

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABDERRAHMANE MIRA BEJAIA
FACULTÉ DE TECHNOLOGIE
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE

MEMOIRE

PRÉSENTÉ POUR L'OBTENTION DU DIPLÔME DE

MASTER

FILIÈRE : GÉNIE MÉCANIQUE

SPÉCIALITÉ : ENERGÉTIQUE

PAR :

BAHLOUL REDHOUANE

Thème

Etude d'un écoulement turbulent entre deux cylindres coaxiaux en rotation

Soutenu le 01/07/2018 devant le jury composé de:

Mr. A.Djema

Président

Mr. F.Nait Bouda

Rapporteur

Mr. M.Allouche

Examineur

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2017-2018

Remerciements

Mes premiers remerciements s'adressent à DIEU, qui m'a donné la volonté, la santé et le courage d'accomplir ce Modeste travail.

J'exprime mes vifs remerciements :

À mes parents pour leur contribution pour chaque travail que j'ai effectué.

*À mon promoteur **Mr F. Nait Bouda** pour le grand honneur qu'il m'a fait d'accepter l'encadrement de ce travail. Sa compétence, son encadrement ont toujours suscité mon profond respect. Je vous remercie pour votre accueil et vos conseils. Veuillez trouver ici, l'expression de mes gratitudes et de ma grande estime.*

Aux membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre recherche en acceptant d'examiner mon travail et de l'enrichir par leurs propositions.

À l'ensemble des enseignants du département de Génie Mécanique. Sans oublier ceux qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

*Et mes remerciements les plus dévoués à : **Mr R. Cherfi** et **Mr A.***

***Oubelaid**, pour leur aide qu'ils m'ont fournie.*

Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

À mon exemple éternel, mon soutien moral et source de joie et de bonheur, celui qui s'est toujours sacrifié pour me voir réussir, à toi mon père.

À la lumière de mes jours, la source de mes efforts, la flamme de mon cœur, ma vie et mon bonheur ; maman que j'adore.

À mes sœurs à qui je leur souhaite un avenir radieux plein de réussite.

À celui qui a été ma source d'inspiration, mon cher cousin Bahloul Ahmed.

À mes chères cousines Lala et Chouchou .

À la femme de ma vie après ma mère qui est jusqu'à présent inconnue.

Aux personnes dont j'ai bien aimé la présence dans ce jour, qui m'ont toujours aidé et encouragé, qui étaient toujours à mes côtés. Frères de cœur.

À Monsieur Sadaoui.

À toute ma famille sans aucune exception.

Table de matière

Nomenclature	i
Liste des figures	iii
Liste des tableaux.....	v

Introduction générale	1
------------------------------------	---

Chapitre I : Généralités et étude bibliographique

I.1 Introduction.....	3
I.2 Ecoulement turbulent.....	3
I.2.1 Propriétés essentielles de l'écoulement turbulent.....	3
I.2.2 Turbulence près des parois.....	4
I.2.3 Lois de paroi.....	4
I.2.4 Turbulence: utile ou nuisible ?.....	4
I.3 Ecoulement rotatif.....	5
I.3.1 Approche expérimentale.....	5
I.3.1.a Ecoulement entre deux cylindre.....	5
I.3.1.b Interprétation du phénomène.....	6
I.3.2 Effets de la rotation sur les écoulements turbulents.....	7
I.3.3 Force centrifuge.....	7
I.3.4 Force de Coriolis.....	8
I.4 Étude bibliographique.....	9

Chapitre II : Position de problème & formulation mathématique.

II.1 Introduction.....	15
II.2 Position du problème	15
II.3 Formulation mathématique du problème.....	15
II.3.1 Hypothèses simplificatrices.....	15

II.3.2 Equations de mouvement instantané.....	16
a) Equation de continuité.....	16
b) Equation de la quantité de mouvement.....	16
b.1) Equation de quantité de mouvement radiale.....	16
b.2) Equation de quantité de mouvement azimutale.....	16
II.3.3 Conditions aux limites.....	16
II.4 Equations moyennées.....	17
a) Equation de continuité.....	17
b) Equation de quantité de mouvement radiale.....	17
c) Equation de quantité de mouvement azimutale.....	17
d) Equation d'énergie cinétique turbulente.....	18
e) Equation du taux de dissipation d'énergie cinétique turbulente.....	18
II.5 Discrétisation des équations modèles.....	19
II.6 Conclusion.....	21

Chapitre III : Résultats et discussions.

III.1 Introduction.....	22
III.2 Propriétés physiques.....	22
III.3 Choix du maillage.....	22
III.4 Test de validation.....	23
III.5 Différents cas étudiés	23
III.5.1: 1 ^{er} cas : le disque intérieur en rotation et le disque extérieur est immobile	24
III.5.2: 2 ^{ème} cas : le disque extérieur en rotation et le disque intérieur est immobile.....	25
III.5.3: 3 ^{ème} cas: les deux cylindres sont en rotation dans le même sens à des vitesses différentes.....	26
III.5.4: 4 ^{ème} cas: les deux cylindres sont en mouvement contrarotatif à des vitesses différentes.....	27

III.5.5: 5 ^{ème} cas les deux cylindres sont en mouvement contrarotatif à des vitesses égales.....	28
III.6 : Conclusion.....	30
Conclusion générale	31
ANNEXE A : Outils pour la modélisation et modèles de turbulence.....	32
ANNEXE B : Procédure numérique.....	41
Références bibliographiques	

Nomenclature

A_{co}	Accélération de Coriolis ($m.s^{-2}$)
$C_{\varepsilon 1}, C_{\varepsilon 2}, C_{\mu}$	Constantes empiriques
F_{ce}	Force centrifuge (N)
f_{co}	Force de Coriolis (N)
f'	Une fluctuation
K	L'énergie cinétique de turbulence ($m^2.s^{-2}$)
L	L'échelle typique de longueur des grosses structures de la turbulence
m	Masse (kg)
P	Pression (Pa)
R	Rayon extérieur (intérieur) (m)
r	Coordonnée radial (m)
v	Vitesse linéaire ($m.s^{-1}$)
\vec{v}	La vitesse relative du corps par rapport au référentiel en mouvement ($m.s^{-1}$)
y^+	Distance Adimensionnelle

Symboles grecques

α	Coefficient de diffusion
Γ	Rapport de forme
ε	Taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente ($m^2.s^{-3}$)
θ	Coordonnée azimutal (rad)
μ	Viscosité dynamique ($kg.m^{-1}.s^{-1}$)
μ_t	Viscosité dynamique turbulente ($kg.m^{-1}.s^{-1}$)
ν	Viscosité cinématique ($m^2.s^{-1}$)
ν_t	Viscosité cinématique turbulente ($m^2.s^{-1}$)
Ω	Vitesse angulaire ($rad.s^{-1}$)
$\tau_{r\theta}$	Contrainte tangentielle de viscosité
ρ	Masse volumique ($kg.m^{-3}$)

Nomenclature

δ_{ij}	Symbole de Kroneker
ω	Rapport de vitesse

Indices

r	Radial
θ	Azimutal
e	Extérieur
i	Intérieur

Exposant

—	Moyen
---	-------

LISTE DES FIGURES

Figure I.1 Géométrie et conditions aux limites du problème.

Figure I.2 Schéma descriptif sur la force centrifuge.

Figure I.3 : Visualisations de l'écoulement d'eau autour d'un cylindre en rotation

à $Re = 104$, Prandtl (1961). (a), $\alpha = 0$; (b), $\alpha = 1$; (c), $\alpha = 2$; (d), $\alpha = 4$; (e), $\alpha = 6$; (f), $\alpha = \infty$.

Figure II.1 Géométrie du problème.

Figure III.1 Etude de la vitesse azimutale a et b.

Figure III.2 : Evolution radiale de : a) Vitesse azimutale; c) Energie cinétique turbulente ; c) Viscosité turbulente.

Figure III.3 : Evolution radiale de : a) Vitesse azimutale; c) Energie cinétique turbulente ; c) Viscosité turbulente.

Figure III.4 : Evolution radiale de : a) Vitesse azimutale; c) Energie cinétique turbulente ; c) Viscosité turbulente.

Figure III.5 : Evolution radiale de : a) Vitesse azimutale; c) Energie cinétique turbulente ; c) Viscosité turbulente.

Figure III.6 : Evolution radiale de : a) Vitesse azimutale; c) Energie cinétique turbulente ; c) Viscosité turbulente.

Figure B.1 : Volume de contrôle bidimensionnel en coordonnées cylindriques dans le plan (r, θ) .

Figure B.2 : Etapes de méthodes des volumes finis.

Figure B.3 : Projection du volume fini dans le plan (r, θ) .

Figure B.4 : ANSYS Workbench.

Figure B.5 : Géométrie étudiée sous ANSYS Workbench .

Figure B.6 : Maillage utilisé (Maillage quadratique).

Figure B.7 : Cas étudié sous Fluent.

LISTE DES TABLEAUX

Tab II.1 : Conditions aux limites pour les différents cas.

Tab II.3 : Termes de l'équation de transport de K et ε dimensionnelle.

Tab II.2 : Termes de l'équation de transport dimensionnelle.

Tab III.1 : Propriétés du fluide.

Tab III.2 : Influence du maillage sur la variation de la vitesse moyenne.

Tab III.3 Les valeurs de Coefficient de frottement et de Contrainte de cisaillement à la paroi.

Tableau A1: Valeurs des constantes du modèle k- ε .

Tableau A2: Valeurs des constantes du modèle RNG k

INTRODUCTION GENERALE

Introduction générale

La turbulence au sein du mouvement d'un fluide est un phénomène physique familier à tout un chacun. Malgré les innombrables observations et l'existence d'un modèle mathématique fiable et reconnu, la turbulence est en fait si complexe qu'elle laisse perplexes les physiciens les plus illustres. Il est assez difficile de lui donner une définition universelle, tant elle revêt des formes variées.

On peut tout de même tenter de la définir comme étant l'état d'un fluide en mouvement dont l'écoulement est irrégulier tel qu'en tout point de l'espace la vitesse et la pression varient aléatoirement. Chacun peut observer, dans sa vie de tous les jours, que les mouvements des fluides sont en fait complexes, désordonnés, bref... turbulents. Il est en fait très rare d'observer un écoulement complètement régulier, et souvent on pense que les écoulements réels sont désordonnés car les forçages qui leur ont donné naissance le sont, ou que les conditions extérieures sont mal contrôlées ou complexes : c'est faux. Les écoulements sont turbulents et imprévisibles par nature [1].

Les écoulements turbulents interviennent très largement dans l'industrie. Parfois, on cherche à exploiter cette turbulence, pour améliorer des procédés de mélange par exemple, d'autre fois, à la contrôler. Le plus souvent, on souhaite simplement caractériser la turbulence d'un écoulement pour comprendre, par exemple, les sollicitations mécaniques qu'elle induit [2].

Dans tous les cas, l'industriel cherche à se doter d'outils prédictifs du comportement des mouvements fluides auxquels il est confronté. La rotation est une composante fondamentale du mouvement. En mécanique des fluides, elle joue un rôle majeur dans beaucoup d'applications (les machines tournantes par exemple). La bonne compréhension des écoulements turbulents en rotation est donc de première importance.

La simulation numérique prend une grande place dans l'étude et le développement dans l'ingénierie. L'approche pratique industrielle des calculs des écoulements turbulents fait appel aux équations de Navier-Stokes moyennées appelées aussi équations de Reynolds. Ces équations contiennent des termes nécessitant d'être modélisés. La modélisation consiste essentiellement à la représentation des tensions de Reynolds afin de régler le problème de fermeture du système d'équations et pouvoir le résoudre.

Dans le cadre du présent travail, nous nous intéressons à l'étude d'un écoulement turbulent entre deux cylindres coaxiaux en rotation. L'étude s'intéresse au comportement de l'écoulement du fluide et l'influence des différents paramètres dynamiques et géométriques.

Ce mémoire comporte une introduction générale, trois chapitres, une conclusion générale et deux annexes. Le premier chapitre est consacré à des généralités et une revue bibliographique présentant les travaux antérieurs qui ont abordé ce thème. La description du modèle physique ainsi que le modèle mathématique adopté de même que les conditions aux limites associées sont présentées au chapitre deux. Le troisième chapitre s'articule autour de la validation du modèle adopté et à l'interprétation des différents résultats des simulations. Dans les annexes, on donne les détails et explications des équations établies au deuxième chapitre ainsi que la description du code Fluent et la méthode des volumes finis.

Chapitre I
Généralités
et
étude bibliographique

I.1 Introduction

La rotation du fluide peut avoir des effets spectaculaires sur un écoulement turbulent, perturbant sensiblement plusieurs caractéristiques de base de l'écoulement. Ces effets sont aujourd'hui relativement bien expliqués par la théorie. Nous présentons dans ce qui suit un aperçu global sur ces deux phénomènes physiques qui coexistent dans le problème objet de cette étude à savoir la rotation et la turbulence.

I.2 Ecoulement turbulent

I.2.1 Propriétés essentielles de l'écoulement turbulent[3]

a. Signal irrégulier dans l'espace et dans le temps: les grandeurs physiques telles que vitesse et pression varient de façon aléatoire, remarquons que les fluctuations organisées ou périodiques ne font pas partie de l'agitation turbulente mais plutôt d'une instabilité.

b. Écoulement rotationnel : la présence des tourbillons traduit le fait que l'écoulement turbulent est fortement rotationnel. Le mouvement turbulent présente alors de fortes fluctuations de rotationnel de vitesse.

c. Existence des tourbillons de tailles très divers: des grands tourbillons qui sont associés aux basses fréquences, leurs dimensions sont de l'ordre de grandeur de domaine de l'écoulement, sont déterminés par les conditions aux limites du domaine et des petits tourbillons qui sont associées aux hautes fréquences, ils sont déterminés par les forces visqueuses.

d. Caractère imprévisible des trajectoires : Un écoulement turbulent présente une extrême sensibilité aux conditions aux limites et aux conditions initiales. Cette propriété se manifeste si l'on considère un écart infime sur les conditions initiales, on observe alors que les deux écoulements deviennent rapidement très différents.

e. Dissipation: le mécanisme de dissipation visqueuse de la turbulence est lié à la présence de forts gradients de vitesse instantanés. Les taux de déformation instantanés deviennent en effet très importants dans les petits tourbillons et la dégradation de l'énergie cinétique turbulente en chaleur est alors très forte.

I.2.2 Turbulence près des parois

Les effets d'une paroi sur le champ turbulent sont nombreux et complexes, on peut en dégager cependant les principaux suivants :

- La réduction des échelles de longueur.
- La création d'une zone adjacente à la paroi dans laquelle l'effet de la viscosité moléculaire est dominant.

Remarque : Ces effets ont des conséquences importantes sur les propriétés de transfert de l'écoulement, en particulier les frottements et la diffusion thermique.

I.2.3 Lois de paroi

On sait que le profil de vitesse d'un écoulement turbulent devient très raide près d'une paroi. Si l'on souhaitait mailler complètement la zone de paroi, cela demanderait un nombre de mailles considérable qui alourdirait le calcul de façon souvent prohibitive. Si l'on suppose valable le profil logarithmique de vitesse, on peut alors placer le premier point de maillage loin de la paroi et intégrer analytiquement le profil de vitesse logarithmique.

Une précaution importante à prendre est de ne placer le premier point de maillage qu'à $y^+ > 30$. En effet, l'utilisation de la loi logarithmique nécessite que le premier point soit effectivement placé dans la zone logarithmique. De plus, un raffinement inconsideré du maillage avec un modèle $K-\epsilon$ conduirait à utiliser ce modèle dans la sous-couche visqueuse, zone où il cesse d'être valable.

Les lois de paroi donnent des résultats satisfaisants lorsque la couche limite est en équilibre, ce qui signifie qu'elle n'est soumise qu'à un faible gradient de pression. Elles donnent des résultats très moyens pour un écoulement décollé ou vers un point de stagnation (arrêt d'un écoulement frappant une paroi).

I.2.4 Turbulence: utile ou nuisible ?

Du point de vue de l'ingénieur, l'effet principal de la turbulence est d'augmenter la capacité des fluides à se mélanger et à diffuser.

Très utile pour les moteurs (avion, voiture) qui ne pourraient pas développer autant de puissance sans la turbulence. Utile pour éviter les décollements de couches limites et les pertes de portance dans les profils d'aile. Néfaste pour la traînée visqueuse qui est rendue plus grande par la turbulence: cela induit une augmentation de la consommation car il faut dépenser plus d'énergie pour lutter contre les frottements.

Impact globalement positif, tant du point de vue industriel que nature

I.3 Ecoulement rotatif

I.3.1 Approche expérimentale

I.3.1.a Ecoulement entre deux cylindres (expérience fondamentale de Couette)

Un écoulement simple entre deux cylindres coaxiaux animés d'une vitesse de rotation constante dans le temps. Le cylindre extérieur (resp. intérieur) a un rayon R_e (resp. R_i) et il est entraîné à la vitesse angulaire Ω_e (resp. Ω_i). Si l'écoulement reste stable, nous pouvons supposer que le champ de vitesse conserve la symétrie cylindrique : la vitesse est indépendante de la coordonnée azimutale θ .

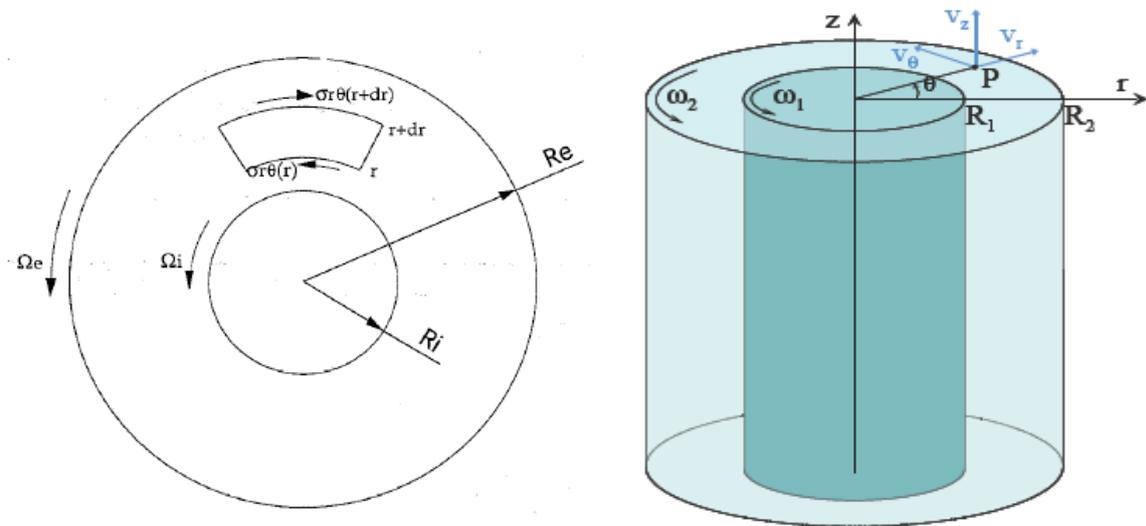


Figure I.1 Géométrie et conditions aux limites du problème[4].

Le mouvement est permanent ($\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0$) à symétrie de révolution ($\frac{\partial}{\partial \theta} \equiv 0$) de sorte que le champ de vitesse et de pression est donné par $u_r(r, z), u_\theta(r, z), u_z(r, z), p(r, z)$ en coordonnées cylindriques.

I.3.1.b Interprétation du phénomène

La mise en mouvement du fluide situé dans l'espace annulaire ne peut se faire que par l'intermédiaire du mouvement de l'un des deux cylindres. Ceci prouve que des forces tangentielles s'exercent au sein du fluide et sur les parois. En effet, les forces de pression, perpendiculaires aux surfaces, ne pourraient pas faire tourner le cylindre. Ces forces tangentielles sont appelées *forces de viscosité*, ou encore *forces de cisaillement* en raison de leur analogie avec les forces tangentielles rencontrées en mécanique des solides, et elles se traduisent par une résistance au mouvement.

En fait, ce concept remonte à Newton, qui en a proposé la première formulation mathématique, à partir d'observations faites en hydrodynamique. Mais l'expérience de Couette apporte la preuve formelle de l'existence des forces de viscosité.

Ajoutons que le cisaillement dans un fluide peut être rattaché à la notion de frottement, mais un frottement diffère de celui qui s'exerce entre deux surfaces solides. Il s'agit plutôt ici d'un *frottement interne* réparti dans toute l'épaisseur du fluide, et associé (comme des expériences fines peuvent le montrer) à un gradient de vitesse entre les deux parois.

Une solution stationnaire de l'écoulement unidirectionnel rotatif existe, elle est sous la forme suivante :

$$u_{\theta}(r) = \frac{A}{2}r + \frac{B}{r} \text{ avec } u_{\theta}(R_i) = \Omega_i R_i \text{ et } u_{\theta}(R_e) = \Omega_e R_e$$

$$u_{\theta}(r) = \frac{(\Omega_i - \Omega_e)R_i^2 R_e^2}{R_i^2 - R_e^2} \frac{1}{r} + \frac{\Omega_e R_e^2 - \Omega_i R_i^2}{R_i^2 - R_e^2} r, \text{ avec } B = \frac{(\Omega_i - \Omega_e)R_i^2 R_e^2}{R_i^2 - R_e^2}$$

$$\text{Et } A = 2 \frac{\Omega_e R_e^2 - \Omega_i R_i^2}{R_i^2 - R_e^2}$$

La contrainte tangentielle de viscosité (dans la direction θ) d'expression générale :

$$\tau_{r\theta} = \mu \left(\frac{\partial u_{\theta}}{\partial r} - \frac{u_{\theta}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) = \mu r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_{\theta}}{r} \right) = -2\mu \frac{B}{r^2}$$

Aussi le fluide exerce sur la paroi interne du cylindre extérieur une force élémentaire tangentielle qui par unité de longueur dz vaut en module :

$$dF = |\tau_{r\theta}(R_e)| R_e d\theta = 2\mu \frac{B}{(R_e)^2} R_e d\theta = 2\mu \frac{B}{R_e} d\theta$$

Le couple résultant vaut par unité de longueur dz :

$$C_e = \int_0^{2\pi} 2\mu B d\theta = 4\mu\pi \frac{(\Omega_i - \Omega_e)R_i^2 R_e^2}{R_i^2 - R_e^2} d\theta$$

I.3.2 Effets de la rotation sur les écoulements turbulents :

La rotation est un paramètre important sur le plan des applications industrielles, comme les machines tournantes. En effet, dans un contexte turbomachine, les écoulements turbulents sont de type complexe : en plus du cisaillement principal ($\frac{\partial U}{\partial y}$) lié à la présence des couches limites, apparaissent des cisaillements secondaires significatifs liés aux surfaces en rotation, aux sillages des pales, aux courbures de l'écoulement (dues aux parois mais aussi aux écoulements secondaires) et aux accélérations de Coriolis dues à la rotation d'ensemble.

Ainsi, pour ce type d'écoulements, la turbulence est affectée par les effets de compressibilité, les gradients de pression, la transition, la courbure et les effets de rotation.

Quand un écoulement turbulent est soumis à une rotation d'ensemble, la présence des accélérations de Coriolis entraîne des modifications significatives du champ fluctuant.

I.3.3 Force centrifuge

La force centrifuge est un cas particulier de force fictive qui apparaît en physique dans le contexte de l'étude du mouvement des objets dans des référentiels non inertiels. L'effet ressenti est dû aux mouvements de rotation de ces référentiels et se traduit par une tendance à éloigner les corps du centre de rotation.

Elle est perpendiculaire à l'axe de rotation et son support passe par cet axe. Elle est orientée de façon à le fuir, d'où son nom. Sa grandeur F_{ce} vaut :

$$F_{ce} = m\Omega^2 R = m \frac{V^2}{R}$$

- m : la masse du mobile.
- Ω : la grandeur de la vitesse angulaire du système tournant,

- $V = \omega R$ vitesse linéaire
- R : la distance qui sépare le mobile de l'axe de rotation.

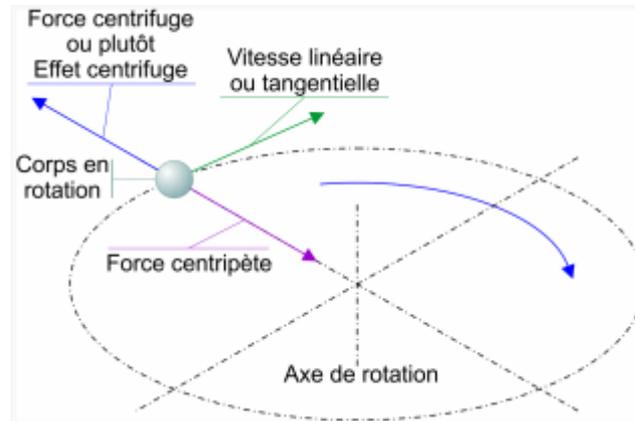


Figure I.2 Schéma descriptif sur la force centrifuge.

Dans les équations de quantité de mouvement le terme $\frac{V^2}{R}$ représente l'accélération centrifuge.

I.3.4 Force de Coriolis

La force de Coriolis est une force qui agit sur n'importe quel corps mobile dans un système tournant indépendamment. La rotation de la terre provoque une force de Coriolis sur les fluides en mouvement, ce qui provoque une déformation perpendiculaire au déplacement.

La force de Coriolis est une force inertielle agissant perpendiculairement à la direction du mouvement d'un corps en déplacement dans un milieu (un référentiel) lui-même en rotation uniforme, tel que vu par un observateur partageant le même référentiel.

Cette *force* est nommée ainsi en l'honneur de l'ingénieur français Gaspard-Gustave Coriolis.

Il est possible de représenter la force de Coriolis \vec{f}_{co} comme un produit vectoriel en utilisant :

$$\vec{f}_{co} = -2m \Omega(t) (\vec{e}_{axe} \wedge \vec{v})$$

Où

- m : est la masse du corps.
- \vec{e}_{axe} : est un vecteur unitaire parallèle à l'axe de rotation,
- $\Omega(t)$: est la vitesse angulaire instantanée de rotation,
- \vec{v} : est la vitesse relative du corps par rapport au référentiel en mouvement (voir accélération de Coriolis).

Cependant, on peut multiplier la vitesse angulaire ω avec \vec{e}_{axe} , ce qui produit le vecteur $\vec{\omega}(t)$. Ce vecteur vitesse-pivotement instantané $\vec{\omega}(t)$ décrit ainsi à la fois la direction et la vitesse angulaire du référentiel.

$$\vec{f}_{co} = -2m \vec{\Omega}(t) \wedge \vec{v}$$

Ou une seconde définition

$$\vec{f}_{co} = -m \vec{a}_{co}$$

- m : est la masse du corps.
- \vec{A}_{co} : est le vecteur d'accélération de Coriolis.

I.4 Étude bibliographique

Couette (1890)[5] a proposé un dispositif expérimental pour déterminer la viscosité des liquides; il s'agit de l'écoulement entre cylindres coaxiaux tournants. Couette mène ses expériences et son analyse de l'écoulement dans le cas le plus fréquemment abordé par la suite où un seul cylindre est entraîné en rotation. Dès cette époque, Couette remarque que le domaine de validité des équations du mouvement relatives à un écoulement purement circulaire est beaucoup moins étendu lorsque le cylindre intérieur tourne dans une gamme de vitesses croissante à partir du repos, le cylindre extérieur étant fixe, que dans la situation inverse. *Lord Rayleigh*[6] justifie ultérieurement cette observation en montrant que, pour un écoulement non visqueux à ligne de courant circulaire (vitesse $V(r)$ fonction de la distance r au centre de rotation), la condition nécessaire et suffisante de stabilité vis-à-vis d'une perturbation axisymétrique est que : le carré de la circulation croisse avec r , soit :

$$\frac{d(rV)^2}{dr}$$

Un premier critère de classement des écoulements tournants se trouve ainsi établi.

Les premières expériences autour du cylindre en rotation ont été menées par *Reid (1924)* [7], *Prandtl (1925)*[8], *Thom (1926)*[9] et (1931) [10]. Leurs mesures s'étendent jusqu'à $Re \simeq 1,2 \times 10^5$. Ils affirment que le coefficient de portance moyennage en fonction du taux de rotation ; mais *Prandtl (1925)* trouve que le coefficient de portance maximal qu'on peut atteindre en faisant tourner le cylindre est limité à 4π . Un travail similaire a été ensuite réalisé par *Prandtl et Tietjens (1934)*[11]. La figure 2.22 représente une sélection de 6 visualisations de l'écoulement derrière un cylindre en rotation, tirées de *Prandtl (1961)* [12] au nombre de Reynolds 10^4 . En fonction du taux de rotation.

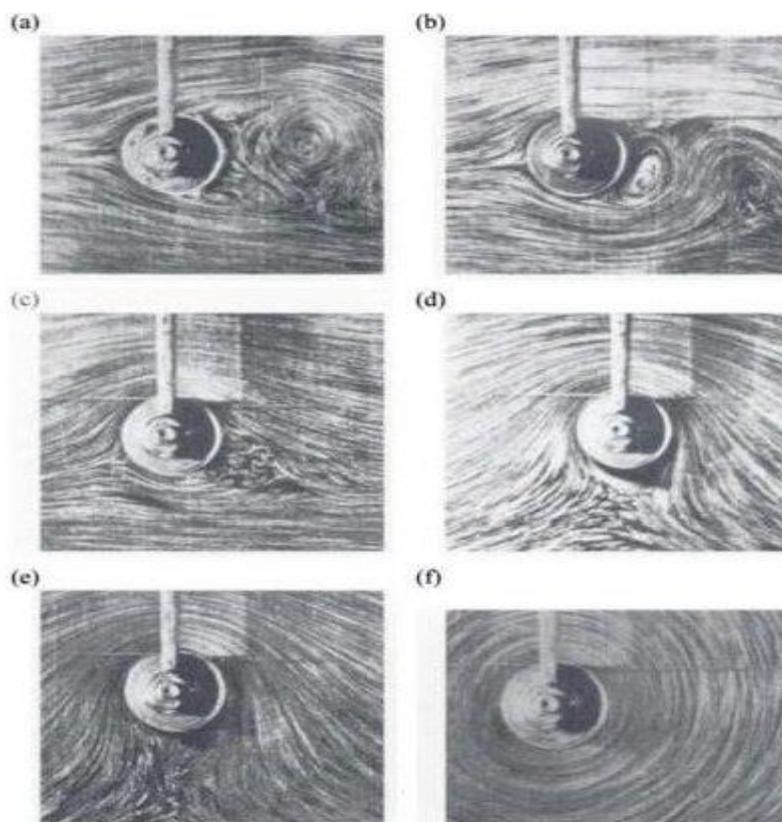


Figure I.3 : Visualisations de l'écoulement d'eau autour d'un cylindre en rotation à $Re = 104$, *Prandtl (1961)*. (a), $\alpha = 0$; (b), $\alpha = 1$; (c), $\alpha = 2$; (d), $\alpha = 4$; (e), $\alpha = 6$; (f), $\alpha = \infty$.

Les premiers travaux de Taylor contiennent des mesures dans une grande gamme de rapports d'aspect $\Gamma = Ri/Re$. Dans ses publications de 1923 [13] et de 1936 [14], il utilise onze différentes tailles pour le cylindre intérieur et se focalise sur la mesure du couple exercé

par le fluide. Cependant, la technique utilisée ne permet l'accès à cette quantité qu'avec un seul des cylindres en rotation, le couple est mesuré grâce à un système de contrepoids qui maintient le second cylindre au repos.

Des applications plus spécifiques existent également dans le cadre des turbines à gaz modernes, où certaines composantes peuvent être assimilées à des cavités cylindriques si l'on utilise des hypothèses appropriées (Morse, 1987)[15]. À l'aide de considérations théoriques et expérimentales Daily et Nece(1960)[16], ont apporté une contribution importante pour la compréhension du problème de l'écoulement laminaire et turbulent d'un disque tournant à l'intérieur d'une cavité cylindrique. Ils ont montré que l'écoulement est caractérisé par quatre régimes permanents dépendant du nombre de Reynolds et du rapport de forme de la cavité (Γ):

1. Le régime laminaire: petite distance entre le disque en rotation et le cylindre externe fixe (écoulement de Couette),
2. Le régime laminaire: grande distance entre le disque en rotation et le cylindre externe fixe.
3. Le régime turbulent: petite distance entre le disque en rotation et le cylindre externe fixe.
4. Le régime turbulent: grande distance entre le disque en rotation et le cylindre externe fixe.

Les simulations numériques de Chew et Vaughan (1988)[17] montrent les résultats pour un écoulement laminaire et turbulent généré par un disque en rotation à l'intérieur d'une cavité cylindrique. Avec et sans injection radiale d'un fluide de refroidissement. Ils utilisent un modèle de turbulence de longueur de mélange en considérant un fluide en état permanent et axisymétrique. Les résultats numériques ont été obtenus en utilisant trois codes de calculs différents, basés sur la méthode des volumes de contrôle. Avec le but de faire les comparaisons parmi les trois codes et ainsi s'assurer qu'il n'y a pas d'inconsistance. Ils ont utilisé un maillage resserré pour les vitesses radiales et axiales et ils montrent un test pour un nombre de Reynolds $Re = 2 \times 10^6$, un rapport de forme $\Gamma = 0.07$, un rapport de rayons $R = 0.1$. Avec trois maillages de 33×33 , de 49×49 et de 65×65 respectivement. Les seuls résultats affectés sensiblement par l'erreur de troncature ont été ceux du maillage grossier. La contrainte de cisaillement sur le rotor est plus sensible à cette erreur de troncature que les profils de vitesses. Ils remarquent qu'un algorithme avec la méthode de *multigrid* réduit de 40 minutes le temps de calcul. Les coefficients de moment du disque, théoriques et

expérimentaux montrent un bon accord, pendant que les vitesses théoriques et expérimentales montrent un accord raisonnable.

Morse (1991)[18] a réalisé une étude numérique sur la transition vers la turbulence d'un écoulement engendré par la rotation d'un disque à l'intérieur d'une cavité cylindrique pour un rapport de forme $\Gamma = 0.1$. La solution est obtenue par l'utilisation d'un modèle de $(K-\varepsilon)$ pour de faibles nombres de Reynolds. La transition de l'écoulement laminaire-turbulent est réalisée par l'intervention d'une faible quantité de "viscosité turbulente" dans le terme de production d'énergie. Le système étudié est le système rotor-stator, dont l'influence du nombre de Reynolds de rotation (d'environ $10^5 - 10^7$) a été mise en évidence. La méthode retenue est du type différences finies pour la solution d'un écoulement à l'état permanent, axisymétrique et incompressible. Ils ont utilisé une version modifiée du code TEACH avec un maillage non uniforme de 65×115 (axiale-radiale). Le premier signe de turbulence sur le rotor a été observé à $Re = 4.10^5$, où il apparaît à l'intérieur des cellules une non-uniformité due aux effets de la transition.

Hadid (1993)[19] a résolu les équations bidimensionnelles de Navier-Stokes pour le cas d'un fluide incompressible à l'intérieur d'une cavité cylindrique avec un disque en rotation pour un rapport de forme $\Gamma = 0.0284$ et un rapport de rayons $R = 10$, similaire à l'expérience réalisée par *Daily et Nece (1960)*. L'étude s'adresse à l'évolution d'un écoulement en état permanent vers la transition à la turbulence faible au fur et à mesure qu'on augmente le nombre de Reynolds. Il a utilisé un schéma implicite de premier ordre des différences finies centrées pour les termes de diffusion. Et un schéma upwind du second ordre pour les termes de convection. Il a utilisé aussi, l'analyse de Fourier pour obtenir les spectres des variables dynamiques typiques qui caractérisent les différents régimes d'écoulement. Pour des nombres de Reynolds plus élevés, il apparaît dans le spectre de fréquence une bande large, dont l'amplitude et l'étendue vont croissant. En d'autres termes, le mouvement est devenu très désordonné, irrégulier, voire chaotique. Ce qui indique une route vers la turbulence.

Dans le cadre d'une étude faite par *Favé (1999)* et suivi par la suite par *Mehel* en (2006) [20] une étude expérimentale sur les mécanismes d'interaction entre les structures

de la turbulence et le développement d'une phase dispersée (gaz ou vapeur) dans une expérience de Taylor Couette dyphasique, avec rotation du cylindre intérieur.

A. Prigent (2001) [21] a fait une étude expérimentale du régime de coexistence laminaire-turbulent en forme d'hélice observé dans l'écoulement de Taylor-Couette, l'écoulement cisailé entre deux cylindres coaxiaux. A cette fin il a réalisé des écoulements de Couette aux dimensions inégales. Il révèle l'existence d'un régime équivalent, partageant les mêmes propriétés d'un point de vue qualitatif et quantitatif, dans l'écoulement de Couette plan, l'écoulement cisailé entre deux parois planes circulant à vitesses égales mais opposées, pourvu que ses rapports d'aspect soient suffisamment grands. L'étude quantitative conduite dans l'écoulement de Taylor-Couette, montre qu'il apparaît comme le résultat d'une instabilité de l'écoulement turbulent homogène, la coexistence laminaire-turbulent étant obtenue loin du seuil lorsque l'amplitude des modulations est suffisamment forte pour qu'il y ait relaxation vers l'état laminaire dans les minima.

L'étude de la réduction de traînée par injection de bulles en écoulement Taylor-Couette est analysée numériquement par A. Chouippe (2012) [22] . La réduction de traînée présente un intérêt pour les applications navales puisqu'elle est issue d'une modification des structures cohérentes qui contribuent le plus à la résistance à l'avancement. Le but de cette étude est d'analyser les mécanismes à l'origine de cette diminution du frottement pariétal. L'approche utilisée dans le cadre de cette étude est numérique, elle emploie le code JADIM par une approche Euler-Lagrange : la phase continue est simulée par Simulation Numérique Directe et la phase dispersée est simulée en suivant individuellement chaque bulle. La configuration retenue dans le cadre de cette étude est celle de l'écoulement de Taylor-Couette (écoulement compris entre deux cylindres en rotation). La première partie de la thèse vise à adapter l'outil numérique employé, afin de pouvoir prendre en compte le retour de la phase dispersée via des termes de forçage dans les équations bilan de matière et de quantité de mouvement. La deuxième partie de la thèse vise à étudier l'écoulement porteur en configuration monophasique, afin de disposer d'une référence sur l'écoulement non perturbé. La troisième partie de la thèse a pour objectif d'étudier la dispersion passive des bulles dans le système, afin d'analyser les mécanismes de migrations mis en jeu. Enfin la dernière partie de la thèse vise à étudier l'influence des bulles sur l'écoulement porteur en analysant l'effet de certains paramètres, notamment le taux de vide et la flottabilité.

Dans cet article[23], les auteurs passent en revue les progrès récents dans la compréhension de la turbulence de Taylor-Couette pleinement développée du point de vue expérimental, numérique et théorique. Ils se concentrent sur la dépendance des paramètres du couple global et sur l'organisation du flux local, y compris les profils de vitesse et les couches limites. Ensuite, Ils discutent des transitions entre différents états de flux (turbulents).

Chapitre II
Position de problème
et
formulation mathématique

II.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous formulons les équations modélisant le problème étudié. Il s'agit des équations moyennées. Ces équations seront écrites en coordonnées cylindriques, ce qui permettra une meilleure analyse des résultats et une facilité de calcul étant donné la nature géométrique du domaine de travail. Notre étude concerne un écoulement turbulent dans l'espace compris entre deux cylindres coaxiaux animés d'une vitesse de rotation.

II.2 Position du problème

Un fluide newtonien et incompressible est soumis à une rotation générée par les deux cylindres (moteur de fluide). Le cylindre extérieur (resp. intérieur) a un rayon $R_e=0.75\text{m}$ (resp. $R_i=0.25\text{m}$), soit un rapport de rayon égal à 3, et il est entraîné à la vitesse angulaire Ω_e (resp. Ω_i). Un schéma descriptif du problème à étudier est donné dans la figure (II.1):

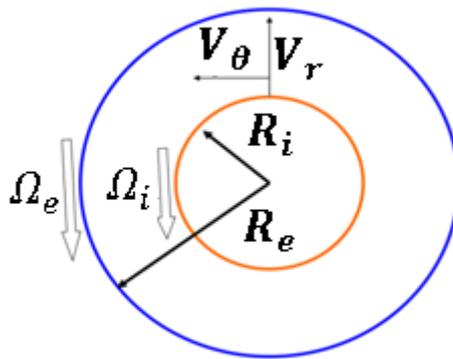


Figure II.1 Géométrie du problème.

II.3 Formulation mathématique du problème

II.3.1 Hypothèses simplificatrices

Afin de simplifier l'étude du problème, on utilise les hypothèses simplificatrices suivantes :

- L'écoulement est bidimensionnel dans le plan (r, θ) .
- Fluide visqueux newtonien.
- La force de gravité est négligeable.

II.3.2 Equations de mouvement instantanées

a) Equation de continuité

Pour un écoulement incompressible, l'équation de continuité en coordonnées cylindriques se présente sous la forme suivante.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = 0 \quad (\text{II. 1})$$

b) Equation de la quantité de mouvement

Tenant en considération des hypothèses précédentes et en coordonnées cylindriques à symétrie axiale, les équations projetées suivant les directions radiale et azimutale s'écrivent alors.

b.1) Equation de quantité de mouvement radiale

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left[\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} \right]$$

(II. 2)

b.2) Equation de quantité de mouvement azimutale

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r u_\theta}{r} = -\frac{1}{r \rho_0} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left[\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} \right]$$

(II. 3)

II.3.3 Conditions aux limites

Le domaine d'étude est défini par : $R_1 < r < R_2$; $0 \leq \theta < 2\pi$

	Cas ₁	Cas ₂	Cas ₃	Cas ₄	Cas ₅
$u_\theta(R_1)$	$\Omega_i R_1$	0	$\Omega_i R_1$	$\Omega_i R_1$	$\Omega_i R_1$
$u_\theta(R_2)$	0	$\Omega_e R_2$	$\Omega_e R_2$	$-\Omega_e R_2$	$-\Omega_e R_2$
$u_r(R_1; R_2)$	0	0	0	0	0

Tab II.1 : Conditions aux limites pour les différents cas

II.4 Equations moyennées

Pour résoudre le système d'équations (II.1)-(II.3) associé aux conditions aux limites en régime turbulent une approche de décomposition de variables sera utilisée. Elle consiste à décomposer les grandeurs suivantes (u_r, u_θ et p) intervenant dans les équations de Navier-Stokes en une grandeur moyenne \bar{f} et une fluctuation f' . Puis, on adopte le concept de viscosité turbulente afin de répondre au problème de fermeture du système d'équations qui fait apparaître des inconnues supplémentaires appelées contraintes de Reynolds. Enfin, on choisit le modèle à deux équations k-epsilon (détail et explication voir l'annexe A). Le système résultant s'écrit comme suit:

a) Equation de continuité

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r\bar{u}_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\bar{u}_\theta}{\partial \theta} = 0 \quad (\text{II. 10})$$

b) Equation de quantité de mouvement radiale

$$\bar{u}_r \frac{\partial\bar{u}_r}{\partial r} + \frac{\bar{u}_\theta}{r} \frac{\partial\bar{u}_r}{\partial \theta} - \frac{\bar{u}_\theta \cdot \bar{u}_\theta}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial\bar{p}}{\partial r} + (v + v_t) \left[\frac{\partial^2\bar{u}_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\bar{u}_r}{\partial r} - \frac{\bar{u}_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\bar{u}_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2\bar{u}_\theta}{\partial \theta^2} \right] \quad (\text{II. 11})$$

c) Equation de quantité de mouvement azimutale

$$\bar{u}_r \frac{\partial\bar{u}_\theta}{\partial r} + \frac{\bar{u}_\theta}{r} \frac{\partial\bar{u}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\bar{u}_r \cdot \bar{u}_\theta}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial\bar{p}}{\partial \theta} + (v + v_t) \left[\frac{\partial^2\bar{u}_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\bar{u}_\theta}{\partial r} - \frac{\bar{u}_\theta}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\bar{u}_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2\bar{u}_r}{\partial \theta^2} \right] \quad (\text{II. 12})$$

d) Equation d'énergie cinétique turbulente

$$\begin{aligned} \overline{u_r} \frac{\partial K}{\partial r} + \frac{\overline{u_\theta}}{r} \frac{\partial K}{\partial \theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(v + \frac{v_t}{\sigma_t} \right) r \frac{\partial K}{\partial r} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\left(v + \frac{v_t}{\sigma_t} \right) \frac{1}{r} \frac{\partial K}{\partial \theta} \right] + P_K - \varepsilon \\ &+ \frac{2}{3} K \left(\frac{\partial \overline{u_r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \overline{u_\theta}}{\partial \theta} \right) \end{aligned}$$

(II. 13)

$$P_K = v_t \left[\left(\frac{1}{r} \frac{\partial \overline{u_r}}{\partial \theta} + \frac{\partial \overline{u_\theta}}{\partial r} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial \overline{u_r}}{\partial r} \right)^2 + \frac{2}{r^2} \left(\frac{\partial \overline{u_\theta}}{\partial \theta} \right)^2 \right]$$

$$\text{Avec : } K = \frac{1}{2} (\overline{u_r' u_r'} + \overline{u_\theta' u_\theta'}).$$

e) Equation du taux de dissipation d'énergie cinétique turbulente

$$\overline{u_r} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} + \frac{\overline{u_\theta}}{r} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(v + \frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \right) r \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\left(v + \frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta} \right] + C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{K} (P_\varepsilon) - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{K}$$

(II. 14)

Avec

$$P_\varepsilon = v_t \left[\left(\frac{1}{r} \frac{\partial \overline{u_r}}{\partial \theta} + \frac{\partial \overline{u_\theta}}{\partial r} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial \overline{u_r}}{\partial r} \right)^2 + \frac{2}{r^2} \left(\frac{\partial \overline{u_\theta}}{\partial \theta} \right)^2 \right] + \frac{2}{3} K \left(\frac{\partial \overline{u_r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \overline{u_\theta}}{\partial \theta} \right)$$

$$P_K = v_t \left[\left(\frac{1}{r} \frac{\partial \overline{u_r}}{\partial \theta} + \frac{\partial \overline{u_\theta}}{\partial r} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial \overline{u_r}}{\partial r} \right)^2 + \frac{2}{r^2} \left(\frac{\partial \overline{u_\theta}}{\partial \theta} \right)^2 \right]$$

(II. 15)

Les contraintes de Reynolds sont données par:

$$-\overline{u_r' u_r'} = v_t \left(\frac{\partial \overline{u_r}}{\partial r} + \frac{\partial \overline{u_r}}{\partial r} \right) + \frac{2}{3} K$$

$$-\overline{u_r' u_{\theta}'} = -\overline{u_{\theta}' u_r'} = v_t \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \overline{u_r}}{\partial \theta} - \frac{\overline{u_{\theta}}}{r} + \frac{\partial \overline{u_{\theta}}}{\partial r} \right)$$

$$-\overline{u_{\theta}' u_{\theta}'} = \frac{v_t}{r} \left(\frac{\partial \overline{u_{\theta}}}{\partial \theta} + \overline{u_r} \right) + \frac{2}{3} K$$

II.5 Discrétisation des équations modèles

Les équations de conservation présentées précédemment peuvent être écrites sous une forme commune (II. 16). Cette formulation permet de ne pas réitérer le travail de discrétisation pour chaque équation.

L'équation générale de transport d'une variable ϕ pour un écoulement incompressible dans le cas stationnaire s'écrit dans le système cylindrique comme suit :

$$\underbrace{\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r \phi) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_{\theta} \phi)}_R = \underbrace{\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\alpha r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\alpha \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right]}_N + S_{\phi} \quad (\text{II. 16})$$

R : Représente le terme de transport par convection.

N : Représentation le terme de transport par diffusion.

S_{ϕ} : Représentation le terme source.

Avec :

u_r : Composante radiale de la vitesse.

u_{θ} : Composante azimutale de la vitesse.

α : Coefficient de diffusion.

Dans le tableau suivant, nous donnons la définition de ϕ , α et S_{ϕ} pour les équations qui gouvernent notre problème.

Equations	ϕ	α	$S_\phi = S_c + S_p \phi_p$	
			S_c	S_p
continuité	1	0	0	0
Quantité de mouvement suivant r	\bar{u}_r	$(\nu + \nu_t)$	$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial r} + \frac{\bar{u}_\theta \cdot \bar{u}_\theta}{r} - \frac{\nu_t}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{u}_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{3} \frac{\partial K}{\partial r}$	
Quantité de mouvement suivant θ	\bar{u}_θ	$(\nu + \nu_t)$	$-\frac{1}{\rho r} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} + \frac{2}{3r} \frac{\partial K}{\partial \theta} + \frac{\nu_t}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{u}_r}{\partial \theta^2}$	$-\frac{\bar{u}_r}{r}$

Tab II.2 : Termes de l'équation de transport dimensionnelle

Equations	ϕ	α	$S_\phi = S_c + S_p \phi_p$	
			S_c	S_p
Energie cinétique turbulente	K	$\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_t}\right)$	$[P_K - \varepsilon]$	$\frac{2}{3} \left(\frac{\partial \bar{u}_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}_\theta}{\partial \theta}\right)$
Taux de dissipation ε	ε	$\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon}\right)$	0	$\frac{1}{K} [C_{\varepsilon 1} P_\varepsilon - C_{\varepsilon 2} \varepsilon]$

Tab II.3 : Termes de l'équation de transport de K et ε dimensionnels.

II.6 Conclusion

Dans le présent chapitre, nous avons établi, pour le problème traité, le modèle mathématique. Ce dernier est constitué d'un système d'équations de Navier-Stokes régissant un écoulement turbulent entre deux cylindres coaxiaux en rotation.

En effet, l'utilisation des méthodes numériques sera pratiquement nécessaire pour la résolution des équations de bilan. Pour notre problème, on a employé le logiciel FLUENT basé sur la méthode des volumes finis, et pour la création de la géométrie et le maillage, on a utilisé Workbench. Le modèle de turbulence utilisé durant la simulation est le RNG $k-\varepsilon$ (modifié). (Détails et explications de la procédure numérique voir l'annexe A et B).

Chapitre III

Résultats et discussions

III.1 Introduction

Dans ce chapitre, on présentera les résultats de la simulation numérique obtenus par le code de calcul **Fluent** concernant l'écoulement turbulent entre deux cylindres coaxiaux en rotation, en utilisant le modèle RNG k- ϵ (modifié). Premièrement, on verra l'influence du maillage sur les résultats, puis on passera à la validation des résultats d'une simulation faite par d'autres auteurs.

On étudiera les différents cas relatifs à la rotation des deux cylindres.

III.2 Propriétés physiques

Le fluide considéré est l'eau, les valeurs des constantes physiques sont les suivantes :

Masse volumique ρ 998.2 Kg/m³

Viscosité dynamique μ $1.003.10^{-3}$ Kg/m.s

Tab III.1 : Propriétés du fluide.

III.3 Choix du maillage

Le choix du maillage est un point essentiel dans la précision et l'exactitude des résultats numériques. Pour faire ce choix on étudiera l'influence du nombre de nœuds sur la variation de la vitesse moyenne pour le cas contrarotatif à vitesses de rotation égales ($\omega = -1$). Ces résultats sont présentés sur les tableaux ci-dessous :

Maillage	100x100	120x120	150x150	160x160	170x170
V_{moy}	2.86976	3.00167	3.21014	3.21037	3.21086

Tab III.2 : Influence du maillage sur la variation de la vitesse moyenne.

Le maillage adopté c'est 150x150.

III.4 Test de validation

De manière à vérifier la validité des résultats numériques obtenus dans le présent travail, une validation a été faite sur une simulation réalisée par S. Dong [24] sur le flux turbulent entre cylindres concentriques contrarotatifs: une étude de simulation numérique directe.

Les résultats numériques sont obtenus pour : a) $(|Re_i| + |Re_o|)/2 = 1500$ et b) $Re = 4000$ pour un rapport de rayon égal à 0.89. Nous concluons que nos résultats sont en bon accord avec la littérature.

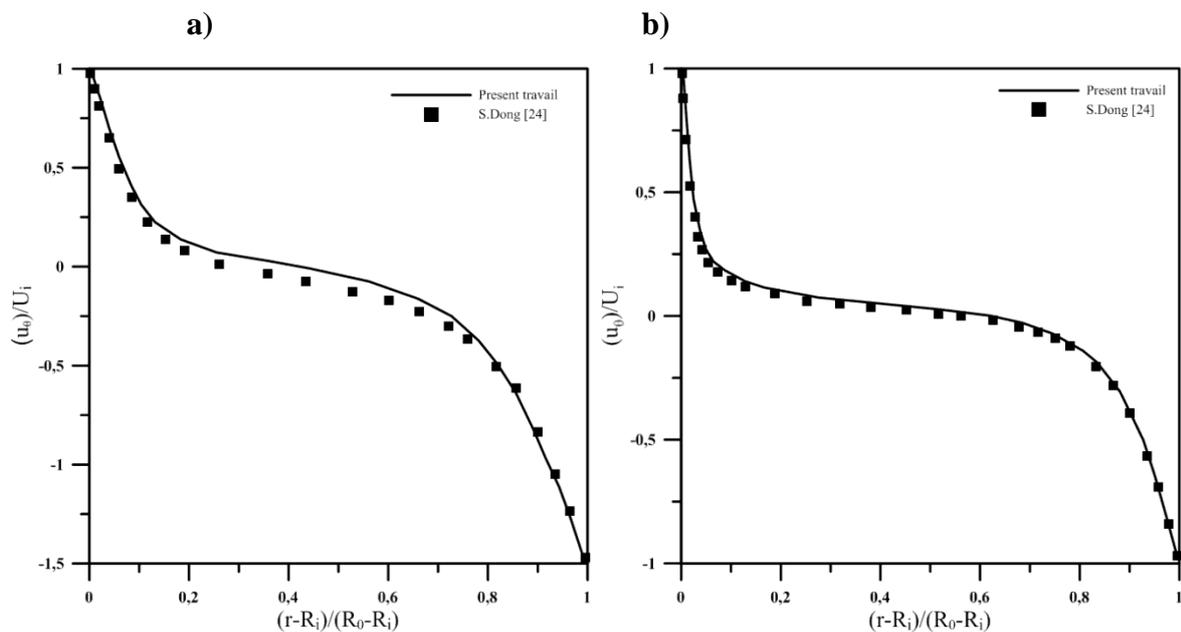


Figure III.1 Étude de la vitesse azimutale a et b.

III.5 Différents cas étudiés : On s'est intéressé à 5 cas différents avec un rapport de forme égal à 3:

- **1^{er} cas :** le disque intérieur en rotation et le disque extérieur est immobile.
- **2^{em} cas :** le disque extérieur en rotation et le disque intérieur est immobile.
- **3^{em} cas :** les deux cylindres sont en rotation dans le même sens à des vitesses différentes.
- **4^{em} cas :** les deux cylindres sont en mouvement contrarotatif à des vitesses différentes.
- **5^{em} cas :** les deux cylindres sont en mouvement contrarotatif à des vitesses égales.

III.5.1: 1^{er} cas :

Ω_i prend les valeurs en rad/s : $\Omega_1 = 10, \Omega_2 = 30, \Omega_3 = 40, \Omega_4 = 50$.

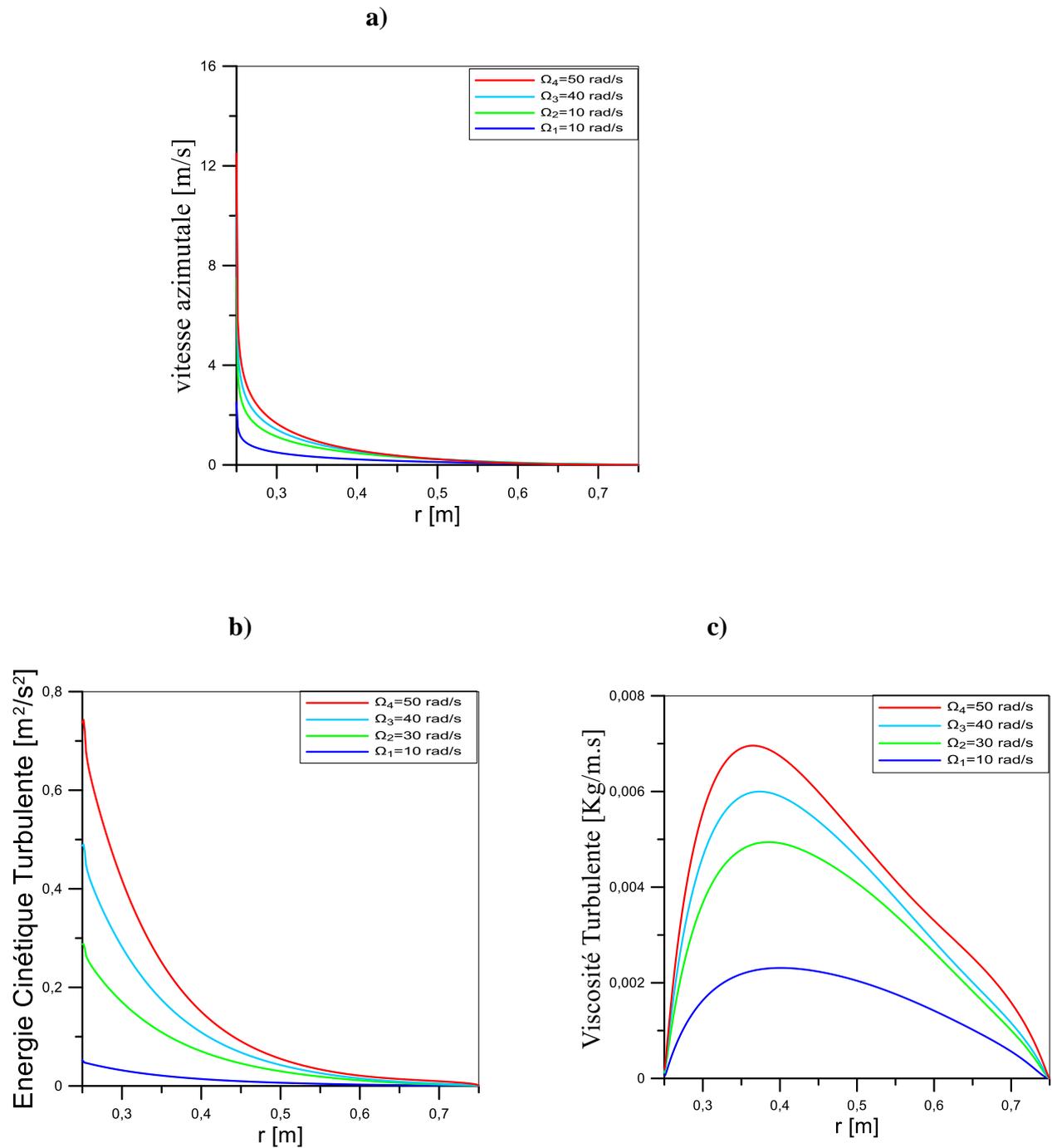


Figure III.2 : Evolution radiale de : a) Vitesse azimutale; c)Energie cinétique turbulente ; c) Viscosité turbulente.

On constate une forte (très faible) intensité de la turbulence au voisinage du cylindre intérieur (cylindre extérieur) qui est en rotation (immobile), chose ce qui est prévisible. La remarque principale est que le mouvement turbulent est concentré dans la moitié de l'espace annulaire proche du cylindre tournant.

III.5.2: 2^{ème} cas

Ω_e prend les valeurs en rad/s : $\Omega_1 = 10, \Omega_2 = 30, \Omega_3 = 40, \Omega_4 = 50$.

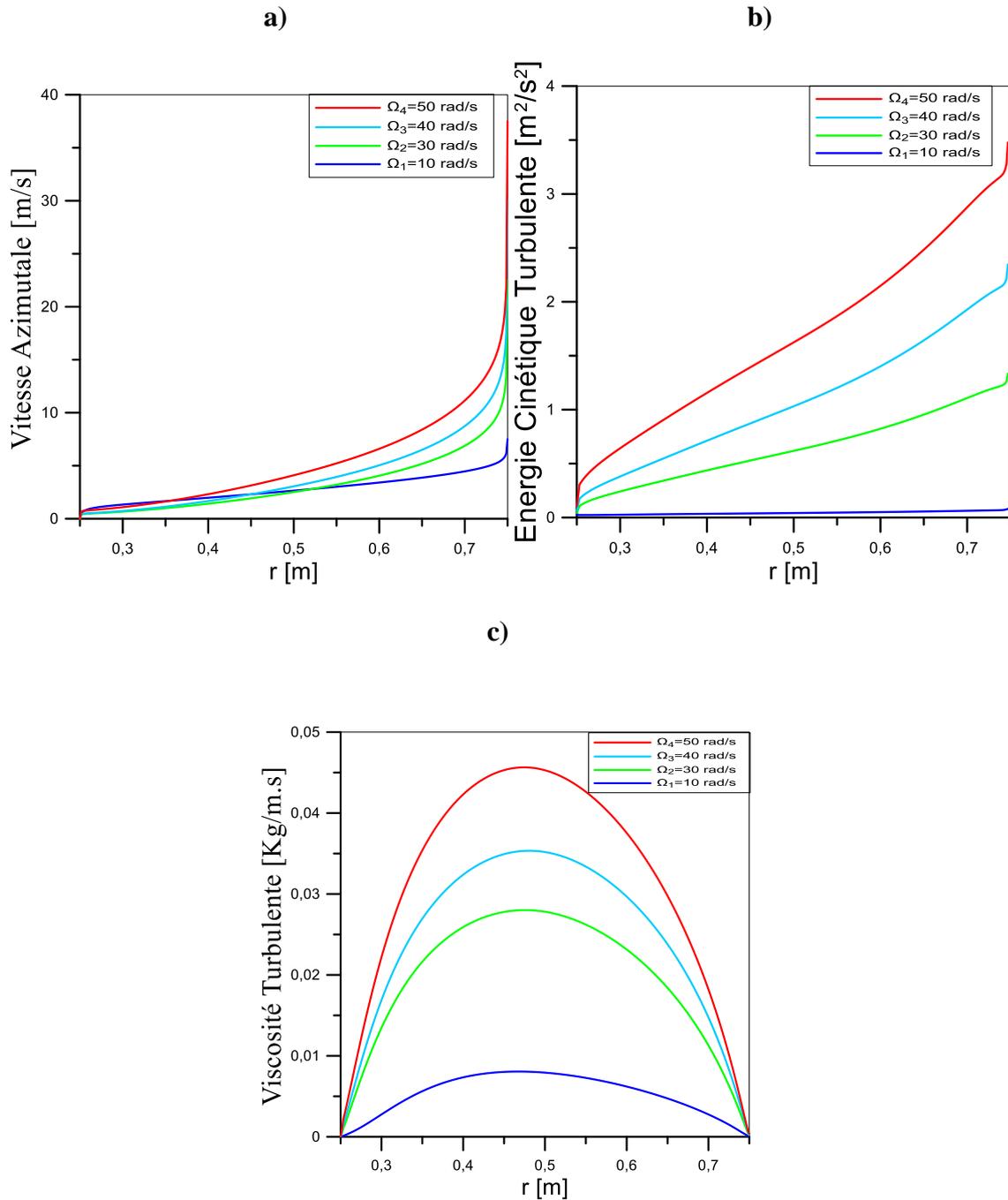


Figure III.3 : Evolution radiale de : a) Vitesse azimutale; b) Energie cinétique turbulente ; c) Viscosité turbulente.

Dans ce cas, la rotation du cylindre extérieur provoque une turbulence plus intense et une répartition dans pratiquement les deux tiers de l'espace annulaire. Pour des vitesses de rotation élevées la viscosité turbulente indique des quantités fluctuantes **maximales** dans la zone centrale de l'espace annulaire.

III.5.3: 3^{ème} cas

Les deux cylindres sont en rotation dans le même sens. Le rapport de vitesse $\omega = \frac{\Omega_e}{\Omega_i}$ est alors positif dans ce cas.

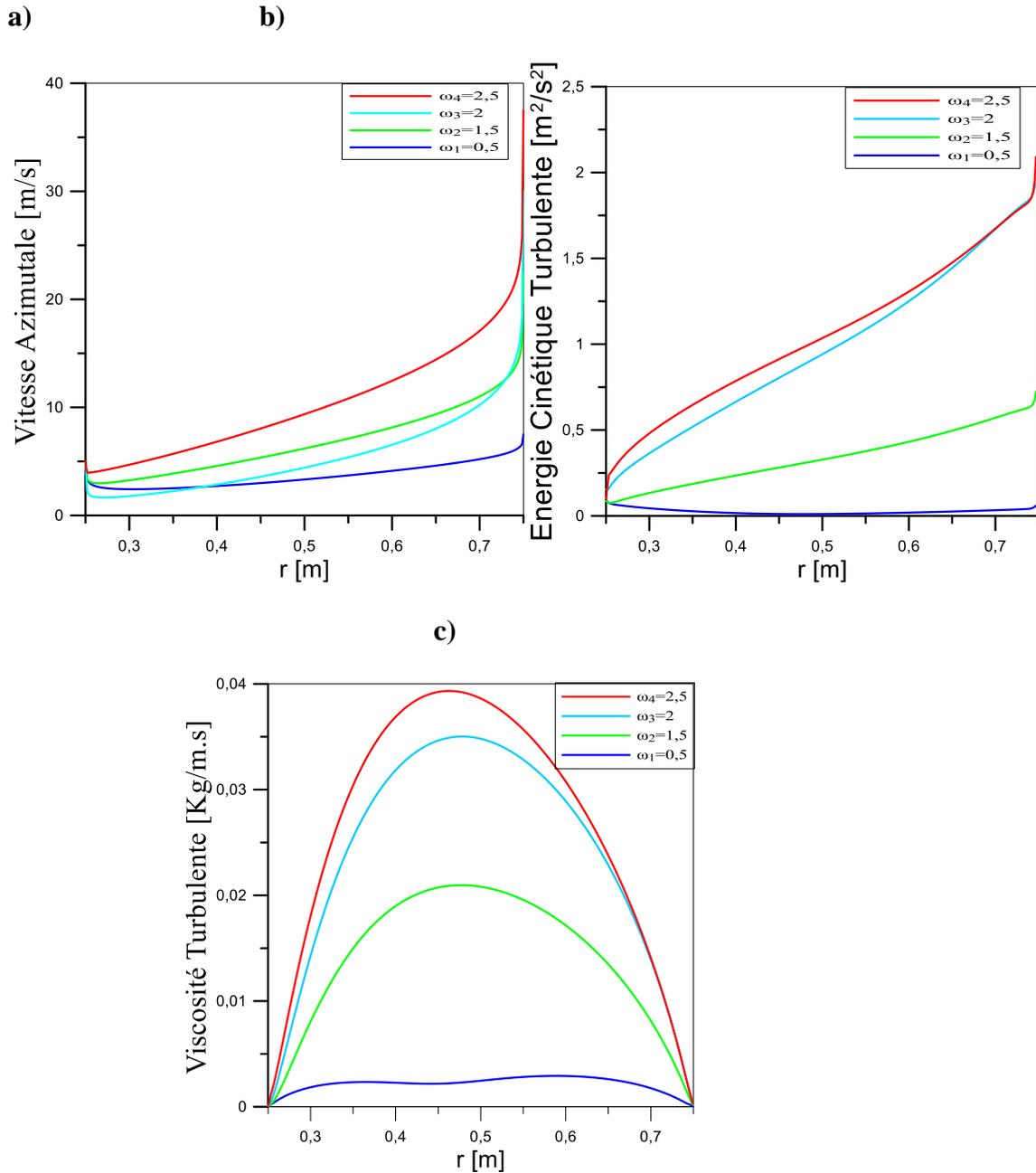
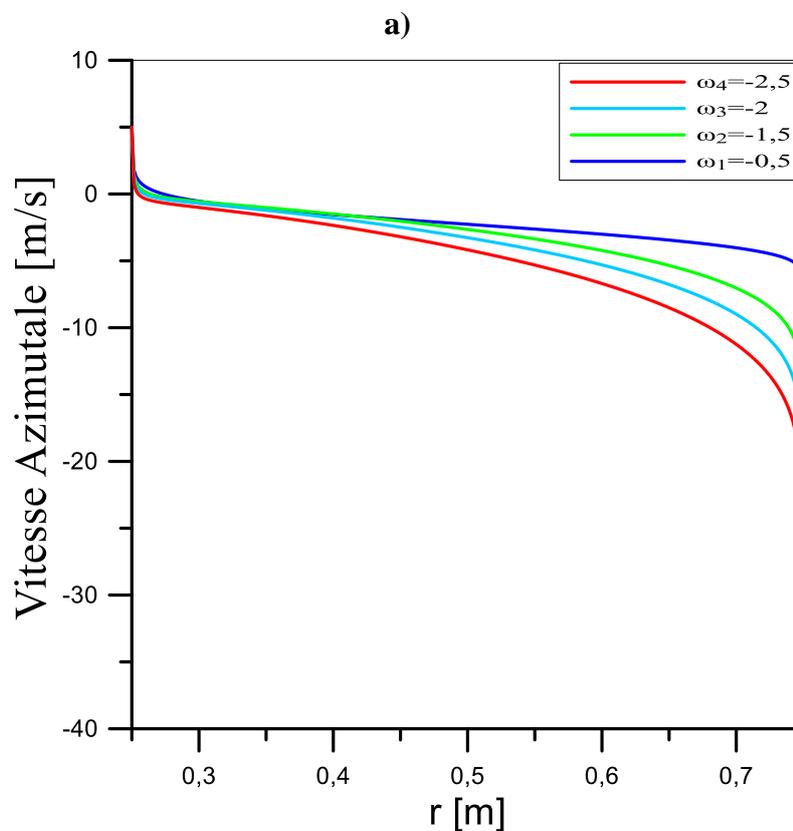


Figure III.4 : Evolution radiale de : a) Vitesse azimutale; b) Energie cinétique turbulente ; c) Viscosité turbulente.

On observe dans ce cas de faibles fluctuations turbulentes pour un rapport de vitesse inférieur à l'unité qui peut s'expliquer par l'absence de gradients importants de vitesse azimuthale. On signale aussi que pour des rapports de vitesse supérieurs à 2 la turbulence est plus intense et occupe la majeure partie de l'espace annulaire.

III.5.4: 4^{ème} cas

Les deux cylindres sont en mouvement contraotatif. Le rapport de vitesse $\omega = \frac{\Omega_e}{\Omega_i}$ est alors négatif dans ce cas.



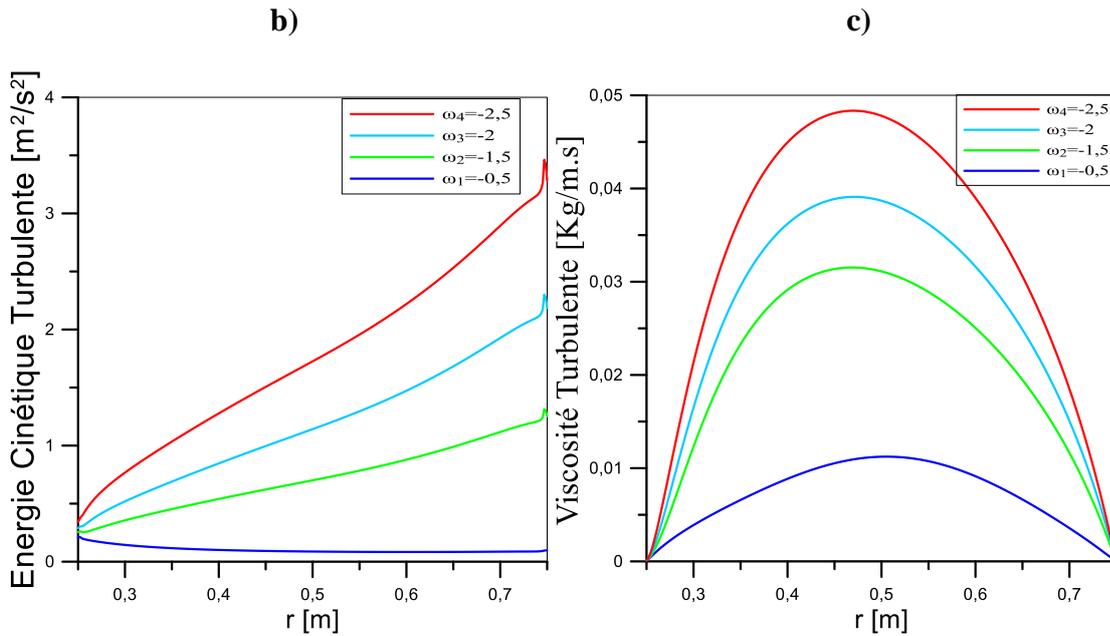
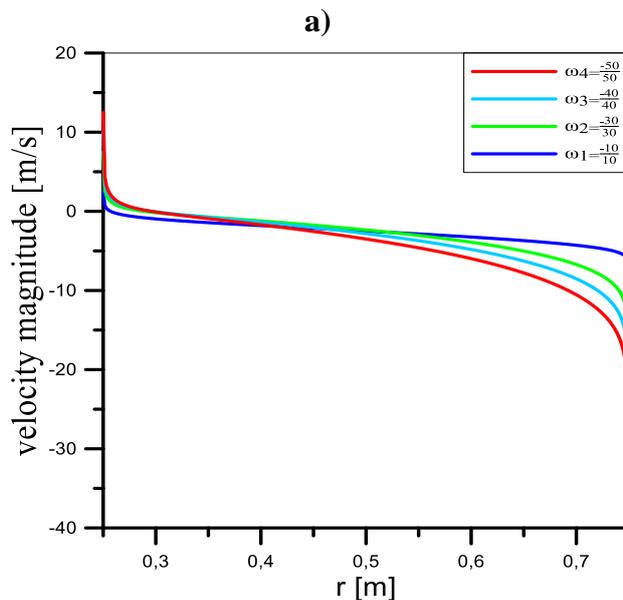


Figure III.5: Evolution radiale de : a) Vitesse azimutale; b)Energie cinétique turbulente ; c) Viscosité turbulente.

On remarque déjà l'existence de mouvement opposé de part et d'autre d'une en raison du mouvement contrarotatif des deux cylindres. Pour un faible rapport de vitesse le mouvement se limite au niveau des parois seulement. Par ailleurs, le mouvement turbulent est plus intense proche du cylindre extérieur pour un rapport de vitesse supérieur à l'unité.

III.5.5: 5^{ème} cas

Dans ce cas : $\frac{\Omega_e}{\Omega_i} = -1$



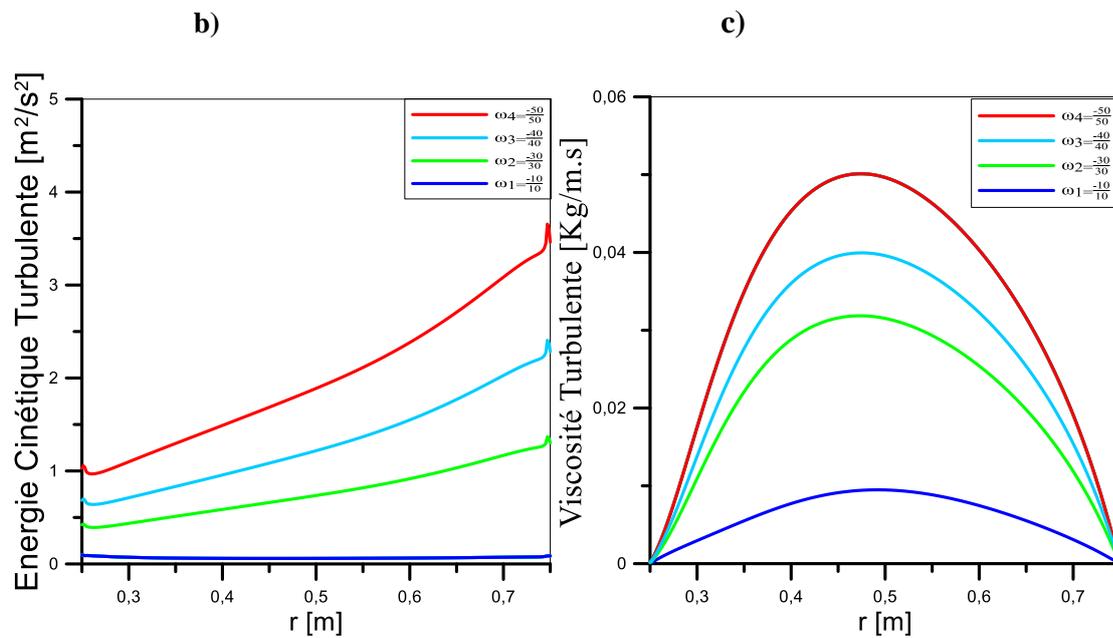


Figure III.6 : Evolution radiale de : a) Vitesse azimutale; b)Energie cinétique turbulente ; c) Viscosité turbulente.

Une légère différence est constatée par rapport aux résultats obtenus dans le cas précédent. Il s'agit notamment d'un mouvement moins intense proche du cylindre intérieur lorsque la vitesse de rotation est de 10rd/s ce qui n'était pas le cas dans le cas 4.

Globalement, on peut conclure que la configuration contrarotative est celle qui accentue le régime turbulent et que la rotation du cylindre extérieur a un effet plus important sur l'écoulement turbulent. Ce résultat est confirmé par le tableau ci-dessous :

	Cas ₁		Cas ₂		Cas ₃		Cas ₄		Cas ₅	
La vitesse de rotation [rad/s]	$\Omega_i=10$ $\Omega_e=0$		$\Omega_i=0$ $\Omega_e=10$		$\Omega_i=20$ $\Omega_e=10$		$\Omega_i=20$ $\Omega_e=-10$		$\Omega_i=10$ $\Omega_e=-10$	
Coefficient de frottement	R ₁	R ₂	R ₁	R ₂	R ₁	R ₂	R ₁	R ₂	R ₁	R ₂
	0,031	6,16 $\times 10^{-5}$	0,014	0,046	0,053	0,029	0,12	0,056	0,012	0,036
Contrainte de cisaillement à la paroi [Pa]	R ₁	R ₂	R ₁	R ₂	R ₁	R ₂	R ₁	R ₂	R ₁	R ₂
	0,019	3,77 $\times 10^{-5}$	0,009	0,028	0,033	0,018	0,074	0,034	0,01	0,021

Tab III.3 Les valeurs de Coefficient de frottement et de Contrainte de cisaillement à la paroi.

On remarque le cas 4 en contrarotatif engendre le plus grand coefficient de frottement au niveau de la paroi du cylindre intérieur, égale 2 fois plus celui du cas 3 (même sens de rotation). Dans le dernier cas, la contrainte à la paroi extérieure est 2 fois plus grande que celle de l'intérieure.

III.6 : Conclusion :

On peut conclure que la configuration contrarotative est celle qui accentue le régime turbulent et que la rotation du cylindre extérieur a un effet plus important sur l'écoulement turbulent, ce qui permet un contrôle du régime de l'écoulement via la vitesse de rotation du cylindre extérieur.

CONCLUSION
GENERALE

Conclusion générale

La présente étude a pour but la simulation d'un écoulement turbulent entre deux cylindres coaxiaux en rotation en utilisant un code de calcul ANSYS Fluent, le modèle de turbulence adopté est le RNG k- ϵ (modifié). Plusieurs cas correspondants à la rotation des deux cylindres sont envisagés avec un rapport de rayon égal à 3.

Les résultats peuvent être synthétisés dans les points suivants :

- Avec la modélisation adoptée, l'écoulement paraît être unidirectionnel avec une seule composante de vitesse qui est la composante azimutale.
- une forte (très faible) intensité de la turbulence au voisinage du cylindre tournant (cylindre immobile), lorsqu'un seul cylindre est en rotation, ce qui est prévisible. Globalement, le mouvement turbulent est concentré dans la moitié de l'espace annulaire proche du cylindre tournant.
- La rotation du cylindre extérieur provoque une turbulence plus intense et une répartition dans pratiquement les deux tiers de l'espace annulaire.
- Le mouvement similaire (même sens) des deux cylindres induit de faibles fluctuations turbulentes pour un rapport de vitesse (extérieur/intérieur) inférieur à l'unité qui peut s'expliquer par l'absence de gradients importants de vitesse azimutale. Puis le mouvement turbulent devient plus intense et occupe la majeure partie de l'espace annulaire pour des rapports de vitesse supérieurs à 2.
- Pour le mouvement contrarotatif des deux cylindres le mouvement turbulent est plus intense proche du cylindre extérieur pour un rapport de vitesse supérieur à l'unité, par contre, pour un faible rapport de vitesse le mouvement turbulent se limite au niveau des parois des deux cylindres seulement.

Globalement, on peut conclure que la configuration contrarotative est celle qui accentue le régime turbulent et que la rotation du cylindre extérieur a un effet plus important sur l'écoulement turbulent.

Comme perspective, il serait intéressant pour un travail futur de traiter ce problème avec d'autres modèles de turbulence, comme le RSM, dans le but d'aboutir à des résultats beaucoup plus proches de l'expérience, d'autres perspectives sont aussi envisageables comme faire une étude en tridimensionnel et éventuellement une étude des instabilités.

ANNEXES

ANNEXE A : Outils pour la modélisation et modèles de turbulence

Dans notre cas, on s'intéresse principalement aux modèles dits statistiques pour la simulation de la turbulence. Il apparaît donc nécessaire de définir les outils mathématiques qui vont permettre d'obtenir des équations moyennées à partir des équations instantanées du mouvement (en un sens que nous allons définir).

A.1 Approche de Moyennisation**A.1.1 Décomposition statistique de Reynolds :**

On peut définir la décomposition de Reynolds d'une quantité quelconque de l'écoulement $f(\vec{x}, t)$ en deux parties distinctes :

$$f = \bar{f} + f' \quad (\text{A.1})$$

\bar{f} : moyennetemporelle

f' : partie fluctuante

De part la définition de l'opérateur de moyenne on a $\overline{f'} = 0$

A.1.2 Règles de Reynolds

Lors de la moyennisation, on utilise les règles dites " règles de Reynolds", données comme suit :

$$\overline{\emptyset'} = 0$$

$$\overline{\overline{\emptyset}} = \overline{\emptyset}$$

$$\overline{f \emptyset} = \overline{f} \cdot \overline{\emptyset}$$

$\overline{f \cdot g} = \overline{f} \cdot \overline{g} + \overline{f' \cdot g'}$; où l'on voit apparaître le terme $\overline{f' \cdot g'}$ (nouvelle variable du problème)

$$\frac{\partial \overline{\emptyset}}{\partial x} = \overline{\frac{\partial \emptyset}{\partial x}}$$

A.1.3 Equations moyennées :

C'est essentiellement un outil de recherche qui permet de réaliser des expériences numériques sur des configurations académiques. Lorsqu'on s'intéresse à des écoulements réalistes, une alternative consiste à ne s'intéresser qu'aux quantités moyennes et donc à obtenir le système d'équations vérifiées par ces quantités. Pour ce faire, on applique l'opérateur de moyenne d'ensemble sur les équations instantanées en pratiquant la décomposition de Reynolds sur les inconnues du problème. Les nouvelles équations obtenues sont dites équations moyennées. Dans la littérature anglo-saxonne on utilise l'acronyme RANS (Reynolds Averaged Navier Stokes)

A.1.3.1 Les équations du mouvement moyen :

On notera :

$$u_i(\vec{x}, t) = U_i(\vec{x}) + u_i'(\vec{x})$$

Et (A.2)

$$p_i(\vec{x}, t) = P_i(\vec{x}) + p_i'(\vec{x})$$

En introduisant la décomposition de Reynolds dans l'équation de continuité et en prenant la moyenne d'ensemble, on obtient pour le champ moyen :

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{A.3})$$

Par soustraction de cette équation à l'équation de continuité du mouvement instantané, on obtient pour les fluctuations de vitesse :

$$\frac{\partial u_i'}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{A.4})$$

On remarque donc que les quantités moyennes et fluctuantes vérifient toutes les deux l'équation de continuité.

Les trois composantes de la vitesse moyenne sont données par :

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_j}{\partial x_j} + \overline{u_j' \frac{\partial u_i'}{\partial x_j}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (\text{A.5})$$

La condition d'incompressibilité sur les fluctuations implique que $\overline{u_j' \frac{\partial u_i'}{\partial x_j}} = \overline{\frac{\partial u_i' u_j'}{\partial x_j}}$.

On définit alors le tenseur de Reynolds par :

$$R_{ij} = -\rho \overline{u_i' u_j'} \quad (\text{A.6})$$

Finalement les équations moyennées s'écrivent :

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\tau_{ij}} + R_{ij}) \quad (\text{A.7})$$

Avec $\overline{\tau_{ij}} = \mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$.

On voit donc que sous cette forme les équations du champ moyen de vitesse sont différentes des équations instantanées puisqu'il apparaît dans ces équations un nouveau terme lié à l'effet du champ fluctuant. On peut assimiler l'effet du mouvement fluctuant à une loi de comportement non newtonienne :

Le tenseur de Reynolds est un tenseur symétrique :

$$R_{ij} = -\rho \begin{bmatrix} \overline{u' u' u' v' u' w'} \\ \overline{u' v' v' v' v' w'} \\ \overline{u' w' v' w' w' w'} \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

Ce tenseur introduit donc six inconnues supplémentaires (le nombre d'inconnues total est dix, trois pour la quantité de mouvement, un pour la continuité et six pour le tenseur). On a donc un problème de fermeture. Le rôle des modèles de turbulence sera donc de fournir des lois phénoménologiques (algébriques ou différentielles) pour fermer le problème.

A.1.4 Le problème de la fermeture:

Comme on vient de le voir, la décomposition de Reynolds a permis d'écrire un certain nombre d'équations pour les inconnues du problème. Cependant, on introduit à chaque étape

des inconnues supplémentaires. Il s'agit alors de fermer le problème en introduisant des modèles pour les inconnues supplémentaires.

A.1.4.1 Classification des modèles de turbulence :

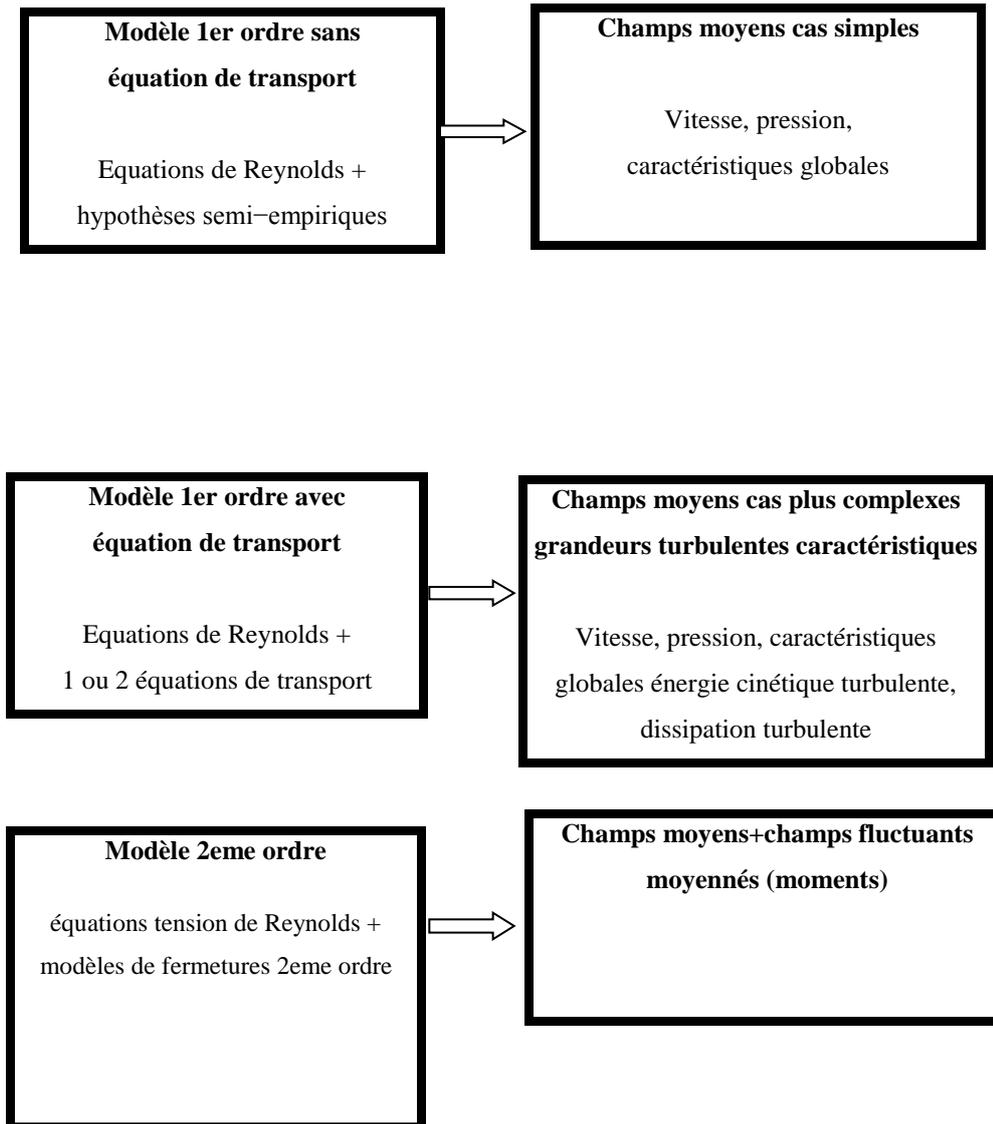
On distingue généralement deux grandes classes de modèles :

- Les modèles à viscosité turbulente (modèles du premier ordre) basés sur l'hypothèse de Boussinesq, qui consiste à modéliser directement les tensions de Reynolds à l'aide du concept de viscosité turbulente.
- Les modèles du second ordre : les tensions de Reynolds sont calculées directement, la modélisation portant sur les moments d'ordre supérieur.

Pour les modèles du premier ordre, on introduit la classification suivante selon le nombre d'équations d'évolutions supplémentaires du modèle :

- modèle à 0 équation (longueur de mélange).
- modèle à 1 équation (k , énergie cinétique turbulente).
- modèle à 2 équations ($k-\varepsilon$, $k-w$, $k-l$)

Il est bien évident que la qualité des résultats de simulation d'écoulement turbulent est très liée au modèle utilisé. Le choix du modèle sera subordonné au type d'information que l'on veut obtenir à partir de la simulation. D'un point de vue industriel, les modèles du premier ordre à deux équations permettent généralement d'obtenir des résultats satisfaisants moyennant certaines adaptations du modèle suivant le cas considéré. Cependant, comme on le verra par la suite, des comportements pathologiques peuvent apparaître dans certains types d'écoulement. L'utilisation de modèles plus sophistiqués comme les modèles au second ordre peut s'avérer nécessaire. On a résumé sur le tableau suivant, le type d'information que l'on peut obtenir suivant le modèle employé.



A.2 Modèles de turbulence courants

A.2.1 Modèle $k-\varepsilon$:

C'est un modèle à deux équations de transport pour deux paramètres de turbulence proposé par *Launderet Jones* (1972)[25] qui se base sur le concept de *Boussinesq*(1877) utilisant l'analogie entre l'échange de quantité de mouvement par interaction moléculaire à l'échelle microscopique (contraintes visqueuses) et l'échange de quantité de mouvement par la turbulence à l'échelle macroscopique (contraintes de Reynolds).

A.2.1.1 Concept de Boussinesq :

$$\overline{u_i' u_j'} = \nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \quad (\text{A.9})$$

Avec :

ν_t : La viscosité turbulente (m^2s^{-1}).

k : L'énergie cinétique turbulente (m^2s^{-2}).

δ_{ij} : Symbole de Kroneker.

On remplace l'équation (2.33.b) dans l'équation (2.33.a), on obtient :

$$\overline{u_i' u_j'} = \nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j'}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \quad (\text{A.10})$$

L'idée du modèle k- ϵ est que l'on peut construire à partir de ces quantités une viscosité turbulente propre à l'écoulement, ou la viscosité turbulente est donnée par la relation suivante :

$$\nu_t = C_\mu \left(\frac{k^2}{\epsilon} \right) \quad (\text{A.11})$$

Avec : $\mu_t = \rho \nu_t$, viscosité dynamique turbulente.

L'expérience montre que cette relation est bien vérifiée pour des écoulements à grand nombre de Reynolds à condition d'avoir une turbulence homogène.

C_μ : est un coefficient sans dimension qui doit être évalué expérimentalement.

k : est l'énergie cinétique turbulente défini par :

$$k = \frac{1}{2} \overline{u_i'^2} = \frac{1}{2} \left(\overline{(u'_1)^2} + \overline{(u'_2)^2} + \overline{(u'_3)^2} \right) \quad (\text{A.12})$$

ϵ : taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente k donné par la relation suivante :

$$\epsilon = \nu \frac{\partial u_i' u_i'}{\partial x_j \partial x_j} \quad (\text{A.13})$$

Ce terme de dissipation qui apparaît dans l'équation de l'énergie cinétique de turbulence reste à déterminer. L'échelle typique de longueur des grosses structures de la turbulence L est déduite de : $\varepsilon = \frac{K^{\frac{3}{2}}}{L}$

A.2.1.2 Equation modélisée de k :

L'équation modélisée de l'énergie cinétique de turbulence s'écrit sous la forme semi-empirique suivante :

$$\underbrace{\frac{\partial k}{\partial t} + \overline{U}_k \frac{\partial k}{\partial x_j}}_1 = \underbrace{v_t \left(\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j}}_2 + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\frac{v}{\sigma_{k,L}} + \frac{v_t}{\sigma_{k,t}} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right)}_3 - \underbrace{\varepsilon}_4 \quad (\text{A.14})$$

Les termes de l'équation (A.20) sont dénommés comme suit :

- (1) le taux de variation de l'énergie cinétique k .
- (2) le transport par diffusion de l'énergie cinétique.
- (3) la production par cisaillement de l'énergie cinétique turbulente.
- (4) la dissipation de l'énergie cinétique turbulente k .

A.2.1.3 Equation modélisée de ε :

L'équation pour ε s'obtient en prenant le rotationnel des équations des fluctuations de vitesse et ensuite en faisant la moyenne d'ensemble. La dérivation de cette équation est relativement aisée, mais les calculs restent fastidieux. On donne donc directement le résultat :

$$\underbrace{\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \overline{U}_k \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j}}_a = \underbrace{C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} v_t \left(\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j}}_b + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\frac{v}{\sigma_{k,L}} + \frac{v_t}{\sigma_{k,L}} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right)}_c - \underbrace{C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k}}_d \quad (\text{A.15})$$

- (a) le taux de variation de ε .
- (b) le taux de production (source) de ε .
- (c) le transport par diffusion de la dissipation de l'énergie turbulente.
- (d) la dissipation (puits) de ε .

Ces deux équations donnant k et ε qui permettent à leur tour de calculer la viscosité turbulente m_t , connaissant m_t , on peut déduire le tenseur des contraintes de Reynolds.

Les termes diffusifs sont du type gradient. $\sigma_{k,L}$ et $\sigma_{\varepsilon,L}$ étant les nombres de Prandtl laminaire et turbulent associés à ε . En effet, les sources et puits de k sont multipliés par $\left(\frac{\varepsilon}{k}\right)$ pour corriger l'unité et des constantes sont injectées et ajustées empiriquement pour satisfaire des conditions d'écoulements turbulents de base.

A.2.1.4 Calages des constantes :

L'adaptation des constantes standards du modèle donné par Launder et Spalding (1974) rend le système d'équations opérationnel. Elles sont réunies dans le Tableau 1 :

C_μ	$C_{\varepsilon 1}$	$C_{\varepsilon 2}$	σ_k	$\sigma_{k,t}$	σ_ε	$\sigma_{\varepsilon,t}$
0.09	1.44	1.92	1	1	1.22	1.25

Tableau A1: Valeurs des constantes du modèle k- ε .

A.2.2 Modèle RNG k- ε (modifié) :

Le modèle RNG, développé par le groupe de renormalisation (Yakhot & Smith, 1992) consiste en une estimation au cours du calcul de la constante $C_{\varepsilon 1}$, remplacée dans l'équation de dissipation par $C''_{\varepsilon 1}$ donnée par l'expression (6). Cette expression ajoute un terme fonction du taux de déformation η l'équation du taux de dissipation le rendant ainsi moins diffusif.

$$C''_{\varepsilon 1} = C_{\varepsilon 1} - \frac{\eta \left(1 - \frac{\eta}{\eta_0}\right)}{1 + \beta \eta^3} \quad (\text{A.16})$$

Avec

$$\eta = \frac{\varepsilon}{k} \sqrt{\frac{p}{\eta_t}} \quad (\text{A.17})$$

C_μ	$C_{\varepsilon 1}$	$C_{\varepsilon 2}$	σ	η_0	β
0.085	1.42	1.62	1	4.38	0.015

Tableau A2: Valeurs des constantes du modèle RNG k- ε .

La différence principale entre la version standard et RNG k- ε [26] est dans l'équation du taux de la dissipation turbulente d'énergie. Dans les écoulements à taux de contraintes

élevés, le modèle RNG prévoit une faible viscosité turbulente (c'est-à-dire un taux de dissipation ε élevé et une production de turbulence k faible) que le modèle standard. Bien que le modèle RNG $k-\varepsilon$ a été découvert pour faire mieux que le modèle standard pour les écoulements avec une grande courbure des lignes de courant, et aussi non encore validé intensivement par les chercheurs que le modèle $k-\varepsilon$.

ANNEXE B : Procédure numérique

Introduction

Les phénomènes physiques en général obéissent à des lois et à des systèmes d'équations mathématiques. Pour notre étude, il s'agit essentiellement d'équations aux dérivées partielles du second ordre à coefficients constants, pour résoudre ces équations on utilise une méthode numérique. On a déjà évoqué dans le chapitre précédent l'impossibilité de l'utilisation de la résolution analytique pour notre problème. Nous adoptons donc une résolution numérique qui nécessite une discrétisation, nous permettant de transformer le système d'équation aux dérivées partielles en un système d'équations algébriques.

Dans cette annexe, on décrit la méthode numérique utilisée pour résoudre les équations de base formulées dans le 2^{ème} chapitre, aussi nous citons les étapes principales de cette méthode.

Généralement, dans le cas d'un milieu continu, la solution numérique est obtenue avec l'approche des volumes de contrôle [27].

B.1 Choix de la méthode de résolution

Il faut intervenir sur le concept de la discrétisation donnant un système d'équations algébriques non linéaires qui décrivent les propriétés discrètes du fluide aux nœuds dans le domaine de solution. La discrétisation des équations différentielles aux dérivés partielles, se fait par différentes méthodes numériques. Parmi ces méthodes, nous avons choisi celle des volumes finis.

La méthode des volumes finis a fait ses preuves dans différents domaines de la physique, mécanique des fluides, transfert thermique, transfert massique...etc. Elle s'applique aux problèmes linéaires ou non linéaires, stationnaires ou non stationnaires.

B.2 Principe de la méthode des volumes finis

La méthode des volumes finis a été décrite pour la première fois en 1971 par Patankar et Spalding et publiée en 1980 par Patankar [28].

Cette dernière (MVF) est une méthode numérique, dans laquelle, on divise le domaine de calcul en un nombre fini de sous-domaines élémentaires, appelés volumes de contrôle en (3D), des surfaces en (2D) et segments en (1D). La technique des volumes finis consiste à intégrer les équations aux dérivées partielles, qui décrivent le phénomène physique, sur chaque volume de contrôle ; puis la discrétisation du domaine considéré, en choisissant un schéma convenable qui représente la variation de notre quantité physique.

On montre, ci-dessous, un exemple de volume de contrôle bidimensionnel, chacun de ces volumes de contrôle contenant un nœud dit : « nœud principal » (p). Les faces de ce volume sont localisées aux points(e) et (w) dans la direction (r) qui déterminent respectivement les faces « Est » et « Ouest », et aux points (n) et (s) dans la direction (θ), qui indiquent les faces

« Nord » et « Sud ». On appelle respectivement les points qui sont au voisinage de « p » sur la direction r, (E : Est) et (W : West) et les voisins dans la direction (θ), (N : Nord) et (S : Sud).

On représente dans la figure suivante un volume de contrôle bidimensionnel en coordonnées cylindriques dans le plan (r, θ).

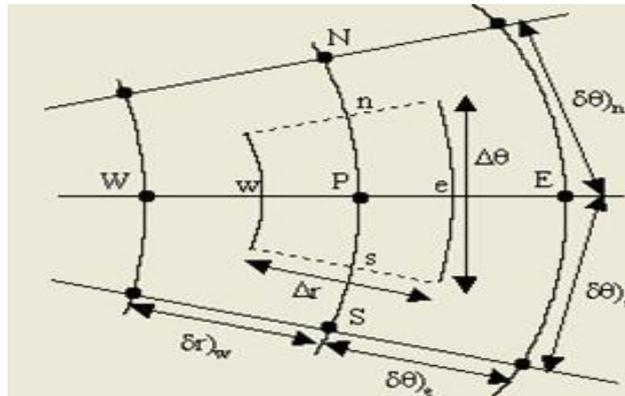


Figure B.1 Volume de contrôle bidimensionnel en coordonnées cylindriques dans le plan (r, θ).

B.3 Avantages de la méthode MVF

On peut citer certains de ses avantages :

- Les équations ont une propriété de conservation. Cela signifie que l'extension du principe de conservation écrit sous une forme discrétisée pour un volume fini typique est vérifiée pour l'ensemble du domaine numérique (conservation de flux dans tout le

domaine de solution), on peut résumer tout cela dans la préservation du caractère conservatif des équations sur chaque volume de contrôle (continuité des flux aux interfaces), valable pour n'importe quelle finesse du maillage.

- Tous les coefficients de la méthode des volumes finis sont toujours positifs.
- Son côté pratique et sa maniabilité lors de la résolution de cette classe de problèmes, les problèmes convectifs-diffusifs.
- Elle est facilement utilisable avec des maillages non structurés. On peut dire que sa formulation ne prend pas en compte la complexité du maillage, pour ce qui est de la discrétisation des lois de conservation.
- Elle est applicable aux géométries complexes.
- Temps de calcul et stockage avec une mémoire raisonnable.

B.4 Etapes de la méthode des volumes finis

La méthode des volumes finis passe par des étapes qui sont :

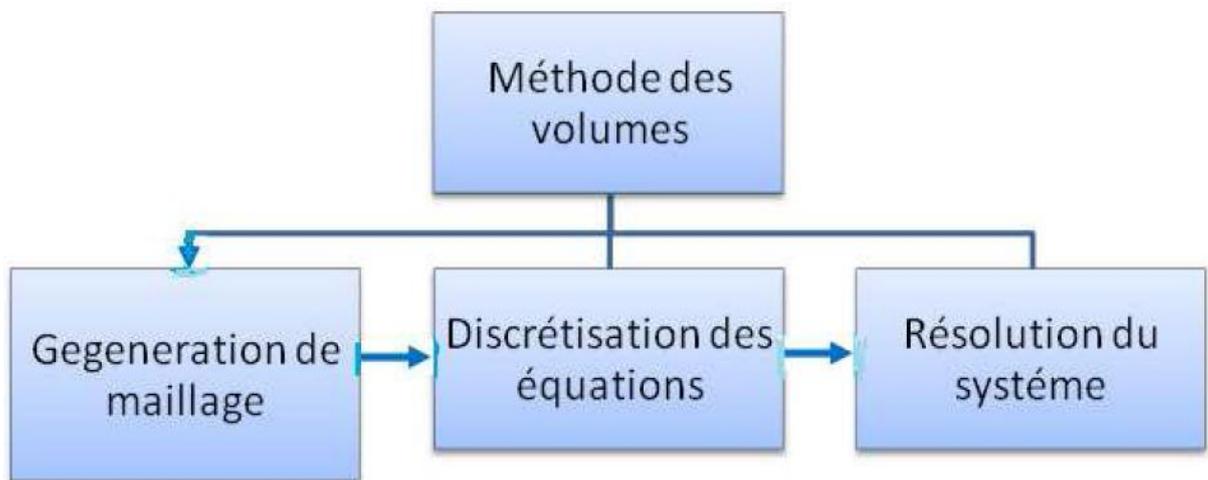


Figure B.2 Etapes de méthodes des volumes finis

B.4.1 Maillage du domaine physique

C'est la subdivision du domaine d'étude en grilles longitudinales et transversales dont l'intersection représente un nœud, ou on trouve la variable (p) et les composantes (u_r) et

(u_θ) de vecteur vitesse qui se trouve au milieu des segments reliant deux nœuds adjacents. La discrétisation du domaine est obtenue par un maillage constitué d'un réseau de points.

Les grandeurs scalaires pression, température, sont stockées dans le nœud (P) du maillage, tandis que grandeurs vectorielles (u_r) et (u_θ) sont stockées au milieux des segments reliant les nœuds. L'équation générale du transport est intégrée sur le volume de contrôle associé aux variables scalaires et les équations de quantités de mouvement sont intégrées sur le volume de contrôle associé aux composants de vitesses.

Le volume de contrôle de la composante radiale (u_r) est décalé suivant la direction (r) par rapport au volume de contrôle principal, celui de la composante azimutale (u_θ) est décalé suivant la direction de (θ) .

Ce type de maillage est dit maillage décalé permet une bonne approximation des flux convectifs est une meilleure évaluation des gradients de pression ainsi une stabilisation numérique de la solution.

La construction des volumes de contrôle et le maillage décalé sont montrés dans le schéma suivant :

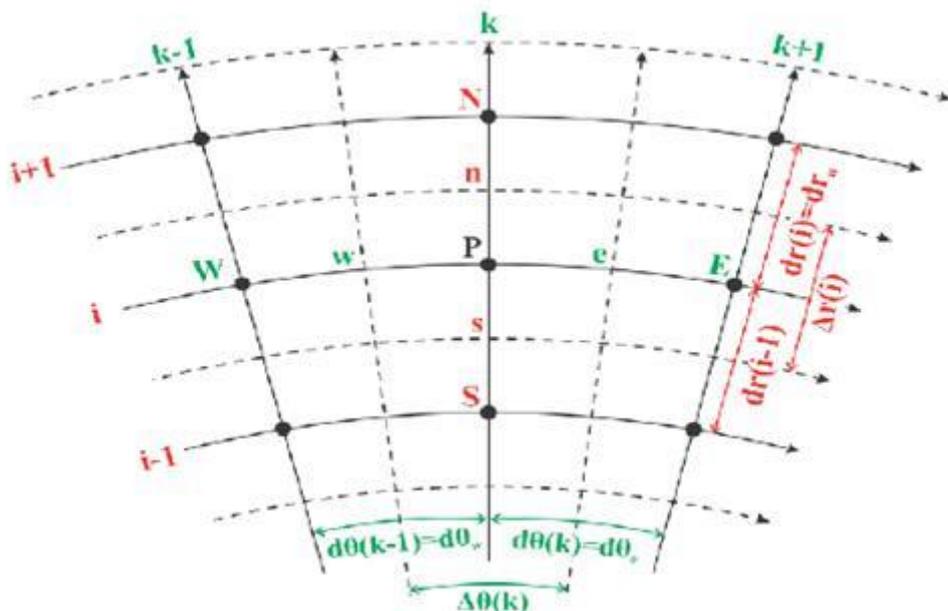


Figure B.3 Projection du volume fini dans le plan (r, θ) .

B.4.2 Discrétisation des équations modèles

Les équations de conservation présentées précédemment peuvent être écrites sous une forme commune (B.1). Cette formulation permet de ne pas réitérer le travail de discrétisation pour chaque équation.

L'équation générale de transport d'une variable pour un écoulement incompressible dans le cas stationnaire s'écrit dans le système cylindrique comme suit :

$$\underbrace{\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r \phi) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_\theta \phi)}_R = \underbrace{\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\alpha r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\alpha \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right]}_N + S_\phi \quad (\text{B.1})$$

R : Représente le terme de transport par convection.

N : Représentation le terme de transport par diffusion.

S_ϕ : Représentation le terme source.

Avec :

u_r : Composante radiale de la vitesse.

u_θ : Composante azimutale de la vitesse.

α : Coefficient de diffusion.

L'équation (B.1) peut être écrite sous la forme :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (J_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (J_\theta) = S_\phi \quad (\text{B.2})$$

Avec

$$J_r = r u_r \phi - \frac{1}{r} \alpha \frac{\partial \phi}{\partial r}$$

$$J_\theta = u_\theta \phi - \frac{1}{r} \alpha \frac{\partial \phi}{\partial \theta}$$

J_r et J_θ sont les flux totaux (convection et diffusion) par unité de surface dans les directions r et θ ; La discrétisation consiste à transformer l'équation différentielle de transport en un

système d'équations algébrique. L'équation (B.2) est d'abord intégrée sur le volume de contrôle :

$$\int_s^n \int_w^e \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (J_r) r dr d\theta + \int_s^n \int_w^e \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (J_\theta) r dr d\theta = \int_s^n \int_w^e S_\phi r dr d\theta \quad (\text{B.3})$$

Pour pouvoir approximer l'équation sous forme algébrique, on considère les hypothèses suivantes :

- La variable généralisée de varie linéairement entre les nœuds principaux dans les deux directions.
- Les termes convectifs et diffusifs sont uniformes à travers les faces correspondantes.
- Le terme source est uniforme sur le volume de contrôle.

a) Intégration du flux total

L'intégration du terme convectif et diffusif pour tout le volume de contrôle est :

$$\int_s^n \int_w^e \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (J_r) r dr d\theta + \int_s^n \int_w^e \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (J_\theta) r dr d\theta = [(J_r)_n - (J_r)_s] \Delta\theta + [(J_\theta)_e - (J_\theta)_w] \Delta r \quad (\text{B.4})$$

Si on pose :

$$\begin{aligned} J_n &= (J_r)_n \Delta\theta & ; J_s &= (J_r)_s \Delta\theta \\ J_e &= (J_\theta)_e \Delta r & ; J_w &= (J_\theta)_w \Delta r \end{aligned}$$

Donc l'expression (B.4) devient :

$$\int_s^n \int_w^e \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (J_r) r dr d\theta + \int_s^n \int_w^e \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (J_\theta) r dr d\theta = J_n - J_s + J_e - J_w \quad (\text{B.5})$$

b) Intégration du terme source

L'intégration du terme source pour tout le volume de contrôle est :

$$\int_s^n \int_w^e S_\phi r dr d\theta = \bar{S}_\phi r \Delta r \Delta\theta \quad (\text{B.6})$$

\bar{S}_ϕ La valeur moyenne du terme source sur ce volume

Quand le terme source dépend de la variable dépendante. Cette dépendance doit être exprimée par une relation linéaire, ceci permettra d'utiliser les méthodes de résolution des systèmes linéaires.

La linéarisation est l'évaluation de la valeur moyenne \bar{S}_ϕ qui peut être en fonction de la variable dépendante, leur valeur est donc calculée à chaque itération à partir des nouvelles valeurs des variables dépendantes.

Suite à la résolution des équations algébriques adoptées, le terme source sera linéarité de façon à force la convergence, de sorte que :

$$S_\phi = S_e + S_p \phi_p \quad (\text{B.7})$$

Ou :

S_e : Est la partie constante qui se dépend pas explicitement de ϕ_p

S_p : Est le pente ϕ_p

Il est nécessaire que le coefficient S_p soit inférieur a zéro pour que la solution soit numériquement stable et que la convergence soit plus rapide.

c) Discrétisation spatiale :

Discrétiser une équation différentielle aux dérivées partielles revient à remplacer l'information continue exacte, contenue dans cette équation par une information discrète contenue dans une équation algébrique.

L'approximation de la variable généralisée aux interfaces du volume de contrôle se fera donc avec le choix du schéma de discrétisation approprié. Le rôle du schéma intervient pour expliquer comment évaluer les flux de diffusion et de convection sur les faces du volume de contrôle après intégration.

La forme stationnaire de l'équation (B.3) est :

$$J_n - J_s + J_e - J_w = (S_e + S_p \phi_p) r_p \Delta r \Delta \theta \quad (\text{B.8})$$

Où J_i ($i=n, s, e, w$) est le flux total évalué sur chaque face du volume de contrôle. Ce flux est composé de deux parties : flux convectif et diffusif.

Par exemple :

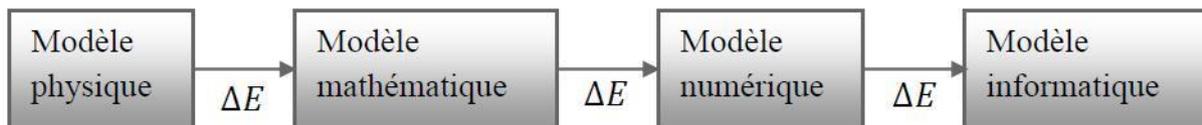
$$J_n = \left(r U_p \phi - r \alpha \frac{\partial \phi}{\partial r} \right)_n$$

Pour évaluer la variable ϕ_i à l'interface du volume de contrôle, on utilisera un des schémas de discrétisation.

B.5 Modélisation numérique

L'objectif des méthodes numériques est de fournir une solution approchée du comportement réel des phénomènes physiques. Les phénomènes physiques possèdent des caractères tris dimensionnels instation-temporelle et non linéaire c'est-à-dire tris complexes.

Le rôle du modélisateur est de simplifier suffisamment le problème tout en conservant, le mieux possible, les caractères pertinents l'originalité du phénomène physique étudié.



« Boucle de modélisation »

E : représente l'erreur quand on passe de l'état à l'autre.

Dans notre cas, les écoulements des fluides, que ce soit on régime laminaire ou turbulent, sont décrits par un système d'équations aux dérivées partielles (E.D.P). Ainsi, tous les phénomènes physiques accompagnant les écoulements sont régis par ce système formé par les équations de continuité, de quantité de mouvement et d'énergie qu'il convient de résoudre pour déterminer les caractéristiques du champ dynamique et du champ thermique.

B.6 Simulations sur ANSYS (Fluent)

a) **ANSYS Fluent** : Ce logiciel permet d'effectuer des simulations en matière de mécanique des fluides. Il porte le nom des compagnies qui les ont développés, rachetées par ANSYS.Inc respectivement en février 2003 et en février 2006. *Fluent* est un solveur : il ne comporte pas de mailleur (le maillage doit être réalisé avec un logiciel de maillage, Gambit par exemple, qui est également édité par ANSYS). Il est très utilisé dans l'industrie à travers le monde. Il est souvent considéré comme une référence dans le domaine de la modélisation fluide. Le paramétrage du modèle se fait par une interface graphique. Il dispose d'une interface de scripts pour automatiser les processus de calcul. L'un des intérêts de ce logiciel de simulation généraliste, est qu'il dispose d'un nombre relativement important de modèles, pouvant faire face à divers aspects de la mécanique des fluides : écoulements dyphasiques (miscible, non miscible, cavitation, solidification), turbulence (LES, K- ϵ , K- ω , Reynolds stress...), combustion (pré-mélangé et non pré-mélangé), transport de particules, écoulements en milieux poreux, maillages mobiles et dynamiques avec reconstruction du maillage, entre autres. Les schémas numériques temporels et spatiaux peuvent être modifiés pour améliorer la convergence. Fluent est parallélisé et permet de tirer parti de systèmes multiprocesseurs aussi bien au sein d'une seule machine qu'en réseau (cluster, dualcore, plateforme multi-CPU).

b) **ANSYS Workbench** : Cette plate-forme propose une approche différente dans la construction d'un modèle en réutilisant le code ANSYS initial. Elle est particulièrement adaptée au traitement de cas à la géométrie complexe (nombreux corps de pièces) et aux utilisateurs non confirmés dans le domaine du calcul. Dans cet environnement, l'utilisateur travaille essentiellement sur une géométrie et non plus sur le modèle lui-même. La plate forme est donc chargée de convertir les requêtes entrées par l'utilisateur en code ANSYS avant de lancer la résolution.

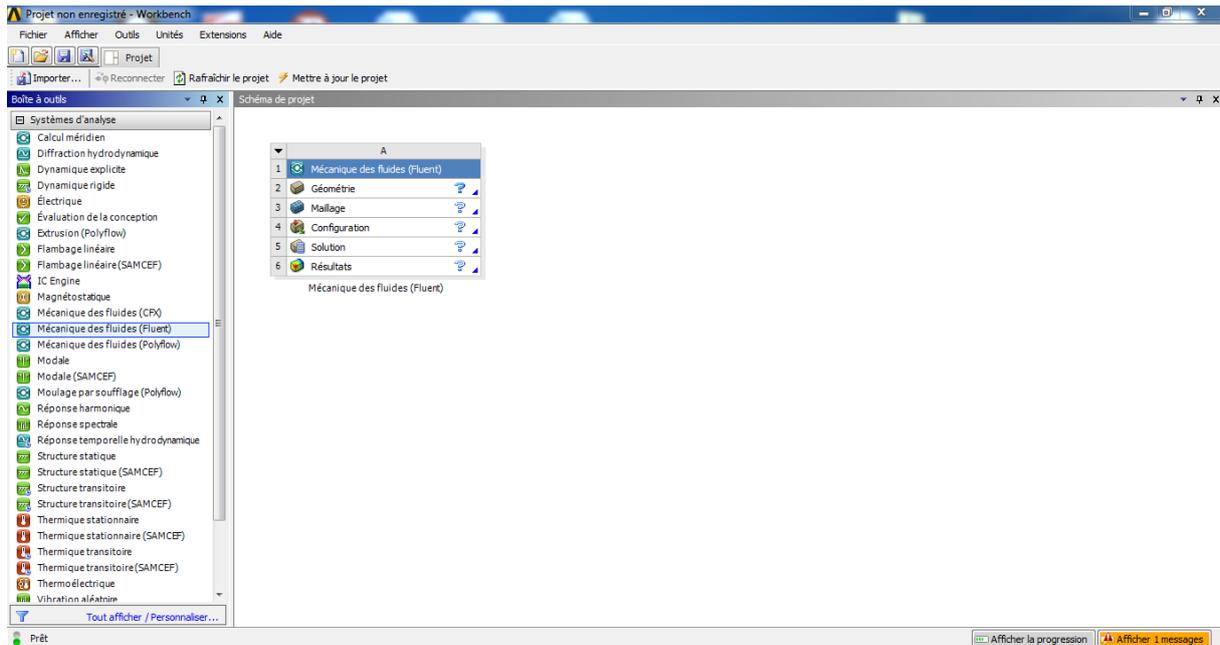


Figure B.4 ANSYS Workbench.

c) Construction de la géométrie

La finalité de la construction de la géométrie est de définir le domaine de calcul qui sera des faces dans un problème en deux dimensions.

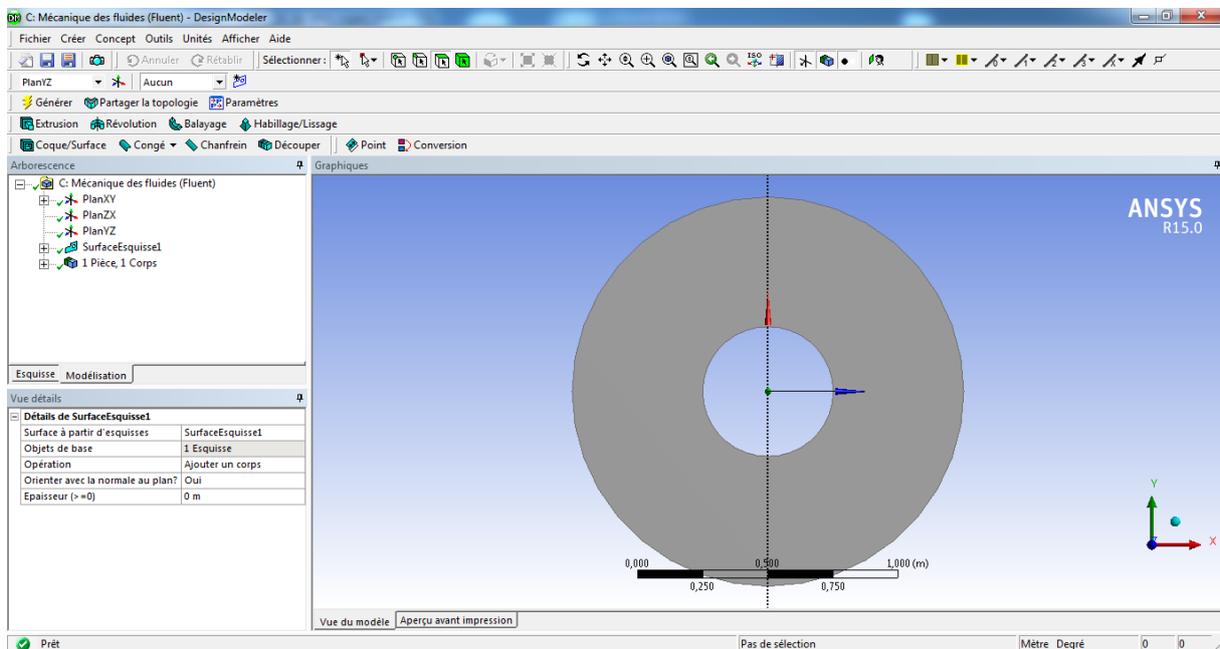


Figure B.5 Géométrie étudiée sous ANSYS Workbench.

d) Maillage

Etant donné que la géométrie du problème est régulière (rectangulaire ou circulaire par exemple), le choix du maillage est simple. Les lignes du maillage suivent souvent les directions de coordonnées.

Après avoir énumérer les différents types de maillage, on a opté pour un maillage quadratique dans la face qui ferme le domaine. Globalement le maillage à l'allure suivante :

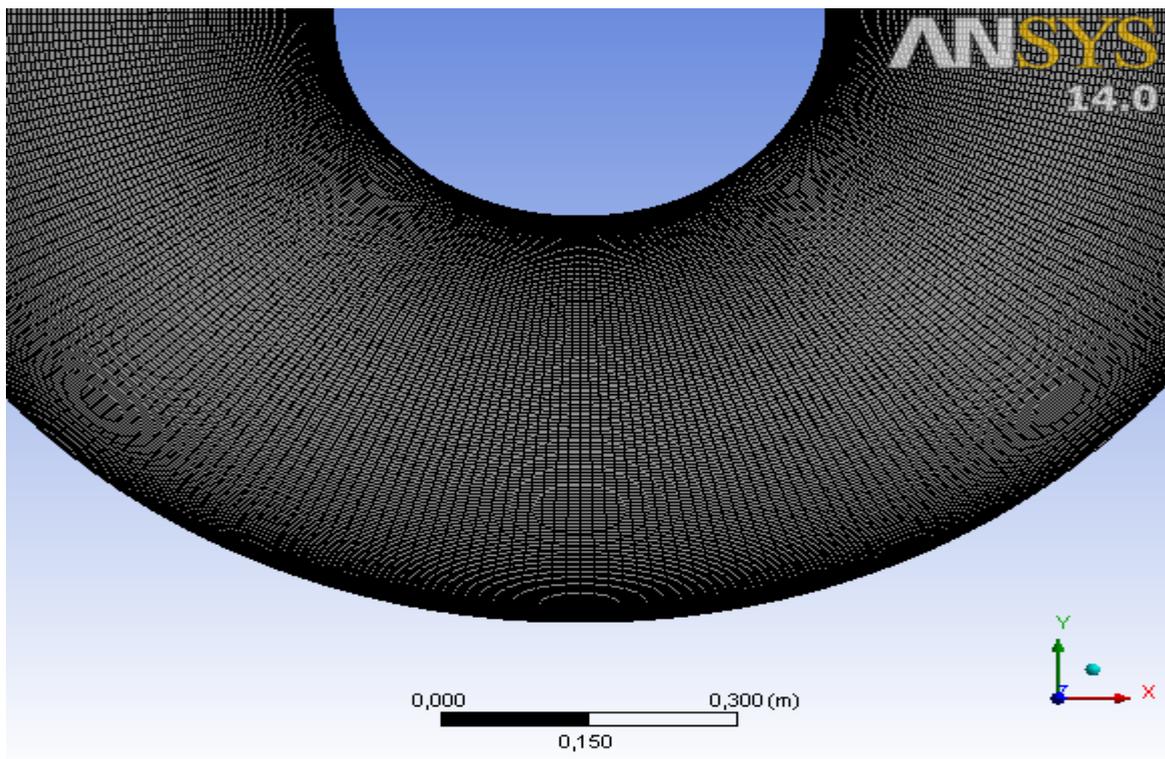


Figure B.6 Maillage utilisé (Maillage quadratique)

B.6.1 Créer la géométrie et le maillage dans ANSYS Workbench.

Etapes à suivre pour la création de la géométrie :

Etape 1 : Création de l'esquisse

Etape 2 : création des deux cylindres.

Etape 3 : Création de domaine.

Etape 4 : Maillage de la surface.

Etape 5 : Les conditions aux limites dans ANSYS Workbench.

- a) Condition aux limites sur les parois
- b) Condition aux limites sur le domaine.

Etape 6 : configuration sur Fluent.

- a) Définir les conditions d'opération.
- b) Sélectionner le modèle et le matériel.
- c) Choisir les conditions aux limites.
- d) Initialisation.
- e) Calculer (2000 itérations)

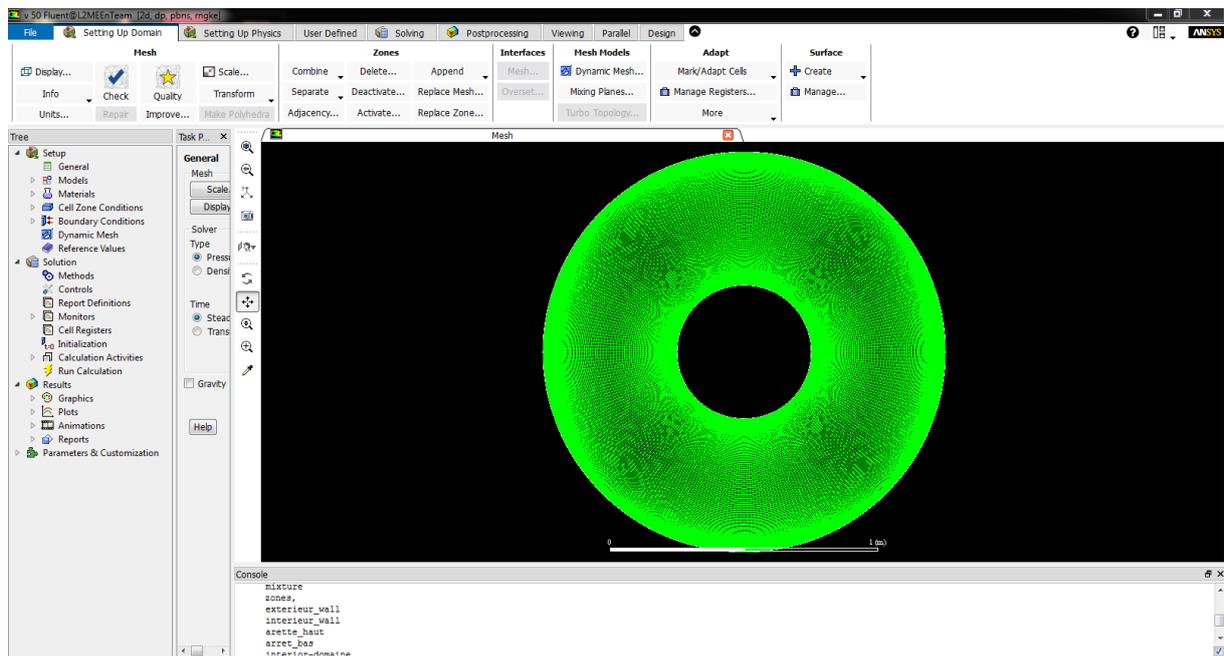


Figure B.7 Cas étudié sous Fluent

III.7 Conclusion

Les étapes de la modélisation numérique : la création de la génération du maillage, l'implémentation du problème sous Fluent, le contrôle de la convergence et même le traitement des données de la simulation sont fortement interdépendants.

Par ailleurs, l'analyse des différents paramètres à régler qu'offre le logiciel (précision/cout de calcul) en passant par des choix judicieux qui ont été systématiquement justifiés.

Références bibliographiques

Références bibliographiques

- [1] O.Cadot; Introduction à la turbulence; cours de l'ENSTA-ParisTech 2A; Diss. ENSTA-ParisTech, 2013.
- [2] D. Meux et B. Laage; Modélisation des écoulements turbulents en rotation et en présence de transferts thermiques par approche hybride RANS/LES zonale; Diss. ISAE-ENSMA Ecole Nationale Supérieure de Mécanique et d'Aérotechnique-Poitiers; 2012.
- [3] J. L. Estivalezes; NOTES DE COURS; pp.2-3; novembre 2006.
- [4] Daniel Huilier; Ecoulement de Couette cylindrique; 2009/2010.
- [5] Couette; Annales de Chimie et de Physique; série 21; pp.433-510; 1890.
- [6] L. Rayleigh; "Proc. Roy. Soc", London", vol. A 93; pp.148-154; 1916.
- E. G. Reid; Technical Report NACA-TN-209 "Tests of rotating cylinders "; 1924.
- [7] E. G. Reid; Technical Report NACA-TN-209 "Tests of rotating cylinders "; 1924.
- [8] L. Prandtl; Application of the "magnus effect" to the wind propulsion of ships; pp. 93–108; 1925.
- [9] A. Thom; The pressure round a cylinder rotating in an air current; 1926.
- [10] A. Thom. Experiments on the flow past a rotating cylinder; 1931.
- [11] L. Prandtl and O.G. Tietjens; *Applied hydro- and aeromechanics*; 1934.
- [12] L. Prandtl. *Collected works; in German*. 1961.
- [13] G. I. Taylor; Stability of a Viscous Liquid Contained between Two Rotating Cylinders; Vol. A 223; pp. 605-615; 1923.
- [14] G. I. Taylor; Fluid Friction between Rotating Cylinders, II. Distribution of Velocity between Concentric Cylinders when Outer One Is Rotating and Inner One Is at Rest; Vol A157, N°.892; pp. 565-578; Dec. 1936.
- [15] A. P. Morse; Numerical prediction of turbulent flow in rotating cavities; 1987.
- [16] J. W. Daily and R. E. Nece; Chamber dimension effects on induced flow and frictional resistance of enclosed rotating disks; Trans. ASME: J. Basic Eng ; pp.217-232; 1960.

Références bibliographiques

- [17] J. W. Chew and C. M. Vaughan; Numerical prediction for the flow induced by an enclosed rotating disk; Amsterdam; 1988.
- [18] A. P. Morse; Assesement of laminar-turbulent transition in closed disk geometries; J. of Turbomachinery; pp.131-138; 1991.
- [19] A. H. Hadid; Chaotic flow in rotating lid cavities; Phys. Fluids; Vol A.5; 1993.
- [20] A. Mehel; Etude Expérimentale d'un Ecoulement Diphasique de Taylor Couette Dynamique des fluides; 2006 et Favé en 1999.
- [21] A. Prigent; La spirale turbulente: motif de grande longueur d'onde dans les écoulements cisailés turbulents; Diss. Université Paris Sud-Paris XI; 2001.
- [22] A. Chouippe; Étude numérique de la réduction de traînée par injection de bulles en écoulement de Taylor-Couette; Diss; 2012.
- [23] Grossmann, Siegfried and all; "High-Reynolds number Taylor-Couette turbulence; " Annual review of fluid mechanics 48; 2016.
- [24] S. Dong; Turbulent flow between counter-rotating concentric cylinders: a direct numerical simulation study; Journal of Fluid Mechanics; Vol 615; USA; July 2008.
- [25] B. E. Launder et D. B. Spalding; Lectures in mathematical models of turbulence; Academic press; London, England; (1972).
- [26] A. Zeghib et K. Talbi; Comparaison des différents modèles de turbulence d'un écoulement aérodynamique dans un cyclone; Revue des Energies Renouvelables; Oum El Bouaghi; 2008.
- [27] M. Regard; Contribution à l'étude des mouvements d'air dans le bâtiment à l'aide d'un code de champ, application à la ventilation naturelle d'un local par une ou deux grandes ouvertures; l'institut national des sciences appliquées de Lyon; France; 1996.
- [28] A. F. Zohra; Etude des paramètres climatiques, sous serres chauffées en présence de la plante; Thèse de Magistère; Université de Batna; 2004.