

**RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE**  
**MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR**  
**ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**UNIVERSITE ABDERRAHMANE MIRA BEJAIA**  
**FACULTÉ DE TECHNOLOGIE**  
**DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE**

MEMOIRE

PRÉSENTÉ POUR L'OBTENTION DU DIPLÔME DE  
**MASTER**

FILIÈRE : GÉNIE MÉCANIQUE

SPÉCIALITÉ : ENERGÉTIQUE

PAR :

**BOUFOUDI FATAH**

**YOUNES KAMEL**

## Thème

---

**Etude de la stabilité de l'écoulement d'un film mince Non-Newtonien sur un plan incliné en présence d'effet Marangoni**

---

Soutenu le 26 Juin 2018 devant le jury composé de:

Mr.	Faïçal	NAIT BOUDA	Président
Mr.	Amar	DJEMA	Rapporteur
Mr.	Moussa	ALLOUCHE	Examineur

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2017-2018

# Remerciements

*Tout d'abord,*

*On aimerait remercier Dieu le tout puissant de nous avoir donné la force et la patience de pouvoir mener ce travail à terme.*

*Nous adressons nos sincères remerciements à Monsieur*

**A.DJEMA**, *pour son encadrement, sa contribution, sa patience, et son aide tout le long de ce travail.*

*Nous adressons nos vifs remerciements à Monsieur **NAIT BOUDA**, pour l'honneur qu'il nous fait de présider notre jury de soutenance.*

*Nos remerciements vont également à tous les membres du jury Mr. **ALLOUCHE**, de nous faire l'honneur d'examiner notre travail.*

*Enfin nos remerciements s'adressent à toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail, et qui ont eu la patience de nous supporter : nos parents, nos frères et sœurs, nos cousins et nos amis également **T.MOUHAMADI**, qui par leurs compréhensions et leurs aides nous ont permis d'accomplir notre travail. Merci à tous et à toutes.*

# Sommaire

Liste des figures

Liste des tableaux

Nomenclature

Introduction générale ..... 1

## Chapitre I : généralités et synthèse bibliographique

I.1	Introduction.....	3
I.2	Définition.....	3
I.2.1	Rhéologie.....	3
I.2.2	Viscosité.....	3
I.3	Etude du comportement des fluides Newtoniens et non-Newtoniens.....	5
I.3.1	Fluides Newtoniens.....	5
I.3.2	Fluides non-Newtoniens.....	5
I.4	Classification des fluides non-Newtoniens.....	6
I.4.1	Fluides dont la viscosité est indépendante du temps.....	6
I.4.2	Fluides dont la viscosité dépendants du temps.....	7
I.5	Tenseur des contraintes en cisaillement simple.....	8
I.6	Modèles rhéologique.....	9
I.7	Ecoulement à surface libre.....	11
I.7.1	Variabilité dans le temps.....	12
I.7.1.1	Ecoulement permanent.....	12
I.7.1.2	Ecoulement non permanent.....	12
I.7.2	Variable dans l'espace.....	13
I.7.2.1	Ecoulement uniforme.....	13
I.7.2.2	Ecoulement non uniforme.....	13
I.8	Tension de surface.....	13
I.9	Effet Marangoni.....	14
I.10	Synthèse bibliographique.....	15

## Chapitre II : Positionnement du problème

II.1	Introduction.....	22
II.2	Description du problème.....	22
II.2.1	Hypothèse.....	23
II.3	Equations gouvernantes.....	23
II.3.1	Equation de Navier-Stokes généralisées.....	23

II.3.2	Equation de conservation de l'énergie.....	25
II.4	Condition aux limites.....	26
II.4.1	Condition à la paroi .....	26
II.4.2	Condition à la surface libre.....	26
II.4.2.1	Condition cinématique.....	27
II.4.2.2	Condition dynamique.....	28
II.4.3	Condition aux limites thermiques.....	29
II.5	approximation de Boussinesq.....	29
II.6	Ecoulement de base.....	30
II.6.1	Profil de vitesse .....	30
II.6.2	Profil de pression.....	31
II.6.3	Profil de température.....	32
II.6.4	Vitesse moyenne de l'écoulement.....	33
II.7	Le système complet.....	33
II.8	Conclusion.....	35

### **Chapitre III : Etablissement de l'équation d'Orr-Sommerfeld**

III.1	Introduction.....	36
III.2	Echelles caractéristiques et équations adimensionnées.....	36
III.2.1	Echelles caractéristiques.....	36
III.2.2	Equations adimensionnées.....	36
III.2.3	Condition aux limites adimensionnées.....	37
III.3	perturbation de l'écoulement et linéarisations des équations.....	39
III.4	Equation d'Orr-Sommerfeld.....	41
III.5	Conclusion .....	42

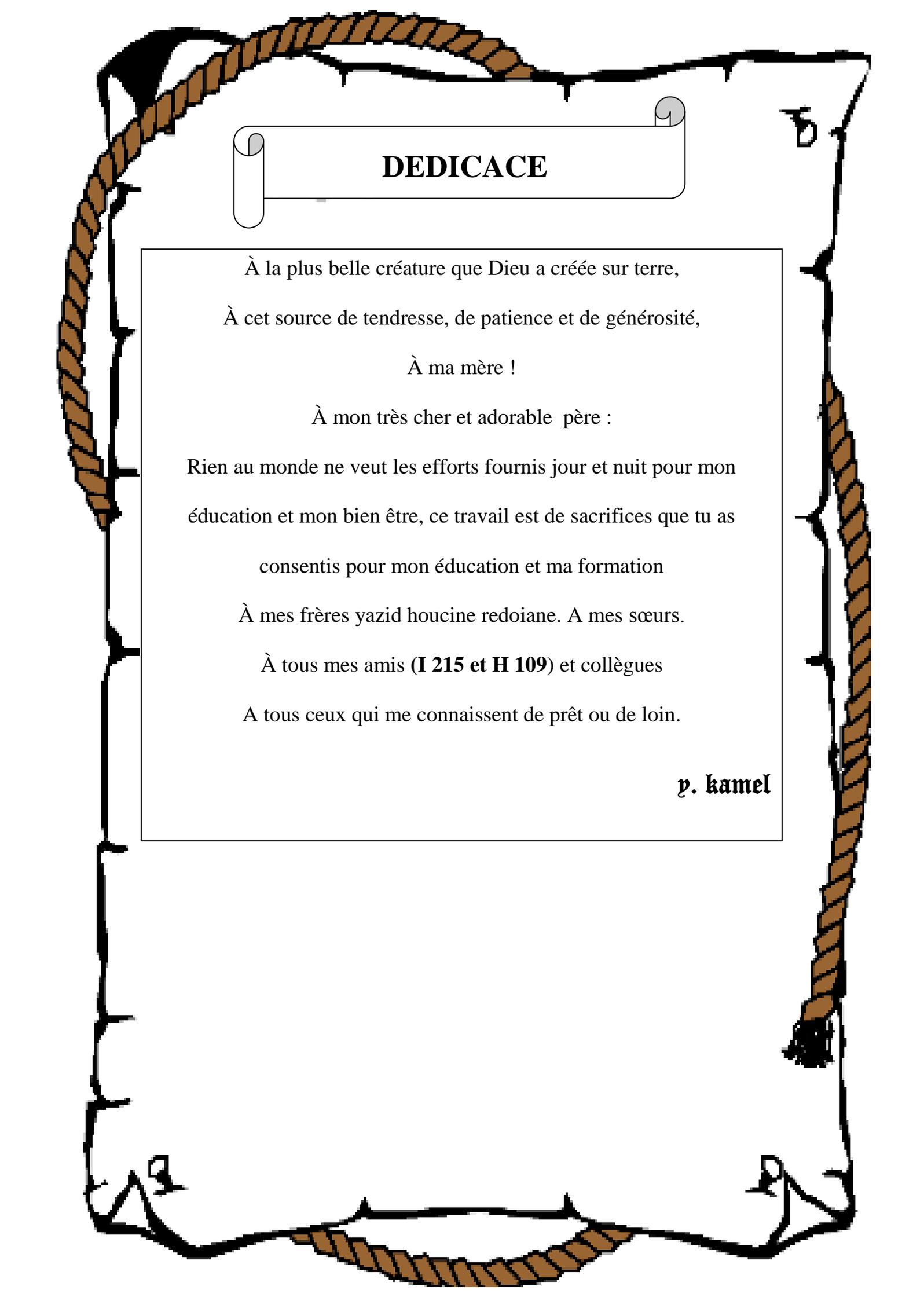
### **Chapitre IV : Etude de la stabilité de l'écoulement**

IV.1	Introduction.....	43
IV.2	Instabilité de grande longueur d'onde.....	43
IV.3	Résolution asymptotique à petite nombre d'onde.....	43
IV.3.1	Résolution à l'ordre zero.....	44
IV.3.2	Résolution à l'ordre un.....	46
IV.4	Résolution numérique.....	47
IV.5	Courbes de stabilité marginale.....	50
<b>Conclusion générale.....</b>		<b>55</b>

### **Annexe**

### **Références bibliographique**

### **Résumé**



## DEDICACE

À la plus belle créature que Dieu a créée sur terre,  
À cet source de tendresse, de patience et de générosité,

À ma mère !

À mon très cher et adorable père :

Rien au monde ne veut les efforts fournis jour et nuit pour mon  
éducation et mon bien être, ce travail est de sacrifices que tu as

consentis pour mon éducation et ma formation

À mes frères yazid houciné redoiane. A mes sœurs.

À tous mes amis (**I 215 et H 109**) et collègues

A tous ceux qui me connaissent de prêt ou de loin.

**y. kamel**

## *Dédicaces*

*J'aimerais dédier ce travail,*

*À toute ma famille,*

*À tous ceux qui m'aiment,*

*Particulièrement, à mes chers parents,*

*A ma grande mère*

*Et mon grand père qui souhaite d'être là aujourd'hui*

*Paix a ton âme chère grand père*

*À Tous ceux qui ont contribué de près ou de loin*

*à la réalisation de ce travail*

*A tous mes amis*

*A tous ceux qui me sont chers.*

*FATAH*

## *Table des figures*

<b>Figure. I.1 :</b> Schéma de l'écoulement de couette plan.....	3
<b>Figure. I.2 :</b> Différents comportements des fluides non-newtoniens.....	5
<b>Figure. I.3 :</b> Viscosité en fonction du taux de cisaillement de la loi de Carreau-Yasuda.....	11
<b>Figure. I.4 :</b> Ecoulement permanent.....	12
<b>Figure. I.5 :</b> Ecoulement non permanent.....	13
<b>Figure. I.6 :</b> Schéma du principe de la convection Marangoni thermique.....	15
<b>Figure. I.7 :</b> Courbes neutres de Yih.....	16
<b>Figure. I.8 :</b> Stabilité marginale pour différentes valeur de tension superficielle.....	17
<b>Figure. I.9 :</b> Photographie illustrant la déformation d'un filet d'eau.....	18
<b>Figure. I.10 :</b> Nombre d'onde en fonction de Reynolds.....	19
<b>Figure. I.11 :</b> Courbes de stabilité neutre pour les films minces descendants verticaux pour divers valeurs de nombre Deborah .....	20
<b>Figure. II.1 :</b> Ecoulement d'un film sur un plan incliné.....	22
<b>Figure. II.2 :</b> Géométrie de l'interface.....	27
<b>Figure. II.3 :</b> Profil de vitesse pour $n=2$ et $\beta = \frac{\pi}{2}$ .....	31
<b>Figure. IV.1 :</b> Courbes de stabilité marginale obtenues pour, $Ma=0.5$ , $Bi=5$ , $W=1$ et $n=0.8$ .....	50
<b>Figure. IV.2 :</b> Courbes de stabilité marginale obtenues pour, $Ma=0.5$ , $Bi=5$ , $W=1$ et $n=1.47$ .....	51

<b>Figure. IV.3</b> Courbes de stabilité marginale obtenues pour , $Ma=0.5$ , $Bi=5$ , $W=1$ et pour différentes valeurs de l'indice de puissance ( $n=0.8$ et $n=1.47$ ).....	51
<b>Figure. IV.4</b> Courbes de stabilité marginale obtenues pour , $n=1.47$ , $W=1$ et pour différentes valeurs de Marangoni ( $Ma=0$ et $Ma=0.5$ ). .....	52
<b>Figure. IV.5</b> Courbes de stabilité marginale obtenues pour $n=1.47$ , $W=1$ et pour différentes valeurs de Marangoni ( $Ma=0$ , $0.5$ , $1$ ).....	53
<b>Figure. IV.6</b> Courbes de stabilité marginale obtenues pour $n=0.8$ , $W=1$ et pour différentes valeurs de Marangoni ( $Ma=0$ , $0.5$ , $1$ ).....	54

## Liste des tableaux

<b>Tableau I.1</b> : Viscosité dynamique des quelques fluides.....	4
<b>Tableau I.2</b> : Fluides indépendants du temps.....	6
<b>Tableau I.3</b> : Fluides dépendants du temps.....	7
<b>Tableau I.4</b> : Caractéristique physique de quelque exemple de fluide en loi de puissance.....	10
<b>Tableau I.5</b> : Tensions superficielles pour différents liquides en contact avec l'air.....	14

## Nomenclature

### ○ Lettres latines :

A	Constante positive
$B = \cot\beta$	Coefficient de pente [rad]
C	Célérité de l'onde de surface [m.s <sup>-1</sup> ]
$C_p$	Chaleur spécifique [J.Kg <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup> ]
<b>D</b>	Taux de déformation
$\frac{D}{Dt}$	Dérivée particulaire
E	Energie de tension superficielle [J]
F	Force [N]
<b>g</b>	Accélération de la pesanteur [m.s <sup>-2</sup> ]
h	Epaisseur du film[m]
i	Nombre complexe
I	Matrice identité
K	Paramètre de consistance [Pa.s <sup>n</sup> ]
$\check{k}$	Courbure
k	La diffusivité thermique [m <sup>2</sup> .S <sup>-1</sup> ]
L	Longueur d'onde [m]
n	Indice de loi en puissance
<b>n</b>	Vecteur normal à la surface libre
P	Pression [pa]
$\hat{P}$	Pression adimensionné
$P_a$	Pression atmosphérique [pa]
$P_b$	Pression de base [pa]
Q	Débit massique [Kg.s <sup>-1</sup> ]
$\mathfrak{R}$	Matrice de Riccati

$S$	Section [m <sup>2</sup> ]
$T$	Température [k]
$\hat{T}$	Température adimensionné
$T_a$	Température de l'aire [k]
$T_b$	Température de base [k]
$T_t$	Dérivée par rapport au temps
$T_w$	Température à la paroi [k]
$T_x$	Dérivée par rapport à (x)
$T_{xx}$	Deuxième dérivée par rapport à (x)
$t$	Temps [s]
$\mathbf{t}$	Vecteur tangente à la surface libre
$U_b$	Vitesse de base de l'écoulement [m.s <sup>-1</sup> ]
$u_m$	Vitesse moyenne [m.s <sup>-1</sup> ]
$(\hat{u}, \hat{v})$	Vitesse adimensionné
$\mathbf{V}$	Vecteur vitesse [m.s <sup>-1</sup> ]
$(u, v)$	Composantes du vecteur vitesse
$x$	Coordonnée longitudinale[m]
$y$	Coordonnée transversal [m]
<p>○ <b>Symboles grecs :</b></p>	
$\alpha$	Nombre d'onde
$\alpha_0$	Coefficient de transfert thermique [W.K <sup>-1</sup> ]
$\beta$	Angle d'inclinaison [rad]
$\rho$	Masse volumique [Kg.m <sup>-3</sup> ]
$\mu$	Viscosité dynamique [Pa.s]
$\mu_0$	Viscosité à cisaillement nul dans la loi de Carreau
$\mu_\infty$	Viscosité à cisaillement infini dans la loi de Carreau
$\dot{\gamma}$	Taux de cisaillement [s <sup>-1</sup> ]

$\nu$	Viscosité cinématique [ $\text{m}^2.\text{s}$ ]
$\lambda$	Conductivité thermique [ $\text{W.K}^{-1}$ ]
$\lambda_1$	Temps caractéristique de relaxation [s]
$\tau$	Tenseur des contraintes visqueuses
$\sigma$	Tenseur des contraintes
$\sigma$	Tension de surface [ $\text{N.m}^{-1}$ ]
$\Psi$	Fonction de courant
$\phi$	Amplitude
$\omega$	Taux d'amplification [ $\text{s}^{-1}$ ]

○ **Indices et exposants :**

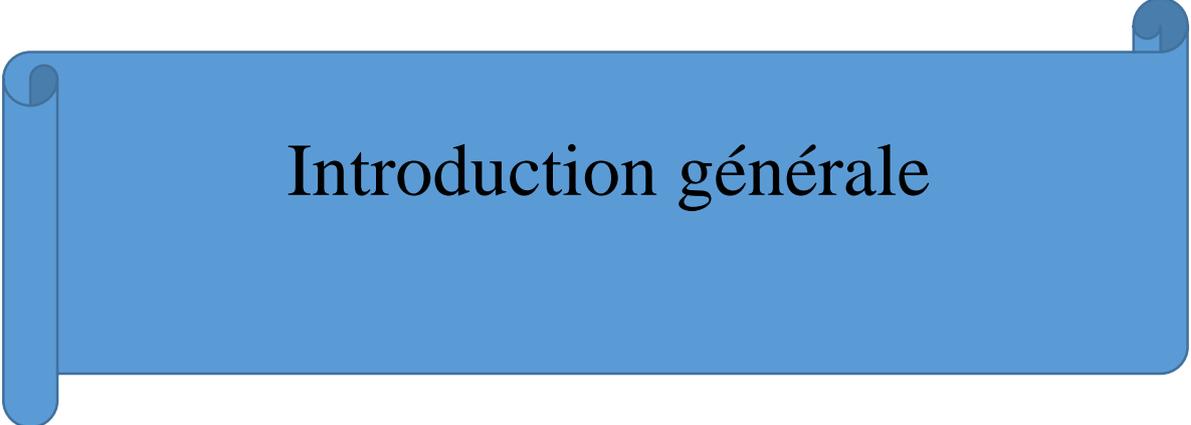
$\sim$	Quantité fluctuante
'	Dérivation par rapport à (y)

○ **Opérateurs**

$\Delta$	Opérateur laplacien
<i>grad</i>	Opérateur gradient
$\nabla$	Opérateur divergence

○ **Nombres sans dimensions**

Bi	Nombre de Biot
Ma	Nombre de Marangoni
Pr	Nombre de Prandtl
R	Nombre de Reynolds
Rc	Nombre de Reynolds critique
We	Nombre de Weber



# Introduction générale

### **Introduction générale**

Les écoulements des films minces sont devenus l'objet d'étude depuis plusieurs années, et certains cas sont toujours un sujet d'actualité dans notre vie quotidienne tels que des couches qui protègent ou décoorent comme le lubrifiant sur la cornée de nos yeux ou dans la paroi thoracique.

Nous étudions dans ce mémoire la stabilité de l'écoulement d'un film mince sur un plan incliné en présence d'effet marangoni à surface libre, la connaissance des conditions d'apparition d'instabilités dans tels écoulements présente des intérêts tant du point de vue fondamental qu'appliqué. Ce problème intéresse particulièrement le secteur industriel tels que (les échangeurs, l'évaporateur, papeterie, condenseur, industrie alimentaire), ils peuvent être utilisés pour la conception des peintures d'adhésifs ou lors du dépôt de couches de pellicules photographique, dans lequel l'apparition des instabilités est généralement synonyme de détérioration de la qualité du produit, pour éviter leur apparition il est donc important de pouvoir prédire le déclenchement d'instabilités. On les rencontre également dans la nature tels que (les coulées de lave, de boue), ils sont aussi présents en chimie.

Pour mieux appréhender le fonctionnement de ces phénomènes, les chercheurs se sont penchés sur l'étude d'écoulements à travers des géométries connues. Ainsi ce modeste travail suit le même objectif, c'est à dire comprendre et modéliser un phénomène existant à l'aide d'un modèle numérique, dans le contexte de cette étude on a subdivisé ce travail en quatre chapitres :

Le premier chapitre est consacré aux généralités et aux notions de base que nous allons les définir de manière brève, ainsi qu'une synthèse bibliographique des travaux effectués en rapport avec le problème posé.

Le deuxième chapitre est dédié à la formulations et présentation de notre problème suivi par les équations gouvernantes et les conditions aux limites associées ont également été explicitées. L'écriture des équations obtenues sous forme adimensionnelle a permis de faire ressortir les paramètres pertinents caractérisant le problème. Nous avons par la suite

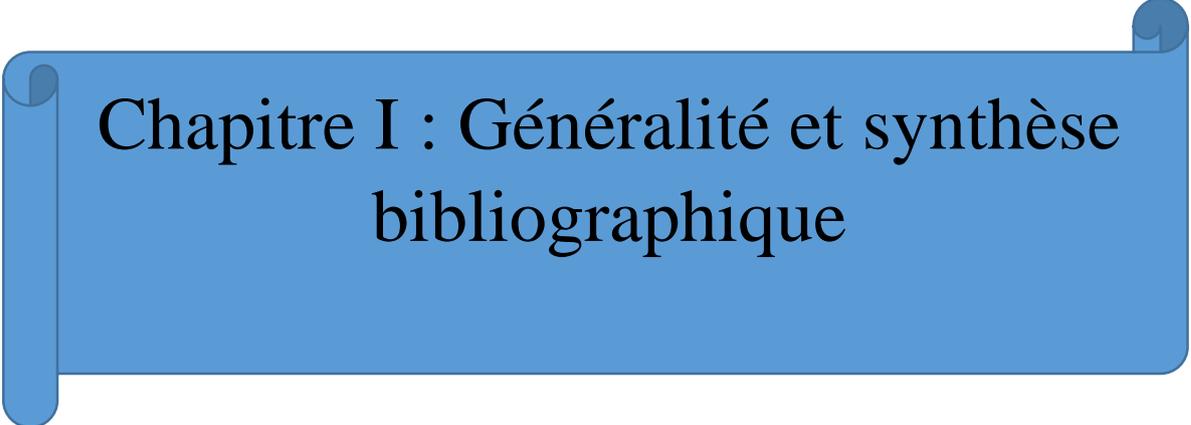
## Introduction générale

---

déterminé le profils de pression et température, et la vitesse de base et moyenne de l'écoulement.

Le troisième chapitre est consacré à l'établissement de l'équation d'Orr-Sommerfeld, puis la perturbation de l'état de base qui nous permet par la suite de poser les éléments d'analyse de stabilité linéaire par l'équation d'Orr-Sommerfeld.

Nous exposons dans le dernier chapitre, la résolution numérique et analytique du problème d'Orr-Sommerfeld, c'est-à-dire un développement asymptotique qui nous permet de déterminer analytiquement les seuils d'instabilité, par la suite une combinaison de la méthode de Riccati et la méthode de Rung-Kutta, nous avons résolu numériquement ces équations. Enfin on termine par une conclusion générale.

A blue horizontal scroll graphic with rounded ends and a slight shadow, containing the chapter title.

# Chapitre I : Généralité et synthèse bibliographique

## I.1 Introduction :

Ce chapitre est composé de deux parties ; la première partie est dédiée à la définition et au rappel des notions de base nécessaires à la compréhension de notre problème, ainsi qu'une brève synthèse bibliographique sur les études menées par nos prédécesseurs dans le domaine est exposé dans la deuxième partie.

## I.2 Définition :

### I.2.1 Rhéologie :

La rhéologie (mot grec : *rheo* veut dire *couler*, et *logos* veut dire *étude*), est l'étude de la déformation et de l'écoulement de la matière sous l'effet d'une contrainte appliquée. Cette science repose sur la bases de la mécanique des milieux continus, dont l'objet de déterminer les déformations et les contraintes en chaque point d'un milieu continu. [1]

### I.2.2 Viscosité :

C'est une grandeur qui caractérise les frottements internes du fluide, autrement dit sa capacité à s'écouler. Elle caractérise la résistance d'un fluide à son écoulement lorsqu'il est soumis à l'application d'une force. C'est à dire, les fluides de grande viscosité résistent à l'écoulement et les fluides de faible viscosité s'écoulent facilement.

Pour définir la notion de viscosité, on peut considérer deux couches de fluide, séparée par une distance  $dy$  remplie d'une substance homogène. On suppose que les couches d'une surface  $S$  soient étendues, la plaque inférieure est fixée, et on applique une force  $F$  sur la plaque supérieure qui se déplace à une vitesse  $du$ , expliqué à l'aide de la figure I.1. [2]

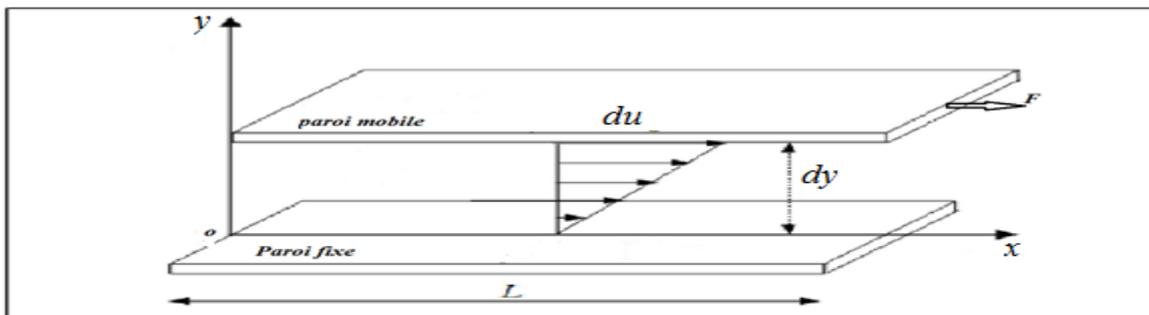


Figure.I.1 : Schéma de l'écoulement de couette plan.

On à alors :

$$\frac{F}{S} = \mu \frac{du}{dy} \quad (1.1)$$

Et

$$\dot{\gamma} = \frac{du}{dy} \quad (1.2)$$

$\dot{\gamma}$  : Le taux de cisaillement.

F: la Force de glissement entre les couches en (N)

$\mu$ : Le coefficient de proportionnalité appelé la viscosité dynamique en (Pa·s).

Le tableau ci-dessous représente la viscosité des quelques fluides :

Fluide	$\mu(\text{Pa}\cdot\text{s})$
eau (0 °C)	$1,787 \cdot 10^{-3}$
eau (20 °C)	$1,002 \cdot 10^{-3}$
eau (100 °C)	$0,2818 \cdot 10^{-3}$
Huile d'olive (20 °C)	$100 \cdot 10^{-3}$
glycérol (20 °C)	$1000 \cdot 10^{-3}$
Hydrogène (20 °C)	$0,86 \cdot 10^{-5}$
Oxygène (20 °C)	$1,95 \cdot 10^{-5}$

**Tableau I.1:** La viscosité dynamique des quelques fluides. [3]

- **Viscosité cinématique :**

$$\nu = \mu / \rho$$

Où :  $\rho$  la masse volumique de fluide est donné par ( $\text{kg}/\text{m}^3$ ).

L'unité de la viscosité cinématique en système international est le ( $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ ). On utilise souvent le Stokes (St) comme unité de mesure de la viscosité cinématique.

$$1 \text{ St} = 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$$

### I.3 Etude du comportement des fluides Newtoniens et Non-Newtoniens

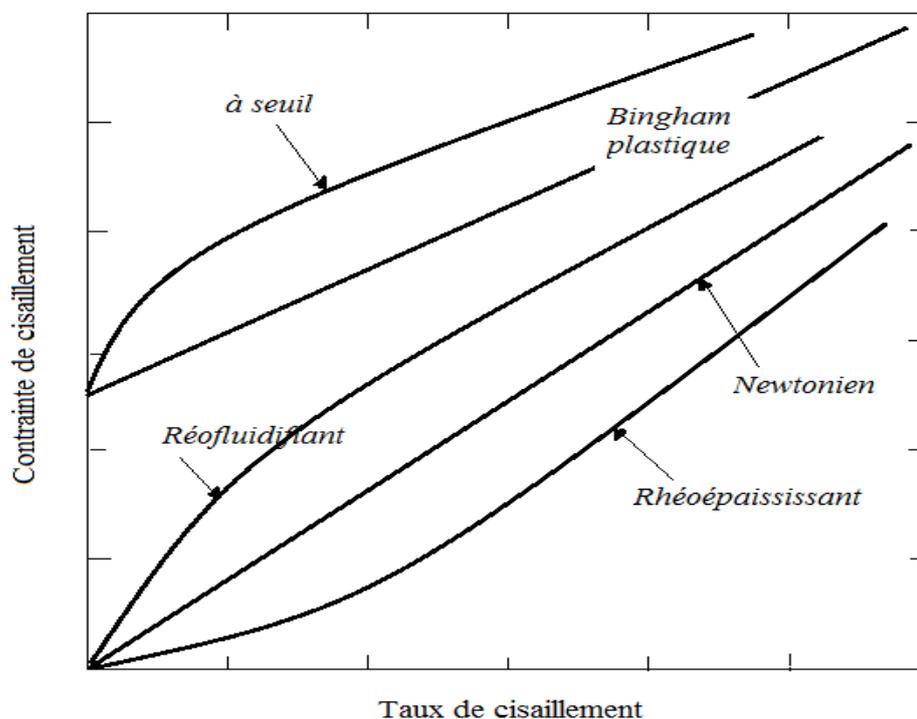
#### I.3.1 Fluides Newtoniens

C'est un fluide qui décrit la majorité des fluides, composés de molécules simple et des caractéristiques suivantes :

- i. Les contraintes de cisaillement sont proportionnelles au gradient de vitesse.
- ii. La viscosité est indépendante de la vitesse de cisaillement.
- iii. Les contraintes s'annulent immédiatement lorsque l'écoulement est arrêté, et la viscosité est indépendante du temps.

#### I.3.2 Fluides non-newtoniens :

Un fluide non-newtonien a une structure moléculaire complexe qui n'obéit pas à la loi classique d'un fluide Newtonien. Il est défini comme étant un fluide pour lequel le rapport ( $F/S$ ) n'est pas une constante. En d'autres mots on peut dire que c'est un fluide qui a une courbe non-linéaire, Expliqué à l'aide de la Figure I.2.



**Figure I.2** : Différents comportements des fluides non-newtoniens. [2]

Un fluide non-newtonien peut être imaginé comme étant un mélange de molécules avec différentes formes et tailles.

**I.4 Classifications des fluides non-Newtoniens :**

**I.4.1 Fluides dont la viscosité est indépendante du temps :**

Les fluides dont la viscosité indépendante du temps		
Fluides rhéofluidifiants « shear-thinning fluid » (en anglais).	Sa viscosité diminue lorsque le taux de cisaillement augmente.	sang, shampoing, jus de fruit concentré, encres d'imprimerie, solutions de polymères de masse moléculaire élevée, suspensions de particules solides...
Fluides rhéoépaississants «shear-thickeningfluid» (en anglais).	Sa viscosité augmente avec le taux de cisaillement.	suspensions de particules micrométriques d'argile, de craie, de quartz, ou de cellules du sang dans du plasma, d'amidon de maïs...
Fluides à seuil «Yield stress»(en anglais).	Un fluide qui ne s'écoule que lorsque la contrainte $\sigma$ qui lui est appliquée dépasse un certain seuil	Le dentifrice, la mousse à raser, le ciment frais, les peintures, les boues de forage...

**Tableau I.2 : Fluides indépendants du temps.**

## I.4.2 Fluides dont la viscosité dépendante du temps :

Les fluides dépendants du temps		
Fluide viscoélastique	<p>Est la propriété de matériaux qui présentent des caractéristiques à la fois visqueuses et élastiques, les matériaux <b>visqueux</b> résistent à un écoulement en cisaillement et présente une déformation qui augmente linéairement avec le temps lorsqu'une contrainte est appliquée. Les matériaux <b>élastiques</b> se déforment lorsqu'on applique une contrainte, et retourne rapidement à leur état d'origine une fois la contrainte retirée.</p>	polymère
Fluide Thixotrope	<p>Leur viscosité diminue avec le temps lorsqu'ils sont soumis à une contrainte constante. à l'arrêt du cisaillement, la viscosité augment avec le temps. Ce qui indique réversibilité (au moins partielle) du phénomène.</p>	Peinture, sang, crème cosmétique, sauce tomate concentré, yaourts...

Tableau I.3 : Fluides dépendants du temps.

## I.5 Tenseur des contraintes en cisaillement simple

Dans le cadre de la mécanique des milieux continus, la représentation des déformations est nécessairement sous forme tensorielle. Une loi de comportement est donc une relation tensorielle entre contrainte et déformation. Le tenseur de contrainte  $\boldsymbol{\sigma}$  peut se décomposer en deux termes :

- i) la pression hydrostatique  $p$  ;
- ii) le déviateur des contraintes  $\boldsymbol{\tau}$  qui se rapporte aux contraintes tendant à déformer le fluide.

$$\boldsymbol{\sigma} = -P.\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau} \quad (1.3)$$

Où :

$\mathbf{I}$  est le tenseur identité.

La loi de comportement, en général, relie le déviateur des contraintes  $\boldsymbol{\tau}$  au tenseur des taux de déformation  $\mathbf{D}$  défini comme la partie symétrique du tenseur des gradients de vitesses :

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x})}{2} \\ \frac{(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y})}{2} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

La loi de comportement la plus simple est celle obtenue pour un fluide newtonien qui est une relation bijective entre la contrainte et le taux de cisaillement :

$$\boldsymbol{\tau} = 2 \mu \mathbf{D} \quad (1.5)$$

En général, la forme tensorielle de la loi de comportement est trop compliquée pour qu'elle puisse être caractérisée expérimentalement. La déformation du matériau s'effectuant par glissement relatif des couches les unes par rapport aux autres, sans transports de la matière d'une couche à l'autre. Il en résulte des forces de frottement appelées forces de cisaillement qui s'exercent tangentiellement à la surface de chaque couche. On obtient la simplification suivante dans le cas du cisaillement simple :

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p + \tau_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & -p + \tau_{yy} \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

Où

$\boldsymbol{\sigma}$  : Le tenseur des contraintes.

## I.6 Quelques modèles rhéologiques :

De nombreux modèles empiriques, reliant le rapport  $F/S$  au gradient de cisaillement  $\dot{\gamma}$ , ont été développés afin de décrire les comportements rhéologiques les plus couramment rencontrés. Le cas le plus simple correspond à celui de fluide newtonien :

$$\frac{F}{S} = \mu \cdot \dot{\gamma} \quad (1.7)$$

Viennent ensuite les fluides dont les propriétés ne dépendent pas du temps et dont la relation

$\frac{F}{S} = f(\dot{\gamma})$  peut s'écrire en loi de puissance. Cette loi permet de décrire la rhéofluidification ou le rhéoépaississement d'un grand nombre de fluides. Un des caractères non-newtonien le plus répandu c'est la variation de la viscosité avec la vitesse de cisaillement. Très souvent pour les solutions de polymères, la viscosité diminue au fur et à mesure que l'on augmente le taux de cisaillement auquel est soumis le fluide. Il s'agit du comportement rhéofluidifiant, que l'on peut observer aussi dans les suspensions de vésicules déformables comme le sang. Un fluide est rhéofluidifiant lorsque sa viscosité apparente diminue avec le taux de cisaillement. Cela peut être dû par exemple à un alignement de particules anisotropes dans le sens de l'écoulement ou à une déstructuration. Un fluide rhéoépaississant, quant à lui, voit sa viscosité apparente augmenter avec le cisaillement. D'un point de vue phénoménologie, on décrit ce type de comportement en utilisant une loi de puissance, proposée par Ostwald-de Waele, elle a pour expression :

$$\frac{F}{S} = K \dot{\gamma}^n \quad (1.8)$$

La viscosité s'écrit alors :

$$\mu = K \dot{\gamma}^{n-1} \quad (1.9)$$

Où  $K$  : est l'indice de consistance,

$n$ : l'indice de l'écoulement ou l'indice de puissance :

$n=1$  : le fluide est dit newtonien.

$n < 1$  : et un fluide rhéofluidifiants.

$n>1$  : Le fluide est dit rhéoépaississants.

Dans le tableau ci-dessous, on donne quelques exemples de fluides en loi de puissance pour différentes valeurs de  $n$ . [4]

Fluides	L'indice de puissance $n$
Sang humain	0.9
Pétrole (en général)	0.8
Mélange d'eau et d'éthylène glycol	2
Solution de napalm en kérosène	0.52

**Tableau I.4** : Caractéristique physique de quelques exemples de fluides en loi de puissance

Il existe d'autres modèles plus sophistiqués que la loi de puissance pour d'écrire le comportement de la viscosité et le cisaillement, pour prendre en compte ces plateaux newtoniens de viscosité à cisaillements nul et infini [5] :

- Le modèle de Cross :

$$\frac{\mu_0 - \mu_\infty}{\mu - \mu_\infty} = \frac{1}{1 + (\lambda_1 \dot{\gamma})^n} \quad (1.10)$$

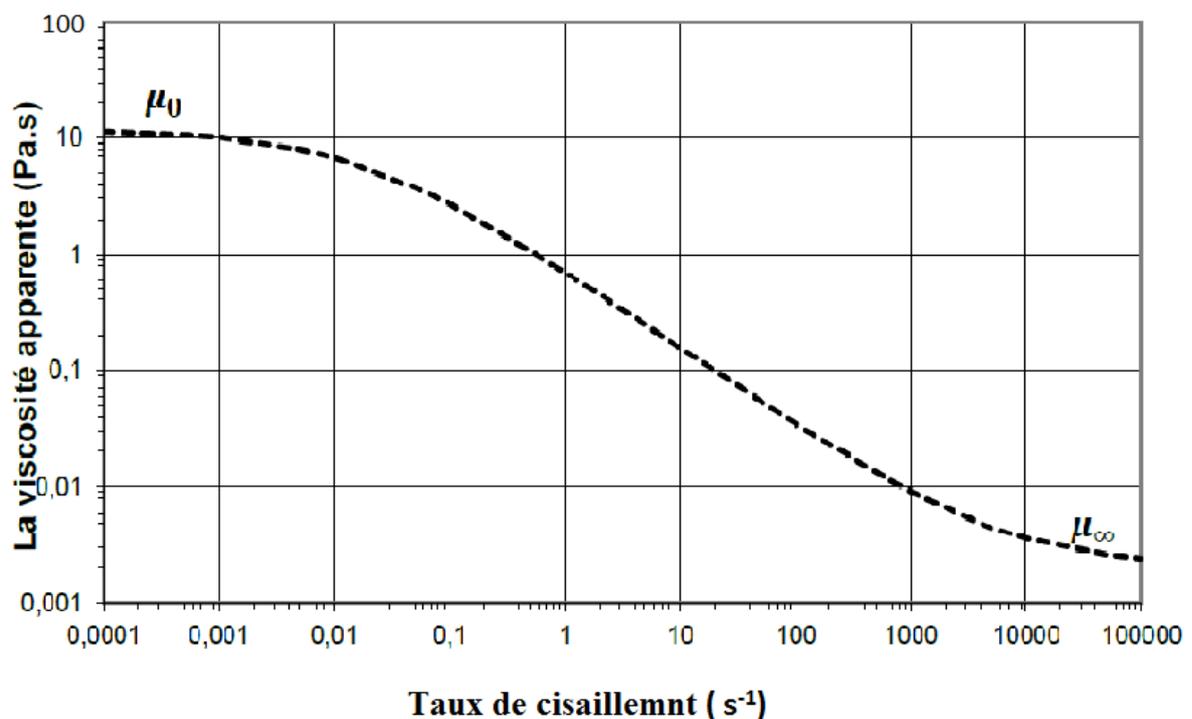
- le modèle d'Ellis :

$$\frac{\mu_0 - \mu_\infty}{\mu - \mu_\infty} = \frac{1}{1 + (\lambda_2 \sigma)^n} \quad (1.11)$$

-Modèle de Carreau-Yassuda :

$$\frac{\mu - \mu_{\infty}}{\mu_0 - \mu_{\infty}} = (1 + (\lambda_1 \dot{\gamma})^b)^{\frac{n-1}{b}} \quad (1.12)$$

Où :  $\mu_0$  et  $\mu_{\infty}$  sont respectivement la viscosité à cisaillement nul et infini,  $b$  est un paramètre qui décrit la transition entre le comportement à faible cisaillement et la région en loi de puissance. ,  $\lambda_1$  est un temps caractéristique de relaxation. La figure suivante (fig I.3) présente la courbe de la viscosité en fonction du taux de cisaillement de la loi de Carreau-Yasuda pour une solution polymère.[6]



**Figure I.3 :** la viscosité en fonction du taux de cisaillement de la loi de Carreau-Yasuda[6]

### I.7 Ecoulement à surface libre :

Les écoulements à surface libre peuvent être classés en plusieurs types selon les paramètres suivants [7] :

- Permanent ou non permanent selon le temps
- Laminaire ou turbulent selon la viscosité
- Uniforme ou non uniforme selon l'espace
- Torrentiel ou fluvial selon l'effet de la gravité

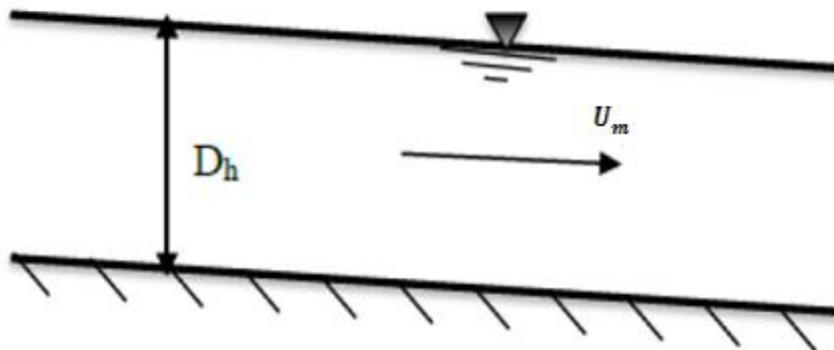
### I.7.1 Variabilité dans le temps :

#### I.7.1.1 Ecoulement permanent :

Le mouvement est permanent si la vitesse moyenne  $U_m$  ainsi que la profondeur,  $D_h$  restent invariables dans le temps en grandeur et en direction. Par conséquent le débit est constant.[8]

$$Q = U_m S \quad (1.13)$$

Avec :  $Q$  c'est le débit massique ( $m^3/s$ ) et  $U_m$  est la vitesse moyenne (m/s)



**Figure I.4.** Ecoulement permanent

#### I.7.1.2 Ecoulement non permanent :

Le mouvement est non permanent si la profondeur  $D_h(t)$ , ainsi que les autres paramètres varient avec le temps et le débit n'est pas constant.

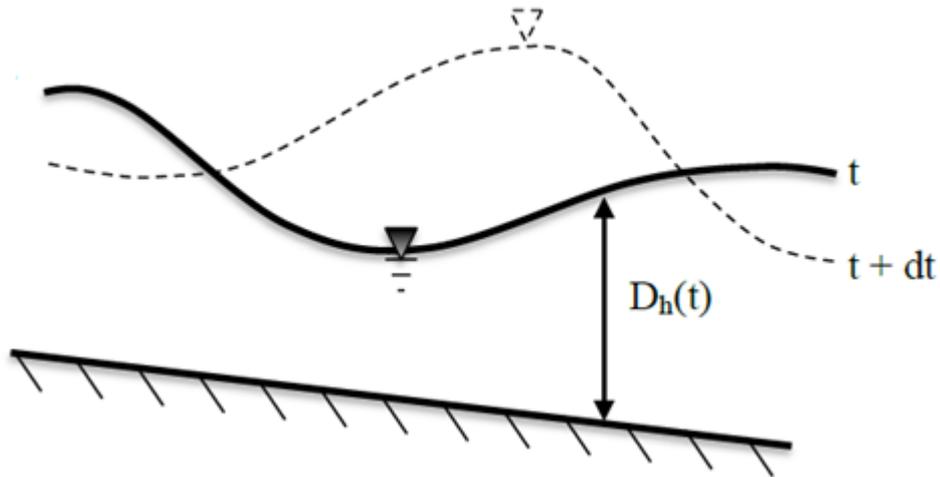


Figure. I.5 : Ecoulement non permanent

## I.7.2 Variable dans l'espace :

### I.7.2.1 Ecoulement uniforme :

Un écoulement est dit uniforme, si la profondeur  $D_h$  et les autres paramètres, restent invariables. Et la ligne de la pente de fond est donc parallèle à la ligne de la surface libre.

### I.7.2.2 Ecoulement non uniforme :

Un écoulement est dit non uniforme ou varie lorsque la profondeur ainsi que les autres paramètres, changent d'une section à l'autre et la pente de fond n'est pas parallèle à celle de la surface libre. [7]

Un mouvement varie peut être accéléré, ( $\frac{du}{dx} > 0$ ), ou décéléré ( $\frac{du}{dx} < 0$ ).

## I.8. La tension de surface

Les molécules d'une phase liquides au repos sont soumises à des forces de cohésive avec leur voisins. Dans le cas où le liquide possède une surface libre, les molécules loin de la surface possèdent une énergie d'interaction importante, par contre, les molécules à la surface ont beaucoup moins d'énergie d'interaction, créer une interface revient donc à perdre une partie de cette énergie de cohésion, cette énergie est appelée énergie de surface ou tension superficielle ; elle est proportionnelle à l'aire de l'interface et un coefficient dénommé tension de surface :

$$E = \gamma \cdot s \quad (\text{I.14})$$

la tension de surface est une caractéristique très importante des fluides. Elle explique beaucoup de phénomènes naturels tel que, le pouvoir de certains reptiles et insectes à se déplacer sur la surface de l'eau, et la stabilité de gouttes de pluie dans l'atmosphère, la formation des bulles de savon...

Le tableau ci-dessous résume les différentes tensions superficielles des liquides pour des fluides en contact avec l'air :

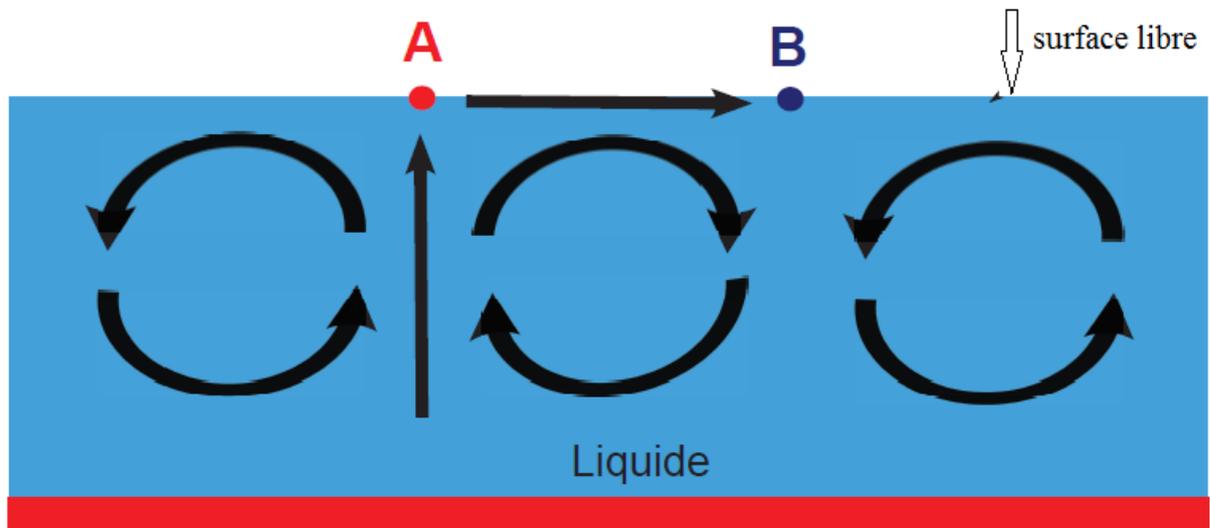
Liquide	Température (°C)	Tension de surface ( $10^{-3}$ N·m <sup>-1</sup> )
Mercure	15	487
Eau	20	72.8
Eau	37	70
Acide acétique	20	27.6
Méthanol	20	22.6

**Tableau I.5:** les Tensions superficielles pour différents liquides en contact avec l'air

### I.9 Effet marangoni (ou Effet thermocapillaire)

Ce phénomène fut pour la première fois étudié par le physicien JAMES Thomson, et le frère de lord kelvin en 1855. L'effet général tient son nom du physicien italien CARLO Marangoni ; qui étudia lors de sa thèse à l'université de Pavie et publia ses résultats en 1865. Le principe de l'effet Marangoni peut-être expliqué à l'aide de la FIG I.6. Celle-ci représente une couche de liquide chauffée par le bas ; qui est en contact avec l'air lorsque une petite perturbation provoqué l'augmentation localisée au point *A* par rapport à celle du point *B*. la tension du surface au point *A* diminué (dépendant de la température), induisant un écart de tension du surface  $\Delta\alpha$  entre les points *A* et *B* à l'origine d'une variation de pression ( $P_A > P_B$ ) qui se traduise par un mouvement de fluide de *A* vers *B*.

Par conservation de la masse ; c'est le liquide se situent au niveau de la paroi chauffée qui va se diriger verticalement vers le point *A* de l'interface, l'arrivée de ce liquide encore plus chaud, va accentuer davantage la différence de température entre *A* et *B* et le gradient de tension de surface augmente encore, perpétuant ainsi la circulation du fluide, et créant un mouvement convectif du fluide qui va engendrer des tourbillons. [9]



**Figure. I.6 :** Schéma du principe de la convection Marangoni thermique [9]

Le nombre adimensionnelle de marangoni noté  $Ma$  : ce nombre est le rapport de la vitesse de convection thermocapilaire à la surface libre sur la vitesse de diffusion thermique. Il est généralement dépend l'échelle de température au niveau de la surface libre.

Ce nombre est définit dans le chapitre II.

### I.10 Synthés bibliographique

Les écoulements sur un plan incliné a suscité une attention considérable et apparaissent par des nombreux chercheurs et auteurs, nous présentons quelques-unes que nous avons jugées proches de notre cas.

- **Fluides newtoniens :**

Les premières études de stabilité concernant l'écoulement de films de fluides newtoniens à une couche s'écoulant sur un plan incliné ont été menées par **Yih** [10]. Leur étude a permis de déterminer les conditions critiques d'instabilité. Ils montrent ainsi que la vitesse de propagation de ces ondes est deux fois plus grande que la vitesse de base du liquide au niveau de la surface libre. Sans rendre compte de l'inertie, les écoulements à une seule couche sont des modes dites de surface, à grande longueur d'onde.

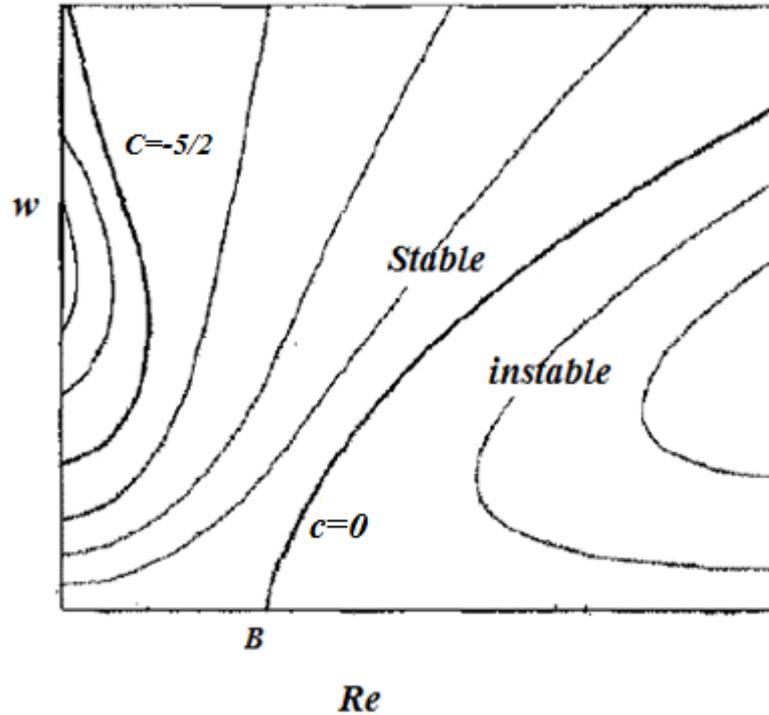
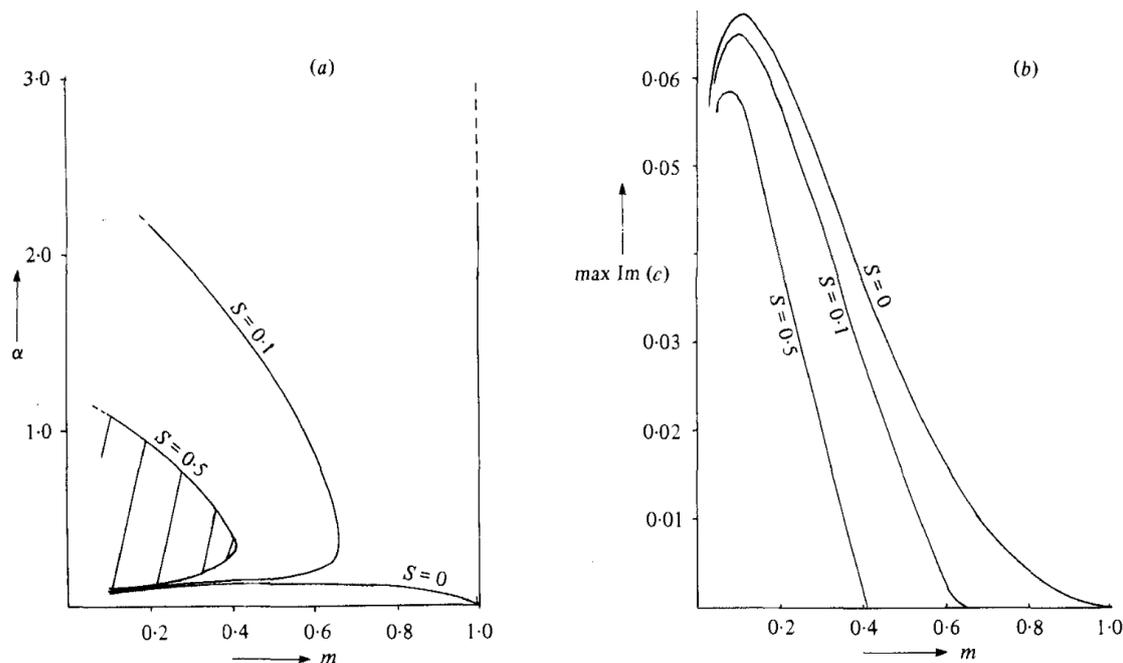


Figure.I.7. Courbes neutres de Yih [10]

Ces courbes du nombre d'onde  $w$  en fonction du nombre de Reynolds  $Re$  délimitent les zones de stabilité, pour une inclination de  $(\beta < \frac{\pi}{2})$  ;  $C$  représente le taux d'amplification des ondes. Pour comprendre l'effet de la tension superficielle sur l'apparition des instabilités.

**Hooper et Boyd [11]** ont effectué une étude asymptotique aux petites longueurs d'ondes en considérant un écoulement co-courant de deux fluides de viscosité différente ( $\mu_1$  et  $\mu_2$ ). On constate que le flux est toujours instable en présence de tension superficielle et l'instabilité se manifeste à l'interface de deux fluides. La technique utilisée pour résoudre ce problème est le développement asymptotique. Le graphe ci-dessous représente la stabilité marginale pour différentes valeurs de tension superficielle.



**Figure.I.8.**Stabilité marginale pour différentes valeurs de tension Superficielle.

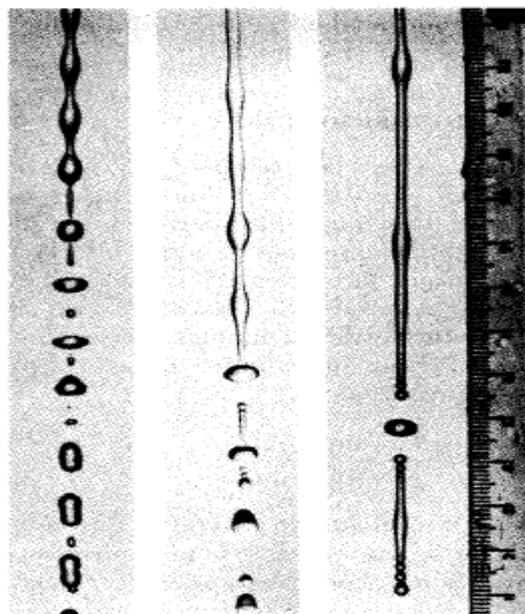
**Hwang et al [12]** ont réalisé une étude de stabilité linéaire sur un film de liquide obéissant à une loi de puissance et s'écoulant sur un plan incliné. Ils ont utilisé la méthode intégrale qui consiste à intégrer les équations du mouvement sur l'épaisseur du film en vue d'obtenir des équations non linéaires équivalentes ayant pour paramètres le débit volumique et l'épaisseur de la couche. Ils ont ensuite appliqué la méthode de décomposition en modes normaux. Ils montrent qu'en fixant l'exposant  $n$  de la loi de puissance, ils retrouvent les tendances observées avec un film de fluide newtonien une augmentation du nombre Reynolds ou une diminution du nombre de Weber (caractéristique de l'influence de la tension de surface) provoque une déstabilisation de l'écoulement en parallèle, une diminution de l'exposant  $n$ , et donc une augmentation des propriétés rhéofluidifiants du fluide déstabilise l'écoulement et augmente la vitesse de phase des ondes.

**Huang et Khomami [13]** ont proposé une explication concernant les mécanismes physique sous-jacents au déclenchement des instabilités dans les films à une ou plusieurs couches de fluides viscoélastiques sur un plan incliné en les comparant aux fluides newtoniens. Leur étude est basée sur une analyse énergétique parallèlement à une étude de stabilité linéaire. Les analyses qu'ils ont développées ont montré que tout comme pour les fluides newtoniens, les instabilités de surface dans le cas limite de grandes longueurs d'onde

se déclenchent à cause de contrainte de cisaillement aux interfaces. Ce qui est spécifique aux fluides viscoélastiques, ce sont les efforts élastiques déstabilisants qui apparaissent. Pour les écoulements de fluide newtoniens, l'origine du déclenchement de l'instabilité aux ondes longues dépend de la place de la couche la moins visqueuse. Si le fluide le moins visqueux est au fond, le cisaillement au niveau de l'interface sera responsable de la déstabilisation, alors que dans la configuration inverse, les efforts dus au tenseur de Reynolds gouverne l'instabilité. Pour les fluides viscoélastiques, la force d'entraînement pour l'instabilité et le couplage entre la vitesse de base et la perturbation d'une part et les contraintes et leurs gradients à travers l'interface d'autre part.

**Ruyer Quil et Manneville.** [14] ont développé un modèle simple pour modéliser les instabilités de la surface libre de l'écoulement d'un fluide newtonien. Leur méthode combine un développement en gradient du profil des vitesses à une méthode aux résidus pondérés.

**Rayleigh et al** [15] ont identifié la tension superficielle comme étant à l'origine de l'instabilité capillaire, cette instabilité est connue sous le nom d'instabilité de Rayleigh-plateau.



**Figure.I.9 :** Photographie illustrant la déformation d'un filet d'eau

Kelly, et al [16] ont effectué un bilan énergétique afin de déterminer les mécanismes responsables de ces instabilités. Ils ont montré que le terme dominant de production d'énergie est associé au travail des forces de cisaillement au niveau de la surface libre déformée. Ils ajoutent cependant que la stabilité est aussi liée à un autre phénomène. Le déplacement de la surface libre crée un saut de vorticité de la perturbation se produisant au voisinage de celle-ci : quand ce saut est tel que la vorticité vient renforcer le déplacement de l'interface, des instabilités se développent, alors que dans le cas contraire, il y a stabilisation de l'écoulement.

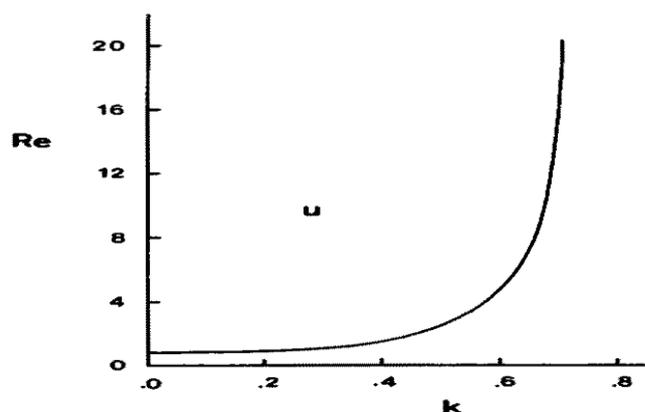


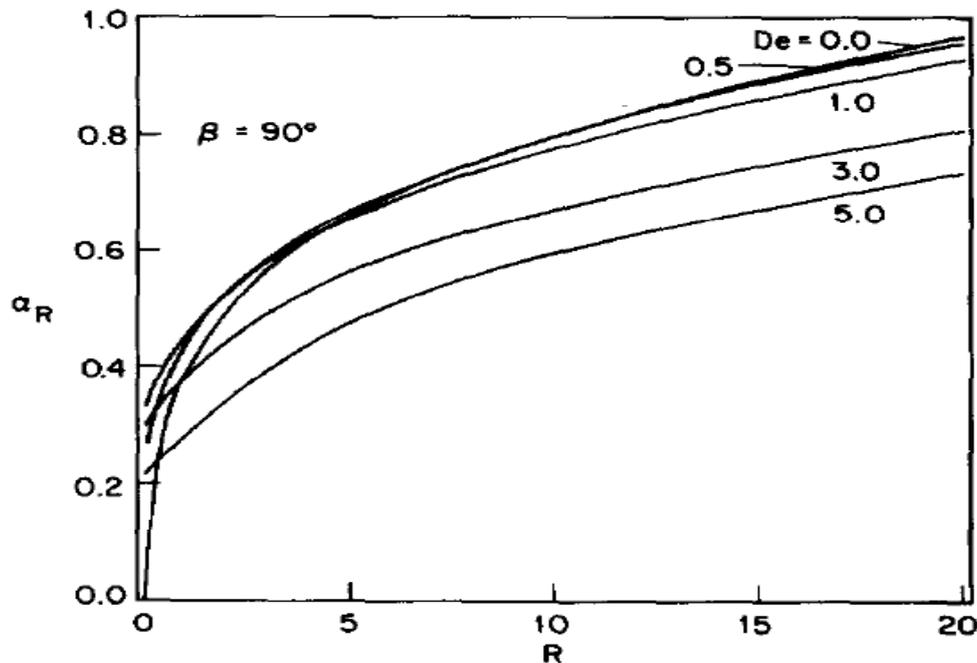
Figure I .10 . Nombre d'onde en fonction de Reynolds

Smith [17] a proposé une explication concernant les mécanismes physique à l'origine de la croissance de ces instabilités à grande longueur d'onde. Il décrit comment une perturbation au niveau de la surface libre produit un mouvement secondaire (la perturbation) au sein de la couche fluide et comment ce mouvement peut amplifier ou non les perturbations de l'interface suivant l'importance relative de l'inertie et du gradient de pression dans l'écoulement. Il retrouve par cette analyse les résultats de Yih [10] concernant la valeur du nombre de Reynolds critique et la célérité dont la valeur est le double de la vitesse à la surface libre.

- Fluides non-newtoniens :

Les travaux de Gupta [18] concernent la stabilité d'un film viscoélastique de second ordre s'écoulant le long d'un plan incliné. Il observe que les modes de surface se déclenchent pour des nombres de Reynolds critique plus faibles que pour des fluides newtoniens ordinaires. Le fait que leur stabilité soit gouvernée par les modes de cisaillement est une particularité importante de ces fluides du second ordre.

Le même constat a été fait par Lai [19] qui a étudié la stabilité d'un film de fluide viscoélastique d'Oldroyd B dans le cadre de l'hypothèse des grandes longueurs d'ondes. Cet écoulement a été également étudié par Shaqfeh *et al* [20]. Ils ont montré que pour des nombres de Reynolds modérés, la viscoélasticité a un effet stabilisant. Elle est cependant déstabilisante à des nombres de Reynolds faibles.



**Figure I.11 :** Courbes de stabilité neutre pour les films minces descendants verticaux, pour divers valeurs de nombre Deborah.

Amaouche *et al* [4] ont étudié la modélisation d'un écoulement par gravité de film non-newtonien en loi de puissance sur un plan incliné pour de faibles à modérés nombres de Reynolds. Ils ont établi un modèle complet d'ordres deux de quatre équations d'évolution de la dynamique du film en présence des effets non-newtoniens. Les solutions présentent les

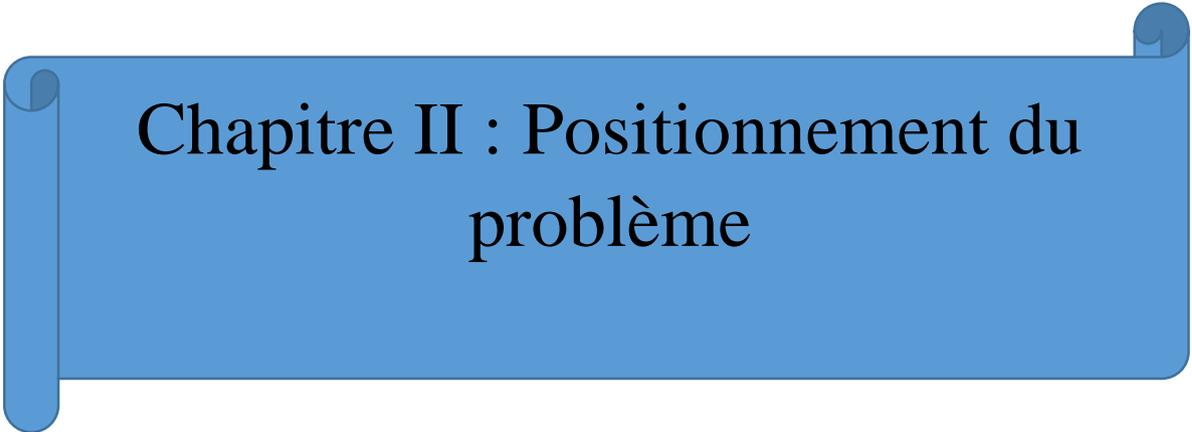
mêmes comportements qualitatifs qui ceux du cas newtonien, Quantitativement, une influence de l'indice de loi de puissance sur les valeurs critiques d'apparition des bifurcations et la transition vers le chaos.

**Liu et al. [21]** ont étudié la dynamique des boues liquides avec une forte concentration en particules cohésives d'argile. Ils ont fait pour cela une étude de stabilité sur un film mince de fluide de **Bingham [22]**, s'écoulant lentement sur un plan incliné. Ils montrent la présence de courants de gravité qui progressent à vitesse constante et peuvent même remonter l'écoulement. En résolvant une équation différentielle non linéaire, ils étudient l'étalement d'un volume fixés du même fluide déversé sur une couche statique appliquée auparavant. Ils observent que le front du courant de boue a toujours la même forme et progresse à une vitesse constante. Puis l'écoulement s'arrête lorsque les contraintes qu'il subit deviennent inférieures à la contrainte seuil du fluide.

**Uma et Usha [23]** ont utilisé un modèle intégral de couche limite pour modéliser les instabilités d'interfaces apparaissant dans un écoulement d'un fluide faiblement élastique. Leur étude, bien que très concluante à des nombres de Reynolds modérés, ne décrit pas correctement les conditions critiques au début de l'instabilité.

**Millet Séverine et al.[24]** mettent en évidence, après une étude de stabilité linéaire d'un écoulement de deux couches de fluides non newtoniens sur un plan incliné, l'existence d'un rapport de densité seuil à partir duquel on observe un basculement d'une instabilité à grande longueur d'onde à une instabilité de longueur d'onde modérée. L'influence des propriétés rhéofluidifiantes des fluides sur la position de ce seuil a été également étudiée.

**Pinarbasi et Liakopoulos[25]** ont étudié les effets de la rhéofluidification ainsi que l'existence du seuil d'écoulement, en utilisant des fluides inélastiques modélisés soit par un modèle de Bingham, soit par un modèle de Carreau-Yassuda. Leurs résultats sont valables pour des ondes quelconques. Ils arrivent à conclure qu'en passant d'une configuration avec deux fluides newtoniens à une configuration avec un fluide newtonien et un fluide viscoplastique, la stabilité est favorisée pour des ondes longues et intermédiaires. En ce qui concerne la rhéofluidification, plus elle est importante plus l'interface sera instable. Ce qui est en accord avec **Waters et Keeley [26]**.

A blue horizontal scroll graphic with rounded ends and a slight shadow, containing the chapter title.

## Chapitre II : Positionnement du problème

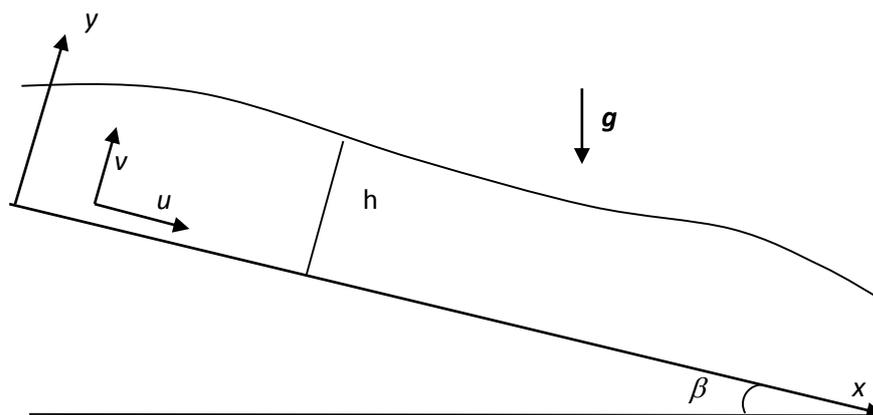
## II.1 Introduction :

Les équations qui mettent en évidence le comportement des fluides sont fondées selon les lois physiques : conservation de masse (continuité), quantité de mouvement (Navier-Stokes), et d'énergie. En mécanique des fluides, les équations de **Navier-Stokes** sont des équations aux dérivées partielles non linéaires qui sont censées décrire le mouvement des fluides (liquide et gaz visqueux ordinaires) dans l'approximation des milieux continus. La résolution de ces équations modélisant un fluide comme un milieu continu à une seule phase incompressible.

Dans ce chapitre on présentera d'abord une description globale de notre problème et les conditions aux limites correspondantes, puis en dernier lieu la procédure pour résoudre l'écoulement de base.

## II.2 Description du problème :

On s'intéresse à l'écoulement d'un film mince non-newtonien sur un plan incliné. L'orientation du repère est la suivante :  $x$  est la direction de l'écoulement,  $y$  est la direction perpendiculaire au plan incliné,  $h$  est l'épaisseur du film et  $\beta$  désigne l'angle que forme l'axe  $x$  avec l'horizontale,  $\beta = 0$  correspond donc à un plan horizontal (voir figure II.1).



**Figure II .1 :** Ecoulement d'un film sur un plan incliné

**II.2.1 Hypothèses :**

- La géométrie du système est supposée infinie dans la direction  $x$ .
- On néglige toute circulation d'air au-dessus du film.
- Le milieu considéré est homogène et isotrope.
- La pression de l'air est supposée constante et égale à  $P_a$ .
- Ecoulement est non isotherme.
- La température de l'air est supposée constante et égale à  $T_a$ .
- Film mince non-Newtonien est incompressible.

**II. 3 Equations gouvernantes :****II.3.1 Equations de Navier-Stokes généralisées :**

Les équations régissant la dynamique d'un fluide en écoulement résultent de l'application des lois et principes de la mécanique classique à savoir le bilan de la masse et le bilan de la quantité de mouvement.

- **La conservation de la masse :**

La conservation de la masse ou (équation de continuité) pour un fluide incompressible se traduit par la divergence nulle du champ de vitesse  $\mathbf{V}$ .

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (2.1)$$

Où

$\mathbf{V}$  : représente le vecteur vitesse de composante  $(u, v)$ .

$\rho$  : La masse volumique ( $\text{kg/m}^3$ ).

Pour  $\rho = \text{cst}$  donc l'équation (II.1) s'écrira comme suit :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.2)$$

- **Le bilan de quantité de mouvement :**

Ce bilan exprime la variation de la quantité de mouvement par unité de volume comme la somme des efforts volumiques et surfaciques appliqués.

$$\rho \frac{DV}{Dt} = \text{div}\boldsymbol{\sigma} + \rho\mathbf{g} \quad (2.3)$$

$\boldsymbol{\sigma}$  : Tenseur de contrainte de cauchy qui se décompose en une partie sphérique et une partie déviatrice sous la forme été donné par :

$$\boldsymbol{\sigma} = -PI + \boldsymbol{\tau}$$

Où I : le tenseur identité.

Et  $\mu$  la viscosité dynamique est donné par :

$$\mu = K|\dot{\gamma}|^{n-1} \quad (2.4)$$

Où  $K$  est la consistance.

Où :

$$\dot{\gamma} = \sqrt{\text{trac}(D^2)} \quad (2.5)$$

On note par  $\eta$  la quantité

$$\eta = |\dot{\gamma}|^{n-1}$$

Donc La formule générale de l'équation de quantité de mouvement est comme suit :

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \text{grad} \mathbf{V} \right) = -\text{grad} p + \text{div} \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{g} \quad (2.6)$$

La projection sur les axes en coordonnées cartésiennes Annexe 1 s'écrit :

Suivant (x) :

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ = -\frac{\partial p}{\partial x} + 2K \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) + K \frac{\partial}{\partial y} \left( \eta \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) + \rho g \sin(\beta) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Suivant (y) :

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ = -\frac{\partial p}{\partial y} + K \frac{\partial}{\partial x} \left( \eta \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) + 2K \frac{\partial}{\partial y} \left( \eta \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \rho g \cos(\beta) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Les forces agissant sur le fluide en écoulement sont :

- a) Forces de gravite liées au poids du fluide.
- b) Forces de pression.
- c) Forces de frottements causées par la viscosité.
- d) Forces dues à la tension de surface.
- e) Force d'inertie due à la variation de la vitesse.

### II.3.2 Equation de conservation de l'énergie

L'équation régissant les transferts de chaleur au sein du fluide qu'on rappelle incompressible s'écrit :

$$\rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{V} \text{grad} T \right) = \lambda \Delta T \quad (2.9)$$

avec :  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$

$\lambda$ : est la Conductivité thermique.

$c_p$  : Capacité calorifique.

Pour :  $k = \frac{\lambda}{\rho c_p}$  la diffusivité thermique.

Donc l'équation d'énergie devienne :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = k \Delta T \quad (2.10)$$

## II.4 Conditions aux limites :

### II.4.1 Condition à la paroi :

Les conditions aux limites sont données à la paroi par la condition de non glissement écrite en ( $y=0$ ) :

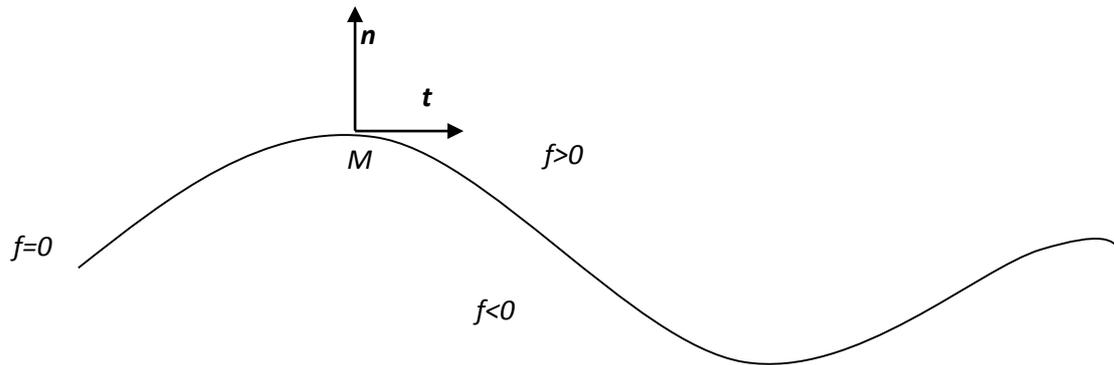
$$u = 0 \quad (\text{Condition d'adhérences})$$

ET

$$v = 0 \quad (\text{Condition d'imperméabilité})$$

### II.4.2 Condition à la surface libre

Avant de détailler les différentes conditions à la surface libre, il est indispensable de définir les vecteurs unitaires tangents et normaux à la surface libre au point M qui sont respectivement :  $\mathbf{t}$  et  $\mathbf{n}$ .



**Figure.II.2** : Géométrie de l'interface

La surface est définie par une courbe d'équation :

$$f(x, y, t) = y - h(x, t) = 0 \quad (2.11)$$

Où  $h(x, t)$  étant l'épaisseur de film.

Les coordonnées des vecteurs tangents et de la normale à la surface s'écrivent :

$$\mathbf{n} = \frac{\text{grad}f}{|\text{grad}f|} = \frac{(-h_x, 1)^t}{\sqrt{1+h_x^2}} \quad (2.12)$$

$$\mathbf{t} = \frac{(1, h_x)^t}{\sqrt{1-h_x^2}} \quad (2.13)$$

#### II.4. 2.1 Condition cinématique

Cette condition est également appelée condition d'imperméabilité La surface est définie par :

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{V} \mathbf{grad} f = 0 \quad (2.14)$$

En remplaçant (2.11) dans l'équation (2.14) on obtient :

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial(h - y(x, t))}{\partial t} + v \left( \frac{\partial(h - y(x, t))}{\partial x} + \frac{\partial(h - y(x, t))}{\partial y} \right) \quad (2.15)$$

Après la simplification on aura :

$$\frac{\partial h}{\partial t} - v + u \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (2.16)$$

### II.4.2.2 Condition dynamique

En pérennant en considération les forces visqueuses, les forces de pression et celles dues à la présence de la tension superficielle, il s'établit un équilibre à l'interface de fluide qui se traduit par :

- Condition normale :

$$(p_a - p)\mathbf{n} + (\boldsymbol{\tau}\mathbf{n})\mathbf{n} = -\sigma \mathbf{div} \mathbf{n} \quad (2.17)$$

- Condition tangentielle :

$$(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{t} = \mathbf{grad} \sigma \cdot \mathbf{t} \quad (2.18)$$

$\tilde{k}$  : est la courbure de l'interface donné par :

$$\mathbf{div}(\mathbf{n}) = -\tilde{k}$$

Donc :

$$\tilde{k} = \frac{h_{xx}}{(1+h_x^2)^{3/2}} \quad (2.19)$$

$h_{xx}$  Désigne la deuxième dérivée partielle  $h$  par rapport à  $x$ .

### II.4.3 Conditions aux limites thermiques :

D'après les expériences reportées dans la littérature, la paroi rigide peut être maintenue à température constante grâce à un bain thermostatique.

En  $y = 0$  on peut donc écrire :

$$T(y = 0) = T_w \quad (2.20)$$

Avec :  $T_w$  la température à la paroi.

Dans ces mêmes expériences, la conductivité du fluide est le plus souvent dix fois supérieure à celle de l'air, on aura donc considéré en approximation que la surface libre est isolante. Nous allons cependant utiliser ici la loi de Newton, déjà employée dans les travaux antérieurs [16] et donnant une approximation du transfert de chaleur entre le fluide et l'air.

En  $y = h(x, t)$ , on aura donc :

$$-\lambda \nabla T \mathbf{n} = \alpha_0 (T - T_a) \quad (2.21)$$

Avec :

$\alpha_0$ : Le coefficient de transfert de chaleur.

$T_a$ : La température de l'air

### II.5 Approximation de Boussinesq

Les paramètres physiques intervenant dans les équations du mouvement dépendent tous de la température du fluide, nous devrions donc tenir compte de cette dépendance, malheureusement les expérimentateurs eux-mêmes éprouvent des difficultés à déterminer ces dépendances. Donc, nous adopterons ici les approximations de Boussinesq qui est donnée par :

$$\sigma = \sigma_a - \gamma(T - T_a) \quad (2.22)$$

Où  $\sigma_a$  : est la tension de surface à la température de l'air  $T_a$ .

$\gamma = -\frac{\partial\sigma}{\partial T}$  est le coefficient thermique de tension superficielle.

## II.6 Ecoulement de base

En l'absence de perturbations, la vitesse de l'écoulement se réduit à sa composante longitudinale, et l'interface qui sépare le fluide de l'air est plane dans ce cas ( $h = h_0 = cst$ ). Dans ce cas, les équations du mouvement et les conditions aux limites associées à ces équations admettent une solution stationnaire et indépendante de la variable  $x$ .

### II.6.1 Profil de vitesse :

Après la simplification et l'application des conditions aux limites l'équation (2.7) devient :

$$\rho g \sin(\beta) + k[u_y^n]_y = 0 \quad (2.23)$$

Donc :

$$[u_y^n] = -\left(\frac{\rho g \sin(\beta)}{k}\right)y + cst_1$$

Pour :  $y = h$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^n = 0 \quad (2.24)$$

Donc :

$$cst_1 = \left(\frac{\rho g \sin(\beta)}{K}\right)h$$

En remplaçant  $cst_1$  par sa valeur, on obtient :

$$u_y = \left(\frac{\rho g \sin(\beta)}{K}\right)^{\frac{1}{n}}(h-y)^{\frac{1}{n}}$$

$$u(y) = \frac{1}{\frac{1}{n}+1} \left(\frac{\rho g \sin(\beta)}{K}\right)^{\frac{1}{n}} (h-y)^{1+\frac{1}{n}} + cst_2$$

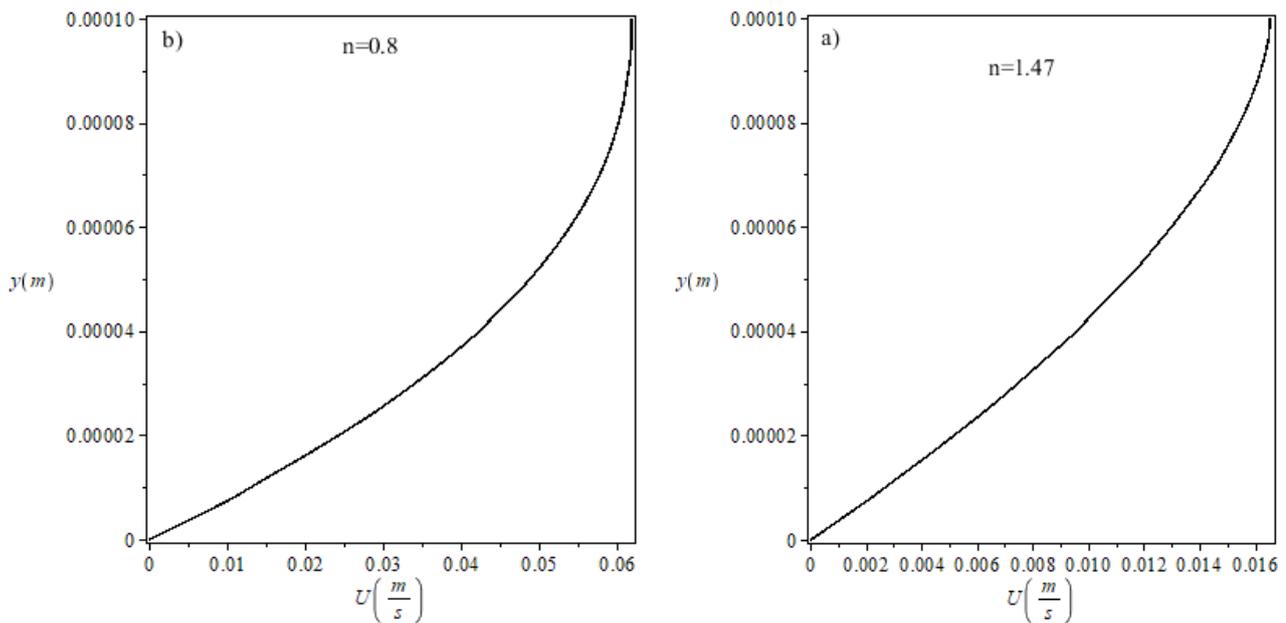
Et pour  $u(y = 0) = 0$  la condition à la paroi on obtient :

$$cst_2 = -\frac{n}{n+1} \left( \frac{\rho g \sin \beta}{K} \right)^{\frac{1}{n}} h^{1+\frac{1}{n}}$$

En remplaçant  $cst_2$  par sa valeur, la vitesse de base s'écrit :

$$U_b = \frac{n}{n+1} \left( \frac{\rho g \sin \beta}{K} \right)^{\frac{1}{n}} \left[ h^{1+\frac{1}{n}} - (h - y)^{1+\frac{1}{n}} \right] \quad (2.25)$$

Le graphe ci-dessous représente la variation de vitesse  $U(y)$  en fonction  $y$ .



**Figure II.3** : Profil de vitesse  $h = 10^{-4}m$ ,  $\beta = \frac{\pi}{2}$  : b)  $n = 0.8$ ,  $K/\rho = 3 \cdot 10^{-6}m^2s^{n-2}$

a)  $n = 1.47$ ,  $K/\rho = 2.5 \cdot 10^{-7}m^2s^{n-2}$

### II.6.2 Profil de pression :

Après la simplification et l'application des conditions aux limites l'équation (2.8) devient :

$$-\frac{\partial P}{\partial y} = \rho g \cos(\beta) \quad (2.26)$$

$$P(y) = -\rho g \cos(\beta)y + cst_3$$

à  $y = h$  Condition à l'interface  $p = p_a$

$$P(h) = p_a = -\rho g \cos(\beta)h + cst_3$$

$$cst_3 = p_a + \rho g \cos(\beta)h$$

En remplace la ( $cst_3$ ) par sa valeur on aura la pression de base :

$$P_b = \rho g \cos(\beta)(h - y) + p_a \quad (2.27)$$

### II.6.3 Profil de température :

Après la simplification et l'application des conditions aux limites l'équation (2.9) on obtient :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (2.28)$$

Donc la solution de l'équation (2.28) est de la forme :

$$T(y) = A(y) + b \quad (2.28.1)$$

Avec : A et b sont des constantes.

La condition à la paroi  $T(y=0) = T_w$  :

$$\text{Donc} \quad b = T_w \quad (2.28.2)$$

Et d'après l'équation (2.12) la condition à l'interface :

$$A = \frac{-\alpha_0(T_w - T_a)}{(\lambda + \alpha_0 h)} \quad (2.28.3)$$

En remplaçant (2.28.2) et (2.28.3) dans (2.28.1) on obtient :

$$T_b = T_w - \alpha_0 \frac{(T_w - T_a)}{(\lambda + \alpha_0 h)} y \quad (2.30)$$

Avec :

$\alpha_0$  : Le coefficient de connectivité.

$T_a$  : La température de l'air

**II.6.4 Vitesse moyenne de l'écoulement :**

$$u_m = \frac{1}{h} \int_0^h U_b dy \quad (2.31)$$

$$\int_0^h U_b dy = \int_0^h \frac{n}{n+1} \left( \frac{\rho g \sin \beta}{K} \right)^{\frac{1}{n}} \left( h^{1+\frac{1}{n}} - (h-y)^{1+\frac{1}{n}} \right) dy$$

Donc :

$$u_m = \frac{n}{2n+1} \left( \frac{\rho g \sin(\beta)}{K} \right)^{1/n} h^{1+\frac{1}{n}} \quad (2.32)$$

**II.7 Système complet**

Toutes les équations obtenues sont résumées dans le tableau suivant :

Equations
$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + 2K \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) + K \frac{\partial}{\partial y} \left( \eta \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) + \rho g \sin(\beta)$
$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial y} + K \frac{\partial}{\partial x} \left( \eta \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) + 2K \frac{\partial}{\partial y} \left( \eta \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \rho g \cos(\beta)$

$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = k \Delta T$
<p>Conditions aux limites</p>
<p>En <math>y = 0</math> :</p> <p style="text-align: center;"><math>u = v = 0</math> et <math>T = T_w</math></p> <p>En <math>y = h</math> :</p> <p style="text-align: center;"><math>\frac{\partial h}{\partial t} - v + u \frac{\partial h}{\partial x} = 0</math></p> <p style="text-align: center;"><math>(p_a - p)\mathbf{n} + (\boldsymbol{\tau}\mathbf{n})\mathbf{n} = -\sigma \text{div}\mathbf{n}</math></p> <p style="text-align: center;"><math>(\boldsymbol{\tau}\mathbf{n})\cdot\mathbf{t} = \text{grad}\sigma\cdot\mathbf{t}</math></p> <p style="text-align: center;"><math>-\lambda\nabla T\mathbf{n} = \alpha_0(T - T_a)</math></p>
<p>Ecoulements de base</p>
<p style="text-align: center;"><math>U_b = \frac{n}{n+1} \left( \frac{\rho g \sin\beta}{K} \right)^{\frac{1}{n}} \left[ h^{1+\frac{1}{n}} - (h-y)^{1+\frac{1}{n}} \right]</math></p> <p style="text-align: center;"><math>P_b = \rho g \cos(\beta)(h-y) + p_a</math></p> <p style="text-align: center;"><math>T_b = T_w - \alpha_0 \frac{(T_w - T_a)}{(\lambda + \alpha_0 h)} y</math></p>
<p>Vitesse moyenne</p>
<p style="text-align: center;"><math>u_m = \frac{n}{2n+1} \left( \frac{\rho g \sin(\beta)}{K} \right)^{1/n} h^{1+\frac{1}{n}}</math></p>

### II.6 Conclusion

Nous sommes maintenant face à un couplage total entre champ de vitesse, champ de pression et champ de température, aucun des trois ne pouvant être déterminé indépendamment des deux autres.

Dans le chapitre suivant, nous allons utiliser certaines grandeurs spécifiques à l'écoulement pour transformer les équations et les conditions aux limites, en un système d'équations adimensionnées puis la résolution de système par la méthode orr-sommerfeld.

## Chapitre III : Etablissement de l'équation d'Orr-Sommerfeld

### III.1 Introduction

On donne dans ce chapitre l'adimensionnement des équations gouvernantes et des conditions aux limites, puis la perturbation de l'état de base qui nous permet par la suite de poser les éléments d'analyse de stabilité linéaire par la méthode d'Orr-Sommerfeld.

### III.2 Echelles caractéristiques et équations adimensionnées

#### III.2.1 Echelle caractéristiques

L'écriture sous forme adimensionnelle des équations et des conditions aux limites fait à l'aide de grandeurs de référence issues des propriétés physiques du fluide considéré et de caractéristique de l'écoulement. Les échelles caractéristiques sont :  $h_0$  pour  $x$  et  $h_0/u_m$  pour le temps  $t$  et  $h_0/(ku_m^n)$  pour la pression. A partir de ces échelles caractéristiques, les variables adimensionnelles suivantes sont introduites :

- $\hat{x} = \frac{x}{h_0}$
- $\hat{y} = \frac{y}{h_0}$
- $\hat{t} = \frac{tu_m}{h_0}$
- $\hat{u} = \frac{u}{u_m}$
- $\hat{v} = \frac{v}{u_m}$
- $\hat{p} = \frac{ph_0}{(ku_m^n)}$
- $\hat{T} = \frac{T-T_a}{T_w-T_a}$

#### III.2.2 Equations adimensionnées

Notons que l'adimensionnalisation varie d'un auteur à un autre, et les résultats présentés sur la stabilité ne sont jamais donnés avec les mêmes nombres adimensionnels, ce qui rend la comparaison difficile.

## Chapitre III      Etablissement de l'équation d'Orr-Sommerfeld

Reportant le changement de variables dans les équations (2.2), (2.7), (2.8)-(2.9) ce qui donne :

$$u_x + v_y = 0 \quad (3.1)$$

$$R(u_t + uu_x + vv_y) + P_x = G + 2[u_x \eta]_x + [\eta(u_y + v_x)]_y \quad (3.2)$$

$$R(v_t + uv_x + vv_y) + P_y = -GB + [\eta(u_y + v_x)]_x + 2[v_y \eta]_y \quad (3.3)$$

$$RPr(T_t + uT_x + vT_y) = T_{xx} + T_{yy} \quad (3.4)$$

$$\text{Où : } G = \left(\frac{2n+1}{n}\right)^n$$

$$\eta = \{(u_y + \varepsilon^2 v_x)^2 + 4\varepsilon^2 u_x^2\}^{(n-1)/2}$$

$B = \cot\beta$  qui compare la composante transverse de la force gravitationnelle à sa composante longitudinale. Elle est la mesure de l'importance des forces de pression hydrostatiques inexistantes pour ( $B = 0$ ) pour des films tombant verticalement.

### **III.2. 3 Conditions aux limites adimensionnées**

Reportant le changement de variables dans les conditions aux limites ce qui donne :

En  $y = 0$

➤ L'adhérence à la paroi :

$$u = v = 0 \quad (3.5)$$

➤ La température à la paroi :

$$T = T_w = 1 \quad (3.6)$$

En  $y = h(x, t)$  :

➤ La condition cinématique :

$$h_t + uh_x - v = 0 \quad (3.7)$$

➤ La condition dynamique projetée sur les tangentes et la normale à l'interface :

$$p + 2\eta[u_x(1 - h_x^2) + (u_y + v_x)h_x] = -R(We - MaT) \frac{h_{xx}}{(1+h_x^2)^{1/2}} \quad (3.8)$$

$$\eta[(u_y + v_x)(1 - h_x^2) - 4u_x h_x] = -2RMa(1 + h_x^2)^{\frac{1}{2}}(T_x + h_x T_y) \quad (3.9)$$

$$T_y + BiT = h_x T_x \quad (3.10)$$

Les nombres sans dimension feront intervenir dans les équations du mouvement, de conservation d'énergie et les conditions aux limites sont :

- le nombre de Reynolds :  $R = \rho \frac{(h_0^n)(u_m^{2-n})}{K}$  qui mesure l'importance relative des effets inertiels et visqueux dans le fluide.

- le nombre de Prandtl :  $Pr = \frac{k}{\mu}$  qui caractérise l'importance relative des effets thermiques et visqueux.

- le nombre de weber :  $We = \frac{\sigma_a}{\rho h_0 u_m^2}$  compare la tension superficielle aux effets inertielle.

- le nombre de Biot :  $Bi = \frac{\alpha h_0}{\lambda}$  décrit le transfert de chaleur du liquide au gaz ambiant.

Et le nombre de Biot Prend des valeurs différentes selon que le transfert de chaleurs se font par convection ou par conduction.

- le nombre de Marangoni :  $Ma = \gamma \frac{T_w - T_a}{\rho h_0 u_m^2}$  utilisé en mécanique des fluides qui représente le rapport des forces de surface sur les forces inertielles.

### III.3 Perturbation de l'écoulement et linéarisation des équations

Dans ce qui suit l'étude consiste à regarder la stabilité linéaire de l'écoulement initiale, Les écoulements de base sont perturbé de telle sorte que la température, la vitesse, l'épaisseur du film et la pression de l'état final s'écrivent comme la somme de l'état de base et de perturbation suffisamment petites ( $\delta \ll 1$ ) :

$$\begin{aligned}u(x, y, t) &= U_b + \delta u_1 \\v(x, y, t) &= \delta v_1 \\P(x, y, t) &= P_b + \delta p_1 \\T(x, y, t) &= T_b + \delta T_1 \\h(x, t) &= 1 + \delta h_1\end{aligned}\tag{3.11}$$

Après substitution dans les équations du mouvement et de conservation de l'énergie puis éliminations de produit de deux perturbations, nous obtenons le problème aux valeurs propres linéarisé suivant :

- Equation de continuité linéarisé :

$$u_{1x} + v_{1y} = 0\tag{3.12}$$

- Equation de (N.S) linéarisé suivant (x) :

$$R(u_{1t} + U_b u_{1x} + v_1 U_b') + p_{1x} = n\omega_{1y} + 4(U_b')^{n-1} u_{1x}\tag{3.13}$$

- Equation de (N.S) linéarisé suivant (y) :

$$R(v_{1t} + U_b v_{1x}) + p_{1y} = n\omega_{1x}\tag{3.14}$$

Où :

$$\omega_1 = (U_b')^{n-1}(u_{1y} + v_{1x})$$

➤ Equation d'énergie linéarisé s'écrit :

$$RPr(T_{1t} + U_b T_{1x} + v T_b') = T_{1xx} + T_{1yy} \quad (3.15)$$

➤ Condition aux limites :

En  $y=0$  :

$$u_1 = v_1 = 0 \quad (3.16)$$

En  $y = h(x, t) = 1$  :

L'équation (3.7) s'écrit :

$$h_{1t} + U_b(1)h_{1x} - v_1 = 0 \quad (3.17)$$

L'équation (3.8) s'écrit :

$$p_1 + h_1 P_b'(1) + u_x (U_b'(1))^{n-1} + h_x (U_b'(1))^n + R(We - Ma T_b(1)) h_{1xx} = 0 \quad (3.18)$$

L'équation (3.9) s'écrit :

$$n\omega_1 + h_1 (U_b'(1))^n - 2 RMa(T_{1x} + h_{1x} T_b'(1)) = 0 \quad (3.19)$$

L'équation (3.10) s'écrit :

$$T_{1y} + Bi(T_b'(1)\omega_1 + T_{1x}) = 0 \quad (3.20)$$

### III .4 Equation d'orr-Sommerfeld

Le premier qu'à établir l'équation d'orr-sommerfeld pour des écoulements avec surface libre est Yih [10] en 1955, par la suite Benjamin en 1956 complété son étude en introduisant la tension de surface et a par ailleurs les conditions critiques d'instabilité.

L'écoulement étant bidimensionnel et incompressible cela nous permet d'introduire la perturbation des vitesses  $\tilde{u}$  et  $\tilde{v}$  par une fonction de courant  $\Psi = (x, y, t)$  définie par :

$$\begin{aligned} \bullet \quad u &= \frac{\partial \Psi}{\partial y} \\ \bullet \quad v &= -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \end{aligned} \tag{3.21}$$

Les équations linéarisées sont à coefficients constants donc admettent des solutions exponentielles en temps et en espace. Chaque solution est ensuite décomposée en une somme d'ondes sinusoïdales qui se propagent selon la direction  $x$  :

$$\begin{aligned} \Psi(x, y, t) &= \phi(y)e^{i\alpha(x-ct)} \\ P(x, y, t) &= P(y)e^{i\alpha(x-ct)} \\ T(x, y, t) &= \tau(y)e^{i\alpha(x-ct)} \\ h(x, y, t) &= h(y)e^{i\alpha(x-ct)} \end{aligned} \tag{3.22}$$

Avec :  $\phi(y) = \phi_r(y) + i\phi_i(y)$  représentent les amplitudes complexes des perturbations.

Et (r, i) correspondent respectivement aux parties réelles et imaginaires.

$\alpha$  est le nombre d'onde et  $c$  correspond à la célérité.

Les équations (3.13), (3.14), (3.15), s'écrivent alors :

$$n\omega' = i\alpha([R(U_b - c) - 4i\alpha (U_b')^{n-1}]\phi' - RU_b'\phi + P) \tag{3.23}$$

$$p' = i n \alpha \omega - R \alpha^2 (U_b - c) \phi \quad (3.24)$$

$$\tau'' = \tau \alpha^2 + i \alpha R P r [(U_b - c) \tau - T_b' \phi] \quad (3.25)$$

Avec :

$$\omega = (U_b')^{n-1} (\phi'' + \alpha^2 \phi)$$

l'adhérence et la température à la paroi donneront :

$$\phi(0) = \phi'(0) = 0 \quad (3.26)$$

$$\tau(0) = 0$$

pour  $y = h(x, t) = 1$

L'équation (3.18) s'écrit :

$$(U_b - c)P + \alpha^2 \left( (We - Ma T_b(1)) \right) \phi = 0 \quad (3.27)$$

L'équation (3.19) s'écrit :

$$n \omega (c - U_b) + ((U_b')^n)' \phi + i \alpha M a (c - U_b) \tau(1) + T_b'(1) \phi(1) = 0 \quad (3.28)$$

L'équation (3.20) s'écrit :

$$\tau'(1) + Bi(\tau(1) + T_b'(1) \phi(1) / (c - U_b(1))) = 0 \quad (3.29)$$

### Conclusion :

Après l'adimensionnalisation et la linéarisation des équations gouvernante et les conditions aux limites associé, nous serons face aux équations d'Orr-Sommerfeld qui se présentes comme un problème aux valeurs propres généralisé.

Dans le chapitre suivant nous exposerons la méthode de résolution des équations d'Orr-Sommerfeld obtenues par voie numérique.

## Chapitre IV : Etude de la Stabilité de l'écoulement

## IV.1 Introduction

La stabilité d'écoulement d'un film tombant sur un plan incliné est étudiée dans ce chapitre. Il s'agit d'un écoulement dont l'instabilité est gouvernée par une équation type d'Orr-Sommerfeld associée à des conditions aux limites à la paroi et à la surface libre. Un développement asymptotique aux grandes ondes, c'est-à-dire, pour le petit nombre d'onde  $\alpha$  ( $\alpha \ll 1$ ), nous permet donc de déterminer une relation de dispersion de manière analytique, par conséquent on obtient les seuils d'instabilité d'une manière explicite. Par la suite, une combinaison de la méthode de Riccati et la méthode de Rung-Kutta, nous avons résolu numériquement ces équations.

## IV.2 Instabilité de grande longueur d'onde

Le problème à résoudre est un problème avec conditions aux limites à la paroi  $y = 0$  et à la surface libre  $y = 1$ . Et se présente comme un problème aux valeurs propres qui n'admet de solution non triviale que si la célérité  $c$  satisfait une relation de dispersion. On étudie ici la stabilité temporelle de l'écoulement de base vis-à-vis d'une perturbation de nombre d'onde  $\alpha$  f, et de célérité complexe est inconnue. La partie réelle  $c_r$  correspond à la célérité de l'onde, et  $\omega_i = \alpha c_i$  est son taux de croissance appelé aussi taux d'amplification. La stabilité ou l'instabilité est liée au signe de la partie imaginaire  $\omega_i$  si :

- $\omega_i > 0$  correspond à une perturbation instable.
- $\omega_i = 0$  représente une perturbation neutre dans ce dernier cas l'écoulement est dit marginal.
- $\omega_i < 0$  correspond à une perturbation stable.

## IV.3 Résolution asymptotique à petit nombre d'onde

Nous avons choisi de résoudre le problème précédent à l'aide d'un développement asymptotique aux grandes longueurs d'onde. Dans le cas de l'hypothèse ondes longues l'instabilité apparaît à faible nombre de Reynolds, notons que la tension superficielles des fluides usuels sont importantes. On considère donc les hypothèses suivantes :

- Les longueurs des ondes observées sont grandes par rapport à leurs amplitudes.
- Les effets inertiels sont petits.

Dans ces conditions le nombre d'onde  $\alpha$  est le petit paramètre du développement asymptotique. Nous imposons que les solutions analytiques de l'amplitude de la perturbation  $\phi(y)$ , la pression ( $p$ ), la température ( $\tau$ ) s'écrivent comme suit :

$$\begin{aligned} \phi &= \phi_0 + \alpha i \phi_1 - \alpha^2 \phi_2 + \dots \\ P &= P_0 + \alpha i P_1 - \alpha^2 P_2 + \dots \\ C &= C_0 + \alpha i C_1 - \alpha^2 C_2 + \dots \\ \omega &= \omega_0 + \alpha i \omega_1 - \alpha^2 \omega_2 + \dots \\ \tau &= \tau_0 + \alpha i \tau_1 - \alpha^2 \tau_2 + \dots \end{aligned} \tag{4.1}$$

On reporte dans les équations (3.23)-(3.24)-(3.25) et les conditions aux limites à la paroi ( $y=0$ ) et la surface libre ( $y=1$ ) les solutions écrites sous la forme donnée par les équations (4.1). Ensuite, on réarrange les termes suivant les puissances croissantes, ce qui nous permet de résoudre notre problème successivement aux différents ordres.

**IV.3.1 Résolution à l'ordre zéro**

L'équation (3.23) s'écrit :

$$\begin{aligned} n\omega' &= 0 \\ \omega' &= 0 \end{aligned} \tag{4.2}$$

L'équation (3.25) s'écrit :

$$\tau_0'' = 0 \tag{4.3}$$

Pour ( $y = 0$ ) :

$$\phi_0 = \phi_0'(0) = \tau_0(0) = 0 \quad (4.4)$$

Pour ( $y = 1$ ) :

L'équation (3.28) s'écrit :

$$n\omega_0(c_0 - U_b) + ((U_b')^n)\phi_0(1) = 0 \quad (4.5)$$

Et :

$$\phi_0(y) = A_1 \left(\frac{2n+1}{n}\right)^{1-n} \left[ \frac{n}{n+1} (1-y)^{1+\frac{1}{n}} - (1-y) + \frac{1}{n+1} \right] \quad (4.6)$$

Où

$A_1$  : est une constante.

$$\phi_0(1) = A_1 \left(\frac{2n+1}{n}\right)^{1-n} \frac{1}{n+1} \quad (4.7)$$

D'après l'équation (4.3) :

$$\tau_0(1) = cst \quad (4.8)$$

D'après l'équation (4.5) :

$$c_0 = \frac{2n+1}{n} + \frac{G\phi_0(1)}{\tau_0(1)} \quad (4.9)$$

On remplace (4.7) et (4.8) dans (4.9) :

$$c_0 = \frac{2n+1}{n} \quad (4.10)$$

L'équation (4.9) s'écrit :

$$\tau_0(y) = \frac{A_1}{G} T_b'(1) \quad (4.11)$$

### IV. 3.2 Résolution à l'ordre un

L'équation (3 .23) s'écrit :

$$\omega_1'' = i\alpha R[(U_b - c)\phi_0'' - U_0''\phi_0] \quad (4.12)$$

L'équation (3 .24) s'écrit :

$$\tau_1'' = i\alpha RPr[(U_b - c)\tau_0 - T_b'\phi_0] \quad (4.13)$$

L'adhérence à la paroi (y=0) :

$$\phi_1(0) = \phi_1'(0) = \tau_1(0) = 0 \quad (4.14)$$

La surface libre (y=1) :

$$c_1 = \frac{-1}{A_1} \left[ \frac{2n+1}{n(n+1)} (\tau_{n1}(1) - nMaB_1) - G\phi_1(1) + Ma T_b'(1) \right] \quad (4.15)$$

$$\omega_1' = -R \left( c_0 - \frac{2n+1}{n+1} \right) \phi_0'(1) + \frac{W+Gcot\beta}{c_0 - \frac{2n+1}{n+1}} \phi_0(1) \quad (4.16)$$

$$\omega_1' = -\frac{(2n+1)^2}{n^2(n+1)^2} \frac{A_1}{G} R + \frac{A_1}{G} (W + Gcot\beta) \quad (4.17)$$

$$\tau_1'(1) + B_i\tau_1(1) = \frac{n(n+1)}{2n+1} B_i T_b'(1) \left[ \frac{A_1}{G} c_1 - \phi_1(1) \right] \quad (4.18)$$

Où : W= We.R

D'après l'équation (4.15) et (4.16) le nombre de Reynolds critique  $R_c$  devienne.

$$R_c = \frac{1}{2} \frac{BGn^2(3n+2)}{(2n+1)^2} - \frac{1}{2} \frac{(3n+2)n^2(n-1)BiMa}{(2n+1)(n+1)(1+Bi)} \quad (4.19)$$

#### IV.4. Résolution numérique

Dans cette partie, nous décrivons la méthode numérique utilisée pour résoudre les équations d'Orr-Sommerfeld le Chapitre III.

Nous avons ici choisi d'utiliser une méthode de résolution ayant déjà fait ses preuves dans le cas de l'écoulement de poiseuille plan monocouche. Cette méthode utilise une matrice dite Riccati pour passer de la résolution d'un problème 'linéaire' aux valeurs propre en celle d'un problème 'non linéaire' aux valeurs initiales.

Il faut tout d'abord transformé les équations d'Orr-Sommerfeld en un système d'équation de premier ordre en procédant au changement de variable suivant :

$$\frac{\partial}{\partial y} (\phi, \phi', \tau, \omega, P, T')^t = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} (\phi, \phi', \tau, \omega, P, T')^t \quad (4.20)$$

Avec A, B, C, D, sont des matrices carrées de dimension trois, données par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ U_b^{1-n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & \frac{i\alpha}{n} & 0 \\ in\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} \frac{-i\alpha}{n} R U_b' & K_1 & 0 \\ -R\alpha^2 (U_b - C) & 0 & 0 \\ -i\alpha R P_r T_b' & 0 & K_2 \end{pmatrix}$$

Avec :

$$K_1 = \frac{i\alpha}{4} (R(U_b - C) - 4i\alpha(U_b')^{n-1})$$

$$K_2 = \alpha^2 + i\alpha R P_r (U_b - C)$$

la matrice de Riccati,  $(\mathfrak{R})$  est définie par :

$$(\emptyset, \emptyset', \tau)^t = \mathfrak{R}(\omega, P, \tau')^t \quad (4.21)$$

Où :

$$\mathfrak{R} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}$$

Nous posons :

$$\mathbb{X}_{(y)} = (\emptyset, \emptyset', \tau)^t \quad (4.22)$$

Et

$$\mathbb{Y}_{(y)} = (\omega, P, \tau')^t \quad (4.23)$$

Nous remplaçons (4.22) et (4.23) dans (4.21) :

$$\mathbb{X}_{(y)} = \mathfrak{R}_{(y)} \mathbb{Y}_{(y)} \quad (4.24)$$

Et le système s'écrit

$$\begin{cases} \frac{d\mathbb{X}}{dy} = A\mathbb{X} + B\mathbb{Y} \\ \frac{d\mathbb{Y}}{dy} = A\mathbb{X} + B\mathbb{Y} \end{cases} \quad (4.25)$$

En dérivant l'équation (4.24) par rapport à  $y$ , et en utilisant les équations (4.25), il s'ensuit que  $\mathfrak{R}$  satisfait l'équation différentielle matricielle non linéaire du premier ordre, appelée équation de Riccati, suivante :

$$\frac{d\mathfrak{R}}{dy} = -\mathfrak{R}C\mathfrak{R} - \mathfrak{R}D + A\mathfrak{R} + B \quad (4.26)$$

En  $y=0$ , on a

$$\mathbb{X}(0) = \mathfrak{R}(0) \cdot \mathbb{Y}(0) = 0$$

Donc :

$$\mathbb{X}(0) = \mathfrak{R}(0) = 0 \quad (4.27)$$

Pour  $y = h$  le système s'écrit sous forme :

$$M\mathbb{X} + N\mathbb{y} = 0 \quad (4.28)$$

Avec M, N, sont des matrices carrées de dimension trois, données par :

$$M = \begin{pmatrix} D_1 & 0 & D_2 \\ D_3 & 0 & 0 \\ D_4 & 0 & D_5 \end{pmatrix} \quad (4.29)$$

$$N = \begin{pmatrix} n(c - U_b) & 0 & 0 \\ 0 & U_b - c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.30)$$

Nous remplaçons (4.22)-(4.23)-(4.29) et (4.30) dans (4.28) nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} D_1 & 0 & D_2 \\ D_3 & 0 & 0 \\ D_4 & 0 & D_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \phi' \\ \tau \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n(c - U_b) & 0 & 0 \\ 0 & U_b - c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega \\ p \\ \tau' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.31)$$

Où :

$$D_1 = (U_b)' + T_b' i\alpha M_a$$

$$D_2 = i\alpha M_a (c - U_b(1))$$

$$D_3 = \alpha^2 (W - Ma T_b(1)) + G \cot(B)$$

$$D_4 = \frac{Bi T_b'}{c - U_b(1)}$$

$$D_5 = \frac{Bi}{c - U_b(1)}$$

La résolution de système (4.31) est de la forme :

$$\det \left[ \begin{pmatrix} D_1 & 0 & D_2 \\ D_3 & 0 & 0 \\ D_4 & 0 & D_5 \end{pmatrix} \cdot \mathfrak{R} + \begin{pmatrix} n(c - U_b) & 0 & 0 \\ 0 & U_b - c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = 0 \quad (4.32)$$

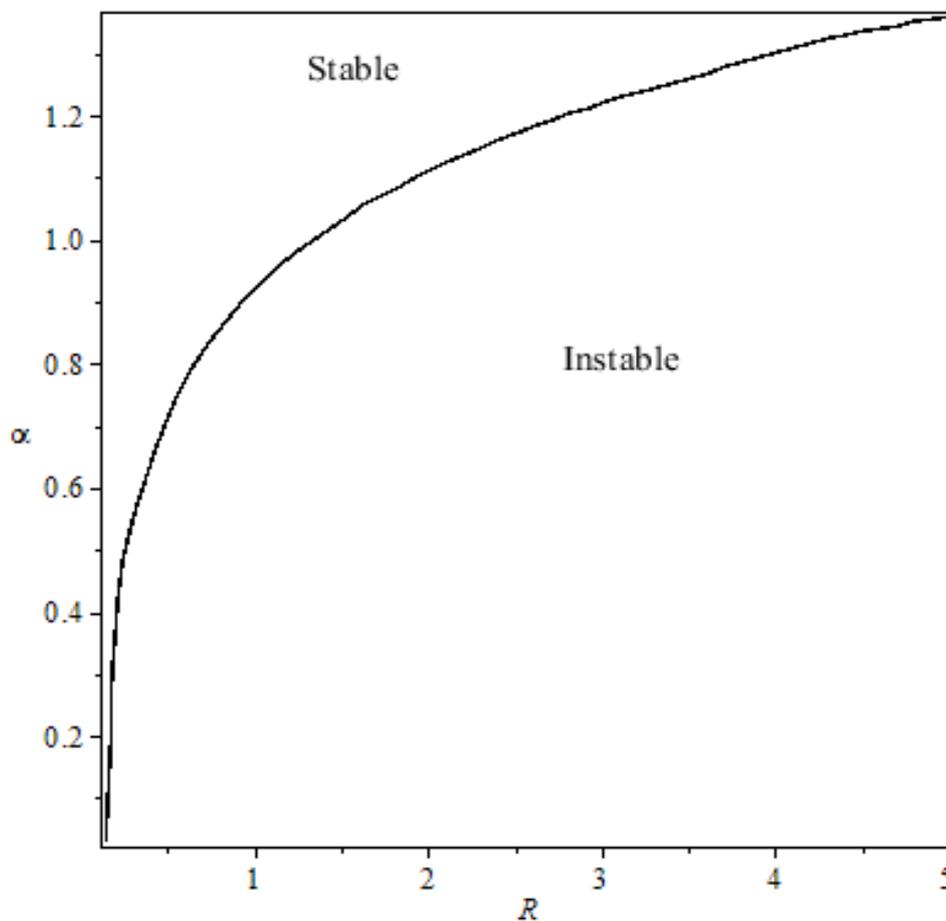
### VI.6 Courbes de stabilité marginale :

Les figures (IV.1-IV.2) représentent les courbes de stabilité marginale correspondant aux modes neutres du système ( $w_i = 0$ ).

Ces courbes partagent le plan  $(\alpha, R)$  en deux régions, une région stable caractérisée par des taux d'amplification négatifs ( $w_i < 0$ ) et une région instable caractérisée par des taux d'amplification positifs ( $w_i > 0$ ).

La figure (IV.3) représente l'influence de l'indice  $n$  sur la stabilité de film mince, les calculs ont été effectués pour un nombre ( $Bi=5$  et  $W=1$ ). Le fluide s'écoule sur une paroi de l'angle ( $\beta = \frac{\pi}{2}$ ).

Nous avons fait varier le paramètre de célérité pour examiner leur influence sur la stabilité de l'interface.



**Figure IV.1** Courbes de stabilité marginale obtenues pour  $Ma=0.5, Bi=5, W=1$  et  $n=0.8$

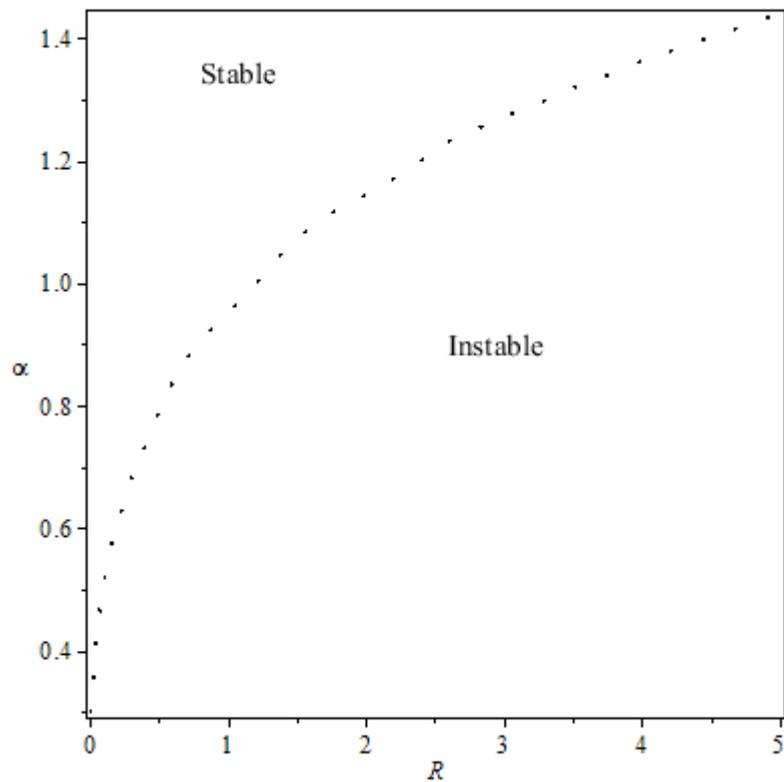


Figure VI.2 Courbes de stabilité marginale obtenues pour  $Ma=0.5, Bi=5, W=1$  et  $n=1.47$

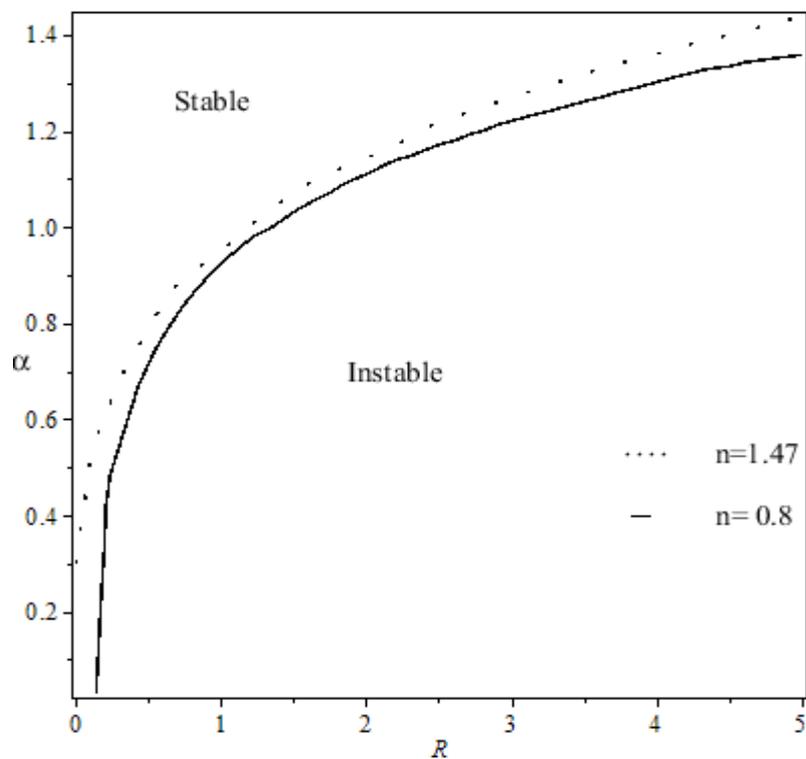
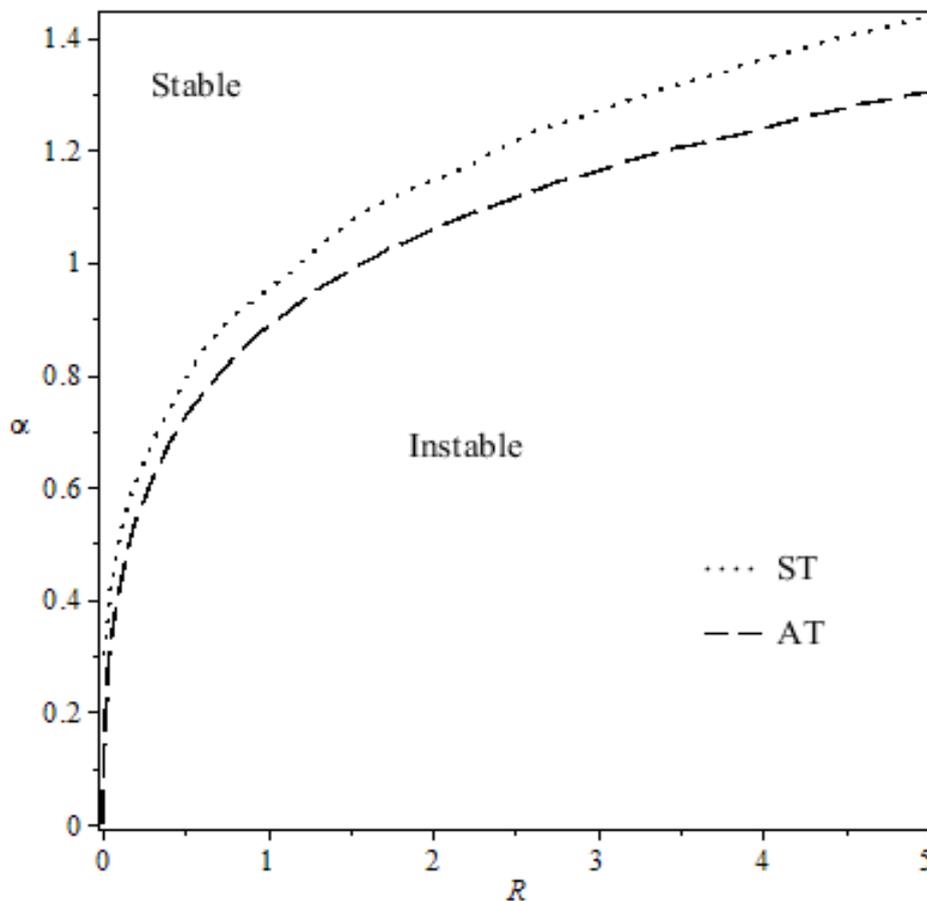


Figure VI.3 Courbes de stabilité marginale obtenues pour  $Ma=0.5, Bi=5, W=1$  et pour différentes valeur de l'indice de puissance ( $n=0.8$  et  $n=1.47$ ).

Nous remarquons de la figure (IV.3) que le paramètre de puissance a pour effet de déstabiliser l'écoulement de film. On voit clairement qu'il y a élargissement de la zone stable pour le  $n=0.8$ , donc pour le Marangoni constant nous remarquons que le fluide rhéofluidifiant et plus stable que un fluide rhéoépaississant.

- **La comparaison au cas sans température**

La figure (IV.4) représente la comparaison entre le cas sans température qu'a été fait par Amaouche et al [4] et celle avec température, nous fixons les paramètres ( $W$ ,  $Bi$ ,  $n$ ) et nous varions le Marangoni.

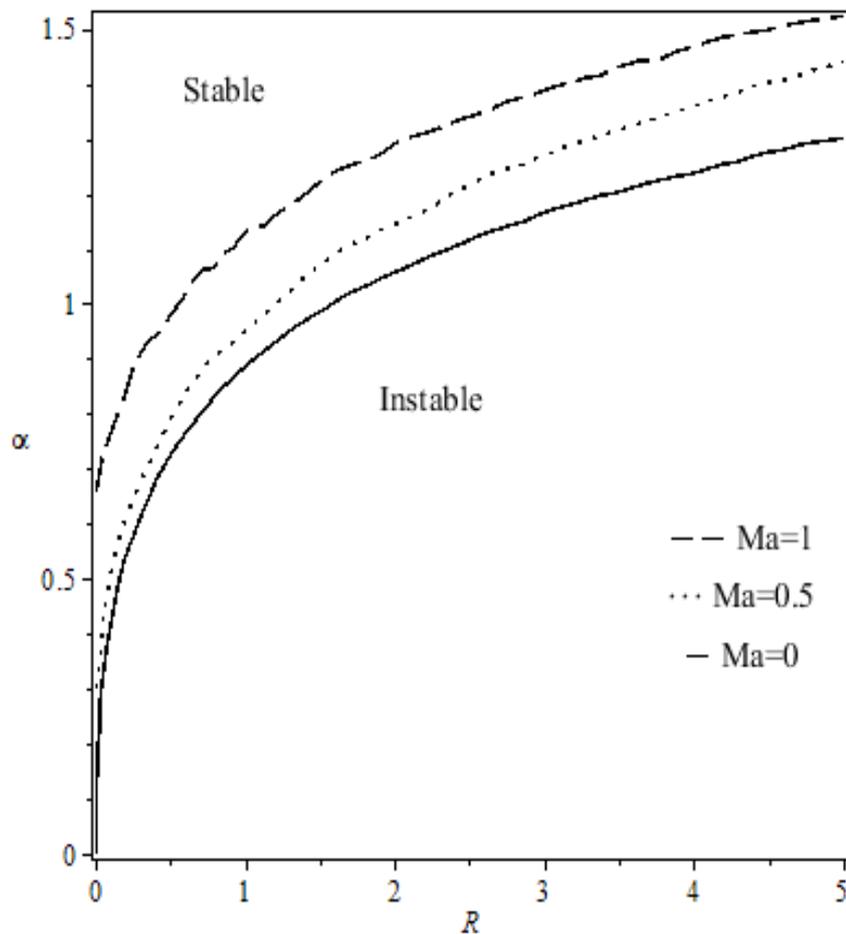


**Figure VI.4** Courbes de stabilité marginale obtenues pour  $n=1.47, W=1, Bi=5$  et pour différentes valeurs de Marangoni ( $Ma=0$  et  $Ma=0.5$ ).

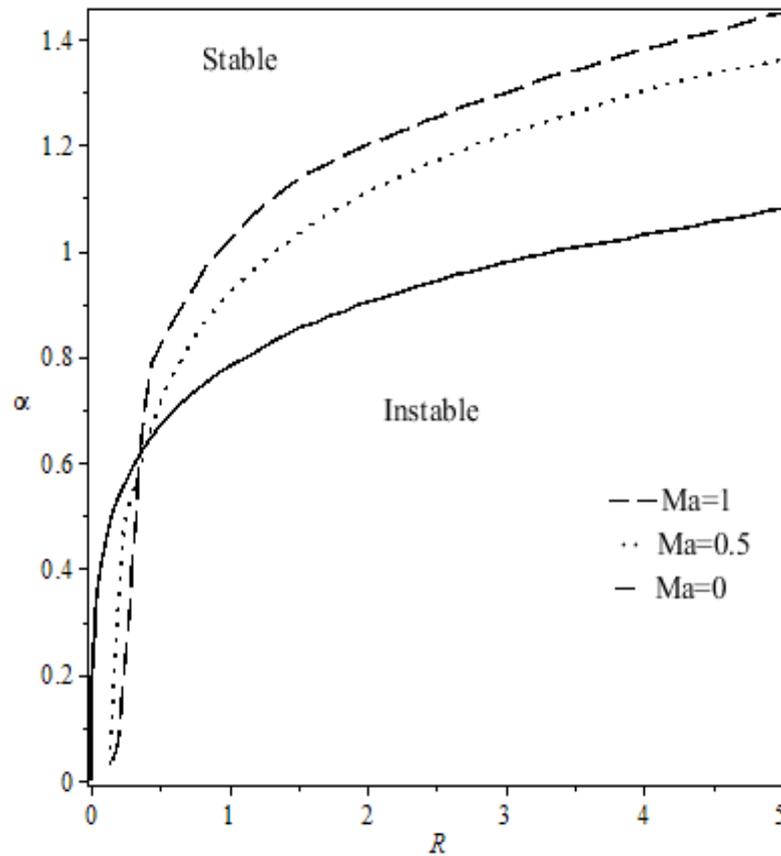
Nous remarquons que la région de stabilité d'un film mince en absence de température est plus grande que la zone de stabilité pour un écoulement en présence de température. Nous concluons que le paramètre de température a pour effet de déstabiliser l'écoulement de film.

- Effet Marangoni

Les figures (IV.5-IV.6) représentent les courbes de stabilité correspondant à différentes valeurs de Marangoni et nous avons pris  $n=0.8$  et  $n=1.47$

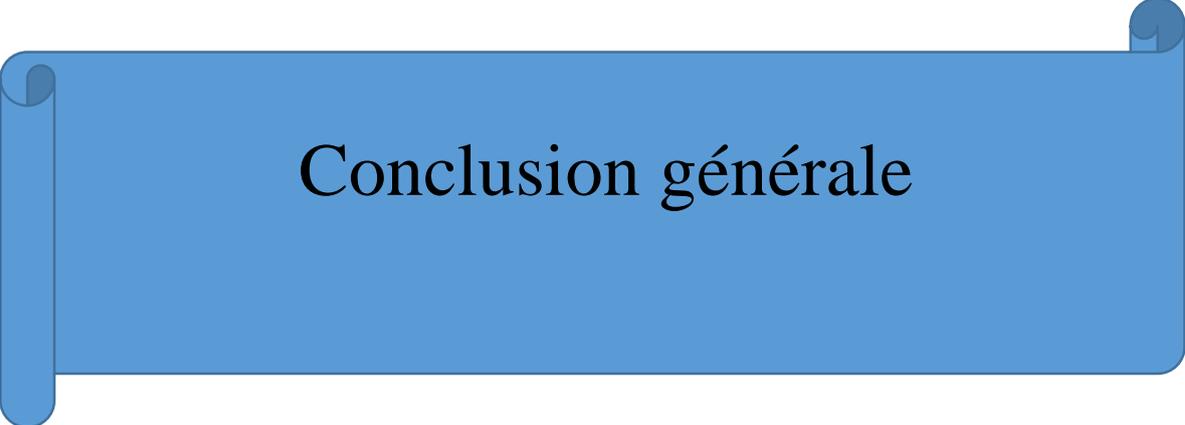


**Figure IV.5** Courbes de stabilité marginale obtenues pour  $n=1.47, W=1, Bi=5$  et pour différentes valeurs de Marangoni ( $Ma=0, 0.5, 1$ ).



**Figure IV.6** Courbes de stabilité marginale obtenues pour  $n=0.8, W=1, Bi=5$  et pour différentes valeurs de Marangoni ( $Ma=0, 0.5, 1$ ).

Nous avons examiné l'influence de l'effet Marangoni sur la stabilité de la surface libre, et nous avons remarqué un élargissement de la zone des modes stables avec la diminution du nombre du Marangoni. Et pour le nombre de Reynolds inférieure à un ( $R < 1$ ) où les force de surface sont inférieures aux forces inertielles, nous avons remarqué un élargissement de la zone stable avec l'augmentation du nombre Marangoni.



## Conclusion générale

### Conclusion générale

Dans ce projet de fin d'étude, nous nous sommes intéressés à la stabilité linéaire de l'écoulement sur un plan incliné d'un film de fluide non-Newtonien en présence d'effet Marangoni, obéissant à une loi de comportement de type de puissance. Un des objectifs principaux est la détermination du seuil d'apparition des instabilités et la caractérisation de la forme de la surface libre.

Une synthèse de la littérature montre que contrairement aux fluides newtoniens, les études sur des fluides complexes sont loin d'être largement répondues d'où l'intérêt que nous avons porté à ce sujet.

L'analyse de stabilité de la surface libre a été effectuée à l'aide de la méthode de petite perturbations et cela nous a permis d'établir l'équation d'Orr-Sommerfeld qui gouvernant la stabilité de cet écoulement. La résolution de ce système a été abordée numériquement par la combinaison de la méthode de Riccati et la méthode de Rung-Kutta, on est passé alors de la résolution d'un problème linéaire aux valeurs propres à celle d'un problème non linéaire aux valeurs initiales. Une étude asymptotique aux grandes longueurs d'onde a également été effectuée nous livrant des informations utiles sur l'écoulement au début de l'instabilité. Cette méthode de résolution présente des avantages importantes tels que :

- On obtient une relation de dispersion analytique.
- Précision des résultats au seuil de l'instabilité.

Par la suite nous avons résolu le système d'équation obtenue numériquement à l'aide d'une instruction intégrée dans le logiciel de programmation Maple, M17Portal, qui nous permet de calculer le déterminant d'une matrice, cette matrice résume la stabilité de la surface libre pour les différents paramètres. Il suffit de faire varier la célérité pour un nombre de Reynolds et d'onde donnés jusqu'à ce que le déterminant s'annule.

A' la marginalité, nous avons également examiné l'influence de l'effet Marangoni et de l'indice de puissance sur la stabilité de la surface libre. Nous avons remarqué un élargissement de la zone instable avec l'augmentation de l'effet Marangoni.

## **Conclusion générale**

---

Quant à l'influence de l'indice  $n$ , nous avons noté que l'interface est d'autant plus déstabilisée que cet indice de puissance augmente. Une comparaison a été faite dans le cas sans température où l'effet Marangoni est absent, nous avons remarqué un élargissement de la zone des modes instables en présence d'effet Marangoni.

## Annexe

Équation de quantité de mouvement :

Pour :  $\mu = K\gamma^{n-1} = K\eta$  la loi de puissance.

La projection de l'équation (2.6) sur les axes en coordonnées cartésiennes s'écrit :

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + 2\text{div}(\eta D) + \rho g \sin(\beta) \dots\dots\dots (x)$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + 2\text{div}(\eta D) - \rho g \cos(\beta) \dots\dots\dots (y)$$

Où :

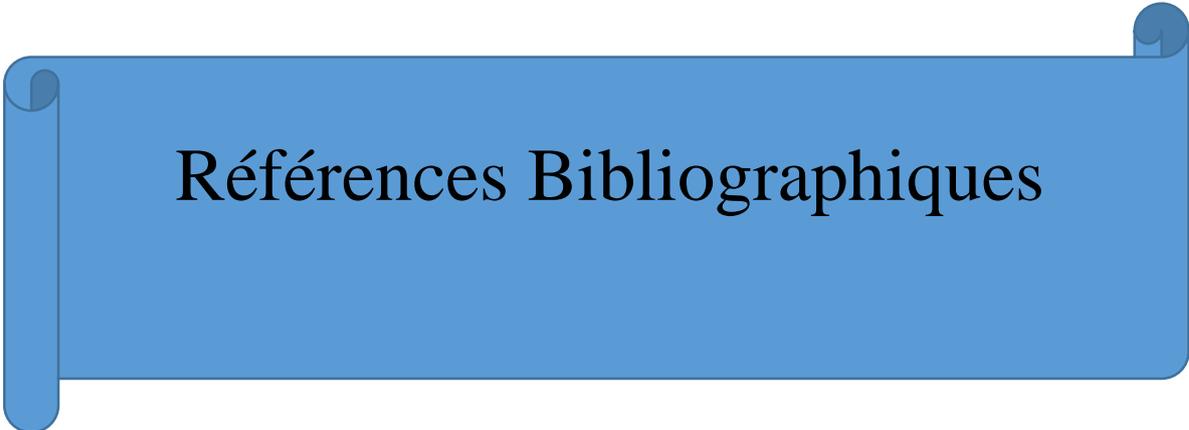
$$\text{div} [\eta D] = \begin{bmatrix} \eta u_x & \eta \frac{u_x+v_x}{2} \\ \eta \frac{u_y+v_x}{2} & \eta v_y \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \dots\dots\dots (Z)$$

Avec :  $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$  et  $v_y = \frac{\partial v}{\partial y}$

Nous remplaçons (z) dans (x)et(y) :

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + 2K\frac{\partial}{\partial x}\left(\eta\frac{\partial u}{\partial x}\right) + K\frac{\partial}{\partial y}\left(\eta\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right) + \rho g \sin(\beta)$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + K\frac{\partial}{\partial x}\left(\eta\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right) + 2K\frac{\partial}{\partial y}\left(\eta\frac{\partial v}{\partial y}\right) - \rho g \cos(\beta)$$



## Références Bibliographiques

## Références Bibliographiques

---

- [1] **A. Fall**, "Rheophysique Des Fluides Complexes, Ecoulement Et blocage De Suspensions. Analyse De Données, Statistiques Et Probabilités" , Université Paris-Diderot - Paris Vii, 2008.
- [2] **E. Guazzelli**, " rhéologie des fluides complexes", 2001.
- [3] **R. Taton**, " Histoire générale des sciences", partie 2 : de La science moderne, Edition Presses Universitaires de France, 1995.
- [4] **M.Amaouche, A.Djema, H.Ait Abderhmane**, " Film flow for power-law fluids Modeling and linear stability", Int.European journal of Mechanics B/Fluids, 34,70-84, 2012.
- [5] **A.Tahiri**, " Etude Théorique Des Transferts Thermo Convectifs D'un Fluide Non-Newtonien En Ecoulement Dans Une Conduite " , 2010.
- [6] **Kh. Khechiba** , " Convection de Lapwood dans une cavité poreuse horizontale saturée par un fluide rhéofluidifiant " ,Mémoire ,Université de boumerdes,2011.
- [7] **G. W. H. & Altinakar, M. S**, Hydraulique Fluvial, Tome Ii "Ecoulement Et Phénomènes De Transport Dans Les Canaux A Géométrie Simple". Edition. Presses Polytechnique Et Universitaires Romandes, Lausanne,2000.
- [8] **J. VAZQUEZ**, "*Hydraulique A Surface Libre*", Ecole nationale du génie de l'eau et de l'environnement de Strasbourg, France, 2006.
- [9] **L.BAMOU**, " Instabilité thermoconvective d'un écoulement poiseuille-Rayleigh-Bénard-Marangoni dans un canal ouvert à surface libre",Thèse,Université Ibn Zohr-Agadir,2012.
- [10] **C. S. Yih**, " Instability Due To Viscosity Stratification". J. Fluid. Mech., 27, 337, 1967.
- [11] **A. P. Hooper, W. G. Boyd** , "Shear Flow Instability At The Interface between two viscous fluids", j. fluid mech, 128, 507, 1983.
- [12] **hwang,c.-c.,chen, j.-s.et lin,j.-s**, " linearstability of power law liquid down an inclined plane", 27,2297-2301, 1994.
- [13] **C.Huang,B.Khomami**, "The instability mechanism of single and multilayer Newtonian and viscoelastic flows down an inclined plane",2001.
- [14] **C. Ruyer-Quil et P.** " Manneville, Furtheraccuracy and convergence results on the modeling of flows down inclined planes by weighted-residual approximations". Physics of Fluids, 14,70–183, 2001.

## **Références Bibliographiques**

---

- [15] **J. Plateau**, " Sur la transformation d'un cylindre liquide en sphères isolées", *Bullet. de l'Acad. de Belgique 2ème série*, 21- 24,1867.
- [16] **K.R.E., GOUSSIS.D.A.LIN.S.P.et Hsu, F.K.**, "The mechanism for surface waveinstability in film flow down an inclined plane".*Phys.Fluids. A* 1(5) ,819-828,1989.
- [17] **M.K. SMITH**, " The mechanism for the long-wave instability in thin liquid films".*J.FluidMech.* 217,469-485, 1990.
- [18] **A. S. Gupta**, "Stability of a Visco-Elastic liquid Film Flowing Down an Inclined Plane". *J.Fluidmech.* 28, 17-28,1967.
- [19] **W.Lai**, " Stability of an Elastico-viscousLiquid Film Flowing Down an Inclined Plane". *Phys.Fluids* 10(4), 844-847,1967.
- [20] **E. S.Shaqfeh et G. Larson**, " The Stability Of GravityDrivenViscoelastic Film-flow AtLow To Moderate Reynolds Number". *J. Non-newton. Fluid Mech.* 31, 87-113, 1989.
- [21] **F.Liu, C.Mei**, " Slow spreading of a sheet of bingham fluid on an inclined plane".*J.Fluid Mech.*207, 505-529,1989.
- [22] **E.Bingham**, " Fluidity an plasticity" ,McGraw-Hill,New York, pp.215-218,1922.
- [23] **B. Uma, R. Usha**, " Dynamics Of A Thin Film On An Inclined Plane", *International Journal Of Engeneering Science*, 44, 1449-1481, 2006.
- [24]**M. Séverine, R. F.Botton Valéry et B.Hamda**, " Etude De Stabilité Linéaire De L'Écoulement À Deux Couches De Films Non-newtoniens Sur Un Plan Incliné", *Laboratoire De Mécanique Des Fluides Et D'acoustique - Umr Cnrs 5509 Insa -lyon /Université Lyon 1 / Ecole Centrale De Lyon, Grenoble*, 27-31 Août, 2007.
- [25] **A.Pinarabas ,A.Liakopoulos**, "Stability of two-layer poiseuille flow of Carreau-yasuda and Bigham-like fluids", *J. Non Newtonian fluid mech*, 55, 227,1995.
- [26] **N.Waters,A.Keely**, " the stability of two stratified Non-Newtonian liquids in couette flow" .*J.Non Newtonian fluid mech*, 24 ,161,1987.
- [27] **B. Benjamin**, "wave formation in laminair flow down an inclined plane" *J.Fluid Mech*, 2,554-573,1956.

## **Résumé**

Ce mémoire est consacré à l'étude de la stabilité de l'écoulement d'un fluide non-Newtonien obéissant à une loi de puissance sous la forme d'un film sur un plan incliné en présence d'effet Marangoni. Les équations gouvernant un tel mouvement sont d'un formalisme mathématique particulièrement compliqué. Il s'agit en effet d'équations aux dérivées partielles en temps et en espaces et non linéaires. Comme aucun cadre général n'existe pour ce genre de problème, des hypothèses simplificatrices sont formulées afin d'obtenir des modélisations mathématique adorables.

Le problème obtenu nous permis de mettre en œuvre une méthode de résolution asymptotique et numérique de l'équation d'Orr-Sommerfeld et des conditions aux limites associées, Cette équation est obtenue après la linéarisation des équations gouvernantes qui décrivant la dynamique de l'écoulement d'un film mince. Il s'agira ensuite de déterminer les conditions critiques au début de l'instabilité, la connaissance de ces conditions intéresse particulièrement le secteur industriel où il est important de pouvoir maîtriser le déclenchement des instabilités afin d'éviter qu'elles n'altèrent la qualité du produit. Les résultats montrent l'effet de déstabilisation du nombre de Marangoni et de l'indice de puissance.

**Mots clés :** Stabilité, Rhéologie, Films minces, Surface libre, effet Marangoni.

## **Abstract**

This work is devoted to the study of the stability of the flow of a non-Newtonian fluid obeying a power law in the form of a film on an inclined plane in the presence of Marangoni effect. The equations governing such a movement are of a particularly complicated mathematical formalism. They are in fact partial differential equations in time and space and nonlinear. Since no general framework exists for this kind of problem, simplifying hypotheses.

The problem obtained allowed us to implement a method of asymptotic and numerical resolution of the Orr-Sommerfeld equation and the associated boundary conditions. This equation is obtained after the linearization of the governing equations which describe the dynamics of the flow. of a thin film. It will then be necessary to determine the critical conditions at the beginning of the instability, the knowledge of these conditions is of particular interest to the industrial sector where it is important to be able to control the triggering of the instabilities in order to avoid that they affect the quality of the product. The results show the destabilizing effect of Marangoni number and power index.

**Keywords:** Stability, Rheology, Thin films, free surface, Marangoni effect.