République Algérienne et Démocratique et Populaire

Ministère de L'Enseigement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université A.Mira de Béjaia
Faculté des Sciences Exactes
Département de Recherche Opérationnelle

Mémoire de Master

Option : **Modélisation Mathématique et Techniques de Décision**

Thème

Application des méthodes d'optimisation aux modèles financiers

Présentée par :

BOUDA Sarah et HADDAD Hassiba

Devant le jury composé de :

Président	**M^{r}. Noureddine KHIMOUM**	**M C B .**
Promoteur	**M^{r}. Mohand Ouamer BIBI**	**Professeur.**
Examinatrice	**M^{elle}. Zohra AOUDIA**	**M A A .**
Examinatrice	**M^{elle}. Fouzia GHELLAB**	**Doctorante.**

Béjaia,Juillet 2019.

Remerciements

Tout d'abord, nous remercions Allah qui nous a donné la force et le courage de terminer ce modeste travail.

Nous tenons à remercier notre promoteur **Mr** BiBi M.O, Professeur à l'université de Béjaia, pour nous avoir suivies durant la réalisation de ce mémoire, pour sa disponibilité et la patience dont il a fait preuve à notre égard, ainsi que pour ses précieux consiels et la confiance qu'il nous a accordé. Nous ne le remercierons jamais assez pour son aide précieuse qui a été d'un grand apport pour l'accomplissement de ce travail.

Nous tenons également à remercier les membres de jury : **Mr** Khimoum N, **Melle** Aoudia Z et **Melle** Ghellab F qui ont eu l'amabilité d'examiner ce travail.

Nous remercions tous les enseignants du département Recherche Opérationnelle pour leur rôle important dans notre formation.

Nous remercions nos parents, chacune de nous en son nom, pour nous avoir soutenues.

Dédicaces

$\mathcal{A}$ mes chers parents, je dédie ce modeste travail, tant ils se sont dévoués corps et âme pour qu'un jour nous rejoignons ceux qui portent le flambeau du savoir.
$\mathcal{A}$ mes tantes qui m'ont toujours soutenue et encouragée de près et de loin.
$\mathcal{A}$ ma soeur et mes frères.
$\mathcal{A}$ mes oncles.
$\mathcal{A}$ toutes mes chères amies : Karima, Khadija, Warda, Zakia, Siham, Narimane, Djedjiga, Fayza, Mounia.
$\mathcal{A}$ ma chère binôme Hassiba.

$\mathcal{S}$arah.

Dédicaces

$\mathcal{J}$e dédie ce modeste travail : $\mathcal{A}$ mes très chèrs parents,
$\mathcal{A}$ mes frères.
$\mathcal{A}$ mes chères sœurs, sourtout Yousra qui m'a aidée durant la réalisation de ce travail.
$\mathcal{A}$ mes oncles.
$\mathcal{A}$ mes tantes.
$\mathcal{A}$ toute la famille HADDAD.
$\mathcal{A}$ mes amis(es).
$\mathcal{A}$ ma chère binôme $\mathcal{S}$arah.
$\mathcal{U}$ne dédicace spéciale à mon fiancé Sofiane qui m'a supportée pendant cette année d'étude.

$\mathcal{H}$assiba.

Table des matières

Introduction générale

Les mathématiques appliquées s'intéressent à l'application du savoir mathématique aux autres domaines (économie, biologie, informatique, physique, etc). Parmi ses branches, on trouve l'optimisation qui vise à modéliser et à résoudre analytiquement ou numériquement des problèmes, où l'on cherche à maximier (ou minimiser) une fonction objectif sous certaines contraintes. On distingue plusieurs types de problèmes d'optimisation qui sont classés selon leurs fonctions objectifs et leurs contraintes : optimisation linéaire, optimisation non linéaire, optimisation dynamique, etc.

La programmation linéaire, consiste à optimiser une fonction linéaire dans $\mathbb{R}^n$ sous des contraintes linéaires.

Le calcul des variations est apparu en 1696 avec le problème de la courbe du bachistochrone posé par J.Bernoulli, c'est une branche de l'analyse fonctionnelle qui regroupe l'ensemble des méthodes pour optimiser une fonctionnelle.

En 1950, la théorie de contrôle est venue comme généralisation du calcul des variations, où le principe du maximum de Pontryaguine a été développé, donnant une condition nécessaire d'optimalité, pour trouver les trajectoires optimales ; or ce n'est pas souvent pratique, c'est pourquoi plusieurs méthodes numériques directes et indirectes ont été développées pour la résolution des problèmes de contrôle optimal.

Quant à la programmation dynamique est une autre méthode algorithmique pour la résolution des problèmes d'optimisation séquentielle, elle a été introduite au début des années 1950 par R.Bellman.

Le présent mémoire a pour objectif d'appliquer ces différentes méthodes et techniques d'optimisation sur des modèles financiers. Il est structuré en quatre chapitres, organisés de la manière suivante :

Dans le premier chapitre, nous rappellons les définitions de base de la programmation linéaire. Puis nous proposons l'étude de la méthode de support pour la résolution des problèmes linéaires , illustrée par un exemple de planification de la production des chassis.

Dans le deuxième chapitre, nous introduisons le problème de calcul des variations, où nous donnons les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité. Ensuite, nous illustrons l'équation d'Euler-Lagrange sur deux exemples en finance : Le problème de consommation-épargne et le modèle de la croissance optimale avec ressource épuisable.

Dans le troisième chapitre, nous nous intéressons à la théorie du contrôle optimal, où nous présentons les notions de base de cette théorie et la contrôlabilité des systèmes linéaires. Nous donnons par la suite le principe du maximum de Pontryaguine pour la résolution des problèmes de contrôle optimal que nous appliquons sur l'exemple de gestion d'un portefeuille financier en présence des coûts de transaction. À la fin de ce chapitre, nous exposons la méthode de tir simple pour la résolution des problèmes de contrôle optimal, cette dernière fait partie des méthodes indirectes qui sont basées sur le principe du maximum.

Dans le quatrième chapitre, nous présentons le principe de la programmation dynamique pour les problèmes en temps discret et continu. Ensuite, nous traitons le problème du consommateur dans le cas discret et le modèle de la consommation optimale dans le cas continu. À la fin, nous montrons le lien entre la programmation dynamique et le principe du maximum de Pontryaguine.

Nous terminons ce mémoire par une conclusion et une bibliographie.

Chapitre 1

Programmation Linéaire

Introduction

La programmation linéaire est l'une des plus importantes techniques d'optimisation en recherche opérationnelle. Son étude a été menée par plusieurs mathématiciens parmi lesquels on distingue : L.V. Kantorovitch(1939), G.B.Dantzig (1947) qui a mis au point la méthode du simplexe. Au milieu des années 80, Karmarkar a donné lieu aux méthodes des points intérieurs pour la résolution des programmes linéaires.
La méthode de support développée par R.Gabassov et F.M.Kirillova dans les années 70 est une généralisation de la méthode du simplexe.

1.1 Formulation du problème

Considérons le problème de la programmation linéaire sous la forme standard :

$$\max Z = c^T x, \tag{1.1}$$

$$Ax = b, \tag{1.2}$$

$$x \geq 0, \tag{1.3}$$

où
x : vecteur des variables de décision de dimension n,
c : vecteur des coûts de dimension n,
A : matrice des contraintes d'ordre $m \times n$, avec $rang A = m < n$,
b : vecteur des seconds membres des contraintes de dimension m.

Quelques définitions et théorèmes fondamentaux :

Définition 1.1.1. [1] Une solution réalisable (SR) x est un vecteur des variables qui vérifie les contraintes (1.2) et (1.3) du problème (1.1)- (1.3). Notons l'ensemble des solutions réalisables par S :

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : \quad Ax = b, \quad x \geq 0\}.$$

Définition 1.1.2. [1] On appelle solution de base du système $Ax = b$, la solution x^* définie par :

$$x^* = \begin{pmatrix} x_B^* \\ x_N^* \end{pmatrix}, \quad x_B^* = A_B^{-1} b \, \mathbb{R}^m, \quad x_N^* = (0, \ldots, 0)^T \mathbb{R}^{n-m},$$

où A_B est constitué de m-vecteurs colonnes de A linéairement indépendants.

Définition 1.1.3. [1] On dit que la solution de base x^* du système $Ax = b$ est une solution de base réalisable si de plus elle vérifie les contraintes (1.3), i.e $x_B^* \geq 0$.

Théorème 1.1.1. *[1] Si le problème* (1.1)- (1.3) *admet une solution réalisable, alors il admet aussi une solution réalisable de base (SRB).*

Définition 1.1.4. [1] Une solution optimale x^* est une solution réalisable qui maximise Z, c'est à dire :

$$x^* \in S \quad et \quad Z(x^*) \geq Z(x), \quad \forall x \in S.$$

Définition 1.1.5. [1] $x^* \in S$ est un point extrême s'il ne peut être exprimé à l'aide d'une combinaison convexe de deux autres points de S :

$$\nexists \, x, \, y \in S, \, x \neq y : \, x^* = \lambda x + (1 - \lambda) y, \quad \lambda \in]0, 1[.$$

Théorème 1.1.2. *[1] Une solution réalisable x^* est un point extrême si et seulement si elle est une solution réalisable de base.*

Théorème 1.1.3. *[1] Si $S \neq \emptyset$, alors*
– *le problème* (1.1)- (1.3) *admet une solution réalisable optimale finie,*
– *ou le problème* (1.1)- (1.3) *est non borné,*

1.2 Méthodes de résolution des problèmes de programmation linéaire

Dans la littérature, il y a plusieurs méthodes qui permettent de résoudre un problème de programmation linéaire (PL). Les méthodes les plus connues sont : la méthode graphique, la méthode du simplexe, la méthode d'activation des contraintes et la méthode des points intérieurs, etc.
Dans ce travail, nous présentons la méthode de support.

1.2.1 Méthode de support pour la résolution d'un PL à variables non négatives

Position du problème et définitions :

Le problème de programmation linéaire se présente sous la forme standard :

$$\max Z = c^T x, \tag{1.4}$$

$$Ax = b, \tag{1.5}$$

$$x \geq 0, \tag{1.6}$$

où

x : vecteur des variables de décision de dimension n,

c : vecteur des coûts de dimension n,

A : matrice des contraintes d'ordre $m \times n$, avec $rangA = m < n$,

b : vecteur des seconds membres des contraintes de dimension m .

Définissons les ensembles d'indicies suivants : $I = \{1, \ldots, m\}$ est l'ensemble des indices des lignes de la matrice A, $J = \{1, \ldots, n\}$ est l'ensemble des indices des colonnes de la matrice A. Soit la partition suivante : $J = J_B \cup J_N$, $J_B \cap J_N = \emptyset$, $|J_B| = m$. On peut alors partitionner les vecteurs et la matrice A de la manière suivante :

$x = x(J) = (x_j, j \in J) = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$, $x_B = (x_j, j \in J_B)$, $x_N = (x_j, j \in J_N)$, $c = c(J) = \begin{pmatrix} c_B \\ c_N \end{pmatrix}$,

$A = (I, J) = (a_{ij}, i \in I, j \in J) = (a_j, j \in J)$,

$a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$, $A = (A_B|A_N)$, $A_B = A(I, J_B)$, $A_N = A(I, J_N)$.

– L'ensemble J_B est appelé support si :

$$det(A_B) \neq 0.$$

– Le couple $\{x, J_B\}$ formé d'une SR x et d'un support J_B est appelé Solution Réalisable de Support (SRS).

– Une solution réalisable x^* est dite optimale si :

$$Z(x^*) = c^T x^* = \max_{x \in S} c^T x.$$

– Une solution réalisable x^ϵ est appelée ϵ-optimale ou suboptimale si :

$$Z(x^*) - Z(x^\epsilon) \leq \epsilon,$$

où ϵ est une précision donnée.

– Une solution réalisable de support est dite non-dégénérée si :

$$x_j > 0, \forall j \in J_B. \tag{1.7}$$

Soit $\{x, J_B\}$une SRS du problème (1.4)- (1.6).

– Définissons le vecteur des potentiels u :

$$u^T = c_B^T A_B^{-1}, \tag{1.8}$$

– ainsi que le vecteur des coûts réduits E :

$$\begin{cases} E_N^T = u^T A_N - c_N^T \Leftrightarrow E_j = u^T a_j - c_j, j \in J_N, \\ E_B^T = u^T A_B - c_B^T = c_B^T A_B^{-1} A_B - c_B^T = 0. \end{cases} \tag{1.9}$$

Formule d'accroissement de la fonction objectif :

Soit $\{x, J_B\}$ une SRS du problème (1.4)- (1.6). Considérons une autre solution réalisable quelconque $\bar{x} = x + \theta l$, $\theta > 0$ et $l \in \mathbb{R}^n$. L'accroissement de la fonction objectif s'écrit alors :

$$Z(\bar{x}) - Z(x) = \theta c^T l. \tag{1.10}$$

Par ailleurs, on a :

$$\begin{cases} Ax = b, \\ A\bar{x} = b, \end{cases} \Rightarrow Al = 0. \tag{1.11}$$

En posant $l = \begin{pmatrix} l_B \\ l_N \end{pmatrix}$, $l_B = l(J_B)$, $l_N = l(J_N)$, l'égalité $Al = 0$ peut aussi s'écrire :

$$A_B l_B + A_N l_N = 0, \tag{1.12}$$

d'où

$$l_B = -A_B^{-1} A_N l_N. \tag{1.13}$$

Alors

$$\begin{aligned} Z(\bar{x}) - Z(x) &= \theta c^T l \\ &= \theta(c_B^T l_B + c_N^T l_N) \\ &= -\theta(c_B^T A_B^{-1} A_N l_N - c_N^T l_N) \\ &= -\theta(c_B^T A_B^{-1} A_N - c_N^T) l_N \\ &= -\theta(u^T A_N - c_N^T) l_N. \end{aligned}$$

Donc l'accroissement (1.10) devient :

$$Z(\bar{x}) - Z(x) = -\theta E_N^T l_N. \tag{1.14}$$

On définit les deux sous-ensembles J_{N+} et J_{N0} de J_N comme suit :

$$J_{N+} = \{j \in J_N : x_j > 0\} \quad et \quad J_{N0} = \{j \in J_N : x_j = 0\}. \tag{1.15}$$

Les vecteurs c_N et x_N peuvent alors être partitionnés de la manière suivante :

$$c_N = \begin{pmatrix} c_{N+} \\ c_{N0} \end{pmatrix}, c_{N+} = (c_j, j \in J_{N+}), c_{N0} = (c_j, j \in J_{N0}),$$

$$x_N = \begin{pmatrix} x_{N+} \\ x_{N0} \end{pmatrix}, x_{N+} = (x_j, j \in J_{N+}), x_{N0} = (x_j, j \in J_{N0}).$$

Le vecteur des coûts réduits E peut aussi s'écrire :

$$E^T = (E_B^T, E_{N+}^T, E_{N0}^T),$$

avec

$$E_{N+}^T = u^T A_{N+} - c_{N+}^T \quad et \quad E_{N0}^T = u^T A_{N0} - c_{N0}^T.$$

La formule d'accroissement (1.14) prend alors la forme finale suivante :

$$Z(\bar{x}) - Z(x) = -\theta(E_{N+}^T l_{N+} + E_{N0}^T l_{N0}). \tag{1.16}$$

Critère d'optimalité :

Théorème 1.2.1. *[2] Soit* $\{x, J_B\}$ *une SRS du problème* (1.4)- (1.6). *Alors les relations :*

$$\begin{cases} E_j \geq 0, & si \quad j \in J_{N0}, \\ E_j = 0, & si \quad j \in J_{N+}, \end{cases} \tag{1.17}$$

sont suffisantes pour l'optimalité de la solution réalisable x. *Ces mêmes relations sont aussi nécessaires dans le cas où la SRS* $\{x, J_B\}$ *est non-dégénérée.*

Estimation de suboptimalité :

Pour estimer l'écart existant entre la valeur optimale $Z(x^*)$ et une autre valeur $Z(x)$ d'une SRS quelconque $\{x, J_B\}$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} Z(x^*) - Z(x) =& c^T(x^* - x) \\ &= c_B^T(x_B^* - x_B) + c_N^T(x_N^* - x_N) \\ &= -E_N^T(x_N^* - x_N) \\ &= -\sum_{j \in J_N} E_j(x_j^* - x_j) = \sum_{j \in J_N} E_j(x_j - x_j^*). \end{aligned}$$

Supposons que $E_N \geq 0$ et majorons l'expression précédente :

$$Z(x^*) - Z(x) \leq \sum_{j \in J_N} E_j(x_j - 0) = \sum_{j \in J_N} E_j x_j. \tag{1.18}$$

Pour $E_N \geq 0$, le nombre :

$$\beta(x, J_B) = \sum_{j \in J_N} E_j x_j = E_N^T x_N$$

est appelé estimation de suboptimalité.
On a alors le théorème suivant :

Théorème 1.2.2. *[2] (Critère de suboptimalité) Soit* $\{x, J_B\}$ *une SRS du problème* (1.4)- (1.6) *et* ϵ *un nombre positif ou nul arbitraire. Si*

$$\beta(x, J_B) \leq \epsilon, \tag{1.19}$$

alors la solution réalisable x *est* ϵ*-optimale.*

Preuve. En vertu de (1.18), on peut écrire pour $E_N \geq 0$:

$$Z(x^*) - Z(x) \leq \beta(x, J_B) = E_N^T x_N \leq \epsilon \Rightarrow Z(x^*) - Z(x) \leq \epsilon,$$

d'où la solution réalisable x est ϵ-optimale.

Algorithme de la méthode de support :

Étant donné une SRS initiale $\{x, J_B\}$ et ϵ un nombre positif ou nul quelconque, le but de l'algorithme est alors de construire une solution réalisable ϵ-optimale x^ϵ ou carrément une solution optimale x^*. L'itération de l'algorithme consiste donc à faire le passage d'une SRS $\{x, J_B\}$ vers une autre SRS $\{\bar{x}, \bar{J}_B\}$ tel que $Z(\bar{x}) \geq Z(x)$. Pour ce faire, on construit la nouvelle solution réalisable $\bar{x}$ de la manière suivante :

$$\bar{x} = x + \theta l, \quad \theta \geq 0,$$

où l est un vecteur de dimension n, appelé direction d'amélioration, θ est le pas le long de cette direction. Dans cet algorithme, on choisira la métrique de simplexe où on ne fera varier qu'une seule composante x_j parmi toutes celles qui ne vérifient pas les relations d'optimalité (1.17). Pour que l'accroissement soit maximal, il faut alors prendre θ aussi grand que possible et choisir l'indice j_0 tel que :

$$|E_{j_0}| = \max_{j \in J_{NNO}} |E_j|, \tag{1.20}$$

où l'ensemble J_{NNO} représente l'ensemble des indices non-optimaux de l'ensemble J_N :

$$J_{NNO} = \{j \in J_N : [E_j < 0 \quad et \quad x_j = 0] \quad ou \quad [E_j \neq 0 \quad et \quad x_j > 0]\}.$$

On posera donc :

$$\begin{aligned} l_{j_0} &= -signE_{j_0}, \\ l_j &= 0, \quad j \neq 0, \quad j \in J_N, \\ l(J_B) &= -A_B^{-1} A_N l(J_N) = A_B^{-1} a_{j_0} sign(E_{j_0}). \end{aligned} \tag{1.21}$$

D'autre part, le pas θ doit vérifier les relations suivantes :

$$\theta l_j \leq x_j, \quad j \in J_B, \tag{1.22}$$

$$-\theta sign(E_{j_0}) \leq x_{j_0}. \tag{1.23}$$

En calculant les différentes valeurs maximales que peut prendre le pas θ dans les relations (1.22) et (1.23), on aura :

$$\theta_{j_1} = \min_{j \in J_B} \theta_j, \tag{1.24}$$

où

$$\theta_j = \begin{cases} -\frac{x_j}{l_j}, & si \quad l_j < 0, \\ \infty, & si \quad l_j \geq 0. \end{cases} \tag{1.25}$$

D'autre part,

$$\theta_{j_0} = \begin{cases} x_j, & si \quad l_j = -1, \\ \infty, & si \quad l_j = 1. \end{cases} \tag{1.26}$$

Par conséquent, le pas maximal θ^0 le long de la direction l pour que $\bar{x}$ soit une solution réalisable est égale à :

$$\theta^0 = \min\{\theta_{j_0}, \theta_{j_1}\}. \tag{1.27}$$

En tenant compte des relations (1.21) et (1.27), la nouvelle solution réalisable $\bar{x}$ s'écrit :

$$\bar{x} = x + \theta^0 l.$$

Si $E_N \geq 0$, on calcule l'estimation de suboptimalité de la nouvelle SRS $\{\bar{x}, J_B\}$:

$$\beta(\bar{x}, J_B) = \max_{j \in J_N} E_j \bar{x}_j. \tag{1.28}$$

Donc :

$$\beta(\bar{x}, J_B) = \beta(x, J_B) - \theta^0 E_{j_0}. \tag{1.29}$$

Si $\beta(\bar{x}, J_B) \leq \epsilon$, alors l'algorithme s'arrête avec $\bar{x}$ une solution ϵ-optimale. Sinon, on agit de la manière suivante :
Si $\theta^0 = \theta_{j_0}$, alors il est inutile de changer de support :

$$\bar{J}_B = J_B.$$

Si $\theta^0 = \theta_{j_1}$, alors on doit changer le support J_B par $\bar{J}_B = (J_B \setminus \{j_1\}) \cup \{j_0\}$. Donc la nouvelle SRS $\{\bar{x}, \bar{J}_B\}$ s'ecrit :

$$\bar{x} = x + \theta^0 l \quad et \quad \bar{J}_B = (J_B \setminus \{j_1\}) \cup \{j_0\}.$$

Si $\bar{E}_N \geq 0$ et $\beta(\bar{x}, \bar{J}_B) = 0$, alors $\{\bar{x}, \bar{J}_B\}$ est une SRS optimale et le processus de résolution s'arrête.
Si $\bar{E}_N \geq 0$ et $\beta(\bar{x}, \bar{J}_B) \leq \epsilon$, alors $\{\bar{x}, \bar{J}_B\}$ est une SRS ϵ-optimale et le processus de résolution s'arrête.
Sinon, on recommencera une autre itération avec une nouvelle SRS $\{\bar{x}, \bar{J}_B\}$.

Schéma de l'algorithme :

Soit $\{x, J_B\}$ une SRS initiale du problème (1.4)- (1.6)et ϵ un nombre positif ou nul. Les étapes de résolution sont présentées ci-dessous :
Étape 1 :
Calculer le vecteur des potentiels u et le vecteur des coûts réduits E_N :

$$u^T = c_B^T A_B^{-1}, \quad E_N^T = u^T A_N - c_N^T.$$

Étape 2 :(Test d'optimalité de la SRS $\{x, J_B\}$)
Cas 1 : Si $E_N \geq 0$, alors calculer l'estimation de suboptimalité $\beta(x, J_B) = E_N^T x_N$.
Si $\beta(x, J_B) = 0$, alors l'algorithme s'arrête avec $\beta(x, J_B)$ une solution optimale du problème (1.4)- (1.6).
Si $\beta(x, J_B) \leq \epsilon$, alors l'algorithme s'arrête avec $\beta(x, J_B)$ une solution ϵ-optimale du problème (1.4)- (1.6).
Sinon, aller à l'étape (3).
Cas 2 : Si $E_N \ngeq 0$, alors aller à l'étape (3).
Étape 3 : (changement de solution réalisable x en $\bar{x}$)

1. Déterminer l'ensemble des indices non optimaux :

$$J_{NN0} = \{j \in J_N : [E_j < 0 \quad et \quad x_j = 0] \quad ou \quad [E_j \neq 0 \quad et \quad x_j > 0]\};$$

2. Choisir l'indice j_0 tel que $|E_{j_0}| = \max\limits_{j \in J_{NN0}} |E_j|$,
3. Calculer la direction d'amélioration l en utilisant les relations suivantes :

$$l_{j_0} = -signE_{j_0},$$

$$l_j = 0, \quad j \neq 0, \quad j \in J_N,$$

$$l(J_B) = -A_B^{-1} A_N l(J_N) = A_B^{-1} a_{j0} sign(E_{j0}).$$

4. Calculer $\theta_{j_1} = \min\limits_{j \in J_B} \theta_j$, où θ_j est déterminé comme suit :

$$\theta_j = \begin{cases} -\frac{x_j}{l_j}, & si \quad l_j < 0, \\ \infty, & si \quad l_j \geq 0. \end{cases}$$

5. Calculer θ_{j_0}, où θ_{j_0} est déterminé comme suit :

$$\theta_{j_0} = \begin{cases} x_j, & si \quad l_j = -1, \\ \infty & si \quad l_j = 1. \end{cases}$$

6. Déterminer le pas θ^0 tel que $\theta^0 = \min\{\theta_{j_0}, \theta_{j_1}\}$.
7. Calculer $\bar{x}$ et $Z(\bar{x})$:
$$\bar{x} = x + \theta^0 l, \quad Z(\bar{x}) = Z(x) + \theta^0 |E_{j_0}|.$$

Étape 4 : (Test d'optimalité de la nouvelle solution réalisable $\{\bar{x}, J_B\}$)
Cas 1 : Si $E_N \geq 0$, alors calculer $\beta(\bar{x}, J_B)$:

$$\beta(\bar{x}, J_B) = \beta(x, J_B) - \theta^0 |E_{j_0}|.$$

Si $\beta(\bar{x}, J_B) = 0$, alors l'algorithme s'arrête avec $\beta(\bar{x}, J_B)$ une solution optimale du problème (1.4)- (1.6).
Si $\beta(\bar{x}, J_B) \leq \epsilon$, alors l'algorithme s'arrête avec $\beta(\bar{x}, J_B)$ une solution ϵ-optimale du problème (1.4)- (1.6).
Sinon, aller à l'étape (5).
Cas 2 :$E_N \ngeq 0$, alors aller à l'étape (5).
Étape 5 : (Changement du support J_B en $\bar{J}_B$)

1. Si $\theta^0 = \theta_{j_0}$, alors $\bar{J}_B = J_B$.
2. Si $\theta^0 = \theta_{j_1}$, alors $\bar{J}_B = (J_B \setminus \{j_1\}) \cup \{j_0\}$.

Poser $x = \bar{x}$, $J_B = \bar{J}_B$ et aller à l'étape (1).

1.3 Exemple

Une entreprise de fabrication des chassis envisage la production de deux nouveaux modèles au moyen des capacités de ses trois ateliers. Il s'agit respectivement d'un chassis en aliminum et d'un chassis en bois. Le premier produit nécessite un passage dans le premier atelier pour fabriquer le cadre en aluminium et un autre dans le troisième atelier, où le verre est monté sur le chassis, tandis que le second produit nécessite un passage dans le deuxième atelier pour fabriquer le cadre en bois et un autre dans le troisième atelier, où le verre est monté sur le chassis. Les profits unitaires, les temps de fabrication en heures de chacun des produits dans chacun des ateliers ainsi que les capacités hebdomadaires de ces ateliers sont donnés par le tableau suivant :

	Produit 1	Produit 2	Capacité
Atelier 1	1	0	4
Atelier 2	0	2	12
Atelier 3	3	2	18
Profit	300 DA	500 DA	

La question qui se pose : combien faut-il produire de chassis de chaque type par semaine afin d'obtenir un profit maximal ?
Pour répondre à cette question, nous allons modéliser le problème de planification de la production des chassis par un programme linéaire :

$$\begin{cases} \max Z = 300x_1 + 500x_2, \\ x_1 \leq 4, \\ 2x_2 \leq 12, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 18, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

La forme standard du problème de planification de la production des chassis s'écrit :

$$(P) \begin{cases} \max Z = 300x_1 + 500x_2, \\ x_1 + x_3 = 4, \\ 2x_2 + x_4 = 12, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_5 = 18, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

Application de l'algorithme de support :

Soit $\{x, J_B\}$ une SRS initiale du problème (P), où $x = (0, 6, 4, 0, 6)^T$, $J_B = \{1, 2, 5\}$, $J_N = \{3, 4\}$, $c_B = (300, 500, 0)^T$, $c_N = (0, 0)^T$, $Z(x) = 3000$, $\epsilon = 0.001$. On a alors :

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \; A_N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Étape 1 :

Calcul du vecteur des potentiels u et le vecteur des coûts réduits E_N :

$$u^T = c_B^T A_B^{-1} = (300, 250, 0), \quad E_N^T = u^T A_N - c_N^T = (300, 250).$$

Étape 2 :

On a $E_N > 0$, alors on calcule l'estimation de suboptimalité $\beta(x, J_B)$:
$\beta(x, J_B) = E_N^T x_N = 1200 > \epsilon$, donc la solution n'est pas ϵ-optimale, aller à l'étape (3).

Étape 3 :

1. Détermination de l'ensemble des indices non optimaux :

$$J_{NNO} = \{j \in J_N : \quad E_j > 0 \quad et \quad x_j > 0\} = \{3\}.$$

2. Choix de l'indice j_0 : $j_0 = 3$.
3. La direction d'amélioration l :

$$l_{j_0} = l_3 = -signE_3 = -1,$$

$$l_4 = 0,$$

$$l(J_B) = (l_1, l_2, l_5)^T = A_B^{-1} a_3 sign(E_3) = (1, 0, -3)^T,$$

donc : $l = (1, 0, -1, 0, -3)^T$.

4. Calcul $\theta_{j_1} = \min\limits_{j \in J_B} \theta_j$:

$$\begin{cases} \theta_1 = \infty, \\ \theta_2 = \infty, \\ \theta_5 = -\frac{x_5}{l_5} = \frac{6}{3} = 2, \end{cases}$$

d'où $\theta_{j_1} = \min\{\theta_1, \theta_2, \theta_5\} = \theta_5 = 2 \Rightarrow j_1 = 5$.

5. Calcul de θ_{j_0} :

$$\theta_{j_0} = \theta_3 = x_3 = 4.$$

6. Le pas $\theta^0 = \min\{\theta_3, \theta_5\} = \theta_5 = 2$.
7. calcul de $\bar{x}$ et $Z(\bar{x})$: $\bar{x} = x + \theta_5 l = (2, 6, 2, 0, 0)^T$, $Z(\bar{x}) = Z(x) + \theta^0 |E_{j_0}| = 3600$.

Étape 4 :

Comme $E_N > 0$, on calcule alors $\beta(\bar{x}, J_B)$:
$\beta(\bar{x}, J_B) = \beta(x, J_B) - \theta^0 |E_{j_0}| = 600 > \epsilon$, la solution n'est pas ϵ-optimale, aller à l'étape 5.

Étape 5 :

On a : $j_1 = 5$, d'où $\bar{J}_B = (J_B \setminus j_1) \cup j_0$.
On pose $x = \bar{x} = (2, 6, 2, 0, 0)^T$,$J_B = \bar{J}_B = \{1, 2, 3\}$ et $J_N = \{4, 5\}$, $c_B = (300, 500, 0)^T$, $c_N = (0, 0)^T$, $Z(x) = 3600$, $\epsilon = 0.001$. On a alors :
$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $A_N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$.

Étape 1 :

Calcul du vecteur des potentiels u et le vecteur des coûts réduits E_N :

$$u^T = c_B^T A_B^{-1} = (0, 150, 100), \quad E_N^T = u^T A_N - c_N^T = (150, 100).$$

Étape 2 :

on a $E_N > 0$, alors on calcule l'estimation de suboptimalité $\beta(x, J_B)$:
$\beta(x, J_B) = E_N^T x_N = 0$, donc la solution est optimale avec $x^* = (2, 6)$ et $Z(x^*) = 3600$.
L'entreprise doit produire deux chassis en aluminium et six chassis en bois chaque semaine et elle aura un profit de $3600DA$.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons donné un aperçu général sur la programmation linéaire, ensuite nous avons présenté l'algorithme de la méthode de support pour la résolution d'un programme linéaire à variables non négatives que nous avons appliqué sur le problème de planification de la production des chassis.

Chapitre 2

Calcul des Variations

Introduction

Le calcul des variations est l'une des branches classiques des mathématiques. De nombreux mathématiciens tels que les frères Bernoulli, Euler, Lagrange, Legendre, Weierstrass, Hilbert, etc, ont marqué son développement. Le calcul des variations est utilisé pour la résolution des problèmes d'optimisation dans lesquels la variable à optimiser est une fonction. Son usage en économie et en finance est plus récent comme on le trouve dans le problème de consommation-épargne et le modèle de croissance optimale avec ressource épuisable. Nous renvoyons les lecteurs aux travaux [3] et [4].

2.1 Formulation du problème :

Considérons le problème de calcul des variations de la forme suivante :

$$(P_1)\begin{cases}\max \Phi(x(.)) = \displaystyle\int_0^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))dt,\\ x(0) = x^0,\\ x(t_1) = x^1,\end{cases} \tag{2.1}$$

où $L : (t, x, v) \longmapsto L(t, x, v)$ est appelée lagrangien et on supposera que
$L \in C^1([0, t_1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, $v(t) = \dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}$, $t \in T = [0, t_1]$.
On cherche alors à résoudre le problème (2.1) dans l'espace $C^1([0, t_1] \times \mathbb{R}^n)$.

2.2 Conditions nécessaires d'optimialité

2.2.1 Equation d'Euler-Lagrange

Proposition 2.2.1. *Soit $x^{(1)}(.) \in C^1([0, t_1] \times \mathbb{R}^n)$. Si $x^{(1)}(.)$ est solution du problème* (2.1)*, alors elle vérifie l'équation d'Euler-Lagrange :*

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v}(t, x^{(1)}(t), \dot{x}^{(1)}(t))\right) = \frac{\partial L}{\partial x}(t, x^{(1)}(t), \dot{x}^{(1)}(t)).$$

Preuve. Soit $x^{(1)}(.)$ solution du problème (2.1). Alors pour tout $h \in C^1([0,t_1] \times \mathbb{R}^n)$ telle que $h(0) = h(t_1) = 0$ on a :

$$I = \lim_{s \longrightarrow 0^+} [\Phi(x^{(1)} + sh) - \Phi(x^{(1)})] \leq 0,$$

et comme L est de classe C^1 la limite précédente vaut alors :

$$I = \int_0^{t_1} [\alpha(t)h(t) + \beta(t)\dot{h}(t)]dt \leq 0,$$

où

$$\alpha(t) = \frac{\partial L}{\partial x}(t, x^{(1)}(t), \dot{x}^{(1)}(t)), \quad \beta(t) = \frac{\partial L}{\partial v}(t, x^{(1)}(t), \dot{x}^{(1)}(t)).$$

Par intégration par parties, et en utilisant le fait que $h(0) = h(t_1) = 0$, on déduit :

$$I = \int_0^{t_1} [\beta(t) - a(t)]\dot{h}(t)dt \leq 0,$$

où $a(t)$ est une primitive quelconque de $\alpha(t)$. Cette relation doit être valable pour toute fonction h de $C^1([0,t_1] \times \mathbb{R}^n)$ telle que $h(0) = h(t_1) = 0$. Donc pour

$$h(t) = \int_0^t [\beta(s) - a(s)]ds,$$

on aura :

$$\int_0^{t_1} \beta(s)ds = \int_0^{t_1} a(s)ds,$$

d'où

$$\beta(t) - a(t) = \dot{h}(t)$$

et

$$I = \int_0^{t_1} \dot{h}(t)^2 dt \leq 0.$$

Donc $\dot{h}(t) \equiv 0$, ce qui entraine $\beta(t) \equiv a(t)$ et la fonction β est alors dérivable et on aura :

$$\dot{\beta}(t) - \alpha(t) \equiv 0.$$

En remplaçant, on obtient alors l'équation d'Euler-Lagrange :

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial v}(t, x^{(1)}(t), \dot{x}^{(1)}(t))) = \frac{\partial L}{\partial x}(t, x^{(1)}(t), \dot{x}^{(1)}(t)).$$

2.2.2 Equation d'Euler-Lagrange intégrale

Il existe des problèmes de calcul des variations qui n'ont pas de solution dans l'espace $C^1(T, \mathbb{R}^n)$ des trajectoires continûment différentiables. Dans de tels problèmes, la borne supérieure qui est finie peut être atteinte dans un espace plus grand que $C^1(T, \mathbb{R}^n)$. On cherche alors les solutions dans l'espace des fonctions C^1 par morceaux.

Définition 2.2.1. [3] La fonction $x(.) : [0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ est de classe C^1 par morceaux si et seulement si :

– elle est dérivable à gauche et à droite en tout point de $[0, t_1]$,
– il existe une subdivision $0 = s_0 < \ldots < s_k < \ldots < s_p = t_1$ de $[0, t_1]$ telle qu'elle est de classe C^1 sur chaque intervalle $]s_{k-1}, s_k[$, $k = 1, \ldots, p$.

Nous noterons F l'espace des fonctions C^1 par morceaux. Dans cet espace de fonctions, l'équation d'Euler-Lagrange doit être légèrement modifiée.

Proposition 2.2.2. *[3] Si $x^{(1)}(.)$ réalise le maximun de Φ sur $F_1 = \{x \in F : x(0) = x^0 \, et \, x(t_1) = x^1\}$, alors*

$$\frac{\partial L}{\partial v}(t, x^{(1)}(t), \dot{x}^{(1)}(t)) = \int_0^t \frac{\partial L}{\partial x}(s, x^{(1)}(s), \dot{x}^{(1)}(s))ds + constante. \tag{2.2}$$

La condition (2.2) se décompose en deux conditions :
– en tout point où $x^{(1)}$ est dérivable :

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial v}(t, x^{(1)}(t), \dot{x}^{(1)}(t))) = \frac{\partial L}{\partial x}(t, x^{(1)}(t), \dot{x}^{(1)}(t)) \qquad (équation \quad d'Euler-Lagrange),$$

– en tout point s_k où $x^{(1)}(.)$ n'est pas dérivable :

$$\frac{\partial L}{\partial v}(t, x^{(1)}(t), \dot{x}^{(1)}(t)) \quad est \quad continue \qquad (condition \quad d'Erdman-Weierstrass).$$

2.2.3 Condition de transversalité

Il existe des variantes du problème (2.1) dans lesquelles l'état terminal (ou initial) de x n'est pas donné a priori. Par exemple :

$$(P_2) \begin{cases} \max \Phi(x(.)) = \displaystyle\int_0^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))dt + g(x(t_1)), \\ x(0) = x^0, \end{cases} \tag{2.3}$$

où $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est de classe C^1.
Une solution $x^{(2)}(.)$ du problème (2.3) est nécessairement solution du problème (2.1) où la valeur terminale en t_1 serait fixée égale à $x^{(2)}(t_1)$. Elle doit donc vérifier les conditions d'Euler-Lagrange et d'Erdman-Weierstrass. Mais puisque la valeur terminale n'est pas fixée dans (2.3), $x^{(2)}(.)$ doit être comparée aux solutions de tous les problèmes (2.1) obtenus en faisant varier la valeur terminale x^1. Elle doit donc vérifier une autre condition qui est appelée condition de transversalité.

Proposition 2.2.3. *Si $x^{(2)}(.) \in F_2 = \{x \in F : x(0) = x^0\}$ est solution du problème (2.3), alors*

$$\frac{\partial L}{\partial v}(t, x^{(2)}(t), \dot{x}^{(2)}(t)) = -\frac{\partial g}{\partial x}(x^{(2)}(t_1)) - \int_t^{t_1} \frac{\partial L}{\partial x}(s, x^{(2)}(s), \dot{x}^{(2)}(s))ds. \tag{2.4}$$

La condition (2.4) se décompose en trois conditions :
- en tout point où $x^{(2)}(.)$ est dérivable :

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial v}(t, x^{(2)}(t), \dot{x}^{(2)}(t))) = \frac{\partial L}{\partial x}(t, x^{(2)}(t), \dot{x}^{(2)}(t)) \qquad (équation \quad d'Euler-Lagrange),$$

- *en tout point* s_k *où* $x^{(2)}(.)$ *n'est pas dérivable :*

$$\frac{\partial L}{\partial v}(t, x^{(2)}(t), \dot{x}^{(2)}(t))\, est\, continue \qquad (condition \quad d'Erdman - Weierstrass),$$

- *au point terminal :*

$$\frac{\partial L}{\partial v}(t_1, x^{(2)}(t_1), \dot{x}^{(2)}(t_1)) + \frac{\partial g}{\partial x}(x^{(2)}(t_1)) = 0 \qquad (condition \quad de \quad transversalité).$$

Preuve. Soit la fonction $x^{(2)}(t)$ solution du problème (2.3) et $h(.) \in F$ qui s'annule en 0. Alors pour tout $s > 0$, $(x^{(2)} + sh) \in F$ et donc :

$$\frac{1}{s}[\Phi(x^{(2)} + sh) - \Phi(x^{(2)})] \leq 0.$$

Lorsque s tend vers 0^+ et en utilisant le fait que $x^{(2)}(.)$ est de classe C^1 sur chaque intervalle $]s_{k-1}, s_k[$, on obtient :

$$I = \int_0^{t_1} [\alpha(t)h(t) + \beta(t)\dot{h}(t)dt] + \gamma h(t_1) \leq 0,$$

où

$$\begin{cases} \alpha(t) = \frac{\partial L}{\partial x}(t, x^{(2)}(t), \dot{x}^{(2)}(t)), \quad \beta(t) = \frac{\partial L}{\partial v}(t, x^{(2)}(t), \dot{x}^{(2)}(t)), \\ \gamma = \frac{\partial g}{\partial x}(x^{(2)}(t_1)). \end{cases} \tag{2.5}$$

Posons :

$$a(t) = -\gamma - \int_t^{t_1} \alpha(s)ds.$$

En intégrant par parties, on obtient :

$$\int_0^{t_1} \alpha(t)h(t)dt = -\gamma h(t_1) - \int_0^{t_1} a(t)\dot{h}(t)dt.$$

D'où

$$I = \int_0^{t_1} [\beta(t) - a(t)]\dot{h}(t)dt \leq 0.$$

Cette relation étant vraie pour toute fonction h de F qui s'annule en 0, on peut prendre par exemple :

$$h(t) = \int_0^t [\beta(s) - a(s)]ds$$

et on obtient :

$$I = \int_0^{t_1} (\beta(t) - a(t))^2 dt \leq 0,$$

d'où $\beta(t) \equiv a(t)$ en tout point de continuité de $\beta(.)$. Mais $a(.)$ étant continue sur T tout entier, $\beta(.)$ l'est aussi, donc $\beta(t) \equiv a(t)$.

On obtient alors :

$$\frac{\partial L}{\partial v}(t, x^{(2)}(t), \dot{x}^{(2)}(t)) = -\frac{\partial g}{\partial x}(x^{(2)}(t_1)) - \int_t^{t_1} \frac{\partial L}{\partial x}(s, x^{(2)}(s), \dot{x}^{(2)}(s))ds.$$

2.3 Conditions suffisantes d'optimalité

Proposition 2.3.1. *a) Si L est concave en* (x, v) *et* $x^{(1)}(t)$ *une fonction de* F_1 *vérifiant les équations d'Euler-Lagrange, alors* $x^{(1)}(.)$ *est la solution du problème* (2.1).
b) Si L est concave en (x, v)*, g concave en x et* $x^{(2)}(t)$ *une fonction de* F_2 *vérifiant la condition* (2.4) *de la proposition 2.2.3, alors* $x^{(2)}(.)$ *est solution du problème* (2.3).

Preuve. Soit $h \in C^1([0, t_1] \times \mathbb{R}^n)$ tel que $h(0) = h(t_1) = 0$.
a) On doit montrer que :

$$\Delta = \Phi(x^{(1)} + h) - \Phi(x^{(1)}) \leq 0.$$

Comme L est concave, on a :

$$L(t, x^{(1)} + h, \dot{x}^{(1)} + \dot{h}) - L(t, x^{(1)}, \dot{x}^{(1)}) \leq \alpha(t)h(t) + \beta(t)\dot{h}(t),$$

avec

$$\alpha(t) = \frac{\partial L}{\partial x}(t, x^{(1)}(t), \dot{x}^{(1)}(t)), \quad \beta(t) = \frac{\partial L}{\partial v}(t, x^{(1)}(t), \dot{x}^{(1)}(t)).$$

Par conséquent, on obtient :

$$\Delta = \Phi(x^{(1)} + h) - \Phi(x^{(1)}) \leq \int_0^{t_1} [\alpha(t)h(t) + \beta(t)\dot{h}(t)]dt.$$

En utulisant l'équation d'Euler-Lagrange, on aura :

$$\beta(t) = \int_0^t \alpha(s)ds,$$

ce qui implique :

$$\Delta = \Phi(x^{(1)} + h) - \Phi(x^{(1)}) \leq \int_0^{t_1} [\dot{\beta}(t)h(t) + \beta(t)\dot{h}(t)]dt = \beta(t)h(t) \mid_0^{t_1} .$$

D'où

$$\Delta = \Phi(x^{(1)} + h) - \Phi(x^{(1)}) \leq \beta(t_1)h(t_1) - \beta(0)h(0) = 0.$$

b)Dans le cas où l'état terminal n'est pas fixé, on doit montrer aussi que :

$$\Delta = \Phi(x^{(2)} + h) - \Phi(x^{(2)}) \leq 0.$$

En vertu de la concavité de L, on a :

$$L(t, x^{(2)} + h, \dot{x}^{(2)} + \dot{h}) - L(t, x^{(2)}, \dot{x}^{(2)}) \leq \alpha(t)h(t) + \beta(t)\dot{h}(t),$$

avec

$$\alpha(t) = \frac{\partial L}{\partial x}(t, x^{(2)}(t), \dot{x}^{(2)}(t)), \quad \beta(t) = \frac{\partial L}{\partial v}(t, x^{(2)}(t), \dot{x}^{(2)}(t)),$$

et comme g est aussi concave, on peut écrire :

$$g((x^{(2)} + h)(t_1)) - g(x^{(2)}(t_1)) \leq \gamma h(t_1), \quad avec \quad \gamma = \frac{\partial g}{\partial x}(x^{(2)}(t_1)).$$

Par conséquent :

$$\Delta = \Phi(x^{(2)} + h) - \Phi(x^{(2)}) \leq \int_0^{t_1} [\alpha(t)h(t) + \beta(t)\dot{h}(t)]dt + \gamma h(t_1).$$

D'après la condition (2.4) :

$$\beta(t) = -\gamma - \int_t^{t_1} \alpha(s)ds,$$

ce qui implique :

$$\Delta = \Phi(x^{(2)} + h) - \Phi(x^{(2)}) \leq \int_0^{t_1} [\dot{\beta}(t)h(t) + \beta(t)\dot{h}(t)]dt + \gamma h(t_1) = \beta(t)h(t) \mid_0^{t_1} + \gamma h(t_1).$$

D'où

$$\Delta = \Phi(x^{(2)} + h) - \Phi(x^{(2)}) \leq (\beta(t_1) + \gamma)h(t_1) - \beta(0)h(0) = 0.$$

2.4 Exemples :

2.4.1 Problème de consommation-épargne

Soit $x(t)$ la richesse nette d'un ménage, supposée investie entièrement sous forme d'un actif sans risque, qui rapporte un taux d'intérêt constant r. Ce problème a été étudié dans [3]. Nous supposerons que le ménage reçoit un salaire $s(t)$ qu'il répartit entre consommation $c(t)$ et épargne $e(t)$:

$$s(t) = c(t) + e(t).$$

La dynamique de la richesse nette $x(t)$ s'écrit donc :

$$\dot{x}(t) = rx(t) + e(t).$$

L'objectif est alors de maximiser une fonction d'utilité définie par :

$$\int_0^{t_1} e^{-\delta t} u(c(t))dt,$$

où δ est son taux d'escompte psycologique et $u(t)$ sa fonction d'utilité instantanée.
On suppose que le ménage part d'une richesse intitiale x^0 à $t = 0$ et désire détenir la richesse x^1 à t_1, alors on aura le problème suivant :

$$(P_1) \begin{cases} \max \displaystyle\int_0^{t_1} e^{-\delta t} u(c^{(1)}(t))dt, \\ x(0) = x^0, \\ x(t_1) = x^1. \end{cases}$$

On peut exprimer cette intégrale uniquement en fonction de $(x, \dot{x})$ et des données du problème puisque on a :

$$c^{(1)}(t) = rx^{(1)}(t) + s(t) - \dot{x}^{(1)}(t),$$

où

$x^{(1)}(t)$: la richesse du ménage,
$c^{(1)}(t)$: la consommation du ménage.
Le problème est mis alors sous la forme 2.1 :

$$(P_1)\begin{cases}\max \displaystyle\int_0^{t_1} e^{-\delta t}u(rx^{(1)}(t)+s(t)-v)dt,\\ x(0)=x^0,\\ x(t_1)=x^1.\end{cases}$$

Puisque :

$$\frac{\partial L}{\partial x}(t,x^{(1)}(t),\dot{x}^{(1)}(t)) = re^{-\delta t}u'(c^{(1)}(t)), \quad \frac{\partial L}{\partial v}(t,x^{(1)}(t),\dot{x}^{(1)}(t)) = -e^{-\delta t}u'(c^{(1)}(t)).$$

L'équation d'Euler-Lagrange s'écrit alors :

$$\frac{d}{dt}(-e^{-\delta t}u'(c^{(1)}(t))) = re^{-\delta t}u'(c^{(1)}(t)),$$

donc

$$\delta e^{-\delta t}u'(c^{(1)}(t)) + \frac{d}{dt}u'(c^{(1)}(t))(-e^{-\delta t}) = re^{-\delta t}u'(c^{(1)}(t)),$$

i.e :

$$\delta u'(c^{(1)}(t)) - \frac{d}{dt}u'(c^{(1)}(t)) = ru'(c^{(1)}(t),$$

on obtient :

$$\frac{d}{dt}u'(c^{(1)}(t)) = (\delta - r)u'(c^{(1)}(t)),$$

d'où

$$\frac{\frac{d}{dt}u'(c^{(1)}(t))}{u'(c^{(1)}(t))} = \delta - r,$$

on aura, donc :

$$\frac{d}{dt}(\ln u'(c^{(1)}(t))) = (\delta - r)$$

et

$$\ln u'(c^{(1)}(t)) = (\delta - r)t + k,$$

on déduit que :

$$u'(c^{(1)}(t)) = k_1 e^{(\delta - r)t}.$$

où k_1 est une constante réelle.
Si on suppose qu'on ne fixe pas la richesse terminale x^1, alors on aura à résoudre le problème suivant :

$$(P_2)\begin{cases} max\Phi(x(.))) = \displaystyle\int_0^{t_1} e^{-\gamma t}u(rx^{(2)}(t)+s(t)-\dot{x}(t))dt + g(x^{(2)}(t_1)),\\ x(0)=x^0.\end{cases}$$

où $x^{(2)}(t)$: la richesse du ménage, L'équation d'Euler-Lagrange reste valable en tout point de continuité, on peut écrire directement :

$$u'(c^{(2)}(t)) = k_2 e^{(\delta-r)t}.$$

Afin d'illustrer la différence entre les solutions des deux problèmes (P_1) et (P_2), on prend alors :

$$u(c) = \ln c \quad et \quad g(x) = e^{-\delta t_1} \ln x.$$

Ce qui implique :

$$c^{(i)}(t) = \frac{1}{k_i} e^{(r-\delta)t}, \qquad i = 1, 2.$$

D'où l'équation de richesse s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}^{(i)} = r x^{(i)} + s - c^{(i)}, \\ x^{(i)}(0) = x^0, \end{cases}$$

la solution est de la forme :

$$x^{(i)}(t) = x^0 e^{rt} + \int_0^t [s(\tau) - c^{(i)}(\tau)] e^{r(t-\tau)} d\tau.$$

En remplaçant $c^{(i)}(\tau)$ par son expression, on aura :

$$\begin{aligned} x^{(i)}(t) &= x^0 e^{rt} + \int_0^t [s(\tau) - \frac{1}{k_i} e^{(r-\delta)} \tau] e^{r(t-\tau)} d\tau \\ &= x^0 e^{rt} + \int_0^t [s(\tau) e^{r(t-\tau)} - \frac{1}{k_i} e^{(r-\delta)} \tau e^{r(t-\tau)}] d\tau \\ &= x^0 e^{rt} + \int_0^t [s(\tau) e^{r(t-\tau)}] d\tau + \int_t^0 [\frac{1}{k_i} e^{(r-\delta)} \tau e^{r(t-\tau)}] d\tau \\ &= x^0 e^{rt} + \int_0^t [s(\tau) e^{r(t-\tau)}] d\tau + \frac{1}{k_i} e^{rt} \int_t^0 e^{-\delta\tau} d\tau \\ &= x^0 e^{rt} + \int_0^t s(\tau) e^{r(t-\tau)} d\tau + \frac{1}{k_i \delta} e^{rt} (1 - e^{-\delta t}). \end{aligned}$$

Déterminons la constante k_i pour les problèmes (P_1) et (P_2) :
Désignons par R la richesse totale actualisée du ménage :

$$R = x^0 + \int_0^{t_1} s(\tau) e^{-r\tau} d\tau.$$

Pour le problème (P_1) on obtient :

$$x^{(1)}(t_1) = x^0 e^{rt_1} + \int_0^{t_1} s(\tau) e^{r(t-\tau)} d\tau + \frac{1}{k_i \delta} e^{rt_1} (1 - e^{-\delta t_1}),$$

d'où

$$x^{(1)} e^{-rt_1} = R + \frac{1}{k_1 \delta} (1 - e^{-\delta t_1}).$$

Pour le problème (P_2) :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x^{(2)}(t_1)) + \frac{\partial L}{\partial v}(t_1, x^{(2)}(t_1), \dot{x}^{(2)}(t_1)) = 0,$$

d'où
$$\frac{e^{-\delta t_1}}{x^{(2)}(t_1)} - \frac{\partial L}{\partial v}(t, x^{(2)}(t_1), \dot{x}^{(2)}(t_1)) = 0,$$
donc
$$\frac{1}{k_2}e^{-\delta t_1} = R + \frac{1}{k_2\delta}(1 - e^{-\delta t_1}).$$
Le problème (P_1) n'admet de solution que si R excède la valeur actualisée de la richesse désirée à la date t_1. On trouve :
$$\frac{1}{k_1} = \frac{(R - x^{(1)}e^{-rt_1})\delta}{1 - e^{-\delta t_1}}.$$
Par contre le second problème a une solution dès que $R > 0$:
$$\frac{1}{k_2} = \frac{R\delta}{(\delta - 1)e^{-\delta t_1} + 1}.$$

2.4.2 Modèle de la croissance optimale avec ressource épuisable

Considérons un agent économique doté d'un capital k et qu'on suppose qu'il sera possible de le fructifier. Ce problème a été traité dans [4].
La dynamique du capital est donné par l'équation suivante :
$$\dot{k}(t) = ak(t)^{1-\alpha}r(t)^{\alpha} - c(t), \quad a > 0, \quad 0 < \alpha < 1,$$
où $c(t)$ est le taux de consommation à la date t, $r(t)$ le taux de ressource indispensable pour la production d'un capital puisé dans un stock de ressource $y(t)$ dont la dynamique est :
$$\dot{y}(t) = -r(t).$$
Notons :
$x = (k, y)$ la variable d'état du système contrôlé, la variable de contrôle étant le vecteur (c, r) de $\mathbb{R}^2_+$.
Le problème d'optimisation dynamique est :
$$\begin{cases} \max \displaystyle\int_0^{t_1} \ln c(t)dt, \\ \dot{k}(t) = ak(t)^{1-\alpha}r(t)^{\alpha} - c(t), \\ \dot{y}(t) = -r(t), \\ x(0) = x^0, \\ x(t_1) = 0. \end{cases}$$
D'après la définition de la fonction objectif et la condition terminale, alors la contrainte de positivité sur les contrôles peut être ignorée.

En remplaçant les contrôles $c(t)$ et $r(t)$ en fonction des variables d'état (k, y), on obtient le problème de calcul des variations suivant :

$$\begin{cases} \max \displaystyle\int_0^{t_1} \ln[ak(t)^{1-\alpha}(-\dot{y}(t)^{\alpha}) - \dot{k}(t)]dt, \\ \dot{k}(t) = ak(t)^{1-\alpha}r(t)^{\alpha} - c(t), \\ \dot{y}(t) = -r(t), \\ x(0) = x^0, \\ x(t_1) = 0, \end{cases}$$

avec

$$c(t) = f(t, k(t), y(t), \dot{k}(t), \dot{y}(t)). \tag{2.6}$$

Ainsi, dans cet exemple on a :

$$L(t, x, v) = \ln f(t, x, v),$$

avec

$$f(t, x_1, x_2, v_1, v_2) = ax_1^{(1-\alpha)}(-v_2)^{\alpha} - v_1.$$

Puisque :

$$\frac{\partial L}{\partial v_1}(t, x, v) = -c(t)^{-1}, \quad \frac{\partial L}{\partial v_2}(t, x, v) = -c(t)^{-1}a\alpha z(t)^{\alpha-1},$$

et

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}(t, x, v) = c(t)^{-1}a(1-\alpha)z(t)^{\alpha}, \quad \frac{\partial L}{\partial x_2}(t, x, v) = 0,$$

où $z(t) = \frac{-\dot{y}(t)}{k(t)}$.

La condition d'Euler-Lagrange pour ce problème s'écrit alors :

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} -c(t)^{-1} \\ -c(t)^{-1}a\alpha z(t)^{\alpha-1} \end{pmatrix} = c(t)^{-1}\begin{pmatrix} a(1-\alpha)z(t)^{\alpha} \\ 0 \end{pmatrix},$$

la deuxième équation de ce système montre que :

$$c(t)^{-1}z(t)^{\alpha-1} = b_1 \quad est\, une\, fonction\, constante, \tag{2.7}$$

de la première équation, on a :

$$\frac{d}{dt}(-c(t)^{-1}) = c(t)^{-1}a(1-\alpha)z(t),$$

De plus :

$$z(t)^{-1-\alpha}\dot{z}(t) = -a,$$

ce qui conduit à l'existance d'une autre constante b_2 telle que :

$$\alpha z(t)^{\alpha} = \frac{1}{b_2 + \alpha t}.$$

D'après l'équation (2.6) et (2.7), on aura :

$$c(t) = az(t)^{\alpha}k(t) - \dot{k}(t),$$

$$\dot{k}(t) = az(t)^{\alpha}k(t) - c(t).$$

Comme on a :

$$c(t) = \frac{z(t)^{\alpha-1}}{b_1}$$

et

$$z(t) = \frac{1}{a^{\frac{1}{\alpha}}(b_2+\alpha t)^{\frac{1}{\alpha}}},$$

d'où l'équation différentielle, vérifiée par $k(t)$:

$$\dot{k}(t) = (b_2+\alpha t)^{-1}k(t) - b_1^{-1}a^{\frac{(1-\alpha)}{\alpha}}(b_2+\alpha t)^{\frac{(1-\alpha)}{\alpha}}.$$

Comme $k(t_1) = 0$, alors la solution de cette équation s'écrit sous la forme :

$$k(t) = [k(t_1)e^{P(t)} - \int_t^{t_1} q(s)e^{P(s)}ds]e^{-P(t)},$$

où

$$P(t) = \int -(b_2+\alpha t)^{-1}dt = -\frac{1}{\alpha}\ln(b_2+\alpha t)$$

et

$$q(t) = -b_1^{-1}a^{\frac{(1-\alpha)}{\alpha}}(b_2+\alpha t)^{\frac{(1-\alpha)}{\alpha}}.$$

Donc

$$k(t) = [b_1^{-1}a^{\frac{(1-\alpha)}{\alpha}}\int_t^{t_1}(b_2+\alpha s)^{-1}ds](b_2+\alpha t)^{\frac{1}{\alpha}},$$

$$k(t) = b_1^{-1}a^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}(b_2+\alpha t)^{\frac{1}{\alpha}}\ln\left(\frac{b_2+\alpha t_1}{b_2+\alpha t}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

On peut maintenant déterminer la variable d'état y :

$$\dot{y}(t) = -z(t)k(t),$$

$$\dot{y}(t) = -\frac{1}{b_1 a}\ln\left(\frac{b_2+\alpha t_1}{b_2+\alpha t}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Comme $y(t_1) = 0$, alors

$$y(t) = \frac{1}{b_1 a}\int_t^{t_1}\ln\left(\frac{b_2+\alpha t_1}{b_2+\alpha s}\right)^{\frac{1}{\alpha}}ds.$$

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté la méthode de calcul des variations, où nous avons donné les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité.

Ainsi, en appliquant l'équation d'Euler-Lagrange, nous avons traité deux exemples en finance : le problème de consommation épargne et le modèle de croissance optimale avec ressource épuisable .

Chapitre 3

Introduction au Contrôle Optimal

Introduction

La théorie de contrôle analyse les propriétés des systèmes contrôlés, c'est à dire des systèmes dynamiques dépendants d'un paramètre appelé contrôle (commande). Le but est alors d'amener le système d'un état initial donné à un état final, tout en optimisant un certain critère. Cette théorie est une généralisation du calcul des variations.

3.1 Système de contrôle

Un système de contrôle est la donnée d'un espace d'états X, d'un espace de contrôles Ω et d'une loi d'évolution du type :

$$\dot{x} = f(t, x(t), v(t)), \tag{3.1}$$

où $x(t) \in M$ (on suppose que M est un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$) est l'état du système à l'instant $t \in T = [0, t_1]$ et $v(t) \in U$ est le contrôle qui est une fonction localement intégrable définie sur $[0, +\infty[$ à valeurs dans $U \subset \mathbb{R}^m$. On suppose le champ de vecteur f suffisamment régulier de sorte que pour toute condition initiale $x^0 \in M$ et tout contrôle adimissible $v(.) \in \Omega$, le système (3.1) admet une unique solution $x(t)$ telle que $x(0) = x^0$ et que cette solution est définie sur $[0, +\infty[$; on notera cette solution $x(t, x^0, v(.))$.
Ainsi, nous supposons que $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ vérifie les conditions du théorème de Cauchy (voir [5]) de sorte qu'on puisse assurer l'existence et l'unicité de la solution $x(t, x^0, v(.))$.

3.2 Approximation linéaire d'un système de contrôle

Dans la pratique, les systèmes de contrôle ne sont pas toujours linéaires et comme l'analyse des systèmes non linéaires n'est pas assez facile comme le cas linéaire, alors on est souvent amené à linéariser les systèmes non linéaires.
Le système linéaire s'obtient généralement par linéarisation du système non linéaire (3.1) autour d'un point d'équilibre $(x^e, v^e) \neq 0$. On pose :

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= x - x^e, & \tilde{v} &= v - v^e, \\ A &= \tfrac{\partial f}{\partial x}(x^e, v^e), & B &= \tfrac{\partial f}{\partial v}(x^e, v^e), \end{aligned}$$

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + B\tilde{v} + o(\tilde{x}, \tilde{v}).$$

Le système $\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + B\tilde{v}$ s'appelle approximation linéaire du système non linéaire, où $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$.

3.3 Position du problème

La formulation d'un problème de contrôle optimal est la suivante :

$$\begin{cases} \max\limits_{v} J(v) = \displaystyle\int_0^{t_1} L(t, x(t), v(t))dt + g(x(t_1)), \\ \dot{x}(t) = f(t, x(t), v(t)), \\ x(0) = x^0, \\ v(t) \in U, \quad t \in T = [0, t_1], \end{cases} \tag{3.2}$$

où
$J(v)$ est l'objectif ou le critère de qualité du problème,
$L : T \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1,
$g : \mathbb{R}^n \longrightarrow R$ est une fonction continue de classe C^1,
x^0 est l'état initial du système,
Ω est l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur T et à valeurs dans l'ensemble compact $U \subset \mathbb{R}^m$.

Remarque. Le nom du problème est donné par la forme du critère à optimiser et on distingue deux problèmes importants :

- Si $g(x(t_1)) = 0$, alors le problème est dit problème de Lagrange.
- Si $L(t, x(t), v(t)) \equiv 0$, alors le problème est dit de Mayer. Quand les deux formes Lagrange et Mayer sont regroupées, on parle alors du problème de Bolza (Mayer-Lagrange).

Avant de résoudre un problème de contrôle optimal, on se pose les questions suivantes :
Question 1 : Existe-t-il un contrôle $v \in \Omega$ tel que la trajectoire associée à v relie l'état initial $x^0 \in R^n$ à un état final $x^1 \in R^n$ en un temps fini ? C'est le problème de la contrôlabilité appelé aussi problème de commandabilité.
Question 2 : Si le système est contrôlable, peut-on déterminer un contrôle $v \in \Omega$ joignant x^0 à x^1, tout en optimisant un certain critère de performance ?

3.4 Contrôlabilité

Définition 3.4.1. Le système (3.1) est contrôlable si pour tous points x^0 et x^1 de $\mathbb{R}^n$, on peut trouver un instant fini t_1 et un contôle $v(t)$ tel que la trajectoire $x(t)$ du système (3.1) satisfait les conditions $x(0) = x^0$ et $x(t_1) = x^1$.

3.4.1 Contrôlabilité des systèmes linéaires stationnaires

Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bv(t), \quad t \in T = [0, t_1], \\ x(0) = x^0. \end{cases} \tag{3.3}$$

La solution du système (3.3) est :

$$x(t) = e^{At}x^0 + \int_0^t e^{A(t-s)}Bv(s)ds, \quad t \geq 0.$$

Théorème 3.4.1. *[5] Le système* (3.3) *est dit contrôlable (commandable) si et seulement si :*

$$rang Q = [B, AB, A^2B, ..., A^{n-1}B] = n,$$

où Q est une matrice d'ordre $n \times nm$, appellée matrice de contrôlabilité de Kalman.

3.5 Principe du maximum de Pontryaguine

Le principe du maximum a été formulé par le mathématicien russe Pontryaguine en 1956, où il a donné un ensemble de conditions nécessaires pour l'optimalité d'une solution dans un problème de contrôle optimal. [6]

Définition 3.5.1. Le Hamiltonien du problème (3.2) est défini par :

$$H(t, x, \psi, v) = \psi' f(t, x, v) + L(t, x, v),$$

où
$t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}^m$.
La fonction $\psi : [0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ est appelée vecteur adjoint ou fonction conjugée.

Théorème 3.5.1. *[6] Soit $(x^*(.), v^*(.))$ une solution du problème* (3.2). *Alors il existe une fonction conjugée, $\psi^* : [0, t_1] \to \mathbb{R}^n$, C^1 par morceaux telle que :*

$$H(t, x^*(t), \psi^*(t), v^*(t)) = \max_{v \in U} H(t, x^*(t), \psi^*(t), v).$$

Ce maximum est noté $H^*(t, x^*(t), \psi^*(t), v^*(t))$ et le couple $(x^*(.), v^*(.))$ est solution du système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \dot{\psi} = -\frac{\partial H^*}{\partial x}(t, x(t), \psi(t), v(t)), \\ \dot{x} = \frac{\partial H^*}{\partial \psi}(t, x(t), \psi(t), v(t)), \end{cases}$$

avec les conditions aux limites :

$$\begin{cases} x(0) = x^0, \\ \psi^*(t_1) = \frac{\partial g}{\partial x}(x(t_1)), \end{cases}$$

où $\psi^*(t_1)$ est appelée condition de transversalité.

Remarque 3.5.1. – Si le système est stationnaire, alors le Hamiltonien $H(t, x(t), \psi(t), v(t))$ est constant le long des trajectoires, car L et f ne dépendent pas de t, donc $H = cste$.
– Lorsqu'il n'y a pas de contrainte sur le contrôle, la condition de maximisation devient : $\frac{\partial H}{\partial v} = 0$.

3.6 Application à un modèle financier

3.6.1 Eléments de Gestion d'un portefeuille financier

- **Actif financier** :
  C'est un titre ou un contrat produisant à son propriétaire des revenus ou un gain en capital sur le marché financier. Cet actif induit une certaine prise de risques et peut être transmis ou négocié sur le marché. Il est considéré comme un placement et il est comptabilisé dans le patrimoine de l'individu.
- **Un portefeuille** :
  C'est un ensemble d'actifs financiers détenus par un investisseur. Ces actifs peuvent être de différentes classes : actions, obligatoins, produits dérivés, matières premières, fonds, etc. Afin de diminuer son risque, l'investisseur procède souvent à une diversification de ses actifs.
- **Transaction financière** :
  Une transaction financière est un événement contractuel d'achat ou de vente pour échanger un actif contre un paiement. Elle vise généralement à employer des capitaux disponibles ou susceptibles d'être mobilisés, dans la perspective d'obtenir un gain monétaire, ou à l'inverse à solder une opération précédente et à récupérer des liquidités.
- **Coût de transaction** :
  Un coût de transaction est un coût lié à un échange économique, plus précisément à une transaction sur le marché. Ce coût n'est pas pris en compte dans le cadre d'une concurrence pure et parfaite. Il peut être direct (commissions de bourse) ou indirect (coût de prospection, temps et effort passés à la négociation et à la vérification de la transaction, etc).
- **Compte rémunéré** :
  Un compte rémunéré est un compte à vue, ouvert dans une banque et pour lequel le solde est rémunéré à un taux fixé par cette dernière.

3.6.2 Gestion de portefeuille en présence des coûts de transaction

Un gestionnaire dispose d'un capital qu'il peut investir en actions ou placer sur un compte rémunéré (ce modèle a été étudié dans [3]). Nous nous situons en univers déterministe et nous supposons connus à l'avance pour $t \in [0, t_1]$ les éléments suivants :
$r(t)$: le taux de rémunération du compte,
$\sigma(t)$: le flux des dividendes que rapporte chaque action,
$S(t)$: le prix de l'action à l'instant t.
On suppose que le marché n'est pas parfait : chaque vente ou achat d'action est limitée à un nombre maximum de titres et entraîne un coût proportionnel α, $0 < \alpha < 1$, les possibilités d'arbitrage ne sont pas donc exclues .
On note :
$x_1(t)$: solde du compte (variable d'état),
$x_2(t)$: nombre d'actions détenues (variable d'état),
$v(t)$: une valeur positive pour un nombre d'actions vendues, une valeur négative de $v(t)$

représente un achat (variable de contrôle).
Le gestionnaire veut maximiser son capital à l'instant terminal t_1. Alors le problème s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \max J(v) = [x_1(t_1) + S(t_1)x_2(t_1)], \\ \dot{x_1} = rx_1 + \sigma x_2 + S(v - \alpha|v|), \\ \dot{x_2} = -v, \\ x_1(0) = x_1^0, \\ x_2(0) = x_2^0, \\ v(t) \in [-M_1, M_2], \quad M_1 > 0, \quad M_2 > 0. \end{cases}$$

Afin d'écrire le problème sans la valeur absolue, posons alors v comme la différence de deux variables non négatives :

$$v = v_1 - v_2, \quad v_1 \geq 0, \quad v_2 \geq 0,$$

où v_1 est le nombre d'actions vendues et v_2 celui d'actions achetées. On suppose de plus que le gestionnaire, soit il achète ou il vent, ce qui impose la contrainte suivante :

$$v_1.v_2 = 0.$$

Alors nous pouvons écrire :

$$|v| = v_1 + v_2.$$

Ainsi, le problème peut s'écrire comme suit :

$$\begin{cases} \max J(v) = [x_1(t_1) + S(t_1)x_2(t_1)], \\ \dot{x_1} = rx_1 + \sigma x_2 + S(v_1 - v_2 - \alpha(v_1 + v_2)), \\ \dot{x_2} = -v_1 + v_2, \\ x_1(0) = x_1^0, \\ x_2(0) = x_2^0, \\ 0 \leq v_1(t) \leq M_1, \\ 0 \leq v_2(t) \leq M_2. \end{cases}$$

On remarque l'absence de terme intégral dans la fonction objectif, donc c'est un problème de Mayer.
Le Hamiltonien est indépendant de t et s'écrit :

$$\begin{aligned} H(x, \psi, v) &= \psi_1 r x_1 + \psi_1 \sigma x_2 + \psi_1 S(v_1 - v_2 - \alpha(v_1 + v_2)) - \psi_2(v_1 - v_2) \\ &= \psi_1 r x_1 + \psi_1 \sigma x_2 + \psi_1 S(v_1 - \alpha v_1) + \psi_1 S(-v_2 - \alpha v_2) - v_1\psi_2 + v_2\psi_2 \\ &= \psi_1 r x_1 + \psi_1 \sigma x_2 + v_1(\psi_1 S(1-\alpha) - \psi_2) - v_2(\psi_1 S(1+\alpha) - \psi_2). \end{aligned}$$

Le système conjugé est :

$$\begin{cases} \dot{\psi_1} = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = -r\psi_1, \\ \dot{\psi_2} = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\sigma\psi_1, \end{cases}$$

avec la condition terminale :

$$\begin{cases} \psi_1(t_1) = 1, \\ \psi_2(t_1) = S(t_1), \end{cases}$$

donc :

$$\begin{cases} \psi_1(t) = exp \displaystyle\int_t^{t_1} r(s)ds, \\ \psi_2(t) = S(t_1) + \displaystyle\int_t^{t_1} \sigma(s)\psi_1(s)ds. \end{cases}$$

L'interprétation de ces solutions est :
la variable $\psi_1(t)$ est la valeur future (à l'instant t_1) d'une unité de capital détenu dans le compte entre t et t_1, $\psi_2(t)$ est la valeur future (à l'instant t_1) d'une unité de capital investi dans des actions à partir de t.
La maximisation de H par rappot à v, revient à maximiser la fonction de commutation Δ par rapport à v_1 et v_2 :

$$\Delta = v_1(\psi_1 S(1-\alpha) - \psi_2) - v_2(\psi_1 S(1+\alpha) - \psi_2).$$

Cette dernière est linéaire par rapport à v_1 et v_2, ainsi le contrôle optimal en tenant compte de la contrainte $v_1 v_2 = 0$, est de type bang bang décrit comme suit :

$$v^* = v_1^* + v_2^*,$$

où

$$v_1^* = M_1 sign\Delta = \begin{cases} 0, & \text{si } \psi_2 > \psi_1 S(1-\alpha), \\ indéterminée, & \text{si } \psi_2 = \psi_1 S(1-\alpha)\ , \\ M_1, & \text{si } \psi_2 < \psi_1 S(1-\alpha)\ , \end{cases}$$

et

$$v_2^* = M_2 sign\Delta = \begin{cases} 0, & \text{si } \psi_2 < \psi_1 S(1+\alpha), \\ indéterminée, & \text{si } \psi_2 = \psi_1 S(1+\alpha)\ , \\ M_2, & \text{si } \psi_2 > \psi_1 S(1+\alpha)\ . \end{cases}$$

La commande $v_1(t)$ représente le nombre d'actions vendues, elle sera optimale en vendant une valeur maximale autorisée M_1 et cela quand la valeur à l'instant t_1 de$(1-\alpha)$ unités de capital détenu dans le compte à partir de t est supérieure à la valeur future (à l'instant t_1) d'une unité de capital investi dans des actions. Dans le cas contraire $v_1 = 0$, alors c'est la commande $v_2(t)$ qui sera optimale en achetant une valeur maximale M_2.
Quand la valeur à l'instant t_1 de$(1-\alpha)$ unités de capital détenu dans le compte à partir de t est égale à la valeur future (à l'instant t_1) d'une unité de capital investi dans des actions, le gestionnaire sera indifférent.
Ainsi quand $\psi_2 > \psi_1 S(1+\alpha)$, on aura alors :

$$v_1^* = 0 \quad et \quad v_2^* = M_2,$$

d'où

$$\dot{x}_2 = M_2,$$

ce qui donne :

$$x_2(t) = M_2 t + x_2^0,$$

en remplaçant x_2 dans $\dot{x}_1$, on obtient :

$$\dot{x}_1 = r x_1 + \sigma(M_2 t + x_2^0) - S M_2 (1 + \alpha),$$

donc :

$$x_1 = x_1^0 + (\int_0^t \sigma(s)(M_2 t + x_2^0 - S M_2(1+\alpha)) e^{-\int r(s)ds}) e^{\int r(s)ds}.$$

Lorsque $\psi_2 < \psi_1 S(1-\alpha)$, on aura alors :

$$v_1^* = M_1 \quad et \quad v_2^* = 0,$$

en suivant la même démarche que le cas précédent, on aura :

$$x_2(t) = -M_1 t + x_2^0$$

et

$$x_1 = x_1^0 + (\int_0^t \sigma(s)(-M_1 t + x_2^0 + S M_1(1-\alpha)) e^{-\int r(s)ds}) e^{\int r(s)ds},$$

donc :

$$x_1 = x_1^0 + (\int_0^t \sigma(s)(-M_1 t + x_2^0 + S M_1(1-\alpha)) e^{-\int r(s)ds}) e^{\int r(s)ds}.$$

3.7 Méthodes de résolution

On distingue deux approches de résolution des problèmes de contrôle optimal : les méthodes directes et les méthodes indirectes. Les méthodes directes consistent à discrétiser l'état et le contrôle, et transforment le problème en un problème d'optimisation non linéaire. Les méthodes indirectes consistent à résoudre numériquement par une méthode de tir (shooting method) un problème aux valeurs limites obtenu par application du principe du maximum de Pontryaguine. Ici, on présente la méthode de tir simple.

3.7.1 Méthode de tir simple

La méthode de tir simple est basée sur le principe du maximum de Pontryaguine. Elle consiste à trouver un zéro de la fonction de tir, associée au problème original. Il s'agit d'une méthode rapide et de haute précision, qui ne requiert pas d'hypothèse sur la structure du contrôle. Considérons le problème de contrôle optimal suivant :

$$\begin{cases} \min\limits_{v} J(v) = \int_0^{t_1} L(t,x,v)dt + g(x(t_1)), \\ \dot{x} = f(t,x,v), \\ x(0) = x^0, \quad x(t_1) = x^1, \\ \psi(0) = \psi^0, \quad \psi(t_1) = \psi^1, \end{cases}$$

avec un temps final t_1 fixé.

La méthode de tir se décompose en trois étapes principales :

– L'écriture du problème aux deux bouts ;
– La programmation de la fonction de tir ;
– La résolution d'un système d'équations non linéaires.

1. **Problème aux deux bouts** :
   Le principe du maximum donne une condition nécessaire d'optimalité et affirme que toute trajectoire optimale est la projection d'une extrémale. Ceci nous conduit à un système différentiel à deux équations, avec deux conditions initiales et deux conditions terminales. C'est ce qu'on appelle le problème aux deux bouts(Two Points Boundary Value Problem) :
   $$(TPBVP)\begin{cases}\dot{x}(t) = f(t, x(t), v(t)),\\ \dot{\psi}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x(t), \psi(t)), v(t)),\\ v(t) \in U, \quad t \in T,\\ x(0) = x^0, \quad x(t_1) = x^1,\\ \psi(0) = \psi^0, \quad \psi(t_1) = \psi^1,\end{cases}$$
   où le contrôle $v(t)$ est donné par la condition du maximum.
   Si l'on est capable, à partir de la condition du maximum, d'exprimer le contrôle extrémal en fonction du couple (x, ψ), alors on obtient un système différentiel de la forme :
   $$\dot{z}(t) = F(t, z(t)), \quad où \quad z(t) = (x(t), \psi(t)).$$
   Alors le problème (TPBVP) devient :
   $$\begin{cases}\dot{z}(t) = F(t, z(t)),\\ R(z(0), z(t_1)) = 0,\end{cases}$$
   où $R(z(0), z(t_1))$ est donné par les conditions initiales et terminales.
2. **Fonction de tir** :
   Notons $z(t, z^0)$ la solution du système de Cauchy suivant :
   $$\dot{z}(t) = F(t, z(t)), \quad z(0) = z^0.$$
   On définit la fonction de tir :
   $$\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
   $$z^0 \to \phi(z^0) = R(z^0, z(t_1, z^0)).$$
   Le problème aux deux bouts (TPBVP) est alors équivalent à :
   $$\phi(z^0) = 0.$$
3. **Résolution d'un système d'équations non linéaires** :
   Il s'agit de déterminer un zéro de la fonction de tir non linéaire $\phi(z^0) = 0$, pour cela on peut utiliser la méthode de Newton.

3.7.2 Exemple d'application

On considère le problème simple de contrôle optimal suivant :

$$\begin{cases} \min\limits_{v} \int_0^5 v^2(t)dt, \\ \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = v(t), \\ -1 \leq v(t) \leq 1, \\ x_1(0) = 0, \quad x_1(5) = 0, \\ x_2(0) = 0, \quad x_2(5) = -1, t \in [0,5]. \end{cases}$$

– Application du principe du maximum :
  Écrivons le Hamiltonien du système :

$$H(x, \psi, v) = \psi_1 x_2 + \psi_2 v - v^2.$$

  Le principe du maximum de Pontryaguine nous conduit à un système différentiel à deux équations, avec deux conditions initiales et deux conditions terminales; notons $x = (x_1, x_2)$, on obtient le problème à deux bouts :

$$(TPBVP) \begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) + v(t), \\ \dot{\psi}(t) = 0, \\ v(t) = h(\psi(t)), \quad t \in [0,5], \\ x(0) = x^0 = 0, \quad x(5) = x^1 = -1, \end{cases}$$

  où $h(\psi(t))$ est donnée par la maximisation de l'Hamiltonien :

$$\begin{cases} \max H(x, \psi, v) = \max(\psi_1 x_2 + \psi_2 v - v^2), \\ |v(t)| < 1 \end{cases}$$

  On obtient :

$$\begin{cases} v(t) = \frac{\psi_2(t)}{2}, \quad si\, |\psi_2(t)| \leq 2, \\ v(t) = sign(\psi(t)), \quad sinon. \end{cases}$$

– Détermination de la fonction de tir :
  Posons $y(t) = (x(t), \psi(t))$. Alors le problème (TPBVP) sera équivalent à chercher un zéro de la fonction de tir :

$$\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$z \to \phi(y) = y(5, z) - x(5).$$

  Avec $y(., 0, z)$ est la solution du système à valeur initial suivant :

$$(IVP) \begin{cases} \dot{y}_1(t) = y_2(t), \\ \dot{y}_2(t) = v(t), \\ \dot{y}_3(t) = 0, \\ \dot{y}_4(t) = -y_3(t), \\ y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 0, \\ y_3(0) = z_1 \in \mathbb{R}, \quad y_4(0) = z_2 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Soit $y(t,0,0,z_1,z_2)$ une solution du système au temps t avec les conditions initiales $(0,0,z_1,z_2)$. Pour $t_1 = 5$, on doit avoir :

$$y(5,0,0,s_1,s_2) = \begin{pmatrix} y_1(5,0,0,z_1,z_2) \\ y_2(5,0,0,z_1,z_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

La fonction de tir est alors :

$$\phi(t_1,y) = \begin{pmatrix} y_1(5,0,0,z_1,z_2) - 0 \\ y_2(5,0,0,z_1,z_2) + 1 \end{pmatrix}.$$

Pour retrouver les racines de la fonction de tir, on utilise la méthode de Newton implémenté sur ToolBox optim de Matlab.

Les résultats sont donnés par la figure 3.1 :

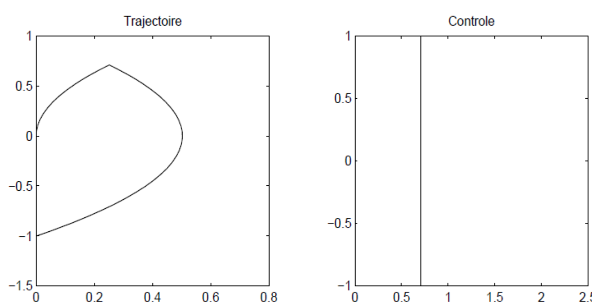

FIGURE 3.1 – Résultats de la méthode de tir simple

Interprétation graphique :

On remarque que la trajectoire est croissante sur $[0; 0,2]$ et à l'instant $t = 0,3$ la trajectoire x décroit.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressées à la théorie de contrôle optimal, où nous avons présenté certains éléments de base de cette théorie, en particulier la contrôlabilité des systèmes linéaires. Ensuite, nous avons donné le principe du maximum de Pontryaguine puis nous l'avons appliqué sur l'exemple de gestion d'un portefeuille financier avec présence des coûts de transaction. Et à la fin, nous avons présenté la méthode de tir simple pour la résolution d'un problème de contrôle optimal.

Chapitre 4

Programmation Dynamique

Introduction

Dans ce chapitre, nous allons introduire le principe de la programmation dynamique pour la résolution des problèmes d'optimisation dynamique, en restant dans un cadre déterministe et en insistant sur les applications économiques. Nous traiterons dans un premier temps le cas discret, nous aborderons ensuite le cas continu. Nous allons montrer le lien entre le principe du maximum et la programmation dynamique.

4.1 Programmation dynamique en temps discret

4.1.1 Formulation du problème

Considérons le problème d'optimisation dynamique en temps discret et en horizon fini :

$$(P) \begin{cases} \max\limits_{v}[\sum\limits_{t=0}^{t_1-1} L(t,x(t),v(t)) + g(x(t_1))], \\ x(t+1) = f(t,x(t),v(t)), \quad t \in T = \{0,...,t_1-1\}, \\ x(0) = x^0, \\ x \in \mathbb{R}^n, v \in \mathbb{R}^m, \end{cases} \tag{4.1}$$

avec
T : l'horizon du problème,
x : variable d'état,
$L : T \times M \times U \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1, T : l'intervalle de temps, M ouvert de $\mathbb{R}^n$, U ouvert de $\mathbb{R}^m$.
$g : M \longrightarrow R$ est une fonction de classe C^1.
Pour résoudre le problème (4.1), nous allons le plonger dans une famille de sous-problèmes paramétrés par une paire (s,x) et définis comme suit :

$$P(s,x) \begin{cases} \max\limits_{v}[\sum\limits_{t=s}^{t_1-1} L(t,x(t),v(t)) + g(x(t_1))], \\ x(t+1) = f(t,x(t),v(t)), \qquad t = s,...,t_1-1, \\ x(s) = x, \quad 0 \leq s \leq t_1-1. \end{cases} \tag{4.2}$$

Dans ce programme, on cherche à optimiser l'objectif à partir de l'instant s et de l'état x.

4.1.2 Principe de la programmation dynamique

Le principe de la programmation dynamique repose sur la remarque suivante :
Soit une suite de contrôles conduisant à l'état x à l'instant s. En remplaçant les contrôles à partir de s par une solution du problème (4.2), on ne peut qu'améliorer l'objectif à partir de $t = 0$. Pour chercher les suites de contrôles optimaux pour le problème (4.1), on peut les chercher parmi les suites optimales à partir de l'instant s.
La programmation dynamique applique cette remarque récursivement à partir de $t_1 - 1$. On calcule d'abord les solutions et les valeurs des programmes $P(t_1 - 1, .)$, $P(t_1 - 2, .)$, et ainsi de suite. Le calcul est simplifié puisque pour chercher les solutions et les valeurs de $P(s, .)$ on se limite aux séquences optimales à partir de $s + 1$.

Théorème 4.1.1. *[7] Supposons que tous les programmes $P(s, x)$ admettent des solutions et notons $B(s, x)$ leur valeur.*
(i) La fonction de Bellman B est caractérisée par la récurrence rétrograde :

$$\begin{cases} Pour \quad t = 0, ..., t_1 - 1, \\ B(t, x(t)) = \max\limits_{v}[L(t, x, v) + B(t + 1, x(t + 1))], \\ B(t_1, x(t_1)) = g(x(t_1)), \end{cases} \tag{4.3}$$

(ii) Une suite $(x(t), v(t))$ pour $t = s, ..., t_1 - 1$ est optimale dans le problème $P(s, x)$ si et selement si elle vérifie les contraintes et :

$$B(t, x(t)) = L(t, x(t), v(t)) + B(t + 1, x(t + 1)). \tag{4.4}$$

Pour résoudre le problème (4.4), on utilise l'algorithme de programmation suivant :
Etape 1 : on connait $B(t_1, .)$ on calcule $B(t_1 - 1, .)$ et les contrôles $v(t_1 - 1)$ vérifiant (4.3), ces contrôles sont d'après l'équation (4.4) les solutions de $P(t_1 - 1, .)$.
Etape $t_1 - s$: on a obtenu à l'étape précédente les valeurs et les solutions des programmes $P(s + 1, .)$. Pour chaque couple (s, x) on calcule $B(s, .)$ et les contrôles $v(s)$ vérifiant (4.3) et d'après (4.4) les solutions de $P(s, f(s, x, v))$ s'obtiennent en adjoignant à $v(s)$ les solutions de $f(t, x, v)$.
En répétant t_1 fois, on obtient les solutions du problème $P(0, x^0)$.

4.1.3 Exemple : Problème du consommateur

Soit un consommateur qui possède une richesse x, il consomme $c(t)$, $t \in T = \{0, ..., t_1 - 1\}$. Le problème du consommateur s'écrit :

$$\begin{cases} \max\limits_{c} \sum\limits_{t=0}^{t_1-1} u(c(t)) + g(x(t_1)), \\ x(t + 1) = x(t) - c(t), \\ x(0) = x^0. \end{cases}$$

On spécifie u et g : $u(c(t)) = c(t)^{1-\alpha}$ et $g(x(t)) = x(t)^{1-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$. Alors le problème s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} \max\limits_{c} \sum\limits_{t=0}^{t_1-1} c(t)^{1-\alpha} + x(t_1)^{1-\alpha}, \\ x(t+1) = x(t) - c(t), \\ x(0) = x^0. \end{cases}$$

On applique le *Théorème 3.1.1* :

- $B(t_1, x(t_1)) = g(x(t_1)) = x(t_1)^{1-\alpha} = (x(t_1-1) - c(t_1-1))^{1-\alpha}$,
- $B(t_1-1, x(t_1-1)) = \max\limits_{c}[c(t_1-1)^{1-\alpha} + B(t_1, x(t_1))]$,

  donc : $B(t_1-1, x(t_1-1)) = \max\limits_{c}[c(t_1-1)^{1-\alpha} + (x(t_1-1) - c(t_1-1))^{1-\alpha}]$.

Le maximum est donné par l'égalisation à 0 de la dérivée première de $B(t_1-1, x(t_1-1))$:

$$\frac{\partial B}{\partial c}(t_1-1, x(t_1-1)) = (1-\alpha)c(t_1-1)^{-\alpha} - (1-\alpha)(x(t_1-1) - c(t_1-1))^{-\alpha} = 0$$

$$c(t_1-1)^{-\alpha} = (x(t_1-1) - c(t_1-1))^{-\alpha},$$

donc :

$$c(t_1-1)^* = \frac{x(t_1-1)}{2} = bx(t_1-1) \quad avec \quad b = \frac{1}{2},$$

d'où

$$\begin{aligned} B(t_1-1, x(t_1-1)) &= (bx(t_1-1))^{1-\alpha} + (x(t_1-1) - bx(t_1-1))^{1-\alpha} \\ &= x(t_1-1)^{1-\alpha}[b^{1-\alpha} + b^{1-\alpha}] \\ &= 2b^{1-\alpha}x(t_1-1)^{1-\alpha} \\ &= 2b.b^{-\alpha}x(t_1-1)^{1-\alpha} \end{aligned}$$

$$\boxed{B(t_1-1, x(t_1-1)) = b^{-\alpha}x(t_1-1)^{1-\alpha}}.$$

- $B(t_1-2, x(t_1-2)) = \max\limits_{c}[c(t_1-2)^{1-\alpha} + b^{-\alpha}(x(t_1-2) - c(t_1-2))^{1-\alpha}]$

  $\frac{\partial B}{\partial c}(t_1-2, x(t_1-2)) = (1-\alpha)c(t_1-2)^{-\alpha} - b^{-\alpha}(1-\alpha)(x(t_1-2) - c(t_1-2))^{-\alpha} = 0$

  $\Longleftrightarrow c(t_1-2)^{-\alpha} = b^{-\alpha}(x(t_1-2) - c(t_1-2))^{-\alpha}$

  $\Longleftrightarrow c(t_1-2)^* = b(x(t_1-2) - c(t_1-2)^*)$

  $\Longleftrightarrow c(t_1-2)^* = \frac{b}{1+b}x(t_1-2)$.

D'où

$$\begin{aligned} B(t_1-2, x(t_1-2)) &= \left(\frac{b}{1+b}x(t_1-2)\right)^{1-\alpha} + b^{-\alpha}\left(x(t_1-2) - \frac{b}{1+b}x(t_1-2)\right)^{1-\alpha} \\ &= \left(\frac{b}{1+b}x(t_1-2)\right)^{1-\alpha} + b^{-\alpha}\left(\frac{1}{1+b}x(t_1-2)\right)^{1-\alpha} \\ &= x(t_1-2)^{1-\alpha}\left[\left(\frac{b}{1+b}\right)^{1-\alpha} + b^{-\alpha}\left(\frac{1}{1+b}\right)^{1-\alpha}\right] \\ &= x(t_1-2)^{1-\alpha}\left[\left(\frac{1}{1+b}\right)^{1-\alpha}(b^{1-\alpha} + b^{-\alpha})\right] \\ &= 3x(t_1-2)^{1-\alpha}\left(\frac{b}{1+b}\right)^{1-\alpha} \end{aligned}$$

$$\boxed{B(t_1-2,x(t_1-2)) = x(t_1-2)^{1-\alpha}\left(\frac{b}{1+b}x(t_1-2)\right)^{-\alpha}},$$

et ainsi de suite...
Pour terminer l'exemple, supposons que $t_1 = 2$ et réécrivons le problème de départ :

$$\max_{c_0,c_1}\sum_{t=0}^{1} c(t)^{1-\alpha} + x(2)^{1-\alpha},$$

- $B(2,x(2)) = x(1)^{1-\alpha}$;
- $B(1,x(1)) = b^{-\alpha}x(0)^{1-\alpha}$ *avec* $b=\frac{1}{2}$ *et* $c^*(1) = \frac{1}{2}x(1)$;
- $B(0,x(0)) = \left(\frac{1}{1+b}\right)^{-\alpha}x(0)^{1-\alpha}$ *et* $c^*(0) = \frac{b}{1+b}x^0 = \frac{1}{3}x^0$.

On en déduit :
$B(0,x(0)) = \left(\frac{1}{3}\right)^{-\alpha}x(0)^{1-\alpha}$ *avec* $c^*(0) = \frac{1}{3}x^0$.
Or, $x^*(1) = x(0) - c^*(0) = x^0 - \frac{1}{3}x^0 = \frac{2}{3}x^0$.
D'où $c^*(1) = \frac{1}{2}x(1) = \frac{1}{3}x^0$,
et $x^*(2) = x(1) - c^*(1) = \frac{2}{3}x^0 - \frac{1}{3}x^0 = \frac{1}{3}x^0$.
Economiquement, ce résultat signifie que pour maximiser sa richesse $x(t)$ le consommateur doit :

– Consommer à la première période ($t = 0$) un tiers de sa richesse initiale x^0. Il lui reste donc deux tiers de sa richesse initiale en début de la deuxième période ($t = 1$).
– Consommer également un tiers de sa richesse initiale en deuxième période ($t = 1$), de sorte qu' à la troisième période ($t = 2$), sa richesse $x(2)$ sera égale à un tiers de sa richesse initiale.

4.2 Programmation dynamique en temps continu

4.2.1 Formulation du problème

Considérons le problème d'optimisation dynamique suivant :

$$\begin{cases} \max\limits_{v} J(v) = \displaystyle\int_0^{t_1} L(t,x(t),v(t))dt + g(x(t_1)), \\ \dot{x}(t) = f(t,x(t),v(t)), \quad t \in T = [0,t_1], \\ x(0) = x^0, \\ x \in \mathbb{R}^n, \quad v \in U \subset \mathbb{R}^m. \end{cases} \tag{4.5}$$

On supposera que les contrôles v sont continus par morceaux et donc les trajectoires correspondantes x sont continues et dérivables par morceaux.

4.2.2 Principe de la programmation dynamique

Le principe de la programmation dynamique stipule que si un contrôle v est optimal entre 0 et t_1 pour la condition initiale x^0, alors il est aussi optimal entre t et t_1 avec la condition initiale $x(t)$ à cette date.

Définition 4.2.1. [7] On définit la fonction de Bellman pour le problème (4.5) comme suit :
$B(t,x(t)) = \max_v [\int_t^{t_1} L(t,x(t),v(t))dt + g(x(t_1))]$,
et B vérifie la condition terminale :
$B(t_1,x(t_1)) = g(x(t_1))$.

4.2.3 Equation d'Hamilton-Jacobi-Bellman

En utilisant le principe de la programmation dynamique et en étudiant comment varie la valeur entre deux instants proches t et $t+\Delta t$ et deux états proches nous allons voir qu'une autre propriété de B est qu'elle est solution d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre appelée équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman :

Proposition 4.2.1. *[7] Supposons B régulière, alors B est une solution de l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman (H.J.B) :*

$$\frac{\partial B}{\partial t}(t,x(t)) + H(t,x,\frac{\partial B}{\partial x}(t,x(t))) = 0, \tag{4.6}$$

où $H(t,x(t),\psi(t),v(t)) = \psi(t)f(t,x(t),v(t)) + L(t,x(t),v(t))$ est le Hamiltonien du problème (4.5)*.*

4.2.4 Condition suffisante et contrôle optimal en feedback

Si l'on connait une solution ω (régulière) du problème aux limites pour l'équation de H.J.B.

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega}{\partial t}(t,x(t)) + \max H(t,x,\frac{\partial \omega}{\partial x^0}(t,x(t))) = 0, \quad sur[0,t_1]\times\mathbb{R}^n, \\ \omega(t_1,x(t_1)) = g(x(t_1)). \end{cases} \tag{4.7}$$

Alors on peut déduire une commande optimal en boucle fermée (commande du type feedback) ; une commande en feedback est une fonction qui ne dépend pas seulement du temps mais aussi du l'état du système, c'est donc une fonction V de $[0,t_1]\times\mathbb{R}^n$ à valeurs dans l'espace des contrôles U. Pour un contrôle en feedback $V(,)$ la dynamique de la variable d'état est régie par l'équation différentielle ordinnaire (EDO) :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t,x(t),v(t)), \quad t\in T=[0,t_1], \\ x(0) = x^0. \end{cases} \tag{4.8}$$

On s'intéresse à des contrôles en feedback, c'est à dire dépendant de l'état instantané du système. On dira que le contrôle $v(t) = V(t,x(t))$ est optimal, avec $x(.)$ solution du problème (4.8).

Théorème 4.2.1. *[7] Supposons que ω est une solution de classe C^1 du problème aux limites* (4.7) *et que pour tout $(t,x)\in T\times\mathbb{R}^n$ il existe $V(t,x)\in T\times\mathbb{R}^n$ solution du problème :*

$$\max_{v\in U}[L(t,x,v) + \frac{\partial \omega}{\partial x}(t,x(t)).f(t,x,v)],$$

alors V est un contrôle optimal en feedback et donc si x est une solution de :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), V(t, x(t))), \\ x(0) = x^0. \end{cases}$$

x est une trajectoire optimale pour (4.7) et $v^*(t) = V(t, x(t))$ est un contrôle optimal et ω est la fonction valeur du problème (4.7).
En pratique, ce théorème est considéré comme une condition suffisante d'optimalité.

4.2.5 Exemple : Modèle de consommation optimale

On considère qu'un agent économique posséde un capital qu'il désire investir et laisser un héritage à sa descendance (ce problème a été étudié dans [4]).
On notera $x(t)$ la valeur de sa richesse à la date t. La variable d'état est régie par la dynamique suivante :

$$\dot{x}(t) = -c(t),$$

$$x(0) = x^0,$$

où $c(t)$ est un taux de consommation à la date t.
Les préférences de l'agent sont caractérisées par la fonction d'utilité :

$$J(c) = \int_0^{t_1} e^{-\beta t} u(c(t))dt + e^{-\beta t_1} u(x(t_1)),$$

où

$$u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$u(\xi) = \frac{\xi^\gamma}{\gamma}.$$

La fonction u est strictement croissante, concave et vérifie la condition d'Inada :

$$\lim_{\xi \to 0} \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi} = +\infty.$$

La contrainte de positivité de la consommation peut être ignorée et γ étant un paramètre et positif inférieur à 1 .
Donc le problème de choix optimal de consommation s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} \max\limits_{c \in U} J(c) = \displaystyle\int_0^{t_1} e^{-\beta t} u(c(t))dt + e^{-\beta t_1} u(x(t_1)), \\ \dot{x}(t) = -c(t), \\ x(0) = x^0, \quad t \in T = [0, t_1], \\ u(\xi) = \frac{\xi^\gamma}{\gamma}, \end{cases}$$

où U est l'ensemble des fonctions continues par morceaux. Le Hamiltonien est donné par :

$$H(t, x, \psi, v) = e^{-\beta t} u(v) - \psi v.$$

Comme H est concave par rapport à la variable de contrôle on obtient :

$$H^*(t,x,\psi) = H(t,x,\psi,v^*(t)), \quad avec \quad v^*(t) = (\psi e^{\beta t})^{\frac{-1}{1-\gamma}},$$

$$H^*(t,x,\psi) = \frac{(\psi e^{\beta t})^{\frac{-\gamma}{1-\gamma}}}{\gamma} e^{-\beta t} - \psi \frac{(\psi e^{\beta t})^{\frac{-\gamma}{1-\gamma}}}{\gamma} = \frac{2(1-\gamma)}{\gamma} e^{-\beta t} (\psi e^{\beta t})^{\frac{-\gamma}{1-\gamma}}.$$

L'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman s'écrit alors :

$$\frac{\partial B}{\partial t}(t,x(t)) + H^*(t,x,\frac{\partial B}{\partial x}(t,x(t))) =$$
$$\frac{\partial B}{\partial t}(t,x(t)) + \frac{2(1-\gamma)}{\gamma} e^{-\beta t} (\psi e^{\beta t})^{\frac{-\gamma}{1-\gamma}} = 0.$$

On cherche alors une solution de l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman sous la forme :

$$B(t,x(t)) = e^{-\beta t} A(t) u(x(t)).$$

Remarquons que $B(t_1, x(t_1)) = e^{-\beta t_1} u(x(t_1))$, la fonction A doit vérifier la condition terminale

$$A(t_1) = 1.$$

En remplaçant dans l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman, on obtient que la fonction $A(.)$ doit vérifier l'équation différentielle ordinaire :

$$\dot{A(t)} + 2(1-\gamma)A(t)^{\frac{-\gamma}{1-\gamma}} - \beta A(t) = 0,$$

soit :

$$\frac{d}{dt}(A(t)^{\frac{1}{1-\gamma}}) = \frac{\beta}{1-\gamma} A(t)^{\frac{1}{1-\gamma}} - 1.$$

En tenant compte de la condition terminale $A(t_1) = 1$, ceci donne comme solution unique :

$$A(t) = [1 + \frac{1-\gamma}{\beta}(1 - e^{\beta(t-t_1)/(1-\gamma)})] - \gamma e^{\beta(t-t_1)}.$$

4.3 Programmation dynamique et principe du maximum de Pontryaguine

Rappelons que le principe du maximum repose sur la résolution d'un système d'équations différentielles ordinaires et il fournit une condition nécessaire d'optimalité. Celui de programmation dynamique conduit à la résolution d'une équation aux dérivées partielles avec la donnée d'une condition terminale et il fournit une condition suffisante d'optimalité. Voici quelques remarqes en comparant de ces deux principes :

- L'approche de la programmation dynamique est particulièrement intéressante quand on a une idée à priori sur la forme de la solution, comme dans l'exemple de consommation optimale ;
- La résolution d'une équation aux dérivées partielles est à priori plus difficile que la résolution d'un système d'équations différentielles ordinaires ;
- La programmation dynamique s'applique aux systèmes déterministes et stochastiques tandis que le principe du maximum (avec quelques exceptions) ne s'applique qu'aux systèmes déterministes.

4.3.1 Lien entre les deux approches

Nous allons voir comment le principe de la programmation dynamique permet de retrouver le principe du maximum et le système d'équations différentielles ordinaires.
Pour cela considérons la fonction :

$$\psi(t) = \frac{\partial B}{\partial x}(t, x(t)),$$

et supposons que B est deux fois différentiable. Montrons qu'alors $\psi(.)$ est solution d'une EDO et que $\psi(t_1)$ satisfait la condition de transversalité

$$\psi(t_1) = g'(x(t_1)) = \frac{\partial g}{\partial x}(x(t_1)).$$

Puisque $\psi(t) = \frac{\partial B}{\partial x}(t, x(t))$, en dérivant la ième composante on obtient :

$$\frac{d\psi_i(t)}{dt} = \dot{\psi_i}(t) = \frac{d}{dt}[\frac{\partial B}{\partial x_i}(t, x(t))] = \frac{\partial^2 B}{\partial t \partial x_i}(t, x(t)) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 B}{\partial x_i \partial x_j}(t, x(t))\dot{x_j}(t),$$

l'équation différentielle partielle s'écrit alors comme suit :

$$\frac{\partial B}{\partial t} + H^*(t, x, \frac{\partial B}{\partial x}) = 0,$$

et dérivons la par rapport à x_i :

$$\frac{\partial^2 B}{\partial t \partial x_i} + \frac{\partial H^*}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 B}{\partial x_i \partial x_j}.\frac{\partial H^*}{\partial \psi_j} = 0.$$

D'après l'égalité :

$$f_j(t, x, v^*) = \frac{\partial H^*}{\partial \psi_j}(t, x, \frac{\partial B}{\partial x}),$$

et puisque

$$\dot{x}_j(t) = f_j(t, x(t), \psi^*(t)).$$

On aura, alors :

$$\dot{\psi_i}(t) = \frac{-\partial H}{\partial x_i}(t, x(t), \psi(t)).$$

En dérivant par rapport à x_i la condition terminale de l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman, on obtient :

$$\frac{\partial B}{\partial x_i}(t_1, x(t_1)) = \frac{\partial g}{\partial x_i}(x),$$

d'où

$$\psi(t_1) = \frac{\partial B}{\partial x}(t_1, x(t_1)) = \frac{\partial g}{\partial x}(x(t_1)).$$

4.3.2 Application aux problèmes de contrôle linéaires-quadratiques

Un problème de contrôle est dit linéaire quadratique si l'équation d'état est linéaire et la fonction objectif quadratique. Nous restreindrons pour simplifier au cas unidimensionnel ($n = m = 1$) pour lequel (après changements éventuels de variables) le problème général s'écrit :

$$P(t,x)\begin{cases} \max \int_t^{t_1} [-\frac{1}{2}x^T(s)Ax(s) - \frac{1}{2}v^T(s)Gv(s)]ds + [Cx(t_1) - \frac{Dx^T(t_1)}{2}x(t_1)], \\ \dot{x}(s) = Ex(s) + Fv(s), \\ x(t) = x, \end{cases}$$

où A, G, C, D, E, F sont des constantes positives.
Le Hamiltonien de ce problème s'écrit :

$$H(t,x,\psi,v) = -\frac{1}{2}(x^TAx + v^TGv) + \psi[Ex + Fv],$$

son maximum est atteint pour :

$$v = v^*(\psi) = \frac{\psi F}{G}$$

et il vaut alors

$$H^*(t,x,\psi) = (\psi Ex - \frac{1}{2}x^TAx) + \frac{\psi^2F^2}{2G}.$$

L'équation du Hamilton-Jacobi-Bellman s'écrit donc :

$$\begin{cases} \frac{\partial B}{\partial t} + E\frac{\partial B}{\partial x}x - \frac{1}{2}x^TAx + \frac{F^2}{2G}(\frac{\partial B}{\partial x})^2 = 0, \\ B(t_1, x(t_1)) = Cx - \frac{1}{2}x^TDx. \end{cases}$$

De par la nature du problème, alors la solution recherchée est de type suivant :

$$B(t,x(t)) = -\frac{1}{2}x^T\alpha(t)x + \beta(t)x + \gamma(t),$$

où la condition terminale s'écrit alors :

$$\alpha(t_1) = D, \quad \beta(t_1) = C, \quad \gamma(t_1) = 0.$$

Donc l'équation de H-J-B s'écrit :

$$-\frac{1}{2}x^T\dot{\alpha}(t)x + \dot{\beta}(t)x + \dot{\gamma}(t) + Ex(\beta(t) - \alpha(t)x) - \frac{1}{2}x^TAx + \frac{F^2}{2G}(\beta(t) - \alpha(t)x)^T(\beta(t) - \alpha(t)x) = 0.$$

D'où

$$x^T(-\frac{1}{2}\dot{\alpha}(t) - E\alpha(t) - \frac{1}{2}A + \frac{F^2}{G}\alpha^2(t))x + (\dot{\beta}(t) + \beta(t)(E - \frac{F^2}{2G}\alpha(t)))x + \dot{\gamma}(t) + \frac{F^2}{2G}\beta^2(t) = 0.$$

On a un polynôme de degré 2 en x, dont chaque coefficient est en fonction de t, et qui doit être identiquement nul, ce qui fournit trois EDO :

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}\dot{\alpha}(t) - E\alpha(t) - \frac{1}{2}A + \frac{F^2\alpha^2(t)}{2G} = 0, \quad (1) \\ \dot{\beta}(t) + \beta(t)[E - \frac{F^2}{G}\alpha(t)] = 0, \quad (2) \\ \dot{\gamma}(t) + \frac{F^2}{2G}\beta^2(t) = 0. \quad (3) \end{cases}$$

L'équation (1) se résoud par séparation des variables :

$$\frac{d\alpha}{\frac{F^2}{G}\alpha^2 - 2E\alpha - A} = dt.$$

Soit $\frac{d\alpha}{(\alpha-\omega_1)(\alpha-\omega_2)} = \frac{F^2}{G}dt$,
en posant :

$$\begin{cases} \omega_1 = \frac{G}{F^2}(E + \sqrt{E^2 + \frac{F^2 A}{G}}), \\ \omega_2 = \frac{G}{F^2}(E - \sqrt{E^2 + \frac{F^2 A}{G}}), \end{cases}$$

après intégration sur $[t, t_1]$, on aura :

$$\ln\frac{\alpha(t)-\omega_2}{\alpha(t)-\omega_1} = \ln\frac{D-\omega_2}{D-\omega_1} + 2K_1(t_1 - t),$$

avec

$$K_1 = \frac{F^2}{2G}(\omega_1 - \omega_2) = \sqrt{E^2 + \frac{F^2 A}{G}},$$

ou encore :

$$\alpha(t) = \omega_1 - \frac{(\omega_1 - \omega_2)}{1 - K_2 e^{2K_1(t_1-t)}} \quad K_2 = \frac{D-\omega_2}{D-\omega_1}.$$

En remplaçant $\alpha(t)$ par sa valeur dans (2) on obtient :

$$\frac{\dot{\beta}(t)}{\beta(t)} = [\frac{F^2}{G}\omega_1 - E] - \frac{F^2(\omega_1-\omega_2)}{G(1 - k_2 e^{2K_1(t_1-t)})}$$

$$= K_1(1 - \frac{2}{1 - K_2 e^{2K_1(t_1-t)}}).$$

En intégrant entre t et t_1 on obtient :

$$\ln\frac{C}{\beta(t)} = K_1(t_1 - t) - \int_t^{t_1}\frac{2K_1 ds}{1 - K_2 e^{2K_1(t_1-t)}},$$

après calcul :

$$\beta(t) = \frac{C(1-K_2)exp(K_1(t_1-t))}{1 - K_2 exp(2K_1(t_1-t))}.$$

L'équation (3) se résoud directement par une simple intégration :

$$\gamma(t) = \frac{F^2 C^2 (1-K_2)^2}{2G}\int_t^{t_1}\frac{exp(2K_1(t_1-s))ds}{[1 - K_2 exp(2K_1(t_1-s))]^2},$$

soit

$$\gamma(t) = -\frac{C^2}{2(D-\omega_1)}\frac{exp(2K_1(t_1-t)-t)}{1 - K_2 exp(2K_1(t_1-t))}.$$

Donc la solution de l'équation du H-J-B est :

$$B(t, x(t)) = -x^T\frac{\omega_1}{2}x + \frac{C^2}{2(D-\omega_1)} - \frac{(\omega_1-\omega_2)(x - \frac{Cexp(K_1(t_1-t)^2)}{D-\omega_1})}{2(K_2 exp(2K_1(t_1-t)-1))},$$

et le contrôle optimal peut s'exprimer en fonction de (t, x) (sous forme de $feedback$) :

$$v^*(t,x) = \frac{F}{G}\frac{\partial B}{\partial x} = -\frac{F}{G}[\omega_1 x + \frac{(\omega_1 - \omega_2)(x - \frac{Cexp(K_1(t_1-t))}{D-\omega_1})}{2(K_2 exp(K_1(t_1 - t) - 1))}].$$

Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressées à un nouveau point de vue pour la résolution des problèmes d'optimisation dynamique.
Dans la première partie, nous avons introduit le principe de la programmation dynamique en temps discret et nous l'avons illustré sur le problème du consommateur. Dans la deuxième partie, nous avons défini la fonction de Bellman pour le problème en temps continu. Nous avons montré que cette fonction est une solution de l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman, où nous avons donné l'exemple de consommation optimale. Dans la troisième partie, nous avons montré qu'à partir du principe de la programmation dynamique, nous pouvons retrouver le principe du maximum de Pontryaguine.

Conclusion

Dans ce travail, nous avons montré l'application des méthodes d'optimisation sur des modèles financiers. Nous avons appliqué la méthode de support pour la résolution du problème de plannification de la production des chassis. Ensuite, nous avons utilisé l'équation d'Euler-Lagrange pour la résolution de deux exemples : consommations-épargne et le modèle de la croisssance optimale avec ressource épuisable. En outre, nous avons traité le problème de gestion d'un portefeuille financier en présence des coûts de transaction en appliquant le principe du maximum de Pontryaguine. Enfin, nous avons illustré le principe de la programmation dynamique dans le cas discret sur le problème du consommateur afin de trouver combien il doit consommer sur chaque période. Le cas continu a été utilisé pour la résolution du modèle de la croissance optimale.

En perspective nous proposons de :

– traiter le problème de contrôle optimal par la méthode de support,

– d'appliquer ces méthodes sur des exemples pratiques, régis par des modèles stochastiques.

Bibliographie

[1] Abdelli-Lahlou Z. *Théorie de la programmation linéaire*. Universitaires Européennes, 2017.

[2] Gabasov R. and Kirillova F. M. *Methods of Linear Programming*, volume 1,2 and 3. Edition of the Minsk University, 1977,1978 and 1980.

[3] Demange G. et Rochet J-C. *Méthodes Mathématiques de la Finance*. Economica, 2005.

[4] Touzi N. *Optimisation Dynamique, Note de Cours*. Ecole Nationle Statistique et de l'Administration Economique, Paris, 2002.

[5] Trélat E. *Contrôle optimal : Théorie et application*. Université Paris-sud. Laboratoire ANEDP Mathématique UMR 7598, 2007.

[6] Gamkrelidze R. V. Pontryaguine L. S., Boltyanskii V. G. and Mishchenko E. F. *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. John Wiley and Sons, New Jersey, 1962.

[7] Carlier G. *Notes de Cours, Programmation Dynamique*. Ecole Nationle Statistique et de l'Administration Economique, Paris, 2007.

[8] Bibi M. O. *Programmation Linéaire et Quadratique, Cours de Première Année Master*. Université de Béjaia, 2018.

[9] Bibi M. O. *Contrôle Optimal, Cours de Première Année Master*. Université de Béjaia, 2018.

[10] Gabasov R. and Kirillova F.M. Real time optimal contrôle and observation. *Journal of International Computer and Systeme Sciences*, 45(3) :421–441, 2006.

[11] Barles G. *Solutions de Viscosité des équations de Hamilton-Jacobi*. Spring Verlag, 1994.

[12] Pham D. *Introduction au Calcul des variations*. Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2010.

[13] Lucas R.E. and Stokey N. *Recursive Methods in Economics Dynamics*. Harvard University Press, 1989.

[14] Sklab M et Tighremt S. *Contrôle optimal linéaire quadratique et applications*. Mémoire de Master, Université de Béjaia, 2017.

[15] Azi M. *Contrôle optimal d'un système dynamique linéaire et application en économie financière*. Mémoire de Magister, Université de Béjaia, 2010.

[16] Bruce D. C and Sardar M. N. I. *Optimization in Economics and Finance*. Spring Boston, 2005.

[17] Pham H. *Optimisation et Contrôle Stochastique Appliqués à la Finance.* Springer-Verlag, Berlin, 2007.

[18] Ouidja D. *Principe du maximum et méthode de tir.* Mémoire de Magister, Université Mouloud Mammeri, Tizi-Ouzou, 2010.

[19] Olesia K. *Application of optimal control theory.* Master's Thesis.

[20] Sethi S. P. A. Note on a Planning Horizon Model of Cash Management. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 6(01) :659–664, 1971.

Résumé

Les méthodes d'optimisation jouent un rôle important pour la résolution des problèmes économiques. L'objectif de ce mémoire est d'appliquer différentes méthodes d'optimisation sur quelques modèles financiers. Après avoir appliqué la méthode de support pour la résolution des programmes linéaires, nous avons donné une introduction au problème de calcul des variations. Ensuite, nous avons exposé brièvement la théorie de contrôle optimal et présenté le principe de la programmation dynamique pour les problèmes d'optimisation en temps discret et continu. Enfin, nous avons appliqué les méthodes présentées sur quelques exemples financiers.

Mots-clés : Méthode de support, calcul des variations, contrôle optimal, programmation dynamique, applications financières .

Abstract

The optimization methods play an important role in the resolution of economic problems. The purpose of this thesis is to apply different optimization methods on some financial models. After applying the support method for solving linear programs, we gave an introduction to the problem of the calculus of variations. Then we briefly exposed the theory of optimal control and presented the principle of dynamic programming for dynamic optimization problems in discrete and continuous time . Finally, we applied the presented methods on some financial examples.

Key words : Support method, calculus of variations, optimal control, dynamic programming, financial applications.

ملخّص

تلعب طرق التحسين دورًا مهمًا في حل المشَاكل الإقتصَادية. الغرض من هذه الأطروحة هو تطبيق طرق تحسين مختلفة علَى بعض النمَاذج المَالية. بعد تقديم طريقة الدعم لحِل البرَامج الخطية، قدمنَا مشكلة حسَاب الإختلَافَات، نَاقشنَا بإِختصَار نظرية التحكم الأمثل. بعد ذلك، قدمنَا مبدَأ البرمجة الدينَامكية. و في النهَاية قمنَا بتطبيق الطرق المقدمة علَى بعض الأمثلة المَالية.

كلمَات مفتَاحية : طريقة الدعم، حسَاب الإختلَافَات، التحكم الأمثل، البرمجة الدينَاميكية، التطبيقَات المَالية.

Agzul

Tarrayin usekkey ṭṭfent amur ameqqran di tifrat n yegna udmisen. Iswi n umahil ayi d asexdem n tarrayin usekkey γef kra n yemsilen inaẓrafen. Umbeεd mi nesnes tarrayt usalel i tifrat n wahilen imzirgen, nga-d tazwert i wegnu n leḥsab n tanḍiwin. Sakin, nsaher-d s tewzel tiẓri n wesweḍ akkay u nenked azwir n usmihel adinamiki i yegna usekkey s wakud afraray aked umaγlal. Γer tagara, s tarrayin i d-nenked nfra-d kra imedyaten inaẓrafen.

Awalen n tsura : Tarrayt usalel, leḥsab n tanḍiwin, asweḍ akkay, asmihel adinamiki, isnasen inaẓrafen.