

*République Algérienne Démocratique et Populaire*  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université A. Mira de Bejaia  
*Faculté des Sciences Exactes*  
*Département de Recherche Opérationnelle*



# Mémoire de fin de cycle

*En Vue de l'Obtention du Diplôme de Master en Recherche Opérationnelle*

Option : Mathématiques Financières

## *Thème*

---

## Quantification de l'incertitude paramétrique dans les modèles du risque

---

Présenté par :

*M<sup>elle</sup>* MEHENNAOUI Assia et *M<sup>elle</sup>* MERAH Djahida

Devant le jury composé de :

<b>Présidente</b>	Mme TAKHADMITH Baya	MCB	U. de Bouira
<b>Encadreur</b>	M ABBAS Karim	Professeur	U. de Béjaïa
<b>Examineur</b>	M SOUFIT Massinissa	Docteur	U. de Béjaïa
<b>Examinatrice</b>	<i>M<sup>elle</sup></i> ZITOUNI Aida	MAA	U. de Béjaïa

---

Promotion 2018-2019

---

## *Remerciement*

Nous remercions Dieu pour le courage, la patience et la volonté qui nous ont été utile tout au long de notre parcours. L'honneur et le plaisir se trouve dans le remerciement de nos parents en témoignage de leur amour et sacrifices à qui nous devons nos meilleurs et sincères respects.

Nous adressons nos remerciements à notre encadreur pr **K.ABBAS** pour l'aide et l'assistance qu'il nous a fournit afin de nous permettre de mener à bien et à terme ce mémoire de fin d'études, et qu'il nous permet de lui exprimer notre profonde gratitude.

Nous exprimons toute notre reconnaissance envers Monsieur **F.CHEURFA** pour les conseils avisés et son aide qu'il nous a accordé tout au long de ce travail. Nous tenons à remercier les membres de jury qui ont accepté d'évaluer ce travail.

Enfin, merci à tous ceux qui ont contribué et soutenu de près ou de loin à la réalisation de ce mémoire et durant tout notre cursus.

*Assia,Djahida.*

## *Dédicaces*

je dédie ce modeste  
travail à ceux qui j'ai de plus cher :  
mes parents, mes frères Nadjim, Abdou  
Abdrahmane, ma sœur Ibtissam à t-  
oute ma famille, à mes amis :Hiz-  
ia, Zineb, Wissem et Jigou, à m-  
a binôme Djahida, à mon pe-  
tit Tajeldin et à la mém-  
oire de mon gr-  
and père



*Assia*

je dédie ce mode ste travail à la mé-  
moire de mon père et de ma sœur ,à ma chère ma-  
man, à mes sœurs Khira, Sabrina, Saliha, à mes  
frères Abdelghani, Karim, Youcef, à mes ne-  
veux et mes nièces : Amani, Fatima, à m-  
es amis :Asma, Hadda, Malia, War-  
da à ma binôme Assia.Et  
à la promotion

MF 2019



*Djahida*

# Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>i</b>
<b>Table des figures</b>	<b>iii</b>
<b>Liste des Tableaux</b>	<b>v</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>1 <i>Théorie de la ruine et modèle de risque classique</i></b>	<b>4</b>
1.1 Théorie de la ruine . . . . .	5
1.1.1 Quelques Définitions . . . . .	5
1.1.2 Modèle individuel et Modèle collectif . . . . .	8
1.2 Modèle classique de la théorie de la ruine . . . . .	10
1.2.1 Processus de réserve et de surplus . . . . .	10
1.3 Probabilité de ruine . . . . .	11
1.4 Processus de renouvellement . . . . .	13
1.4.1 Processus de Poisson . . . . .	13
1.4.2 Processus de Poisson composé . . . . .	14
1.4.3 Modèle de Cramèr-Lundberg . . . . .	14
1.4.4 Modèle Sparre-Andersen . . . . .	21
1.4.5 Autres approches . . . . .	21
1.5 Conclusion . . . . .	22

<b>2</b>	<b><i>Quantification de l'incertitude paramétrique et valeur à risque</i></b>	<b>23</b>
2.1	Terminologie de l'incertitude . . . . .	23
2.2	Types de l'incertitude . . . . .	24
2.2.1	Incetitude paramétrique . . . . .	24
2.2.2	Incetitude de modélisation . . . . .	24
2.2.3	Incetitude épistémique . . . . .	25
2.2.4	Incetitude de décision . . . . .	25
2.3	Présentation de l'incertitude . . . . .	26
2.4	Méthodes de gestion et de propagation de l'incertitude paramétrique . . . . .	26
2.4.1	Méthode statistique de simulation Monte Carlo . . . . .	27
2.4.2	Développement des séries de Taylor . . . . .	27
2.4.3	Propagation du flou . . . . .	27
2.4.4	Approche par intervalle . . . . .	28
2.5	Value-at-Risk (VaR) . . . . .	29
2.5.1	Calcul de la Valeur à Risque . . . . .	30
2.5.2	Problématique . . . . .	31
2.6	Conclusion . . . . .	33
<b>3</b>	<b><i>Quantification paramétrique dans les modèles du risque par l'approche inter-</i></b>	
	<b><i>valles</i></b>	<b>34</b>
3.1	Modèle de risque classique . . . . .	35
3.1.1	Remboursements de loi exponentielle . . . . .	35
3.2	Perturbation du taux de nombre d'arrivées des réclamations . . . . .	39
3.2.1	Scénario 1 . . . . .	39
3.2.2	Scénario 2 . . . . .	44
3.2.3	Scénario 3 . . . . .	49
3.3	Perturbation du taux d'arrivées des réclamation et du taux de quantités des récla-	
	mations . . . . .	53
3.3.1	Scénario 1 . . . . .	53
3.3.2	Scénario 2 . . . . .	56

3.3.3 Scénario 3 . . . . .	59
3.4 Conclusion . . . . .	62
<b>Conclusion générale</b>	<b>63</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>64</b>

# Table des figures

1.1	Évolution de la réserve et du surplus au cours du temps . . . . .	11
1.2	Description du modèle de base en assurance . . . . .	11
2.1	Présentation graphique de VaR . . . . .	30
2.2	Problématique générale de l'obtention de la VaR . . . . .	31
3.1	Comparaison des distributions de la probabilité de ruine selon la réserve initiale . . . . .	40
3.2	La densité de probabilité de probabilités de ruine $u = 5$ . . . . .	41
3.3	La densité de probabilité de probabilité de ruine pour $u = 10$ . . . . .	41
3.4	La densité de probabilité de probabilité de ruine pour $u = 15$ . . . . .	42
3.5	La densité de probabilité de probabilité de ruine pour $u = 20$ . . . . .	42
3.6	Comparaison des distributions de la probabilité de ruine selon la réserve initiale . . . . .	45
3.7	La densité de probabilité de probabilité de ruine pour $u = 100$ . . . . .	46
3.8	La densité de probabilité de probabilité de ruine pour $u = 200$ . . . . .	46
3.9	La densité de probabilité de probabilité de ruine pour $u = 300$ . . . . .	47
3.10	La densité de probabilité de probabilité de ruine pour $u = 400$ . . . . .	47
3.11	La densité de probabilité de probabilité de ruine pour $u = 500$ . . . . .	48
3.12	Comparaison des distributions de la probabilité de ruine selon le réserve initiale . . . . .	49
3.13	Les densités de probabilités des probabilités de ruine pour $= 1000$ . . . . .	50
3.14	Les densités de probabilités des probabilités de ruine pour $u = 2000$ . . . . .	50
3.15	Les densités de probabilités des probabilités de ruine pour $u = 3000$ . . . . .	51
3.16	Les densités de probabilités des probabilités de ruine pour $u = 4000$ . . . . .	51

---

3.17 Les densités de probabilités des probabilités de ruine pour $u = 5000$ . . . . .	52
3.18 Comparaison des distributions de la probabilité de ruine selon le réserve initiale . .	53
3.19 Les densités de probabilités des probabilités de ruine pour $u = 5$ . . . . .	54
3.20 Les densités de probabilités des probabilités de ruine pour $u = 10$ . . . . .	54
3.21 Les densités de probabilités des probabilités de ruine pour $u = 15$ . . . . .	55
3.22 Les densités de probabilités des probabilités de ruine pour $u = 20$ . . . . .	55
3.23 Les densités de probabilités des probabilités de ruine pour $u = 100$ . . . . .	56
3.24 Les densités de probabilités des probabilités de ruine pour $u = 200$ . . . . .	57
3.25 Les densités de probabilités des probabilités de ruine pour $u = 300$ . . . . .	57
3.26 Les densités de probabilités des probabilités de ruine pour $u = 400$ . . . . .	58
3.27 Les densités de probabilités des probabilités de ruine pour $u = 500$ . . . . .	58
3.28 Les densités de probabilités des probabilités de ruine pour $u = 1000$ . . . . .	59
3.29 Les densités de probabilités des probabilités de ruine pour $u = 2000$ . . . . .	60
3.30 Les densités de probabilités des probabilités de ruine pour $u = 3000$ . . . . .	60
3.31 Les densités de probabilités des probabilités de ruine pour $u = 4000$ . . . . .	61
3.32 Les densités de probabilités des probabilités de ruine pour $u = 5000$ . . . . .	61

# Liste des tableaux

3.1	Caractérisation statistique de la probabilité de ruine pour le 1 <sup>er</sup> cas et pour un réserve initiale petit . . . . .	44
3.2	Caractérisation statistique de la probabilité de ruine pour le 1 <sup>er</sup> cas et pour un réserve initiale moyen . . . . .	48
3.3	Caractérisation statistique de la probabilité de ruine pour le 1 <sup>er</sup> cas et pour un réserve initiale assez grand . . . . .	52
3.4	Caractérisation statistique de la probabilité de ruine pour le 2 <sup>ème</sup> cas et pour un réserve initiale petit . . . . .	56
3.5	Caractérisation statistique de la probabilité de ruine pour le 2 <sup>ème</sup> cas et pour un réserve initiale moyen . . . . .	59
3.6	Caractérisation statistique de la probabilité de ruine pour le 2 <sup>ème</sup> cas et pour un réserve initiale assez grand . . . . .	62

# Introduction générale

L'opération d'assurance a pour effet le transfert total ou partiel des conséquences financières du risque subi par l'assuré vers une société d'assurance. Les dépenses prises en charge par la société peuvent correspondre soit à des indemnités à verser à des tiers au titre de la responsabilité (civile, professionnelle, ou autre) de l'assuré, soit à la réparation des dommages subis par ce dernier. En assurance, on qualifie de risque, la probabilité que la réserve d'une compagnie d'assurance, qui est la différence entre le total des primes reçues et le total des montants des réclamations payés, devienne négative à un certain temps. A ce moment là, on dit que la ruine apparaît, du fait d'un mauvais calcul du taux de cotisation des assurés ou de sinistres trop importants à couvrir. La théorie mathématique de l'assurance peut contribuer à promouvoir le développement de méthodes plus rationnelles dans la gestion des risques. Les responsables et décideurs dans les compagnies d'assurance seraient ainsi mieux à même d'intégrer dans leurs démarches le fait que le risque, bien quantifié et apprécié, constitue aussi, sinon d'avantage, une opportunité d'innovation, une source de création de richesse, donc de progrès pour nos sociétés. L'un des outils les plus puissants pour comprendre l'évolution de la richesse d'une compagnie d'assurance est la modélisation stochastique. L'équilibre à long terme des résultats de la compagnie d'assurance correspond à la notion mathématique de probabilité de ruine. Le concept de probabilité de ruine sera basé sur les modèles de risque qui relèvent de la théorie du risque. Nous serons amenés à considérer une compagnie d'assurance qui veut investir une certaine somme d'argent dans une branche d'assurance. Le modèle consiste à la représentation du niveau des réserves comme étant le résultat de la différence entre les recettes par primes chargées et les paiements dus aux sinistres enregistrés en tenant compte d'un capital initial. Le modèle de risque, unidimensionnel, composé d'une seule branche d'assu-

rance, est un modèle utilisé pour décrire ce mécanisme d'arrivée des sinistres et des montants des réclamations. Le modèle concerne l'assurance non-vie, c'est-à-dire, les assurances « dommages » ou « accidents » par opposition aux assurances vie qui présentent d'autres problèmes et relèvent d'une autre modélisation.

Ce mémoire porte sur la quantification de l'incertitude paramétrique dans le modèle de risque classique, Ce sujet suscite un intérêt croissant à la fois dans le domaine d'assurance et dans le milieu académique. Notre travail repose sur la mise en œuvre de modèle dont les paramètres sont entachés d'une incertitude qu'il est possible de quantifier on la caractérisé en estimant la densité de probabilité .

Ce travail s'inscrit dans l'objet de montrer l'impact de réserve initiale d'une compagnie d'assurance sur l'état d'assurance. Pour cela on a cité la notion d'incertitude paramétrique dans l'étude d'un modèle de risque classique. On considère l'estimation de la probabilité de ruine  $\psi(\lambda, \mu)$ , tout en incorporant l'incertitude infligée dans les deux paramètres  $\lambda$  (taux des arrivées des réclamations) et  $\mu$  (taux de la quantité de réclamations). On a supposé que les paramètres  $\lambda$  et  $\mu$  d'un modèle de risque prennent leurs valeurs dans un espace plus au moins aléatoire. Pour ces deux paramètres, nous considérons la probabilité de ruine  $\psi(\lambda, \mu)$  comme une fonction. pour cela on a pris deux cas : le premier ; on perturbe un seul paramètre ( $\lambda$ )et le deuxième cas ; on perturbe les deux paramètres à la fois( $\lambda$ ) et ( $\mu$ ) . D'où la questions suivante se pose :

- A quel point la réserve initiale influence sur la probabilité de ruine ?

Pour répondre à ces questions, nous avons organisé notre travail comme suit : Le premier chapitre présente la théorie de la ruine, en particulier, le modèle classique de risque, connu sur le nom Cramèr-Lundberg. Le deuxième chapitre est consacré à la présentation de la quantification de l'incertitude paramétrique et de définir le concept de Value-at-Risk VaR. Le troisième chapitre est consacré à la quantification d'incertitude dans le modèle classique de ruine en utilisant l'approche par intervalle.

Ce mémoire s'achève par une conclusion générale et quelques perspectives sur l'application de la quantification de l'incertitude sur le modèle de risque de ruine.

# *Théorie de la ruine et modèle de risque classique*

La théorie de la ruine appartient aux sciences de la gestion des risques et aux mathématiques appliquées à l'assurance. Il s'agit de l'étude mathématique des modèles stochastiques et dynamiques adaptés aux réserves financières allouées à un portefeuille de contrats d'assurance de type non-vie d'une compagnie d'assurance. Assurance de type IARD (Incendie, Accidents et Risques Divers). En assurance, pour quantifier le risque associé à un surplus financier il est nécessaire de modéliser son comportement. Plus précisément, on tente d'étudier la probabilité que ce surplus financier soit négatif, événement qu'on appellera "ruine". Dans ce chapitre, on présente la théorie de la ruine d'une manière générale, (le modèle individuel et collectif, processus de réserve et surplus, probabilité de ruine et le chargement de sécurité), et on introduit les modèles de risque classique juste après ainsi que la probabilité de ruine ultime, la probabilité de ruine à horizon fini et infini. Enfin, on présente les principales approches utilisés pour approximer la probabilité de ruine dans un modèle de risque classique.

## 1.1 Théorie de la ruine

### 1.1.1 Quelques Définitions

#### Compagnie d'assurance

Une compagnie d'assurances est une entreprise qui fournit des services d'assurance à des clients qui deviennent des assurés.

#### Sinistre

C'est la réalisation de l'événement couvert par le contrat, et susceptible d'entraîner la garantie de l'assureur, survenant pendant la période de validité du contrat.

La définition du sinistre est fonction des risques couverts : la survenance d'un incendie entraînant des dommages constitue un sinistre ; la réclamation du tiers en assurance responsabilité civile constitue un sinistre.

#### Le contrat d'assurance

L'article 2 de l'ordonnance N° 95/07 du 25/01/1995 dit que l'assurance est, au sens de l'article 619 du code civil, un contrat par lequel l'assureur s'oblige, moyennant des prime ou autres versements pécuniaires, à fournir à l'assuré ou au tiers bénéficiaire au profit duquel l'assurance est souscrite, une somme d'argent, une rente ou une autre prestation pécuniaire, en cas de réalisation du risque prévu au contrat .

#### Réclamation

Il s'appelle aussi pertes. Si une somme déboursée pour les sinistres.

#### Bénéfice

Différence entre le total des produits d'exploitation et le total des dépenses au cours d'un exercice donné, calculée conformément aux principes comptables généralement reconnus.

## Portefeuille

Un portefeuille désigne une collection d'actifs financiers détenus par un établissement ou un individu. Ce peut aussi désigner des valeurs mobilières détenues à titre d'investissements, de dépôt, de provision ou de garantie.

## Capitale

Le capital social correspond aux sommes d'argent et/ou aux biens que les associés ou actionnaires mettent à disposition de l'entreprise.

## Réserve

Les réserves d'une entreprise font partie du passif de son bilan. Chaque année, elles sont augmentées par les bénéfices réalisés non distribués.

## Bilan

C'est une photographie du patrimoine de l'entreprise à un moment donné, présent par deux parti Actif(Investissements, Stocks, Créances...) et sont Passif(Fonds propres, Dettes).

## La prime

C'est la contrepartie que donne l'assuré à l'assureur en échange de la garantie qui lui est accordée. En d'autres termes, c'est le prix de la garantie. Elle peut être fixe comme elle peut être variable d'un exercice à l'autre.

Il existe trois types de primes : la prime pure, la prime nette et la prime totale.

## La prime pure

C'est prime permettant à l'assureur de régler les sinistres frappant la mutualité des assurés. Elle est également appelée (prime de risque) ou encore (prime d'équilibre).

La prime pure est égale à la fréquence du risque multipliée par le coût moyen d'un sinistre.

$$pp = f \times cm$$

Avec :

- $pp$  : Prime pure.
- $f$  : fréquence.
- $cm$  : coût moyen.

### La prime nette

C'est la prime figurant sur les tarifs des sociétés d'assurances. Elle est parfois appelée prime commerciale. Elle est égale à l'addition de la prime pure et des chargements permettant de couvrir les frais des acquisitions et de gestion du contrat.

$$pn = pp + \text{chargement}.$$

Avec :

- $pn$  : Prime nette.
- $pp$  : Prime pure.

### La prime totale

C'est la prime payée par l'assuré. Elle est égale à l'addition de la prime nette, des frais accessoires et des taxes

$$pt = pn + fa + \text{taxes}.$$

Avec :

- $pt$  : Prime totale.
- $fa$  : frais accessoires.

### Le risque

le risque représente la probabilité que survienne un dommage contre lequel l'assuré cherche à se prémunir au moyen d'un contrat souscrit auprès d'un assureur.

### 1.1.2 Modèle individuel et Modèle collectif

La charge globale de sinistres peut s'écrire comme la somme, sur le nombre de polices, du montant de sinistre total engendré par chaque police ou encore comme la somme, sur le nombre de sinistres, des montants de chaque sinistre. On appelle modèle individuel la première approche et modèle collectif la seconde [9].

#### Modèle individuel

Le modèle individuel modélise la charge total générée par les sinistres individu par individu. La charge totale pour un portefeuille comprenant  $n$  contrats est définie par la formule suivant :

$$S^{ind} = \sum_{i=1}^n X_i \quad (1.1)$$

Où,  $X_i$  est une variable aléatoire positive qui indique le montant total des sinistres subit par l'assuré  $i$  sur la période d'observation.

Considérons à présent  $q_i$  la probabilité que la police  $i$  produise au moins un sinistre sur la période et  $p_i$  celle qu'elle n'en produise aucun. Si  $F_i(x) = Pr[X_i \leq x]$  désigne la fonction de répartition de  $X_i$ , on a donc :  $F_i(0) = p_i < 1$ .

Si  $G_i(x) = Pr[X_i \leq x | X_i > 0]$  est la fonction de répartition de la charge des sinistres relative à la police  $i$  sachant que celle-ci a produit au moins un sinistre, on a :

$$F_i(x) = p_i \mathbf{1}_{x \geq 0} + q_i G_i(x), x > 0 \quad G_i(x) = \frac{F_i(x) - F_i(0)}{1 - F_i(0)}$$

Les deux premiers moments de la charge globale de sinistre s'expriment aisément en fonction des deux premiers moments des montants de sinistres par police :

$$E[S^{ind}] = \sum_{i=1}^n E[X_i].$$

et

$$Var[S^{ind}] = \sum_{i=1}^n Var[X_i].$$

Le montant de sinistre  $X_i$  engendré par la police  $i$  peut s'exprimer sous la forme

$$X_i = I_i Y_i.$$

Où  $I_i$  vaut 1 si la police  $i$  a été touchée par au moins un sinistre, 0 sinon et où  $Y_i$  représente la somme des montants de sinistres qui ont touché la police  $i$  si au moins un sinistre est survenu.

Les variables aléatoires  $I_1, I_2, \dots, I_n, Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  sont supposées mutuellement indépendantes. Sous cette hypothèse, le montant de la prime pure est donné par

$$E[X_i] = E[I_i]E[Y_i].$$

Sous l'hypothèse d'indépendance, en notant  $B^{ind}$  la fonction de répartition de  $X^{ind}$ , on a

$$B^{ind} = F_1 * F_2 * \dots * F_n.$$

Cette fonction de répartition est toutefois difficile à calculer. Le passage au modèle collectif va permettre de l'approcher [20].

### Modèle collectif

Le modèle collectif modélise la charge totale subie par un portefeuille vu, non pas contrat par contrat, mais suivant un nombre total de sinistres tout assuré confondu, la charge totale est définie par [1, 4]

$$S^{coll} = \sum_{i=1}^N X_i \quad (1.2)$$

avec,

- $N$  v.a. discrète à valeur entière, ou v.a. de nombre des pertes.
- $X_i$  v.a. positive *i.i.d.* indépendante de  $N$  Lorsque le nombre de contrats est important et que le portefeuille est homogène on peut approximer le modèle individuel par un modèle collectif.

$$S^{ind} \sim S^{coll} \quad (1.3)$$

**Remarque 1.1** On parle de modèle collectif car on associe la même loi de probabilité pour les pertes. Par conséquent, le modèle individuel avec les pertes de même loi de probabilité est un cas particulier du modèle collectif quand  $N$  est une constante :

$$P(N = n) = 1.$$

## 1.2 Modèle classique de la théorie de la ruine

La théorie de la ruine a pris naissance en Suède au début du 20<sup>ème</sup> siècle dans les travaux de Lundberg (1993) [8]. Le modèle classique de la théorie de ruine, le modèle de Cramér-Lundberg, représente l'évolution des réserves d'une compagnie d'assurance par un processus Poisson-composé avec dérive.

### 1.2.1 Processus de réserve et de surplus

On note  $R_t : t \geq 0$  le processus de réserve, et  $u = R(0)$  la réserve initiale. On fait les hypothèses suivantes :

- $(T_i)_{i \in N^*}$  suite de v.a. positives *i.i.d.* égales aux temps inter-arrivée des sinistres,
- $\sigma_n = \sum_{i=1}^n T_i$  instant d'occurrence du  $n^{\text{ième}}$  sinistre
- $N_t = \max\{n \in N; \sigma_n \leq t\} = \max\{n \in N; \sigma_{n+1} \geq t\}$  processus de comptage égal au nombre de sinistres jusqu'au temps  $t$ .
- $(X_i)_{i \in N^*}$  suite de v.a. positives *i.i.d.* égales aux montants des sinistres, On notera  $F_X$  leur fonction de répartition,  $f_X$  leur densité et  $\mu$  leur moyenne commune.
- $c$  flux de prime générée par le portefeuille par unité de temps.

Ce qui donne :

$$R(t) = u + ct - \sum_{i=0}^{N(t)} X_i \quad (1.4)$$

On note par la suite  $N(t)_{t \geq 0}$  le processus qui représente les pertes agrégées de la compagnie avec

$$Z_t = \sum_{i=0}^{N(t)} X_i \quad (1.5)$$

- $u$  est la réserve initiale de la compagnie ;
- $c$  est le taux de cotisation par unité de temps ;
- $Z(t)$  est le processus de pertes agrégés.

On définit également le processus de surplus  $S(t); t \geq 0$

$$S(t) = u - R(t) \quad (1.6)$$

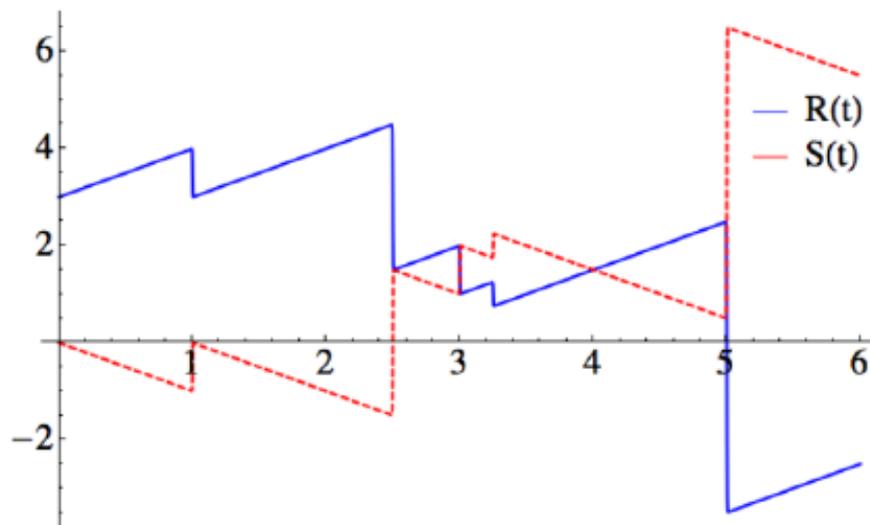


FIGURE 1.1 – Évolution de la réserve et du surplus au cours du temps

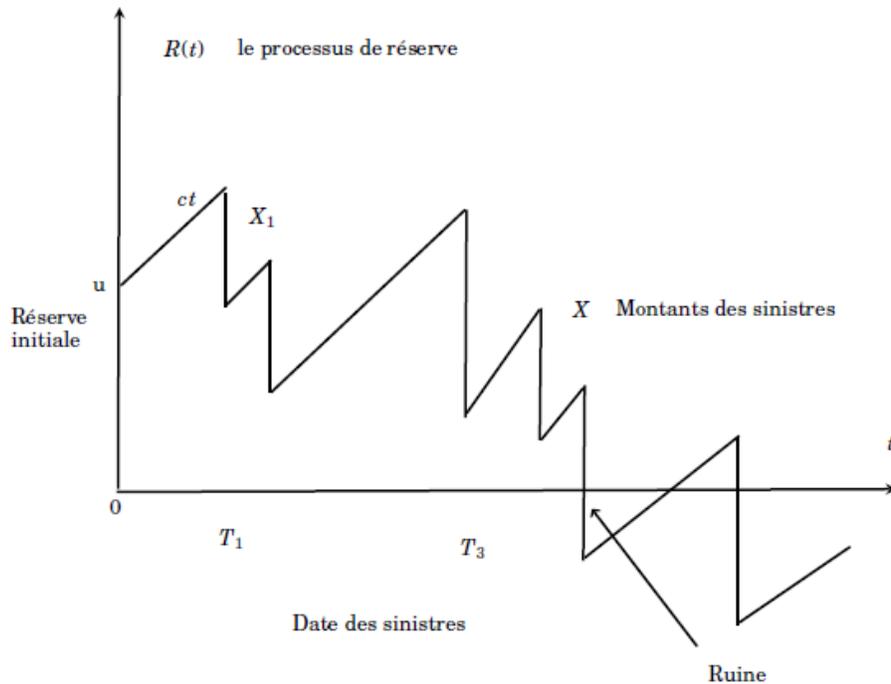


FIGURE 1.2 – Description du modèle de base en assurance

### 1.3 Probabilité de ruine

la première quantité d'intérêt pour tout modèle de risque d'une réserve financière est la probabilité de ruine [14, 4, 11].

#### Définition 1.1 [15]

L'instant de la ruine dénotant par  $\tau$  associé à une réserve initiale  $u$ , est défini par :

$$\tau = \inf\{t \geq 0 : R(t) < 0\} = \inf\{t \geq 0; S(t) > u\} \quad (1.7)$$

#### Définition 1.2 [15]

La probabilité de ruine ultime ou probabilité de ruine à horizon de temps infini notée  $\psi$ , est définie par :

$$\psi(u) = P(\inf_{t \geq 0} R(t) < 0 : R(0) = u) \quad (1.8)$$

### Définition 1.3 [15]

La probabilité de ruine avant l'instant  $T$  ou probabilité de ruine à horizon de temps fini est définie par :

$$\psi(u, T) = P(\inf_{t \in [0, T]} R(t) < 0 : R(0) = u) \quad (1.9)$$

### Définition 1.4 [15]

La probabilité complémentaire " Probabilité de survie" ou probabilité de non ruine, notée  $\phi$ , est définie par :

$$\phi(u) = 1 - \psi(u) \quad \phi(u, T) = 1 - \psi(u, T) \quad (1.10)$$

### Chargement de sécurité

On appelle chargement ou coefficient de sécurité, la quantité définie par :

$$\theta = c - \lambda\mu$$

La constante  $\theta$  définit le chargement de sécurité de la compagnie. Il mesure la rentabilité de la compagnie . Le coefficient  $\lambda\mu$  est interprété comme le montant moyen des sinistres par unité de temps. Il paraît prudent que l'assureur fixe un taux de prime  $c$  supérieur à  $\lambda\mu$  pour que, en moyenne, les primes reçues soient supérieures aux indemnisations payées par la compagnie d'assurance. En effet, nous avons la propriété suivante :

**Propriété du coefficient de sécurité**

· Si  $\theta > 0$ , alors, presque sûrement,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} R_t = +\infty$$

et

$$\phi(u) \neq 0$$

· Si  $\theta < 0$ , alors, presque sûrement

$$\lim_{T \rightarrow \infty} R_t = -\infty$$

et

$$\psi(u) = 1$$

**Probabilité de ruine à horizon fini et infini**

Soit  $\{R(t) : t \geq 0\}$  un processus tel que défini en (1.3), dénotant par  $\psi_T(u)$  la probabilité de ruine à horizon fini,

$$\forall u \geq 0, \psi(u, T) = P\{\exists t \in [0, T] / R(t) < 0\} \quad (1.11)$$

De plus en temps infini, elle est définie :

$$\forall u \geq 0, \psi(u, \infty) = P\{\exists t \leq \infty / R(t) < 0\} \quad (1.12)$$

**1.4 Processus de renouvellement**

Le processus de Poisson est l'exemple le plus important d'un processus de renouvellement [3]

### 1.4.1 Processus de Poisson

Un processus de Poisson est un processus de comptage d'événements entre lesquels s'écoulent des durées indépendantes de distribution exponentielle.

#### Définition

Soit  $\{T_i; i \geq 1\}$  une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi exponentielle de paramétré  $\mu > 0$ . Notons  $\sigma_n = \sum_{i=1}^n T_i$ . Le processus de comptage  $\{N_t; t \geq 0\}$  défini par :

$$N(t) = \sum_{n \geq 1} 1_{\{\sigma_n \leq t\}}; \quad (1.13)$$

est un processus de Poisson homogène d'intensité  $\mu$ .

### 1.4.2 Processus de Poisson composé

#### Définition

Soit  $N$  un processus de Poisson d'intensité  $\lambda$ , et  $X_i; i \geq 1$  des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées et indépendantes de  $N$ . Le processus  $Z$  défini par  $Z(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$  est dit un processus de Poisson composé.

### 1.4.3 Modèle de Cramèr-Lundberg

Le modèle de risque de Cramèr-Lundberg à été introduit en 1903 par l'actuaire Filip Lundberg, il est la base du fondement de la théorie de la ruine Il est connu aussi sous le nom du modèle de risque Poisson composé ou encore modèle de risque classique. Le processus stochastique régissant l'évolution des réserves financières noté  $\{R(t); t \geq 0\}$  avec ;

$$R(t) = u + ct - Z_{(t)} \quad t \geq 0; \quad (1.14)$$

où  $Z_{(t)} = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$  est le montant cumulé des réclamations à l'instant  $t$ . Le processus de risque associé est de la forme

$$S_{(t)} = ct - Z_{(t)}$$

Les hypothèses selon le modèle est construit sont :

- $u > 0$  est la réserve initiale de la compagnie d'assurance ;
- $c > 0$  est le taux de prime ou (cotisation) reçues continuellement dans le temps ;
- $N_t$  est un processus de comptage (Poisson) d'intensité  $\lambda$  du nombre de réclamations ;
- $X_i ; i \geq 1$ , sont les montants des réclamations, est représentant une suite de variables aléatoire, strictement positives, i.i.d. de fonction de répartition  $F_x$ , de moyenne finie  $\mu$ , et indépendantes de  $N_t$ .

### Cas particulier : Modèle de Lundberg P/P

Le modèle de Lundberg est un cas particulier du modèle de risque classique appelé aussi P/P. Il se caractérise par la distribution exponentielle des montants des réclamations :

$$F_{Z(y)} = 1 - \exp\left\{\frac{-y}{\mu}\right\}$$

où  $F_Z$  est la fonction de répartition de la variable aléatoire  $Z$  qui génère les montants des réclamations.

### Condition de non ruine

Considérons la réserve  $R_t$  d'une certaine compagnie d'assurance à l'instant  $t$ , avec le capital initial est  $u$  et les cotisations sont versées par les clients à un taux instantané  $c$ .

$$R_{(t)} = u + ct - Z_{(t)} = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i :$$

Ainsi, avec le théorème de Wald [9], nous permet d'obtenir :

$$E(R_{(t)}) = u + ct - \lambda\mu t :$$

avec  $\mu$  étant le taux de remboursement. Une condition qu'il est naturel d'imposer que l'espérance de la fortune d'une compagnie d'assurance soit toujours positive, soit  $c > \lambda\mu$ . Remarquons que la ruine peut se produire nécessairement à l'occasion d'un sinistre, c'est-à-dire à l'une des dates  $T_n$ . On a donc :

$$\psi(u) = P\{\exists t \geq 0 / R_{(t)} < 0\} = P\{\exists n \geq 0 / R_{(T_N)} < 0\}$$

Or, on a :

$$R_{(T_n)} = u + cT_n - Z_{(T_n)} = u - \sum_{i=1}^n (X_i - c\tau_i).$$

D'où :

$$\psi(u) = P\{\exists n \geq 0 / \sum_{i=1}^n (X_i - c\tau_i) > \mu\} = 1 - P\{\max_{n \geq 1} \sum_{i=1}^n (X_i - c\tau_i) \leq \mu\}.$$

Par la loi des grands nombres, on sait que  $\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - c\tau_i)}{n}$  converge presque sûrement vers

$$E(X_1 - c\tau_1) = \mu - \left(\frac{c}{\lambda}\right)$$

- La ruine est presque sûre, si  $\lambda\mu > c$ , qui converge presque sûrement vers  $+\infty$ .
- La ruine n'est pas presque sûre, si  $\lambda\mu < c$ , qui converge presque sûrement vers  $-\infty$ , c'est-à-dire qu'il existe une probabilité positive de non ruine à horizon infini.
- Si  $\lambda\mu = c$ , la théorie des marches aléatoires montre que  $\limsup \sum_{i=1}^n (X_i - c\tau_i) = +\infty$  presque sûrement et donc la ruine est presque sûre. La condition de non-ruine est donc :

$$\lambda\mu < c$$

On peut alors définir la charge de sécurité  $\rho$  par :

$$\rho = \frac{c - \lambda\mu}{\lambda\mu} = \frac{c}{\lambda\mu} - 1$$

## Probabilité de ruine en temps infini

Dans ce qui suit, nous présentons quelques résultats fondamentaux pour l'évaluation de la probabilité de ruine en temps infini.

## Approximations Cramèr-Lundberg

Soit  $\psi(u)$ , avec  $u \geq 0$  la probabilité de ruine du modèle (1.13). On suppose que le chargement de sécurité relatif  $\rho = \frac{c - \lambda\mu}{\lambda\mu}$  est strictement positif. On note  $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$ , où  $F$  est la fonction de distribution des moments des réclamations. En utilisant les arguments de renouvellement et en conditionnant par rapport au temps et au montant de la première réclamation, on a la probabilité de ruine qui vérifie l'équation intégrale suivante [13].

$$\psi(u) = \frac{\lambda}{c} \int_u^\infty \bar{F}(y) dy + \frac{\lambda}{c} \int_u^\infty \psi(u-y) \bar{F}(y) dy$$

En général, il est très difficile de dériver des expressions explicites de la probabilité de ruine. Cependant, sous certaines conditions convenables, on peut obtenir quelques approximations de cette quantité. Les premiers travaux sur ces approximations ont été réalisés par Cramèr-Lundberg dès 1930. La condition Cramèr-Lundberg stimule l'existence d'une constante  $k > 0$  satisfaisant l'équation de lundberg :

$$\int_0^\infty e^{kx} \bar{F}(x) dx = \frac{c}{\lambda}$$

qui est équivalente à :

$$\int_0^\infty e^{kx} dG(x) = 1 + \varrho \quad (1.15)$$

Où  $G(x) = \frac{1}{\mu_0} \int_0^x s^{kx} \bar{F}(y) dy$  est la distribution équilibrée de  $F$ . Supposons que l'équation (1.14) est vérifiée. La formule asymptotique de la probabilité de ruine est donnée comme suit :

si  $\int_0^\infty e^{kx} dG(x) < \infty$ , alors,

$$\psi(u) \sim \frac{\varrho u}{k \int_0^\infty y e^{ky} \bar{F}(y) dy} e^{-ku} \quad \text{quand } u \rightarrow \infty,$$

avec  $a(x) \sim b(x) \quad \text{quand } x \rightarrow \infty \quad \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a(x)}{b(x)} = 1$

si  $\int_0^\infty e^{kx} dG(x) = \infty$ , alors,

$$\psi(u) = O(e^{-kx}) \quad \text{quand } u \rightarrow \infty$$

Ainsi, on l'inégalité de Lundberg :

$$\psi(u) \leq e^{-kx}, u \geq 0$$

## Approximations de Cramèr-Lundberg dans le modèle P/P

La distribution des montants de réclamations dans le modèle de Lundberg est exponentielle, d'où :  $\bar{F} = \exp\left\{-\frac{x}{\mu}\right\}$ ; on aura la formule de la probabilité de ruine :

$$\psi(u) = \frac{1}{1 + \rho} \exp\left\{-\frac{\rho u}{\mu(1 + \rho)}\right\} \quad u \geq 0$$

## Borne de Lundberg

Lorsque le coefficient d'ajustement  $\rho$  existe, l'inégalité de Lundberg garantit que la probabilité de ruine à horizon infini  $\psi(u)$  est bornée par une fonction qui décroît de façon exponentielle en fonction du capital initial  $u$ .

### Théorème 1.1.

Supposons que le coefficient d'ajustement [5] (la charge de sécurité)  $\rho > 0$  existe.  $\forall u \geq 0$  :

$$a_- \exp\{-\rho u\} \leq \psi(u) \leq a_+ \exp\{-\rho u\};$$

$$a_- = \inf_{x \in [0, x_0)} \frac{e^{\rho x} \int_x^\infty (1 - F_Z(y)) dy}{\int_x^\infty e^{\rho y} (1 - F_Z(y)) dy} \quad a_+ = \sup_{x \in [0, x_0)} \frac{e^{\rho x} \int_x^\infty (1 - F_Z(y)) dy}{\int_x^\infty e^{\rho y} (1 - F_Z(y)) dy}$$

## Formule de Pollaczak-Khinchine

### Théorème 1.2.

[2] Pour tout  $u \geq 0$  :

$$\psi(u) = \left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^n \overline{(F_X^s)^{*n}}(u) \quad (1.16)$$

$\overline{(F_X^s)^{*n}}(u) = 1 - (F_X^s)^{*n} \text{ et } (F_X^s)^{*n}$  est la  $n^{\text{eme}}$  convolution de la fonction de distribution complémentaire  $F_X^s$  telle que  $F_X^s$  est la fonction de répartition de  $X$  définie par :

$$F_X^s = \frac{1}{\mu} \int_0^x (1 - F_X(y)) dy, \quad x \geq 0$$

La formule (1.15) est appelée formule de Pollaczak-Khinchine ou encore formule de Beehan. La représentation en série infinie donnée dans (1.15) est particulièrement utile pour des considérations théoriques. Toutefois, il est également utile d'utiliser des approximations numériques de la probabilité de ruine  $\psi(u)$ , telle que l'algorithme de Panjer [12].

### Formule de Pollaczak-Khinchine dans le modèle P/P

En utilisant la formule de P-K pour des montants de réclamations de distribution exponentielle et de moyenne  $\mu$ , nous allons déduire l'expression exacte de la probabilité de ruine :

$$\psi(u) = (1 - \frac{\lambda\mu}{c}) \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{\lambda\mu}{c})^n \overline{(F_X^s)^{*n}}(u)$$

Pour des montants de réclamations exponentiels de paramètre  $\frac{1}{\mu}$ , nous avons

$$F_X(u) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{u}{\mu}} & u \geq 0 \\ 0 & \text{Ailleurs} \end{cases}$$

$$\text{Calculons } F_X^s = \frac{1}{\mu} \int_0^x (1 - F_X(y)) dy, \quad x \geq 0$$

$$F_X^s = \frac{1}{\mu} \int_0^u e^{-\frac{y}{\mu}} dy = \frac{1}{\mu} \left( \frac{-1}{\frac{1}{\mu}} \right) [e^{-\frac{y}{\mu}}] = 1 - e^{-\frac{u}{\mu}}$$

Ainsi,  $F_X^s = F_X$   $u \in R$  ( $F_X^s$ )<sup>\*n</sup> représente la n<sup>eme</sup> convolution de ( $F_X^s$ ). Puisque nous avons l'indépendance des  $n$  variables aléatoires  $X_i$ ;  $i = \overline{1, n}$ , de distribution commune  $Exp(\frac{1}{\mu})$  et que  $F_X^s = F_X$ , alors ( $F_X^s$ )<sup>\*n</sup> est la fonction de répartition de la somme des  $n$  variables aléatoires  $X_i$ ;  $i = \overline{1, n}$ . Nous utiliserons les transformées de Laplace a

$n$  de déterminer ( $F_X^s$ )<sup>\*n</sup>.

$\hat{L}_{(F_X^s)^{*n}}(x) = [\hat{L}_{(F_X^s)}(x)]^n$ , ou encore  $\hat{L}_{(f_X)^{*n}}(x) = [\hat{L}_{(f_X)}(x)]^n$ , Où  $f_X$  est la densité de probabilité des montants de réclamations  $X_i$ ;  $i = 1, \dots, n$  : Ainsi,

$$\hat{L}_{(f_X)}(x) = \int_0^{\infty} f_X(t) e^{-xt} dt = \int_0^{\infty} \frac{1}{\mu} e^{-\frac{1}{\mu}t} dt = \frac{1}{1 + \mu x}$$

D'ou

$$\hat{L}_{(f_X)^{*n}}(x) = \left[ \frac{1}{1 + \mu x} \right]^n$$

En utilisant la table des transformées de Laplace, nous trouvons que

$$(f_X)^{*n}(x) = \frac{\frac{1}{\mu}(\frac{1}{\mu}x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\frac{1}{\mu}x} \quad x \geq 0$$

qui correspond à la densité de probabilité de la loi d'Erlang  $(\frac{1}{\mu}, n)$  dont la fonction de répartition est donnée par

$$(F_X)^{*n}(x) = (F_X^s)^{*n}(x) = \frac{\Gamma(n, \frac{1}{\mu}x)}{(n-1)!} = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\frac{1}{\mu}x} \frac{(\frac{1}{\mu}x)^k}{k!}.$$

Ce résultat signifie que la somme de  $n$  variables aléatoires indépendantes de distributions exponentielle de même paramètre  $\frac{1}{\mu}$  est une loi d'Erlang  $(\frac{1}{\mu}; n)$ . Alors

$$\overline{(F_X^s)^{*n}}(x) = 1 - (F_X^s)^{*n}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\frac{1}{\mu}x} \frac{(\frac{1}{\mu}x)^k}{k!}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \Psi(u) &= (1-\rho) \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\frac{1}{\mu}u} \frac{(\frac{1}{\mu}u)^k}{k!} \\ &= (1-\rho) e^{-\frac{1}{\mu}u} \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\frac{1}{\mu}u)^k}{k!} \\ &= (1-\rho) e^{-\frac{1}{\mu}u} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{\mu}u)^k}{k!} \sum_{n=k+1}^{\infty} \rho^n \\ &= (1-\rho) e^{-\frac{1}{\mu}u} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{\mu}u)^k}{k!} \frac{\rho^{k+1}}{1-\rho} \\ &= \rho e^{-\frac{1}{\mu}u} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{\rho}{\mu}u)^k}{k!} \\ &= \rho e^{-\left(\frac{1}{\mu} - \frac{\lambda}{c}\right)u}. \end{aligned}$$

Finalement, on trouve que

$$\Psi(u) = \frac{\lambda\mu}{c} \exp\left\{-u\left(\frac{c-\lambda\mu}{c\mu}\right)\right\}.$$

### Montant des réclamations subexponentiel

Dans le cas des montants de réclamations à queues lourdes, le comportement asymptotique de  $\psi(u)$  est différent à l'approximation de Gramer-Lendberg. Le résultat suivant présente une approximation de  $\psi(u)$  dans le cas où la queue de distribution intégrée  $F_X^s$  est subexponentielle.

**Théorème 1.3** dit que :

Soit  $\rho = \frac{\lambda\mu}{c}$  et supposons  $F_X^s \in S = \{F : \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F^{*n}}}{F(x)} = 2\}$ . Alors

$$\lim_{u \leftrightarrow \infty} \frac{\psi(u)}{1 - F_X^s(u)} = \frac{\rho}{1-\rho}$$

Démonstration dans donne :

$$\psi(u) = \frac{\rho}{1-\rho} (1 - F_X^s(u))$$

### 1.4.4 Modèle Sparre-Andersen

$N(t)$ , désormais un processus de renouvellement Processus des réserves

$$R(t) = u + ct - Z(t) = u - \sum_{i=1}^{N(t)} (X_i - \Delta T_i).$$

Pour les distributions de montants de sinistres à queues légères,

Coefficient d'ajustement = solution non nulle de l'équation en  $s$

$E(e^{s(X-c\Delta)}) = 1$  Si le coefficient d'ajustement existe et est unique, inégalité de Cramér-Lundberg.

Pour tout  $u \geq 0$

$$b_- e^{-\theta u} \leq b_+ e^{-\theta u},$$

où  $0 \leq b_- \leq b_+ \leq 1$  vérifient :

$$b_- = \inf_{x \in [0, x_0)} \frac{e^{\theta x} F_X^-(x)}{\int_x^\infty e^{\theta x} dF_X(x)}$$

et

$$b_+ = \sup_{x \in [0, x_0)} \frac{e^{\theta x} F_X^-(x)}{\int_x^\infty e^{\theta x} dF_X(x)}$$

Si  $X_i$  suit une loi exponentielle de paramètre  $\frac{1}{\mu}$ , et si  $N(t)$  est un processus de Poisson de paramètre  $\lambda$ , alors dans ce cas le coefficient d'ajustement  $\theta = \frac{\rho}{\mu(1+\rho)}$  et la probabilité de ruine donne comme suit :

$$\Psi(u) = (1 - \mu\theta)e^{-\theta u}$$

Généralisation à une famille de lois appelées lois phase-type (lois exponentielles et gamma) [15].

### 1.4.5 Autres approches

En plus de l'approche stochastique pour l'évaluation de la probabilité de ruine, qui possède de large champs dans les modèles de risques, il existe plusieurs autres approches. Ces approches permettent une meilleure considération des faits, car certains faits ignorés dans la modélisation

stochastique se retrouvent dans d'autres domaines. C'est le cas par exemple des réactions des assureurs et des assurés dans la théorie des jeux. En général, les solutions proposées pour estimer la probabilité de ruine sont basées sur : les théorèmes limites des marches aléatoires [6],[19] , les représentations matricielles avec modèles markoviens( Asmussen et al [17]), la théorie des martingales et inégalités de probabilités(Kalashnikov [20]) , les méthodes d'optimisation (De Vylder et al [4]) , les transformations analytiques (De Vylder et al [5]), et la théorie des distributions [8][21].

## 1.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les principaux résultats de la théorie de ruine : des expressions exactes, des approximations et des bornes de la probabilité de ruine pour le modèle de risque classique. Le modèle de risque classique, connu comme le fondement théorique de la théorie du risque fût l'objet de plusieurs études, et de nombreux résultats sur la probabilité de ruine existent pour ce modèle.

# *Quantification de l'incertitude paramétrique et valeur à risque*

Dans le chapitre précédent, nous avons fait une vision sur la théorie de la ruine et le modèle de risque classique. Cependant ce chapitre fait l'objet d'une discussion sur des mesures d'incertitude, ainsi à travers ce chapitre nous présentons la terminologie de l'incertitude, les différents types d'incertitude. Ces incertitudes peuvent être caractériser statiquement par (variance, la moyenne, la courbe de densité et la VaR). Puisque la quantification des incertitudes est réalisée en vue de faire une analyse de sensibilité ou une propagation des incertitudes, on va montrer aussi sa présentation, ainsi la méthode de gestion et de propagation de l'incertitude paramétrique.

## **2.1 Terminologie de l'incertitude**

Absence de connaissance de la valeur vraie d'une variable qui peut être décrite comme une courbe de densité de probabilité (CDP) caractérisant la fourchette et la vraisemblance des valeurs possibles. L'incertitude dépend de l'état des connaissances de l'analyste, qui dépend de la qualité et de la quantité qui doit être estimé comme une constante. L'intervalle de confiance est un espace qui englobe la valeur vraie de cette quantité fixe inconnue avec un certain niveau de confiance [16].

## 2.2 Types de l'incertitude

L'incertitude est séparée en trois groupes : l'incertitude des paramètres, l'incertitude de modélisation et les autres incertitudes. Cette classification a pour but de ne pas perdre de généralité puisque l'on retrouve des types différents d'un domaine à l'autre [7].

### 2.2.1 Incertitude paramétrique

L'incertitude paramétrique, ou "parameter uncertainty" en anglais, est l'incertitude des valeurs observées ou mesurées. Ces valeurs servent de paramètres entrants d'un modèle (les inputs). Leur incertitude se propage dans ce dernier et engendre de l'incertitude dans les résultats sortants (les outputs) [7].

Il s'agit de l'incertitude le mieux quantifiable des trois types présentés ici puisque, pour obtenir l'incertitude sur le résultat final, il ne s'agit que de propager l'incertitude des paramètres à l'aide d'une méthode mathématique. Les principales sources d'incertitude des paramètres sont l'imprécision des mesures empiriques, leur mauvaise représentativité de la réalité et le manque de données. Cependant, dans ce texte, le terme « incertitude » est utilisé au sens large sur un résultat d'un modèle utilisant des paramètres incertains ou variés sans distinction.

### 2.2.2 Incertitude de modélisation

L'incertitude de modélisation (model uncertainty) est un qualificatif de manque de connaissances scientifiques requises afin de faire des prédictions basées sur un lien de cause à effet. Cette ignorance est intrinsèque à tout modèle, Les modèles sont une représentation simplifiée de la réalité et certaines hypothèses doivent être posées faute de connaissances ou de ressources pour raffiner le modèle. Ce manque de connaissance au niveau de la modélisation cause de l'incertitude de plusieurs façons [7]. Il existe d'autres types d'incertitude mentionnés dans la littérature qui sont soit trop généraux ou trop propres à un certain domaine.

### 2.2.3 Incertitude épistémique

L'incertitude épistémique du grec épistémé signifiant « connaissance », elle désigne l'incertitude issue du manque de celle-ci. Elle peut être réduite par une recherche plus en profondeur. Cependant, cette incertitude est omniprésente parce que les ressources sont toujours limitées. Elle recoupe les deux types vus précédemment, paramétrique et de modélisation, puisque les deux types peuvent être générés par l'ignorance du fonctionnement du système [7].

### 2.2.4 Incertitude de décision

Ce type comprend l'incertitude due aux choix de valeurs sociales sous trois aspects : la mesure du risque, le coût social du risque et la quantification des valeurs sociales. Plusieurs variables peuvent être utilisées afin de mesurer le risque et le choix de l'une ou l'autre peut donner des résultats différents. Ensuite, il faut traduire cette mesure du risque en argent et une des difficultés est de déterminer le coût social du risque, dont le coût de la vie. Finalement, déterminer le niveau de risque acceptable selon la quantification des valeurs sociales est sujet à beaucoup d'incertitude. L'incertitude de décision est propre à l'analyse de risque et est difficilement applicable à d'autres domaines [7].

Les terminologies sont souvent propres au domaine traité et il est difficile de les rallier. Il est parfois aussi difficile de faire la distinction entre les sources et les types d'incertitudes. Malgré tout, deux catégories d'incertitudes sont communes à la modélisation en sciences, en ingénierie et en analyse de risque, l'incertitude des paramètres et de modélisation, tandis que la troisième catégorie comprend un type d'incertitude exclusif à un domaine précis et un type général qui peut s'appliquer à tous les domaines [7]. Dans le cadre de ce projet, l'intérêt est porté sur l'incertitude de paramètre, puisque c'est d'elle qu'il est question lorsque l'incertitude des paramètres entrants d'un modèle est propagée aux résultats du calcul. L'incertitude de modélisation est beaucoup plus complexe à traiter.

## 2.3 Présentation de l'incertitude

Après avoir synthétisé les différents types d'incertitude, cette section décrit les différentes façons d'exprimer l'incertitude paramétrique, qui est le type pertinent à ce mémoire. Il est possible de le faire à l'aide d'un intervalle décrit par une valeur minimale et maximale. Les valeurs limitant l'intervalle peuvent avoir différentes significations, dont les données extrêmes mesurées ou bien les limites de l'intervalle de confiance qui comprend 95% des données de l'échantillon. Cette façon ne donne pas d'information sur la distribution de probabilité des valeurs à l'intérieur de l'intervalle. Un autre outil est la variance qui est une mesure de dispersion de données autour d'une moyenne. Elle est définie comme le carré de l'écart-type, c'est-à-dire le carré de l'écart moyen des données de l'échantillon. Décrire un échantillon à l'aide de la variance ne suppose, non plus, aucune distribution particulière de celui-ci. Il s'agit d'un problème lorsque l'incertitude doit être propagée dans un système. Les distributions statistiques, ou fonctions de densité de probabilité, sont des représentations plus précises de la dispersion d'une variable [7].

## 2.4 Méthodes de gestion et de propagation de l'incertitude paramétrique

L'objectif de cette étape de propagation des incertitudes est de quantifier comment l'incertitude sur les entrées se répercute sur la sortie du simulateur. En plus de permettre une meilleure connaissance des variables d'entrée, la quantification des incertitudes est une étape nécessaire pour réaliser l'analyse de sensibilité (L'analyse de sensibilité a pour but d'identifier l'influence de paramètres ou de groupes de paramètres d'entrée sur la sortie du code de calcul) ou la propagation d'incertitudes dans un code de calcul [16].

Après avoir traité de différentes façons de représenter l'incertitude, cette section aborde et juge des méthodes de sa propagation dans un modèle jusqu'aux résultats. Encore une fois, il s'agit de propager l'incertitude paramétrique puisque les autres types d'incertitudes sont difficilement quantifiables. Quatre méthodes sont discutées : la logique floue, la méthode des séries de Taylor, la simulation Monte Carlo et l'arithmétique d'intervalles. L'accent est mis sur la dernière méthode, puisque c'est l'approche choisie dans le cadre de ce mémoire.

### 2.4.1 Méthode statistique de simulation Monte Carlo

La méthode statistique de simulation Monte Carlo est la plus répandue pour suivre la propagation de l'incertitude des paramètres à travers les calculs. Elle consiste à calculer des milliers de fois la valeur dont on veut évaluer l'incertitude avec des paramètres variant aléatoirement d'une fois à l'autre selon leur distribution de probabilité. On obtient ainsi la densité de probabilité du résultat final. Bien que très utile, cette méthode possède des inconvénients : elle est gourmande en puissance de calcul et il peut être difficile de déterminer la distribution de probabilité des données.

### 2.4.2 Développement des séries de Taylor

C'est une autre façon d'évaluer l'incertitude en posant les hypothèses nécessaires sur les paramètres (distribution normale, linéarité et indépendance), on détermine la variance du résultat en fonction de la variance des données et de leur dérivée. Cette méthode analytique permet avec les mêmes variables de calculer la sensibilité des données, c'est-à-dire la variation relative induite dans un résultat par la variation relative d'une donnée [7].

### 2.4.3 Propagation du flou

Lorsque l'incertitude est exprimée à l'aide d'ensembles flous, il est possible de propager le « flou » jusqu'au résultat du modèle. Dans un système linéaire, pour ce faire, il s'agit de faire une « coupe » horizontale dans la distribution de possibilité et de propager ce nouvel intervalle à l'aide de l'arithmétique des intervalles. La coupe est la fraction de l'amplitude de la distribution de possibilité à laquelle la coupe est effectuée. La précision de la distribution finale est proportionnelle au nombre d'intervalles de coupe différents utilisés. Cette méthode est également une méthode analytique et donc présente les mêmes avantages que la méthode des séries de Taylor comparativement à une méthode statistique (Monte Carlo), mais les calculs deviennent aussi fastidieux lorsqu'une grande précision est nécessaire. Or, elle a l'avantage de ne pas être limitée par les hypothèses posées lors de l'utilisation des séries de Taylor. La propagation du flou requiert une incertitude exprimée à l'aide de nombres ou d'intervalles flous, ce qui n'est pas le cas dans ce projet [7]. La méthode de propagation de l'incertitude qui suit est la plus pertinente pour ce projet, ce qui est démontré dans les prochaines pages.

### 2.4.4 Approche par intervalle

Le présent mémoire propose une autre approche qui est l'approche par intervalle qu'est un outil d'évaluation de l'incertitude, Cette forme d'arithmétique sert à composer avec les intervalles définis par une valeur minimale et maximale sans supposer de distribution statistique précise. Cette méthode a ses limites. Elle ne donne aucune information sur la distribution des résultats [7]. Il existe de nombreuses situations dans lesquelles nous arrondissons les réponses ou donnons des solutions approximatives aux équations que nous résolvons. Devrions-nous accepter ces solutions approximatives ou serait-il préférable que nous puissions fournir la solution dans laquelle se trouve la solution exacte? Si nous pouvons fournir des limites à la solution, nous pouvons alors être certains pouvons capturer la solution avec la précision indiquée. Il y a aussi des situations où une expérience est effectuée et les valeurs d'expérience ne peuvent être connues qu'avec un certain degré de précision. Si nous utilisons ces résultats expriment dans d'autres calculs, nous ne pourrions obtenir que des réponses approximatives. Cependant, si nous pouvions relier la vraie valeur et utiliser ces limites dans notre calcul, nous pouvons alors être certains que la vraie solution se situe dans ces limites. En utilisant cette méthode, nous sommes non seulement en mesure de donner une approximation à la solution vraie, mais nous pouvons aussi préciser la marge d'erreur pour l'approximation. Sur la base de cette idée de liaison, il est intéressant d'envisager l'utilisation d'intervalles. L'analyse d'intervalles nous permet d'analyser et d'analyser des calculs sur des intervalles contenant la vraie solution. Il existe une variété d'intervalles en mathématiques, mais nous nous concentrons principalement sur les intervalles fermés. Par conséquent, chaque fois que nous mentionnons des intervalles, nous entendons des intervalles fermés [18]. Un intervalle peut être représenté en notation d'ensemble comment suit  $[a, b] = \{x \in R : a \leq x \leq b\}$ . Un intervalle et son extrémité sont désignés par des lettres majuscules. A l'intervalle  $X$  est représenté par  $X = [\underline{X}, \overline{X}]$  où

$\underline{X}$  est la limite inférieure et  $\overline{X}$  est la limite supérieure de l'intervalle  $R$

#### Définition 2.1 [18]

$F$  est une extension d'intervalle de  $f$  sur  $X$ , si pour tous les arguments d'intervalle dégénéré  $[\underline{X}, \overline{X}] \subseteq X$ , il est d'accord avec  $f$  :

$$F([\underline{X}, \overline{X}]) = [f(\underline{X}), f(\overline{X})], \text{ pour } x \in X$$

### Définition 2.2 [18]

Si nous avons une extension d'intervalle de  $f$  obtenue en appliquant la formule directement à l'aide d'intervalles, ce qui donne l'image d'ensemble désirée, cette extension est appelée extension unie de  $f$ . C'est-à-dire si  $F(X)$  est une extension d'intervalle de  $f(X)$  et  $F(X) = f(X)$ , alors  $F(X)$  est l'extension unifiée de  $f$ .

Une autre chose à noter, est qu'il existe de nombreux cas dans lesquels bien que deux expressions puissent être équivalentes en arithmétique ordinaire lorsque nous étendons aux intervalles, ces expressions peuvent ne plus être équivalentes, ainsi, insister à nouveau sur la nécessité d'être prudent lorsqu'il s'agit d'intervalles [18]. Par conséquent, nous définissons des intervalles minimaux comme étant des intervalles contenant la vraie solution et ayant la plus petite largeur. Arithmétique et l'analyse d'intervalles ne se limitent pas aux calculs analytiques à la main. Il existe des logiciels qui implémentent l'arithmétique d'intervalle. Un de ces package INTLAB qui est écrit dans l'environnement MATLAB arrondit la réponse vers l'extérieur avant d'afficher les résultats. Cela signifie que la réponse finale affichée (donnée à un nombre fixe de décimales) contiendra la vraie solution. Cela nous donne une compréhension de base de l'analyse par intervalles et nous utilisons les concepts et idées ci-dessus pour progresser [18].

Cette méthode très utile dans notre travail, puisque dans notre cas l'incertitude est donnée sous la forme d'intervalles. De plus la facilité de son utilisation, sa rapidité et la quantité d'information essentielle à l'analyse de l'incertitude qu'elle fournit sont des avantages indéniables.

Les incertitudes peuvent être quantifiées par des moyens statistiques puisque la quantification des incertitudes est réalisée en vue de faire une analyse de sensibilité ou une propagation des incertitudes [16].

## 2.5 Value-at-Risk (VaR)

Historiquement, la mesure du risque la plus utilisée a toujours été la variance ou une de ses dérivées directes (écart-type, semi-variance. . .).et grâce au développement de la recherche dans le domaine, ont permis d'utiliser des indicateurs plus aboutis comme la Value-at-Risk (VaR), nous

présentons le concept de VaR qui correspond à la notion statistique de quantile. Elle est ainsi devenue la mesure du risque privilégiée dans le cadre des accords de Bâle visant à établir un cadre réglementaire pour la gestion des risques de marchés. De plus, en tant qu'outil de reporting, elle fournit des informations sur les concentrations de risques par type de marché, par trader, par produit financier, etc. Elle permet également d'allouer un capital disponible et de fixer des limites de négociation [10]. La Valeur à Risque est une méthodologie récente qui utilise des techniques statistiques, pour calculer la perte maximale probable due au risque de marché, sur un portefeuille donné. On peut dire que la VaR est une représentation du risque par un chiffre, ce chiffre s'exprime dans une unité facile à appréhender (généralement un montant dans une devise donnée) [1].

La VaR est la perte potentielle maximale qu'un portefeuille peut subir, pour un horizon de temps donné et un niveau de probabilité donné, en supposant que ce portefeuille reste inchangé durant l'horizon spécifié. ?

Pour calculer var : Il faut donc être capable d'obtenir le quantile qui correspond au niveau de confiance voulu pour la VaR. Le niveau de confiance représente la probabilité que le gestionnaire se fixe (en général supérieur à 95%) ce qui signifie que selon le modèle il y a 95% de chances que la perte encourue par la banque durant la période de détention soit inférieure au chiffre VaR.

$$P(R < R^{var}) = 1 - \alpha$$

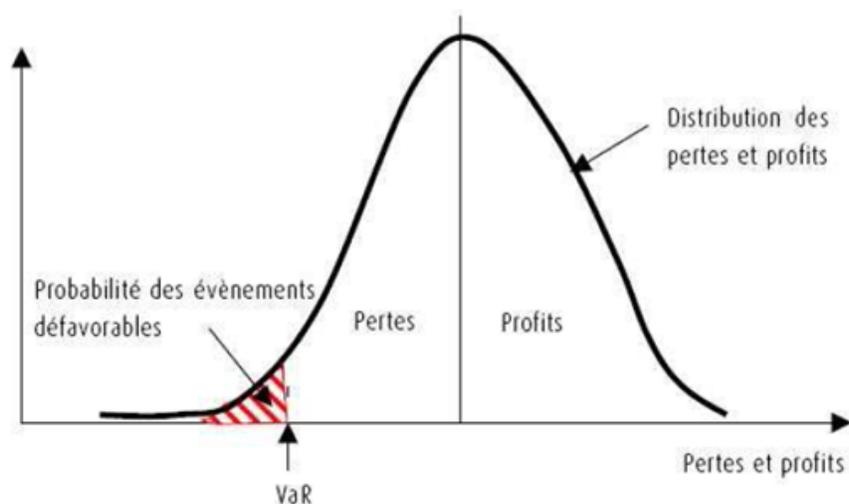


FIGURE 2.1 – Présentation graphique de VaR

### 2.5.1 Calcul de la Valeur à Risque

la VaR dépend de deux données essentielles : le niveau de confiance et l'horizon de temps :

- Le niveau de confiance représente la probabilité que le gestionnaire se fixe (en général supérieur à 95%) ce qui signifie que selon le modèle il y a 95% de chances que la perte encourue par la banque durant la période de détention soit inférieure au chiffre VaR.
- L'horizon de temps représente la durée considérée, autrement : "le temps nécessaire pour déboucler des positions dans des univers dont la liquidité est assurée ". L'équation générique de la Valeur à Risque peut être alors posée de la façon suivante :

$$Pr[L_t \leq VaR] = \alpha \quad (2.1)$$

où  $L_t$  représente la variable aléatoire perte. La VaR n'est alors que le quantile  $Q_\alpha$  de la variable perte  $L_t$ . L'équation (2.1) montre que la connaissance de la fonction de répartition est importante afin de déterminer la VaR. En effet :

$$VaR_\alpha = F_{L_t}^{-1}(\alpha)$$

où  $F_{L_t}(\alpha)$  est la fonction de répartition de la variable aléatoire  $L_t$  et  $F_{L_t}^{-1}(\alpha)$  la fonction inverse associée, nommée aussi le quantile de  $L_t$ . Toutefois, la vraie distribution des rendements est rarement connue. Calculer la Valeur à Risque nécessite trois grandes étapes importantes :

- La spécification d'un horizon temporel, c'est à dire la période de temps utilisée pour l'échantillonnage des variables.
- L'identification des différents facteurs de risque auxquels s'expose le portefeuille.
- La génération de la distribution des changements des valeurs du portefeuille (distribution des pertes et profits)

### 2.5.2 Problématique

L'étape critique dans la détermination de la VaR, est l'obtention de la distribution des changements de valeurs du portefeuille (i.e. la distribution des pertes et profits potentiels).

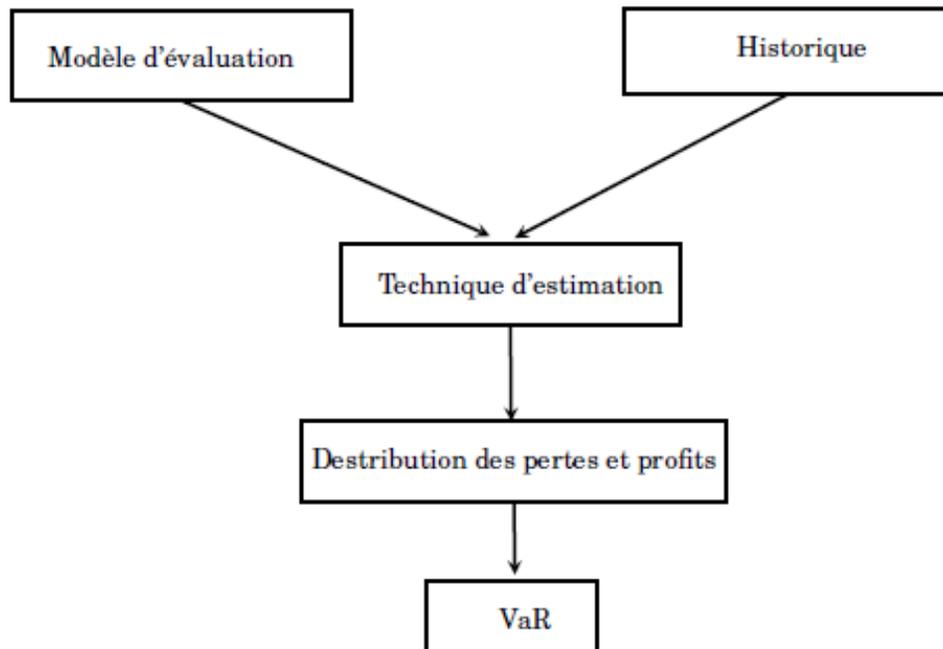


FIGURE 2.2 – Problématique générale de l'obtention de la VaR

### Modèles d'évaluation

Les méthodes d'estimation de la distribution des pertes et profits utilisent souvent des modèles d'évaluation, exprimant le prix des actifs financiers  $p$  d'un portefeuille en fonction des différents facteurs de risque  $X_1, X_2, \dots, X_n$  et un terme d'erreur  $\epsilon$  :

$$p = f(X_1, X_2, \dots, X_n) + \epsilon \quad (2.2)$$

Ces modèles d'évaluation peuvent être :

- Linéaires : actions (e.g. le modèle CAPM (Capital Asset Pricing Model))
- Non-linéaires : bons, obligations, options, swaps de taux d'intérêts.

### Historique

L'historique représente les observations des prix des différents titres, pour un certain nombre de périodes passées.

## Techniques d'estimation

Une fois le modèle spécifié et les rendements historiques obtenus , nous passons à la deuxième étape qui est l'application d'une méthode d'estimation. Trois grandes méthodes classiques ont été mises en œuvre pour l'estimation de la distribution des pertes et profits[6] :

1. La méthode paramétrique ou la méthode de la matrice des variances-covariances.
  - (a) On détermine un modèle d'évolution de gains/pertes du portefeuille en fonction des divers facteurs de risque (qui peuvent être les rendements des actifs financiers constitutifs du portefeuille).
  - (b) On fait le choix de lois paramétriques pertinentes qui correspondent aux qualités distributionnelles des facteurs de risque.
  - (c) On estime les paramètres de ces lois à partir des données passées suivant les méthodes statistiques classiques (méthode des moments ou du maximum de vraisemblance).
  - (d) On détermine la loi de distribution des pertes et profits à partir du modèle choisi.
  - (e) On calcule le quantile associé au seuil de confiance.
2. La méthode de simulation historique.
  - (a) Récupérer la composition (nom de chaque actif et quantité de l'actif) du portefeuille à la date  $t$ .
  - (b) Calculer les  $N$  rendements historiques de chacun des actifs composant le portefeuille à la date  $t$ .
  - (c) Recomposer la distribution historique des valeurs du portefeuille (avec sa composition à la date  $t$ ) : calculer sa valeur fictive à la première date de l'historique et appliquer les rendements de chaque actif qui le composent à chaque date jusqu'à la date  $t$ .
  - (d) Classer et numéroter par ordre croissant les  $N$  différentes variations (pertes ou gains)fictives du portefeuille reconstitué et obtenir ainsi une distribution de  $N$  variations.
  - (e) On détermine le quantile souhaité associé à ces simulations.
3. La méthode de simulation Monte Carlo.
  - (a) On détermine un modèle d'évolution des gains/pertes du portefeuille en fonction des divers facteurs de risque.

- (b) On choisit des modèles d'évolution paramétriques pour chaque facteur de risque.
- (c) On estime les paramètres de ces modèles à partir des données historiques.
- (d) On simule un grand nombre de gains/pertes.
- (e) On classe ces profits ou pertes dans l'ordre croissant et on crée l'histogramme de la distribution.
- (f) On détermine le quantile souhaité associé à ces simulations.

Chacune de ces méthodes utilise les données du passé pour estimer les variations potentielles de la valeur du portefeuille dans le futur proche. Ceci suppose implicitement, que le futur se comporte comme le passé. Nous pouvons ajouter que le résultat de chacune de ces méthodes est la distribution des pertes et profits qui va nous servir de base pour la déduction de la valeur de la VaR.

## 2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les types d'incertitude ainsi le concept d'incertitude paramétrique, on a vu que ces incertitudes peuvent être caractériser par l'estimation de densité de probabilité. Comme la quantification des incertitudes est réalisée en vue de faire une analyse de sensibilité ou une propagation des incertitudes des méthodes de gestion et de propagation de l'incertitude paramétrique sont cités, particulièrement celle de l'approche par intervalle.

## *Quantification paramétrique dans les modèles du risque par l'approche intervalles*

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à la quantification d'incertitude paramétrique dans le modèle de risque classique, on suppose que les paramètres intervenant dans la définition ( $\lambda$ ) et ( $\mu$ ) de la probabilité de ruine sont des variables aléatoires, nous considérons la probabilité de ruine  $\psi(\lambda, \mu)$  comme une fonction. Afin de voir l'influence de cette réserve sur l'état de la compagnie d'assurance, On fait varier la réserve initiale de cette dernière. Pour cela, en réalisant deux cas le premier ; on perturbe un seul paramètre (on génère uniformément le paramètre ( $\lambda$ ) sur l'intervalle  $[0.5, 1.5]$ ) et le deuxième cas ; on perturbe les deux paramètres à la fois (on génère uniformément sur le même intervalle les deux paramètres ( $\lambda$ ) et ( $\mu$ )). en variant la réserve initiale et en comparant les résultats obtenue, à défaut d'obtenir des résultats précis à chaque cas en étudiant trois scénarios  $u = (5, 10, 15, 20)$ ,  $u = (100, 200, 300, 400, 500)$  et  $u = (1000, 2000, 3000, 4000, 5000)$  (respectivement scénario 1, scénario 2 et scénario 3). Ainsi, on caractérise statistiquement la probabilité de ruine, en estimant sa valeur moyenne et sa variance ainsi que sa fonction de densité de probabilité. plus, on calcule la valeur à risque afin de déterminer la perte maximale. En outre, une comparaison de probabilité de ruine selon la réserve initiale se présente à l'aide des boîtes à moustache. Pour cela on a programmé les deux algorithmes (3.1) et (3.2).

### 3.1 Modèle de risque classique

Au cours du temps, une compagnie d'assurance qui dispose d'un capital initial  $u > 0$ , en quelque unité, évolue en fonction des cotisations des assurés, les montants de remboursement et la fréquence des sinistres dont sont victimes les assurés [?]. On suppose que :

- les occurrences des sinistres suivent un processus de Poisson  $\{N_t : t \geq 0\}$  de paramètre  $\lambda > 0$ .
- le  $k^{eme}$  sinistre occasionne pour la compagnie une perte aléatoire  $Z_k > 0$ .
- les cotisations des assurés sont capitalisées linéairement au cours du temps.

Dans la pratique, les cotisations sont capitalisées à des instants discrets. L'hypothèse de linéarité est simplificatrice, et on suppose donc que les prélèvements des cotisations chez les assurés seront faits de manière homogène et constante dans le temps. Conditionnellement à l'événement  $N_t = 0$ , le capital de la compagnie égal à  $u + ct$  au temps  $t$ . On suppose de plus, que  $(Z_k)_{k \geq 1}$  correspondant au montants des remboursement forment un processus de renouvellement de loi  $F$ , et telle que

$$E[Z_k] = \mu \text{ et } Var(Z_k) = \sigma^2$$

#### Définition 3.1

On appelle le processus de risque, le processus défini par

$$\forall t \geq 0, X_t = ct - \sum_{k=1}^{N_t} Z_k :$$

Il vient immédiatement de cette définition que le capital de la compagnie d'assurance au temps  $t$  est égal à  $u + X_t$ . De plus le risque moyen sur  $[0, t]$  est égal à

$$E[X_t] = ct - E[N_t]\mu = (c - \lambda\mu)t :$$

#### 3.1.1 Remboursements de loi exponentielle

Prenant le cas particulier du modèle de risque classique (modèle de lundberg P/P), ou les réclamations suivent une loi exponentielle de fonction de répartition :

$$F(x) = 1 - \exp\left(\frac{-x}{\mu}\right); x \geq 0. \quad (3.1)$$

Lorsque  $F$  est de loi exponentielle de paramètre  $\frac{1}{\mu}$ , on a :

$$\forall u \geq 0; \Psi(u) = \frac{1}{1 + \varrho} \exp\left(\frac{-\varrho u}{\mu(1 + \varrho)}\right). \quad (3.2)$$

On remplace  $\varrho$  dans la formule (3.2), on aura :

$$\Psi(u) = \frac{\lambda\mu}{c} \exp\left(-u\left(\frac{c - \lambda\mu}{c\mu}\right)\right). \quad (3.3)$$

Dans ce qui suit, nous supposons que les deux paramétrés  $\lambda$  et  $\mu$  évoqués dans la définition de la probabilité de ruine (3.3) sont incertains. Plus précisément, nous associons les deux modèles suivants pour leurs présentation :

$\lambda$  : v.a généré uniformément sur l'intervalle  $[0.5, 1.5]$

$\mu$  : v.a généré uniformément sur l'intervalle  $[0.5, 1.5]$

## Quantification de la probabilité de ruine

Pour quantifier la probabilité de ruine introduite précédemment, nous construisons un algorithme basé sur la méthode dite approche par intervalle dans la section (2.5.4). Dans ce qui suit, nous décrivons les principales étapes de notre algorithme nommé Perturbation du taux d'arrivées des sinistres  $\lambda$ .

### Prise en compte de l'incertitude

Afin de modéliser l'incertitude; voir la section (2.3), nous associons une perturbation pour le paramètre des lois qui expriment le comportement des arrivées des sinistres et les montants des sinistres. Cette procédure est donnée par les deux pseudo-code suivant :

1. **Perturbation du taux d'arrivées des sinistres  $\lambda$**  : Nous perturbons le taux d'arrivées des sinistres  $\lambda$  avec  $\lambda$  suit une lois uniforme sur  $[0.5, 1.5]$   
cette algorithme permet de quantifier la probabilité de ruine incertaine.

---

**Algorithme 3.1** Perturbation du taux de d'arrivées des sinistres ( $\lambda$ )
 

---

**Entrées** :  $c$  : Cotisations des assurés -  $N$  : Nombre de génération -  $U$  : Capital initial -  $\mu$  : le montant des remboursements

**Sorties** :  $\psi(\lambda)$

calculer ( $\varrho$ )

**Pour**  $i = 1$  à  $N$  **faire**

**Pour**  $j = 1$  à  $taille(u)$  **faire**

calculer la probabilité de ruine

$$\psi(\lambda) \leftarrow \frac{1}{1 + \varrho} \exp\left(\frac{-\varrho u}{\mu(1 + \varrho)}\right).$$

**Fin Pour**

**Fin Pour**

**Retourner**  $\psi$

---

Les expériences ont été menées sur la formule de la probabilité de ruine dans le cas où le modèle est P/P. Nous avons choisi d'exécuter notre algorithme avec les valeurs suivantes :

- \* La taille des échantillons  $N = 10000$  ;
- \* Cotisation  $c$  se change d'un scénario à un autre ;
- \* Le capital initiale  $u$  est un vecteur qui se change d'un scénario à un autre, on prend deux cas et à chaque cas on a trois scénarios où  $u = (5, 10, 15, 20)$  ,  $u = (100, 200, 300, 400, 500)$  et  $u = (1000, 2000, 3000, 4000, 5000)$  ;
- \* Le montant des réclamations  $\mu$  se change aussi d'un scénario à une autre.

---

**Algorithme 3.2** Perturbation du taux d'arrivées des sinistres ( $\lambda$ ) et perturbation du montant de remboursement ( $\mu$ )

---

**Entrées** :  $c$  : Cotisations des assurés -  $N$  : Nombre de génération -  $U$  : Capital initial

**Sorties** :  $\psi(\lambda, \mu)$

Générer uniformément  $\lambda$  sur l'intervalle  $[0.5, 1.5]$

Générer uniformément  $\mu$  sur l'intervalle  $[0.5, 1.5]$

calculer ( $\varrho$ )

**Pour**  $i = 1$  à  $N$  **faire**

**Pour**  $j = 1$  à  $taille(u)$  **faire**

calculer la probabilité de ruine

$$\psi(\lambda, \mu) \leftarrow \frac{1}{1 + \varrho} \exp\left(\frac{-\varrho u}{\mu(1 + \varrho)}\right).$$

**Fin Pour**

**Fin Pour**

**Retourner**  $\psi$

---

Afin d'évaluer les performances de l'algorithme de perturbation du deux paramètres à la fois  $\lambda$  et  $\mu$ , ce dernier a été implémenté sous l'environnement MATLAB. Les expériences ont été menées sur la formule de la probabilité de ruine dans le cas où le modèle est P/P. Nous avons choisi d'exécuter notre algorithme avec les valeurs suivantes :

- \* La taille des échantillons  $N = 100$  ;
- \* la cotisation  $c = 2.26$  ;
- \* Le capital initial  $U$  vecteur change d'un scénario à un autre, on prend trois scénario où  $u = (5, 10, 15, 20)$ ,  $u = (100, 200, 300, 400, 500)$  et  $u = (1000, 2000, 3000, 4000, 5000)$  ;

Les résultats sont donnés dans les figures ci dessous.

En suivant les algorithmes précédentes en variant la réserve initiale d'une compagnie d'assurance afin d'avoir l'influence de cette réserve sur l'état de l'assurance et pour cela on a réalisé deux cas et dans chaque cas on a trois scénarios.

## 3.2 Perturbation du taux de nombre d'arrivées des réclamations

Dans le premier cas, on génère aléatoirement sur l'intervalle  $[0.5, 1.5]$  le taux de nombre d'arrivées des réclamations ( $\lambda$ ) et on fixe le taux de quantités de réclamation ( $\mu$ ). Dans le premier cas et premier scénario on a pris 4 valeurs de réserve initiale  $u = (5, 10, 15, 20)$ , pour le deuxième scénario on a augmenté la quantité de réserve initiale avec  $u = (100, 200, 300, 400, 500)$  et finalement pour le troisième scénario, on prend des valeurs plus grandes que celles du deuxième est  $u = (1000, 2000, 3000, 4000, 5000)$ .

### 3.2.1 Scénario 1

Pour ce scénario, on prend  $c = 1.6$  et  $\mu = 1$  et une réserve initiale petite  $u = (5, 10, 15, 20)$  les résultats obtenus sont illustrés comme suit :

#### La boîte à moustache

la représentation graphique de la boîte à moustaches est mystérieuse lorsqu'on la découvre pour la première fois pour lire et interpréter, il est nécessaire de connaître sa construction. La boîte à moustaches utilise 5 valeurs qui résument des données : le minimum, les trois quartiles  $Q_1, Q_2$  (médiane),  $Q_3$  et le maximum.

Pour  $\mu = 1$

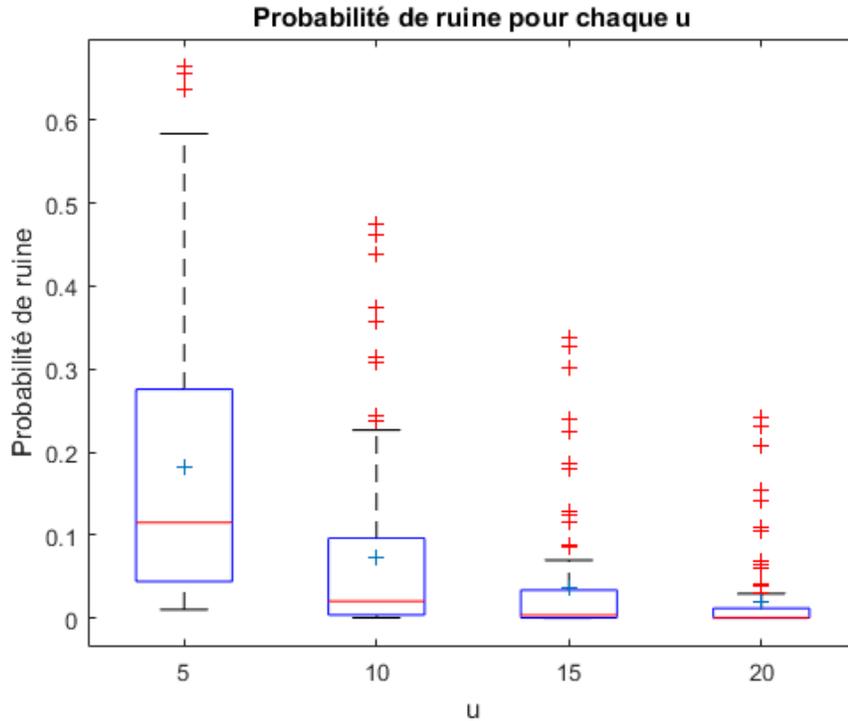
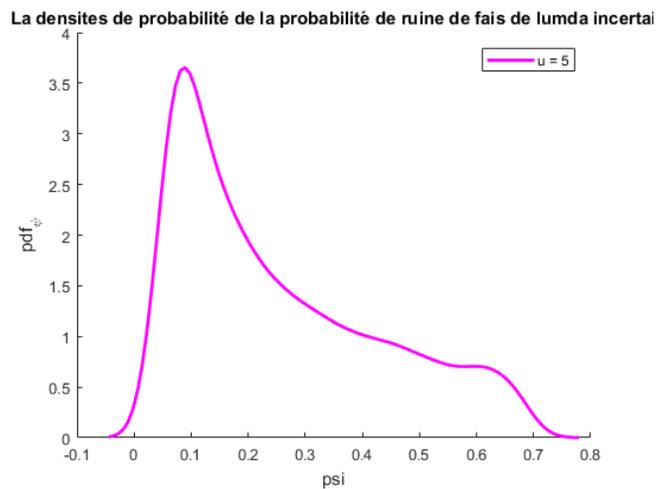
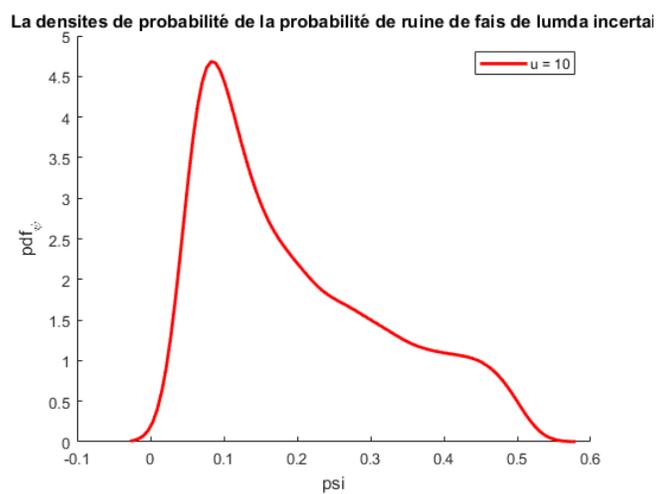
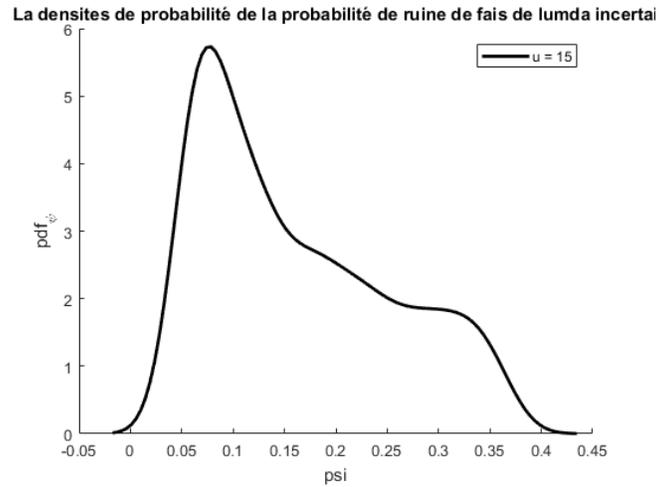
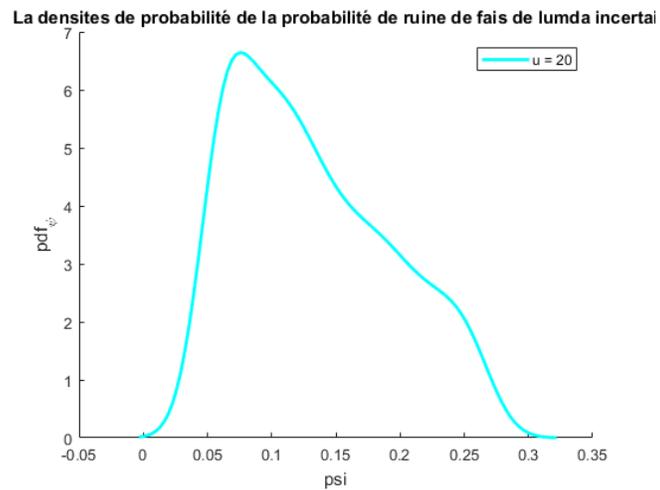


FIGURE 3.1 – Comparaison des distributions de la probabilité de ruine selon la réserve initiale

Le graphique ci-dessus des boîtes à moustache qui nous permettent d'avoir une vue synthétique globale et en même temps une vue locale sur les données. D'après la figure(3.1)la taille de la boite à moustache correspondante à  $u = 5$  est la plus grande ce qui implique que son indice de proportion est le plus grand, la distribution est positivement asymétrique et la durabilité médiane est la plus élevée pour  $u = 5$  (0.11). Cependant, avec une étendu inter-quartile de 0.28, la distribution est positivement asymétrique. Pour  $u = 20$  affiché également la probabilité la plus faible avec une étendue inter-quartile de seulement 0.0002 presque nulle.

Dans le cadre de la caractérisation statistique de la probabilité de ruine, pour le cas de perturbation du taux de nombre d'arrivées des réclamations  $\lambda$  ; nous avons pu estimer la fonction de densité de probabilités illustré graphiquement dans les figures suivantes. Celle-ci nous permettrons également d'estimer les différentes quantités d'intért, telles que la moyenne, la variance,etc.

FIGURE 3.2 – La densité de probabilité de probabilités de ruine  $u = 5$ FIGURE 3.3 – La densité de probabilité de probabilité de ruine pour  $u = 10$

FIGURE 3.4 – La densité de probabilité de probabilité de ruine pour  $u = 15$ FIGURE 3.5 – La densité de probabilité de probabilité de ruine pour  $u = 20$ 

D'après la figure précédente, on constate que pour  $u = 5$  l'effectif de la distribution de la probabilité de ruine se situe sur l'intervalle  $[0, 0.3]$  et cet intervalle se diminue avec l'augmentation de réserve initiale.

**Remarque**

on remarque dans les figures ci-dessous certaines valeurs de probabilité de ruine sont négatives ce qu'on appelle les effets de borne à cause d'utiliser l'estimation de la densité de probabilité de ruine par la méthode de noyau gaussien.

Les résultats de comparaison des probabilités de ruine pour les différentes réserves obtenues sont résumées dans le tableau ci-dessous sont :

réserve initial ( $u$ )	$\psi(\lambda, \mu)$	$E(\psi)$	$var(\psi)$	VaR(value at risk)	IC
$u = 5$	[0.0101, 0.6854]	0.1738	0.0325	0.6127	[0.1565, 0.1911]
$u = 10$	[0.0003, 0.5012]	0.0736	0.0135	0.4504	[0.0624, 0.0848]
$u = 15$	[0, 0.3665]	0.0377	0.0057	0.3364	[0.0305, 0.0449]
$u = 20$	[0, 0.2680]	0.0212	0.0025	0.2465	[0.0164, 0.0260]

TABLE 3.1 – Caractérisation statistique de la probabilité de ruine pour le 1<sup>er</sup> cas et pour un réserve initiale petit

**3.2.2 Scénario 2**

Pour ce scénario on a  $c = 25$ ,  $\mu = 15$  et  $u = (100, 200, 300, 400, 500)$

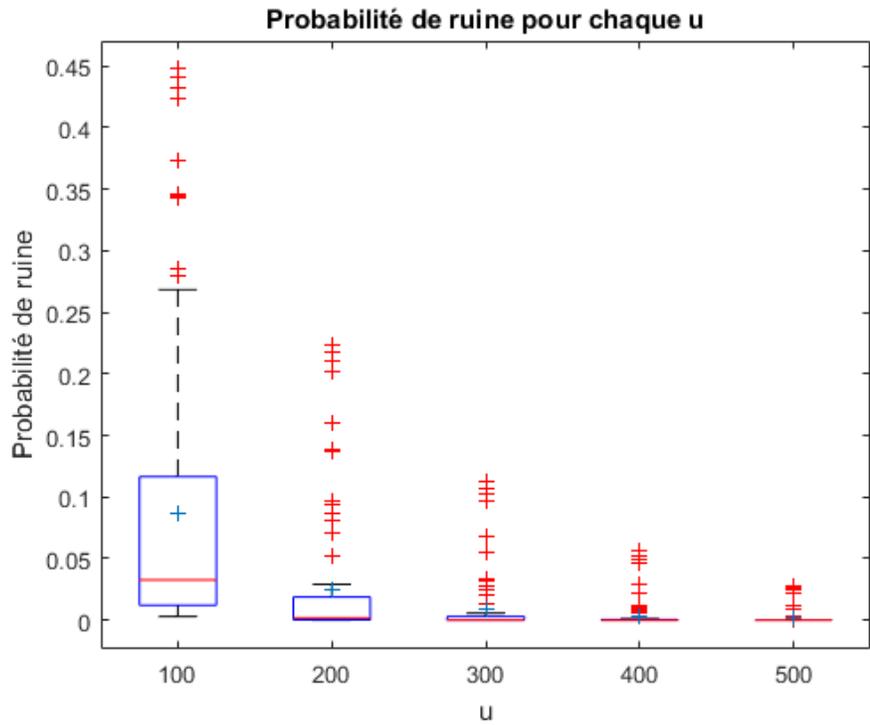


FIGURE 3.6 – Comparaison des distributions de la probabilité de ruine selon la réserve initiale

selon la figure (3.6) on constate que l'écart inter-quartile est plus étalé pour  $u = 100$  .

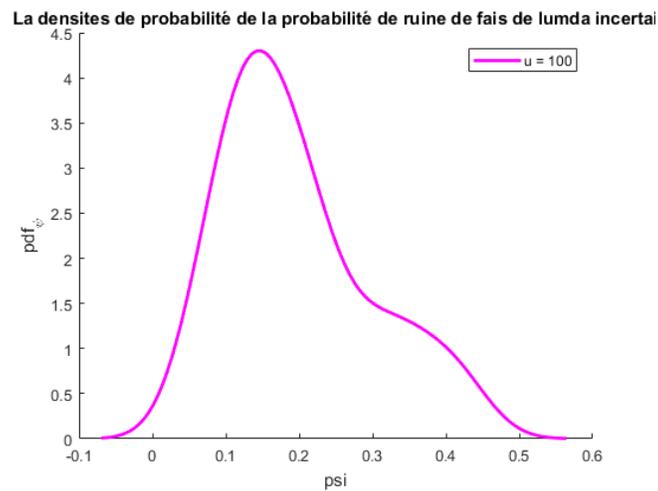
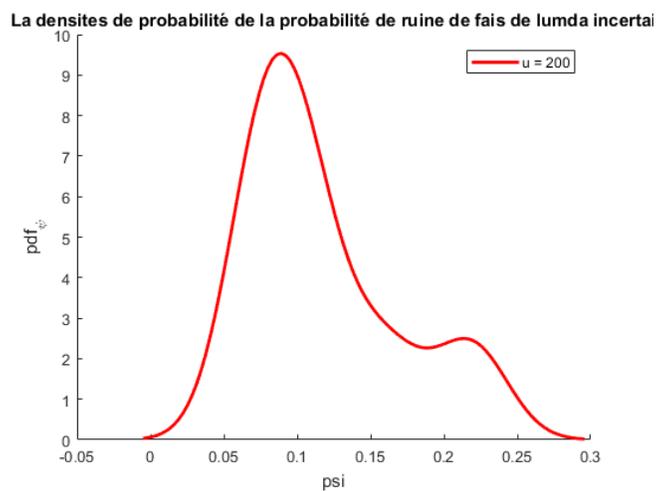
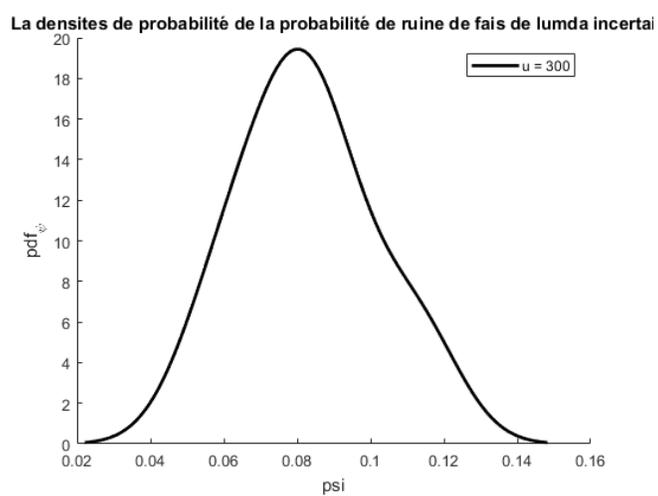
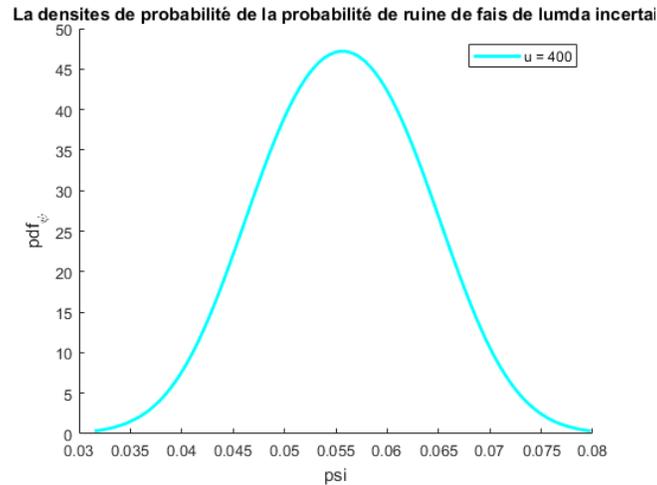
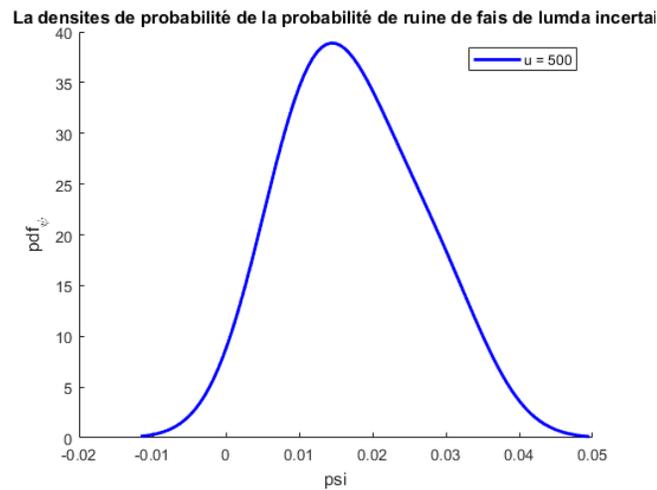


FIGURE 3.7 – La densité de probabilité de probabilité de ruine pour  $u = 100$

FIGURE 3.8 – La densité de probabilité de probabilité de ruine pour  $u = 200$ FIGURE 3.9 – La densité de probabilité de probabilité de ruine pour  $u = 300$

FIGURE 3.10 – La densité de probabilité de probabilité de ruine pour  $u = 400$ FIGURE 3.11 – La densité de probabilité de probabilité de ruine pour  $u = 500$ 

On constate la même chose avec le 1er scénario, plus la réserve initiale augmente plus la probabilité de ruine se diminue. Mais on remarque que dans ce scénario la probabilité de ruine est plus petite que celle du premier. on a la valeur à risque (VaR) pour  $u = 100$  est 0.4042 (la perte maximal) c'est-à-dire qu'il y a 95% de chance que la probabilité de ruine soit inférieure à 0.4042 et on remarque que cette valeur se diminue avec l'augmentation initiale.

réserve initial ( $u$ )	$\psi(\lambda, \mu)$	$E(\psi)$	$var(\psi)$	VaR(value at risk)	IC
$u = 100$	[0.0028, 0.4545]	0.0872	0.0104	0.4042	[0.0774, 0.0970]
$u = 200$	[0, 0.2301]	0.0219	0.0019	0.2214	[0.0177, 0.0261]
$u = 300$	[0, 0.1165]	0.0072	0.0004	0.1125	[0.0053, 0.0091]
$u = 400$	[0, 0.0590]	0.0027	0.0001	0.0604	[0.0017, 0.0037]
$u = 500$	[0, 0.0298]	0.0011	0	0.0298	[0.0011, 0.0013]

TABLE 3.2 – Caractérisation statistique de la probabilité de ruine pour le 1<sup>er</sup> cas et pour un réserve initiale moyen

### 3.2.3 Scénario 3

dans le dernier scénario on prend  $c = 62$ ,  $\mu = 40$  et 5 valeurs de réserve initiale  $u=(1000, 2000, 3000, 4000, 5000)$  respectivement. Et pour cela on a suivi le même algorithme; on génère aléatoirement le taux de nombre d'arrivées des réclamations ( $\lambda$ ), et on fixe le taux de quantités de réclamation ( $\mu$ ).

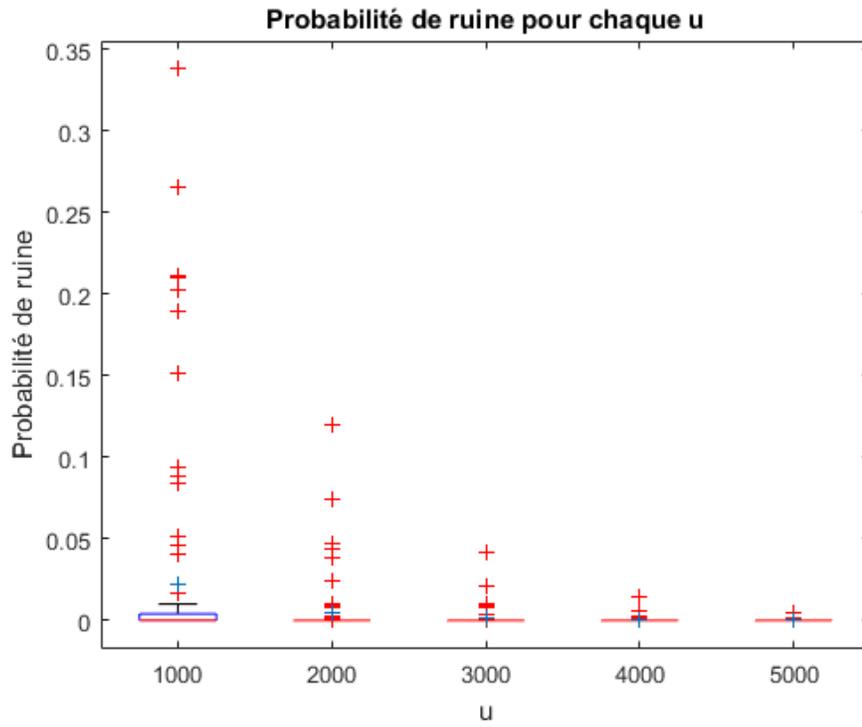


FIGURE 3.12 – Comparaison des distributions de la probabilité de ruine selon le réserve initiale

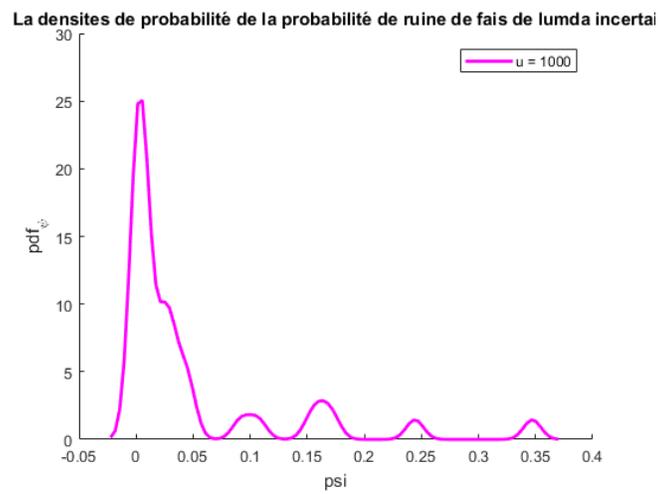
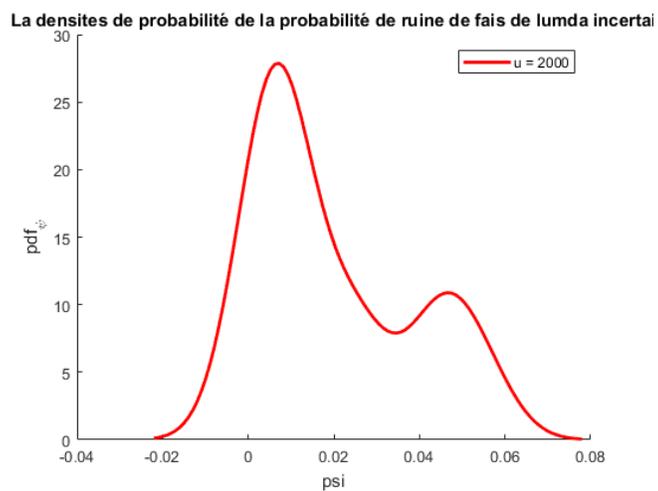
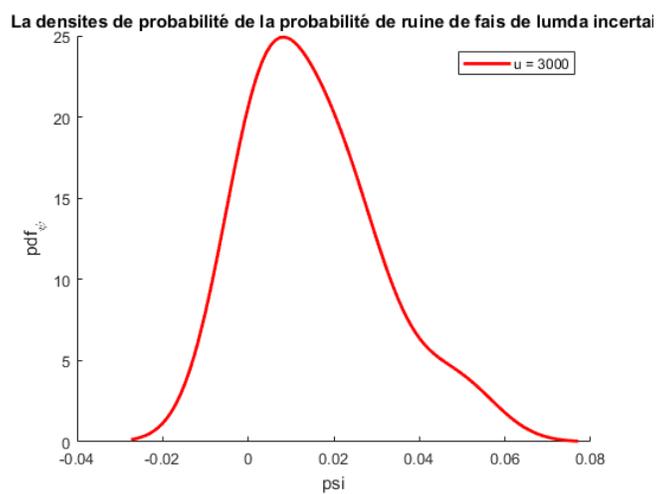


FIGURE 3.13 – Les densités de probabilités des probabilités de ruine pour = 1000

FIGURE 3.14 – Les densités de probabilités des probabilités de ruine pour  $u = 2000$ FIGURE 3.15 – Les densités de probabilités des probabilités de ruine pour  $u = 3000$

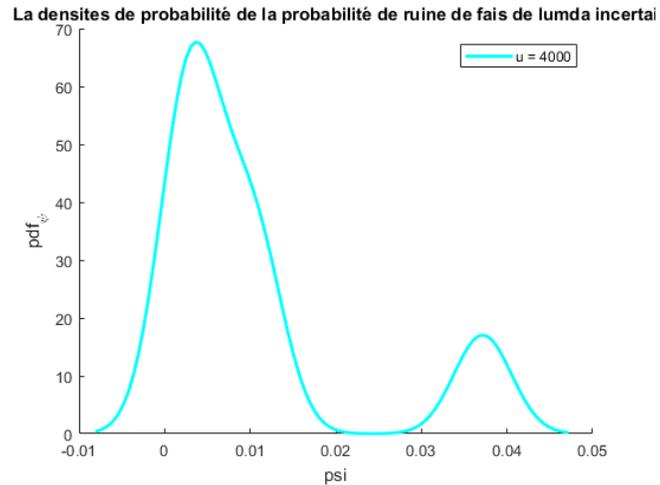


FIGURE 3.16 – Les densités de probabilités des probabilités de ruine pour  $u = 4000$

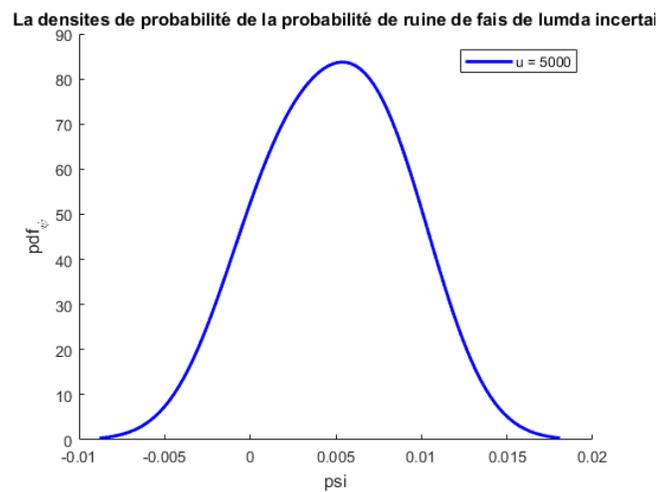


FIGURE 3.17 – Les densités de probabilités des probabilités de ruine pour  $u = 5000$

On remarque que la probabilité de ruine est très petite pour la valeur à risque (VaR) pour  $u = 1000$  est 0.2226 (la perte maximale), c'est-à-dire il y a 95% de chance de tomber en ruine soit inférieure à 0.22260. Et on remarque les probabilités de ruine se diminuent ce qui signifie que si la réserve initiale est grande, la probabilité de tomber en ruine est nulle.

réserve initial ( $u$ )	$\psi(\lambda, \mu)$	$E(\psi)$	$var(\psi)$	VaR(value at risk)	IC
$u = 1000$	$[0.2018 * 10^{-7}, 0.3345]$	0.0295	0.0050	0.2226	$[0.0227, 0.0363]$
$u = 2000$	$[0, 0.1168]$	0.0061	0.0004	0.1656	$[0.0042, 0.0080]$
$u = 3000$	$[0, 0.0408]$	0.0016	0	0.0471	$[0.0016, 0.0016]$
$u = 4000$	$[0, 0.0143]$	0.0005	0	0.0372	$[0.005, 0.0005]$
$u = 5000$	$[0, 0.0050]$	0.0001	0	0.0087	$[0.0001, 0.0001]$

TABLE 3.3 – Caractérisation statistique de la probabilité de ruine pour le 1<sup>er</sup> cas et pour un réserve initiale assez grand

### 3.3 Perturbation du taux d'arrivées des réclamation et du taux de quantités des réclamations

#### 3.3.1 Scénario 1

pour ce scénario on a pris  $c = 2.6$  et  $u = (5, 10, 15, 20)$

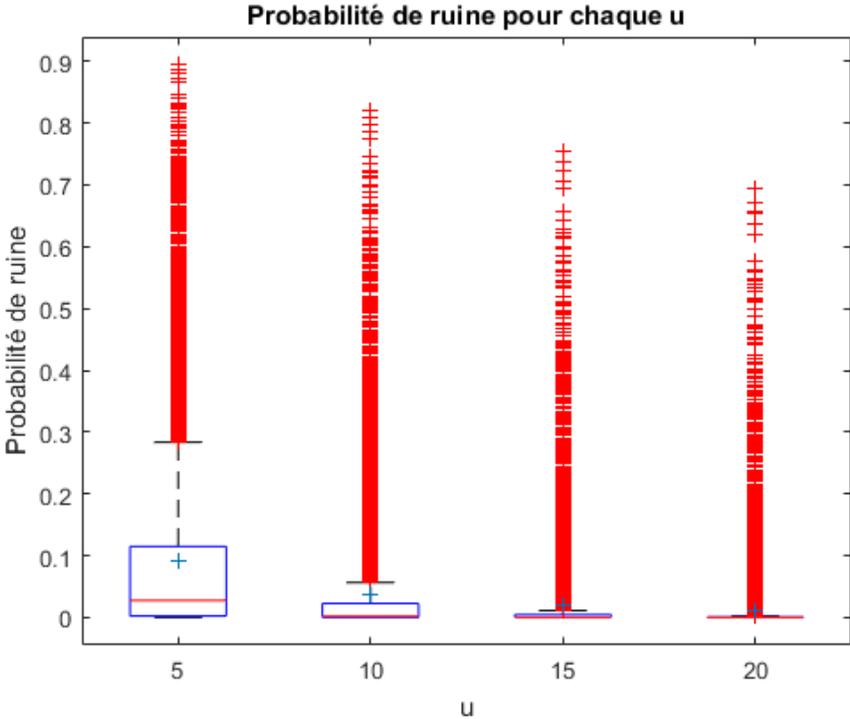


FIGURE 3.18 – Comparaison des distributions de la probabilité de ruine selon le réserve initiale

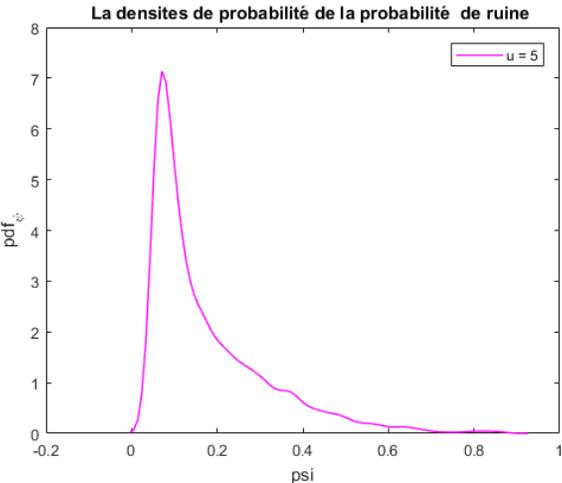
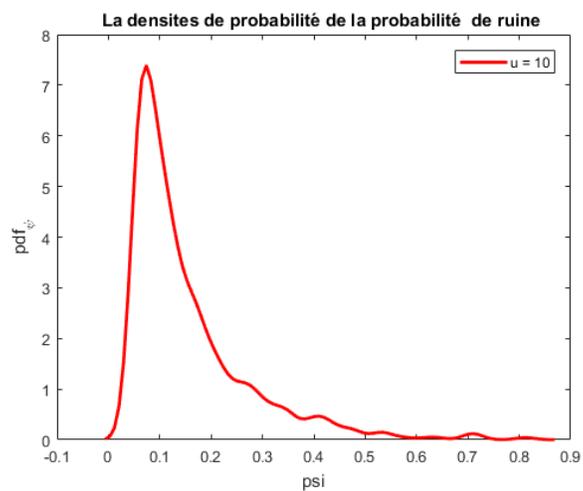
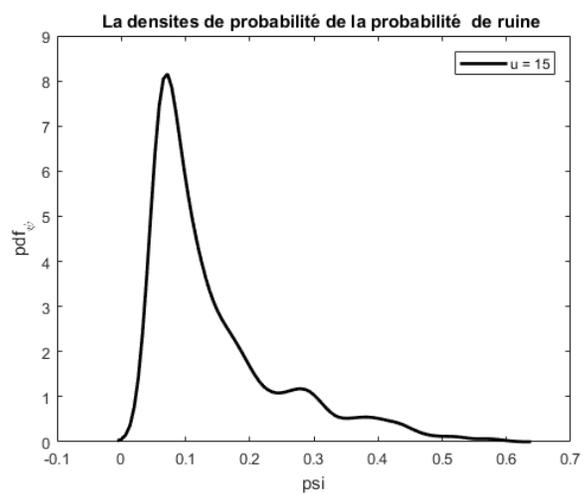
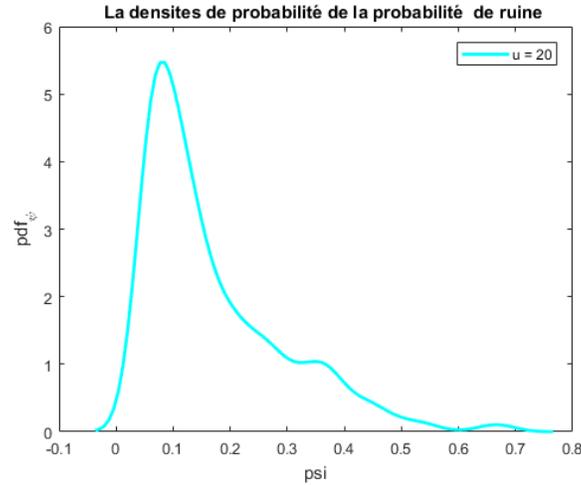


FIGURE 3.19 – Les densités de probabilités des probabilités de ruine pour  $u = 5$

FIGURE 3.20 – Les densités de probabilités des probabilités de ruine pour  $u = 10$ FIGURE 3.21 – Les densités de probabilités des probabilités de ruine pour  $u = 15$

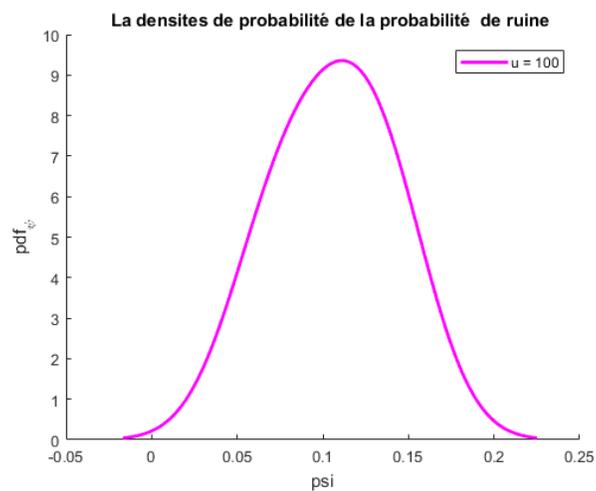
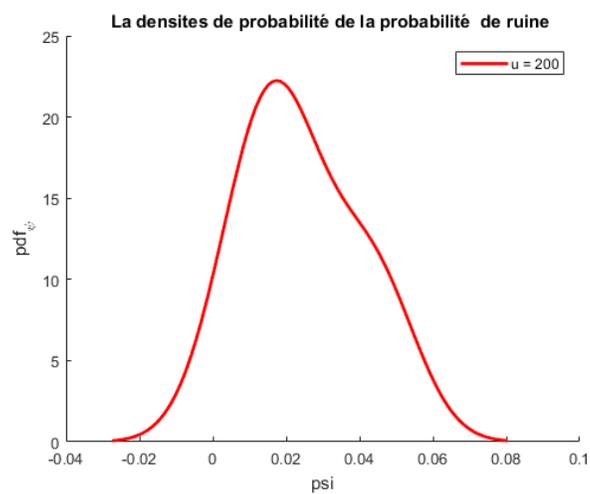
FIGURE 3.22 – Les densités de probabilités des probabilités de ruine pour  $u = 20$ 

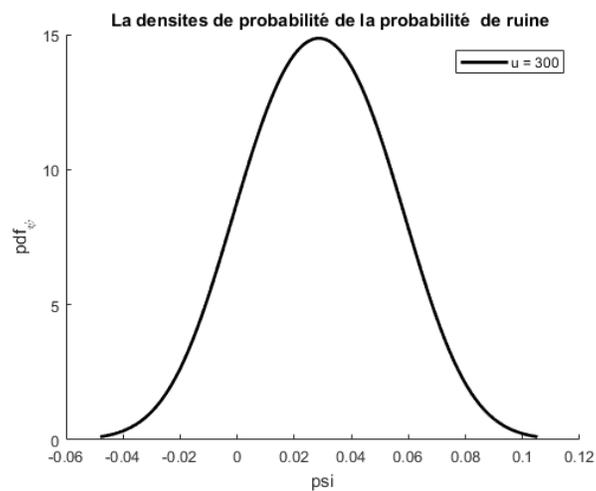
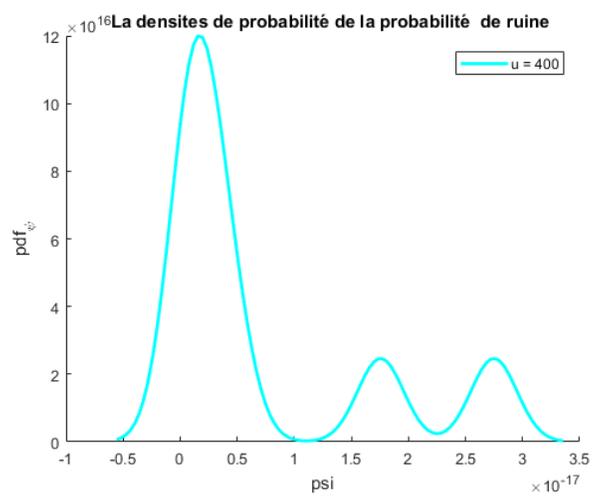
$u$	$\psi(\lambda, \mu)$	$E(\psi)$	$var(\psi)$	VaR	IC
$u = 5$	[0.0101, 0.6854]	0.1738	0.0325	0.6127	[0.1565, 0.1911]
$u = 10$	[0.0003, 0.5012]	0.0736	0.0135	0.4504	[0.0624, 0.0848]
$u = 15$	[0, 0.3665]	0.0377	0.0057	0.3364	[0.0305, 0.0449]
$u = 20$	[0, 0.2680]	0.0212	0.0025	0.2465	[0.0164, 0.0260]

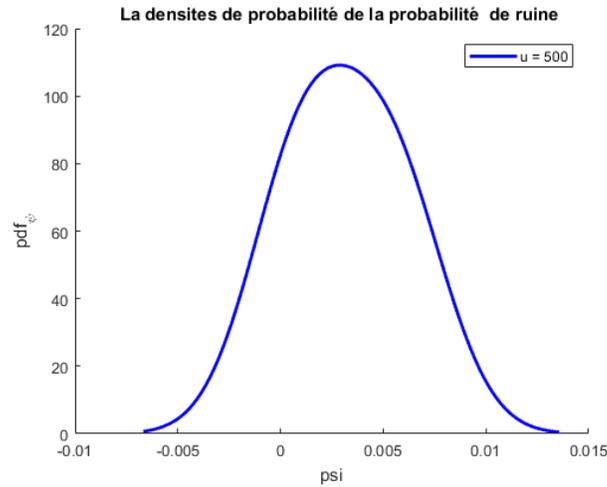
TABLE 3.4 – Caractérisation statistique de la probabilité de ruine pour le 2<sup>ème</sup> cas et pour un réserve initiale petit

### 3.3.2 Scénario 2

Dans le deuxième scénario on a pris 5 valeurs de réserve initiale  $u=(100, 200, 300,400,500)$  respectivement. Et pour cela on a suivie le même algorithme on génère les deux paramètres ( $\lambda$ ) et ( $\mu$ ) à la fois. et  $c = 2.26$

FIGURE 3.23 – Les densités de probabilités des probabilités de ruine pour  $u = 100$ FIGURE 3.24 – Les densités de probabilités des probabilités de ruine pour  $u = 200$

FIGURE 3.25 – Les densités de probabilités des probabilités de ruine pour  $u = 300$ FIGURE 3.26 – Les densités de probabilités des probabilités de ruine pour  $u = 400$

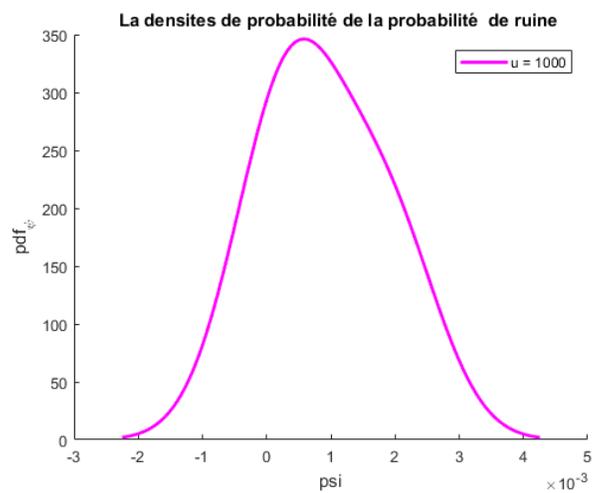
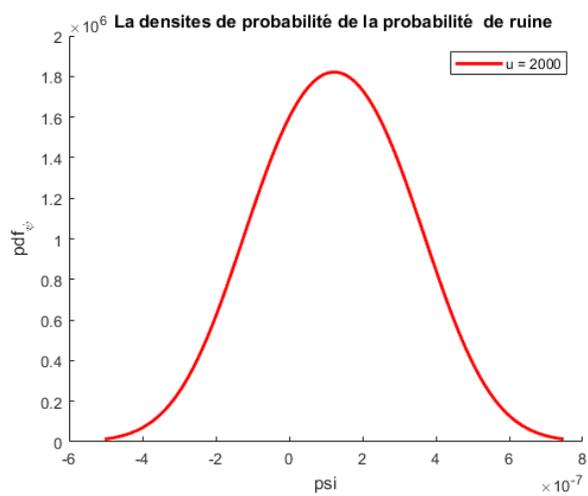
FIGURE 3.27 – Les densités de probabilités des probabilités de ruine pour  $u = 500$ 

$u$	$\psi(\lambda, \mu)$	$E(\psi)$	$var(\psi)$	VaR	IC
$u = 100$	$[0.5584E - 76, 0.4784]$	$0.3567E - 3$	$0.6619E - 4$	0.1418	$[-4.2433E - 4, 0.0011]$
$u = 200$	$[0, 0.2314]$	$0.0675E - 3$	$0.1032E - 4$	0.0468	$[-2.4090E - 4, 3.7590E - 4]$
$u = 300$	$[0, 0.1119]$	$0.0243E - 3$	$0.0218E - 4$	0.0436	$[-1.1744E - 4, 1.6604E - 4]$
$u = 400$	$[0, 0.0541]$	$0.0105E - 3$	$0.0048E - 4$	0.0065	$[-5.6011E - 5, 7.7011E - 5]$
$u = 500$	$[0, 0.0262]$	$0.0048E - 3$	$0.0011E - 4$	0.0062	$[-2.7040E - 5, 3.6640E - 5]$

TABLE 3.5 – Caractérisation statistique de la probabilité de ruine pour le 2<sup>ème</sup> cas et pour un réserve initiale moyen

### 3.3.3 Scénario 3

pour ce dernier scénario on prenons  $c = 2.6$ ,  $u = (1000, 2000, 3000, 4000, 5000)$

FIGURE 3.28 – Les densités de probabilités des probabilités de ruine pour  $u = 1000$ FIGURE 3.29 – Les densités de probabilités des probabilités de ruine pour  $u = 2000$

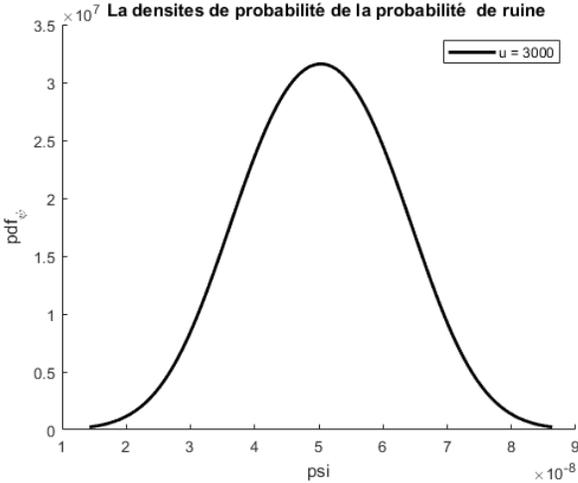


FIGURE 3.30 – Les densités de probabilités des probabilités de ruine pour  $u = 3000$

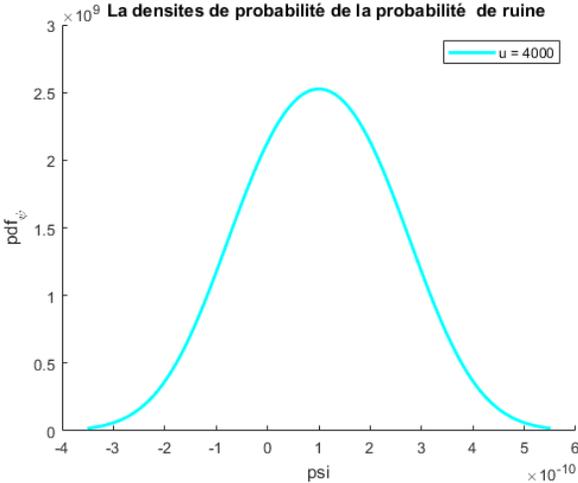
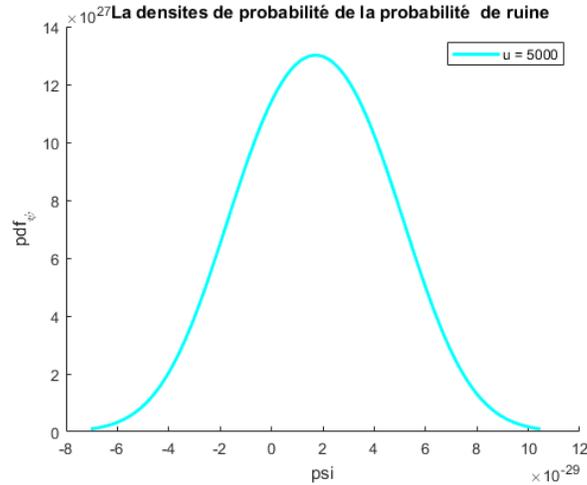


FIGURE 3.31 – Les densités de probabilités des probabilités de ruine pour  $u = 4000$


 FIGURE 3.32 – Les densités de probabilités des probabilités de ruine pour  $u = 5000$ 

$u$	$\psi(\lambda, \mu)$	$E(\psi)$	$var(\psi)$	VaR(value at risk)
$u = 1000$	$[0, 0.0077]$	$0.8406E - 6$	$0.6035E - 8$	$0.0019$
$u = 2000$	$[0, 0.0001]$	$0.006E - 6$	$0.6035E - 8$	$1.2096E - 5$
$u = 3000$	$[0, 0]$	$0$	$0$	$5.7375E-8$
$u = 4000$	$[0, 0]$	$0$	$0$	$1.8859E-10$
$u = 5000$	$[0, 0]$	$0$	$0$	$3.3557E-14$

 TABLE 3.6 – Caractérisation statistique de la probabilité de ruine pour le 2<sup>ème</sup> cas et pour un réserve initiale assez grand

Dans ce scénario on constate que la probabilité de ruine est presque nulle , ainsi le perte maximale.

### 3.4 Conclusion

Une compagnie d'assurance qui démarre par un capitale initial grand, assure qu'elle reste en bon état et soit solvable et a une faible probabilité d'être en risque (ruine) .par contre si elle démarre par un capitale initial assez petit, elle a une grande probabilité de ruine.

# Conclusion générale

En actuariat, la théorie de la ruine consiste à la modélisation mathématique et à l'étude de l'évolution des richesses d'une compagnie d'assurance. La problématique la plus souvent posée dans ce domaine est le calcul de la probabilité de ruine de la compagnie, c'est-à-dire de la probabilité que ses réserves financières passent sous la frontière fatidique du zéro. La probabilité de ruine en temps finie se comporte un peu comme la Valeur à Risque. Dans ce travail, nous nous sommes intéressés à montrer l'impact de la réserve initiale sur la compagnie d'assurance, pour cela nous avons cité dans le premier chapitre la théorie de la ruine d'une manière générale et on a introduit le modèle de risque classique et on présente les principales approches utilisées pour approximer la probabilité de ruine dans un modèle de risque classique. Dans le deuxième chapitre nous avons présenté la quantification de l'incertitude paramétrique ainsi que les méthodes utilisées pour ce dernier, et la valeur à risque (value at risk). Pour le dernier chapitre était la quantification de l'incertitude paramétrique dans le modèle de risque classique. A travers cette quantification des résultats obtenus une compagnie d'assurance qui démarre par un capital initial grand, assure qu'elle reste en bon état et soit solvable et a une faible probabilité d'être en risque (ruine).

## Perspective

Dans le sens d'améliorer le travail, c'est bien de passer par l'analyse des sensibilités pour voir quel est le paramètre qui a de l'influence sur la sortie (la probabilité de ruine). On hiérarchisera les paramètres selon leurs poids d'influence.

# Bibliographie

- [1] A. Charpentier. *Mathématiques de L'assurance Non Vie. Principe Fondamentaux de Théorie de Risque*. Economica, 2004.
- [2] J. Cai. ruin probabilities under dependent rates of interest. *Applied Probability (39)*, pages 312–323, 2002.
- [3] C. Coccozza. *Processus Stochastique et Fiabilité des Systèmes*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1997.
- [4] E. Marceau F. Devylder. Explicite analytic ruin probabilities for bounded claims, insurance. *Mathematics and Economics (18)*, pages 97–105, 1995.
- [5] M. Goovaerts F. Devylder. the bi-atomic minimal solution of schmitter's problem insurance. *Mathematics and Economics (70)*, pages 59–78, 1997.
- [6] U. Gerber. *An Introduction To Mathematical Risk Theory*. Monograph, University of Philadelphia, 1979.
- [7] I. Hugues. *Propagation Analytique De L'incertitude À Travers Le Calcul Matriciel D'Une Analyse Du Cycle De Vie*. université de montréal, 2010.
- [8] F. Lundberg. *Approximerad Framställning*. Almqvist Wiksell, 1993.
- [9] A. Stuart. H. H. Panjer. and E. Gordon. *Loss Models, Wiley Series In Probability And Statistics*. Wiley-Interscience, 2004.
- [10] F. Raoul. *Mesure du Risque de Marché d'un Portefeuille de Type Actions (Value-At-Risk, Value-At-Risk Conditionnelle)*. Euro-institut d'actuariat jean dieudonne - euria, 2006.
- [11] S. Ross. *Introduction to probability models*. cademic press, 1990.

- 
- [12] K. I. Sato. *Lévy Processes And Infinitely Divisible Distributions*. Cambridge University Press, 1999.
- [13] B. Silvermann. *Density Estimation For Statistic And Data Analysis*. Chapman and Hall, london, 1986.
- [14] R.Manca S.Janssen. *Semi-Markov Risk Models For Finance. insurance and reliability*. 2007.
- [15] S.Loisel. *Cours de Gestion des Risques D'assurances et de Théorie de La Ruine*. Université de Lyon 1, 2005-2006.
- [16] S.Nanty. *Quantification Des Incertitudes Et Analyse De Sensibilité Pour Codes De Calcul à Entrées Fonctionnelles Et Dépendantes*. Statistiques [stat]. Université Grenoble Alpes, 2015.
- [17] Søren.Asmussen. *Ruin Probabilités*. World Scientific, Singapoure.
- [18] T.Mingmei. *Interval Markov Chains :Performance measures and sensitivity Analysis*. The university of adelaide, 2013.
- [19] A. Tsybakov. *Introduction To Nonparametric Estimation*. Springer Science And Business Media, New York, 2009.
- [20] T. J. Teugels V. Schmidt, V. Rolski and H. Schmidli. *Stochastic Processes For Insurance and finaance*. Wiley, 1999.
- [21] G. E. Willmot and X. S. LIN. simplified bounds on the tails compound distrubution. pages 127–133, 1997.

# Résumé

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés à l'analyse de l'incertitude épistémique dans les modèles de risque classiques. Nous avons utilisé l'approche intervalle pour propager l'incertitude infligée en paramètres du modèle. Cette analyse nous a permis de caractériser statistiquement la probabilité de ruine en estimant sa valeur moyenne et sa variance, ainsi que sa fonction de densité de probabilité. Plusieurs exemples numériques ont été réalisés afin de mesurer la performance de l'approche utilisée.

**Mots clés :** Incertitude paramétrique, quantification de l'incertitude, la théorie de la ruine, modèle de risque classique, valeur à risque (VaR).

# Abstract

In this Master's thesis, we focused on the analysis of epistemic uncertainty in classical risk models. We used the interval approach to propagate the uncertainty inflicted in model parameters. This analysis allowed us to characterize statistically the probability of ruin, estimating its mean value and variance, as well as its probability density function. Several numerical examples were made to measure the performance of the used approach.

**Key words :** Parameter uncertainty, uncertainty quantification, Ruin theory, classical risk models, value at risk (VaR).