

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université A.MIRA-BEJAIA Faculté des Sciences Exactes



Département de Recherche Opérationnelle

Mémoire

En vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques Appliquées

Spécialité : Modélisation Mathématique et Techniques de Décision



Thème

**Optimisation de la Borne de Stabilité Forte dans le Modèle
d'attente M/M/1 avec Rappels constants, Collisions et
erreurs de transmission**

Présenté par

M^{elle} BOULAHOUAD Amel

M^{elle} HANI Nadia

Devant le jury composé de :

M ^{me} ADEL-AISSANOU Karima	M.C.A	Présidente	Univ. de Bejaia.
M ^r AÏSSANI Djamil	Professeur	Rapporteur	Univ. de Bejaia.
M ^{elle} LAKAOUR Lamia	Docteur	Co-Rapporteur	Univ. de Bejaia.
M ^{me} BERDJOU DJ Louiza	M.C.A	Examinatrice	Univ. de Bejaia.
M ^{me} HOCINE Safia	M.A.A	Examinatrice	Univ. de Bejaia.

Année Universitaire : 2018/2019



Nous tenons tout d'abord à remercier Dieu le tout puissant, qui nous a donné la force et la patience d'accomplir ce modeste travail.

Nous tenons à remercier très chaleureusement M^r Djamil AÏSSANI, professeur à l'université de Béjaïa et directeur de l'unité de recherche LaMOS et M^{elle} Lamia LAKAOUR qui nous ont permis de bénéficier de leur encadrement. Les conseils qu'ils nous ont prodigué, la patience, la confiance qu'ils nous ont témoignés ont été déterminants dans la réalisation de notre travail de recherche.

Nous remercions également M^r Karim ABBAS, M^r Massinissa SOUFIT et toute les personnes qui nous ont apporté leurs aides et qui ont contribué à l'élaboration de ce mémoire ainsi qu'à la réussite de cette formidable année universitaire.

Nous tenons également à remercier M^{me} Karima ADEL-AISSANOU d'avoir accepté de présider le jury de ce mémoire.

Nous remercions M^{me} Louiza BERDJOU DJ et M^{me} Safia HOCINE d'avoir accepté de faire partie du jury et consacré leurs temps à la lecture et à la correction de ce mémoire.

Nous n'oublions pas nos parents -Dieu qu'il les garde- pour tous ce qu'ils ont fait pour pouvoir travailler dans les bonnes conditions possibles.

Nous adressons nos plus sincères remerciements à tous nos proches et amis, qui nous ont toujours soutenue et encouragé au cours de la réalisation de ce mémoire.

Dieu merci.

"La théorie, c'est quand on sait tout et que rien ne fonctionne.
La pratique, c'est quand tout fonctionne et que personne ne sait pourquoi.
Ici, nous avons réuni théorie et pratique : rien ne fonctionne et personne ne sait pourquoi !"

Albert Einstein



Je dédie ce modeste travail à :

Mes très chers parents à qui je dois tout et à qui je rendrais jamais assez

Mon très chère frère Abid .

Ma très chère soeur Ikram.

Mes oncles et Tantes.

Mon grand père.

Tout les membres de la famille Boulahouad et Ait khira.

Tout mes amis.

Toute la promotion RO 2019.

BOULAHOUAD Amel



Je dédie ce modeste travail :

À mes très chers parents, pour leur soutien constant et leurs confiance, eux qui m'ont donné du courage et de la volonté durant mon cycle d'études. Que Dieu les protège.

À mes très chers frères (Lyes, son épouse Samia et ses enfants (Amine, Anis et mon ange Meriem), Moussa, Nadjim, Hamza) pour leurs compréhension et encouragement.

À mes oncles et Tantes.

À la mémoire de mon grand père et ma grand mère.

À toutes les personnes qui m'ont soutenues et qui ont participer de près ou de loin à l'élaboration de ce mémoire.

À tous les membres de la famille Hani et Ben mouhoub.

À tout mes amis.

À toute la promotion RO 2019.

HANI Nadia

Table des matières

Table des Figures	iii
Introduction générale	1
1 Les systèmes de files d'attente avec rappels	4
Introduction	4
1.1 Files d'attente classiques	5
1.1.1 Description du modèle d'attente classique	5
1.2 Analyse mathématique d'un système de files d'attente	6
1.2.1 Notation de Kendall	7
1.3 Chaînes de Markov	8
1.3.1 Chaînes de Markov à temps discret	9
1.3.2 Chaînes de Markov à temps continu	11
1.4 Types de modèles d'attente	12
1.4.1 Modèles markoviens	12
1.4.2 Modèles non markoviens	12
1.5 Caractéristiques d'un système de files d'attente	13
1.6 Systèmes d'attente avec rappels	14
1.6.1 Description d'un système de files d'attente avec rappels	14
1.6.2 Condition de stabilité d'un système de files d'attente avec rappels	16
1.6.3 Politiques d'accès aux serveurs à partir de l'orbite	16
1.7 Cas réels modélisés par des systèmes d'attente avec rappels	17
1.7.1 Problème de réservation	18
1.7.2 Système informatique à temps réel	18
1.7.3 Méthode d'accès au médium dans les réseaux sans fil	18
1.8 Quelques modèles d'attente avec rappels	19
1.8.1 Le modèle d'attente M/M/1 avec rappels	19

1.8.1.1	Description du modèle	19
1.8.1.2	Analyse de la distribution stationnaire	19
1.8.2	Le modèle d'attente $M/M/1$ avec rappels, collisions, erreurs de transmission et politique de rappels classiques	21
1.8.2.1	Description du modèle	21
1.8.2.2	Analyse de la distribution stationnaire	22
1.8.2.3	Caractéristiques du système	24
1.8.3	Le modèle d'attente $M/M/1$ avec rappels et erreurs de transmission	25
1.8.3.1	Description du modèle	25
1.8.3.2	Analyse de la distribution stationnaire	25
2	<i>Concepts de la stabilité forte</i>	28
2.1	Notions et concepts fondamentaux	29
2.1.1	Notations	29
2.2	Exemple illustratif d'application sur un modèle de files d'attente avec rappels	31
3	<i>Stabilité forte dans le modèle d'attente $M/M/1$ avec rappels, collisions et erreurs de transmission</i>	34
3.1	Modèle d'attente $M/M/1$ avec rappels constants, collisions et erreurs de transmission	35
3.2	Analyse de perturbation	37
3.3	Modèle d'attente $M/M/1$ avec rappels constants et erreurs de transmission	37
3.4	Stabilité forte et estimation de la norme ν de la matrice tabou	38
3.5	Estimation de la déviation de la matrice de transition	42
3.6	Application numérique	46
3.6.1	Algorithme de calcul de la borne de stabilité forte	46
3.6.2	Résultats numériques obtenus	47
3.6.3	Interprétation des résultats	48
	Conclusion générale	50
	Bibliographie	51

Table des figures

1.1	Représentation schématique d'une file d'attente classique	6
1.2	Système d'attente avec rappels	15
1.3	Diagramme de transition d'un système $M/M/1$ avec rappels	20
1.4	Diagramme de transition d'un système $M/M/1$ avec rappels, collisions, erreurs de transmission et politique de rappel classique.	22
1.5	Diagramme de transition d'un système $M/M/1$ avec rappels et erreurs de transmission	26
3.1	Diagramme de transition d'un système $M/M/1$ avec rappels, collisions, erreurs de transmission et politique de rappels constante.	35
3.2	Le comportement de la borne SSB et de DR par rapport à θ	48

Introduction générale

La théorie des files d'attente, est une technique de la Recherche Opérationnelle relevant du domaine des probabilités. Elle a été développée pour fournir des modèles mathématiques pour prédire le comportement des systèmes admettant un phénomène d'attente.

Cette théorie a commencé en 1909 avec les travaux de recherches de l'ingénieur danois Agner Krarup Erlang (1878,1929). Ce dernier étudiait le concept de la file d'attente des systèmes téléphoniques dans les centres d'appels de Copenhague. Depuis, plusieurs mathématiciens se sont intéressés aux files d'attente où ils ont développé différents modèles mathématiques [48] [49].

Cette théorie classique s'est très vite montrée inefficace face à des systèmes réels de plus en plus complexes. Dès la fin des années 1940, des chercheurs tels que Kosten [50] et Wilkinson (1956) [65] ont mis en évidence les limites de la théorie classique des files d'attente qui ne permettait pas d'expliquer le comportement stochastique des systèmes téléphoniques où les abonnés répétaient leurs appels en recomposant le numéro plusieurs fois jusqu'à l'obtention de la communication. Ce phénomène de répétition de demandes du service a poussé certains chercheurs à étendre le modèle d'attente classique à celui dit avec rappels. Les modèles d'attente avec rappels apparaissent dans la modélisation stochastique de plusieurs situations réelles (par exemple, les systèmes téléphoniques, les systèmes informatiques, les réseaux locaux, etc). La première contribution sérieuse sur ce sujet a été publiée en 1957 dans "Philips Telecommunication Review" par Cohen [32].

La théorie analytique actuelle de ces systèmes a une portée limitée en raison de la complexité des résultats connus. En effet, plusieurs formules analytiques (complexes) sont difficilement exploitables en pratique. C'est pour cela que, lors de l'étude des systèmes concrets, on est souvent amené à remplacer le système réel

généralement complexe, par un système plus simple et pour lequel il existe des résultats analytiques exploitables. Ce dernier système est supposé être, dans un certain sens "proche" du système réel. Le modèle ainsi utilisé représente une "idéalisée" du système réel, d'où l'apparition du problème de "stabilité".

L'étude de stabilité, dans la théorie de files d'attente permet de délimiter le domaine dans lequel le modèle idéal peut être utilisé comme une bonne approximation du système réel. Pour mieux définir le concept de stabilité, considérons un système de files d'attente comme une application $F : X \rightarrow Y$, où l'ensemble X représente les paramètres du système (entrées). Les paramètres du système peuvent être, la distribution du flux des arrivées, la loi du service, la structure du système, etc. L'ensemble Y est l'ensemble des caractéristiques du système. Ces dernières peuvent être : le nombre moyen de clients dans le système, le taux d'occupation du système, etc. La notion de stabilité en théorie de files d'attente est identique à celle de la continuité de l'application F [61].

On dit qu'un système d'attente est stable, si une petite perturbation dans ses paramètres entraîne une petite perturbation dans ses caractéristiques. Parmi les méthodes qui ont été développées sur la stabilité des modèles stochastiques citons : la méthode des fonctions test de Kalashnikov et Tsitsiashvili [43], la méthode métrique de Zolotarev et la méthode de stabilité forte, etc.

Dans ce mémoire, nous allons appliquer une de ces méthodes qui est la méthode de "stabilité forte". Cette méthode connue également sous le nom de "la méthode des opérateurs de la théorie de stabilité", a été élaborée au début des années 1980 par Aïssani et Kartashov [9]. L'idée de cette méthode est que l'ergodicité uniforme par rapport à une norme donnée est préservée sous de petites perturbations du noyau de transition. De plus, sur la base de cette méthode, il est possible d'obtenir des inégalités de stabilité avec un calcul exact des constantes. Les résultats fondamentaux de cette méthode ont fait l'objet de la publication en 1996 d'une monographie de Kartashov [46]. Il a été prouvé l'applicabilité et l'efficacité de cette méthode dans divers systèmes stochastiques : modèles d'attente classiques (Aïssani et Kartashov [10], Aïssani [6], Bouallouche-Medjkoune et Aïssani [25, 26], Benaouicha et Aïssani [19]), modèles d'attente avec rappels (Berdjoudj et Aïssani [23]), modèles d'attente avec priorités (Bouallouche-Medjkoune et Aïssani [27], Hamadouche et Aïssani [38]), modèles d'attente avec arrivées par groupes (Boukir et al. [28]), réseaux de files d'attente (Lekadir et Aïssani [54]), modèles stochas-

tiques de gestion des stocks (Rabta et Aïssani [60]), modèles de risques (Benouaret et Aïssani [21, 20]), estimation de la vitesse de convergence et de la stabilité pour le cas apériodique (Mouhoubi et Aïssani [58]), application de la méthode de stabilité forte à l'étude de systèmes de files d'attente classiques lorsqu'une loi est générale et inconnue (Bareche et Aïssani [17, 18]), approximation dans les systèmes de files d'attente à serveur non fiable (Abbas et Aïssani [1]), ces derniers ont montré aussi [2] les conditions suffisantes de la stabilité forte de la chaîne de Markov induite dans le système de files d'attente GI/M/1 avec clients négatifs, où ils ont étudié l'approximation du modèle proposé par rapport au modèle GI/M/1 classique. De même, Issaadi et al. [41] ont récemment obtenu des bornes pour l'analyse de perturbations du système d'attente GI/M/s, ainsi l'application de la méthode de stabilité forte au problème de troncature [40], etc.

L'objectif de notre travail est d'appliquer la méthode de stabilité forte au modèle d'attente M/M/1 avec rappels, collisions et erreurs de transmission en négligeant les collisions et cela en tendant la probabilité de collision vers 1. Plus particulièrement, on opte pour l'évaluation numérique de la borne de perturbation obtenue par la méthode de stabilité forte. Nous nous intéresserons à l'estimation de l'erreur par la méthode de stabilité forte pour un modèle sans collisions. Nous allons mettre en évidence les conditions pour lesquelles il sera possible d'approcher les caractéristiques du modèle réel par celles correspondantes au modèle idéal (sans collisions). Ce mémoire comprend trois chapitres avec une introduction générale, une conclusion générale et une bibliographie.

Le premier chapitre comprend une synthèse sur les systèmes de files d'attente classique et ceux avec rappels, à savoir le modèle d'attente M/M/1 avec rappels, collisions et erreurs de transmission. Puis nous allons citer quelques cas réels modélisés par cette classe des files d'attente.

Le second chapitre traite la stabilité forte des chaînes de Markov notamment les chaînes fortement ν -stable. En outre, nous allons identifier le principe de cette méthode, et pour mieux comprendre le concept un exemple illustratif sera présenté à la fin de ce chapitre.

Enfin nous allons nous servir d'une approche algorithmique afin d'évaluer numériquement l'estimation de l'erreur induite par la négligence des collisions.

1

Les systèmes de files d'attente avec rappels

Introduction

Dans la théorie des files d'attente classique, il est supposé qu'un client qui ne peut pas obtenir son service immédiatement dès son arrivée, rejoint la file d'attente ou quitte le système définitivement. Les systèmes de files d'attente développés tentent de prendre en considération des phénomènes de répétition de demandes de service, et ceci après une durée du temps aléatoire. Un tel système est connu comme système de files d'attente avec rappels.

L'étude d'un système de files d'attente se fait avec ses éléments principaux : le processus d'arrivées, le mécanisme de service et la discipline d'attente. Pour un système avec rappels, on doit ajouter un élément décrivant la loi des répétitions d'appels.

Dans ce chapitre, nous commençons par une description du modèle général de files d'attente classique et donner une idée générale sur les processus stochastiques.

Nous nous intéressons par la suite aux files d'attente avec rappels et à quelques problèmes qui peuvent être modélisés par ce type de modèles.

1.1 Files d'attente classiques

1.1.1 Description du modèle d'attente classique

Une file d'attente peut se décrire comme un système où l'ensemble d'individus, qu'on appelle clients, arrivent suivant un processus quelconque (le plus souvent aléatoire) pour acquérir un service auprès d'un autre individu dit serveur. La constitution de la file d'attente commence à se manifester dès que le taux des arrivées excède le taux de service (par taux, on entend le nombre moyen de clients arrivants ou servis par unité de temps). Un système de files d'attente comprend donc un espace de service avec un ou plusieurs dispositifs de service (serveurs), et un espace d'attente dans lequel se forme une éventuelle file d'attente.

Classification des files d'attente

Pour décrire une file d'attente, on doit préciser les éléments suivants :

- La nature du processus des arrivées qui est définie par la distribution des intervalles séparant deux arrivées consécutives.
- La distribution du temps de service.
- Le nombre s des stations de service montées en parallèle ou en série.
- La capacité N du système. Si $N < \infty$, la file ne peut dépasser une longueur de $N - s$ unités. Dans ce cas, certains clients qui arrivent vers le système n'ont pas la possibilité d'y entrer.

La théorie de files d'attente classique offre deux possibilités pour résoudre le conflit qui apparaît lorsqu'un client arrive dans le système à serveur unique et trouve le serveur occupé :

- Soit le client quitte le système sans recevoir le service.
- Soit il prend place dans une file d'attente si elle existe.

Une représentation graphique d'une file d'attente classique est donnée par la Figure (1.1) :

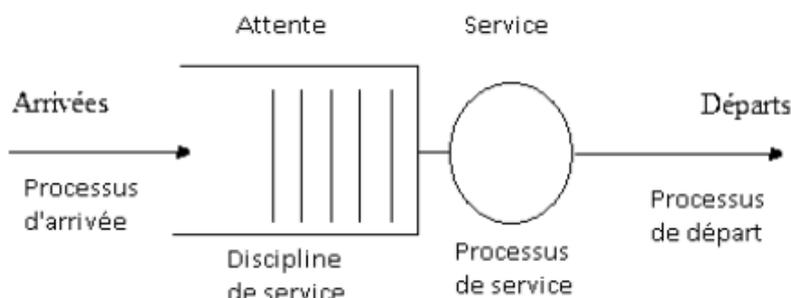


FIGURE 1.1 – Représentation schématique d'une file d'attente classique

Une possibilité alternative est de permettre à un client de répéter sa demande de service après une durée de temps aléatoire. Entre deux tentatives successives (rappels), le client en question est en orbite. Un tel système est appelé système de file d'attente avec rappels. L'étude de cette catégorie de modèles est motivée par l'avènement de nouvelles technologies, notamment dans les systèmes de télécommunication.

1.2 Analyse mathématique d'un système de files d'attente

L'étude mathématique d'un système de files d'attente se fait généralement par l'introduction d'un processus stochastique, défini de façon appropriée. On s'intéresse principalement au nombre de clients $X(t)$ se trouvant dans le système à l'instant t ($t \geq 0$). En fonction des quantités qui définissent le système, on cherche à déterminer :

- Les probabilités d'état $P_n(t) = P(X(t) = n)$, qui définissent le régime transitoire du processus stochastique $\{X(t), t \geq 0\}$. Il est évident que les fonctions $P_n(t)$ dépendent de l'état initial ou de la distribution initiale du processus.
- Le régime stationnaire du processus stochastique est défini par :

$$\pi_n = \lim_{t \rightarrow \infty} P_n(t) = P(X(\infty) = n) = P(X = n), n = 0, 1, 2, \dots$$

$\{\pi_n\}_{n \geq 0}$ est appelée distribution stationnaire du processus $X(t), t \geq 0$. Le calcul explicite du régime transitoire s'avère généralement pénible, voire impossible, pour la plupart des modèles donnés. On se contente donc de déterminer le régime stationnaire [24].

1.2.1 Notation de Kendall

Pour la classification des systèmes de files d'attente, on a recours à une notation symbolique introduite par Kendall [47] comprenant six symboles rangés dans l'ordre. Pour spécifier le type de file d'attente qu'on étudie, on utilise habituellement la notation de Kendall [47] [53], définie comme suit :

$$A/B/s/N/K/D_s$$

où,

A : distribution des temps des inter-arrivées ;

B : distribution des durées de service ;

s : nombre de serveurs en parallèle ;

N : capacité du système, incluant l'espace d'attente et le nombre de serveurs ;

K : taille de la population source ;

D_s : discipline de service.

La liste qui suit résume les lois de probabilité les plus couramment rencontrées dans la modélisation des systèmes de files d'attente ainsi que les symboles associés (les différentes spécification de A et B).

M : distribution vérifiant la propriété de Markov, c'est à dire processus de Poisson pour les arrivées et loi exponentielle pour le temps de service ;

E_k : distribution d'Erlang d'ordre k ;

D : déterministe ;

H_k : distribution hyper-exponentielle d'ordre k ;

G : distribution générale ;

GI : distribution générale indépendante.

Les principales disciplines de service sont les suivantes :

- FCFS (First Come First Served) : premier arrivé premier servi ;
- FIFO (First In First Out) : premier arrivé premier sorti ;
- LIFO (Last In First Out) : dernier arrivé premier servi ;
- SIRO (Service In Round Order) : service dans un ordre aléatoire ;
- PS (Processor Sharing) : processeur partagé.

Remarque 1.1

- Lorsque les trois derniers symboles dans la notation de Kendall ne sont pas précisés, cela veut dire que $N = +\infty$, $K = +\infty$ et $D_s = FIFO$.
- Lorsqu'il existe un seul serveur, il n'y a pas de différence entre la discipline FIFO et FCFS. Lorsqu'il existe plusieurs serveurs on parle généralement de la discipline FCFS au lieu de FIFO, puisqu'un client qui passe au service ne peut pas garantir qu'il le quitte avant qu'un autre client, passé après lui à un autre serveur, le quitte.

1.3 Chaînes de Markov

Les chaînes de Markov occupent une place très importante dans l'analyse des processus stochastiques, vu la propriété d'absence de mémoire que possède ce type de processus, facilitant ainsi leur étude. Deux types de chaînes sont à considérer :

- Chaînes à temps discret où les transitions ne peuvent se produire qu'à des instants précis.
- Chaînes à temps continu où les transitions peuvent se produire à tout instant. Cependant, du fait de la propriété sans mémoire requise, le temps de séjour dans un état est distribué exponentiellement.

1.3.1 Chaînes de Markov à temps discret

Définition 1.3.1.1 [57]

Un processus stochastique $\{X_n, n \geq 0\}$ à temps discret et à espace d'états E discret est une chaîne de Markov, si pour tout $n \geq 0$ et pour toutes séquences $i_0, i_1, \dots, i_{n+1} \in E$.

$$P(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n), \quad (1.1)$$

tel que X_n représente l'état du processus à l'instant n . Pour une chaîne de Markov, la prédiction du futur à partir du présent n'est pas rendue plus précise par des éléments d'information supplémentaires concernant le passé, car toute l'information utile pour la prédiction du futur est contenue dans l'état présent du processus. L'équation (1.1) s'appelle propriété de Markov. N'importe quel processus stochastique satisfaisant la propriété de Markov sera considéré comme une chaîne de Markov.

Nous appelons la probabilité conditionnelle suivante, notée par $p_{ij}(n)$,

$$P(X_n = j | X_{n-1} = i), i, j \in E, \quad (1.2)$$

la probabilité de transition de l'état i à l'état j .

Définition 1.3.1.2 [59]

Une chaîne de Markov est dite homogène, si $p_{ij}(n)$ ne dépend pas de n . En d'autres termes,

$$P(X_n = j | X_{n-1} = i) = P(X_{n+m} = j | X_{n+m-1} = i), \quad (1.3)$$

pour $m \in E$ et $m \geq -(n-1)$.

Dans ce qui suit, nous supposons que les chaînes de Markov sont homogènes et nous dénotons la probabilité de transition de l'état i à l'état j par p_{ij} .

Étant donné les probabilités de transition, nous pouvons construire la matrice de transition P associée à la chaîne de Markov, où la composante (i, j) de P est p_{ij} . Les matrices de transition (matrices stochastiques) satisfont les deux conditions suivantes :

1) leurs éléments sont non négatifs :

$$p_{ij} \geq 0, \quad \forall i, j \in E; \quad (1.4)$$

2) la somme des éléments de chaque ligne est égale à 1 :

$$\sum_{j \in E} p_{ij} = 1, \quad \forall i \in E. \quad (1.5)$$

Connaissant l'état initial $\pi_i^{(0)} = P\{X_0 = i\}$, $i \in E$, du processus, nous pouvons trouver la probabilité que la chaîne de Markov sera dans un certain état j à un instant donné n . La probabilité de transition en n -étapes, notée $p_{ij}^{(n)}$, est définie comme suit :

$$p_{ij}^{(n)} = P(X_n = j | X_0 = i) = P(X_{n+m} = j | X_m = i). \quad (1.6)$$

Définition 1.3.1.3

Deux états i et j d'une chaîne de Markov communiquent, s'ils existent $m \geq 0$ et $n \geq 0$ tels que $p_{ij}^{(m)} > 0$ et $p_{ji}^{(n)} > 0$. En d'autres termes, i communique avec j (on écrit $i \leftrightarrow j$), si on peut atteindre l'état j à partir de l'état i , et vice versa.

Noter que la relation \leftrightarrow entre i et j est une relation d'équivalence. Nous pouvons utiliser ceci pour séparer la chaîne de Markov dans ce qui s'appelle les classes de communication. Ces dernières sont des ensembles disjoints de l'espace des états, et chaque état dans une classe de communication donnée communique avec chaque autre état dans la même classe.

Définition 1.3.1.4

Une chaîne de Markov est irréductible, si et seulement si, pour tout état i et j , il existe $m \geq 0$ tel que

$$p_{ij}^{(m)} > 0. \quad (1.7)$$

Autrement dit, une chaîne de Markov est irréductible si elle ne comporte qu'une seule classe communicante. Dans le cas contraire la chaîne est dite réductible.

- Une classe est dite transitoire s'il est possible d'en sortir mais dans ce cas, le processus ne pourra plus jamais y revenir.
- Une classe est dite récurrente (ou persistante) s'il est impossible de la quitter.
- Les classes qui ne sont pas transitoires sont les classes récurrentes (ou persistantes) avec des états récurrents.

- Si une classe récurrente est composée d'un seul état, cet état est dit absorbant.

Définition 1.3.1.5

La période $d = d(i)$ d'un état i est définie comme étant le PGCD (Plus Grand Diviseur Commun) de l'ensemble : $J_i = \{n \geq 0 : p_{ii}^{(n)} > 0\}$.

Lorsque $d = 1$ (resp. $d > 1$) pour un état i , alors cet état est apériodique (resp. périodique). Si deux états communiquent, ils ont la même période. On peut donc parler de la période d'une classe d'états. Si la période vaut 1, la classe est dite apériodique.

Théorème 1.1 [30]

Soit une chaîne de Markov de matrice de transition P . Deux états qui communiquent sont, soit tous deux récurrents, soit tous deux transitoires. En particulier, si P est irréductible, les états sont soit tous récurrents, soit tous transitoires. La chaîne (ou sa matrice de transition) est alors dite, respectivement, récurrente, transiente.

Théorème 1.2 [30]

Soit une chaîne de Markov de matrice de transition P irréductible, récurrente positive et apériodique. Alors, pour tout $j \in E$, et toute distribution initiale unique ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = j) = \pi(j),$$

où π est la distribution stationnaire de la chaîne.

1.3.2 Chaînes de Markov à temps continu

Définition 1.3.2.1 [57]

Un processus stochastique $\{X(t), t \geq 0\}$ à temps continu et à espace d'état E discret est une chaîne de Markov, si pour tout τ et t et pour tout état i, j et $x(t), 0 \leq t < \tau$ dans E .

$$P(X(t + \tau) = j | X(\tau) = i, X(t) = x(t), 0 \leq t < \tau) = P(X(t + \tau) = j | X(\tau) = i). \quad (1.8)$$

1.4 Types de modèles d'attente

1.4.1 Modèles markoviens

Les modèles markoviens caractérisent les systèmes dans lesquels les deux quantités stochastiques principales, qui sont le temps inter-arrivées et la durée de service, sont des variables aléatoires indépendantes et exponentiellement distribuées. La propriété d'absence de mémoire de la loi exponentielle facilite l'étude de ces modèles. L'étude mathématique de tels systèmes se fait par l'introduction d'un processus stochastique approprié. Ce processus est souvent le processus $\{X(t), t \geq 0\}$ défini comme étant le nombre de clients dans le système à l'instant t . L'évolution temporelle du processus markovien $\{X(t), t \geq 0\}$ est complètement définie grâce à la propriété d'absence de mémoire [12].

1.4.2 Modèles non markoviens

En l'absence de l'exponentialité ou lorsque l'on s'écarte de l'hypothèse d'exponentialité de l'une des deux quantités stochastiques suivantes : le temps des inter-arrivées et la durée de service, ou en prenant en compte certaines spécificités des problèmes par introduction de paramètres supplémentaires, on aboutit à un modèle non markovien. Vu l'étude de tel modèles est délicat voire impossible, on essaye alors de se ramener à un processus de Markov [5, 8, 13]. Les méthodes les plus utilisées sont :

- Méthode de la chaîne de Markov induite : Cette méthode, élaborée par Kendall [47], est souvent utilisée. Elle consiste à choisir une séquence d'instantants $1, 2, 3, \dots, n$ (déterministes ou aléatoires) telle que la chaîne induite $\{X_n, n \geq 0\}$, où $X_n = X(n)$, soit markovienne et homogène.
- Méthode des variables auxiliaires : Elle consiste à compléter l'information sur le processus $\{X(t), t \geq 0\}$ de telle manière à lui donner le caractère markovien. Ainsi, on se ramène à l'étude du processus $\{X(t), A(t_1), A(t_2), \dots, A(t_n)\}$. Les variables $A(t_k)$, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ sont dites auxiliaires.
- Méthode des événements fictifs : Le principe de cette méthode est d'introduire des événements fictifs qui permettent de donner une interprétation probabiliste aux transformées de Laplace et aux variables aléatoires décrivant le système étudié.

D'autres méthodes d'analyse de systèmes non markoviens existent, telle que l'approche par les martingales et les méthodes d'approximation.

1.5 Caractéristiques d'un système de files d'attente

On note λ le taux d'entrée des clients. Cela signifie que l'espérance de la durée séparant deux arrivées successives est :

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}.$$

On note μ le taux de service des clients. Cela signifie que l'espérance de la durée de service est :

$$E(Y) = \frac{1}{\mu}.$$

où X est variable aléatoire de la loi des inter-arrivées et Y la variable aléatoire de la loi de service.

La distribution stationnaire du processus stochastique introduit permet d'obtenir les caractéristiques d'exploitation du système, telles que : le temps d'attente d'un client (le temps qu'un client passe dans la file d'attente), le temps de séjour d'un client dans le système (composé du temps d'attente et de la durée de service), le temps de réponse d'un système, le taux d'occupation des dispositifs de service, la durée de la période d'activité (l'intervalle de temps pendant lequel il y a toujours au moins un client dans le système), et les mesures de performance suivantes :

- L_s : nombre moyen de clients dans le système de files d'attente,
- L_q : nombre moyen de clients dans la file,
- W_s : temps moyen de séjour d'un client dans le système,
- W_q : temps moyen d'attente d'un client dans la file.

La relation entre le nombre moyen de clients dans le système et le temps moyen de séjour d'un client dans le système est donnée par la formule suivante :

$$L_s = \lambda_e W_s, \quad (1.9)$$

λ_e est le taux d'entrée dans le système.

Et la relation entre le nombre moyen de clients dans la file et le temps moyen d'attente d'un client dans la file est donnée par la formule suivante :

$$L_q = \lambda_e W_q, \quad (1.10)$$

ces deux dernières formules sont appelées "formules de Little" [56].

Remarque 1.2

Dans le cas d'un système d'attente à capacité illimitée

$$\lambda_e = \lambda,$$

Dans le cas d'un système d'attente à capacité limitée

$$\lambda_e < \lambda.$$

1.6 Systèmes d'attente avec rappels

Plusieurs situations d'attente ont la caractéristique que les clients doivent rappeler, pour une certaine raison, pour être servis. Quand le service d'un client est insatisfait, il doit rappeler jusqu'à l'accomplissement de son service. Ces modèles d'attente apparaissent dans la modélisation stochastique de plusieurs situations réelles. Par exemple, dans la transmission de données, un paquet transmis de la source à la destination peut être perdu et le processus doit se répéter jusqu'à ce que le paquet soit finalement transmis.

1.6.1 Description d'un système de files d'attente avec rappels

Un système de files d'attente avec rappels est un système composé de s ($s \geq 1$) serveurs identiques et indépendants, d'un buffer de capacité $N - s$ ($N \geq s$) et d'une orbite de capacité O . À l'arrivée d'un client, s'il y a un ou plusieurs serveurs libres, le client sera servi immédiatement et quittera le système à la fin de son service. Sinon, s'il y a des positions d'attente libres dans le buffer, le client les rejoindra. Par ailleurs, si un client arrive et trouve tous les serveurs et toutes les positions d'attente du buffer occupés, il quittera le système définitivement avec la probabilité $1 - H_0$, ou bien entre en orbite avec la probabilité H_0 et devient une source d'appels répétés

et tentera sa chance après une durée de temps aléatoire [39].

Les clients qui rappelleront leurs service sont dits en "orbite". Cette dernière peut être finie ou infinie. Dans le cas d'une orbite à capacité finie, si elle est pleine, un client qui trouve tous les serveurs et les positions d'attente du buffer occupés, sera obligé de quitter le système définitivement sans être servi.

Chaque client dans l'orbite appelé aussi client secondaire, est supposé rappeler pour le service à des intervalles de temps suivant une loi de probabilité et une intensité de rappels bien définie. Chacun de ces clients secondaires est traité comme un client primaire c'est-à-dire un nouveau client qui arrive de l'extérieur du système, s'il trouve un serveur libre, il sera servi immédiatement puis quittera le système, sinon, s'il y a des positions d'attente disponibles dans le buffer, il les rejoindra. Par contre, si tous les serveurs et les positions d'attente sont encore occupés, le client quittera le système avec une probabilité $1 - H_k$ (si c'est le kème appels sans succès) ou bien entre en orbite avec la probabilité H_k si l'orbite n'est pas pleine [39].

Le schéma général d'un système de files d'attente avec rappels est donné par la Figure (1.2) :

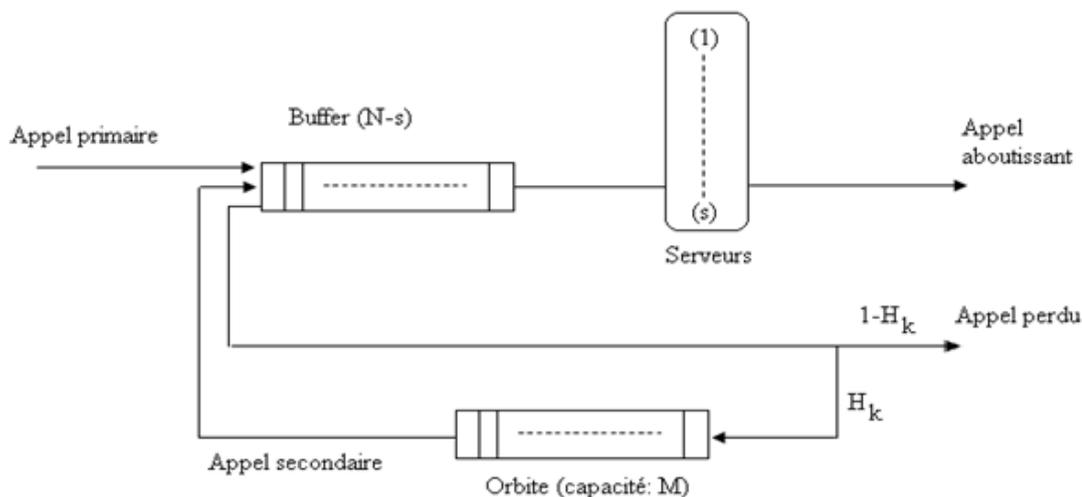


FIGURE 1.2 – Système d'attente avec rappels

Remarque 1.3

1. Le modèle de files d'attente avec rappels décrit ci-dessus est un modèle général. Plusieurs systèmes de files d'attente avec rappels, peuvent être considérés comme des cas particuliers tels que : les systèmes sans buffer, les systèmes à un seul serveur, etc.
2. Les appels primaires ou secondaires qui arrivent durant un temps de service, entrent en orbite sans aucune influence sur le processus de service.

La notation de Kendall est : $A/B/s/N/O/H$, où A et B décrivent respectivement la distribution du temps inter-arrivées et la distribution du temps de service, s est le nombre de serveurs identiques et indépendants, $N - s$ est la capacité de la file d'attente, O est la capacité de l'orbite, H est la fonction de persistance $H = \{H_k, k \geq 0\}$. Si N, O, H sont absents dans la notation de Kendall, alors $N = s, O = \infty, H_k = 1$ pour tout $k \geq 0$. La distribution du temps inter-rappels n'est pas indiquée [67].

1.6.2 Condition de stabilité d'un système de files d'attente avec rappels

Dans une file d'attente avec rappels tel que le flot des arrivées des clients suit un processus de Poisson du taux λ , et la durée de service est de moyenne $1/\mu$, si la file est composé d'un seul serveur, la stabilité de système est donnée par :

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1.$$

Si la file est composée de s serveurs, la stabilité de système est donnée par :

$$\rho = \frac{\lambda}{s\mu} < 1.$$

1.6.3 Politiques d'accès aux serveurs à partir de l'orbite

Pour les files d'attente avec rappels, il est nécessaire de définir le mécanisme (la politique) de rappels. Le choix de cette politique dépend du système à modéliser.

Parmi ces politiques :

- La politique de rappels classiques : c'est le protocole le plus décrit dans la théorie des files d'attente avec rappels dans laquelle chaque source dans l'orbite rappelle après un temps exponentiellement distribué avec un paramètre η . Donc, il y a une probabilité $j\eta dt + o(dt)$ d'un nouveau rappel dans le prochain intervalle $(t, t + dt)$ sachant que j clients sont en orbite à l'instant t .

Une telle politique a été motivée par des applications dans la modélisation du comportement des abonnés dans les réseaux téléphoniques.

- La politique de rappels constante : cette politique est connue pour la modélisation du protocole ALOHA dans les réseaux de communication, dans ce mécanisme le temps inter-rappels est contrôlé par un dispositif électronique et par conséquent, il est indépendant du nombre de clients demandant le service. Dans ce cas, la probabilité d'un rappel durant $(t, t + dt)$, sachant que l'orbite est non vide, est $\eta dt + o(dt)$. Le premier travail dans cette direction est celui de Fayolle [37] qui a considéré un modèle d'attente $M/M/1$, où uniquement le client en tête de la file en orbite peut demander un service après un temps de rappels exponentiellement distribué avec un taux constant.

Un certain nombre de travaux (voir Choi et al. (1992)[31], Dudin et al. (2004) [35], Li et Zhao (2005) [55] et Shikata (1999) [62]) ont décrit des applications aux réseaux locaux, protocole de communication, etc.

- Artalejo et Gómez-Corral (1997)[15] ont proposé une autre politique de rappels, nommée linéaires. Cette politique combine les deux dernières politiques citées (c'est-à-dire, la politique de rappels classique et constante). Dans ce mécanisme, la probabilité d'un rappel durant $(t, t + dt)$ sachant que j clients sont en orbite à l'instant t est $(\eta(1 - \delta_{0j}) + j\nu)dt + o(dt)$, δ_{0j} est le symbole kronecker. Il existe dans la littérature une autre politique de rappels nommée politique de rappels quadratiques [16, 24].

1.7 Cas réels modélisés par des systèmes d'attente avec rappels

Il est bien connu que les files d'attente avec rappels apparaissent dans la modélisation stochastique de plusieurs situations réelles tel que les réseaux de communication, par exemple, en faisant des réservations, des réseaux de commutation de paquets, des accès CSMA non persistants et des systèmes en temps réel [66]. Dans ce qui suit, nous présentons quelques exemples de systèmes qui peuvent être modélisés par des files d'attente avec rappels.

1.7.1 Problème de réservation

C'est l'exemple le plus simple d'un client qui sollicite une réservation par téléphone dans un restaurant. Il y a une ligne unique qui est consacrée à répondre aux requêtes des réservations. Ainsi, si un client appelle et trouve la ligne occupée, il renouvellera sa tentative après une certaine période de temps aléatoire avec la probabilité H_k qui, en pratique, est strictement inférieure à 1 car le client ne peut rappeler indéfiniment. Cet exemple peut être modélisé par une file d'attente M/G/1 avec rappels et avec perte en considérant que le processus d'arrivée des appels est poissonnien. L'étude de ce genre de problèmes permet de prédire le temps d'attente du client, le nombre de clients perdus dû à ce blocage, etc.

1.7.2 Système informatique à temps réel

Dans un système informatique à temps réel, on trouve M terminaux et S canaux de transmission tels que $M > S$. Pour qu'un terminal soit connecté à l'ordinateur, il suffit d'un canal de transmission libre. L'illustration de ce genre de système est le centre de calcul où arrive un étudiant pour utiliser l'ordinateur pendant une période de temps aléatoire. Celui-ci doit d'abord trouver un terminal libre pour se connecter. S'il n'y a aucun terminal disponible, il retentera sa chance après un temps aléatoire. Sinon, il envoie sa demande au commutateur central pour se connecter à l'ordinateur. Le terminal est alors connecté selon que le canal serait disponible ou pas. Dans ce dernier cas, la demande est mise dans la file par le commutateur en attente de libération d'un canal. Ce système peut être modélisé par une file G/G/S avec rappels, avec un tampon (espace d'attente) de capacité M et une orbite de taille infinie, où les canaux de transmission correspondent aux serveurs et les terminaux aux tampons.

1.7.3 Méthode d'accès au médium dans les réseaux sans fil

Dans le mode de transmission Distributed Coordination Function (DCF), les stations du réseau souhaitant transmettre vont d'abord assurer que le médium est libre pendant un certain temps IFS (Inter Frame Space). cette partie de la procédure est appelée CS (Carrier sense). Si le médium est libre, la station accède au médium, sinon la station diffère sa transmission jusqu'à ce que le médium devient libre (rappel ultérieurement). Dès que le médium est libre, la station souhaitant transmettre doit attendre un temps aléatoire avant de retransmettre. À la réception correcte d'une

trame qui lui est désignée, la station doit envoyer un acquittement (ACK). Si aucun acquittement n'est reçu par la station émettrice, cette dernière déduit qu'une collision ou une erreur a eu lieu nécessitant ainsi une retransmission. Ce cas pratique est modélisé par un modèle d'attente avec rappels, collisions et erreurs de transmission, où les clients représentent les paquets des stations et le serveur est le canal [51].

1.8 Quelques modèles d'attente avec rappels

Les systèmes d'attente avec rappels apparaissent dans différents domaines d'applications. L'intérêt croissant porté à ce domaine est essentiellement expliqué par l'avènement de nouvelles technologies.

Dans cette section, nous présentons quelques modèles d'attente avec rappels.

1.8.1 Le modèle d'attente M/M/1 avec rappels

1.8.1.1 Description du modèle

Soit un système de files d'attente sans positions d'attente. Le service est assuré par un seul serveur. Les clients primaires arrivent selon un processus de Poisson de taux $\lambda > 0$. Les durées de service suivent une loi exponentielle de fonction de répartition $B(x) = 1 - e^{-\mu x}$, $x \geq 0$ et de moyenne finie $\frac{1}{\mu}$. Les temps entre deux rappels consécutifs sont également exponentiels de paramètre $\eta > 0$. Les durées de service, les durées entre deux rappels consécutifs ainsi que entre deux arrivées primaires successives sont considérées mutuellement indépendantes[36, 67].

L'état du système est décrit par le processus

$$\{C(t), X(t), t \geq 0\}, \quad (1.11)$$

où $C(t)$ est égale à 0 ou 1 selon le fait que le serveur est libre ou non, $X(t)$ est le nombre de clients en orbite à l'instant t . Le régime stationnaire est supposé exister ($\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$)

Le processus (1.11) est celui de Markov d'espace d'états $S = \{0, 1\} \times N$.

1.8.1.2 Analyse de la distribution stationnaire

Soit $P_{ij} = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{C(t) = i, X(t) = j\}$, $i = 0, 1$ et $j \geq 0$ les distributions stationnaires conjointes de l'état du serveur et du nombre de clients en orbite.

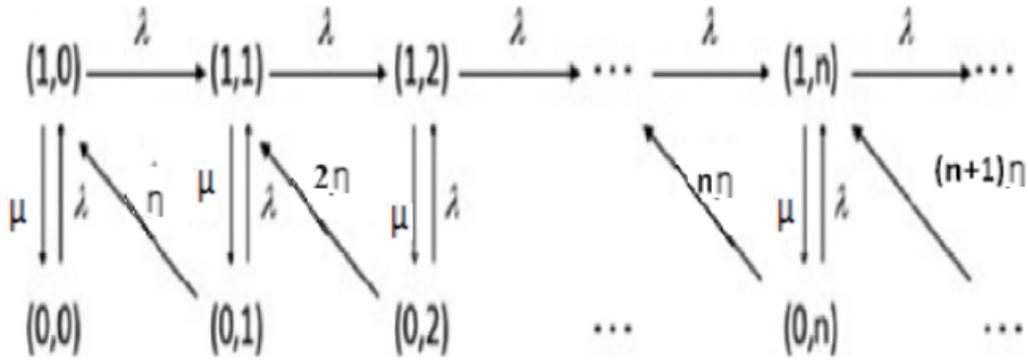


FIGURE 1.3 – Diagramme de transition d'un système M/M/1 avec rappels

Les équations d'équilibre stationnaire de ce système d'attente sont :

$$(\lambda + j\eta)P_{0j} = \mu P_{1j}, \quad (1.12)$$

$$(\lambda + \mu)P_{1j} = \lambda P_{0j} + (j + 1)\eta P_{0,j+1} + \lambda P_{1,j-1}. \quad (1.13)$$

Soient les fonctions génératrices partielles suivantes :

$$P_0(z) = \sum_{j=0}^{\infty} P_{0j}z^j; \quad (1.14)$$

$$P_1(z) = \sum_{j=0}^{\infty} P_{1j}z^j. \quad (1.15)$$

À l'aide de ces fonctions génératrices et à partir des équations (1.12) et (1.13), on obtient :

$$P_0(z) = (1 - \rho) \left(\frac{1 - \rho}{1 - z\rho} \right)^{\frac{\lambda}{\eta}}; \quad (1.16)$$

$$P_1(z) = \rho \left(\frac{1 - \rho}{1 - z\rho} \right)^{\frac{\lambda}{\eta+1}}. \quad (1.17)$$

La distribution stationnaire du nombre de clients en orbite $q_n = P\{X(t) = n\}$ a la fonction génératrice suivante :

$$P(z) = P_0(z) + P_1(z) = (1 + \rho - \rho z) \left(\frac{1 - \rho}{1 - \rho z} \right)^{\frac{\lambda}{\eta+1}}. \quad (1.18)$$

La fonction génératrice de la distribution du nombre de clients dans le système est comme suit :

$$Q(z) = P_0(z) + zP_1 = \left(\frac{1 - \rho}{1 - \rho z} \right)^{\frac{\lambda}{\eta+1}}. \quad (1.19)$$

La probabilité de blocage P_1 , c'est-à-dire, la probabilité que le serveur est occupé, est donnée par

$$P_1 = P_1(1) = \rho. \quad (1.20)$$

La probabilité P_{00} (probabilité que le serveur est libre et zéro clients en orbite) est donnée dans l'équation (1.21).

$$P_{00} = (1 - \rho)^{\frac{\lambda}{\eta}} + \rho(1 - \rho)^{\frac{\lambda}{\eta+1}}. \quad (1.21)$$

1.8.2 Le modèle d'attente M/M/1 avec rappels, collisions, erreurs de transmission et politique de rappels classiques

1.8.2.1 Description du modèle

Soit un système d'attente $M/M/1$ avec rappels, collisions et erreurs de transmission. Les clients primaires arrivent de l'extérieur du système selon un processus de Poisson de taux λ . À l'arrivée du client primaire, si le serveur est libre, ce client accède au serveur avec une probabilité p ou rejoint l'orbite avec une probabilité $(1 - p)$. Les intervalles de temps inter-rappels suivent une distribution exponentielle de taux $j\eta$ (j correspond à la taille de l'orbite). Cette politique de rappels, appelée politique de rappels classique, dépend du nombre de clients dans l'orbite. Le client qui entre en service (le client primaire ou le client provenant de l'orbite) est servi avec succès (sans erreur de transmission) et quitte le système avec probabilité γ ($0 < \gamma \leq 1$) ou rejoint l'orbite due à une erreur de transmission avec une probabilité $(1 - \gamma)$. Si le serveur est occupé, le client primaire entre en collision avec le client en service, entraînant le déplacement de ces deux clients vers l'orbite avec la probabilité $(1 - \theta)$ ou rejoint immédiatement l'orbite avec la probabilité θ .

Les temps de service des clients sont supposés indépendants, suivent une distribution exponentielle de moyenne $1/\mu$ et les processus stochastiques impliqués dans le système sont mutuellement indépendants [51, 52].

L'état du système à l'instant t peut être représenté par la paire $(C(t), X(t))$,

où

$$C(t) = \begin{cases} 0, & \text{si le serveur est libre à l'instant } t; \\ 1, & \text{si le serveur est occupé à l'instant } t; \end{cases}$$

$X(t)$ indique le nombre de clients en orbite à l'instant t .

Le processus $\{C(t), X(t); t \geq 0\}$ est une chaîne de Markov à temps continu, irréductible, apériodique et homogène dans le temps avec l'espace d'état

$$S = \{(0, j), (1, j) / j = 0, 1, \dots\}.$$

1.8.2.2 Analyse de la distribution stationnaire

Soit $P_j = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{C(t) = 0, X(t) = j\}$ et $Q_j = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{C(t) = 1, X(t) = j\}$, $j \geq 0$. Elles représentent les distributions conjointes de l'état du serveur et de la longueur de l'orbite à l'état stationnaire.

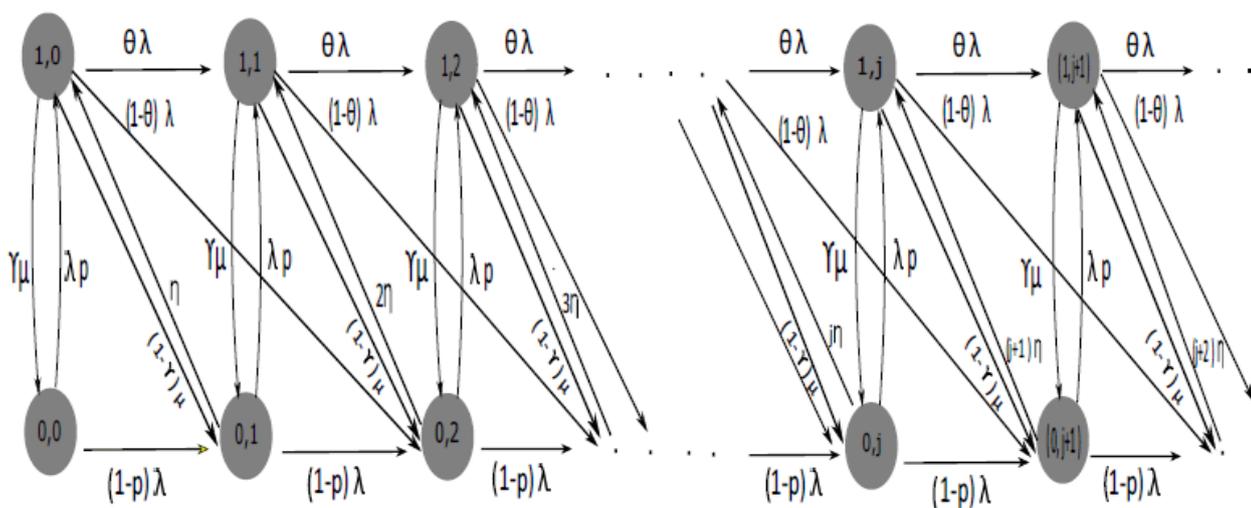


FIGURE 1.4 – Diagramme de transition d'un système $M/M/1$ avec rappels, collisions, erreurs de transmission et politique de rappel classique.

En utilisant les équations de balances du système markovien illustré dans la Figure (1.4), on obtient

$$\lambda P_0 = \gamma \mu Q_0, \quad (1.22)$$

$$(\lambda + \eta) P_1 = \lambda(1 - p) P_0 + (1 - \gamma) \mu Q_0 + \gamma \mu Q_1, \quad (1.23)$$

$$(\lambda + j\eta) P_j = (1 - p) \lambda P_{j-1} + (1 - \theta) \lambda Q_{j-2} + (1 - \gamma) \mu Q_{j-1} + \gamma \mu Q_j, \quad j = 2, 3, \dots, (1.24)$$

$$(\lambda + \mu) Q_0 = \lambda p P_0 + \eta P_1, \quad (1.25)$$

$$(\lambda + \mu) Q_j = \lambda p P_j + (j + 1) \eta P_{j+1} + \lambda \theta Q_{j-1}, \quad j = 1, 2, 3, \dots (1.26)$$

La condition nécessaire et suffisante d'existence d'un régime stationnaire pour le système $M/M/1$ avec rappels, collisions, erreurs de transmission et politique de rappels classiques est [51] :

$$\rho = \frac{\lambda}{\gamma\mu} < 1. \quad (1.27)$$

Soient les fonctions génératrices partielles définies ci-dessous pour résoudre les équations (1.21)-(1.25) [51]

$$P(z) = \sum_{j=0}^{\infty} P_j z^j \text{ et } Q(z) = \sum_{j=0}^{\infty} Q_j z^j, \quad z \in [0, 1], \quad (1.28)$$

où $P(z)$ (respectivement $Q(z)$) est la fonction génératrice des probabilités (*PGF*, *Probability Generating Function*) du nombre de clients en orbite quand le serveur est libre (respectivement occupé).

À l'aide de ces fonctions génératrices, on obtient :

$$P(z) = \frac{\gamma\mu - \lambda z}{\gamma\mu} (\gamma\mu - \lambda)^{\frac{\eta+\mu+\lambda-\theta\gamma\mu}{\eta}} e^{\frac{(p-\theta)\lambda}{\eta}(1-z)} (\gamma\mu - \lambda z)^{-\frac{\eta+\mu+\lambda-\theta\gamma\mu}{\eta}}, \quad (1.29)$$

$$Q(z) = \frac{\lambda}{\gamma\mu} (\gamma\mu - \lambda)^{\frac{\eta+\mu+\lambda-\theta\gamma\mu}{\eta}} e^{\frac{(p-\theta)\lambda}{\eta}(1-z)} (\gamma\mu - \lambda z)^{-\frac{\eta+\mu+\lambda-\theta\gamma\mu}{\eta}}. \quad (1.30)$$

La fonction génératrice des probabilités pour le nombre de clients en l'orbite, notée $K(z)$, est définie par $K(z) = P(z) + Q(z)$, est donnée dans l'équation (1.30).

$$K(z) = \frac{\gamma\mu - \lambda z + \lambda}{\gamma\mu} (\gamma\mu - \lambda)^{\frac{\eta+\mu+\lambda-\theta\gamma\mu}{\eta}} e^{\frac{(p-\theta)\lambda}{\eta}(1-z)} (\gamma\mu - \lambda z)^{-\frac{\eta+\mu+\lambda-\theta\gamma\mu}{\eta}}. \quad (1.31)$$

La fonction génératrice des probabilités pour le nombre de clients dans le système, définie comme $H(z) = P(z) + zQ(z)$, est donnée dans l'équation (1.31).

$$H(z) = (\gamma\mu - \lambda)^{\frac{\eta+\mu+\lambda-\theta\gamma\mu}{\eta}} e^{\frac{(p-\theta)\lambda}{\eta}(1-z)} (\gamma\mu - \lambda z)^{-\frac{\eta+\mu+\lambda-\theta\gamma\mu}{\eta}}. \quad (1.32)$$

Remarque 1.4 (cas particulier)

Dans le cas où $p = 1$, $\theta = 1$ et $\gamma = 1$, ce système se réduit au modèle de file d'attente $M/M/1$ avec rappels classique (voir Falin et Templeton [36]).

1.8.2.3 Caractéristiques du système

Le nombre moyen de clients L_q (respectivement L_s) en orbite (respectivement dans le système) sous la condition de stationnarité est obtenu en différenciant (1.31) (respectivement (1.32)) par rapport à z et en l'évaluant ensuite à $z = 1$

$$L_q = -\frac{\lambda}{\gamma\mu} - \frac{(p-\theta)\lambda}{\eta} + \frac{\lambda\eta + \lambda\mu + \lambda^2 - \lambda\theta\gamma\mu}{\eta(\gamma\mu - \lambda)}, \quad (1.33)$$

$$L_s = -\frac{(p-\theta)\lambda}{\eta} + \frac{\lambda\eta + \lambda\mu + \lambda^2 - \lambda\theta\gamma\mu}{\eta(\gamma\mu - \lambda)}. \quad (1.34)$$

Le temps moyen d'attente W_q (respectivement W_s) en orbite (respectivement dans le système) est lié au nombre moyen de clients L_q (respectivement L_s) en orbite (respectivement dans le système) par la formule de Little [?], $L_q = \lambda W_q$ et $L_s = \lambda W_s$

$$W_q = -\frac{1}{\gamma\mu} - \frac{p-\theta}{\eta} + \frac{\eta + \mu + \lambda - \theta\gamma\mu}{\eta(\gamma\mu - \lambda)}, \quad (1.35)$$

$$W_s = -\frac{(p-\theta)}{\eta} + \frac{\eta + \mu + \lambda - \theta\gamma\mu}{\eta(\gamma\mu - \lambda)}. \quad (1.36)$$

Le nombre moyen de rappels \bar{d} par client donné dans l'équation (1.37) est déterminé comme suit

$$\bar{d} = \eta W_q,$$

$$\bar{d} = -\frac{\eta}{\gamma\mu} - p + \theta + \frac{\eta + \mu + \lambda - \theta\gamma\mu}{\gamma\mu - \lambda}. \quad (1.37)$$

1.8.3 Le modèle d'attente M/M/1 avec rappels et erreurs de transmission

1.8.3.1 Description du modèle

Soit un système d'attente $M/M/1$ avec rappels et erreurs de transmission. Les clients primaires arrivent de l'extérieur du système selon un processus de Poisson de taux λ . À l'arrivée du client primaire, si le serveur est libre, ce client accède au serveur avec une probabilité p ou rejoint l'orbite avec une probabilité $(1 - p)$. Les intervalles de temps inter-rappels suivent une distribution exponentielle de taux $j\eta$ (j correspond à la taille de l'orbite). Cette politique de rappels, appelée politique de rappels classique, dépend du nombre de clients dans l'orbite. Le client qui entre en service (le client primaire ou le client provenant de l'orbite) est servi avec succès (sans erreur de transmission) et quitte le système avec probabilité γ ($0 < \gamma \leq 1$) ou rejoint l'orbite due à une erreur de transmission avec une probabilité $(1 - \gamma)$. Les temps de service des clients sont supposés indépendants, suivent une distribution exponentielle de moyenne $1/\mu$ et les processus stochastiques impliqués dans le système sont mutuellement indépendants.

L'état du système à l'instant t peut être représenté par la paire $(C(t), X(t))$, où

$$C(t) = \begin{cases} 0, & \text{si le serveur est libre à l'instant } t; \\ 1, & \text{si le serveur est occupé à l'instant } t; \end{cases}$$

$X(t)$ indique le nombre de clients en orbite à l'instant t .

Le processus $\{C(t), X(t); t \geq 0\}$ est une chaîne de Markov à temps continu, irréductible, apériodique et homogène dans le temps avec l'espace d'état

$$S = \{(0, j), (1, j) / j = 0, 1, \dots\}.$$

1.8.3.2 Analyse de la distribution stationnaire

Soit $P_j = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{C(t) = 0, X(t) = j\}$ et $Q_j = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{C(t) = 1, X(t) = j\}$, $j \geq 0$. Elles représentent les distributions conjointes de l'état du serveur et de la longueur de l'orbite à l'état stationnaire.

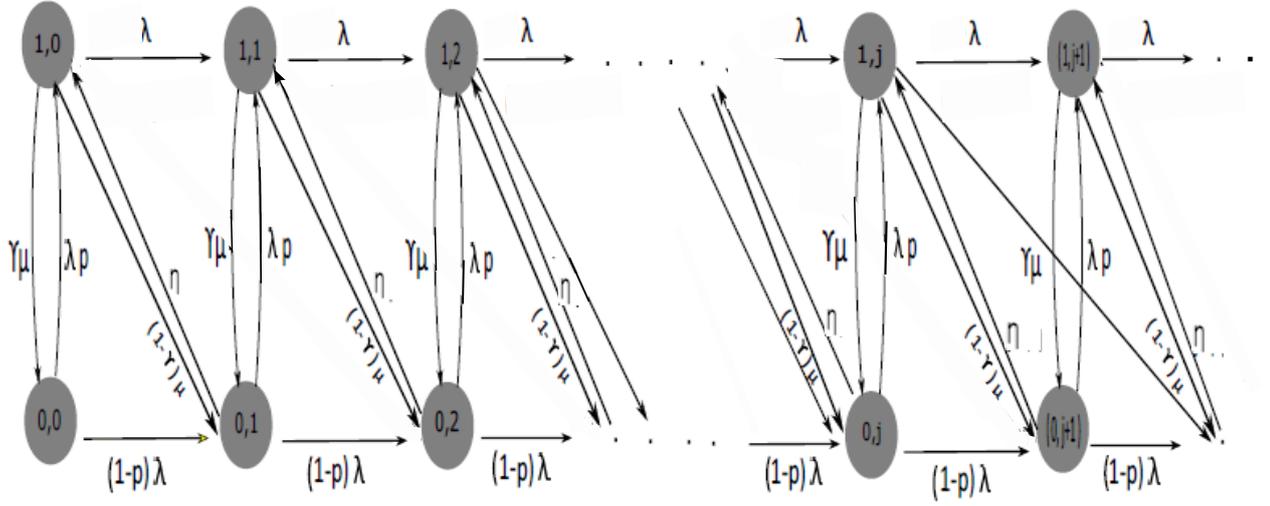


FIGURE 1.5 – Diagramme de transition d'un système $M/M/1$ avec rappels et erreurs de transmission

En utilisant les équations de balances du système markovien illustré dans la Figure (1.5), on obtient

$$\lambda P_0 = \gamma \mu Q_0, \quad (1.38)$$

$$(\lambda + \eta) P_1 = \lambda(1 - p) P_0 + (1 - \gamma) \mu Q_0 + \gamma \mu Q_1, \quad (1.39)$$

$$(\lambda + \eta) P_j = (1 - p) \lambda P_{j-1} + (1 - \gamma) \mu Q_{j-1} + \gamma \mu Q_j, \quad j = 2, 3, \dots, \quad (1.40)$$

$$(\lambda + \mu) Q_0 = \lambda p P_0 + \eta P_1, \quad (1.41)$$

$$(\lambda + \mu) Q_j = \lambda p P_j + \eta P_{j+1} + \lambda Q_{j-1}, \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (1.42)$$

La condition nécessaire et suffisante d'existence d'un régime stationnaire pour le système $M/M/1$ avec rappels et erreurs de transmission est :

$$\rho = \frac{\lambda}{\gamma \mu} < 1. \quad (1.43)$$

Conclusion

Nous avons abordé dans ce chapitre, de façon introductive et claire les concepts et techniques de base de la théorie de files d'attente classiques et celles avec rappels. Puis nous avons cité quelques phénomènes réels qui peuvent être modélisés par cette classe de systèmes d'attente. Nous avons présenté ensuite quelques modèles d'attente avec rappels qui ont été fructueusement utilisés dans une variété d'applications. D'après les difficultés d'analyse de ces systèmes et en raison de la complexité des résultats analytiques obtenus, une méthode approximative d'analyse est considérée, qui est la méthode de stabilité forte, qu'on va définir et appliquer dans ce qui suit.

2

Concepts de la stabilité forte

Introduction

Lors de la conception et l'étude de systèmes concrets, on est souvent amené à remplacer le système réel (généralement complexe), par un système plus simple (pour lequel il existe des résultats analytiques), qui lui est dans un certain sens "proche". Le modèle ainsi utilisé représente une "idéalisation" du système réel.

L'étude de stabilité, dans la théorie de files d'attente consiste à délimiter le domaine dans lequel le modèle idéal peut-être utilisé comme une bonne approximation du système réel. Cette méthode occupe une place remarquable dans la théorie qualitative des systèmes dynamiques, ainsi que dans celle des systèmes stochastiques.

Dans ce chapitre, nous rappelons les concepts de stabilité forte des chaînes de Markov. Ensuite, nous décrivons la manière dont la méthode de stabilité forte a été appliquée en théorie de files d'attente.

2.1 Notions et concepts fondamentaux

2.1.1 Notations

On note par $\mathbf{B}(\mathbb{N})$, l'espace Borélien des nombres naturels qui est muni de la topologie discrète, dont on peut considérer l'espace mesurable $(\mathbb{N}, \mathbf{B}(\mathbb{N}))$.

Soit $\mathbf{M} = \{\mu(i, j)\}$ l'espace des mesures finies sur $\mathbf{B}(\mathbb{N})$ et $\{\eta = f(i, j)\}$ est l'espace des fonctions mesurables bornées définies sur \mathbb{N}^2 .

L'outil principal utilisé dans notre analyse est la norme poids, notée $\|\cdot\|_v$, où v est un vecteur dont les éléments $v(m, n) \geq 1$ pour tout $(m, n) \in S = \mathbb{N} \times \overline{\{0, \mathbb{N}\}}$.

Munissons l'espace \mathbf{M} d'une certaine norme $\|\cdot\| = \|\cdot\|_v$, définie par

$$\|\mu\|_v = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^N v(i, j) |\mu_{(i,j)}|, \quad (2.1)$$

où v est une fonction mesurable bornée arbitraire strictement positive (pas nécessairement finie). Cette norme induite dans l'espace η la norme :

$$\|f\|_v = \sup_m \sup_n \frac{|f(m, n)|}{|v(m, n)|}; \quad m, n \in \mathbb{N} \times \overline{\{0, \mathbb{N}\}}. \quad (2.2)$$

On considère maintenant \mathbf{B} , l'espace des opérateurs linéaire bornés sur l'espace $\{\mu \in \mathbf{M} : \|\mu\|_v < \infty\}$ avec la norme

$$\|M\|_v = \sup_m \sup_n \frac{1}{v(m, n)} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^N v(i, j) |Q_{(i,j)(m,n)}|; \quad m, n \in \mathbb{N} \times \overline{\{0, \mathbb{N}\}}. \quad (2.3)$$

Soient μ et ν deux mesures invariantes, et supposons que ces mesures ont une norme v finie alors :

$$|\nu f - \mu f| \leq \|\nu - \mu\|_v \|f\|_v \inf_m \inf_n v(m, n); \quad m, n \in \mathbb{N} \times \overline{\{0, \mathbb{N}\}},$$

pour tout f avec $\|f\|_v$ est finie.

Définition 2.1

Une chaîne de Markov X de noyau de transition P qui vérifie $\|P\|_v < \infty$ et de mesure invariable π est dite v -fortement stable, si chaque noyau de transition $\|\tilde{P}\|$ dans un certain voisinage $\{\tilde{P} : \|\tilde{P} - P\|_v < \varepsilon\}$ admet une mesure invariante unique $\tilde{\pi}$ telle que $\|\tilde{\pi} - \pi\|_v$ tend vers zéro lorsque $\|\tilde{P} - P\|_v$ tend à zéro.

Théorème 2.1 [9] Soit X une chaîne de Markov définie par le noyau de transition P et la mesure invariante π est fortement ν -stable par rapport à la norme $\|\cdot\|_\nu$, s'il existe une mesure σ et une fonction mesurable non négative h sur \mathbf{N} vérifiant les conditions suivantes :

- a. $\pi h > 0, \sigma 1 = 1, \sigma h > 0,$
- b. l'opérateur $T = P - h \circ \sigma$ est non négatif,
- c. la norme de l'opérateur T est strictement inférieure à 1, c-à-d, $\|T\|_\nu < 1,$
- d. $\|P\|_\nu < \infty,$

où " \circ " est la convolution entre une mesure et une fonction, et 1 est le vecteur ayant toutes ces composantes égales à 1.

Aïssani et Kartashov [9] ont montré qu'une chaîne de Markov X possédant le noyau P est fortement stable par rapport à ν si et seulement si le résiduel pour P par rapport à ν existe.

Bien que la méthode de stabilité forte provienne de la théorie de stabilité de chaînes de Markov, les techniques développées (pour la méthode de stabilité forte) permet d'établir des algorithmes numériques pour majorer $\|\tilde{\pi} - \pi\|_\nu$.

Une borne pour $\|\tilde{\pi} - \pi\|_\nu$ est donnée dans le théorème suivant :

Théorème 2.2 [45] Soit P fortement stable. Si

$$\|\tilde{P} - P\|_\nu \leq \frac{1 - \|T\|_\nu}{\|I - \Pi\|_\nu} \quad (2.4)$$

alors, nous avons la borne suivante :

$$\|\tilde{\pi} - \pi\|_\nu \leq \|\pi\|_\nu \frac{\|I - \Pi\|_\nu \|\tilde{P} - P\|_\nu}{1 - \|T\|_\nu - \|I - \Pi\|_\nu \|\tilde{P} - P\|_\nu}. \quad (2.5)$$

Le terme $\|I - \Pi\|_\nu$ peut être majoré par :

$$\|I - \Pi\|_\nu \leq 1 + \|1\|_\nu \|\Pi\|_\nu, \quad (2.6)$$

où Π est le projecteur stationnaire de P et I est la matrice identité.

Remarque 2.1

Les conditions a) et b) sont toujours vérifiées dans le cas où c) est vérifiée, tel que c) découle de l'ergodicité de la chaîne X .

2.2 Exemple illustratif d'application sur un modèle de files d'attente avec rappels

Soit un modèle de file d'attente M/G/1 avec rappels. Le flux des arrivées primaires est poissonnien de paramètre λ . La distribution de la durée de service est générale, de fonction de répartition $B(\cdot)$ et de moyenne $\frac{1}{\mu}$. Supposons que le temps entre deux rappels successifs d'une même source secondaire est exponentiel de taux $\theta > 0$. L'état de ce modèle d'attente est décrit par une chaîne de Markov induite $X_n = X(\theta_n^+)$, $X(\theta_n^+)$ est le nombre de clients dans le système juste après le n^{me} départ, où θ_n l'instant de départ du n^{me} client servi.

La matrice de probabilité de transition est définie comme suit :

$$P_{(i,j)} = \begin{cases} P_j = \int_0^\infty \exp(-\lambda x) \frac{(\lambda x)^j}{j!} dB(x) & \text{si } i = 0, \\ \frac{i\theta}{\lambda+i\theta} \int_0^\infty \exp(-\lambda x) dB(x) & \text{si } i = j + 1, \\ \frac{i\theta}{\lambda+i\theta} \int_0^\infty \exp(-\lambda x) \frac{(\lambda x)^{j-i+1}}{(j-i+1)!} dB(x) + \frac{\lambda}{\lambda+i\theta} \int_0^\infty \exp(-\lambda x) \frac{(\lambda x)^{j-i}}{(j-i)!} dB(x) & \text{si } 1 \leq i \leq j, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Dans [22], l'auteur a considéré la perturbation du taux de rappels θ plus précisément la perturbation est définie comme suit :

Lorsque θ est assez grand ($\theta \rightarrow \infty$), le modèle décrit ci-dessus deviendra un modèle d'attente classique (M/G/1 classique). Notons la chaîne de Markov décrivant l'état de ce modèle par \bar{X}_n , et la matrice de probabilité de transition \bar{P} définie par :

$$\bar{P}_{(i,j)} = \begin{cases} \bar{P}_j = \int_0^\infty \exp(-\lambda x) \frac{(\lambda x)^j}{j!} dB(x) & \text{si } i = 0, \\ \int_0^\infty \exp(-\lambda x) \frac{(\lambda x)^{j-i+1}}{(j-i+1)!} dB(x) & \text{si } 1 \leq i \leq j + 1, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Inégalité de stabilité

1. Déviation de l'opérateur de transition :

Théorème 2.2 [22]

Soit P (respectivement \bar{P}) la matrice de probabilité de transition du modèle M/G/1 avec rappels (respectivement M/G/1). Alors, pour tout $1 < \beta < \beta_0$, on a :

$$\|P - \bar{P}\|_v \leq \frac{\lambda}{\lambda + \theta}(1 + \beta_0). \quad (2.7)$$

2. Estimation de v -stabilité forte :

Lemme 2.1 [22] Soit π (respectivement $\bar{\pi}$) la distribution stationnaire de la chaîne incluse du modèle M/G/1 avec rappels (respectivement M/G/1). Alors, pour tout $1 < \beta < \beta_0$, on a

$$\|\pi\|_v \leq c_0, \quad (2.8)$$

où c_0 est donnée par

$$c_0 = \frac{(1 - \lambda m)(\beta - 1)}{1 - \rho} \rho, \quad (2.9)$$

avec m est la durée moyenne de service, et

$$\rho = \frac{\hat{f}(\lambda(\beta - \lambda))}{\beta} < 1$$

Ainsi, la borne de stabilité forte est donnée par le théorème suivant :

Théorème 2.3 [22]

Soit π et $\bar{\pi}$ les distributions stationnaires des chaînes incluses des systèmes M/G/1 avec rappels et M/G/1 classique et $1 < \beta < \beta_0$, alors,

$$\|\bar{\pi} - \pi\|_v \leq c_0 c \|\Delta\|_v (1 - \rho - \|\Delta\|_v c)^{-1}.$$

où c_0 est donné par la formule (2.9), $c = 1 + \|\pi\|_v$, $\|\Delta\|_v = \|P - \bar{P}\|_v \leq \frac{\lambda}{\lambda + \theta}(1 + \beta_0)$ et $\rho = \|T\|_v$.

Remarque 2.2

La chaîne \bar{X}_n étant fortement stable, alors elle peut approcher une autre chaîne de Markov dont la matrice de probabilité de transition est au voisinage de la matrice de probabilité de transition \bar{P} . En introduisant une petite perturbation au niveau des

rappels, l'auteur [22] a obtenu un système M/G/1 avec rappels dont la chaîne de Markov correspondante est (X_n) de matrice de probabilités de transition P . Les caractéristiques de la chaîne (X_n) peuvent-être approximées par celle de (\bar{X}_n) avec une précision qui dépend de la perturbation.

Conclusion

La méthode de stabilité forte, initialement introduite dans la théorie de stabilité des chaînes de Markov, peut s'appliquer d'une manière efficace aux systèmes de files d'attente. Dans ce chapitre, nous avons introduit les principaux outils et concepts de cette théorie qu'on va appliquer dans le chapitre suivant.

3

Stabilité forte dans le modèle d'attente M/M/1 avec rappels, collisions et erreurs de transmission

Introduction

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à l'obtention de la borne de stabilité forte pour le modèle d'attente M/M/1 avec rappels constants, collisions et erreurs de transmission, où nous considérons la perturbation de la probabilité de collision. Nous élaborons ensuite un algorithme permettant d'estimer numériquement la borne obtenue. De même, une analyse comparative des résultats obtenus avec ceux correspondants à la déviation réelle sera également considérée.

3.1 Modèle d'attente $M/M/1$ avec rappels constants, collisions et erreurs de transmission

Ce modèle est caractérisée par le fait que l'orbite engendre un seul processus de Poisson de taux η et dès que le client trouve le serveur libre, un seul client en orbite (le premier en file où un autre choisi aléatoirement) reçoit son service et quitte le système. Ce qui veut dire que le taux de rappels ne dépend pas du nombre de clients en orbite.

Le diagramme de transition d'un système $M/M/1$ avec rappels, collisions, erreurs de transmission et politique de rappels constante et donné dans la Figure (3.1) :

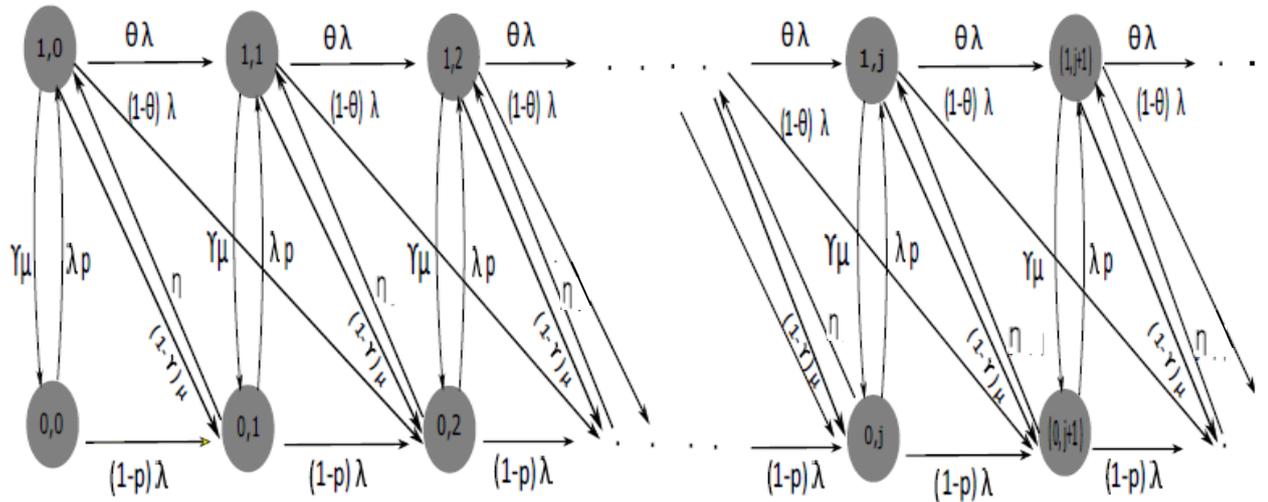


FIGURE 3.1 – Diagramme de transition d'un système $M/M/1$ avec rappels, collisions, erreurs de transmission et politique de rappels constante.

En utilisant les équations de balances du système markovien illustré dans la Figure. 3.1, on obtient

$$\lambda P_0 = \gamma \mu Q_0, \quad (3.1)$$

$$(\lambda + \eta) P_1 = \lambda(1 - p) P_0 + (1 - \gamma) \mu Q_0 + \gamma \mu Q_1, \quad (3.2)$$

$$(\lambda + \eta) P_j = (1 - p) \lambda P_{j-1} + (1 - \theta) \lambda Q_{j-2} + (1 - \gamma) \mu Q_{j-1} + \gamma \mu Q_j, \quad j = 2, 3, \dots (3.3)$$

$$(\lambda + \mu) Q_0 = \lambda p P_0 + \eta P_1, \quad (3.4)$$

$$(\lambda + \mu) Q_j = \lambda p P_j + \eta P_{j+1} + \lambda \theta Q_{j-1}, \quad j = 1, 2, 3, \dots (3.5)$$

La condition nécessaire et suffisante d'existence d'un régime stationnaire pour le système $M/M/1$ avec rappels, collisions, erreurs de transmission et politique de rappels constants est :

$$\rho = \frac{\lambda}{\gamma\mu} < 1. \quad (3.6)$$

Soit Q_θ la matrice génératrice associée au modèle, tel que :

$$Q_\theta = \begin{pmatrix} B & A3 & A4 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ A1 & A2 & A3 & A4 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & A1 & A2 & A3 & A4 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & A1 & A2 & A3 & A4 & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

où $B, A1, A2, A3$ et $A4$ sont des sous matrices d'ordre 2 et elles sont définies comme suit :

$$B = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda p \\ \gamma\mu & -\lambda - \mu \end{pmatrix}, A1 = \begin{pmatrix} 0 & \eta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A2 = \begin{pmatrix} -\lambda - \eta & \lambda p \\ \gamma\mu & -\lambda - \mu \end{pmatrix},$$

$$A3 = \begin{pmatrix} (1-p)\lambda & 0 \\ (1-\gamma)\mu & \theta\lambda \end{pmatrix} \text{ et } A4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (1-\theta)\lambda & 0 \end{pmatrix}.$$

La diagonale de la matrice génératrice Q_θ associée au modèle est :

$$Q_\theta = \begin{cases} q_{(0,0)(0,0)} = -\lambda; \\ q_{(0,n)(0,n)} = -(\lambda + \eta); \\ q_{(1,n)(1,n)} = -(\lambda + \mu). \end{cases}$$

Et $k = \max |q_{ii}| < \infty$ est la condition d'uniformisation du modèle .
On pose k le maximum des valeurs diagonales de la matrice Q_θ tel que :

$$k = \lambda + \max(\mu, \eta)$$

Remarque 3.1

Dans notre cas, $k < \infty$, alors la matrice génératrice est uniformisable. Ainsi, on peut associer à cette chaîne de Markov à temps continu une chaîne de Markov à temps discret qui est équivalente, dont celle-ci est caractérisée par sa matrice de probabilité de transition qui est définie comme suit :

$$P_\theta = I + \frac{1}{k}Q_\theta \quad (3.7)$$

3.2 Analyse de perturbation

Afin d'estimer l'erreur induite par la négligence des collisions ($\theta \rightarrow 1$) dans le modèle d'attente M/M/1 avec rappels constants, collisions et erreurs de transmission, et cela en utilisant la méthode de stabilité forte, on choisit la fonction v comme suit :

$$v(i, j) = \alpha^i \beta^j, (i, j) \in S, \alpha > 1 \quad \text{et} \quad \beta > 1,$$

où

$$S = (i, j) \in (\mathbb{N}) \times (\{0, 1\}),$$

représente l'espace d'états de la chaîne de Markov.

Dans ce qui suit, nous allons nous intéresser à l'obtention de la borne de stabilité forte, lorsque nous perturbons la probabilité de collisions. En effet, cette borne nous permettra d'illustrer l'effet de la variation de ce paramètre par rapport à la distribution stationnaire représentant le nombre de clients dans l'orbite.

3.3 Modèle d'attente M/M/1 avec rappels constants et erreurs de transmission

Soit Q_1 la matrice génératrice associée au modèle, tel que :

$$Q_1 = \begin{pmatrix} B & A'3 & A'4 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ A1 & A2 & A'3 & A'4 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & A1 & A2 & A'3 & A'4 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & A1 & A2 & A'3 & A'4 & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

où, $A'3$ et $A'4$ sont définies comme suit :

$$A'3 = \begin{pmatrix} (1-p)\lambda & 0 \\ (1-\gamma)\mu & \lambda \end{pmatrix} \text{ et } A'4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

D'après la formule (3.7), la matrice de probabilités de transition associée au modèle est définie comme suit :

$$P_1 = I + \frac{1}{k}Q_1.$$

Tel que,

$$P_1 = \begin{pmatrix} D & D3 & 0 & 0 & \dots \\ D1 & D2 & D3 & 0 & \dots \\ 0 & D1 & D2 & D3 & \dots \\ 0 & 0 & D1 & D2 & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

où D , $D1$, $D2$ et $D3$ sont des sous matrices d'ordre deux et elles sont définies comme suit :

$$D = \begin{pmatrix} \frac{-\lambda}{k} + 1 & \frac{\lambda p}{k} \\ \frac{\gamma \mu}{k} & \frac{-\lambda - \mu}{k} + 1 \end{pmatrix}, D1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\eta}{k} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, D2 = \begin{pmatrix} \frac{-(\lambda + \eta)}{k} + 1 & \frac{\lambda p}{k} \\ \frac{\gamma \mu}{k} & \frac{-\lambda - \mu}{k} + 1 \end{pmatrix},$$

$$D3 = \begin{pmatrix} \frac{(1-p)\lambda}{k} & 0 \\ \frac{(1-\gamma)\mu}{k} & \frac{\lambda}{k} \end{pmatrix}.$$

3.4 Stabilité forte et estimation de la norme ν de la matrice tabou

Soit T la matrice tabou relative à la matrice de transition P_1 (matrice résiduelle) qui évite les sauts à l'état $(0, 0)$; plus spécifiquement,

$$T_{(i,j)(m,n)} = \begin{cases} 0 & \text{si } m = n = 0, \\ P_{(i,j)(m,n)} & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.8)$$

Et elle est définie comme suit :

$$T_{(i,j)(m,n)} = \begin{pmatrix} D' & D'3 & 0 & 0 & \dots \\ D1 & D2 & D'3 & 0 & \dots \\ 0 & D1 & D2 & D'3 & \dots \\ 0 & 0 & D1 & D2 & \dots \end{pmatrix},$$

où D' , $D'3$ et $D1$ sont définies comme suit :

$$D' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\lambda p}{k} \\ 0 & \frac{-\lambda - \mu}{k} + 1 \end{pmatrix} \quad D1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\eta}{k} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad D2 = \begin{pmatrix} \frac{-\lambda - \eta}{k} + 1 & \frac{\lambda p}{k} \\ \frac{\gamma \mu}{k} & \frac{-\lambda - \mu}{k} + 1 \end{pmatrix}$$

$$D'3 = \begin{pmatrix} \frac{(1-p)\lambda}{k} & 0 \\ \frac{(1-\gamma)\mu}{k} & \frac{\lambda}{k} \end{pmatrix}.$$

Lemme 3.1 Pour tout $(\alpha > 1)$, $(\beta > 1)$ et sous la condition d'ergodicité (3.6) est vérifiée, on a :

$$\|T\|_v = \max\{\rho', \rho''\} = \rho(\alpha, \beta) < 1. \quad (3.9)$$

Preuve

D'après la formule (2.3), on aura dans notre cas la formule suivante :

$$\|T\|_v = \sup_i \sup_j \frac{1}{v(i, j)} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^1 v(m, n) |T_{(i,j);(m,n)}|. \quad (3.10)$$

On pose

$$S_{(i,j)} = \frac{1}{v(i, j)} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^1 v(m, n) |T_{(i,j);(m,n)}|, \quad (3.11)$$

et

$$S'_{(i,j)} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^1 v(m, n) |T_{(i,j);(m,n)}|. \quad (3.12)$$

Pour $i=0$

Si $j=0$

$$\begin{aligned} S'_{(0,0)} &= V_{(0,1)} |T_{(0,0)(0,1)}| + V_{(1,0)} |T_{(0,0)(1,0)}| \\ &= \beta \frac{\lambda p}{k} + \alpha \frac{(1-p)\lambda}{k} \end{aligned}$$

D'après la formule (3.11) on aura :

$$\begin{aligned} S_{(0,0)} &= \beta \frac{\lambda p}{k} + \alpha \frac{(1-p)\lambda}{k} \\ &= \rho_1. \end{aligned}$$

Si $j=1$

$$\begin{aligned} S'_{(0,1)} &= V_{(0,1)}|T_{(0,1)(0,1)}| + V_{(1,0)}|T_{(0,1)(1,0)}| + V_{(1,1)}|T_{(0,1)(1,1)}| \\ &= \beta(1 - \frac{\lambda + \mu}{k}) + \alpha \frac{(1-\gamma)\mu}{k} + \alpha\beta \frac{\lambda}{k}. \end{aligned}$$

D'après la formule (3.11) on aura :

$$\begin{aligned} S_{(0,1)} &= \frac{1}{\alpha^0 \beta^1} (\beta(1 - \frac{\lambda + \mu}{k}) + \alpha \frac{(1-\gamma)\mu}{k} + \alpha\beta \frac{\lambda}{k}). \\ &= (1 - \frac{\lambda + \mu}{k}) + \alpha \frac{(1-\gamma)\mu}{\beta k} + \alpha \frac{\lambda}{k} \\ &= \rho_2. \end{aligned}$$

On prend $\rho' = \max\{\rho_1, \rho_2\}$ tel que :

$$\rho' < 1$$

.

Pour $i \in \mathbb{N}^*$

Si $j=0$

$$S'_{(i,0)} = \alpha^{i-1} \beta \frac{\eta}{k} + \alpha^i (1 - \frac{\lambda + \eta}{k}) + \alpha^i \beta \frac{\lambda p}{k} + \alpha^{i+1} \frac{(1-p)\lambda}{k}.$$

D'après la formule (3.11) on aura :

$$\begin{aligned} S_{(i,0)} &= \frac{1}{\alpha^i \beta^0} (\alpha^{i-1} \beta \frac{\eta}{k} + \alpha^i (1 - \frac{\lambda + \eta}{k}) + \alpha^i \beta \frac{\lambda p}{k} + \alpha^{i+1} \frac{(1-p)\lambda}{k}) \\ &= \frac{\beta \eta}{k \alpha} + (1 - \frac{\lambda + \eta}{k}) + \beta \frac{\lambda p}{k} + \alpha \frac{(1-p)\lambda}{k} \\ &= \rho_3. \end{aligned}$$

Si $j=1$

$$S'_{(i,1)} = \alpha^i \frac{\gamma\mu}{k} + \alpha^i \beta \left(1 - \frac{\lambda + \mu}{k}\right) + \alpha^{i+1} \frac{(1-\gamma)\mu}{k} + \alpha^{i+1} \beta \frac{\lambda}{k}$$

D'après la formule (3.11) on aura :

$$\begin{aligned} S_{(i,1)} &= \frac{1}{\alpha^i \beta} \left(\alpha^i \frac{\gamma\mu}{k} + \alpha^i \beta \left(1 - \frac{\lambda + \mu}{k}\right) + \alpha^{i+1} \frac{(1-\gamma)\mu}{k} + \alpha^{i+1} \beta \frac{\lambda}{k} \right) \\ &= \frac{\gamma\mu}{k\beta} + \left(1 - \frac{\lambda + \mu}{k}\right) + \alpha \frac{(1-\gamma)\mu}{k\beta} + \alpha \frac{\lambda}{k} \\ &= \rho_4. \end{aligned}$$

On prend $\rho'' = \max\{\rho_3, \rho_4\}$ tel que :

$$\rho'' < 1.$$

On a :

$$\begin{aligned} (\alpha^*, \beta^*) &= \text{Sup}\{(\alpha, \beta) : \rho(\alpha, \beta) < 1\}. \\ &= \arg \max_{(\alpha, \beta)} \rho(\alpha, \beta) \end{aligned}$$

D'après le **lemme 3.1**, pour tout $(\alpha > 1)$ et $(\beta > 1)$ et sous la condition d'ergodicité (3.6), On a :

$$\begin{aligned} \|T\| &= \max\left\{ \beta \frac{\lambda p}{k} + \alpha \frac{(1-p)\lambda}{k}; \left(1 - \frac{\lambda + \mu}{k}\right) + \alpha \frac{(1-\gamma)\mu}{\beta k} + \alpha \frac{\lambda}{k}; \right. \\ &\left. \frac{\beta \eta}{k\alpha} + \left(1 - \frac{\lambda + \eta}{k}\right) + \beta \frac{\lambda p}{k} + \alpha \frac{(1-p)\lambda}{k}; \frac{\gamma\mu}{k\beta} + \left(1 - \frac{\lambda + \mu}{k}\right) + \alpha \frac{(1-\gamma)\mu}{k\beta} + \alpha \frac{\lambda}{k} \right\} \\ &= \rho(\alpha, \beta). \end{aligned}$$

3.5 Estimation de la déviation de la matrice de transition

Pour pouvoir estimer numériquement l'écart entre les distributions stationnaires des états des chaînes de Markov associées aux deux modèles, estimons au préalable la déviation entre les matrices de transition P_θ et P_1 en norme v . Cette estimation est donnée dans le lemme suivant :

Lemme 3.2 Lorsque la condition d'ergodicité (3.6) est vérifiée, on aura :

$$\|P_\theta - P_1\|_v \leq \frac{1}{k} \|Q_\theta - Q_1\|_v. \quad (3.13)$$

Preuve

On a :

$$Q_\theta - Q_1 = \begin{pmatrix} 0 & B1 & B2 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & B1 & B2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & B1 & B2 & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

où B1, B2 sont des sous matrices d'ordre deux et elles sont définies comme suit :

$$B1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda(\theta - 1) \end{pmatrix}, B2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (1 - \theta)\lambda & 0 \end{pmatrix}.$$

D'après la formule (2.3), on aura :

$$\|Q_\theta - Q_1\|_v = \sup_i \sup_j \frac{1}{v(i, j)} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^1 v(m, n) |Q_{\theta(i, j); (m, n)} - Q_{1(i, j); (m, n)}|. \quad (3.14)$$

On pose

$$S(i, j) = \frac{1}{v(i, j)} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^1 v(m, n) \|Q_\theta - Q_1\|, \quad (3.15)$$

et

$$S'_{(i, j)} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^1 v(m, n) |Q_{\theta(i, j); (m, n)} - Q_{(i, j); (m, n)}|. \quad (3.16)$$

Pour $i \in \mathbb{N}$

Si $j = 0$ alors

$$S'_{(0, 0)} = 0.$$

Alors,

$$S_{(i,0)} = 0.$$

Pour $i = 0$,

Si $j = 1$

$$\begin{aligned} S'_{(0,1)} &= v_{(1,1)}|Q_{\theta(0,1);(1,1)} - Q_{1(0,1);(1,1)}| + v_{(2,0)}|Q_{\theta(0,1);(2,0)} - Q_{1(0,1);(2,0)}| \\ &= \alpha\beta\lambda|\theta - 1| + \alpha^2(1 - \theta)\lambda \\ &= \alpha\beta(1 - \theta)\lambda + \alpha^2(1 - \theta)\lambda \\ &= \alpha(1 - \theta)\lambda(\beta + \alpha). \end{aligned}$$

Pour $i \in \mathbb{N}$,

Si $j = 1$

$$\begin{aligned} S'_{(i,1)} &= v_{(n+1,1)}|Q_{\theta(i,1);(i+1,1)} - Q_{1(i,1);(i+1,1)}| + v_{(i+2,0)}|Q_{\theta(n,1);(i+1,1)} - Q_{1(i,1);(i+1,1)}| \\ &= \alpha^{i+1}\beta\lambda(1 - \theta) + \alpha^{i+2}\lambda(1 - \theta). \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} S_{(i,1)} &= \frac{1}{\alpha^i\beta}(\alpha^{i+1}\beta\lambda(1 - \theta) + \alpha^{i+2}\lambda(1 - \theta)) \\ &= \frac{1}{\beta}\alpha\lambda(1 - \theta)(\beta + \alpha). \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} \|Q_\theta - Q_1\|_v &= \sup_i \sup_j \{S_{(i,0)}; S_{(i,1)}\} \\ &= \max\{0; \frac{1}{\beta}\alpha\lambda(1 - \theta)(\beta + \alpha)\} \\ &= \frac{1}{\beta}\alpha\lambda(1 - \theta)(\beta + \alpha). \end{aligned}$$

D'après la formule (3.13) on aura :

$$\|P_\theta - P_1\|_v = \frac{1}{k} \left(\frac{1}{\beta} \alpha \lambda (1 - \theta) (\beta + \alpha) \right) = \Delta(\alpha, \beta).$$

Lemme 3.3 La norme $\|\cdot\|_v$ de π est donnée par :

$$\|\pi\|_v = \frac{\pi_{(0,0)}}{1 - \rho(\alpha, \beta)} = c_0(\alpha, \beta) < \infty. \quad (3.17)$$

Preuve

Par définition, nous avons :

$$\|\pi\|_v < \frac{(\sigma v)(\pi h)}{1 - \rho} < \frac{\pi h}{1 - \rho(\alpha, \beta)} = C_0(\alpha, \beta). \quad (3.18)$$

On choisit la fonction mesurable h , pour que la chaîne de Markov décrivant l'état du modèle perturbé soit fortement v -stable, comme suit :

$$h_{(i,j)} = I_{(i=0, j=0)} \begin{cases} 1, & \text{si } m = n = 0, \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases} \quad (3.19)$$

et la mesure σ comme suit :

$$\sigma_{(m,n)} = P_{(0,0) \rightarrow (m,n)}. \quad (3.20)$$

Cette mesure de probabilité n'est que la première colonne de la matrice P . Dans le lemme suivant, nous introduisons la norme $\|\cdot\|_v$ de la distribution stationnaire π , où,

$$\pi h = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^1 \pi_{(m,n)} h_{(m,n)} = \pi_{(0,0)}, \quad (3.21)$$

avec,

$\pi_{(0,0)} = 1 - \rho$, et ρ est définie dans la relation (3.6).

On aura :

$$\|\pi\|_v < \frac{\pi h}{1 - \rho(\alpha, \beta)} = C_0(\alpha, \beta),$$

où,

$$C_0(\alpha, \beta) = \frac{1 - \frac{\lambda}{\gamma^\mu}}{1 - \rho(\alpha, \beta)}, \quad (3.22)$$

et

$$C(\alpha, \beta) = 1 + \frac{1 - \frac{\lambda}{\gamma\mu}}{1 - \rho(\alpha, \beta)}. \quad (3.23)$$

En utilisant les résultats préliminaires ci-dessus (lemme 3.1, lemme 3.2, lemme 3.3), on obtient la borne de stabilité forte donnée en théorème suivant :

Théorème 3.1

Pour tout $1 \leq \alpha \leq \alpha^*$ et $1 \leq \beta \leq \beta^*$ et sous la condition d'égodicité (3.6), et sous la condition :

$$\Delta(\alpha, \beta) < \frac{1 - \rho(\alpha, \beta)}{C(\alpha, \beta)}, \quad (3.24)$$

alors, nous avons l'estimation suivante :

$$\|\pi_\theta - \pi_1\|_v \leq \frac{C_0(\alpha, \beta)C(\alpha, \beta)\Delta(\alpha, \beta)}{1 - \rho(\alpha, \beta) - C(\alpha, \beta)\Delta(\alpha, \beta)} = SS B(\alpha, \beta), \quad (3.25)$$

avec,

$\rho(\alpha, \beta)$, $C_0(\alpha, \beta)$, $C(\alpha, \beta) = 1 + C_0(\alpha, \beta)$ et $\Delta(\alpha, \beta)$, définies dans les formules (3, 10), (3, 23), (3.24) et (3.25) respectivement.

Remarque 3.2

La borne de stabilité forte dépend des paramètres de la norme $\|\cdot\|_v$. Donc, du point de vue pratique, nous pouvons obtenir, la valeur optimale de celle-ci. Ceci nous ramène à considérer le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{aligned} \min_{(\alpha, \beta)} \quad & SS B(\alpha, \beta) \\ \text{s.c} \quad & \rho(\alpha, \beta) < 1 \\ & \Delta(\alpha, \beta) < \frac{1 - \rho(\alpha, \beta)}{C(\alpha, \beta)} \end{aligned}$$

Ainsi, nous nous intéressons à l'obtention des valeurs des paramètres de la norme $\|\cdot\|_v$ α^* et β^* pour lesquels la borne $SS B(\alpha^*, \beta^*)$ soit minimale.

3.6 Application numérique

3.6.1 Algorithme de calcul de la borne de stabilité forte

INITIALISATION : Définition des entrées;

Le taux des inter-arrivées : λ ;

La probabilité que le client accède au serveur (si le serveur est libre) : p ;

Le taux des inter-rappels : η ;

La probabilité que le client (primaire ou provenant de l'orbite) soit servi avec succès (sans erreurs de transmission) : γ ;

La probabilité que le client primaire rejoint immédiatement l'orbite (sans collision) : θ ;

Le taux de service : μ ;

Fixer $SSB^* = \infty$, $\alpha^* = \infty$, $\beta^* = \infty$, $\varepsilon = 0.01$;

DEBUT

$\alpha = 1$;

Tant que $\alpha < \alpha^*$ **faire**

$\alpha = \alpha + \varepsilon$;

$\beta = 1$;

Tant que $\beta < \beta^*$ **faire**

$\beta = \beta + \varepsilon$;

 Calculer ρ_1, ρ_2 ;

$\rho' = \max\{\rho_1, \rho_2\}$;

 Calculer ρ_3, ρ_4 ;

$\rho'' = \max\{\rho_3, \rho_4\}$;

$\rho(\alpha, \beta) = \max\{\rho', \rho''\}$; $\rho = \frac{\lambda}{\gamma\mu}$;

Si $\rho < 1$ **alors**

Si $\rho(\alpha, \beta) < 1$ **alors**

 Calculer $\Delta(\alpha, \beta) = \|P_\theta - P_1\|_v$;

 Calculer $C_0(\alpha, \beta) = \|\pi\|_v$;

 Calculer $C(\alpha, \beta) = 1 + C_0(\alpha, \beta)$;

Si $\Delta < \frac{1-\rho}{C(\alpha, \beta)}$ **alors**

$SSB(\alpha, \beta) = \frac{C_0(\alpha, \beta)C(\alpha, \beta)\Delta(\alpha, \beta)}{1-\rho(\alpha, \beta)-C(\alpha, \beta)\Delta(\alpha, \beta)}$;

Si $SSB < SSB^*$ **alors**

$SSB^*(\alpha, \beta) = SSB(\alpha, \beta)$;

$\alpha^* = \alpha$;

$\beta^* = \beta$;

Fin

Fin

Fin

Fin

Fin

Fin

FIN.

Remarque 3.3

La déviation réelle du modèle est définie comme suit :

$$DR(\alpha^*, \beta^*) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^1 \alpha^{*m} \beta^{*n} |\pi_{\theta}(m, n) - \pi_1(m, n)| \quad (3.26)$$

3.6.2 Résultats numériques obtenus

Dans notre application numérique, on a choisi les paramètres du modèle comme suit :

$$\lambda = 1, p = 0.9, \eta = 0.01, \gamma = 1 \text{ et } \mu = 2.$$

Et on a obtenu les résultats dressés dans le tableau suivant :

θ	α^*	β^*	$SSB(\alpha^*, \beta^*)$	$DR(\alpha^*, \beta^*)$
0,9400	1,0010	2,0210	13,9026	4.9693
0,9412	1,0010	2,0310	11,4768	4.8811
0,9425	1,0010	2,0410	9,5793	4.7837
0,9438	1,0010	2,0510	8,1616	4.6857
0,9500	1,0010	2,0510	4,4973	4.1471
0,9600	1,0010	2,0510	2,2292	3.2900
0,9700	1,0010	2,0510	1,2112	2.4471
0,9800	1,0010	2,0510	0,6330	1.6180
0,9900	1,0010	2,0510	0,2603	0.8024
0,9995	1,0010	2,0510	0,0111	0.0398
0,9998	1,0010	2,0510	0,0044	0.0159
0,9999	1,0010	2,0510	0,0022	0.0080
1,0000	1,0010	1,0010	0	0

TABLE 3.1 – Résultats obtenus de la borne SSB et DR.

L'illustration graphique de ces résultats est donnée en Figure 3.2

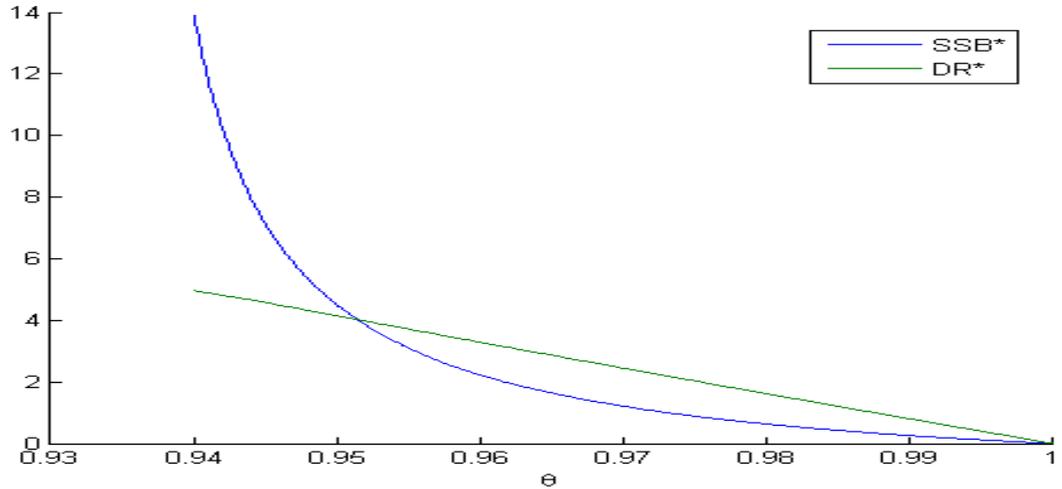


FIGURE 3.2 – Le comportement de la borne SSB et de DR par rapport à θ

3.6.3 Interprétation des résultats

D'après les résultats numériques obtenus donnés en tableau 3.1, et illustrés graphiquement en Figure 3.2, nous constatons l'influence considérable de la variation des valeurs de probabilité des collisions sur la métrique de performance considérée (la distribution stationnaire). Cela justifie le choix du paramètre en question, c'est-à-dire le fait de considérer le phénomène de collision dans la conception du modèle étudié. D'autre part, nous constatons que la borne de stabilité forte obtenue tend vers zéro lorsque les valeurs du paramètre perturbé (probabilité de collision) se rapprochent de un. Cela signifie que la borne obtenue est consistante (elle est convergente), autrement dit, plus $\|P_\theta - P_1\|_v$ se rapproche de zéro (i.e. $\theta \rightarrow 1$), plus $\|\pi_\theta - \pi_1\|_v$ l'est.

En plus, nous constatons le même comportement pour le cas de la déviation réelle. Néanmoins, l'allure des résultats numériques relatifs à la déviation réelle prend la forme linéaire par rapport à la variation de la probabilité de collision. Cela se traduit par la linéarité des composantes des probabilités de transition par rapport au même paramètre.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons pu développer un algorithme relatif à l'optimisation de la borne de perturbation obtenue par l'application de la méthode de stabilité forte. Cette borne correspond à l'estimation de l'erreur dû à la négligence des collisions. Ainsi, cette analyse nous a permis d'illustrer l'effet de la variation de ce paramètre par rapport à la distribution stationnaire représentant le nombre de clients dans l'orbite. Celle-ci nous permettra également de contrôler la proximité des mesures de performance des deux modèles : M/M/1 avec θ (modèle perturbé) et M/M/1 avec θ égale à 1 (modèle nominal).

Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous avons mis en évidence l'intérêt de l'applicabilité de la méthode de stabilité forte sur le modèle M/M/1 avec rappels, collisions et erreurs de transmission.

Dans un premier temps, nous avons actualisé les synthèses des résultats connus sur les systèmes avec rappels, où une attention considérable a été portée au modèle cité ci-dessus.

Dans un deuxième temps, nous avons présenté brièvement les concepts de base de la théorie de stabilité forte, puis nous nous sommes intéressés à l'application de cette méthode au cas du modèle d'attente M/M/1 avec rappels, collisions et erreurs de transmission, où nous avons perturbé la probabilité de collisions. Ainsi nous avons clarifié les conditions d'approximation des caractéristiques du modèle avec collisions par celles correspondantes au modèle sans collisions. Ce qui nous a permis par la suite d'obtenir une estimation quantitative de la déviation de la distribution stationnaire du modèle en question. Celle-ci est obtenue sous la forme explicite avec un calcul exact des constantes impliquées dans la définition de la borne de stabilité forte.

En outre, nous avons développé un algorithme permettant d'évaluer numériquement la borne de perturbation obtenue, tout en optimisant celle-ci par rapport aux valeurs des paramètres de la norme $\|\cdot\|_v$ pour lesquels cette borne est définie.

Les résultats obtenus dans ce mémoire, nous a permis d'envisager de nouvelles perspectives de recherche :

- Estimation de la déviation des autres mesures de performance du modèle étudié via la borne obtenue.

- Analyse de sensibilité du modèle par estimation de l'erreur relative de la borne de stabilité forte.
- Raffinement des résultats obtenus dans le sens d'obtention de la même borne en utilisant la norme de variation totale.

Bibliographie

- [1] ABBAS, K., AND AÏSSANI, D. Approximation of performance measures in an $M/G/1$ queue with breakdowns. *Quality Technology and Quantitative Management* 7, 4 (2010), 353–363.
- [2] ABBAS, K., AND AÏSSANI, D. Strong stability of the embedded markov chain in an $GI/M/1$ queue with negative customers. *Applied Mathematical Modelling* 34, 10 (2010), 2806–2812.
- [3] AÏSSANI, A. On the $M/G/1$ queueing system with repeated orders and unreliable server. *Journal of Technology* 6 (1988), 93–123.
- [4] AÏSSANI, A. Influence des pannes des serveurs sur la distribution de nombre de clients en orbite et dans un système $M. G/1/0$ avec rappels. *Technologies Avancées* 2 (1991), 23–38.
- [5] AÏSSANI, D. Evaluation des performances des systemes informatiques. *Cours de Post-Graduation, Institut d'Informatique, USTHB Alger* (1988).
- [6] AÏSSANI, D. Ergodicité uniforme et stabilité des chaines de markov : Application aux systèmes de files d'attente. *Séminaire Mathématiques de Rouen*, 167 (1990), 115–121.
- [7] AÏSSANI, D., ADEL-AISSANOU, K., AND ABBAS, K. Comparative analysis of the errors bounds for state truncation of an overflow model. *LaMOS, university of Bejaia* (2013).
- [8] AÏSSANI, D., AND AÏSSANI, A. Méthodes statistiques en fiabilité. *Cours de Post-Graduation "Statistiques des Processus Aléatoires", Université de Constantine* (2005).
- [9] AÏSSANI, D., AND KARTASHOV, N. Ergodicity and stability of Markov chains with respect to operator topology in the space of transition kernels. *Doklady Akademii Nauk Ukrainskoi SSR* 11, seriya A (1983), 3–5.
- [10] AÏSSANI, D., AND KARTASHOV, N. Strong stability of the imbedded markov chain in an $M/G/1$ system. *Theory Probab. Math. Stat* 29 (1984), 1–5.

- [11] AÏSSANI, D. Ergodicité uniforme et stabilité des chaînes de Markov : Application aux systèmes de files d'attente. *Séminaire Mathématiques de Rouen N 167, C.N.R.S. Edition* (1990), 115–121.
- [12] ALEM, L. M. Inégalités stochastiques des systèmes de files d'attente avec rappels à communication bidirectionnelle. *Mémoire de Magister en Mathématiques Appliquées, Université Abderrahmane Mira de Bejaia* (2014).
- [13] ARRAR, N. Problèmes de convergence, optimisation d'algorithmes et analyse stochastique de systèmes de files d'attente avec rappels. *Thèse de Doctorat Mathématiques Appliquées, Université Panthéon-Sorbonne-Paris I; Université Badji Mokhtar-Annaba* (2012).
- [14] ARTALEJO, J., AND GÓMEZ-CORRAL, A. Retrial queueing systems : a computational approach. 2008.
- [15] ARTALEJO, J., AND GOMEZ-CORRAL, A. Steady state solution of a single-server queue with linear repeated requests. *Journal of Applied Probability* 34, 1 (1997), 223–233.
- [16] ARTALEJO, J., AND LÒPEZ-HERRERO, M. On the $M/G/1$ queue with quadratic repeated attempts. *Statistical Methods* 3 (2001), 60–78.
- [17] BARECHE, A., AND AÏSSANI, D. Kernel density in the study of the strong stability of the $M/M/1$ queueing system. *Operations Research Letters* 36, 5 (2008), 535–538.
- [18] BARECHE, A., AND AÏSSANI, D. Statistical techniques for a numerical evaluation of the proximity of $G/G/1$ and $G/M/1$ queueing systems. *Computers and Mathematics with Applications* 61, 5 (2011), 1296–1304.
- [19] BENAOUICHA, M., AND AÏSSANI, D. Strong stability in a $G/M/1$ queueing system. *Theory of Probability and Mathematical Statistics* 71 (2005), 25–36.
- [20] BENOURET, Z., AND AÏSSANI, D. Stabilité forte d'un modèle de risque classique modifié. In *Actes du Colloque International Statistique des Processus et Applications, Constantine* (2008), pp. 18–19.
- [21] BENOURET, Z., AND AÏSSANI, D. Strong stability in a two-dimensional classical risk model with independent claims. *Scandinavian Actuarial Journal* 2010, 2 (2010), 83–92.
- [22] BERDJOUJ, L. Stabilité forte dans les systèmes de files d'attente avec rappels. *thèse de Magister en Mathématiques Appliquées, Université Abderrahmane Mira de Bejaia* (2000).

- [23] BERDJOUJ, L., AND AISSANI, D. Strong stability in retrial queues. *Theory of Probability and Mathematical Statistics* 68 (2004), 11–17.
- [24] BOUALEM, M. Sur la propriété de décomposition stochastique dans un système d’attente avec rappels et vacances. *Thèse de Doctorat en Mathématiques Appliquées, Université Abderrahmane Mira de Bejaia* (2009).
- [25] BOUALLOUCHE, L., AND AÏSSANI, D. Measurement and performance of the strong stability method. *Theory of Probability and Mathematical Statistics* 72 (2006), 1–9.
- [26] BOUALLOUCHE-MEDJKOUNE, L., AND AISSANI, D. Performance analysis approximation in a queueing system of type $M/G/1$. *Mathematical Methods of Operations Research* 63, 2 (2006), 341.
- [27] BOUALLOUCHE-MEDJKOUNE, L., AND AISSANI, D. Quantitative estimates in an $M2/G2/1$ priority queue with non-preemptive priority : the method of strong stability. *Stochastic Models* 24, 4 (2008), 626–646.
- [28] BOUKIR, L., BOUALLOUCHE-MEDJKOUNE, L., AND AÏSSANI, D. Strong stability of the batch arrival queueing systems. *Stochastic Analysis and Applications* 28, 1 (2009), 8–25.
- [29] BOUTARFA, L. Modèles d’attente avec rappels et priorité et leurs applications. *Thèse de Doctorat en Mathématiques, Université Badji Mokhtar-Annaba* (2014).
- [30] BRÉMAUD, P. *Initiation aux Probabilités et aux chaînes de Markov*. Springer Science & Business Media, 2009.
- [31] CHOI, B. D., SHIN, Y. W., AND AHN, W. C. Retrial queues with collision arising from unslotted CSMA/CD protocol. *Queueing systems* 11, 4 (1992), 335–356.
- [32] COHEN, J. Basic problems of telephone traffic theory and the influence of repeated calls. *Philips Telecommunication Review* 18, 2 (1957), 49–100.
- [33] DJELLAB, N. On the $M/G/1$ retrial queue subjected to breakdowns. *RAIRO-Operations Research* 36, 4 (2002), 299–310.
- [34] DJELLAB, N. Système de files d’attente avec rappels. méthode d’approximation pour un système $M/G/1$ avec rappels et pannes. *Thèse de Doctorat en Mathématiques Appliquées, Université de Annaba* (2003).
- [35] DUDIN, A. N., KRISHNAMOORTHY, A., JOSHUA, V., AND TSARENKOV, G. V. Analysis of the $BMAP/G/1$ retrial system with search of customers from the orbit. *European Journal of Operational Research* 157, 1 (2004), 169–179.

- [36] FALIN, G., AND TEMPLETON, J. G. *Retrial queues*, vol. 75. CRC Press, 1997.
- [37] FAYOLLE, G. A simple telephone exchange with delayed feedbacks. In *Proc. of the international seminar on Teletraffic analysis and computer performance evaluation* (1986), North-Holland Publishing Co., pp. 245–253.
- [38] HAMADOUCHE, N., AND AISSANI, D. Stabilité forte d’un système d’attente $M2/G2/1$ avec priorité absolue. In *Actes du Colloque International Statistique des Processus et Applications, Constantine* (2008), pp. 18–19.
- [39] IOUKNANE, S. Etude du modele $M/G/1$ avec rappels et feedback. *Mémoire d’ingénieur d’état en Recherche Opérationnelle. Université Abderrahmane Mira de Bejaia* (2011).
- [40] ISSAADI, B., AÏSSANI, D., ET AL. Estimation de l’erreur de la troncature par la méthode de stabilité forte. *thèse de Doctorat en Mathématiques Appliquées, Université Abderrahmane Mira de Bejaia* (2011).
- [41] ISSAADI, B. ABBAS, K., AND AÏSSANI, D. Perturbation Analysis of the $GI/M/s$ Queue. 18, 3 (2016).
- [42] ISSADI, B., AÏSSANI, D., AND ABBAS, K. Strong stability method for convergence of $M/M/c/c$. *LaMOS* (2015).
- [43] KALASHNIKOV, W., AND TSITSIASHVILI, G. Stability analysis of queueing systems. *Journal of Soviet Mathematics* 17, 6 (1981), 2238–2255.
- [44] KARTASHOV, N. Criteria for uniform ergodicity and strong stability of Markov chains with a common phase space. *Theory of Probability and Mathematical Statistics, American Mathematical Society* 30 (1985), 71–89.
- [45] KARTASHOV, N. Strongly stable markov chains. *journal of soviet mathematics* 34, 2 (1986), 1493–1498.
- [46] KARTASHOV, N., AND VLADIMIROVIČ, N. *Strong stable Markov chains*. Vsp, 1996.
- [47] KENDALL, D. G. Stochastic processes occurring in the theory of queues and their analysis by the method of the imbedded Markov chain. *The Annals of Mathematical Statistics* (1953), 338–354.
- [48] KLEINROCK, L. *Queueing systems theory*. John Wiley and sons edition, 1975.
- [49] KLEINROCK, L. *Queueing systems (computer application)*. John Wiley and sons edition, 1976.
- [50] KOSTEN, L. On the influence of repeated calls in the theory of probabilities of blocking. *De Ingenieur* 59, 1 (1947), 947.

- [51] LAKAOUR, L. Modélisation, analyse et évaluation des méthodes d'accès au médium dans les réseaux sans fil. *thèse de Doctorat en Mathématiques Appliquées, Université Abderrahmane Mira de Bejaia* (2019).
- [52] LAKAOUR, L., AÏSSANI, D., ADEL-AISSANOU, K., AND BARKAOUI, K. $M/M/1$ retrial queue with collisions and transmission errors. *Methodology and Computing in Applied Probability* (2018), 1–12.
- [53] LEE, A. M. *Applied queueing theory*. Springer, 1966.
- [54] LEKADIR, O., AND AÏSSANI, D. Strong stability in a Jackson queueing network. *77* (2007), 86 – 98.
- [55] LI, H., AND Q. ZHAO, Y. A retrial queue with a constant retrial rate, server downs and impatient customers. *Stochastic Models 21*, 2-3 (2005), 531–550.
- [56] LITTLE, J. D. A proof for the queuing formula : $L = \lambda w$. *Operations research* 9, 3 (1961), 383–387.
- [57] MEDHI, J. *Stochastic models in queueing theory*. Elsevier, 2002.
- [58] MOUHOUBI, Z., AND AÏSSANI, D. Some inequalities of uniform ergodicity and strong stability of homogeneous Markov chains. *17* (2005), 171 – 186.
- [59] OUAZINE, S. Approche des développements en séries de Taylor pour l'approximation fonctionnelle des systèmes. *Thèse de Doctorat en Mathématiques, Université Abderrahmane Mira de Bejaia* (2016).
- [60] RABTA, B., AND AÏSSANI, D. Strong stability in an (R, s, S) inventory model. *97* (2005), 159 – 171.
- [61] RACHEV, S. The problem of stability in queueing theory. *Queueing Systems 4*, 4 (1989), 287–317.
- [62] SHIKATA, Y., SUZUKI, S., TAKAHASHI, Y., IHARA, T., AND NAKANISHI, T. Loss probability evaluation of PCS call-terminating control. *IEICE TRANSACTIONS on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences 82*, 7 (1999), 1230–1237.
- [63] TEMPLETON, J. G. Retrial queues. *Top 7*, 2 (1999), 351–353.
- [64] VAN DIJK, N. M. Truncation of Markov chains with applications to queueing. *Operations Research 39*, 6 (1991), 1018–1026.
- [65] WILKINSON, R. I. Theories for toll traffic engineering in the USA. *Bell System Technical Journal 35*, 2 (1956), 421–514.
- [66] YANG, T., AND TEMPLETON, J. G. C. A survey on retrial queues. *Queueing Systems 2*, 3 (1987), 201–233.

- [67] ZIDANI, N. Les approximations dans l'analyse stochastique des systèmes de files d'attente avec rappels et multiserveurs. *Thèse de Doctorat en Mathématiques, Université d'Annaba* (2017).

Résumé

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés à l'applicabilité de la méthode de stabilité forte pour estimer l'erreur due à la négligence du phénomène des collisions dans un système d'attente avec rappels, collisions et erreur de transmission. Dans un premier temps, nous avons effectué une synthèse sur les systèmes de files d'attente avec rappels. Dans un deuxième temps, nous avons présenté brièvement les concepts de base de la théorie de stabilité forte et nous avons donné un exemple illustratif pour mieux comprendre le concept de cette méthode. Nous nous sommes intéressés par la suite à l'estimation de l'erreur par la méthode de stabilité forte pour un modèle sans collisions. Nous avons mis en évidence les conditions pour lesquelles il sera possible d'approcher les caractéristiques du modèle réel (avec collisions) par celles correspondantes au modèle nominal (sans collisions). Nous avons obtenu les inégalités de stabilité, avec un calcul exact des constantes. L'algorithme élaboré permet d'estimer l'erreur due à l'approximation ainsi que la norme par rapport à laquelle l'erreur a été développée.

Mots clé : Stabilité forte, Collisions, Files d'attente avec rappels, Erreurs de transmission, Modèle réel, Modèle nominal, Inégalités de stabilité.

Abstract

In this work, we investigated the applicability of the strong stability method to estimate the error due to the negligence of the collisions phenomenon in a retrial queue with collisions and transmission errors. As a first step, we have summarized the known results on retrial queues. In a second step, we briefly presented the basic concepts of the theory of strong stability and we gave an illustrative example to better understand the concept of this method. We then looked at the estimation of the error by the strong stability method for a model without collisions. We have highlighted the conditions for which it will be possible to approach the characteristics of the real model (with collisions) by those corresponding to the nominal model (without collisions). We obtained inequalities of stability, with an exact calculation of the constants. From the results obtained an algorithm for estimating the error due to the approximation as well as the standard against which the error was developed.

Keywords : Strong stability, Collisions, Retrial queues, Transmission errors, Real model, Nominal model, Inequalities of stability.