\partial h(x) \subset \partial g(x)$  est une condition nécessaire et suffisante pour que  $x$  soit un minimum local de  $g - h$ .

## 2.3 Algorithme d'optimisation DC (DCA)

*DCA* est une méthode primale duale de sous-gradient pour la résolution de problèmes d'optimisation *DC*, basée sur la dualité *DC* et les conditions d'optimalité locale. *DCA* a été introduit par *Pham Dinh Tao*[11] en 1986 à l'état préliminaire, puis développé par *Pham Dinh Tao* et *Le Thi An Hoai* depuis 1994. Il existe deux formes de *DCA* : la forme complète et la forme simplifiée. En pratique, l'utilisation de la forme complète de *DCA* est une tâche difficile et coûteuse. Elle est donc remplacée par la forme simplifiée que nous allons décrire dans la suite.

### 2.3.1 Principe de *DCA*

*DCA* est une méthode itérative qui résout, à chaque itération, un sous-problème convexe. Il consiste en la génération de deux suites  $\{x^k\}$  et  $\{y^k\}$  candidates à être solutions optimales locales du problème primal(2.20) et son (2.24) dual respectivement. Ces suites sont améliorées à chaque itération de façon à vérifier les conditions suivantes :

1. Les suites  $\{g(x^k) - h(x^k)\}$  et  $\{h^*(y^k) - g^*(y^k)\}$  décroissent à chaque itération.
2. Si  $(g - h)(x^{k+1}) = (g - h)(x^k)$  (resp.  $(h^* - g^*)(y^{k+1}) = (h^* - g^*)(y^k)$ ) l'algorithme s'arrête à l'itération  $k + 1$  et le point  $x^k$  (resp.  $y^k$ ) est un point critique de  $g - h$  (resp.  $h^* - g^*$ ).
3. Sinon toute valeur d'adhérence  $x^*$  de la suite  $\{x^k\}$  (resp.  $y^*$  de la suite  $\{y^k\}$ ) est un point critique de  $g - h$  (resp.  $h^* - g^*$ ).

Les deux suites  $\{x^k\}$  et  $\{y^k\}$  sont déterminées de façon que

- $x^{k+1}$  ( $k \geq 0$ ) est une solution du problème convexe :

$$(P_k) \quad \min\{g(x) - [h(x^k) + \langle x - x^k, y^k \rangle] : x \in \mathbb{R}^n\}. \quad (2.28)$$

- $y^k$  ( $k \geq 0$ ) est une solution du problème convexe :

$$(D_k) \quad \min\{h^*(y) - [g^*(y^{k-1}) + \langle y - y^{k-1}, x^k \rangle] : y \in \mathbb{R}^n\}. \quad (2.29)$$

#### Interprétation de *DCA*

*DCA* peut avoir l'interprétation suivante : à chaque itération, on remplace dans le programme *DC* primal (2.20) (respectivement dual (2.24)) la fonction  $h$  (respectivement  $g^*$ ) par sa minorante affine définie par  $h(x^k) + \langle x - x^k, y^k \rangle$  (respectivement  $g^*(y^k) + \langle y - y^k, x^{k+1} \rangle$ ), ce qui donne le problème  $(P_k)$  (respectivement  $(D_k)$ ).

*DCA* opère donc une double linéarisation en utilisant les sous-gradients de  $h$  et  $g^*$ , ce qui nous donne le schéma suivant :

### 2.3. ALGORITHME D'OPTIMISATION DC (DCA)

---

$$\begin{array}{ccc}
 x^k & \longrightarrow & y^k \in \partial h(x^k) \\
 & \swarrow & \\
 x^{k+1} \in \partial g^*(y^k) & \longrightarrow & y^{k+1} \in \partial h(x^{k+1})
 \end{array}$$

L'algorithme qui découle de ce schéma est le suivant :

---

#### Algorithme 1 Algorithme DCA

---

**0** :  $x^0$  donné,  $k = 0$ .

**1** : Calculer  $y^k \in \partial h(x^k)$ .

**2** : Calculer  $x^{k+1} \in \partial g^*(y^k)$ .

**3** : Si un test d'arrêt est vérifié, on termine *DCA*, sinon  $k \leftarrow k + 1$  et aller a 1.

---

Pour obtenir une solution  $\epsilon$ -optimale, nous utilisons souvent les conditions d'arrêt suivantes :

- $|(g - h)(x^{k+1}) - (g - h)(x^k)| \leq \epsilon$ .
- $\|x^{k+1} - x^k\| \leq \epsilon$ .

### 2.3.2 Existence des suites générées

On dira que l'algorithme *DCA* est bien défini (i.e l'ensemble des solutions de (2.20) est non vide), si on peut construire les suites  $\{x^k\}$  et  $\{y^k\}$  à partir d'un point  $x^0 \in X$  et on a le résultat suivant.

#### Lemme 2.3.1 [55]

Les suites  $\{x^k\}$  et  $\{y^k\}$  dans l'algorithme *DCA* sont bien définies, si et seulement si

$$\text{dom}(\partial g) \subset \text{dom}(\partial h) \quad \text{et} \quad \text{dom}(\partial h^*) \subset \text{dom}(\partial g^*).$$

Dans le lemme suivant, on trouve les conditions de bornitude des suites  $\{x^k\}$  et  $\{y^k\}$  générées par *DCA*.

#### Lemme 2.3.2 [1]

Si  $(g - h)$  est coercive (i.e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g - h)(x) = +\infty$ ), alors on a

1. la suite  $\{x^k\}$  est bornée.
2. si  $\{x^k\} \subset \text{int}(\text{dom}(h))$ , alors la suite  $\{y^k\}$  est aussi bornée.

Par dualité, si  $(h^* - g^*)$  est coercive, alors on a :

1. la suite  $\{y^k\}$  est bornée.
2. si  $\{y^k\} \subset \text{int}(\text{dom}(g^*))$ , alors la suite  $\{x^k\}$  est aussi bornée.

### 2.3.3 Convergence de DCA

Soient  $\rho(g)$  et  $\rho(h)$  deux fonctions convexe (respectivement  $\rho(g^*)$  et  $\rho(h^*)$ ) les modules de forte convexité de  $g$  et  $h$  (respectivement  $g^*$  et  $h^*$ ). Posons  $\Delta x^k = x^{k+1} - x^k$  et  $\Delta y^k = y^{k+1} - y^k$ . Le théorème suivant donne les propriétés de convergence de l'algorithme DCA présenté précédemment.

#### Théorème 2.3.1 [12]

On suppose que les suites  $\{x^k\}$  et  $\{y^k\}$  sont bien définies. Alors on a

1. Les suites  $\{g(x^k) - h(x^k)\}$  et  $\{h^*(y^k) - g^*(y^k)\}$  sont décroissantes et
  - $g(x^{k+1}) - h(x^{k+1}) = g(x^k) - h(x^k)$  si et seulement si

$$\begin{cases} y^k \in \partial g(x^k) \cap \partial h(x^k) \\ y^k \in \partial g(x^{k+1}) \cap \partial h(x^{k+1}) \\ (\rho(g) + \rho(h))\Delta x^k = 0. \end{cases} \quad (2.30)$$

Ce qui signifie que  $x^k$  et  $x^{k+1}$  sont des points critiques de  $g - h$ . De plus, si  $g$  et  $h$  sont strictement convexes sur  $X$  alors  $x^k = x^{k+1}$ . Dans ce cas, DCA se termine à la  $(k + 1)$ ème itération.

- $h^*(y^{k+1}) - g^*(y^{k+1}) = h^*(y^k) - g^*(y^k)$  si et seulement si

$$\begin{cases} x^{k+1} \in \partial g^*(y^k) \cap \partial h^*(y^k) \\ x^{k+1} \in \partial g^*(y^{k+1}) \cap \partial h^*(y^{k+1}) \\ (\rho(g^*) + \rho(h^*))\Delta y^k = 0. \end{cases} \quad (2.31)$$

Ce qui signifie que  $y^k$  et  $y^{k+1}$  sont des points critiques de  $h^* - g^*$ . De plus, si  $h^* - g^*$  sont strictement convexes sur  $Y$  alors  $y^k = y^{k+1}$ . Dans ce cas, DCA se termine à la  $(k + 1)$ ème itération.

2. Si  $\rho(g) + \rho(h) > 0$  (respectivement  $\rho(g^*) + \rho(h^*) > 0$ ), alors la suite  $\|x^{k+1} - x^k\|^2$  (respectivement  $\|y^{k+1} - y^k\|^2$ ) converge.
3. Si la valeur optimale du problème  $(P_{dc})$  est finie et les suites  $\{x^k\}$  et  $\{y^k\}$  sont bornées, alors le point limite  $x^*$  (respectivement  $y^*$ ) de  $\{x^k\}$  (respectivement  $\{y^k\}$ ) est un point critique de  $g - h$  (respectivement  $h^* - g^*$ ).

### 2.3.4 Optimisation DC polyédrale et convergence finie de DCA

#### Optimisation DC polyédrale

On dit qu'un programme DC est polyédral, si une au moins des composantes DC de  $f = g - h$  est une fonction convexe polyédrale.

Cette classe de programmes est fréquemment rencontrée en pratique et possède des propriétés intéressantes, notamment, la convergence finie de l'algorithme DCA.

Dans la suite, nous supposons que la valeur optimale  $\alpha$  du problème DC défini par (2.20) est finie. Supposons également que  $h$  est une fonction convexe polyédrale. Alors le programme DC (2.20) s'écrit sous la forme [13][56]

$$(\tilde{P}) \quad \alpha = \inf \{f(x) = g(x) - \tilde{h}(x) : x \in X\},$$

où

$$\tilde{h}(x) = \max\{\langle a_i, x \rangle - b_i, i = \overline{1, m}\}, x \in X.$$

On aura donc

$$\begin{aligned} \alpha &= \inf_{x \in X} \inf_{i \in \mathcal{M}} \{g(x) - \langle a_i, x \rangle + b_i\} \\ &= \inf_{i \in \mathcal{M}} \inf_{x \in X} \{g(x) - \langle a_i, x \rangle + b_i\}, \end{aligned}$$

avec  $\mathcal{M} = \{1, \dots, m\}$ .

Pour chaque  $i \in \mathcal{M}$ , nous avons

$$(\tilde{P}_i) \quad \alpha(i) = \inf_{x \in X} \{g(x) - \langle a_i, x \rangle + b_i\},$$

dont l'ensemble des solutions est donné par  $\tilde{\mathcal{P}}_i = \partial g^*(a_i)$ . Définissons les ensembles

$$\mathcal{M}(\alpha) = \{i \in \mathcal{M} : \alpha(i) = \alpha\}.$$

$$\mathcal{M}(x) = \{i \in \mathcal{M} : \langle a_i, x \rangle - b_i = \tilde{h}(x)\}.$$

Alors, l'ensemble  $\tilde{\mathcal{P}}$  des solutions de  $(\tilde{P})$  est donné par

$$\alpha = \min\{\alpha(i) : i \in \mathcal{M}\}.$$

$$\tilde{\mathcal{P}} = \cup\{\tilde{\mathcal{P}}(i) : i \in \mathcal{M}(\alpha)\} = \cup\{\partial g^*(a_i) : i \in \mathcal{M}(\alpha)\}.$$

Le problème dual  $(\tilde{D})$  de  $(\tilde{P})$  est donné par

$$\alpha = \inf\{\tilde{h}^*(y) - g^*(y) : y \in \text{dom}(\tilde{h}^*)\},$$

et la valeur optimale  $\alpha$  vérifie

$$\alpha = \inf\{\tilde{h}^*(a_i) - g^*(a_i) : i \in \mathcal{M}\}.$$

Nous avons le résultat suivant :

**Théorème 2.3.2** [55]

1.  $x^* \in \tilde{\mathcal{P}}$  si et seulement si  $\mathcal{M}(x^*) \subset \mathcal{M}(\alpha)$  et  $x^* \in \cap\{\partial g^*(a_i) : i \in \mathcal{M}(x^*)\}$ .
2.  $\tilde{\mathcal{P}} = \cup\{\tilde{\mathcal{P}}(i) : i \in \mathcal{M}(\alpha)\}$ . Si  $\{a_i : i \in \mathcal{M}\} \subset \text{dom}(\partial g^*)$ , alors  $\tilde{\mathcal{P}} \neq \emptyset$ .

**Convergence finie de DCA**

La résolution (d'une manière globale) du problème d'optimisation *DC* polyédrale revient à résoudre les problèmes convexes  $(\tilde{P}_i)$  pour  $i \in \mathcal{M}$ . En pratique, ceci est possible si  $m$  est relativement petit. Dans le cas où  $m$  est grand, on résout  $(\tilde{P})$  en utilisant l'algorithme *DCA* pour lequel le calcul des suites  $x^k$  et  $y^k$  est immédiat avec un choix fixé de sous-gradient, i.e.

$$\{y^k\} = a_i : i = \overline{1, m},$$

ce qui donne

$$x^{k+1} \in \arg \min\{g(x) - \langle a_i, x \rangle, x \in \mathbb{R}^n\}.$$

L'ensemble  $\{a_i : i = \overline{1, m}\}$  étant fini, les suites  $x^k$  et  $y^k$  ainsi obtenues seront finies. La convergence de *DCA* est donc finie dans ce cas.

**Théorème 2.3.3** [55]

1. Les suites discrètes  $\{(g-\tilde{h})(x^k)\}$  et  $\{(\tilde{h}^*-g^*)(y^k)\}$  sont décroissantes et convergentes.
2. Les suites discrètes  $\{x^k\}$  et  $\{y^k\}$  sont de la même nature : soit elles sont convergentes, soit elles sont cycliques de même période  $p$ . Dans ce dernier cas, les suites  $\{x^k\}$  et  $\{y^k\}$  contiennent exactement  $p$  points limites qui sont tous des points critiques de  $g-h$ . De plus, si  $\rho(g) + \rho(g^*) > 0$ , alors ces suites sont convergentes.

**2.3.5 Illustration géométrique de DCA**

Tout d'abord rappelons que *DCA* travaille avec les composantes convexes  $g$  et  $h$  et non pas avec  $f$ . A chaque itération  $k$ , on remplace dans le programme *DC* primal la composante  $h$  par sa minorante affine  $h_k$  au voisinage de  $x^k$

$$h_k(x) = h(x^k) + \langle x - x^k, y^k \rangle$$

On obtient donc le programme convexe

$$\inf\{f^k(x) = g(x) - h_k(x), x \in X\}.$$

### 2.3. ALGORITHME D'OPTIMISATION DC (DCA)

---

Comme  $h$  est une fonction convexe, on aura  $h(x) \geq h_k(x), \forall x \in X$ .

Par conséquent

$$f^k(x) = g(x) - h_k(x) \geq f(x) = g(x) - h(x), \forall x \in X.$$

C'est à dire,  $f^k$  est une fonction majorante de la fonction  $f$  qui coïncide avec  $f$  en  $x^k$

$$f(x^k) = f^k(x^k).$$

De plus, lorsque  $g$  et  $h$  sont différentiables, on a

$$\nabla f^k(x^k) = \nabla f(x^k).$$

Ces propriétés sont illustrées dans la Figure 2.7 et peuvent facilement être vérifiées [39].

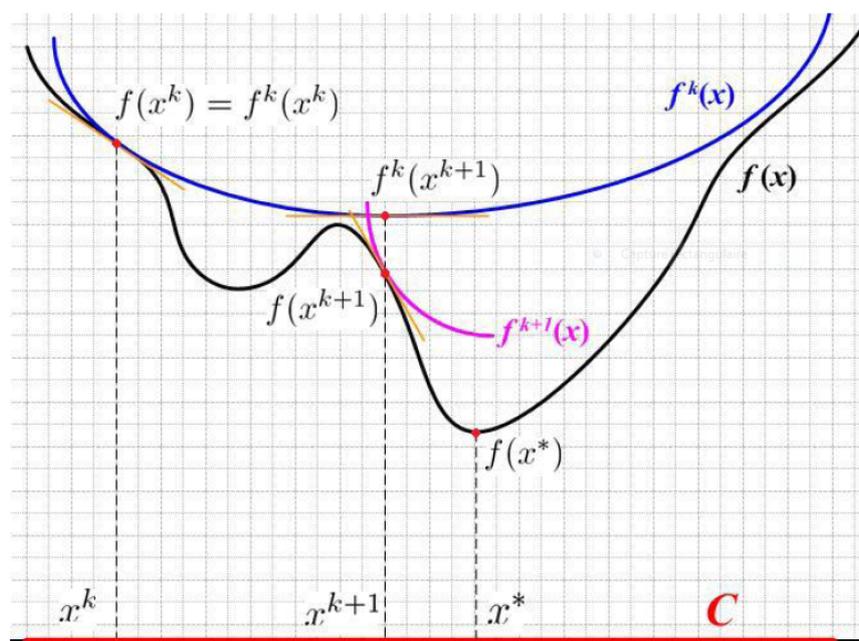
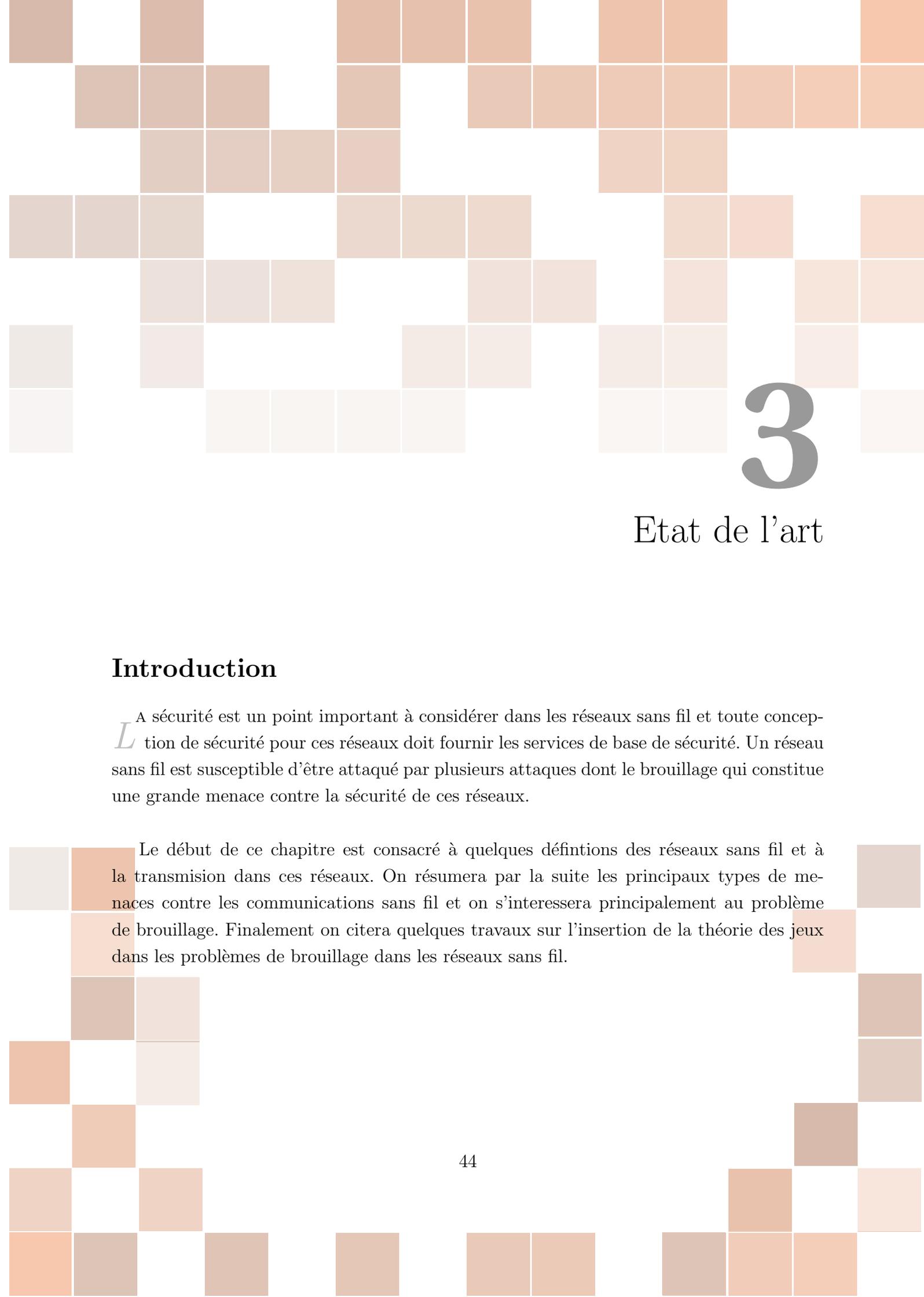


FIGURE 2.7 – Interprétation géométrique de DCA.

## Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons rappelé quelques définitions et théorèmes d'analyse convexe, puis nous avons présenté quelques points principaux de la programmation DC et l'algorithme DCA.



# 3

## Etat de l'art

### Introduction

La sécurité est un point important à considérer dans les réseaux sans fil et toute conception de sécurité pour ces réseaux doit fournir les services de base de sécurité. Un réseau sans fil est susceptible d'être attaqué par plusieurs attaques dont le brouillage qui constitue une grande menace contre la sécurité de ces réseaux.

Le début de ce chapitre est consacré à quelques définitions des réseaux sans fil et à la transmission dans ces réseaux. On résumera par la suite les principaux types de menaces contre les communications sans fil et on s'intéressera principalement au problème de brouillage. Finalement on citera quelques travaux sur l'insertion de la théorie des jeux dans les problèmes de brouillage dans les réseaux sans fil.

## 3.1 les réseaux sans fil

Les réseaux sans fil offrent aujourd'hui de nouvelles perspectives dans le domaine des télécommunications. C'est un système de transmission des données, conçu pour assurer une liaison indépendante de l'emplacement des périphériques informatiques qui composent le réseau. En raison de leur facilité de déploiement et de leur coût relativement faible, les réseaux sans fil sont les plus utilisés.

### Définition 3.1.1 [36]

*Un réseau sans fil (en anglais wireless network) est un réseau dans lequel les différents éléments participants (ordinateur portable, téléphone portable, etc.) ne sont pas raccordés entre eux par un média physique. La transmission des données se fait via des ondes hertziennes. Ceci permet aux utilisateurs de se déplacer dans un périmètre de couverture pouvant aller d'une dizaine de mètres à quelques kilomètres.*



FIGURE 3.1 – Un réseau sans fil.

## 3.2 La transmission dans les réseaux sans fil

### 3.2.1 Schéma de base d'une chaîne de transmission

Une chaîne de transmission est l'ensemble des dispositifs permettant le transfert de l'information.

Le schéma de base d'une chaîne de transmission peut être représenté par la figure 4.14.[16]

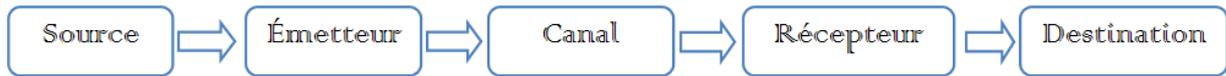


FIGURE 3.2 – Schéma de base d’une chaîne de transmission.

Les cinq éléments qui y figurent sont définis comme suit :

- La source produit le message à transmettre.
- L’émetteur produit un signal adapté au canal de transmission.
- Le canal de transmission constitue le lien entre émetteur et récepteur.
- Le récepteur capte le signal et recrée le message.
- Le destinataire traite le message reçu.

### 3.2.2 Le canal de transmission

Le propre d’une transmission étant de se faire à distance, il faut utiliser donc un dispositif qui assure le lien entre la source et le destinataire.

Un canal de communication ou canal de transmission est un support (physique ou non) permettant la transmission d’une certaine quantité d’information, depuis une source (ou émetteur) vers un destinataire (ou récepteur). Souvent, le canal altère l’information transmise, par exemple en ajoutant un bruit aléatoire.

• **Le bruit additif blanc gaussien (BABG)** : est le modèle de bruit de base utilisé en théorie de l’information pour rendre compte des nombreux processus stochastiques qui se produisent dans la nature. Il a les caractéristiques suivantes :

- **Additif** : car il est ajouté au bruit intrinsèque du système.
- **Blanc** : car sa puissance est uniforme sur toute la bande fréquentielle du système.
- **Gaussien** : car il a une distribution normale dans le domaine temporel avec une moyenne nulle.

La quantité d’information qu’un canal de communication peut transporter est limitée : on parle de capacité du canal.

#### 3.2.3 L'émetteur

Le rôle de l'émetteur est de convertir le message à transmettre sous forme d'un signal électrique modulé et transposé à la fréquence d'émission, puis d'amplifier en puissance et d'émettre sur l'antenne.

- **Modulation** : est un processus par lequel le signal est transformé de sa forme originale en une forme adaptée au canal de transmission, par exemple en faisant varier les paramètres d'amplitude et d'argument d'une onde appelée porteuse.

On peut savoir si le signal émis est bien adapté aux conditions de transmission en regardant la qualité du message reçu, c'est-à-dire le taux d'erreur sur les bits ou le rapport signal/bruit ( $\frac{S}{N}$ ), qui est un indicateur de la qualité de la transmission d'une information.

#### 3.2.4 Le récepteur

Nous venons de voir que l'émetteur permet de transcrire le message en un signal afin de le transmettre sur le canal. Inversement, le récepteur doit extraire le message du signal reçu. Pour cela, il procède soit de manière séquentielle en prenant une suite de décisions sur les symboles successifs du message émis dans le cas numérique, soit par simple démodulation dans le cas analogique.

### 3.3 La sécurité des réseaux sans fil

La sécurité d'un réseau est l'ensemble des moyens techniques, organisationnels, juridiques et humains nécessaires et mis en œuvre pour maintenir, rétablir et garantir la sécurité du système d'information contre les menaces accidentelles ou intentionnelles.

La sécurité vise à satisfaire les services fondamentaux suivants [3] :

- **Confidentialité** : désigne la capacité de garder une information secrète, l'accès à cette dernière doit être réservé aux personnes autorisées.

- **Authentification** : consistant à assurer que seules les personnes autorisées aient accès aux ressources. Plusieurs solutions simples sont mises en œuvre pour cela, comme l'utilisation d'un mot de passe " Password".

- **Intégrité** : les données envoyées par la source doivent atteindre la destination sans aucune modification. Ce service garantit la capacité de détecter la manipulation des données par des parties non-autorisées.

- **Disponibilité** : c'est la propriété assurant que les entités légitimes sont capables à accéder au réseau dans un temps convenable lorsqu'elles en ont besoin. Elle permet de maintenir le bon fonctionnement du système d'information.

- **La non-répudiation** : ce service consiste à empêcher le démenti qu'une information a été reçue par une station qui l'a réclamée. Il s'agit de la possibilité de prouver qu'un utilisateur a bien participé à une transaction donnée [52].

#### 3.3.1 Attaques dans les réseaux sans fil

Les principales attaques qui peuvent endommager le fonctionnement d'un réseau sans fil :

- **Ecoute et analyse du trafic** : en plaçant une antenne dans une position appropriée, l'adversaire est capable d'intercepter les signaux radio et de décoder les données. Cette attaque est une atteinte à la *confidentialité* de l'information.

- **Canal radio saturé** : le spectre radio étant une ressource partagée, il est possible qu'un adversaire exploite cette ressource d'une manière abusive.

- **Brouillage** : est une technique de transmission d'un signal radio qui vise à perturber le bon fonctionnement d'un réseau, en empêchant les utilisateurs légitimes d'utiliser les ressources du réseau, ou rendre complètement le réseau indisponible durant une certaine période. Le but d'une telle attaque n'est pas d'altérer ou de supprimer des données, ni même de voler des informations. Il s'agit ici, de nuire au fonctionnement d'un service ou à la réputation d'une société qui offre un service en empêchant le bon fonctionnement de celui-ci [49] [44]. Le brouillage est une menace contre la *disponibilité* du réseau [3].

Comme illustré dans la figure (3.3), il existe de nombreuses stratégies d'attaques qui peuvent être employées par le brouilleur dans le but d'interférer avec d'autres communications sans fil. Ces différentes stratégies d'attaques auront différents niveaux d'efficacité. Dans ce qui suit, nous les décrirons brièvement :

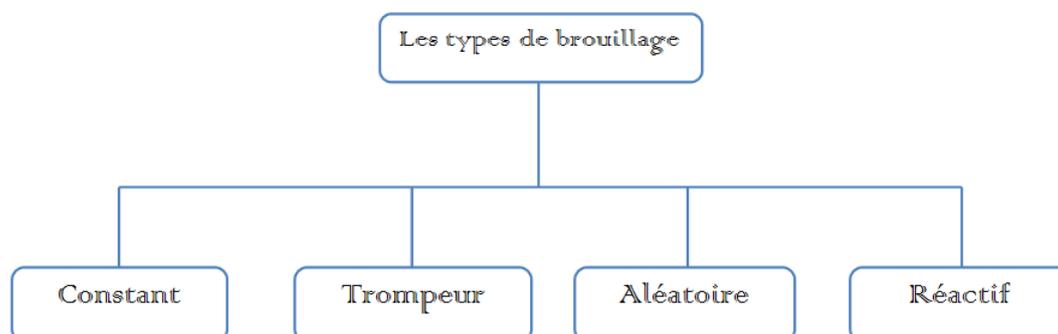


FIGURE 3.3 – Types de brouillage.

• **Brouillage constant** : le brouillage constant consiste à envoyer continuellement un signal radio sur le canal de communication. Ainsi, il peut effectivement empêcher le trafic légitime d'être envoyé.

• **Brouillage trompeur** : au lieu d'envoyer continuellement des bits aléatoires sur le canal de communication, le brouillage trompeur consiste à injecter des paquets réguliers dans le canal de communication sans interruption. Ce comportement fait croire à un noeud légitime que le canal de communication est occupé par un trafic légitime. En conséquence, le noeud légitime se met en attente jusqu'à ce que le canal soit libre.

• **Brouillage aléatoire** : au lieu d'envoyer continuellement un signal radio, le brouilleur aléatoire alterne entre le brouillage et le sommeil, i.e, le brouilleur éteint son module radio et entre en sommeil, puis il reprend le brouillage après un certain temps du sommeil aléatoire.

• **Brouillage réactif** : une méthode alternative pour interférer avec des communications sans fil est d'utiliser une stratégie réactive, i.e, le brouilleur reste inactif s'il détecte un canal libre et à la détection d'une activité sur le canal, il commence son brouillage.

Après avoir donné une vue d'ensemble des attaques contre les réseaux sans fil, dans les sections suivantes on s'intéresse particulièrement aux techniques anti-brouillage.

### 3.3.2 La technologie des communications à étalement de spectre

L'étalement de spectre consiste à transmettre l'information sur une bande passante beaucoup plus large que celle utilisée pour transmettre le signal d'information original à l'aide d'une modulation classique [63]. La technique Spread Spectrum (SS) est largement utilisée dans les applications nécessitant une protection anti-brouillage et une faible probabilité de détection et / ou d'interception [50][31].

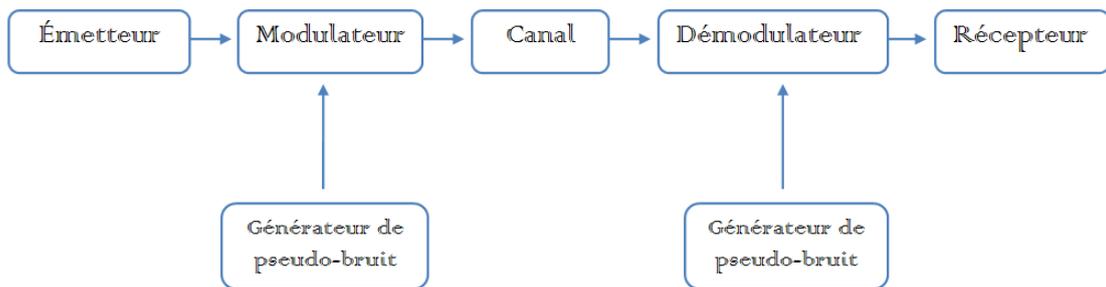


FIGURE 3.4 – Modèle général du système de communication à spectre étalé.

Pour ce faire, différentes techniques de modulation dont principalement :

- **L'étalement de spectre à séquence directe *DSSS***

L'étalement de spectre à séquence directe (*DSSS* : Direct Sequence Spread Spectrum) répartit l'énergie du signal de données sur une bande de fréquence plus large en le modulant directement par un code pseudo-aléatoire connu sous le nom de code d'étalement, et en utilisant une porteuse de fréquence fixe [45].

Le but du *DSSS* est, d'une part, de rendre les signaux occupant une fréquence donnée plus résistants aux brouillages et aux interférences, et d'autre part, de permettre à plusieurs équipements de partager la même fréquence porteuse en utilisant des codes différents [40].

- **L'étalement de spectre par saut de fréquence *FHSS***

L'étalement de spectre par saut de fréquence (*FHSS* : Frequency Hopping Spread Spectrum) est une méthode de transmission qui exploite plusieurs canaux (sous-porteuses) répartis dans une bande de fréquences selon une séquence pseudo-aléatoire connue de l'émetteur et du récepteur. Le *FHSS* offre certains avantages par rapport à l'utilisation d'une fréquence unique comme la résistance aux interférences, la difficulté d'intercepter le

signal et la possibilité de partager la bande de fréquences avec d'autres systèmes [40].

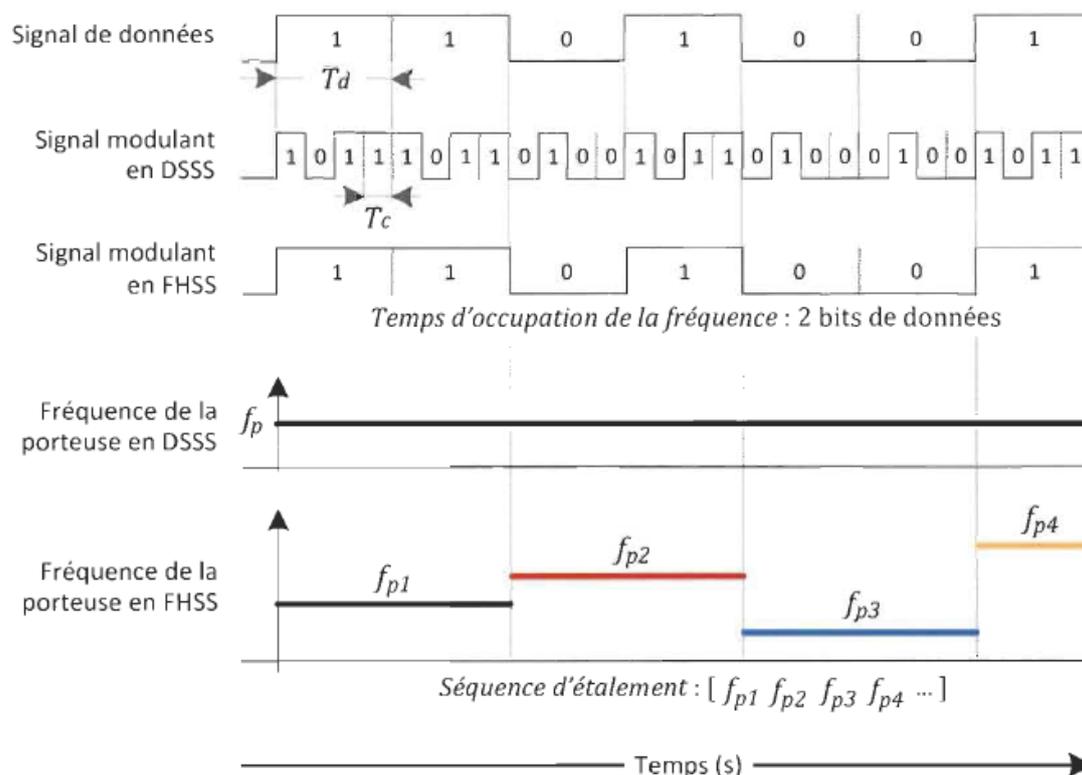


FIGURE 3.5 – Étalement de spectre à séquence directe vs étalement de spectre par saut de fréquence.

### 3.4 Etat de l'art

A l'heure actuelle, le besoin en matière de sécurité est de plus en plus croissant, vue l'émergence de l'outil informatique qui est devenu accessible à un prix abordable, la simplicité d'utilisation des logiciels et l'informatisation des entreprises qui nécessite un réseau sécurisé pour le transfert des données.

La théorie des jeux fournit des outils pour étudier l'interaction entre des joueurs dans une société. Pour cela, elle a été suggérée pour modéliser l'interaction entre un attaquant et une ligne de transmission.

Dans cette section, nous allons présenter des travaux de la littérature sur l'insertion de la théorie des jeux dans les problèmes de sécurité dans les réseaux sans fil plus particulièrement le brouillage.

#### 3.4.1 Littérature connexe et motivation

Les premières informations sur l'attaque par brouillage remontent à l'époque où il avait été utilisé contre des radios militaires. L'Allemagne et la Russie ont été les premiers pays à se lancer dans le brouillage en temps de guerre, au cours de la seconde guerre mondiale.

Les chercheurs ont largement critiqué les attaques par brouillage sur les réseaux sans fil. Différentes solutions ont été proposées pour cette attaque. Parmi les méthodes proposées pour résoudre ce problème, la théorie des jeux.

*Sagduyu et al.(2011)*[47] ont modélisé le problème de brouillage sous forme d'un jeu bayésien à plusieurs étapes et à deux joueurs. L'ensemble de stratégies d'un joueur (nœud) est un ensemble de probabilités de transmission et la fonction d'utilité d'un utilisateur est la différence entre sa fonction de récompense, qui est une fonction croissante du *SINR* (le rapport de signal sur l'interférence plus bruit) et la fonction de coût énergétique. Les auteurs ont considéré également l'équilibre de *Nash* bayésien comme les stratégies attendues du modèle.

*Hanawal et Altman(2012)*[34] ont étudié la performance d'un mobile en présence d'un brouilleur. L'objectif du dispositif de brouillage est de dégrader les performances du réseau tandis que l'objectif de l'émetteur est d'optimiser les performances du réseau. Les auteurs ont modélisé cette situation comme un jeu à somme nulle et ont défini l'équilibre de *Nash* dans deux cas. Dans le premier cas, la distance entre le récepteur et l'émetteur est fixe et dans l'autre cas, la distance n'est pas fixe.

*Yang et al.(2013)* [60] ont présenté un modèle de jeu de Stackelberg pour étudier la défense contre les attaques par brouillage dans les réseaux en présence d'un brouilleur intelligent, qui enregistre la puissance de transmission de l'émetteur et ajuste de manière adaptative sa puissance afin de maximiser les dommages.

*Sagduyu et al.(2010)*[48] ont exploré un jeu non coopératif entre un dispositif de brouillage

et un émetteur, dans lequel les deux choisissent leurs probabilités de transmission pour accéder aux canaux de collision avec une capture de paquets aléatoire.

#### 3.4.2 Performances des liaisons de communication sans fil par paquets adaptatifs en présence de brouillage

Le problème de brouillage dans les communications sans fil a attiré une attention considérable et il est présent dans de nombreux scénarios pratiques. Puisque le brouilleur et les utilisateurs légitimes du canal de communication ont des objectifs opposés, les études théoriques modélisent souvent le problème du brouillage sous la forme de jeux à somme nulle. De plus, pour des raisons pratiques, toutes les stratégies des joueurs ne sont pas autorisées ou réalisables. Pour cela des jeux avec contraintes ont été proposés pour modéliser le problème.

Dans cette partie, nous allons présenter le modèle proposé dans [18], où les auteurs ont utilisé une approche de la théorie des jeux pour modéliser l'interaction d'un adversaire dans la communication entre deux nœuds via une liaison sans fil sous forme d'un jeu à somme nulle à deux joueurs avec contrainte de puissance maximale. Dans ce modèle, l'émetteur a pour objectif de maximiser les performances attendues de la liaison de communication, définies par une fonction d'utilité, alors que l'objectif du brouilleur est de minimiser la même fonction d'utilité.

#### Joueurs

- Joueur 1 : brouilleur.
- Joueur 2 : émetteur.

#### Stratégies du brouilleur

• L'ensemble de stratégies pures du brouilleur est un ensemble de différents niveaux de puissance de brouillage dans l'intervalle  $[0, J_{max}]$ . On note cet ensemble par  $\mathcal{J}$

$$\mathcal{J} = \{0 \leq J_j \leq J_{max}, 0 \leq j \leq N_J \text{ et } J_j \neq J_k \forall j \neq k\}.$$

Sans perte de généralité, on suppose que les niveaux de puissance sont triés dans un ordre croissant et  $\{0, J_{max}\} \in \mathcal{J}$ , c'est-à-dire

$$J_0 = 0 < \dots < J_j < J_{j+1} < \dots < J_{N_J} = J_{max}, \quad 0 < j < N_J.$$

Pour simplifier, on place les stratégies possibles dans un vecteur

$$J = [J_0 \dots J_j \dots J_{N_J}]_{1 \times (N_J+1)}.$$

- Les Stratégies mixtes du brouilleur sont définies par :

$$Y = \{y^T = [y_0 \dots y_j \dots y_{N_J}], \sum_{j=0}^{N_J} y_j = 1, y_j \geq 0, 0 < j < N_J\}.$$

Contrairement aux jeux classiques à somme nulle dans lesquels il n'ya pas d'autres contraintes sur les stratégies mixtes, dans ce modèle, la stratégie mixte du brouilleur doit satisfaire la contrainte de puissance moyenne supplémentaire  $J_{ave}$ , où  $J_{ave} < J_{max}$ .

En utilisant le vecteur de stratégies pures du brouilleur, on définit le nouvel ensemble de stratégies mixtes,  $Y_{LE|J_{ave}}$ , pour ce jeu avec contraintes :

$$Y_{LE|J_{ave}} = \{y \in Y, y^T J < J_{ave}\}.$$

## Stratégies de l'émetteur

- L'ensemble de stratégies pures de l'émetteur est un ensemble de puissances, chaque stratégie du jeu dans cet ensemble peut tolérer jusqu'à un certain niveau de puissance de brouillage. Nous indiquons ce niveau de puissance de brouillage par  $J_T$ . On suppose que le paquet transmis avec cette stratégie peut être entièrement récupéré sur le récepteur pour toute puissance de brouillage inférieure ou égale à  $J_T$  mais sera complètement perdu pour les puissances de brouillage supérieures à  $J_T$ .

Comme chaque stratégie pure de l'émetteur correspond à une certaine puissance de brouillage en dessous de laquelle une transmission fiable est possible, on peut définir alors une relation entre les stratégies pures de l'émetteur et les puissances de brouillage correspondantes notées  $J_T$ . On utilise ces valeurs de puissance de brouillage en tant que représentants des stratégies pures de l'émetteur. En conséquence, l'ensemble de stratégies de l'émetteur peut être défini comme suit :

$$\mathcal{J}_T = \{0 < J_{T,i} < J_{max}, 0 < i < N_T\}.$$

• L'émetteur utilise ses paramètres de puissances disponibles selon une distribution de probabilité (sa stratégie mixte) et son objectif est de trouver une stratégie optimale pour maximiser les performances attendues du lien de communication. On utilise un vecteur de colonne  $x$ , pour indiquer le vecteur de stratégie mixte de l'émetteur

$$x_T = [x_0 \dots x_i \dots x_{N_T}]_{1 \times (N_T+1)} \in X.$$

où :

$X$  : L'ensemble de stratégies mixtes.

### Matrice de gain

Une communication fiable est possible lorsque la puissance de brouillage réelle ( $J$ ) est inférieure ou égale à  $J_T$ . La fonction utilitaire du jeu (le gain pour l'émetteur)  $Z(J, J_T)$ , peut être modélisée comme

$$Z(J_T, J) = \begin{cases} Z_{J_T} & J_T \geq J \\ 0 & J_T < J \end{cases} \quad J_T \in \mathcal{J}_T, \quad J \in \mathcal{J}.$$

Étant donné que ce modèle de jeu est un jeu à deux joueurs à somme nulle avec contrainte, le gain de brouilleur égal à moins le gain de l'émetteur. De plus, on peut formuler les gains (pour chaque paire de stratégies pures) dans une matrice de gains où l'émetteur et le brouilleur seraient respectivement les lecteurs de lignes et de colonnes.

$$Z_{(N_T+1) \times (N_T+1)} = \begin{pmatrix} Z_0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ Z_i & \dots & Z_i & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ Z_{N_T} & & \dots & & & Z_{N_T} \end{pmatrix}$$

En conséquence, le gain attendu du jeu pour la stratégie mixte  $(x, y)$  peut être écrit comme

$$Z(x, y) = x^T Z y, \quad y \in Y_{LE|J_{ave}}, \quad x \in X.$$

Dans certains senarios de brouillage, l'émetteur et le brouilleur peuvent ne pas avoir des objectifs entièrement opposés. Dans ce cas, le problème est modélisé par un jeu bi-matriciel avec contraintes.

Nous trouvons un exemple de cette situation dans l'article [17] qui sera exposé dans section suivante.

### 3.4.3 Problème de brouillage dans un canal *AWGN* avec un brouilleur limité en puissance

#### Le modèle

Considérons le lien de communication sans fil illustré à la figure 3.6. Cette figure représente une liaison de communication entre une station de base (émetteur) et un utilisateur mobile (récepteur), un canal *AWGN* (Additive White Gaussian Noise), à commutation par paquets, avec variance de bruit fixe et connue mesurée du côté de récepteur. De plus, supposons que la liaison de communication soit perturbée par un brouilleur gaussien à puissance moyenne additive.

Nous trouvons dans [17], la modélisation de cette interaction sous forme d'un jeu bi-matriciel avec une contrainte sur les stratégies de brouilleur.

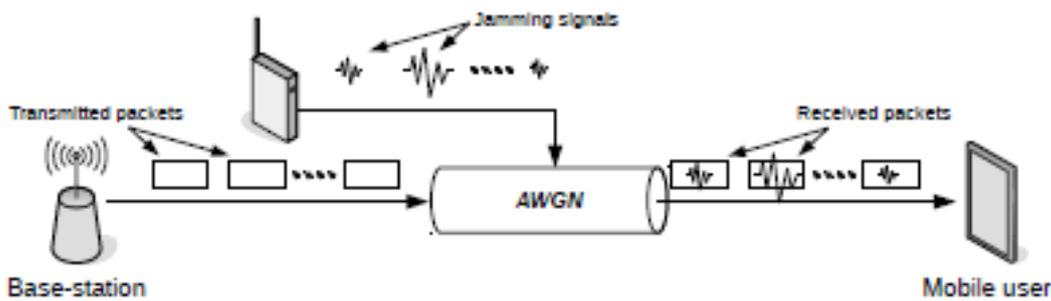


FIGURE 3.6 – Lien *AWGN* par paquets sous brouillage limité en puissance.

#### Joueurs

- Joueur 1 : brouilleur.
- Joueur 2 : station de base.

#### Stratégies

- Stratégies pures de joueur 1 :

$$\mathcal{J} = \{J_0, J_1, \dots, J_j, \dots, J_n\}, \quad j = \overline{0, n}.$$

$J_j$  : représente la puissance de brouillage

- Stratégies pures de joueur 2 :

$$\mathcal{R} = \{R_0 = R_{max} > R_1 > \dots > R_i > \dots > R_{n-1} = R_{min}\}, \quad i = \overline{0, n-1}.$$

$R_i$  : représente le débit de transmission de la station de base.

- Stratégies mixte de joueur 1 :

$$Y^{n+1} = \{y^T = [y_0 \dots y_j \dots y_{n+1}], \sum_{j=0}^n y_j = 1, y_j \geq 0\}.$$

$y_{(n+1) \times 1}$  : représente la stratégie mixte de brouilleur.

$Y^{n+1}$  : représente l'ensemble des stratégies mixtes de brouilleur.

$$Y_{J_{ave}}^{n+1} = \{y_{(n+1) \times 1} \in Y^{n+1} | y^T \mathbf{J} \leq J_{ave}\},$$

$Y_{J_{ave}}^{n+1}$  est l'ensemble de tous les vecteurs de probabilité qui donnent une puissance moyenne inférieure ou égale à  $J_{ave}$ , avec

$\mathbf{J}_{(n+1) \times 1}$  : représente le vecteur de puissances de brouilleur.

- Stratégies mixte de joueur 2 :

L'ensemble des stratégies mixtes de la station de base est donné par :

$$X^n = \{x^T = [x_0 \dots x_i \dots x_{n-1}], \sum_{i=0}^{n-1} x_i = 1, x_i \geq 0\}.$$

### Matrice de gains du joueur 1

Le but du brouilleur étant de maximiser le nombre de paquets détruits, nous définissons le gain par paquets du brouilleur comme étant 1 si le paquet est détruit et 0 si le paquet

est récupéré. Ainsi la fonction d'utilité de brouilleur est donné par cette formule :

$$J(R_i, J_j) = \begin{cases} 0 & j < i \\ 1 & j \geq i \end{cases} \quad (R_i, J_j) \in \mathcal{R} \times \mathcal{J}$$

La matrice de gains correspondant au brouilleur est donnée par :

$$J^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

### Matrice de gains du joueur 2

Les paquets détruits ne contribuent pas au débit moyen du système de communication. Donc le gain par paquets transmis est égal au débit de transmission de celui-ci s'il est récupéré et 0 s'il est détruit. D'où la fonction d'utilité de la station de base est donné par cette formule :

$$C(R_i, J_j) = \begin{cases} R_i & j < i \\ 0 & j \geq i \end{cases} \quad (R_i, J_j) \in \mathcal{R} \times \mathcal{J}$$

La matrice de gain correspondant à la station de base est donnée par :

$$C^T = \begin{pmatrix} R_0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ R_i & \dots & R_i & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ R_{n-1} & & \dots & R_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

## Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons donné un aperçu général sur la transmission dans les réseaux sans fil. Par la suite nous avons présenté quelques menaces contre la sécurité de ces réseaux. Nous avons traité particulièrement le brouillage ainsi que les techniques anti-brouillage. Finalement nous avons donné une synthèse de la littérature existante sur l'application de la théorie des jeux pour les problèmes de brouillage dans les réseaux sans fil et nous avons détaillé deux modèles.

# 4

## Modélisation et résolution du problème

≈ *Les mathématiques consistent à prouver une chose évidente par des moyens complexes.*  
"De George Polya" ≻

### Introduction

APRÈS avoir abordé dans les chapitres précédents quelques notions utiles sur la théorie des jeux et la programmation  $DC$ , le but de ce chapitre est de présenter notre application pour la résolution du problème de brouillage dans les réseaux sans fil après l'avoir modélisé sous forme d'un jeu bi-matriciel avec contraintes. Notre approche est basée sur la transformation de ce dernier en un programme  $DC$ . Cela passe par la formulation du jeu sous la forme d'un problème d'optimisation quadratique sous des contraintes linéaires. Par la suite nous appliquons le schéma  $DCA$  pour résoudre le problème résultant, et pour finir nous allons interpréter les différents résultats obtenus par la simulation. Nous allons analyser au premier lieu l'influence de la variation des limites sur en puissance et en nombre de canaux sur les performances des joueurs (le débit de transmission et le taux de brouillage), ensuite, nous allons voir l'influence du seuil de ( $SNR$ ) sur les gains de lien légitime et le brouilleur.

## 4.1 Position du problème

Avec le large développement des réseaux de communications sans fil, le brouillage constitue une grande menace contre la sécurité de ces réseaux. L'adversaire peut effectuer un déni de service, en simplement, brouillant le canal de communication. Les techniques anti-brouillage traditionnelles sont les systèmes à étalement de spectre à savoir les communications *DSSS* (*Direct-Sequence Spread Spectrum*) et *FHSS* (*Frequency-Hopping Spread Spectrum*).

La théorie des jeux est considérée comme un outil puissant pour traiter les problèmes de la sécurité dans les réseaux. Au niveau de la couche physique, l'interaction entre les utilisateurs légitime (le couple émetteur - récepteur) et l'adversaire (le brouilleur) a été souvent modélisé comme un jeu à somme nulle où le gain d'un joueur correspond exactement à la perte de l'autre [18] [24] [62] [41] [23].

Cependant, les joueurs peuvent ne pas avoir des objectifs exactement opposés, par exemple l'émetteur peut souhaiter minimiser la probabilité d'erreur alors que le brouilleur souhaite minimiser le débit moyen du réseau (au lieu de maximiser la probabilité d'erreur).

Dans cette situation, le cadre le plus approprié pour modéliser le système de communication en présence de brouillage serait les jeux bi-matriciels au lieu des jeux à somme nulle. De plus, pour des raisons pratiques, toutes les stratégies mixtes des joueurs ne sont pas premises ou réalisables. De ce fait, des jeux avec contraintes ont été introduits pour modifier le problème de brouillage dans les réseaux [17] [20].

Dans [20], les auteurs ont étudié un problème de brouillage dans un réseau sans fil à saut de fréquences (*FH wireless network*) dans lequel le brouilleur est soumis à une contrainte de puissance. Ils ont proposé un modèle de jeu bi-matriciel avec contrainte.

Dans les réseaux sans fil à saut de fréquences, l'émetteur change de canal de transmission (donc de fréquences de transmission) d'une manière périodique dans le temps afin de faire face au problème d'interférence causé par le brouilleur. Cependant, le changement fréquent de canal peut causer des interruptions de service et des pertes de performance du réseau [23] [51]. Ceci est dû au temps nécessaire pour reconfigurer le matériel sur le nouveau canal. Il serait donc nécessaire de définir d'une manière adéquate le nombre de canaux à utiliser dans une transmission donnée.

Pour voir l'influence du nombre maximal de canaux à utiliser par l'émetteur sur le

système de communication, nous avons rajouté une contrainte supplémentaire au modèle proposé dans [20]. L'étude détaillée sera présentée dans la partie qui suit.

L'objectif de notre travail est donc d'étudier une communication entre deux noeuds sur une liaison sans fil en présence d'un brouilleur, d'une façon dont l'émetteur essaye, d'une manière égoïste d'augmenter son débit, tandis que l'objectif du brouilleur consiste à réduire le  $SINR$  (le rapport de signal sur l'interférence plus bruit) du récepteur, tenant compte des contraintes liées à la limitation de la batterie (limitation interne) ou la réglementation  $FCC$  (la commission fédérale des communications) (limitations externes).

## 4.2 Modélisation du problème

Nous considérons une communication sans fil à saut de fréquences entre l'émetteur et le récepteur en présence d'un brouilleur. Supposons que le brouilleur est assez intelligent pour changer de fréquences. Nous adoptons les hypothèses suivantes :

### Hypothèses

- a) La bande passante disponible pour les deux entités (émetteur-récepteur et brouilleur) est fixe.
- b) Le lien légitime emploie une séquence de sauts de fréquence pseudo aléatoire pour sélectionner la fréquence à l'émission.
- c) Le brouilleur utilise également une séquence pseudo aléatoire pour sélectionner la fréquence d'interférence.
- d) Chaque canal subit un bruit blanc gaussien additif avec un niveau de puissance de bruit fixe.
- e) Chaque joueur est capable de décider lui-même de rester sur le canal actuel ou de sauter sur un nouveau canal.

• **Les joueurs**

- Premier joueur : lien légitime (émetteur-récepteur).
- Deuxième joueur : brouilleur.

• **Les stratégies pures**

- L'ensemble des stratégies pures du lien légitime est donné par

$$X_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_m\}, \quad x_k \in \mathbb{N}^*,$$

où :

◊  $x_k$  : représente le nombre de canaux disponibles pour sauter. Sans perte de généralité, supposons que  $X_1$  soit un ensemble trié, c'est-à-dire,  $x_1 < x_2 < \dots < x_m$ . Ainsi, le vecteur de stratégies du lien légitime est défini par

$$X_1^T = (x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_m).$$

- L'ensemble des stratégies pures du brouilleur est donnée par

$$X_2 = \{y_1, y_2, \dots, y_k, \dots, y_n\}, \quad y_k \in \mathbb{N}^*,$$

où :

◊  $y_k$  : désigne le nombre de spectres de fréquence pouvant être perturbés par le brouilleur. Ainsi le vecteur de stratégies du brouilleur est défini par

$$X_2^T = (y_1, y_2, \dots, y_k, \dots, y_n),$$

avec  $y_1 < y_2 < \dots < y_n$ .

• **Matrice de gains du lien légitime**

Soit  $A = \{A_{k_1 k_2}\} = \{x_{k_1}, y_{k_2}, P_{u,v}, C_{u,v}\}$ ,  $u \in \mathbb{N}^* \cap [1, x_{k_1}]$ ,  $v \in \mathbb{N}^* \cap [1, y_{k_2}]$ ,  $1 \leq k_1 \leq m$ ,  $1 \leq k_2 \leq n$ , désignent l'élément situé à la ligne  $k_1$  et la colonne  $k_2$  de la matrice A, lorsque les stratégies pures du lien légitime et du brouilleur sont respectivement  $x_{k_1}$  et  $y_{k_2}$ .

## 4.2. MODÉLISATION DU PROBLÈME

---

•  $P_{u,v}(x_{k_1}, y_{k_2})$  : représente la probabilité que le lien légitime réside sur le canal  $u \in \mathbb{N}^* \cap [1, x_{k_1}]$  et que le brouilleur réside sur le canal  $v \in \mathbb{N}^* \cap [1, y_{k_2}]$ , par conséquent,  $P_{u,v}(x_{k_1}, y_{k_2})$  est donné par :

$$P_{u,v}(x_{k_1}, y_{k_2}) = \frac{1}{x_{k_1} \cdot y_{k_2}}. \quad (4.1)$$

•  $C_{u,v}(x_{k_1}, y_{k_2})$  : représente la quantité d'information pouvant être transmise quand le lien légitime réside sur le canal  $u \in \mathbb{N}^* \cap [1, x_{k_1}]$  et que le brouilleur réside sur le canal  $v \in \mathbb{N}^* \cap [1, y_{k_2}]$ , elle est donnée par :

$$C_{u,v}(x_{k_1}, y_{k_2}) = \frac{\mathcal{W}}{x_{k_1}} \log\left[1 + \left(\frac{S}{N}\right)_{u,v}\right],$$

où :

◊  $\mathcal{W}$  : représente la largeur de la bande passante.

◊  $\frac{S}{N}$  : représente le rapport de signal sur le bruit qui est donné par la formule suivante :

$$\frac{S}{N} = \frac{\mathcal{P}_S}{\mathcal{N}_W \cdot \frac{\mathcal{W}}{x_{k_1}}}, \quad (4.2)$$

avec

◊  $\mathcal{P}_S$  : représente la puissance du signal.

◊  $\mathcal{N}_W$  : représente la densité du spectre de puissance du bruit blanc gaussien additif. Lorsque le brouilleur est présent le  $\frac{S}{N}$  devient  $SINR$  donné par :

$$SINR = \frac{\mathcal{P}_S}{\mathcal{N}_W \cdot \frac{\mathcal{W}}{x_{k_1}} + \mathcal{P}_B}, \quad (4.3)$$

où :

◊  $SINR$  : représente le rapport de signal sur l'interférence plus bruit.

◊  $\mathcal{P}_B$  : représente la puissance de brouilleur.

◦ Les éléments de la matrice de gains du lien légitime sont formulés de la manière suivante :

$$A_{k_1 k_2} = \sum_{u=1}^{x_{k_1}} \sum_{v=1}^{y_{k_2}} C_{u,v}(x_{k_1}, y_{k_2}) \cdot P_{u,v}(x_{k_1}, y_{k_2}), \quad 1 \leq k_1 \leq m, \quad 1 \leq k_2 \leq n. \quad (4.4)$$

• **Matrice de gains du brouilleur**

Soit  $B = \{B_{k_1 k_2}\} = \{x_{k_1}, y_{k_2}, P_{u,v}, w_{u,v}\}$ ,  $u \in \mathbb{N}^* \cap [1, x_{k_1}]$ ,  $v \in \mathbb{N}^* \cap [1, y_{k_2}]$ , désignent l'élément situé à la ligne  $k_1$  et la colonne  $k_2$  de la matrice B, lorsque les stratégies pures du lien légitime et du brouilleur sont respectivement  $x_{k_1}$  et  $y_{k_2}$ , où

•  $w_{u,v}(x_{k_1}, y_{k_2})$  : est une variable binaire utilisée pour indiquer si la transmission légitime est perturbée avec succès lorsque le lien légitime réside sur le canal  $u \in \mathbb{N}^* \cap [1, x_{k_1}]$  et que le brouilleur réside sur le canal  $v \in \mathbb{N}^* \cap [1, y_{k_2}]$ , elle est donnée par :

$$w_{u,v}(x_{k_1}, y_{k_2}) = \begin{cases} 1, & \text{si la transmission légitime est perturbée avec succès,} \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.5)$$

o Les éléments de la matrice de gains du brouilleur sont formulés de la manière suivante :

$$B_{k_1 k_2} = \sum_{u=1}^{x_{k_1}} \sum_{v=1}^{y_{k_2}} w_{u,v}(x_{k_1}, y_{k_2}) \cdot P_{u,v}(x_{k_1}, y_{k_2}), \quad 1 \leq k_1 \leq m, \quad 1 \leq k_2 \leq n. \quad (4.6)$$

• **Les stratégies mixtes**

Si nous laissons les joueurs randomiser leurs actions (c'est-à-dire, leur permettons d'utiliser des stratégies mixtes), les gains attendus du jeu pour le profil de stratégie mixte  $(\alpha, \beta)$  sont les suivants :

$$\begin{aligned} A(\alpha, \beta) &= \alpha^T A \beta, & \text{pour le joueur 1,} \\ B(\alpha, \beta) &= \alpha^T B \beta, & \text{pour le joueur 2,} \end{aligned} \quad (4.7)$$

où :

◊  $\alpha \in \Delta_m = \{\Delta_m \in \mathbb{R}_+^m : \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1\}$ ,  $\beta \in \Delta_n = \{\Delta_n \in \mathbb{R}_+^n : \sum_{j=1}^n \beta_j = 1\}$ , sont les stratégies mixtes de premier joueur et de deuxième joueurs respectivement.

Le but du premier joueur est de trouver une stratégie optimale  $\alpha$  qui maximise les gains attendus par la stratégie de deuxième joueur  $\beta$ , c'est à dire que le premier joueur veut résoudre le problème suivant :

$$\max_{\alpha \in \Delta_m} A(\alpha, \beta), \quad \forall \beta \in \Delta_n. \quad (4.8)$$

Alors que le but du deuxième joueur est de maximiser son gain en résolvant le problème suivant :

$$\max_{\beta \in \Delta_n} B(\alpha, \beta), \quad \forall \alpha \in \Delta_m. \quad (4.9)$$

**Remarque 4.2.1**

L'hypothèse (a) implique que les ensembles de stratégies pures  $(X_1, X_2)$ , sont finis, car toute la bande passante est fixée.

**Les contraintes du jeu**

Pour des raisons pratiques, il existe des stratégies mixtes qui ne sont pas réalisables. Plus précisément le lien légitime ne peut utiliser certaines actions qui lui sont plus préférables. Pour la paire de stratégie pure  $(x_{k_1}, y_{k_2}) \in X_1 \times X_2$ , le débit du lien légitime est 0 lorsque le rapport  $SINR$  du récepteur est inférieur au seuil  $\left(\frac{S}{N}\right)_{thr}$ , à savoir

$$C_{u,v}(x_{k_1}, y_{k_2}) = 0, \quad si \quad \left(\frac{S}{N}\right)_{u,v} < \left(\frac{S}{N}\right)_{thr}. \quad (4.10)$$

Donc la matrice de gain du lien légitime est principalement influencée par  $\left(\frac{S}{N}\right)_{thr}$ . De même la variable binaire  $w_{u,v}(x_{k_1}, y_{k_2})$  devient :

$$w_{u,v}(x_{k_1}, y_{k_2}) = \begin{cases} 1, & si \quad \left(\frac{S}{N}\right)_{u,v} < \left(\frac{S}{N}\right)_{thr}, \\ 0, & si \quad \left(\frac{S}{N}\right)_{u,v} \geq \left(\frac{S}{N}\right)_{thr}. \end{cases} \quad (4.11)$$

Par conséquent, (4.11) implique que les valeurs de  $\left(\frac{S}{N}\right)_{thr}$  ont un impact sur la matrice de gain du brouilleur.

◇ La contrainte du lien légitime :

Pour des raisons techniques (expliquées dans la partie position du problème), l'émetteur doit choisir d'une manière adéquate le nombre de canaux à utiliser parmi tous les canaux disponibles. Ce nombre ne doit pas être trop grand pour ne pas élargir la période d'interruption de service.

Soit  $x_{max}$  une limite sur le nombre de canaux que le lien légitime doit utiliser.

La contrainte sur l'ensemble de stratégies pures du lien légitime est donc :

$$x_{k_1} \leq x_{max}, \quad k_1 = \{1, \dots, m\}. \quad (4.12)$$

La contrainte sur l'ensemble de stratégies mixtes du lien légitime :

$$X_1^T \alpha \leq x_{max}.$$

En utilisant cette contrainte, on définit le nouvel ensemble de stratégies mixtes,  $\Delta_{m|x_{max}}$ , pour ce jeu avec contraintes :

$$\Delta_{m|x_{max}} = \{x \in X_1, X_1^T \alpha \leq x_{max}\}.$$

### 4.3. RÉOLUTION DU PROBLÈME

---

◇ La contrainte du brouilleur :

Pour des raisons pratiques, le brouilleur ne peut pas fonctionner à une puissance maximale. Soit  $P_{max}$  la limite supérieure de la puissance du brouilleur. Sans perte de généralité, nous supposons que le brouilleur émet le même niveau de puissance sur tous les canaux.

Cette contrainte de puissance peut être transformée en contrainte sur l'ensemble de stratégie pure de brouilleur :

$$y_{k_2} \leq y_{max} \quad k_2 = \{1, \dots, n\}. \quad (4.13)$$

Donc le brouilleur peut uniquement choisir des actions ayant pour résultat une puissance d'interférence inférieure ou égale à une valeur prédéterminée.

Cette contrainte peut être transformée aussi en contrainte sur l'ensemble de stratégie mixte de brouilleur, c-à-d,

$$X_2^T \beta \leq y_{max}.$$

En utilisant cette contrainte, on définit le nouvel ensemble de stratégies mixtes,  $\Delta_{n|y_{max}}$ , pour ce jeu avec contraintes :

$$\Delta_{n|y_{max}} = \{y \in X_2, X_2^T \alpha \leq y_{max}\}.$$

## 4.3 Résolution du problème

Malgré le fait que l'équilibre de Nash soit le concept le plus important dans la théorie des jeux, le problème de calcul de cet équilibre dans un jeu sous forme normal est malheureusement peu connu. Pour cela une relation d'équivalence a été établie entre le jeu bi-matriciel avec contraintes et une paire de problèmes de programmation linéaires (primal, dual). Cette équivalence facilite la recherche de solution pour le jeu.

Pour utiliser la programmation dans la résolution de notre problème qui était modélisé sous forme d'un jeu bi-matriciel avec contraintes, on doit d'abord commencer par donner une traduction des concepts de la théorie des jeux dans le langage matriciel qui est celui de la programmation.

### 4.3.1 Conversion du jeu vers un problème de programmation quadratique

Les stratégies mixtes  $\Delta_m$  et  $\Delta_n$  des deux joueurs sont des vecteurs non négatifs dont la somme des composants est égale à un. Ce sont des contraintes linéaires, que nous définissons en utilisant :

$$e_m = (1, 1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^m \quad \text{et} \quad e_n = (1, 1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^n.$$

### 4.3. RÉOLUTION DU PROBLÈME

---

Alors les ensembles  $\Delta_m$  et  $\Delta_n$  de stratégies mixtes sont :

$$\Delta_m = \{\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m, e_m^T \alpha = 1, \alpha \geq 0\}.$$

$$\Delta_n = \{\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n, e_n^T \beta = 1, \beta \geq 0\}.$$

Les contraintes supplémentaires sur les stratégies des joueurs dans notre modèle sont :

$$X_1^T \alpha \leq x_{max}.$$

$$X_2^T \beta \leq y_{max}.$$

En supposant que, dans notre jeu bi-matriciel avec contraintes le brouilleur joue sa stratégie optimale  $\beta^*$ , une meilleure réponse du lien légitime à  $\beta^*$  est un vecteur  $\alpha$  dans  $\Delta_m$  qui maximise l'expression  $(\alpha^T A \beta^*)$ . Autrement dit,  $\alpha$  est une solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \max_{\alpha \in \Delta_m} \alpha^T A \beta^* \\ e_m^T \alpha = 1, \\ X_1^T \alpha \leq x_{max}, \\ \alpha \geq 0. \end{cases} \quad (4.14)$$

De même, la stratégie optimale du brouilleur  $\beta$ , contre  $\alpha^*$  est la solution du problème suivant

$$\begin{cases} \max_{\beta \in \Delta_n} \alpha^{*T} B \beta \\ e_n^T \beta = 1, \\ X_2^T \beta \leq y_{max}, \\ \beta \geq 0. \end{cases} \quad (4.15)$$

Les conditions de *KKT* pour les programmes linéaires (4.14) et (4.15), et les conditions nécessaires et suffisantes pour que  $(\alpha^*, \beta^*)$  soit un équilibre de Nash sont présentées dans le tableau suivant :

### 4.3. RÉOLUTION DU PROBLÈME

---

Joueur 1	Joueur 2
$e_m^T \alpha^* - 1 = 0$	$e_n^T \beta^* - 1 = 0$
$X_1^T \alpha^* - x_{max} \leq 0$	$X_2^T \beta^* - y_{max} \leq 0$
$-\alpha^* \leq 0$	$-\beta^* \leq 0$
$A\beta^* - uX_1 - te_m \leq 0$	$\alpha^{*T} B - vX_2 - pe_n \leq 0$
$\alpha^{*T} A \beta^* - ux_{max} - t = 0$	$\alpha^{*T} B \beta^* - vy_{max} - p = 0$
$u(X_1^T \alpha^* - x_{max}) = 0$	$v(X_2^T \beta^* - y_{max}) = 0$
$u \geq 0, t \in \mathbb{R}$	$v \geq 0, p \in \mathbb{R}$

TABLE 4.1 – Conditions nécessaires et suffisantes pour que  $(\alpha^*, \beta^*)$  soit un équilibre de Nash.

Dans [18], les auteurs ont montré que pour chaque jeu à somme nulle avec contraintes à deux joueurs, il existe un programme linéaire équivalent dont la solution donne un équilibre de Nash (EN) pour le jeu et que chaque EN du jeu est la solution du programme linéaire correspondant. Par la suite l'équivalence entre les solutions EN du jeu bi-matriciel avec contraintes et le(s) maximum(s) global(aux) d'un programme quadratique a été montrée dans [17].

**Théorème 4.3.1** (Théorème d'équivalence)[17]

Soit  $G = (A, B, \alpha, \beta, x_{max}, y_{max})$  un jeu bi-matriciel avec contraintes avec  $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Une paire de stratégie  $(\alpha^*, \beta^*)$  est un équilibre de Nash de  $G$  si et seulement si il existe  $u^*, v^* \geq 0$  et  $t^*, p^* \in \mathbb{R}$  tel que  $(\alpha^*, \beta^*, u^*, v^*, t^*, p^*)$  est une solution du problème quadratique suivant :

$$\max_{\alpha, \beta, u, v, t, p} \{ \alpha^T (A + B) \beta - ux_{max} - vy_{max} - t - p \}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A\beta - uX_1 - te_m \leq 0, \\ \alpha^T B - vX_2 - pe_n \leq 0, \\ X_1^T \alpha - x_{max} \leq 0, \\ X_2^T \beta - y_{max} \leq 0, \\ e_m^T \alpha - 1 = 0, \\ e_n^T \beta - 1 = 0, \\ -\alpha, -\beta \leq 0; -u, -v \leq 0; t, p \in \mathbb{R}. \end{array} \right. \quad (4.16)$$

### 4.3.2 Résolution du problème de programmation quadratique

Dans cette partie, nous présenterons l'approche de résolution du problème de programmation quadratique (4.16). Pour cela nous allons d'abord effectuer quelques transformations pour écrire le problème sous une forme plus adéquate.

Posons

$$\bar{z}_1^T = (\alpha, \beta, u, v), \bar{z}_2^T = (t, p) \text{ et } \bar{z}^T = (\bar{z}_1^T, \bar{z}_2^T) = (\alpha, \beta, u, v, t, p).$$

$$\bar{M} = \begin{pmatrix} 0 & A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+n+4) \times (m+n+4)}, \quad \bar{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -x_{max} \\ -y_{max} \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+n+4)}, \quad (4.17)$$

$$\bar{D} = \begin{pmatrix} 0 & A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ X_1^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X_2^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+n+4) \times (m+n+4)}, \quad \bar{d} = \begin{pmatrix} te_m + uX_1 \\ pe_n + vX_2 \\ x_{max} \\ y_{max} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+n+4)}. \quad (4.18)$$

$$\bar{C} = \begin{pmatrix} e_m^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_n^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+n+4) \times 6}, \quad \bar{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^6, \quad (4.19)$$

En utilisant les notation ci-dessus, le problème (4.16) s'écrit sous la forme équivalente :

$$\begin{aligned} \max \bar{f}(z) &= \bar{z}^T \bar{M} \bar{z} + \bar{q}^T \bar{z} \\ \text{s.c.} &\begin{cases} \bar{D} \bar{z} \leq \bar{d}, \\ \bar{C} \bar{z} = \bar{c}, \\ \bar{z}_1 \geq 0, \\ \bar{z}_2 \in \mathbb{R}^2. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.20)$$

Soit  $\bar{\mathcal{C}}$  l'ensemble de contraintes de notre problème. Il est défini comme suit :

$$\bar{\mathcal{C}} = \{ \bar{z} \in \mathbb{R}^{m+n+4} : \bar{D} \bar{z} \leq \bar{d}, \bar{C} \bar{z} = \bar{c}, \bar{z}^T = (\bar{z}_1^T, \bar{z}_2^T), \bar{z}_1 \geq 0, \bar{z}_2 \in \mathbb{R}^2 \}.$$

### 4.3. RÉOLUTION DU PROBLÈME

---

Posons :

$$t = t_1 - t_2, \quad t_1, t_2 \geq 0.$$

Et

$$p = p_1 - p_2, \quad p_1, p_2 \geq 0.$$

En remplaçant  $t$  et  $p$  dans le vecteur  $\bar{z}$ , on obtient le vecteur

$$z = (\alpha, \beta, u, v, t_1, t_2, p_1, p_2) \in \mathbb{R}^{m+n+6}$$

On obtient :  $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{R}^{m+n+6} : Dz \leq d, Cz = c, z \geq 0\}$ , qui est un ensemble convexe polyédrale.

Notre modèle d'optimisation devient donc :

$$\max\{f'(z) = z^T Mz + q^T z : z \in \mathcal{C}\}.$$

Qu'on peut écrire d'une manière équivalente

$$\min\{f(z) = z^T M'z + q'^T z : z \in \mathcal{C}\}, \quad (4.21)$$

avec :

$$M' = -M \text{ et } q' = -q.$$

Dans ce qui suit, on va utiliser une autre forme qui est équivalente à (4.21) :

$$\min\{f(z) = \frac{1}{2}(z^T Q'z) + q'^T z : z \in \mathcal{C}\}, \quad (4.22)$$

où :

$$Q' = M' + M'^T \text{ est une matrice symétrique.}$$

#### 4.3.3 Algorithme DCA

Après la conversion du problème de la recherche de l'équilibre de Nash en un problème de programmation quadratique, nous appliquons dans cette section la méthode *DC* pour la résolution de ce programme. Pour cela, nous écrivons d'abord le problème (4.21) sous la forme d'un programme *DC*.

Etant donné que la fonction  $f(z)$  n'est généralement, pas convexe, on procède à la décomposition suivante :

### 4.3. RÉOLUTION DU PROBLÈME

---

$$f(z) = g(z) - h(z),$$

où

$$g(z) = \chi_{\mathcal{C}}(z) + \frac{1}{2}(z^T(Q' + \rho I_{m+n+6})z) + q'^T z,$$

$$h(z) = \frac{1}{2}\rho \|z\|^2,$$

avec

$I_{m+n+6}$  est la matrice identité de dimension  $(m + n + 6)$  et  $\chi_{\mathcal{C}}(\cdot)$  représente la fonction indicatrice de l'ensemble  $\mathcal{C}$ .

$\rho$  est un nombre positif tel que la matrice  $(Q' + \rho I)$  soit semi définie positive. l'existence de ce nombre est assurée par le lemme suivant.

**Lemme 4.3.1** [1]

*Il existe un nombre non négatif  $\rho_{min}$  tel que pour tout  $\rho \geq \rho_{min}$  les fonctions  $h$  et  $g$  sont convexes.*

La décomposition  $DC$  est obtenue en calculant la valeur propre la plus petite  $\lambda_{min}$  de la matrice  $Q'$ .  $\rho$  est donc obtenu comme suit  $\rho_{min} = -\min\{0, \lambda_{min}\}$ . Donc le problème (4.22) prend la forme de programme  $DC$  standard suivant :

$$\min\{g(z) - h(z) : z \in \mathbb{R}^{m+n+6}\}. \quad (4.23)$$

**Construction des suites  $z^k$  et  $y^k$**

On note que les fonction  $g$  et  $h$  sont différentiables, donc le calcul des suites  $y^k \in \partial h(z^k)$  et  $z^{k+1} \in \partial g^*(y^k)$  dans notre cas, est équivalent à calculer :

- $y^k = \rho z^k$ .

Et

- $z^{k+1}$  solution optimale du problème de programmation quadratique convexe suivant :

$$\min\{\chi_{\mathcal{C}}(z) + \frac{1}{2}(z^T(Q' + \rho I_{m+n+6})z) + (q'^T - y^k)z, z \in \mathcal{C}\}. \quad (4.24)$$

La solution  $z^k$  est optimale pour le problème (4.22) si la conditions suivantes est vérifiée :

$$\|z^{k+1} - z^k\| \leq \epsilon, \quad \epsilon > 0.$$

### 4.3. RÉOLUTION DU PROBLÈME

---

En se basant sur ce qui précède et d'après le schéma général de l'algorithme *DC* (donné dans le chapitre 2), et suivant les étapes de la conversion du jeu en un problème de programmation quadratique et la transformation de ce dernier vers le problème (4.22), nous proposons l'algorithme *DCABC* (*DCA* pour le jeu Bi-matriciel avec Contraintes) suivant pour la résolution du notre problème.

---

**Algorithme 2** Algorithme DCABC

---

**• Initialisation :**

**0 :** Choisir un point initial  $z^0 \in \mathbb{R}^{n+m+6}$ .

Fixer les deux valeurs  $x_{max}$  et  $y_{max}$ .

Choisir une tolérance  $\epsilon > 0$ .

**• Itérations :**

**1 :** Calculer la matrice  $A$  selon la relation (4.4).

Calculer la matrice  $B$  selon la relation (4.6).

Calculer  $M, q$  selon la relation (4.17).

Calculer  $D, d$  selon la relation (4.18).

Calculer  $C, c$  selon la relation (4.19).

Poser  $M' = -M, q' = -q, Q' = (M'^T + M')$ .

Calculer  $\rho$ .

**2 :**  $k \leftarrow 0$ .

**• Répéter :**

**3 :** Calculer  $y^k = \rho z^k$ .

**4 :** Calculer  $z^{k+1}$  solution optimale du problème (4.24).

**5 :**  $k \leftarrow k + 1$ .

**Jusqu'à :** la condition  $\|z^{k+1} - z^k\| \leq \epsilon$  est vérifiée.

**6 :** Afficher l'équilibre de Nash  $(\alpha^*, \beta^*)$ .

---

## 4.4 Simulation et interprétation des résultats

Après avoir décrit le modèle, nous passons maintenant à son évaluation en utilisant la simulation. Notre choix de langage de programmation s'est porté sur *MATLAB*. Nous supposons que tous les paramètres satisfont aux hypothèses. La largeur de la bande passante disponible est  $W = 50M$  (*Migabits*), la puissance de transmission est  $P_S = 1W$  (*Watts*) et soit  $P_B = 0.1W$  (*Watts*) la puissance injectée par le brouilleur. Nous supposons la densité du spectre de puissance du bruit blanc gaussien additif, soit  $N_W = 0.01W$  (*Watts*) / HZ(*Hertz*). Nous supposons ainsi que les stratégies pures du lien légitime sont  $X_1 = \{ 2, 4, 6, 8, 10, 12 \}$  et celles du brouilleur sont  $X_2 = \{ 2, 4, 6, 8, 10, 12 \}$ . Les éléments de la matrice de gains du lien légitime et du brouilleur sont obtenues par les formules (4.4) et (4.6), respectivement.

### 4.4.1 Variation de la valeur du jeu en fonction de $x_{max}$

Une fois que la simulation a été faite conformément aux paramètres mentionnés précédemment, on obtient les figures suivantes avec  $y_{max} = 4$  et  $x_{max}$  varie :

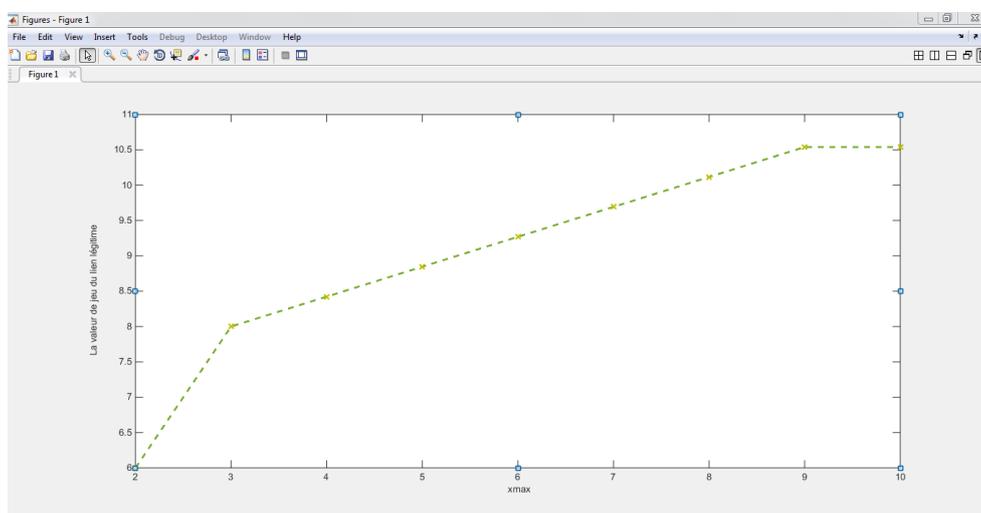


FIGURE 4.1 – Variation de la valeur de jeu du lien légitime en fonction de  $x_{max}$ .

#### 4.4. SIMULATION ET INTERPRÉTATION DES RÉSULTATS

---

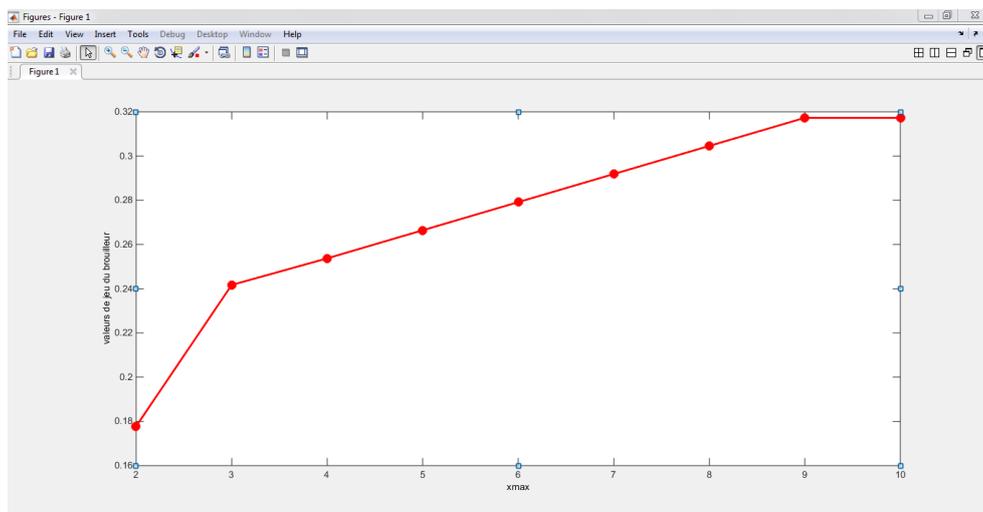


FIGURE 4.2 – Variation de la valeur de jeu du brouilleur en fonction de  $x_{max}$ .

Les résultats numériques des figures 4.1 et 4.2 montrent que la valeur de jeu du lien légitime et du brouilleur est une fonction croissante de  $x_{max}$ . Quand  $x_{max}$  est grand, les gains des joueurs deviennent plus élevés.

#### Interprétation

Lorsque le nombre de canaux  $x_{max}$  augmente, l'ensemble de stratégies du lien légitime devient plus grand, donc le nombre de canaux disponibles pour le saut de fréquence augmente alors le lien légitime aura plus de stratégies qui lui sont plus préférables pour éviter l'interférence. Pour cela son débit de transmission accroît jusqu'à un certain niveau (10.5 Mb/s) puis il se stabilise.

Nous remarquons que le gain du brouilleur croît aussi suivant la valeur  $x_{max}$ , qui signifie qu'à chaque fois le lien légitime utilise plus de canaux, la qualité de transmission diminue qui est l'objectif de brouilleur.

#### 4.4.2 Variation de la valeur du jeu en fonction de $y_{max}$

Dans les mêmes conditions, nous allons refaire la simulation mais cette fois-ci avec  $x_{max} = 4$  et  $y_{max}$  varie. Les résultats sont résumés dans les figures ci-dessous.

#### 4.4. SIMULATION ET INTERPRÉTATION DES RÉSULTATS

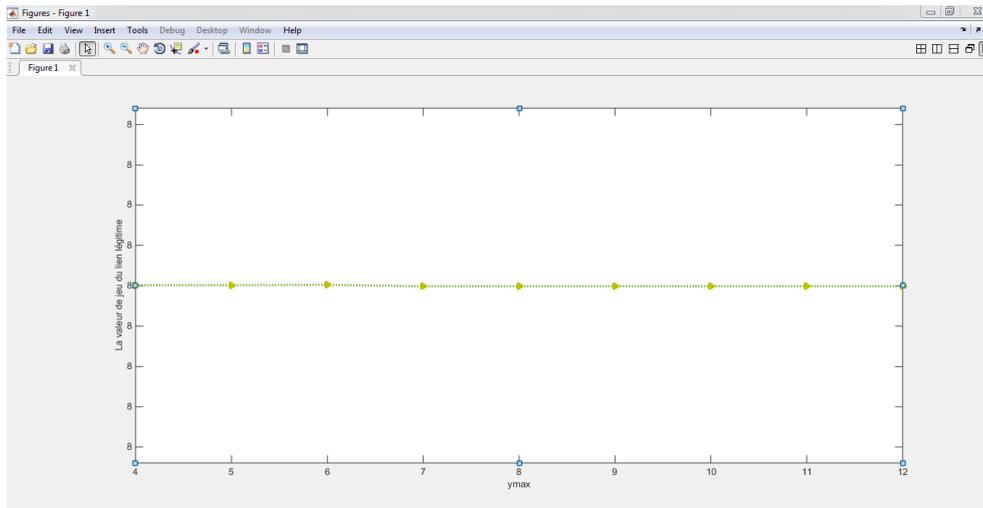


FIGURE 4.3 – Variation de la valeur de jeu du lien légitime en fonction de  $y_{max}$ .

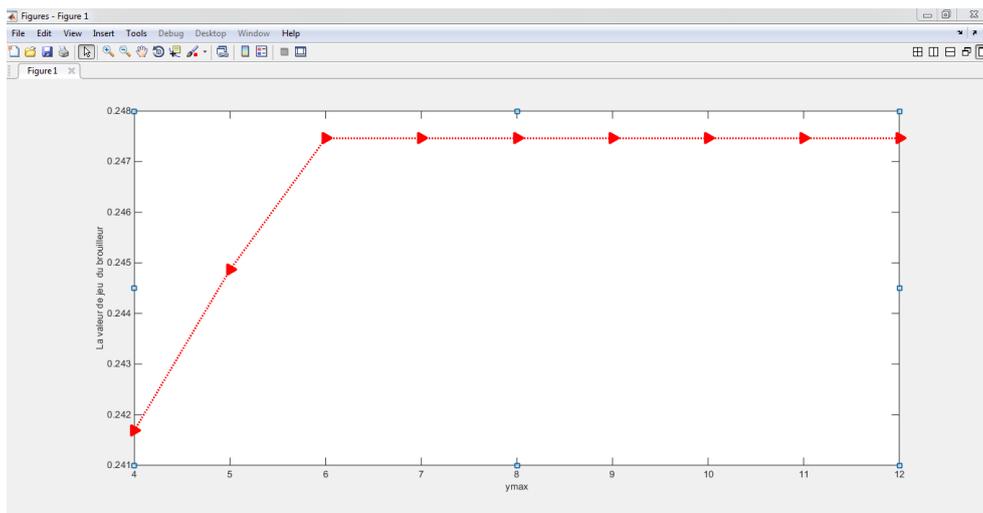


FIGURE 4.4 – Variation de la valeur de jeu du brouilleur en fonction de  $y_{max}$ .

Les figures 4.3 et 4.4 montrent que la valeur de jeu du lien légitime reste constante en fonction de  $y_{max}$  et la valeur de jeu du brouilleur augmente jusqu'à  $y_{max} = 6$ , puis elle se stabilise.

### Interprétation

Le brouilleur cherche à maximiser le taux de brouillage dans la ligne de transmission et comme le nombre de spectres de fréquence à perturber par le brouilleur est lié à sa puissance, donc il est logique que l'augmentation du nombre de canaux  $y_{max}$  implique l'augmentation de la valeur de jeu du brouilleur.

On remarque que La valeur de jeu du lien légitime n'est pas influencé par le nombre  $y_{max}$  parceque son objectif est de maximiser le débit de transmission pas le  $SINR$ .

### 4.4.3 Variation de la valeur du jeu en fonction de $SNR_{thr}$

Dans cette partie, nous rajoutons les contraintes de jeu (4.10) et (4.11) à notre programme pour évaluer et comparer respectivement le débit moyen et le taux de brouillage réussi par rapport au seuil de ( $SNR_{thr}$ ) pour différentes limites du nombre de canaux.

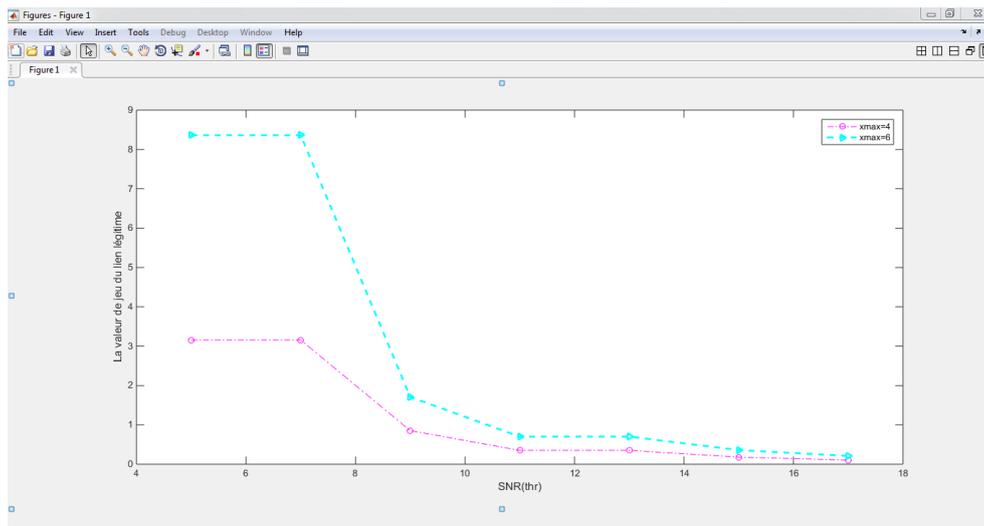


FIGURE 4.5 – La variation de la valeur de jeu du lien légitime en fonction de  $SNR_{thr}$ .

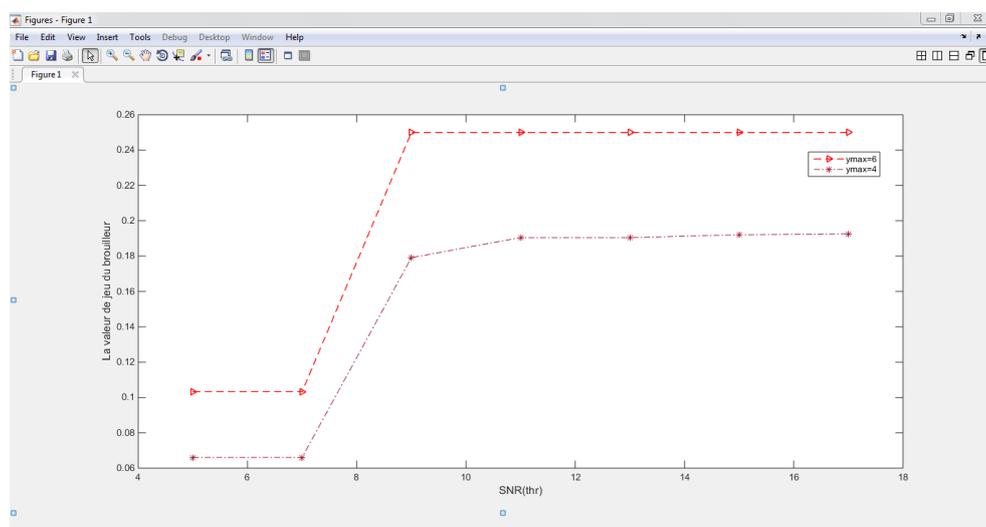


FIGURE 4.6 – La variation de la valeur de jeu du brouilleur en fonction de  $SNR(thr)$ .

### Interprétation

Le débit de transmission réussi dans le schéma ci-dessus baissent et le taux de brouillage augmentent pour une valeur donnée de  $x_{max}$  et  $y_{max}$ , respectivement lorsque le seuil,  $SNR_{thr}$ , augmente. Cela est dû à la demande croissante de services de communication. Comme indiqué dans la section 4.2,  $x_{max} = 4$  signifie que les stratégies pures 2 et 4 de  $X_1$  sont disponibles pour le lien légitime sous la contrainte (4.12) et les stratégies pures 2, 4, 6  $\in X_1$  sont réalisables lorsque  $x_{max} = 6$ . De même pour  $y_{max} = 4$  et  $y_{max} = 6$ . En conséquence, comme indiqué sur les figures 4.5 et 4.6, le débit de transmission et le taux de brouillage sont plus importants pour une valeur donnée de  $SNR_{thr}$ , lorsque le seuil,  $x_{max}$ ,  $y_{max}$  augmentent. L'augmentation de débit de transmission et le taux de brouillage résulte de l'augmentation du nombres de stratégies pures réalisables.

### Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons traité le problème de brouillage dans les réseaux sans fil, nous avons d'abord modélisé ce problème sous forme d'un jeu bi-matriciel avec contraintes. Ensuite nous avons proposé un algorithme basé sur le schéma *DCA* pour résoudre le problème résultant, qui constitue l'essentiel de notre contribution, et nous l'avons implémenté sous le logiciel *MATLAB*.

#### 4.4. SIMULATION ET INTERPRÉTATION DES RÉSULTATS

---

D'après les simulations réalisées, nous avons pu constater que les performances des joueur (le débit de transmission et le taux de brouillage) étaient des fonctions croissantes du les valeurs  $x_{max}$  et  $y_{max}$  (les limites sur le nombre de canaux pour le lien légitime et la puissance pour le brouilleur), tandis que l'augmentation du seuil ( $SNR_{thr}$ ) fait diminuer le gain de lien légitime et accroître le gain de brouilleur.

## Conclusion générale

*≃ Il n'y a pas de problèmes qu'on se pose,  
Il y a des problèmes qui se posent, il n'y a pas de problèmes résolus,  
Il y a des problèmes plus ou moins résolus  
\*\* Henri Poincaré\*\* ≃*

La théorie des jeux a trouvé un champ d'application très important dans les réseaux  $L$  de communication sans fil. Dans ce travail, nous l'avons utilisée pour modéliser le problème de brouillage qui est un parmi les nombreuses menaces de sécurité les plus importantes dans les réseaux sans fil. Dans notre modèle les objectifs des joueurs ne sont pas opposés. Pour cela nous avons utilisé un cadre plus approprié pour modéliser le système de communication en présence de brouillage qui est les jeux bi-matriciels. De plus, à cause des raisons pratiques, il existe des stratégies mixtes qui ne sont pas réalisables, donc on a rajouté des contraintes à notre jeu pour satisfaire toutes les conditions des joueurs.

Par la suite, nous avons proposé une méthode de résolution qui consiste à ramener notre jeu, à un programme d'optimisation en passant par la programmation quadratique. Enfin, nous avons proposé un algorithme de recherche d'équilibre basé sur la programmation  $DC$  et l'algorithme  $DCA$ .

Ce rapport s'est consacré en premier lieu à la présentation de la théorie des jeux en définissant les notions de base qui lui sont liées, ses concepts de solution et ses caractéristiques principales pour mieux comprendre le raisonnement qu'elle apporte. Nous avons apporté une attention particulière sur les jeux bi-matriciels avec contraintes.

Ensuite nous avons rappelé quelques notions de base sur la théorie de l'analyse et l'optimisation convexe ainsi que la méthode  $DC$  et l'algorithme  $DCA$ .

Nous avons par la suite présenté les réseaux sans fils ainsi que les impératifs de sécurité et certains travaux qui ont été faits dans le contexte où la théorie des jeux trouve sa place pour être appliquée comme étant l'outil fondamental pour la résolution des problèmes de

sécurité plus particulièrement le brouillage dans réseaux sans fil.

Dans la dernière partie nous avons présenté notre modèle qui traite le problème de brouillage dans une ligne de communication, où nous avons commencé par la modélisation du problème sous forme d'un jeu bi-matriciel avec contraintes, puis la formulation de ce dernier sous la forme d'un problème d'optimisation quadratique sous des contraintes linéaires. Par la suite, nous avons développé un algorithme basé sur l'optimisation *DC* et *DCA* pour la résolution du problème. Nous avons fini par l'implémentation de l'algorithme numérique sous *MATLAB*.

L'exécution de notre algorithme pour différentes valeurs paramètres nous a permis d'obtenir les résultats suivants :

- En augmentant les limites qui sont sur la puissance et le nombre de canaux à utiliser, Le nombre de stratégies des joueurs devient plus grand, donc le nombre de canaux disponible pour le saut de fréquence par le lien légitime et le nombre de spectres de fréquence à perturber par le brouilleur augmentent alors ils auront plus de stratégies qui leur sont plus préférable, ce qui conduit à l'augmentation de leurs performances.

- En augmentant le seuil de (*SNR*) le gain de lien légitime diminue tandis que le gain de brouilleur augmente.

# Bibliographie

- [1] F. B. Akoa. Approches de points intérieurs et de la programmation dc en optimisation non convexe. codes et simulations numériques industrielles. *PhD thesis, Institut National Des Sciences Appliquées De Rouen*, Janvier 2005.
- [2] E. Altman, S. Sarkar, and E. Solan. Constrained markov games with transition probabilities controlled by a single player. *In Proceedings of the 2nd international conference on Performance evaluation methodologies and tools*, 2007.
- [3] A. Benfarah. Sécurisation d'un lien radio uwb-ir. *thèse de doctorat en Micro et Nano Technologies, INSA de Lyon*, 10 juillet 2013.
- [4] N. Berlin and A. Plagne et C. Sabbah. *Theorie des jeux : Introduction à la théorie des jeux répétés*. Édition de l'École Polytechnique, Janvier 2007.
- [5] B. Bourega. Sous différentiel limite et problème approchés. *Magister en Mathématiques, Université d'Oran*, 25 juin 2013.
- [6] A. Charnes. Constrained games and linear programming. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, pages 639–642, 1953.
- [7] A. Charnes and S. Sorensen. Constrained n-person games. *International Journal of Game Theory*, pages 141–158, 1974.
- [8] F. H. Clarke, Y.S. Ledyaev, R. J. Stern, and P. R. Wolenski. Nonsmooth analysis and control theory. *Springer-Verlag, New York*, 1998.
- [9] S. Dempe. *Foundations of Bilevel Programming*. Dordrecht, Boston : kluwer Academic, 2002.
- [10] T. Pham Dinh. Calcul du maximum d'une forme quadratique définie positive sur la boule unité de la norme du maximum. *Technical report, Séminaire d'analyse numérique, Grenoble*, 1976.

- 
- [11] T. Pham Dinh and S. El bernoussi. Algorithms for solving a class of non convex optimization problems. methods of subgradients. In *North-Holland Mathematics Studies*, pages 249–271, 1986. Elsevier.
- [12] T. Pham Dinh and A. H. Le Thi. *Recent advances in DC programming and DCA*. Transactions on Computational Intelligence XIII, 2014.
- [13] M. Dür. Duality in global optimization : optimality conditions and algorithmical aspects. *PhD thesis, Université de trier, Allemagne*, 1999.
- [14] I. Ekeland and R. Temam. *Analyse convexe et problèmes variationnels*. Dunod Paris, ISBN 978-2-04-007368-8, 1974.
- [15] M. Fanyong and Z. Jiaquan. Two methods for solving constrained bi-matrix games. *The Open Cybernetics. Systemics Journal*, pages 1038–1041, 2014.
- [16] A. L. Fawe and L. Deneire. Principe de télécommunication. *Notes de cours*, 1995 - 1996.
- [17] K. Firouzbakht, G. Noubir, and M. Salehi. Constrained bimatrix games in wireless communications. *Submitted to IEEE Transactions on Communications*, 2015.
- [18] K. Firouzbakht, G. Noubir, and M. Salehi. On the performance of adaptive packetized wireless communication links under jamming. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, pages 3481–3495, July 2014.
- [19] L. Palopoli G. Greco, E. Malizia and F. Scarcello. Nontransferable utility coalitional games via mixed-integer linear constraints. *Journal of Artificial Intelligence Research*, 2010.
- [20] Y. Gao, Y. Xiao, M. Wu, M. Xiao, and J. Shao. Game-theory-based anti-jamming strategies for frequency hopping wireless communications. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, pages 5314–5326, 2018.
- [21] R. Gibbons et al. A primer in game theory. *Harvester Wheatsheaf New York*, 1992.
- [22] B. Guerrien. *Théorie des jeux*. Economica, 1997.
- [23] M K. Hanawal, M J. Abdel-Rahman, and M. Krunz. Joint adaptation of frequency hopping and transmission rate for anti-jamming wireless systems. *2th International Symposium On Modeling and Optimization in Mobile, Ad Hoc, and Wireless Networks (WIOPT)*, page 1–14, 2014.
- [24] M. K. Hanawal, M. J. Abdel-Rahman, and M. Krunz. Game theoretic anti-jamming dynamic frequency hopping and rate adaptation in wireless systems. *International Symposium on Modeling and Optimization in Mobile, Ad Hoc, and Wireless Networks (WiOpt)*, pages 247–254, May 2014.
-

- [25] P. Hartman. On functions representable as a difference of convex functions. *Pacific J. Math*, 1959.
- [26] J. B. Hiriart-Urruty and C. Lemarechal. Convex analysis and minimization algorithms. *Springer, Berlin*, 1993.
- [27] R. Horst and N. V. Thoai. Dc programming : Overview. *Journal of Optimization Theory and Applications*, pages 1–43, october 1999.
- [28] I. Husain and B. Ahmad. Constrained dynamic game and symmetric duality for variational problems. *Journal of Mathematics and System Science*, pages 171–176, 2012.
- [29] F. Jules and M. Lassonde. Formulas for subdifferentials of sums of convex functions. *Journal of Convex Analysis*, pages 519–533, 2002.
- [30] T. Kawaguchi and Y. Maruyama. Generalized constrained games in farm planning. *American Journal of Agricultural Economics*, pages 591–602, 1972.
- [31] S. J. Kim, C. S. Park, and S. G. Lee. A 2.4-ghz ternary sequence spread spectrum ook transceiver for reliable and ultra-low power sensor network applications.
- [32] G. D. Krishnendu. On stackelberg games in a homogeneous product market. *European Economic Review*, pages 549–562, 2004.
- [33] P. Maréchal. Éléments d’analyse convexe. *Cours de M1 Mathématiques Fondamentales, Université Paul Sabatier*.
- [34] M.K.Hanawal and E. Altman. Stochastic geometry based jamming games in mobile ad hoc networks. In :*The Ninth IEEE Annual Conference on Wireless Ondemand Network Systems and Services(WONS)*, page 91–98, 2012.
- [35] H. Moulin. *Théorie des jeux pour l’économie et la politique*. Hermann, Paris, France, ISBN 9782705659318, 1981.
- [36] P. Muhlethaler and O. Salvatori. *802.11 et les réseaux sans fil*. Paris : Eyrolles, 2002.
- [37] J. Nash. Noncooperative games. *Annals of Mathematics* 54, 1951.
- [38] J. V. Neumann and O. Morgenstern. Theory of games and economic behavior. *Princeton : Princeton Univercity Press*, 1944.
- [39] Y. S. Niu. Programmation dc et dca en optimisation combinatoire et optimisation polynomiale via les techniques de sdp : Codes et simulations numériques. *Thèse préparée au Laboratoire de Mathématiques de l’Institut National des Sciences Appliquées de Rouen, France*, 2010.

- [40] S. Oudji. Analyse de la robustesse et des améliorations potentielles du protocole radiofréquences sub-ghz knx utilisé pour l'iot domotique. *thèse de doctorat en Electronique des Hautes Fréquences, Photonique et Systèmes, Université de Limoges*, 10 décembre 2016.
- [41] K. Pelechrinis, C. Koufogiannakis, and S.V Krishnamurthy. On the efficacy of frequency hopping in coping with jamming attacks in 802.11 networks. *IEEE Transactions on wireless communication, accepted for publication*, page 1–14.
- [42] T. D. Quynh. Optimisation non convexe en finance et en gestion de production : Modèles et méthodes. *Thèse préparée au sein de laboratoire d'Informatique Théorique et Appliquée (LITA) Université de Paul Verlaine-Metz*, 14 Octobre 2011.
- [43] M. S. Radjef. Théorie des jeux. *Cours de master 1, Département de Recherche Opérationnelle. Université A.Mira de Bejaia*, 2013/2014.
- [44] S. V. Raghavan and E. Dawson. *An Investigation into the Detection and Mitigation of Denial of Service (DoS) Attacks : Critical information infrastructure Protection*. Springer India, ISBN 8132202767,9788132202769, 2011.
- [45] A. H. Rasolomboahanginatovo. Application du dsss à un système d'identification par radio fréquence reconfigurable pour l'amélioration de la sensibilité du lecteur et de la portée. *thèse de doctorat en Génie électrique, Université du Québec à Trois-Rivières*, 2018.
- [46] R. T. Rockafellar. *Convex analysis*. Princeton University Press, 1970.
- [47] Y.E. Sagduyu, R.A. Berry, and A. Ephremides. Jamming games in wireless networks with incomplete information. *IEEE Commun.Mag.*49, page 112–118, August 2011.
- [48] Y.E Sagduyu, R.A Berry, and A. Ephremides. Wireless jamming attacks under dynamic traffic uncertainty. *In :Proceedings of the Eighth International Symposium on Modeling and Optimization in Mobile, Ad Hoc and Wireless Networks(WiOpt)*, page 303–312, May 2010.
- [49] O. Salem. La protection des réseaux contre les attaques dos. *Dany Fernandes et Papa Amadou Sarr*, Mai 2010.
- [50] B. Sherlock, J. A. Neasham, and C. C. Tsimendis. Spread-spectrum techniques for bio-friendly underwater acoustic communications. *IEEE Access*, page 4506 – 4520, 2018.
- [51] S H. Sohn, S J. Jang, and J M. Kim. Adaptive frequency-hopping cognitive radio system to reduce interference time and to improve throughput. *Transactions on internet and information systems*, 2011.

- 
- [52] H. Souilah. Sécurité contre les attaques dos et ddos dans les réseaux iee 802.11. *Magister en Informatique, Université de Béjaia*, 2014.
- [53] H. A. Le Thi. Analyse numérique des algorithmes de l'optimisation d.c. approches locales et globales. code et simulations numériques en grande dimension. *Thèse de Doctorat de l'Université de Rouen*, 1994.
- [54] H. A. Le Thi and T. Pham Dinh. Dc programming : Theory, algorithms and applications. *The State of the Art, Proceedings of The First International Workshop on Global Constrained Optimization and Constraint Satisfaction, Valbonne-Sophia Antipolis, France*, 2002.
- [55] H. A. Le Thi and T. Pham Dinh. Solving a class of linearly constrained indéfinite quadratic problems by dc algorithms. *Journal of Global Optimization*, pages 253–285, October 1997.
- [56] H. A. Le Thi and T. Pham Dinh. The dc (difference of convex functions) programming and dca revisited with dc models of real world nonconvex optimization problems. *Annals of Operations Research*, pages 23–46, 2005.
- [57] J. F. Toland. Duality in nonconvex optimisation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, pages 399–415, 1978.
- [58] J. B. H. Urruty. Conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité globale en optimisation de différences de deux fonctions convexes. *CRAS(CR Acad. Sci) Paris, Série I Math*, pages 459–462, 1989.
- [59] M. Willem. *Analyse convexe et optimisation*. Ciaco, 1987.
- [60] D. Yang, G. Xue, J. Zhang, A. Richa, and X. Fang. Coping with a smart jammer in wireless networks :a stackelberg game approach. *IEEE Trans.Wirel.Commun*, page 4038–4047, August 2013.
- [61] M. Yildizoglu. Introduction à la théorie des jeux, 2003.
- [62] X. Zhou, D. Niyato, and A. Hjørungnes. Optimizing training-based transmission against smart jamming. *IEEE Transactions on vehicular technology*, page 2644–2655, JULY 2011.
- [63] R. E. Ziemer. *Fundamentals of Spread Spectrum Modulation*. Morgan and Claypool Publishers, 2007.