République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université A.Mira de Béjaïa
Faculté des Sciences Exactes
Département de Recherche Opérationnelle

Mémoire de fin d'étude
En Mathématiques Appliquées
Spécialité
Mathématiques Financières

Thème

Approche par intervalles pour l'analyse de l'incertitude dans le modèle de Black-Scholes-Merton

Réalisé par :
M. ASKEUR Koussila
M. TAMDRARI Mohand Arezki

Devant le jury

M. OUAZINE Sofiane	M.C.B	Président	Université de Béjaia
M. ABBAS Karim	Professeur	Rapporteur	Université de Béjaia
M. SOUFIT Massinissa	Docteur	Examinateur	Université de Béjaia
M. BEY Adel	Doctorant	Examinateur	Université de Béjaia

Promotion 2018 – 2019

Remerciements

Avant de commencer la présentation de ce modeste travail, on profite de l'occasion pour remercier toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de notre projet de fin d'étude.

On tient à remércier le tout puissant de nous avoir donné le courage et la patience jusqu'a l'achèvement de ce modeste travail.

On tient à exprimer nos vifs remerciements pour notre rapporteur, **M. ABBAS Karim**, d'avoir accepté de nos encadré pour notre projet de fin d'étude, ainsi pour son soutien, ses remarques pertinentes et son encouragement.

On tient à exprimer notre profonde reconnaissance et toutes nos pensées de gratitude à **M. CHEURFA Fatah**, qui nous a accompagné de prés durant tout ce travail, pour sa disponibilité, pour sa confiances qu'il a su nous accorder et les conseils précieux qu'il nous prodigué tout au long de la réalisation de ce projet.

On tient à remercier aussi les membres de jury de nous avoir honorés en acceptant de juger notre modeste travail. Veuillez trouver ici le témoignage de notre respect le plus profond.

Nos remerciement vont aussi à nos familles, amis et toutes les personnes qui nous ont soutenus jusqu'au bout, et qui n'ont pas cessé de nous donner des conseils et le courage pour réaliser ce modeste travail.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à :

Mes chers parents pour leurs affections .

Mes chers grands parents.

Et toute ma famille pour leurs soutiens.

Mes amis, collègues, profs.

Mohand Arezki.

Dédicaces

A ma mère

A mon père

A mon grand frère Mouloud

A ma grande sœur Fariza

A mes deux petit frères Brahim et Hamza

A ma petite sœur Haoua

Et à tous ceux qui me sont chers.

Koussaila.

TABLE DES MATIÈRES

Table des Figures **iii**

Introduction Générale **1**

1 Introduction aux mathématiques financières **3**
1.1 Notions élémentaires en mathématique financière . . . 3
1.1.1 Marché financier . . . 3
1.1.2 La couverture . . . 3
1.1.3 Actif financier . . . 3
1.1.4 Produit dérivé . . . 3
1.1.5 Actifs sous-jacent . . . 4
1.2 Valeur d'une option et ses déterminants . . . 4
1.2.1 Valeur d'une option . . . 4
1.2.2 Déterminants d'une option . . . 5
1.3 Prix d'option européenne . . . 7
1.4 Modèle de Black-Scholes-Merton . . . 8
1.4.1 Formule de Black-Scholes-Merton . . . 9
1.4.2 Modèles stochastique . . . 10
1.5 Les grecques . . . 10

2 Analyse de l'incertitude paramétrique **12**
2.1 Différentes sources d'incertitude . . . 12
2.1.1 Incertitude structurelle . . . 12
2.1.2 Incertitude numérique . . . 12
2.1.3 Incertitude paramétrique . . . 13
2.2 Représentation de l'incertitude paramétrique . . . 13
2.2.1 Représentation statistique . . . 13
2.2.2 Théorie des ensembles flous . . . 14
2.2.3 Représentation par les fonctions de croyances . . . 15
2.3 Propagation de l'incertitude paramétrique . . . 15
2.3.1 Méthodes de propagation de l'incertitude paramétrique . . . 16
2.4 Value at risk (VaR) . . . 18
2.5 Coefficient d'aplatissement ($Kurtosis$) . . . 19
2.6 Coefficient d'asymétrie ($Skewness$) . . . 20

3 Quantification de l'incertitude paramétrique dans le modèle Black-Scholes-Merton **21**
3.1 Modèle de Black-Scholes-Merton à volatilité incertaine 21
3.2 Simulation du prix d'une option européenne 22
3.2.1 Étapes de simulation 22
3.3 Estimation du prix de l'option européenne sous l'incertitude paramétrique 25
3.3.1 Estimation d uprix de l'option d'achat sous l'incertitude paramétrique 25
3.3.2 Estimation du prix de l'option de vente sous l'incertitude paramétrique 27

Conclusion Générale **29**

TABLE DES FIGURES

1.1 Valeur intrinsèque d'une option d'un *Call* et *Put* 5
1.2 Valeur temps d'une option. 5
1.3 Profit des gains/pertes de l'achat d'un *Call*. 7
1.4 Profit des gains/pertes de l'achat d'un put. 8

2.1 Distribution uniforme 14
2.2 Distribution normale 14
2.3 Value at Risk. 19
2.4 Représentation graphique d'une distribution de probabilité selon le coefficient d'aplatissement. 20

3.1 Graphe de la volatilité générée suivant la loi uniforme. 22
3.2 La variation de prix de l'option d'achat *Call*. 24
3.3 La variation de prix de l'option de vente *Put*. 25
3.4 La variation de prix de l'option d'achat *Call* selon le prix initial S_0. 26
3.5 Histogramme des prix simulés de *Call*. 26
3.6 La variation de prix de l'option de vente *Put* selon le prix initial S_0. 27
3.7 Histogramme des prix simulés de *Put*. 28

INTRODUCTION GÉNÉRALE

La Finance en tant que domaine d'étude se divise essentiellement en deux spécialités : Finance d'entreprise, qui s'intéresse aux choix de financement et d'investissement des entreprises, et la finance des marchés, qui étudie le comportement des marchés financiers, en particulier ce qui détermine les prix des actifs et la façon dont les investisseurs composent et gèrent leur portefeuille d'actifs, la première utilise essentiellement des modèles mathématiques simples, alors que la finance de marché s'appuie sur des modèles mathématiques complexes dans le but de comprendre et de quantifier les phénomènes régissant sur les marchés financiers.

Le premier modèle mathématique en finance est celui de français Louis Bachelier (1900)[2], qui a publié une thèse intitulée "Théorie de la spéculation", où il modélise la marche aléatoire par un « pile ou face » : le mouvement de cours « forme une séquence de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées ». À l'époque, la spéculation a une mauvaise réputation, et la vente à découvert interdite, ce qui explique que les mathématiques financières, qui existent à peine, ne sont pas considérées comme une discipline académique, suite au crache boursier de 1929 qui s'est déroulé à la bourse de New York, depuis, les économistes ont commencé à s'intéresser et à étudier les marchés financiers. Dans les années 30, des travaux de recherche sont menés sur le cours des actions mais aucun aboutissement n'a fait progresser la modélisation. Dans les années 1950, Eugene F.[9] formule l'hypothèse d'efficience des marchés, et Harry Markovitz[21] s'intéresse au risque et élabore la théorie du portefeuille pour minimiser le risque de perte, dans les années 1960, Sharpe W. F.[26] étudie, dans son modèle appelé modèle d'évaluation des actifs financiers, la valeur des actifs.

L'importance des marchés financiers n'a cessé de croître depuis maintenant plus de cinquante ans. Ce phénomène est dû à l'apparition des taux de change flottants et des produits dérivés dans les années 70. En 1973, un nouveau modèle est apparu pour évaluer le prix des options sans connaitre le cours final de l'action à la date d'échéance en utilisant une nouvelle méthode dite : portefeuille de couverture, il s'agit du célèbre modèle black-scholes-merton[4], ce modèle considère que le prix de l'action est un processus stochastique en temps continu, contrairement au modèle binomial (modèle

Cox Ross-Rubinstein) (1979) [6] qui suit un processus stochastique en temps discret, l'apparition de ce modèle a révolutionné le monde de la finance et le fonctionnement des marchés financiers, ce qui a valu à Merton et Scholes le prix Nobel de l'économie en 1997.

Black, Scholes et Merton supposent que les paramètres de leurs modèle sont constants, alors que les paramètres du marché financier sont instables à savoir la volatilité. Ceci explique l'indispensabilité de l'étude de la propagation d'incertitude des paramètres d'entrées à travers le modèle et qui engendre de l'incertitude sur les variables de sorties. Et pour cela, il faut quantifier cette incertitude en utilisant les différentes méthodes de quantification de l'incertitude paramétrique à savoir la méthode : « approche par intervalle ».

L'essentiel de ce travail consiste à quantifier l'incertitude des variables de sorties en se basant sur un nouveau modèle qui prend la volatilité comme paramètre stochastique, en utilisant l'approche par intervalle.

Ce travail est constitué essentiellement de trois chapitres :

Le premier chapitre consiste premièrement, à définir quelques notions en mathématiques financières, ensuite, nous abordons la notion de l'option et les déterminants principaux de sa valeur, enfin, nous présentons le modèle de Black-Scholes-Merton, sa formule pour le calcul de prix des options et les indices de sensibilité de ce dernier.

Le deuxième chapitre est consacré à l'incertitude paramétrique et aux méthodes de propagation de cette incertitude dans un modèle mathématique.

Et dans le dernier chapitre, nous présentons un nouveau modèle basé sur la formule de Black-Scholes-Merton qui prend en considération l'incertitude liée à la volatilité à fin de quantifier l'incertitude dans ce modèle en utilisant l'approche par intervalle.

CHAPITRE 1

INTRODUCTION AUX MATHÉMATIQUES FINANCIÈRES

Jusqu'à la fin des années 60, les produits dérivés sont écrits surtout sur les matières premières et agricoles, En effet, la notion d'option est apparue à la fin des années 1970, suite aux travaux de Black, Scholes et Merton (1973)[4] pour déterminer le prix d'une option. Ces travaux ont révolutionné le monde financière et le fonctionnement des marchés.

Ce chapitre, est consacré à des généralités sur les mathématiques financières, aux options et leurs déterminants, et au modèle de valorisation des options européennes à savoir le modèle de Black-Scholes-Merton.

1.1 Notions élémentaires en mathématique financière

1.1.1 Marché financier

Un marché financier, est un lieu d'échange où en retrouve acheteurs et vendeurs. Cet échange concerne de produits et des instruments financiers. Tel que les prix d'achat et de vente qui sont déterminés en fonction de l'offre et de la demande.[24]

1.1.2 La couverture

C'st une pratique qui consiste a se protéger contre un risque non désiré. C'est-à-dire trouver une stratégie financière basée sur les actifs du marché dont la valeur à chaque date t est égale au *pay*-off de l'option.[27]

1.1.3 Actif financier

C'est un titre ou un contrat transmissible et négociable sur un marché financier qui est susceptible de produire à son détenteur des gains.

1.1.4 Produit dérivé

Un produit dérivé est un actif financier dépendant de la valeur d'autres actifs tel que des actions obligatoires, des indices boursiers. Les produits dérivés se répartissent en trois

catégories : Les swaps, les contrats a terme et les options.[5]

1.1.5 Actifs sous-jacent

C'est l'actif sur lequel porte l'option de vente ou d'achat. L'actif sous-jacent d'un contrat d'option peut être physique (matière première) ou monétaire (devises), ou bien financier (actions obligatoires, indice boursier...).[22]

1.2 Valeur d'une option et ses déterminants

Une option est un produit drivé qui établit un contrat entre l'acheteur et le vendeur. L'acheteur de l'option obtient le droit, et non l'obligation d'acheter ou de vendre une certaine quantité de l'actif sous-jacent à un prix fixé à l'avance pendant un temps donné ou une date fixée.

Il existe deux types d'options : les options d'achat (*call*) et les options de vente (*put*).
- *Call* **:** est un contrat qui donne à son détenteur le droit d'acheter, l'actif sous-jacent à un prix convenue à l'avance pendant une période donnée.
- *Put* **:** est un contrat qui confère à son détenteur le droit de vendre l'actif sous-jacent à un prix fixé d'avance durant une période de temps.

L'acheteur verse une prime au vendeur de l'option pour rémunérer son obligation d'achat ou de vente. Cette somme reste définitivement acquise au vendeur même si l'acheteur décide de ne pas exercer son option.

Il existe deux types d'options qui se distinguent par l'exercice même de contrat :
- **Les options européennes** : l'exercice de l'option n'est possible qu'à la date d'échéance T.
- **Les options américaines** : l'exercice peut se faire durant toute la période $t < T$. Le droit d'acheter ou de vendre expire après la date fixé.

1.2.1 Valeur d'une option

Le prix d'une option varie constamment et elle est le résultat de deux composantes[13] :

$$\textbf{Prime = valeur intrinsèque + valeur temps} .$$

- **Valeur intrinsèque d'une option :**

Dans le cas d'une option d'achat ($Call$), la valeur intrinsèque est la différence entre le cours de sous-jacent et le prix d'exercice :

$$\textbf{Valeur intrinsèque d'un Call = max } \{S_t - k; 0\}.$$

Dans le cas d'une option de vente (Put), la valeur intrinsèque est la différence, si elle est positive, entre le prix d'exercice et le cours du sous-jacent

$$\textbf{Valeur intrinsèque d'un Put = max } \{k - S_t; 0\}.$$

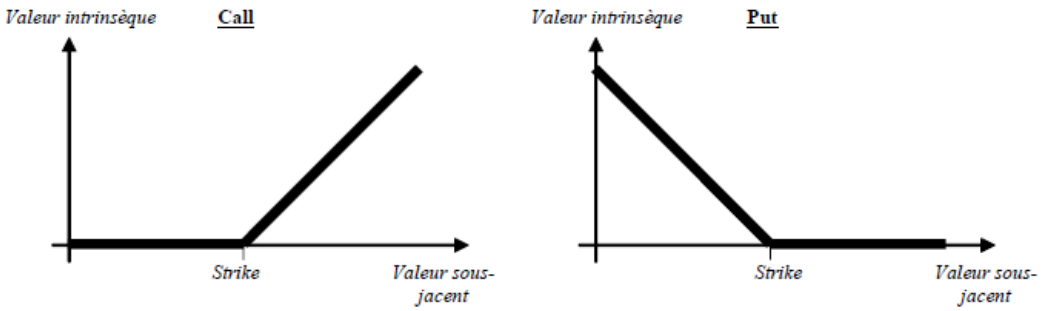

FIGURE 1.1: Valeur intrinsèque d'une option d'un *Call* et *Put*

- **Valeur temps d'une option :**

correspond à la part que représente le temps dans la prime de l'option avant l'échéance de celle-ci. Elle se mesure par la différence entre le prix du marché d'option et sa valeur intrinsèque.

Valeur temps = Prime - Valeur intrinsèque.

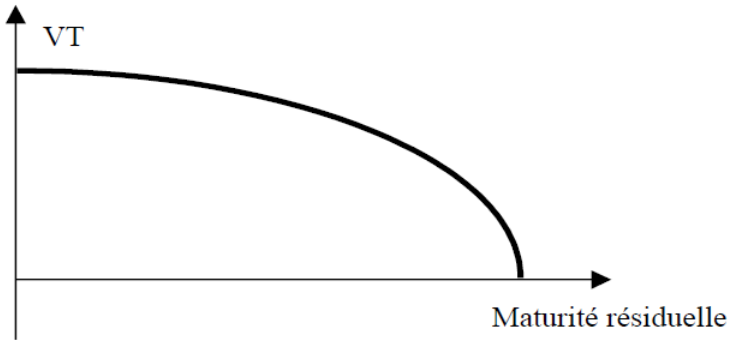

FIGURE 1.2: Valeur temps d'une option.

Elle représente la probabilité que l'option soit exercée avant sa date d'échéance.

1.2.2 Déterminants d'une option

La valeur d'une option dépend du prix de l'actif sous-jacent, le prix d'exercice, le taux d'intérêt sans risque, la date d'échéance et de la volatilité du prix de l'action [19].

Cours du sous-jacent

Le cours du sous-jacent agit directement sur la valeur intrinsèque, en cas d'augmentation dans le cours de l'actif sous-jacent, le call aura plus de valeur et le put en perdra. Inversement, en cas de baisse du cours de l'actif sous-jacent, la valeur du call diminuera et celle de put augmentera.

Prix d'exercice d'une option

Appelé aussi le Strike, c'est le prix auquel le détenteur de l'option peut acheter ou vendre le sous-jacent, il est déterminé lors de la négociation initiale de l'option, et constant jusqu'à la date d'échéance T.

Le prix d'exercice fait varier la dénomination d'une option, elle est dite :
— "À la monnaie" si le prix d'exercice est égal au prix du sous-jacent (ATM) (At the money) ;
— "Hors de la monnaie" si le prix d'exercice est supérieur au prix du sous-jacent (OTM) (Out the money) ;
— "Dans la monnaie" si le prix d'exercice est inférieur au prix du sous-jacent(ITM) (In the money).

Taux d'intérêt

Acheter un call revient à acheter un titre et à le payer plus tard, ainsi plus le taux d'intérêt est élevé et plus le call sera cher. Pour les Puts, le raisonnement est inversé, c'est-à-dire, acheter un put revient à vendre un titre et à encaisser le prix plus tard. Une augmentation du taux d'intérêt conduit donc à des Puts moins chers.

Date d'échéance

L'échéance d'un contrat est la date à partir de laquelle la validité du contrat prend fin. Elle joue un rôle important dans le calcul de la valeur de l'option. En effet, plus la maturité de l'option est lointaine, plus la chance d'anticipation augmente et plus la prime est chère en call qu'en put.

En fonction de la date d'échéance, les options peuvent être classées en options à court terme qui ont des échéances qui sont très rarement supérieurs à 6 mois, et en options à long terme.

Volatilité de l'option

Elle est représentée par l'écart-type annualisé des rendements déterminés à partir des variations relatives à des prix de l'actif sous-jacent. Plus le cours de l'actif est volatile, l'investisseur a de la chance de s'élever au-dessus du prix d'exercice ou d'en descendre au-dessous. Donc plus la volatilité est forte plus l'option est chère.

- **La volatilité historique** : La volatilité historique est calculé à l'aide de l'historique du cours du sous-jacent. La volatilité n'est pas désirable mais son estimation empirique est facile si les rentabilités sont indépendamment et identiquement distribuées. [23]
- **La volatilité implicite** : En connaissant le prix du marché pour une option, il est possible d'obtenir une valeur unique pour la volatilité. Il suffit de trouver la volatilité notée σ_{imp} telle que l'estimation donnée par le modèle de Black-Scholes qui correspond à celle du marché.

1.3 Prix d'option européenne

Soit les notations suivantes :
— K Le prix d'exercice ;
— S_0 la valeur actuelle du prix de sous-jacent.
— r Le taux d'intérêt ;
— T Le temps qui reste à l'option avant son échéance ;
— σ La volatilité du sous-jacent ;

Le prix théorique d'une option d'achat (call) de prix d'exercice K, jusqu'à une date d'échéance T, est caractérisé par son $pay - off$.

$$(S_T - K)^+ = max(S_T - k; 0).$$

Le résultat d'une option européenne d'achat a son échéance est représenté dans le graphe ci-dessus.

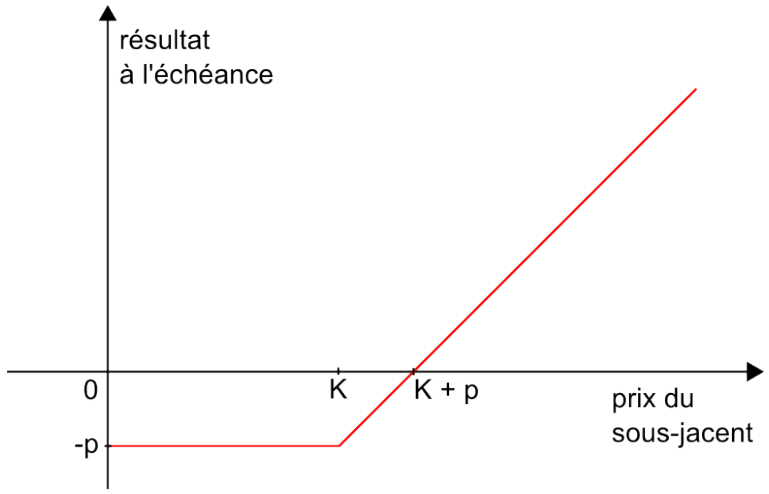

FIGURE 1.3: Profit des gains/pertes de l'achat d'un $Call$.

Le prix théorique d'une option de vente (Put) de prix d'exercice K, jusqu'à une date d'échéance T, est :

$$(S_T - K)^- = max(0; k - S_T).$$

Le résultat d'une option européenne d'achat d'un put a son échéance est représenté dans le graphe ci-dessus.

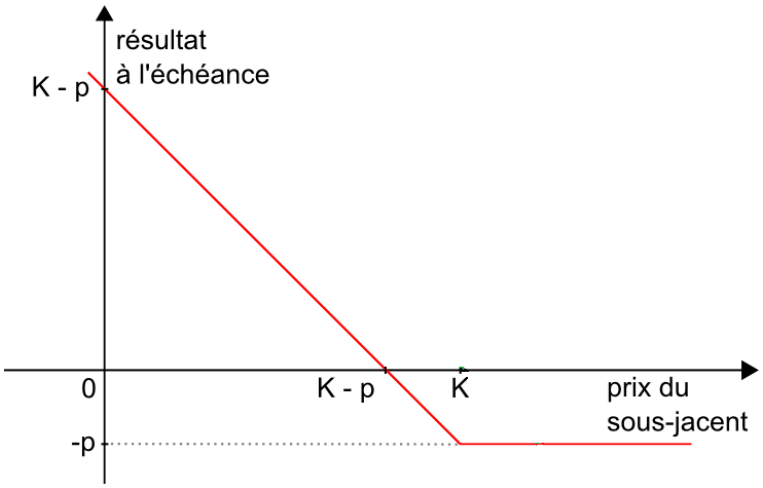

FIGURE 1.4: Profit des gains/pertes de l'achat d'un put.

Remarque :
Le pay-off d'une option est son résultat à l'échéance.c'est-à-dire, le pay-off d'une option est équivalent à sa valeur intrinsèque ce qui signifie pour un call, que son pay-off est égal à la différence entre le prix du sous-jacent et le prix d'exercice et pour un put, au prix d'exercice diminué du prix du sous-jacent.

1.4 Modèle de Black-Scholes-Merton

Les principales hypothèses sur lesquelles repose le modèle de Black-Scholes-Merton sont : [10]

Le marché est supposé :
— Fonctionne en continu ;
— Liquide ;
— Viable (pas d'opportunité d'arbitrage) ;
— Parfait (pas de frais de transactions, pas de fiscalité).

On suppose qu'il existe un actif sans risque tel que :
— Le taux **r** est constant.

L'actif sous-jacent est supposé :
— Divisible ;
— Ne distribue pas de dividendes ;
— Peut être vendu à découvert ;
— Son cours suit la dynamique :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t. \tag{1.1}$$

Où les coefficients constant μ et σ sont appelés respectivement tendance et volatilité, et W_t est un mouvement brownien modélisant les accroissements relatifs au prix de l'actif.

1.4.1 Formule de Black-Scholes-Merton

Sous les hypothèses précédentes, on peut établir la formule de Black-Scholes-Merton qui permet de calculer la valeur théorique d'une option européenne à partir des cinq données S_0, K, σ, r, T.

Le prix de l'option d'achat ($Call$) est donné par l'espérance sous la probabilité risque neutre du $pay-off$ terminal actualisé.

$$C_T = E[max(S_T - K, 0)e^{-rT}]. \tag{1.2}$$

Soit les formules de Black-Scholes-Merton :

Pour un $Call$:

$$C_T = S_0 N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2). \tag{1.3}$$

Tel que :$N(x)$ correspond à la fonction de répartition de la loi normale permettant de prendre en compte l'évolution aléatoire des cours future du sous-jacent.

$$N(d_1) = \int_{-\infty}^{d_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx. \tag{1.4}$$

tel que :

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + \left[r + \frac{\sigma^2}{2}\right]T}{\sigma\sqrt{T}}. \tag{1.5}$$

Et

$$d_2 = \frac{\ln(S_0/K) + \left[r - \frac{\sigma^2}{2}\right]T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}. \tag{1.6}$$

Pour un Put :

Le prix d'une option de vente (put) de $pay-off$:

$$P_T = E[max(k - S_T, 0)e^{-rT}]. \tag{1.7}$$

est :

$$P_T = Ke^{-rT} N(d_2) - S_0 N(d_1). \tag{1.8}$$

1.4.2 Modèles stochastique

Il existe de nombreux travaux où on considère que les paramètres de modèle Black-Scholes-Merton sont des processus stochastiques.

Le modèle $Cox - Ingersoll - Ross$ (1985)[7] : il est utilisé pour modéliser l'évolution des taux d'intérêt r court terme.

Le modele $HulletWhite$ (1990) :[17] Ils ont supposé que sous la probabilité risque neutre, l'évolution du taux d'intérêt court r représenté par le processus stochastique.

Le modèle de $Heston$(1993)[16] qui est une généralisation de modèle de Black-Scholes-Merton du fait qu'il suppose la dynamique de volatilité du modèle Black-Scholes-Merton.

le modèle $SABR$ (2002) [14] qui prend directement la volatilité comme paramètre stochastique.

1.5 Les grecques

Les grecques sont des dérivées d'une valeur d'option par rapport à différents paramètres, Ils permettent de quantifier la sensibilité d'une option à ses différents paramètres.[20]

Delta :

Il représente la variation du prix de l'option par rapport a la variation de l'actif sous-jacent pour une option d'achat, le delta varie entre 0 et 1 tandis que, pour une option de vente, il varie entre -1 et 0.

Pour une option d'achat européenne :

$$\Delta = \frac{\partial C_T}{\partial S_0} = N(d_1).$$

Pour une option de vente européenne :

$$\Delta = \frac{\partial P_T}{\partial S_0} = N(d_1) - 1.$$

Gamma :

représente la variabilité du prix de l'option par rapport a celle du prix de l'actif sous-jacent. C'est la dérivée seconde du prix de l'option par rapport au prix sous-Jacent.

$$\Gamma = \frac{\partial^2 C_T}{\partial S_0^2} = \frac{\partial N(d_1)}{\partial S_0} = \frac{N'(d_1)}{S_0 \sigma \sqrt{T}}.$$

Thêta :

exprime la sensibilité de l'option par rapport au temps. La valeur d'une option diminue avec le temps, le résultat est toujours négatif.

Pour un call :

$$\Theta = \frac{\partial C_T}{\partial T} = -\frac{S_0 N'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T}} - rKe^{-rT}N(d_2) < 0.$$

Pour un put :

$$\Theta = \frac{\partial P_T}{\partial T} = -\frac{S_0 N'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T}} + rKe^{-rT}N(-d_2).$$

Rho :

Il mesure la sensibilité par rapport au taux d'intérêt.

Pour un Call :

$$Rho = \frac{\partial C_T}{\partial r} = KTe^{-rT}N(d_2).$$

Pour un Put :

$$Rho = \frac{\partial P_T}{\partial r} = -KTe^{-rT}N-(d_2).$$

Un changement dans le taux d'intérêt va entrainer une variation de la valeur de l'option. Cependant, il y a un impact relativement faible sur la valeur de l'option comparé aux autres dérivées partielles.

Véga :

représente la sensibilité de l'option par rapport à la volatilité du sous-jacent.

$$V_{Call} = V_{Put} = \frac{\partial C_T}{\partial \sigma} = S_0 n(d_1)\sqrt{T}.$$

Véga est une fonction croissante du prix de l'option puisque une augmentation de la volatilité implique une hausse de la probabilité d'exercice.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté le modèle de Black-Scholes-Merton pour l'évaluation des options européennes, ce modèle se base sur un nombre d'hypothèses et de propriétés des variables qui les déterminent.

CHAPITRE 2

ANALYSE DE L'INCERTITUDE PARAMÉTRIQUE

La modélisation des phénomènes repose sur notre capacité à les reproduire en modèles mathématiques. L'objectif de la modélisation mathématique est de pouvoir simuler le comportement du système modélisé. En pratique, ces opérations impliquent souvent des paramètres dont les valeurs ne sont pas parfaitement connues ou la formulation des hypothèses simplificatrices, ce qui traduit le manque de connaissances. En négligeant la variabilité des paramètres du modèle, l'interprétation des résultats pourrait être fausse. Dans ce cas-là, la prise en compte des incertitudes se révèle nécessaire.

2.1 Différentes sources d'incertitude

Ils existent plusieurs classifications de l'incertitude, *Haimes*(2009)[15] qualifie l'incertitude de l'incapacité à connaître le vrai état d'un système. *Ayyub* et *Klir* (2006) [1], ils l'interprètent comme l'incomplétude de la connaissance en général due à des difficultés intrinsèques à acquérir de la connaissance. Les trois grandes classes de classification de l'incertitude sont :

2.1.1 Incertitude structurelle

Cette incertitude surgit au moment du passage du phénomène réel au modèle mathématique. Puisqu'un modèle est une simplification de la réalité [18], En effet, ces modèles mathématiques sont une approximation de la réalité. Cette approximation est basée sur plusieurs hypothèses simplificatrices qui constituent des sources d'incertitude.

2.1.2 Incertitude numérique

Les modèles mathématiques sont souvent décrits par des équations aux dérivées partielles traduisant la variation dans le temps et/ou dans l'espace des échanges. Pour ces modèles, il n'existe généralement pas de solution analytique et nous avons recours à des solutions numériques. Ces solutions contiennent des imprécisions inhérentes à toute simulation numérique. Ces imprécisions sont dues au fait que nous approchons un système

continu par un autre discret. Ces sources d'incertitude ne peuvent être éliminées complètement, mais seulement réduites en utilisant des discrétisations spatiales et temporelles définies à plus petites échelles.

2.1.3 Incertitude paramétrique

Les modèles mathématiques sont une approximation des phénomènes réels, les paramètres de ces modèles présentent souvent des incertitudes liées à l'incapacité de les quantifier avec précision. L'incertitude sur les paramètres d'entrées d'un modèle se propage dans ce dernier et engendre de l'incertitude sur les paramètres de sorties.
On distingue deux types d'incertitude paramétrique : incertitude épistémique et incertitude aléatoire.

L'incertitude épistémique :

L'incertitude épistémique due au manque de données, de connaissances sur les événements ou les processus, et qui limitent notre capacité de modélisation, Cette incertitude peut être réduite en recueillant des informations supplémentaires.

L'incertitude aléatoire :

Provient de la variabilité naturelle des paramètres d'entrée du modèle qui varient dans le temps et l'espace d'une façon incontrôlable. On l'explique parfois par l'incertitude responsable de l'obtention de résultats différents lorsque l'on répète plusieurs fois dans des conditions identiques une expérience.

Il existe dans la pratique de nombreuses causes possibles à l'origine de l'incertitude :[11]

— Le caractère aléatoire de la nature : la nature chaotique et non détectable des processus naturels.
— Échantillonnage non-représentatif (l'échantillon peut ne pas représenter le mesurande défini).
— Valeurs inexactes des constantes et autres paramètres obtenus de sources extérieures.
— Variations entre les observations répétées du mesurande dans des conditions apparemment identiques.

2.2 Représentation de l'incertitude paramétrique

Il est possible de représenter l'incertitude paramétrique à l'aide d'un intervalle décrit par une valeur minimale et maximale, ou bien, en utilisant la variance qui est une mesure de dispersion des données autour d'une moyenne, mais ces deux méthodes ne donnent pas d'information sur la distribution de probabilité des valeurs à l'intérieur de l'intervalle. Les distributions statistiques, ou fonctions de densité de probabilité, sont des représentations plus précises de la dispersion d'une variable. Ensuite, la théorie des ensembles flous, qui est une façon plus élaborée de quantifier l'incertitude à l'instar des distributions statistiques.

2.2.1 Représentation statistique

Les fonctions de densité de probabilité sont un bon moyen pour exprimer l'incertitude de la plupart des paramètres d'un modèle.

1. **Distribution uniforme :** La distribution uniforme est la distribution statistique la plus simple, chaque valeur possible possède une probabilité égale. Elle

sert lorsque l'intervalle de valeurs est connu, le minimum et le maximum étant les paramètres de la distribution, mais que l'on ignore lesquelles sont les plus probables.

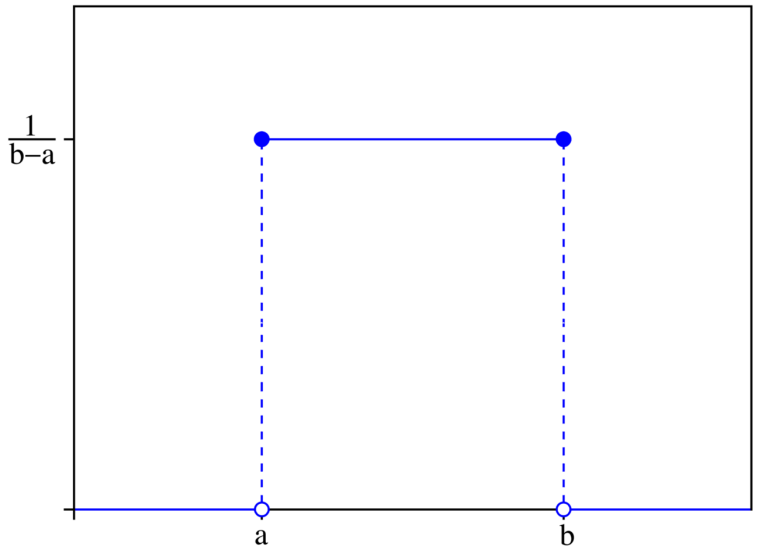

FIGURE 2.1: Distribution uniforme

2. **Distribution normale :** La loi normale est l'une des lois de probabilité les plus adaptées pour modéliser des phénomènes naturels issus de plusieurs événements aléatoires, c'est une loi de probabilité absolument continue qui dépend de deux paramètres : son espérance μ, et son écart type σ. Selon le théorème central limite, la somme d'une infinité de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées est normalement distribuée.

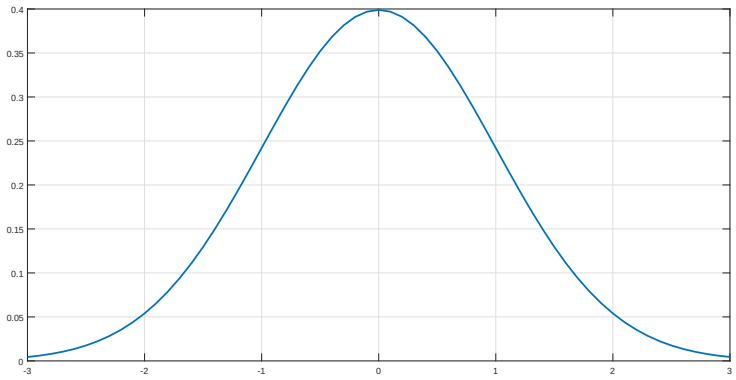

FIGURE 2.2: Distribution normale

2.2.2 Théorie des ensembles flous

Dans la théorie des ensembles classiques, il n'y a que deux situations acceptables pour un élément, appartenir ou ne pas appartenir à un ensemble. Selon la théorie des ensembles flous, la fonction caractéristique d'un ensemble peut aussi prendre des valeurs entre 0 et 1.

Cela signifie qu'un élément peut appartenir à différents degrés à un ensemble, La fonction caractéristique ou distribution de possibilité indique à quel degré les valeurs appartiennent à l'ensemble.
les ensembles flous servent à exprimer l'incertitude des données floues, c'est-à-dire les données dont le réalisme diminue quand la précision augmente. Cette incertitude est ensuite propagée à travers le modèle et donne une distribution du résultat final.

2.2.3 Représentation par les fonctions de croyances

Connu aussi sous le nom de $Dampster - Shafer$, elle a été introduite par $Dampster$ (1967)[8] puis, développée par $Shafer$(1976)[25]. elle permet de représenter une information incomplète en utilisant les fonctions de croyances, qui représentent le degré avec lequel la valeur d'un élément est comprise dans l'ensemble d'information disponible.

La fonction de croyance est une fonction qui, pour une information, on attribue des degrés de croyances.

Soit Ω l'ensemble des possibilités, I l'ensemble des éléments focaux et m la fonction de masse sur Ω [12] tel que($m : P(\Omega) \longrightarrow [0,1]$) définie pour tout sous ensemble $A \subseteq \Omega$ par :

$$\begin{array}{ll} m(A) > 0 & si \;\; A \in I \\ m(A) = 0 & si \;\; A \notin I \end{array}$$
$$\sum_{A \in I} m(A) = 1.$$

La fonction de masse attribue un poids a l'ensemble des éléments focaux pouvant être des ensembles, des intervalles ou des singletons $(Baudrit, 2005)$[3].

La fonction de croyance $Bel(A)$

Évalue à quel point il est certain que l'information disponible implique une appartenance à l'élément focal A[28].

$$Bel(A) = \sum_{B_i \subset A} m(B_i).$$

La fonction de plausibilité $Pl(A)$

Elle évalue à quel point l'information disponible ne contredit pas l'appartenance à l'élément focal A.

$$Pl(A) = \sum_{A \cap B_i} m(B_i).$$

2.3 Propagation de l'incertitude paramétrique

Une fois les différentes sources d'incertitude identifiées et caractérisées, elles doivent être propagées dans le modèle numérique, la propagation des incertitudes consiste à estimer l'incertitude sur la sortie qui est induite par les variables d'entrée incertaines lors de son évaluation par le modèle étudié. Si les paramètres incertains sont représentés par des variables aléatoires ou des champs stochastiques. Nous devons faire appel aux approches probabilistes, avec ces approches, les incertitudes liées aux entrées sont décrites par des distributions de probabilité. L'analyse d'incertitude comporte deux étapes :

1. **La détermination des densités de probabilité des paramètres :**
   Les techniques d'estimation statistique permettent l'estimation des distributions de probabilité à partir des données disponibles ou par le biais d'un échantillon informatif.

2. **La propagation de l'incertitude à travers le modèle :** une fois l'incertitude des paramètres d'entrée est propagée dans le modèle, on doit caractériser la variabilité induite de la sortie du modèle par une densité de probabilité qui est dépendante de la variabilité des paramètres ou de certaines paramètres d'entrées.

2.3.1 Méthodes de propagation de l'incertitude paramétrique

Soit le modèle :

$$Y = f(x).$$

Avec :
— **Y :** variable de sortie de modèle.
— **x :** variable d'entrée.
— **f :** le modèle utilisé.

La méthode de Monte Carlo

Les méthodes de Monte Carlo sont des outils de simulation utilisés dans de nombreux domaines scientifiques tels que la finance, analyse numérique,etc.... ces méthodes visent à évaluer une quantité déterministe en utilisant des procédés aléatoires, c'est-à-dire des techniques probabilistes.

Le principe de base est simple : On affecte d'abord une densité de probabilité à chaque paramètre entrant du modèle sur lequel on effectue une simulation Monte Carlo. Ensuite, on suppose que les paramètres entrants sont indépendants, on détermine au hasard une valeur à chacun selon leur fonction de densité de probabilité, et on obtient ainsi un scénario pour lequel il est possible de calculer le résultat du modèle. On répète la procédure un nombre considérable de fois afin d'obtenir un échantillon assez grand de valeurs sortantes pour estimer la distribution de probabilité du résultat.

Il est possible d'estimer l'espérance et la variance de la sortie Y en utilisant les expressions suivantes :

$$E[Y] \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} f(x_i).$$

$$var[Y] \approx \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (f(x_i) - E(Y))^2.$$

L'inconvénient de cette méthode est qu'elle est très gourmande en temps de calcul car elle nécessite un nombre important d'échantillons pour garantir une estimation précise des statistiques du modèle.

La méthode de surface de réponse

La méthode de surface de réponse cherche à caractériser la relation entre les paramètres incertains d'entrée et la sortie du modèle. L'idée est de décomposer la sortie en composantes déterministes et composantes stochastiques sous la forme :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{N} f_i \psi_i(x).$$

où ψ_i sont des fonctionnelles des variables aléatoires, choisies de manière adéquate, et les f_i sont les coefficients déterministes du développement spectral de la solution. Une fois ce développement en série obtenu, celui-ci peut être directement exploité pour déterminer les statistiques de $f(x)$.

Les inconvénients de cette approche incluent la difficulté à construire une bonne approximation de la surface de réponse en présence de discontinuités et/ou de non-linéarités.

Méthode des moments

Une distribution de probabilité peut être aussi caractérisée par ses moments. L'information apportée par les moments des deux premiers ordres est très utile. Le moment d'ordre 1 donne la moyenne et celui d'ordre 2 donne le moment quadratique.
les deux premiers moments sont définis comme suit :

$$\mu_Y = E[Y] = \int f(x) p_x(x) dx.$$

$$\sigma_Y^2 = E[(f(x) - \mu_Y)^2] = \int (f(x) - \mu_Y)^2 p_x(x) dx.$$

p_x est la fonction de probabilité conjointe correspondant aux distributions des paramètres d'entrée.

Ces deux moments peuvent être évalués à l'aide de la méthode de quadrature ou la méthode de perturbation.

1. **La méthode de quadrature :** la valeur numérique des intégrales est approchée par une somme pondérée prise en un certain nombre de points du domaine d'intégration bien choisis.
2. **La méthode de perturbation :** Elle est basée sur un développement tronqué en série de Taylor de la réponse du modèle au voisinage des valeurs moyennes des paramètres.

Arithmétique par intervalles

L'arithmétique des intervalles est une méthode de calcul consistant à manipuler des intervalles, l'idée est d'une part de garantir les résultats en calculant un intervalle dans lequel se trouve le résultat effectif, d'autre part, on cherche à fournir un encadrement satisfaisant de la solution et à avoir un résultat suffisamment précis. Cette approche permet de borner les erreurs d'arrondi et de développer des méthodes numériques qui fournissent des résultats fiables mais elle ne donne aucune information sur la distribution des résultats.

Le principe fondamental de cette approche est de remplacer tout nombre par un

intervalle qui l'encadre prendre en compte les incertitudes sur certaines valeurs. En utilisant cette approche ; nous pouvons approximer la vraie solution de notre modèle.

Une opération arithmétique d'intervalle produit deux valeurs pour chaque résultat. Les deux valeurs correspondent aux points inférieurs et supérieurs de l'intervalle, tels que le vrai résultat se trouve sur cet intervalle. L'exactitude du résultat est indiquée par la largeur de l'intervalle résultant.

Définition 1 :
Un intervalle, noté par $[X]$ est un ensemble borné et connexe de R, il est défini par :

$$[X] = [\underline{x}, \bar{x}], \text{ tel que } \underline{x}, \bar{x} \in R.$$

$\underline{x}$ et $\bar{x}$ représentent respectivement les bornes inférieures et supérieures de l'intervalle $[X]$.
La largeur d'un intervalle est définit par : $\omega([x]) = |\underline{x} - \bar{x}|$

Opérations sur les intervalles
soient $[X]$ et $[Y]$ deux intervalles, et $\bigcirc$ un opérateur binaire tel que $\bigcirc = \{+, -, *, /\}$.

$$X \bigcirc Y = \{X \bigcirc Y | x \in X, y \in Y\}.$$

$[x] + [y] = [\underline{x} + \underline{y}, \overline{x} + \overline{y}]$.
$[x] - [y] = [\underline{x} - \overline{y}, \overline{x} - \underline{y}]$.
$[x] * [y] = [min(\underline{x}\underline{y}, \underline{x}\overline{y}, \overline{x}\underline{y}, \overline{x}\overline{y}), max(\underline{x}\underline{y}, \underline{x}\overline{y}, \overline{x}\underline{y}, \overline{x}\overline{y})]$.
$[x]/[y] = [min(\frac{\underline{x}}{\underline{y}}, \frac{\underline{x}}{\overline{y}}, \frac{\overline{x}}{\underline{y}}, \frac{\overline{x}}{\overline{y}}), max(\frac{\underline{x}}{\underline{y}}, \frac{\underline{x}}{\overline{y}}, \frac{\overline{x}}{\underline{y}}, \frac{\overline{x}}{\overline{y}})]$.

Exemple :
[0,8] + [4,1] = [4,9]
[1,3] - [2,4] = [-3,1]
[3,5] * [2,7] = [6,35]
[1,8] / [2,6] = [1/6,4]

Définition 2 :
Soit X et Y deux ensembles respectivement définis sur R^m et R^n et f une fonction de R^m dans R^n. L'image Y d'un ensemble X par la fonction f est l'ensemble des images des éléments de X par f :

$$f(X) = \{y \in R^n | \exists x \in X, y = f(x) \ \}.$$

On appelle X le domaine de définition de f et Y son domaine image.

2.4 Value at risk (VaR)

Les modèles de VaR ont été créés au sein de banques d'investissement pour contrôler le risque du marché. Comme ce sont en effet les opérations de trading qui génèrent la majeure partie du risque de marché d'une banque, la VaR est utilisée pour mesurer le risque des positions prises par les gérants de portefeuille. Ces positions changent fréquemment et peuvent être libérées rapidement. Par conséquent, les banques évaluent leur risque de

marché pour des horizons courts.

De façon générale, la VaR est définie comme la perte maximale potentielle qui ne devrait pas être atteint qu'a une probabilité donnée sur une période de temps. En pratique, la VaR est estimée pour une journée ou quelques jours.

$$P(r < VaR) = 1 - \alpha.$$

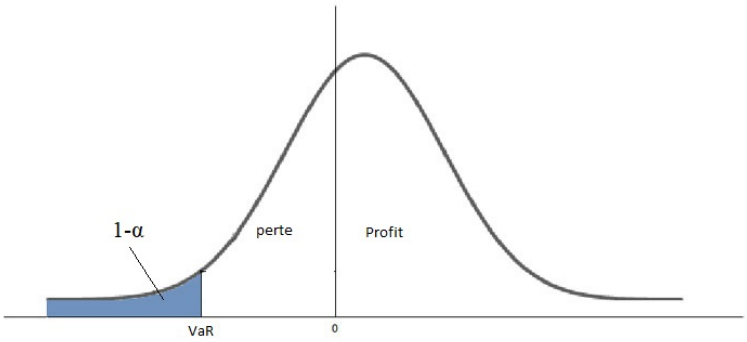

FIGURE 2.3: Value at Risk.

La VaR d'un portefeuille dépend de trois données essentielles :

— **La distribution des valeurs de portefeuille :** généralement, cette distribution est supposée normale ; mais elle peut suivre différentes lois de probabilités.

— **Le niveau de confiance α :** qui est un paramètre entre 0 et 1(généralement on le prend à 95% ou 99%). Il permet de contrôler la probabilité qu'on obtient un rendement supérieur ou égale à la VaR.

— **L'horizon de temps t :** représente la durée considérée, il est très important car plus l'horizon est long, plus les pertes peuvent être importantes.

2.5 Coefficient d'aplatissement ($Kurtosis$)

Le coefficient d'aplatissement ($Kurtosis$) d'une variable aléatoire mesure l'étalement de la distribution, la forme de la courbe de distribution est comparée à celle de la loi normale. Un coefficient négatif est révélateur d'une courbe aplatie, tandis qu'un coefficient positif signalera une concentration des observations.

Le Kurtosis est le moment d'ordre 4 de la variable centrée réduite, pour un variable aléatoire X d'espérance μ est de l'écart type σ, le kurtosis est donné par :

$$Kurtosis = E\left[\left(\frac{(X-\mu)}{\sigma}\right)^4\right]. \tag{2.1}$$

si :

— **Kurtosis<3 :** La distribution est dite *platicurtique*.

— **Kurtosis=3 :** La distribution est dite *mesocurtique*.

— **Kurtosis>3 :** La distribution est dite *leptocurtique*.

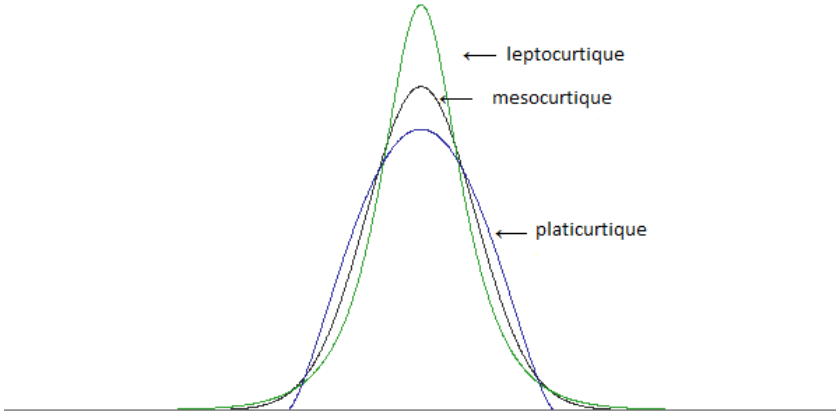

FIGURE 2.4: Représentation graphique d'une distribution de probabilité selon le coefficient d'aplatissement.

2.6 Coefficient d'asymétrie (*Skewness*)

le coefficient d'asymétrie mesure l'écart de la distribution par rapport à la symétrie, si ce coefficient est différent de 0, alors la distribution est dite asymétrique.

- Si "**Skewness>0** : la distribution est asymétrique à gauche, d'ou on peut constaté que la moyenne est supérieure à la médiane.
- Si "**Skewness=0** : la distribution est symétrique, et la moyenne est égale à la médiane.
- Si "**Skewness<0** : la distribution est asymétrique à droite, d'ou on peut constaté que la moyenne est inférieure à la médiane.

Définition

Soit X une variable aléatoire d'espérance μ et d'écart-type σ, le coefficient d'asymétrie est de X est égal au moment d'ordre 3, il est défini par :

$$Skewness = \frac{E[X - E(X)^3]}{var(X)^{\frac{3}{2}}} = E\left[\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^3\right]. \tag{2.2}$$

Conclusion

Dans ce chapitre, on a commencé par montrer les différentes sources d'incertitude dans n'importe quel modèle mathématique. Ensuite, on a défini quelques atouts utilisés pour la représentation de l'incertitude paramétrique. Et dans la dernière partie, on s'est intéressé aux méthodes de propagation de l'incertitude, à savoir celle de l'arithmétique des intervalles, avec laquelle nous allons étudier et estimer l'incertitude des paramètres de sortie du modèle de Black-Scholes-Merton dans le prochain chapitre.

CHAPITRE 3

QUANTIFICATION DE L'INCERTITUDE PARAMÉTRIQUE DANS LE MODÈLE BLACK-SCHOLES-MERTON

Dans ce chapitre, nous considérons l'incertitude épistémique du modèle Black-Scholes-Merton, où nous allons étudier le fait qu'on suppose que la volatilité intervenant dans le modèle est une variable aléatoire, et cela, afin de modéliser l'incertitude imposée sur la détermination de ce paramètre.

3.1 Modèle de Black-Scholes-Merton à volatilité incertaine

On a vu dans les chapitres précédents que la formule de Black-Scholes-Merton dépend de cinq paramètres, à savoir :

— Le prix de sous-jacent S_0.
— Le prix d'exercice K.
— La date d'échéance T.

Ces trois paramètres sont définis directement, par contre, les deux autres paramètres :

— Le taux d'intérêt r.
— La volatilité σ

Appelé paramètres exogènes, sont plus délicats à définir vu qu'ils ne sont pas directement observables. Nous nous intéressons à la volatilité qui est d'une importance cruciale pour valoriser le prix d'une option.

Pour représenter cette incertitude dans ce paramètre, nous supposons que la volatilité suit une loi uniforme sur l'intervalle $[a, b]$.

$$\sigma \sim \mathcal{U}[a, b].$$

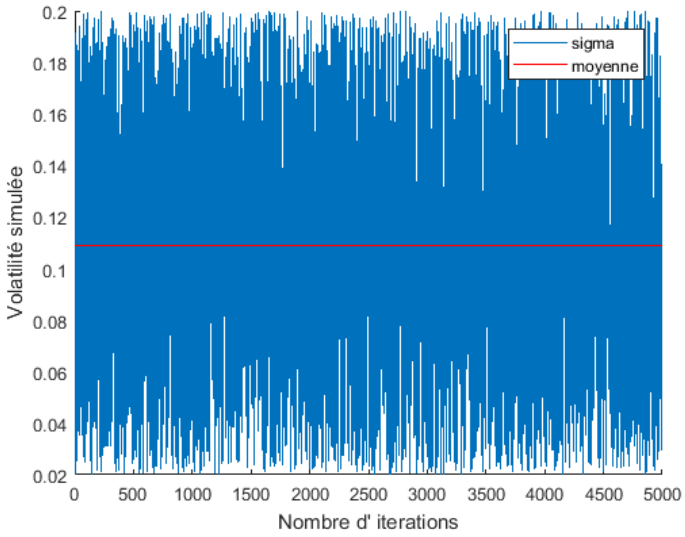

FIGURE 3.1: Graphe de la volatilité générée suivant la loi uniforme.

En supposant que la volatilité σ est une variable stochastique, les nouvelles formules de Black-Scholes-Merton pour le calcul de prix de *Call* et de *put* sont :

— **Pour une option d'achat européenne (*Call*)** :

$$C_T(i) = S_0 N(d_1(i)) - K e^{-rT} N(d_2(i)) \quad i = \overline{1,n}. \tag{3.1}$$

— **Pour une option de vente européenne (*Put*)** :

$$P_T(i) = K e^{-rT} N(d_2(i)) - S_0 N(d_1(i)) \quad i = \overline{1,n}. \tag{3.2}$$

$$d_1(i) = \frac{\ln(S_0/K) + \left[r + \frac{\sigma(i)^2}{2}\right] T}{\sigma(i)\sqrt{T}} \quad i = \overline{1,n}. \tag{3.3}$$

$$d_2(i) = \frac{\ln(S_0/K) + \left[r - \frac{\sigma(i)^2}{2}\right] T}{\sigma(i)\sqrt{T}} = d_1 - \sigma(i)\sqrt{T} \quad i = \overline{1,n}. \tag{3.4}$$

Avec

$$\sigma(i) \in \mathcal{U}[0,1] \quad i = \overline{1,n}.$$

3.2 Simulation du prix d'une option européenne

3.2.1 Étapes de simulation

1) Entrées :
   - S_0 : Prix initial de sous-jacent.
   - K : Prix d'exercice.

- T : Date d'échéance.
- r : Le taux d'intérêt sans risque.
- N : Nombre d'échantillon à simuler.
- a : Borne inf.
- b : Borne sup.

2) Procédure de simulation :
   2.1) Boucle avec N itérations :
      2.1.1) Génération de N variables aléatoires suivant la loi uniforme : $\sigma \sim U[a, b]$.
      2.1.2) Calcul de d_1, d_2 , C_T et P_T par les formules (3.3), (3.4), (3.1) et (3.2) respectivement.
   2.2) Calcul du coefficient d'aplatissement par la formule (2.1).
   2.2) Calcul du coefficient d'asymétrie par la formule (2.2).
   2.3) Calcul de 0,05 quantiles.
4) Sorties :
   — La Moyenne et la variance des prix d'options simulés.
   — Coefficient d'aplatissement.
   — coefficient d'asymétrie.
   — Quantiles 0.05.

Algorithme 1 : Simulation

début
  Entrées(S_0, K, T, r, N, a, b).
  Pour i **allons de 1 à** N **faire**
  début
    $\sigma \sim \mathcal{U}[a, b]$.
    Calcul de σ. Calcul de $d1$ et $d2$.
    Calcul de C_T .
    Calcul de P_T .
  fin
  Calcul de la moyenne empirique.
  Calcul de la variance empirique.
  Calcul de coefficient d'aplatissement.
  Calcul de coefficient d'asymétrie
  Calcul de 0,05 quantiles.
fin

L'implémentation de l'algorithme précédent sous l'environnement **Matlab R2017a** nous a permis d'obtenir les résultats représentés dans les figures suivantes :

Cas d'une option d'achat européenne $Call$ **:**

Les paramètres d'entrée considérés sont : $S_0 = 80$, $K = 95$, $T = 1$, $r = 0.03$, $N = 5000$,$a = 0.02$ et $b = 0.2$.

[min,max]	moyenne	médiane	écart-type	0.05-quantile	Kurtosis	Skewnes
$[0, 2.4078]$	0.7100	0.4136	0.7511	0	2.2034	0.7600

TABLE 3.1: Quantification de l'option d'achat *Call*.

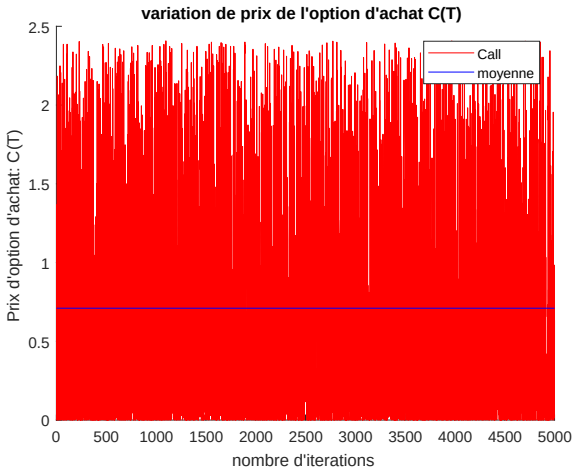

FIGURE 3.2: La variation de prix de l'option d'achat *Call*.

Cas d'une option de vente européenne Put **:**

Les paramètres d'entrée considérés sont : $S_0 = 90$, $K = 75$, $T = 1$, $r = 0.03$, $N = 5000$,$a = 0.02$ et $b = 0.2$.

[min,max]	moyenne	médiane	écart-type	0.05-quantile	Kurtosis	Skewness
$[0, 1.1930]$	0.2750	0.0824	0.3512	0	2.9287	1.1210

TABLE 3.2: Quantification de l'option de vente *Put*.

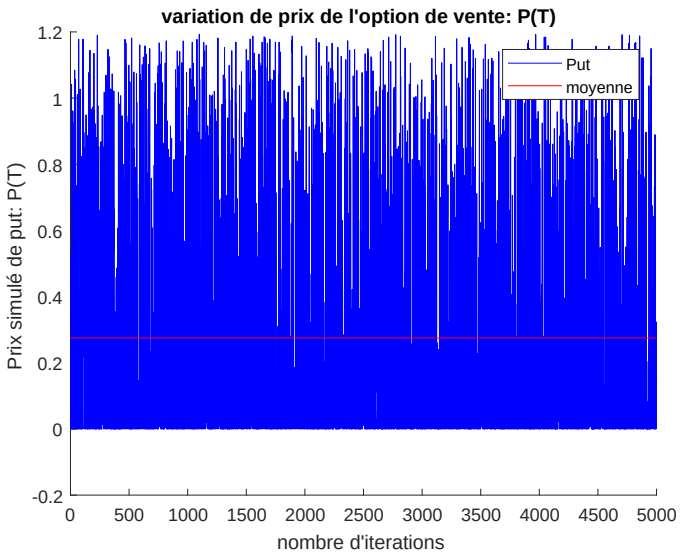

FIGURE 3.3: La variation de prix de l'option de vente *Put*.

3.3 Estimation du prix de l'option européenne sous l'incertitude paramétrique

Dans cette section, nous calculerons le prix d'une option européenne sous l'incertitude de la volatilité σ, nous allons varier le prix initial du sous-jacent(S_0) et fixer les autres paramètres.

3.3.1 Estimation d uprix de l'option d'achat sous l'incertitude paramétrique

Les paramètres d'entrée considérés sont : $S_0 = [80 : 2 : 90]$, $K = 95$, $T = 1$, $r = 0.03$, $N = 5000$, $a = 0.02$ et $b = 0.2$.

Les résultats de calcul de prix de l'option d'achat européenne ($Call$) sont illustrés dans le tableau 3.3.

S_0	$[C_{tmin}, C_{tmax}]$	moyenne	médiane	écart-type	0.05-quantile	Kurtosis	Skewnes
80	$[0, 2.4078]$	0.7100	0.4136	0.7511	0	2.2034	0.7600
82	$[0, 2.9921]$	0.9682	0.6682	0.9451	0	2.0125	0.6236
84	$[0, 3.6628]$	1.3030	1.0286	1.1628	0.0004	1.8665	0.4841
86	$[0.0001, 4.4223]$	1.7343	1.5156	1.3961	0.0065	1.7717	0.3413
88	$[0.0063, 5.2716]$	2.2881	2.1464	1.6272	0.0570	1.7357	0.2013
90	$[0.1028, 6.2108]$	2.9998	2.9327	1.8205	0.2931	1.7552	0.0805

TABLE 3.3: Quantification de l'option d'achat *Call*.

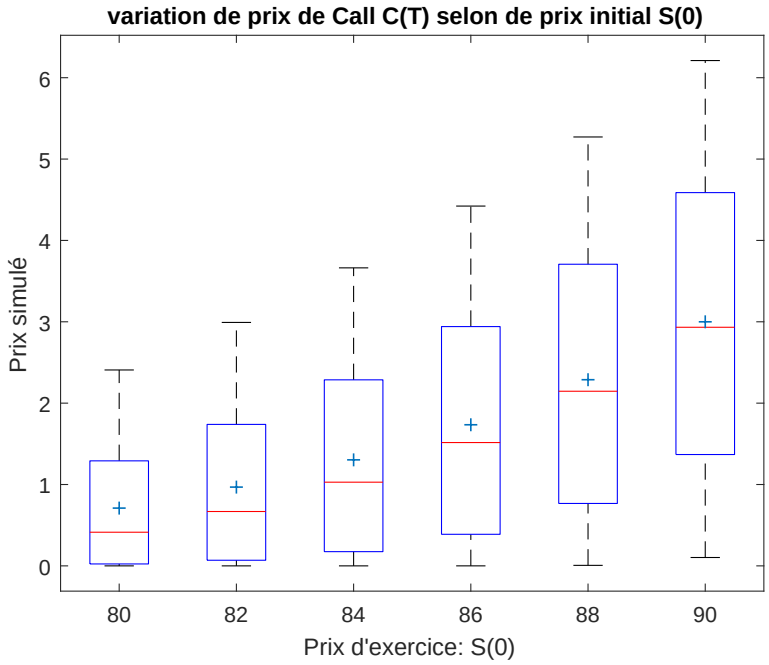

FIGURE 3.4: La variation de prix de l'option d'achat *Call* selon le prix initial S_0.

La figure 3.4 représente les boites à moustache des prix de *Call* simulés, cette figure nous permet d'avoir une vue globale sur les variations de ces prix. On remarque que la surface des ces boites à moustache associées aux différents prix initiaux S_0 sont différentes, et on remarque aussi que les valeurs de chaque boite à moustache augmentent à chaque fois que le prix initial augmente.

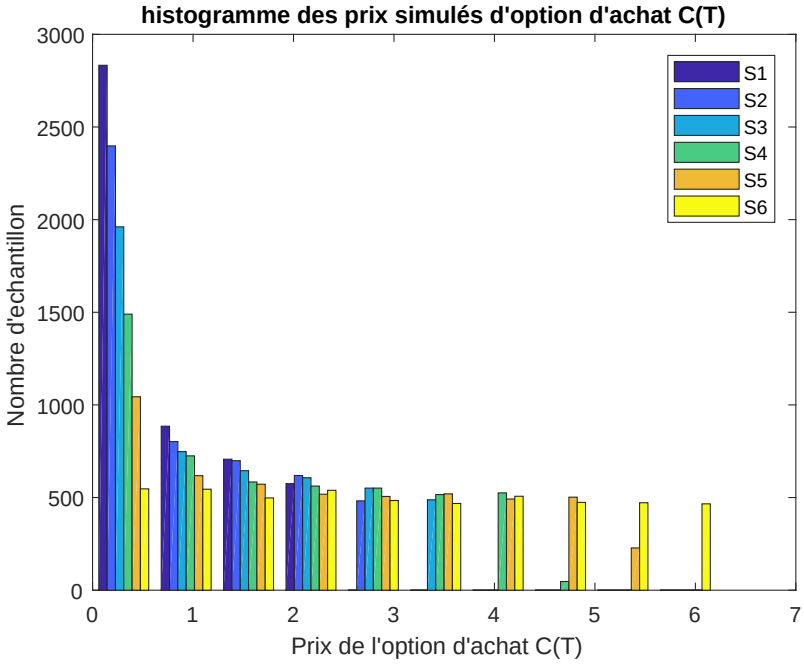

FIGURE 3.5: Histogramme des prix simulés de *Call*.

3.3.2 Estimation du prix de l'option de vente sous l'incertitude paramétrique

Les paramètres d'entrée considérés sont : $S_0 = [90 : -2 : 80]$, $K = 75$, $T = 1$, $r = 0.03$, $N = 5000$, $a = 0.02$ et $b = 0.2$.

Les résultats de calcul de prix de l'option de vente européenne (Put) sont illustrés dans le tableau 3.4.

S_0	$[P_{tmin}, P_{tmax}]$	moyenne	médiane	écart-type	0.05-quantile	Kurtosis	Skewnes
90	$[0, 1.1930]$	0.2810	0.0824	0.3512	0	2.9287	1.1210
88	$[0, 1.4622]$	0.3720	0.1387	0.4395	0	2.6715	1.0096
86	$[0, 1.7836]$	0.4921	0.2280	0.5466	0	2.4327	0.8923
84	$[0, 2.1650]$	0.6507	0.3657	0.6746	10^{-7}	2.2160	0.7680
82	$[0, 2.6145]$	0.8604	0.5717	0.8250	$7.8 * 10^{-6}$	2.0270	0.6353
80	$[0, 3.14.3]$	1.1381	0.8701	0.9968	$2.836 * 10^{-4}$	1.8741	0.4929

TABLE 3.4: Quantification de l'option de vente Put.

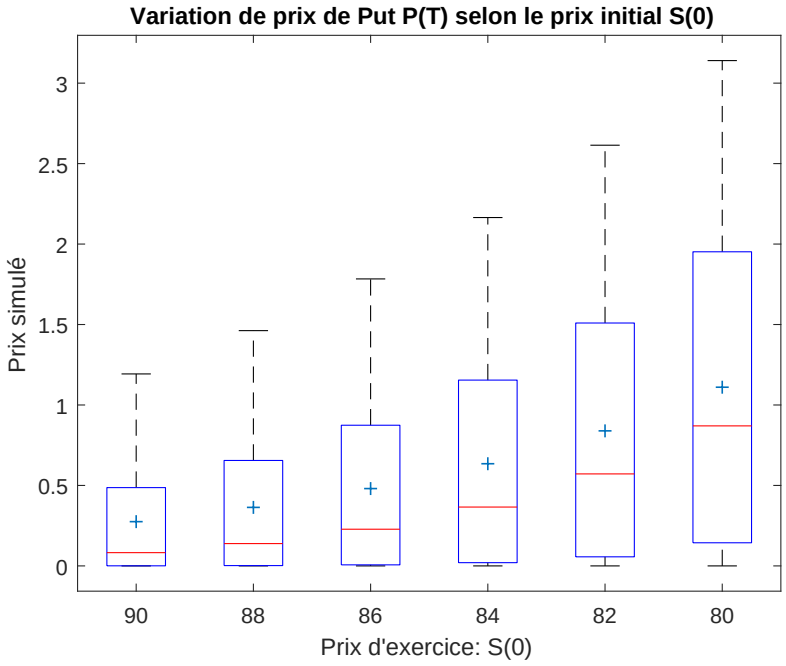

FIGURE 3.6: La variation de prix de l'option de vente Put selon le prix initial S_0.

La figure 3.6 représente les boites à moustache des prix de Put simulés, d'après cette figure, on remarque que La surface des ses boites à moustache associées aux différents prix initiaux S_0 sont différents, et on remarque aussi que les valeurs de chaque boite à moustache diminuent à chaque fois que le prix initial augmente.

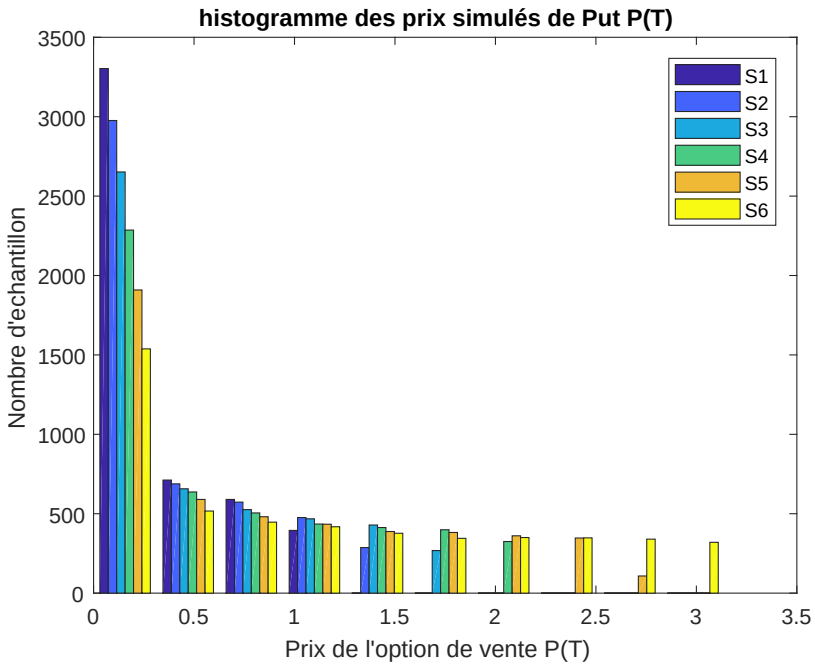

FIGURE 3.7: Histogramme des prix simulés de Put.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Le modèle de Black-Scholes-Merton est un modèle mathématique utilisé pour le calcul des prix des options européennes, ce modèle est basé sur plusieurs paramètres qui le déterminent. L'inconvénient de ce modèle est lié à ses hypothèses, notamment à la volatilité qui est considéré comme un paramètre constant, ce qui semble peu réaliste. Ce mémoire est consacré à l'analyse de l'incertitude paramétrique de modèle cité précédemment, et cela en utilisant l'arithmétique des intervalles, c'est pourquoi un nouveau modèle a été élaborer en se basant sur les formules de Black-Scholes-Merton, tout en considérant que la volatilité comme une variable aléatoire. L'approche qu'on a utilisé dans cette étude nous a permet de quantifier le prix d'une option, et de l'encadrer dans un intervalle avec certitude.

Dans le premier chapitre, nous avons définit quelques notions en mathématiques financières. puis, nous avons donné la description détaillé du modèle de Black-Scholes-Merton pour le calcul de prix théorique des options européennes avec ses hypothèses et ses indices de sensibilité.

Le deuxième chapitre est consacré à l'incertitude paramétrique et aux méthodes de propagation de cette incertitude dans un modèle mathématique.

Et dans le dernier chapitre, nous nous sommes intéressés a analyser le nouveau modèle en considérant la volatilité comme paramètre aléatoire, et cela afin de quantifier l'incertitude paramétrique dans ce modèle en utilisant l'arithmétique des intervalles. A travers cette quantification des résultats obtenus, nous avons pu obtenir un intervalle de prix dans lequel se trouve le prix effectif.

De nombreuses perspectives se dégagent de ce travail :

— Analyse de sensibilité du même modèle tout en considérant d'autres lois de modélisation.

— analyse de l'incertitude paramétrique du même modèle par application des autres approches statistiques.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Ayyub, B.M. et Klir, G.J. (2006), Uncertainty modeling and analysis in engineering and the sciences, CRC Press

[2] BACHELIER. L. (1900),Théorie de la spéculation. Paris 1-Panthéon-Sorbonne. Editions Jacques Gabay.

[3] Baudrit, C. (2005). Représentation et propagation de connaissances imprécises et incertaines : Application à l'évaluation des risques liés aux sites et sols pollués. Université de Toulouse III, 30-32.

[4] Black. F and Scholes. M. (1973). The princing of option and corporate liabilities. Journal of Political Economy, 81 : 36–72.

[5] Chorro, C. Introduction à la théorie des options fiancières.Rapport Technique, Ecole Supérieure de Commerce de Reims, France, 2008.

[6] Cox. J. C. Ross. A. S. Rubinstein. M.(1979). Option pricing : a simplified approch. Journal of Financial Economics 7. North-Holland Publishing Company. 229-263.

[7] Cox. J. Ingersoll et Ross S.A.(1985). A Theory of the Term Structure of Interest Rates, Econometrica, 53, 385–407,

[8] Dempster, A.P. (1967). Upper and lower probabilities induced by a multivalued mapping. Annals of Mathematical Statistics. 38, 325-339.

[9] Eugene. F,(1969) Efficient Capital Markets : a Review of Theory and Empirical Works.Journal of Finance, volume 25. Papers and Proceeding of the Twenty-English Annual Meeting of the Americain Finance Association New York. 383-417

[10] El Karoui. N. et Gobet. E.(2011). Les outils stochastiques des marchés financiers : une visite guidée de Einstein a Black-Scholes. École Polytechnique. 2011.

[11] FAJRAOUI. N.(2014). Analyse de Sensibilité Globale et Polynômes de Chaos pour l'Estimation des Paramètres : Application aux Transferts en Milieu Poreux, thèse, UNIVERSITE DE STRASBOURG.

[12] Ferson. S. Ginzburg, L. Kreinovich. V. Myers. D.M. Sentz. K. (2003). Construction probability boxes and Dempster-Shafer structures. Sandia National Laboratories, Technical report SANDD2002-4015.

[13] Giordan, P. Options et volatilité. Rapport Technique, Paris Dauphine, 2013.

[14] Hagan, P.S. Kumar. D. Lesniewski. A.S. Woodward, D.E. (2002). Managing smile risk, Nomura Securities International, 2 World Financial Center, Bldg B ; New York NY 10281. 8-19.

[15] Haimes. Y. (2009). Risk Modeling, Assessment, and Management. John Wiley and Sons.

[16] Heston. S.L. (1993). A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. Review of Financial Studies. Vol.6, No 2, pp. 327-343.

[17] Hull. J et White. A,(1990).The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities, Journal of Finance, 24, 281-300.

[18] Imbeault-Tétreault H.(2010). Propagation Analytique de l'Incertitude a Travers le Calcul Matriciel d'une Analyse du Cycle de Vie , Thèse, École Polytechnique de Montréal.

[19] Jerbi. Y. (2006). Évaluation des options et gestion des risques financiers par les réseaux de neurones et par les modèles a volatilité stochastique, Phd thesis, Paris 1-Panthéon-Sorbonne.

[20] Kane. K.(2006). Méthodes Monté Carlo pour l'évaluation des paramètres de sensibilité des valeurs d'options sur plusieurs actifs sous-jacent. Thèse. Université de Montréal.

[21] MARKOWITZ. H.(1990). Foundations of Portfolio Theory. Baruch College, The City University of New York, New York, USA.

[22] Mishkin, F. Monnaie, Banque et Marchés Financiers, Pearson France, Montreuil, 10 édition. 2007.

[23] Patard. N.(1999). Étude de l'efficacité de la volatilité implicite comme estimateur de la volatilité future et stratégie transactionnelles fondées sur le retour vers la moyenne de la volatilité implicite. École Des Hautes Études Commerciales Affiliée à l'Université de Montreal.

[24]

Priolon, J. Les marchés financiers. Rapport Technique. AgroParisTech, Paris, 2012.

[25] Shafer. G. (1976). A Mathematical Theory of Evidence, Princeton University Press, Princeton.

[26] Sharpe, W F.(1963), A Simplified Model for Portfolio Analysis," Management Science. 277-293.

[27] Warlop, R. Modèle de Black-Scholes. Rapport Technique. Ecole Normale Supérieure de Cachan, Cachan, 2011.

[28] Zadeh. L, (1986) A simple view of the Dempster-Shafer framework and its implication for the rule of combination. AI Magazine, 7 :85–90.

Résumé

Ce mémoire est consacré à l'analyse de l'incertitude paramétrique dans le célèbre modèle de Black-Scholes-Merton pour l'évaluation de prix des options européennes. L'arithmétique des intervalles nous a permet de propager l'incertitude de la volatilité à travers le modèle étudié, et de quantifier sa valeur et d'estimer sa moyenne, sa variance et sa fonction de densité de probabilité.

Mots-clés : Options européennes, Black-Scholes-Merton, Voaltilité, arithmétique des intervalles.

Abstract

This thesis is devoted to the analysis of parametric uncertainty in the well-known Black-Scholes-Merton model for pricing European options. The arithmetic of the intervals allowed us to propagate the uncertainty of the volatility through the studied model, and to quantify its value and to estimate its mean, its variance and its function of density of probability.

Keywords : European option, Black-Scholes-Merton,volatility, arithmetic of the intervals.