

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur

et de la recherche scientifique

UNIVERSITE Abderrahmane MIRA BEJAIA

Faculté de Technologie

Département de Génie Mécanique

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de

MASTER

Filière : Génie Mécanique

Spécialité : Construction mécanique

Par :

BOUKLOUCHE ISSAM

TRAI Lyes

Thème

Etude du comportement multiaxial de pièces en élastomères

Proposé et dirigé par : Dr S. BOUZIDI

Soutenu le 27-06-2018 devant le jury composé de :

Pr H. BECHIR

Président

Dr A. BENSLIMANE

Examinateur

Année Universitaire 2017-2018

REMERCIEMENT

Les expressions de circonstances ne sont pas assez fortes pour traduire notre profonde gratitude envers tous nos enseignants pour leur bonne volonté et leur disponibilité chaque fois que nous avons besoin de leur aide et leur savoir faire qui nous a été de grande utilité.

Nous adressons particulièrement nos vifs remerciements à notre promotrice **M^{me} BOUZIDI** qui nous a beaucoup aidé à résoudre toutes les difficultés rencontrées durant cette période de réalisation de ce projet.

Nous tenons à remercier tous les responsables du département génie mécanique qui nous ont assurés les conditions les plus favorables pour la réalisation de ce projet.

Enfin, nous adressons nos remerciements à tous membres de jury d'avoir accepté d'évaluer travail, espérons qu'il soit digne de leurs intérêts.

DEDICACE

*Au terme de ce modeste travail, nous tenons à exprimer nos
dédicace les plus sincères au bon DIEU pour la patience
et la santé qu'il nous a accordé pour mener à bien tous nos
efforts le long de notre parcours.*

Ainsi je dédie ce travail a vous mes très chers

Parent que dieu vous protégé

A mes chers Sœurs

A ma chère copine boudjittou sara

A mon très cher frère lyes trai

*A tous mes amis(es), mahmoud, mounir, boudjlida sara, yacine , dadoh
tarek.*

ISSAIM

DEDICACE

Tout d'abord merci à Dieu de m'avoir donné la force pour terminer ce travail.

Je voudrais bien prouver ma gratitude envers ceux qui, de loin ou de près m'ont supporté tant matériellement que moralement. Ainsi je dédie ce travail :

- ❖ A mes très chers parents.*
- ❖ A mes frères et mes sœurs qui ont toujours été à mes cotés.*
- ❖ A mon frère Farid et sa femme et leurs filles Salsabil, hadil et Anfel.*
- ❖ A toute la famille.*
- ❖ A mon groupe Issam, Sara boudjite, Sara boudjlida.*
- ❖ A tous mes amis, qu'ils trouvent ici l'expression de mes amitiés sincères.*

Lyes

Table des matières

Table des matières

Table des matières

Introduction générale	1
Introduction	2
I. Généralités sur les élastomères	2
I.1. Le caoutchouc	2
I.2. Propriétés mécaniques	3
I.2.1. Élasticité non linéaire	3
I.2.2. Incompressibilité	5
I.2.3. Phénomènes dissipatifs	5
- Viscosité	6
- Effet Mullins	6
- Effet Payne	7
Conclusion	7
II. Modélisation du comportement hyperélastique	
Introduction	8
II.1. Rappels de mécanique des milieux continus déformations	8
II.1.1. Cinématique	8
II.1.2. Description du mouvement	8
II.1.3. Description des déformations et des contraintes.....	10
II.1.3.1 Tenseurs des déformations	10
II.1.3.1.1 Tenseur des déformations dans la configuration initiale (C_0).....	10
II.1.3.1.2 Tenseur des déformations dans la configuration actuelle (C_t)	11
II.1.3.1.3 Invariants principaux du tenseur des dilatations	11
II.1.3.2 Tenseurs des contraintes	12
II.1.3.2.1 Tenseur des contraintes de Cauchy σ	12
II.1.3.2.2 Premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff \mathbf{T}	12
II.1.3.2.3 Second tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff \mathbf{S}	13
II.2. Quelques modèles hyperélastique de la littérature.....	13
II.2.1. Les modèles physiques	13
II.2.2.1.1 Le modèle d'Arruda & Boyce a 8-chaines (1993).....	14
II.2.2.1.2 Modèle de James & Guth (1943).....	15
II.2.2 Les modèles phénoménologiques	16

Table des matières

II.2.2.1 Modèle Mooney – Rivlin (1940)	16
II.2.2.2 Modèle Yeoh (1990)	16
II.2.2.3 Modèle néo-hookéen.....	17
II.2.2.4 Modèle d’Ogden (1972).....	17
Conclusion	17

III. Analyse des contraintes et des déformations en traction equi-bi-axiale.

Introduction	18
III.1. Loi de comportement du modèle Moony-Rivlin	18
III.2. Chargement de la traction uni-axiale	19
III.2.1. Calcul analytique	19
III.2.2. Simulation de l’essai de traction uniaxiale	20
III.2.2.1 Présentation de la géométrie (1)	20
III.2.2.2 Maillage	21
III.2.2.3 Modélisation du problème	22
III.2.2.4 Résultats equi-bi-axile	22
III.3. Chargement en Traction équilibiaxiale	27
III.3.1. Calcul analytique.	27
III.3.2 Simulation numérique de l’essai de la traction equi-bi-axiale.....	28
III.3.2.1. Présentation de la géométrie.....	28
III.3.2.2 Problématique	29
III.3.2.3. Modélisation du problème	30
III.3.2.4. Condition aux limites	30
III.3.2.5. Maillage	31
III.3.2.6. Résultats.....	31
III.3.2.7. Distribution des contraintes suivant des trajectoires ($\rho = \frac{L}{2}$)	38
III.3.3 Détermination Analyse des champs des contraintes et des déformations suivant un angle 45° et pour un rayon $\rho = L/2$	47
Conclusion	51
Conclusion générale	52
Bibliographie	53
Annexes	

Table des figures

Figure I.1 : Essai de traction de type charge/décharge	4
Figure I.2 : Caractère hyperélastique d'un élastomère en traction uni-axiale	4
Figure I.3 : Courbe de traction cyclique. Cinq cycles de chargements sont imposés entre effort nul et une déformation maximale de 300%.	5
Figure I.4 : Représentation schématique de l'effet Mullins	6
Figure I.5 : Effet Payne pour des élastomères chargés	7
Figure II.1 : Configuration initiale et déformée	9
Figure II.2 : Vecteur contrainte dans la configuration initiale et déformée	12
Figure II.3 : Modèle 8-chaines	14
Figure II.4 : Représentation schématique du Modèle à 3-chaine	15
Figure III.1 : Schématisation de l'essai de traction uni-axiale	20
Figure III.2 : Modèle étudié	21
Figure.III.3 : Modèle maillé	21
Figure III.4 : Modèle simplifié de l'éprouvette	22
Figure III.5 : Distribution de la contrainte de Von Mises pour B = 50 mm	23
Figure III.6 : Distribution de la contrainte de Von Mises pour B = 60 mm	23
Figure III.7 : Distribution de la contrainte de Von Mises pour B = 80 mm	24
Figure III.8 : Distribution de la contrainte de Von Mises pour B = 100 mm	24
Figure III.9 : Variation de la contrainte numérique en fonction de la largeur B pour $\lambda_T = 2$	26
Figure III.10 : Comparaison des courbes numériques, théorique et expérimentale dans le cas de la traction uni-axiale	26
Figure III.11 : Schématisation de l'essai de traction équi-bi-axiale	28
Figure III.12 : Modèle étudié	28
Figure III.13 : Modèle simplifiée	29

Table des figures

Figure.III.14 : 1/4 de l'éprouvette avec une variation de ρ	29
Figure. III.15 : Modèle simplifié	30
Figure.III.16 : Modèle maillé	31
Figure.III.17 : Distribution des contraintes de Von Mises pour $\rho=L/2$	32
Figure III.18 : Distribution des contraintes de Von Mises pour $\rho=L/4$	32
Figure III.19 : Distribution des contraintes de Von Mises pour $\rho=L/8$	33
Figure III.20 : Distribution des contraintes de Von Mises pour $\rho=L/10$	33
Figure III.21 : Distribution des contraintes de Von Mises pour $\rho=L/15$	34
Figure III.22 : Distribution des contraintes de Von Mises pour $\rho=L/20$	34
Figure III.23 : Distribution des contraintes de Von Mises pour $\rho=0$	35
Figure III.24 : Contraintes de Von Mises en fonction des élongations (Expérimentale, analytique, numérique au centre de l'éprouvette et pour différentes valeurs de ρ)	36
Figure III.25 : Comparaison des contraintes de Von Mises théoriques/numériques au centre de l'éprouvette pour différentes valeurs de ρ (l'élongation égale à 2).	37
Figure III.26 : Comparaison des contraintes de Von Mises théoriques/numériques en traction équi-bi-axiale.	38
Figure III.27 : Distribution des contraintes de Von Mises le long de la trajectoire à $\theta = 0^\circ$..	39
Figure III.28 : Variation des contraintes de Von Mises en fonction du rayon R ($\theta = 0^\circ$)	39
Figure III.29 : Distribution des contraintes de Von Mises le long de la trajectoire à $\theta = 30^\circ$	40
.....	40
Figure III.30 : Variation des contraintes de Von Mises en fonction du rayon R ($\theta = 30^\circ$) .	40
Figure III.31 : Distribution des contraintes de Von Mises le long de la trajectoire à $\theta = 45^\circ$	41
.....	41
Figure III.32 : Variation des contraintes de Von Mises en fonction du rayon R ($\theta = 45^\circ$) .	41
Figure III.33 : Distribution des contraintes de Von Mises le long de la trajectoire à $\theta = 90^\circ$	42
Figure III.34 : Variation des contraintes de Von Mises en fonction du rayon R ($\theta = 90^\circ$) .	42
Figure III.35 : Variation des contraintes de Von Mises en fonction du rayon (pour les autres trajectoires)	43

Figure III.36a : Différence relative $Y_{\theta}(R) = \left \frac{\Delta\sigma_{\theta}(R)}{\sigma_c} \right = \left \frac{\sigma_c - \sigma_{\theta}(R)}{\sigma_c} \right $ en fonction du rayon (Echelle linéaire)(pour les qutres trajectoires)	44
Figure III.36b : Différence relative $Y_{\theta}(R) = \left \frac{\Delta\sigma_{\theta}(R)}{\sigma_c} \right = \left \frac{\sigma_c - \sigma_{\theta}(R)}{\sigma_c} \right $ en fonction du rayon (Echelle logarithmique)(pour les qutres trajectoires)	45
Figure III.37a : Localisation de la contrainte théorique pour différentes orientations ($\lambda_T = 2$)	46
Figure III.37b : Localisation de la contrainte théorique pour différentes orientations ($\lambda_T = 2$)	46
Figure III.38 : Distribution des déformations de Von Mises le long de la trajectoire à $\theta = 45^{\circ}$	47
Figure III.39 : Distribution des contraintes de Von Mises pour un déplacement $\mathbf{U} = \mathbf{L}_0$, soit $\lambda_T = 2$	48
Figure III.40 : Variation de λ en fonction de R ($\lambda_T = 2$)	49
Figure III.41 : Variation de E_{11} en fonction de R ($\lambda_T = 2$).....	50
Figure III.42 : Variation de E_{33} en fonction de R ($\lambda_T = 2$).....	50

Liste des tableaux

Tableau III.1 : Évolution des contraintes équivalentes de Von-Mises en fonction des élongations pour différentes valeurs de B	25
Tableau III.2 : Contraintes de Von Mises théoriques, expérimentales et numériques	36
Tableau III.3 : Evolution des contraintes équivalentes (Von-Mises) en fonction des élongations	38

Nomenclature

Nomenclature :

(c_0) : Configuration initiale ;

(c_t) : Configuration actuelle ;

$d\vec{X}$: Vecteur élémentaire dans la configuration initiale ;

$d\vec{x}$: Transformation de $d\vec{X}_1$ dans la Configuration actuelle ;

\mathbf{F} : Opérateur gradient de la transformation ;

\mathbf{F}^T : Transposé opérateur gradient de la transformation ;

\mathbf{C} : Tenseur des déformations de Cauchy Green droit ;

\mathbf{E} : Tenseur des déformations Green-Lagrange ;

\mathbf{B} : Tenseur des déformations de Cauchy Green gauche ;

\mathbf{A} : Tenseur des déformations d'Euler-Almansi ;

\mathbf{L} : Tenseur gradient des vitesses ;

\mathbf{D} : Tenseur des taux de déformation ;

\mathbf{W} : Tenseur des taux de rotation ;

$\boldsymbol{\sigma}$: Tenseur des contraintes de Couchy ;

\mathbf{T} : Premier Tenseur de Piola-Kirchhoff (P.K.1) ;

\mathbf{S} : Deuxième Tenseur de Poila-Kirchhoff (P.K.2) ;

\vec{f} : Densité massique de force ;

S et ϕ : sont respectivement l'entropie et l'énergie interne du matériau ;

T : Température ;

\mathbf{Q} : Transporté du flux de chaleur dans la Configuration initiale ;

W : Potentiel élastique ;

l : Désignant la fonction de Langevin ;

k : Constante de Boltzmann ;

N : Nombre moyen de segments élongations de la chaine ;

λ : L'élongation principale ;

δ : Paramètre d'inextensibilité des chaines ;

\mathbf{I} : tenseur identité ;

$I_1(\mathbf{C})$: premier invariant du tenseur des déformations de green-lagrange droit \mathbf{C} ;

$I_2(\mathbf{C})$: deuxième invariant du tenseur des déformations de green-lagrange droit \mathbf{C} ;

$I_3(\mathbf{C})$: troisième invariant du tenseur des déformations de green-lagrange droit \mathbf{C} ;

ϕ : potentiel thermodynamique ;

ρ_0 : masse volumique du solide dans la configuration de référence ;

μ : Module de cisaillement du matériau ;

J : jacobien de la transformation ;

Ω_0 : volume occupé par le solide dans la configuration initiale ;

W : volume occupé par le solide dans la configuration actuelle ;

P : pression hydrostatique ;

ρ : densité volumique de masse dans la configuration actuelle ;

\vec{q} : Flux de chaleur dans la configuration actuelle ;

φ_0 : transporté du flux de chaleur dans la configuration initiale ;

ν : coefficient de Poisson ;

k_0 : module de compressibilité ;

$\mathbf{A} : \mathbf{A}$: produit doublement contracté de deux tenseurs ;

Introduction générale

Introduction générale

L'industrie automobile utilise de nombreuses pièces en caoutchouc pour assurer des fonctions antivibratoires. On peut citer les cales de support de moteur, les articulations de liaison au sol ou les suspentes d'échappement. La majorité de ces pièces est réalisée en caoutchouc naturel contenant des charges de noir de carbone. En effet le caoutchouc naturel est un matériau peu couteux et offrant des bonnes propriétés amortissantes.

L'objectif de ce modeste travail est de déterminer les distributions des contraintes et des déformations dans le cas d'un chargement multi-axial. Le chargement considéré dans l'étude est la traction équi-bi-axiale qui constitue un essai hétérogène dans le cas d'une éprouvette cruciforme.

Le premier chapitre sera consacré à définir les élastomères et à présenter un rappel sur leurs propriétés mécaniques inclut l'élasticité non linéaire et les effets dissipatifs.

Le deuxième chapitre ant réservé à la présentation de quelques modèles du comportement hyperélastique des élastomères.

Le troisième chapitre est composé de deux parties :

La première partie consistera à une étude théorique et numérique des contraintes dans le cas d'un chargement uni-axial. La loi de comportement utilisée est supposée de type Mooney – Rivlin incompressible.

Dans la deuxième partie, nous avons étudié théoriquement et numériquement de la distribution des contraintes dans le cas de la traction équi-bi-axiale en mettant eu évidence le caractère hétérogène des champs des contraintes et des déformations.

Enfin, nous terminons par une conclusion générale.

Chapitre I

Généralités sur les élastomères

Introduction

L'objet de ce chapitre est de donner quelques généralités sur les principales familles d'élastomères ainsi que leurs propriétés mécaniques.

I.1 Généralités sur les élastomères [1]

Les élastomères appartiennent à la famille des hauts polymères quasi-linéaire. Ils sont constitués de longues chaînes moléculaires liées entre elles par des liaisons covalentes occasionnelles, des points de réticulation et des points d'enchevêtrement.

Une chaîne est un assemblage de molécules monomères jointes par un squelette covalent d'atomes de carbone. Elle est généralement composée de milliers, voire de dizaines de milliers de monomères. A une échelle inter-médiane, le matériau peut être vu comme une pelote statique où les chaînes sont dans une position très repliée et où les points de jonction (réticulation et enchevêtrement) forment des nœuds entre les chaînes.

I.1.1 Le caoutchouc [2]

Le caoutchouc naturel et ses homologues synthétiques, les élastomères, sont fortement répandus dans le domaine de l'industrie.

La multiplicité des utilisations des élastomères provient des caractéristiques mécaniques très intéressantes :

- Capacité à subir des grandes déformations.
- Capacité à dissiper de l'énergie, phénomène qui permet d'obtenir des propriétés d'isolation vibratoire et acoustique.

Des composants en élastomères sont ainsi employés pour les montages et les accouplements entre structures rigides, par exemple, dans les joints de portes....etc.

La terminologie « élastomère » regroupe des matériaux ayant des compositions différentes, mais une structure moléculaire et des propriétés mécaniques similaires.

Le préfixe « élasto » rappelle les grandes déformations élastiques possibles, tandis que le suffixe « mère » évoque leur nature de polymères.

I.2 Propriétés mécaniques [1][3]

I.2.1 Élasticité non linéaire

Une des propriétés les plus connues des élastomères est leur capacité à supporter des grandes déformations élastiques, c'est une des propriétés qui justifie l'utilisation de ces matériaux dans l'industrie

Les caoutchoucs naturels peuvent s'étendre jusqu'à 10 fois leur taille d'origine avant de rompre. La figure I.1 représente un essai de traction à rupture matérielle notre étude, la déformation à rupture est d'environ 700%. (Figure I.2)

L'autre caractéristique du comportement est le non linéarité. On verra par la suite que les modèles physiques permettent d'expliquer et de simuler cette particularité en décrivant l'évolution de la conformation des chaînes macromoléculaires. En particulier, la rigidification du comportement aux grandes déformations s'explique par deux phénomènes :

- Lorsque les chaînes sont suffisamment stéréo-régulières (c'est le cas des caoutchoucs naturels), elles peuvent s'aligner et former des motifs ordonnés appelés cristallites, qui agissent comme des charges renforcées : les chaînes atteignent leur extension maximale.
- Les chaînes atteignent leur extension maximale.

La troisième caractéristique importante du comportement mécanique des élastomères est leur capacité à retrouver leur géométrie initiale presque intégralement. C'est la raison pour laquelle on parle souvent <d'élasticité caoutchoutique>.

- Les déformations rémanentes sont d'environ 15% pour une déformation maximale atteinte de 300%, ce qui reste relativement faible.

En revanche, les trajets de charge et de décharge sont très différents ; le matériau s'adoucit de façon non négligeable. Ainsi, on constate que l'hypothèse de réversibilité est discutable dans ce cas.

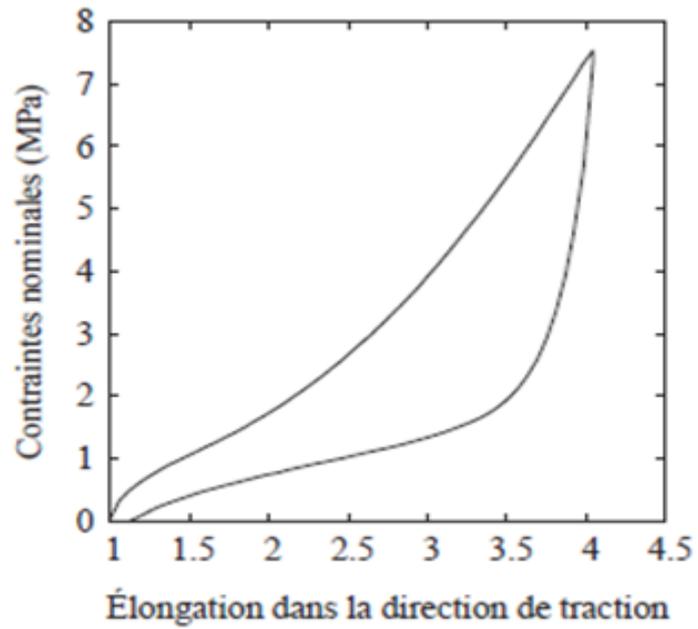


Figure I.1 : Essai de traction de type charge/décharge.

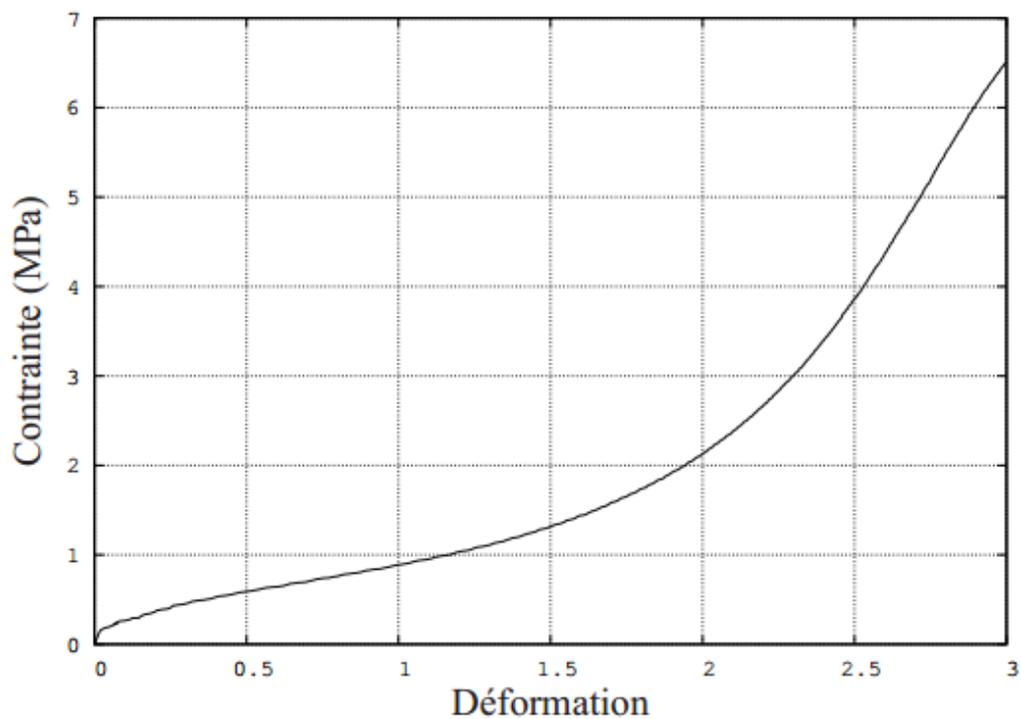


Figure I.2 : Caractère hyperélastique d'un élastomère en traction uni-axiale.

I.2.2 Incompressibilité [3]

La plupart des caoutchoucs sont considérés comme incompressibles, c'est-à-dire qu'ils se déforment à volume constant. En réalité, un essai de compression hydrostatique montre qu'ils sont très légèrement compressibles.

Cette propriété n'est plus vérifiée dans le cas d'un essai de traction, pour des niveaux de déformation élevés et/ou des chargements répétés.

I.2.3 Phénomènes dissipatifs

La figure I.3 représente des essais de traction cycliques. On constate que le matériau présente un comportement hystérétique. Autrement dit, il dissipe de l'énergie à chaque cycle. Cette dissipation a plusieurs origines, parmi lesquelles l'effet Mullins et la viscosité.

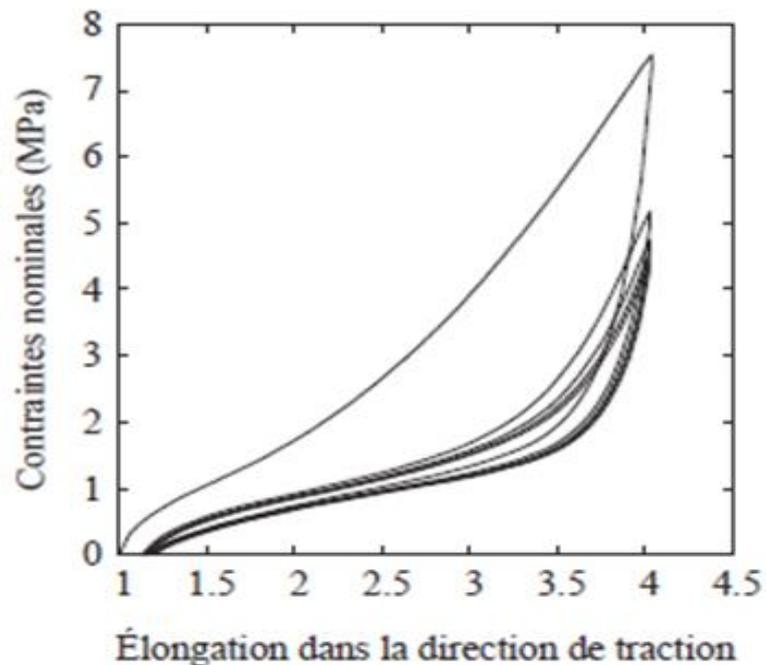


Figure I.3 : Courbe de traction cyclique. Cinq cycles de chargements sont imposés entre effort nul et une déformation maximale de 300%.

- Viscoélasticité [1]

La deuxième propriété bien connue des matériaux élastomères est leur caractère viscoélastique. Le comportement des polymères peut être élastique (aux faibles températures et vitesse de sollicitations élevées) ou visqueux (dans les conditions inverses). En fait, pour des conditions de température et des vitesses de sollicitations raisonnables, les élastomères intègrent ces deux types de comportement et sont dits viscoélastiques. Classiquement, ce phénomène est mis en évidence par deux essais bien connus : les essais de relaxation et de fluage. Dans le cas de la relaxation, on impose au matériau un niveau constant de déformation et on observe la « relaxation des contraintes » (la diminution) au cours du temps. Le fluage est le phénomène dual : on impose au matériau un niveau constant de contrainte et on observe l'accroissement de la déformation. Bien évidemment, d'un point de vue expérimental il est plus aisé de mettre en place un essai à déplacement imposé (relaxation) qu'à force imposée (fluage).

- Effet Mullins [3]

L'effet Mullins est souvent assimilé à un endommagement dans la mesure où il représente une dégradation permanente du matériau accompagnée de déformations rémanentes. En fait, le < endommagement > n'est pas complètement irréversible. Le matériau a une capacité de restauration, très lente à température ambiante, plus rapide à température élevée. Ceci permet parfois de considérer l'effet Mullins comme résultant d'une viscosité à très grande échelle de temps. (Figure I.4)

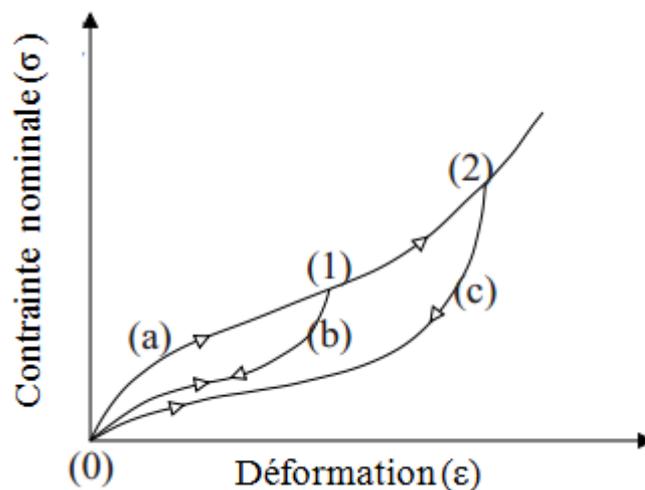


Figure I.4 : Représentation schématique de l'effet Mullins.

- Effet Payne [4]

Le comportement mécanique d'un élastomère chargé est linéaire dans le domaine de faible déformation. L'introduction de charge conduit à une non-linéarité du comportement dont le module initial montre une forte sensibilité à la quantité de la charge. Dans ce cas, la valeur du module décroît avec la déformation jusqu'à une valeur G_∞ ou elle se stabilise.

Ce phénomène est connu sous le nom d'effet Payne. Les charges introduisent donc de la viscoélasticité non linéaire dont le facteur de perte augmente avec la fraction volumique de charge (figure I.5)

La valeur du module élastique initial(G_0) diminue après un tout premier balayage à déformation croissante par contre le module final(G_∞) reste quasiment constante.

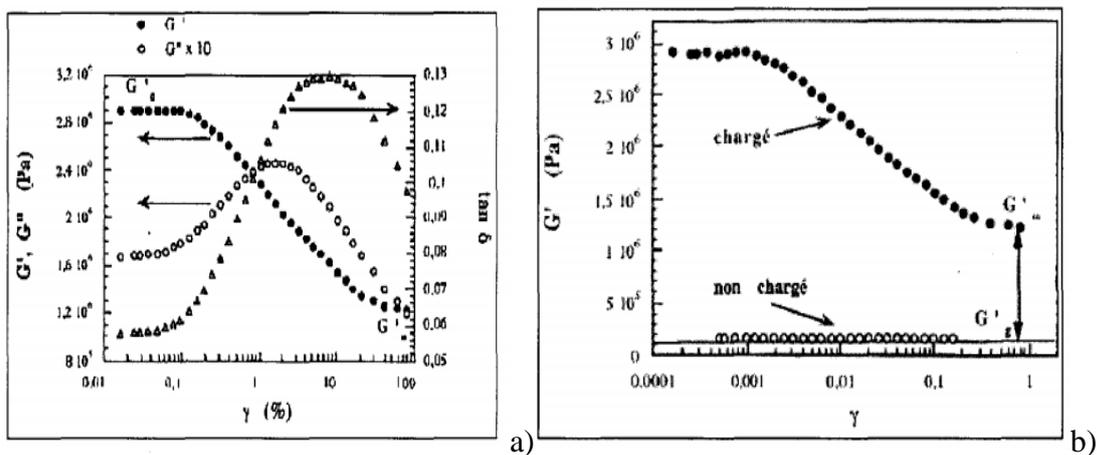


Figure I.5 : Effet Payne pour des élastomères non chargés.

Conclusion

Les élastomères présentent un comportement complexe qu'il serait ambitieux de vouloir représenter dans sa totalité. Certaines caractéristiques sont d'ailleurs encore mal comprises.

Chapitre II

Modélisation du comportement hyperélastique des élastomères

Introduction

Le but de ce chapitre est de présenter, quelques modèles théoriques proposés dans la littérature pour décrire le comportement hyperélastique des élastomères. Nous rappellerons de manière succincte les principes fondamentaux de la mécanique des milieux continus.

II.1 Rappels la mécanique des milieux continus

II.1.1 Cinématique [5]

Il y a deux possibilités de repérage d'une particule :

- Description eulérienne : la particule est repérée par sa position \mathbf{x} à l'instant t .
- Description lagrangienne : plus généralement par une position de référence \mathbf{X} .

Le mouvement sera défini par la fonction $d(\mathbf{X}, t)$ qui donne la position \mathbf{x} à l'instant de la particule référencée par \mathbf{X} , et défini donc la transformation faisant passer de la configuration de référence (C_0) à la configuration actuelle (C_t).

$P = (X_1, X_2, X_3)$ systèmes de coordonnées matérielles dans la configuration de référence initiale (C_0) et $P = (x_1, x_2, x_3)$ systèmes de coordonnées spatiales dans la configuration actuelle déformée (C_t).

Ces deux systèmes seront supposés cartésiens et on leur appliquera les conventions de notation habituelles (sommation, dérivation).

II.1.2 Description du mouvement [2]

Soit un solide déformable (S), évaluant dans un repère (R) cartésien. L'ensemble des particules P constituant le solide déformable occupent, à chaque instant t , un ensemble de positions dans l'espace (voir figure II.1) : c'est la configuration du système à l'instant t . Nous utiliserons le même repère pour la configuration initiale et la configuration déformée.

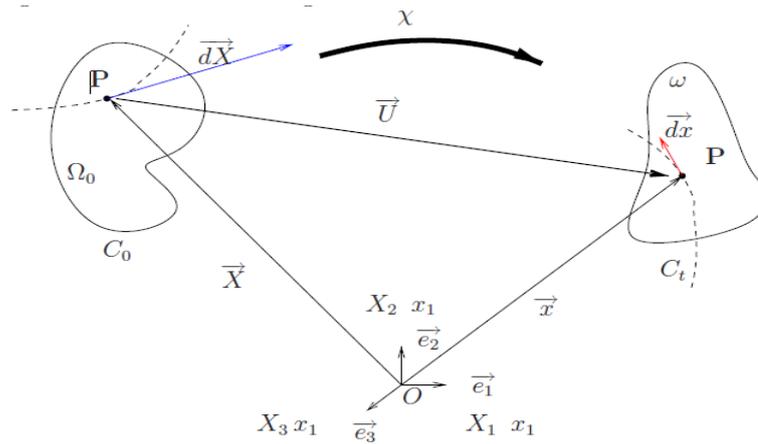


Figure II.1 : Configuration initiale et déformée.

On note (C_0) la configuration initiale (où le solide (S) occupe le volume Ω_0), et (C_t) la configuration actuelle à l'instant t (ou déformée), où le solide S occupe le volume (ω) . Le vecteur position de la particule $(P \in S)$ l'instant initial est noté \vec{X} , on note \vec{x} le vecteur position de cette particule à l'instant t .

Le mouvement du milieu continu est alors défini par la donnée de la fonction X :

$$\vec{x} : \begin{cases} (C_0) \rightarrow (C_t) \\ \vec{X} \rightarrow \vec{\phi}(\vec{X}, t) \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

L'équation (II.1) définit la transformation faisant passer de la configuration de référence (C_0) à la configuration (C_t) .

Pour caractériser la déformation au voisinage de la particule, on introduit l'application linéaire tangente au mouvement, ou tenseur tangent (voir figure (II.1)). Considérons un vecteur $d\vec{X}$ dans la configuration initiale, son transformé dans la configuration actuelle s'obtient par la relation (II.2).

$$d\vec{x} = \mathbf{F}d\vec{X} \quad (\text{II.2})$$

Où \mathbf{F} est le tenseur opération svoulient de la transformation tangent. Ce tenseur tangent transporte, un espace tangent à (C_0) vers l'espace tangent associé à la même particule suivie dans son mouvement.

II.1.3 Description des déformations et des contraintes

II.1.3.1 Tenseur des déformations [6]

Ces tenseurs permettent de caractériser complètement la variation géométrique du solide entre la configuration initiale (C_0) et la configuration déformée (C_i) , (les variations de longueurs, d'angles et de dilatations volumiques). Selon la configuration privilégiée, plusieurs mesures des déformations sont possibles :

II.1.3.1.1 Tenseur des déformations dans la configuration initiale (C_0)

Si on considère deux vecteurs $d\vec{X}_1$ et $d\vec{X}_2$ dans la configuration initiale qui devient respectivement $d\vec{x}_1$ et $d\vec{x}_2$ après déformation, nous pouvons écrire :

$$d\vec{x}_1 \cdot d\vec{x}_2 = (\mathbf{F} d\vec{X}_1) \cdot (\mathbf{F} d\vec{X}_2) = (d\vec{X}_1 \mathbf{F}^T) \cdot (\mathbf{F} d\vec{X}_2) \quad (\text{II.3})$$

Le terme T placé en exposant désigne la transposition.

On introduit alors le tenseur des déformations symétrique de Cauchy-Green droit \mathbf{C} appelé également tenseur des dilatations défini par :

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} \quad (\text{II.4})$$

La relation (II.15) devient alors :

$$d\vec{x}_1 \cdot d\vec{x}_2 = d\vec{X}_1 \cdot \mathbf{C} d\vec{X}_2 \quad (\text{II.5})$$

Le tenseur \mathbf{C} décrit les dilatations dans la configuration lagrangienne. Ainsi, les élongations principales λ_i représentent les valeurs propres de tenseur C

$$i = 1, 2, 3$$

On peut également définir le tenseur des déformations de Green-Lagrange \mathbf{E} dans la configuration matérielle (non déformée) par :

$$d\vec{x}_1 \cdot d\vec{x}_2 - d\vec{X}_1 \cdot d\vec{X}_2 = d\vec{X}_1 \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \cdot d\vec{X}_1 - d\vec{X}_1 \cdot d\vec{X}_1 = 2(d\vec{X}_1 \cdot \mathbf{E} \cdot d\vec{X}_1) \quad (\text{II.6})$$

$$\text{avec: } \mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I}) \quad (\text{II.7})$$

I étant le tenseur identité.

On peut définir aussi le tenseur de déformation logarithmique ou le tenseur de Henky de la manier suivante :

$$\mathbf{h} = \ln V = \frac{1}{2} \ln \mathbf{F} \mathbf{F}^T \quad (\text{II.8})$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{V} \mathbf{R}$$

H est le tenseur de Hencly

II.1.3.1.2 Tenseur des déformations dans la configuration actuelle (\mathbf{C}_t)

Inversement à l'analyse faite précédemment, il est possible d'exprimer la déformation dans la configuration actuelle :

$$d\vec{\mathbf{X}}_1 d\vec{\mathbf{X}}_2 = (\mathbf{F}^{-1} \cdot d\vec{\mathbf{x}}_1) (\mathbf{F}^{-1} \cdot d\vec{\mathbf{x}}_2) \quad (\text{II.9})$$

$$\text{Soit : } d\vec{\mathbf{X}}_1 \cdot d\vec{\mathbf{X}}_2 = d\vec{\mathbf{x}}_1 \cdot ((\mathbf{F}^{-1})^T \cdot d\vec{\mathbf{x}}_2) = d\vec{\mathbf{x}}_1 \cdot (\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T)^{-1} \cdot d\vec{\mathbf{x}}_2 = d\vec{\mathbf{x}}_1 \cdot \mathbf{B}^{-1} \cdot d\vec{\mathbf{x}}_2 \quad (\text{II.10})$$

où $\mathbf{B} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T$ est le tenseur des déformations de Cauchy-Green gauche ou encore le tenseur de dilatation en configuration eulérienne.

II.1.3.1.3 Invariants principaux du tenseur des déformations

Considérons le tenseur des déformations de Cauchy-Green droit **C**, ses invariants principaux I_1 , I_2 et I_3 , sont obtenus via l'expression de polynôme caractéristique :

$$\det(\mathbf{C} - \lambda \mathbf{I}) = -\lambda^3 + I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda + I_3 \quad (\text{II.11})$$

Les valeurs propres de tenseur de délimitation de tenseur Cauchy sont désignés par λ_i ($i = 1, 2, 3$) nous aurons alors :

$$I_1 = \text{tr}(\mathbf{C}) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \quad (\text{II.12})$$

$$I_2 = \frac{1}{2} [(\text{tr}(\mathbf{C}))^2 - \text{tr}(\mathbf{C}^2)] = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2 \quad (\text{II.13})$$

$$I_3 = \det(\mathbf{C}) = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 \quad (\text{II.14})$$

II.1.3.2 Tenseurs des contraintes

Les contraintes sont caractérisées à partir des efforts intérieurs à travers un élément de surface relatif à une configuration donnée (figure II. 2). Comme pour le cas des déformations, on peut utiliser soit la description lagrangienne ou bien eulérienne ou même une formulation mixte. Rappelons que les trois configurations sont identiques dans le cas des petites déformations.

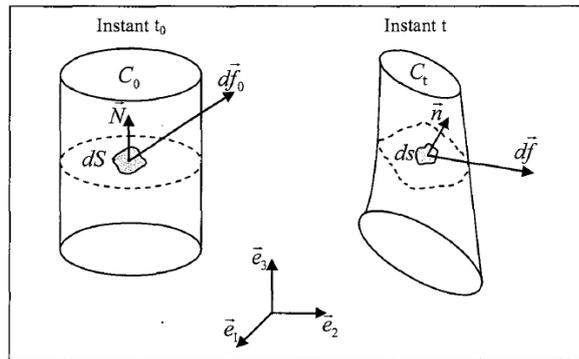


Figure II.2. Vecteur contrainte dans la configuration initiale et déformée.

II.1.3.2.1 Tenseur des contraintes de Cauchy σ :

De la même manière qu'en petites déformations, le vecteur contrainte $\vec{\sigma} = \frac{d\vec{f}}{ds}$ est défini dans la configuration actuelle comme caractérisant les efforts intérieurs de cohésion $d\vec{f}$ exercés sur une partie du solide à travers un élément de surface ds de normale extérieure \vec{n} .

On définit ainsi un tenseur des contraintes symétrique et eulérien appelé tenseur de Cauchy σ ou bien tenseur des contraintes vraies tel que :

$$d\vec{f} = (\sigma \cdot \vec{n}) \cdot ds \quad (\text{II.15})$$

II.1.3.2.2 Premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff \mathbf{T}

Si on choisit de décrire l'élément de surface ds par rapport à la configuration lagrangienne, on peut définir un nouveau tenseur des contraintes \mathbf{T} tel que :

$$d\vec{f} = (\mathbf{T} \cdot \vec{N}) \cdot dS \quad (\text{II.16})$$

où \vec{N} est la normale unitaire à l'élément de surface dS dans la configuration initiale le tenseur des contraintes \mathbf{T} est appelé premier tenseur de Piola-Kirchoff ou tenseur de

Boussines q ou même tenseur des contraintes nominales. Comme le tenseur gradient de déformation \mathbf{F} , \mathbf{T} n'est ni lagrangien ni eulérien. En outre, contrairement au tenseur de Cauchy, ce tenseur n'est pas symétrique.

II.1.3.2.3 Second tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff \mathbf{S}

Il est possible de définir un tenseur purement lagrangien par simple transposition de la surface ds et des efforts de cohésion $d\vec{f}$ dans la configuration initiale. On obtient ainsi le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff \mathbf{S} tenseur des contraintes matérielles :

$$d\vec{f}_0 = \mathbf{F}^{-1} \cdot d\vec{f} = \mathbf{S} \vec{N} \cdot dS_0 \quad (\text{II.17})$$

Il est également intéressant de signaler que le tenseur \mathbf{S} est symétrique mais n'a aucune réalité physique. Néanmoins, son intérêt réside dans l'utilisation dans la résolution numérique par E.F. Les tenseurs des contraintes \mathbf{T} et $\boldsymbol{\sigma}$ sont utilisé pour exprimer les conditions aux limites.

Notons finalement que les tenseurs $\boldsymbol{\sigma}$, \mathbf{T} et \mathbf{S} sont liés par le tenseur gradient de déformation \mathbf{F} à travers la relation (II.19) et sont tous confondus dans le cas du formalisme des petites déformations.

$$\mathbf{T} = J \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{T} \quad (\text{II.18})$$

II.2 Quelques modèles hyper-élastique de la littérature [3]

II.2.1 Les modèles physiques

Ces modèles sont développés, dans le cadre de la mécanique statistique, en partant de l'hypothèse, qu'l'état initial, le réseau macromoléculaire est caractérisé par une orientation aléatoire des chaînes macromoléculaires. Sons en déferont le réseau micro, ces chaînes se réorientent et induisent ainsi une diminution de l'entropie configurationnel du réseau.

Pour construire, la densité d'énergie à l'échelle macroscopique, plusieurs auteurs ont proposé des modèles basés d'une part sur les hypothèses d'affinité des déformations et en relogeant les transformations centre les chaines visquo d'additivité des énergies de chaînes et d'autre part sur une idéalisation de la structure du réseau de ces chaînes. Citons, à titre d'exemples :

II.2.1.1 Le modèle d'Arruda & Boyce à 8-chaines (1993)

Ces auteurs considèrent un modèle à huit chaînes disposées sur les diagonales d'un cube élémentaire ; le réseau des chaînes est distribué suivant les quatre directions privilégiées correspondant aux sommets d'un cube inscrit dans sphère unité comme le montre la figure ci-dessous

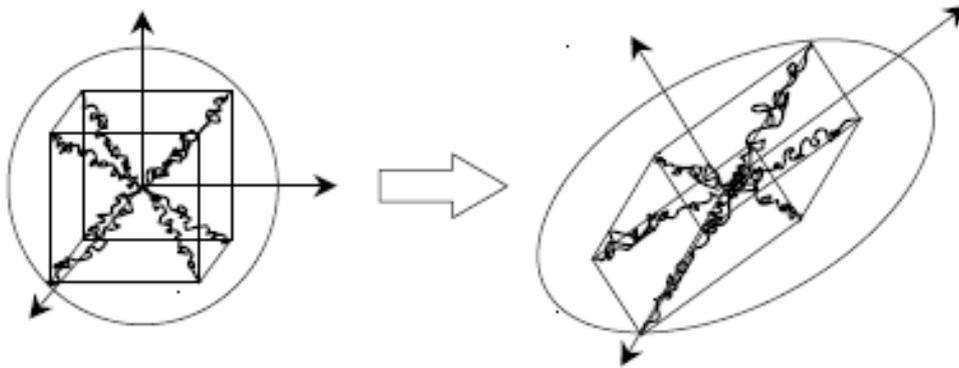


Figure II.3 : Modèle 8-chaines.

L'avantage de ce modèle est la simplicité, en effet, on remarque que lorsque la sphère unité se déforme, toutes les chaînes s'étendent de manière identique, et que la diagonale de centre polie valeur de cette extension λ_{ch} est donnée par la relation suivante :

$$\lambda_{ch}^2 = \left(\frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}{3} \right) = \frac{I_1}{3} \quad (II.19)$$

Les contraintes sont données alors par la relation :

$$\sigma_i = \frac{nkT\sqrt{N}}{3} \frac{\lambda_i^2}{\lambda_{ch}} L^{-1} \left(\frac{\lambda_{ch}}{\sqrt{N}} \right) - p \quad (\text{incompressible}) \quad (II.20)$$

où L^{-1} est l'inverse de la fonction de Langevin n est la densité de chaîne du réseau et N le nombre moyen de segments par chaîne. L'énergie de déformation s'écrit alors :

$$W_{8ch} = nkT \left[\beta_{ch} \lambda_{ch} + \sqrt{N} \ln \left(\frac{\beta_{ch}}{\sinh(\beta_{ch})} \right) \right]$$

avec $\beta_{ch} = L^{-1} \left(\frac{\lambda_{ch}}{\sqrt{N}} \right) \quad (II.21)$

Ce modèle permet de mieux approcher la traction équi-bi-axiale que les modèles 3 ou 4 chaînes

II.2.1.2 Modèle de James & Guth (1943)

La cellule élémentaire est représentée à trois chaînes disposées suivant les directions principales de déformation et dont les allongements correspondent aux extensions principales représentée par la figure suivant :

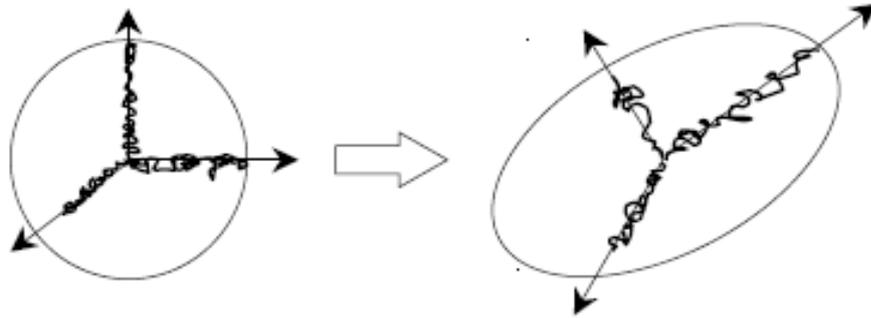


Figure II.4 : Représentation schématique du Modèle à 3-chaîne.

Le module du vecteur reliant les deux extrémités d'une chaîne est :

$$r_0 = \sqrt{N_3} L_{03} \quad (\text{II.22})$$

Dans l'hypothèse de la déformation affine, on a :

$$r_{chaîne} = \lambda_j r_0 \quad (\text{II.23})$$

Où λ_j représente la dilatation principale macroscopique dans la jème direction.

La dilatation relative d'une chaîne est définie par :

$$\lambda_{jr} = \frac{\lambda_{chaîne}}{\lambda_L} = \frac{\lambda_j}{\sqrt{N_3}}, \quad j = 1, 2, 3 \quad (\text{II.24})$$

Ce modèle suppose que la densité des chaînes est équivalente dans les trois directions, par conséquent :

$$n_j = \frac{n}{3},$$

Et la densité d'énergie s'exprime par :

$$W_{3 \text{ chaîne}} = \frac{nKT}{3} N_3 \sum_{j=1}^3 \left(\lambda_{jr} \beta_j + \ln \left(\frac{\beta_j}{\sinh \beta_j} \right) \right) - c_3^* \quad (\text{II.25})$$

ou $\beta_j = L^{-1}(\lambda_{jr})$ et c_3^* est une constante arbitraire.

La loi constitutive du modèle à 3-chaîne est la suivante : incompressible

$$\sigma_j = -p + \frac{\mu_0}{3} N_3 \beta_j \lambda_{jr}, \quad j = 1, 2, 3 \quad (\text{II.26})$$

$\mu_0 = nk_b T$ est le module de cisaillement.

En éliminant la pression hydrostatique, la loi de comportement s'exprime par :

$$\sigma_i - \sigma_k = \frac{\mu_0}{3} N_3 (\beta_j \lambda_{jr} - \beta_k \lambda_{kr}), \quad j \neq k = 1, 2, 3 \quad (\text{II.27})$$

II.2.2 Les modèles phénoménologiques [7]

Les modèles hyperélastiques les plus utilisés sont issus de raisonnements mathématiques qui sont souvent motivés par des observations expérimentales faites à l'échelle macroscopique.

Parmi ces modèles, on distingue d'abord ceux qui expriment l'énergie de déformation comme un développement en série de $(I_1 - 3)$ et $(I_2 - 3)$ (Rivlin, 1948) :

$$W = \sum_{i=0, j=0}^{\infty} c_{ij} (I_1 - 3)^i (I_2 - 3)^j \quad (\text{II.28})$$

$$i, j = 0, i + j \neq 0$$

II.2.2.1 Modèle Mooney – Rivlin (1940) [6]

Ce modèle reste de loin le plus utilisé pour sa simplicité et sa capacité à refléter convenablement le comportement des élastomères pour des niveaux de déformation allant jusqu'à 100%

$$W(I_1, I_2) = C_{10} (I_1 - 3) + C_{01} (I_2 - 3). \quad (\text{II.29})$$

II.2.2.2 Modèle Yeoh (1990) [7]

Appliqué à des élastomères, est issu de la constatation expérimentale que $\frac{\partial W}{\partial I_1}$ est négligeable dans le cas de ces mélanges. Yeoh a alors fait l'hypothèse simplificatrice qui consiste à considérer que $\frac{\partial W}{\partial I_1} = 0$, et a proposé une expression de l'énergie de déformation à 3 coefficients, où le second invariant n'apparaît pas. Elle correspond à une troncature de celle établie par Rivlin

$$W(I_1, I_2) = C_{10} (I_1 - 3) + C_{20} (I_1 - 3)^2 + C_{30} (I_1 - 3)^3 \quad (\text{II.30})$$

II.2.2.3 Modèle néo-hookéen (1943) [3]

Le modèle néo-hookéen permet d'avoir une bonne corrélation pour des taux de déformation modères (jusqu'à 50%), mais unis eu défaut en grandes déformations.

$$W = C_{10}(I_1 - 3) \quad (\text{II.31})$$

II.2.2.4 Modèle d'Ogden (1972)

Ogden a introduit l'idée que l'énergie volumique peut s'exprimer en termes d'élongations principale :

$$W = \sum_{n=1}^N \frac{\mu_n}{a_n} (\lambda_1^{an} + \lambda_2^{an} + \lambda_3^{an} - 3) \quad (\text{II.32})$$

Les constants μ_n et a_n sont les paramètres matériaux λ_1 , λ_2 et λ_3 sont les élongations propres des tenseurs d'élongations principales. Les puissances mises en jeu dans le potentiel d'Ogden sont réelles qui confère un intérêt particulier.

Conclusion :

La modélisation d'un milieu continu hyperélastique passe par le choix d'un potentiel hyperélastique W . Il est requis de connaître les valeurs numériques des paramètres matériels.

Il existe modèles de comportement hyperélastique physiques où phénoménologiques, celles exprimées en fonction des invariants et celles en fonction des élongations.

Chapitre III

**Analyse des contraintes et des
déformations dans une
éprouvette en traction
équibiaxiale**

Introduction

Ce chapitre est consacré à une étude numérique de la distribution des contraintes et des déformations dans une éprouvette destinée à un essai en traction équi-biaxiale. Le matériau choisi est le latex et. La loi de comportement hyperélastique utilisée dans l'étude est la loi de Mooney-Rivlin.

III.1 Loi de comportement du modèle Mooney-Rivlin

La loi de comportement du modèle Mooney-Rivlin est exprimée pour un milieu incompressible par :

$$W = W(I_1, I_2) = c_{10}(I_1 - 3) + c_{01}(I_2 - 3)$$

où I_1 et I_2 sont les invariants du tenseur dilatation de Cauchy Green droit et c_{10} , c_{01} sont les constantes matérielles du modèle.

La relation contrainte - déformation est exprimée par :

$$\boldsymbol{\sigma} = 2(c_{10}\mathbf{B} - c_{01}\mathbf{B}^{-1}) - p\mathbf{I}$$

où p est une pression hydrostatique à déterminer à partir des conditions aux limites.

Dans la plupart des codes éléments finis, la forme de l'énergie de déformation est :

$$W = W(\bar{I}_1, \bar{I}_2) + \frac{1}{D}(J - 1)^2$$

où $\bar{I}_1 = J^{-2/3}I_1$

$$\bar{I}_2 = J^{-4/3}I_2$$

$D = \frac{2}{K_0}$ où K_0 est le module de compressibilité. Dans le cas où le matériau est très faiblement compressible (quasi-incompressible), le coefficient de Poisson est très proche de 0,5 est par conséquent $J = \det \mathbf{F} \approx 1$.

Dans toute notre étude, nous avons supposé que le matériau est quasi-incompressible et afin de comparer entre les résultats théoriques (modèle incompressible) et les résultats numériques (modèle compressible), nous avons supposé que $\nu_0 = 0,4998$.

Le paramètre D est lié à ν_0 par :

$$D = \frac{2}{K_0} = \frac{6(1-2\nu)}{E}, \text{ on prend } E \approx 1,2 \text{ MPa}$$

Ce qui donne $D = 0,0015 \text{ MPa}^{-1}$.

La contrainte de Von Mises est définie par :

$$\sigma^{\text{VM}} = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\sigma}^{\text{D}} : \boldsymbol{\sigma}^{\text{D}}}$$

où $\boldsymbol{\sigma}^{\text{D}} = \boldsymbol{\sigma} - \left(\frac{1}{3} \text{tr} \boldsymbol{\sigma}\right) \mathbf{I}$ est le déviateur de $\boldsymbol{\sigma}$.

La contrainte de Von Mises se réduit à la contrainte normale maximale et on a :

$$\text{Cas de la traction uni-axiale : } \sigma = \sigma_1 \quad (\sigma_2 = \sigma_3 = 0) \quad \Rightarrow \quad \sigma^{\text{VM}} = \sigma$$

$$\text{Cas de la traction équi-bi-axiale : } \sigma = \sigma_1 = \sigma_2 \quad (\sigma_3 = 0) \quad \Rightarrow \quad \sigma^{\text{VM}} = \sigma$$

III.2 Chargement de la traction uni-axiale

Dans cette partie, nous allons comparer les résultats des contraintes théoriques et les résultats de la simulation numérique dans le cas de la traction uni-axiale.

III.2.1 Calcul analytique

Ce mode de déformation consiste à tirer l'éprouvette suivant sa longitudinale de direction X et l'autre extrémité de l'éprouvette est fixe (déplacement nul). On suppose que les déformations sont homogènes au centre de l'éprouvette (loin des effets de bords) et la matrice du tenseur gradient de déformation pour une condition d'isotropie et d'incompressibilité s'exprime sous la forme :

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{-1/2} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-1/2} \end{bmatrix}$$

Les élongations principales s'expriment par : $\lambda_1 = \lambda$ et $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda^{-1/2}$

Le premier invariant du tenseur de Cauchy-Green s'écrit : $I_1 = \lambda^2 + 2 \cdot \lambda^{-1}$

Les conditions aux limites de l'essai de la traction uni-axiale sont : $\sigma_1 = \sigma, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$

Et la contrainte de Cauchy est donnée par : $\sigma = 2(c_{10} + c_{01}/\lambda)(\lambda^2 - \lambda^{-1})$.

Nous avons utilisé les paramètres identifiés à partir de l'essai de traction sur le Latex, ces paramètres sont donnés dans la publication de Marckmann [8], soit :

$$C_{10} = 0.162 \text{ MPa}, C_{01} = 0.0059 \text{ MPa}.$$

Pour une elongation $\lambda = 2$, la contrainte de Cauchy est $\sigma = 1.15 \text{ MPa}$.

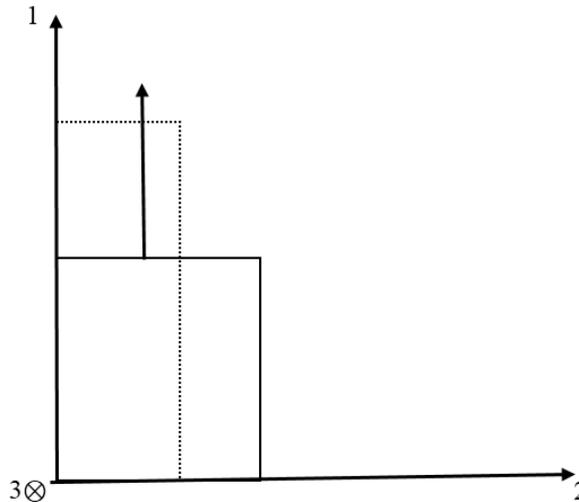


Figure III.1 : Schématisation de l'essai de traction uniaxiale.

III.2.2 Simulation de l'essai de la traction uni-axiale

Nous avons réalisé un calcul par éléments finis pour déterminer les contraintes en tout point de la structure. Ces calculs sont réalisés avec un logiciel de calcul, les éléments utilisés sont des éléments quadratiques, linéaires, par défauts.

III.2.2.1 Présentation de la géométrie

Nous considérons une éprouvette normalisée dont les dimensions sont exprimées en millimètre dans la figure suivante :

$$L_0 = 560\text{mm}, B = 50\text{mm}, B_{\text{Max}} = 100\text{mm}.$$

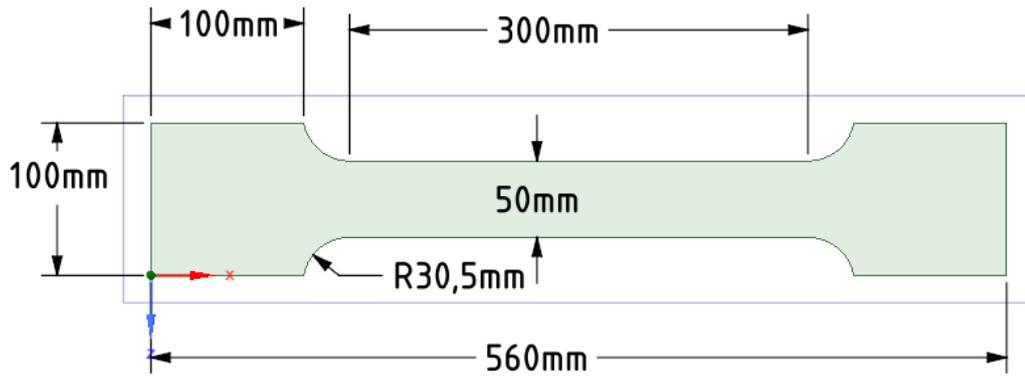


Figure III.2 : Modèle étudié.

Nous appelons la zone utile la zone de l'éprouvette pour laquelle la largeur est égale à B.

III.2.2.2 Maillage

A ce stade nous allons générer le maillage élément finis. Il est possible de choisir la technique de maillage, le type d'éléments et leur forme.

Nous avons considéré une modélisation 2D.

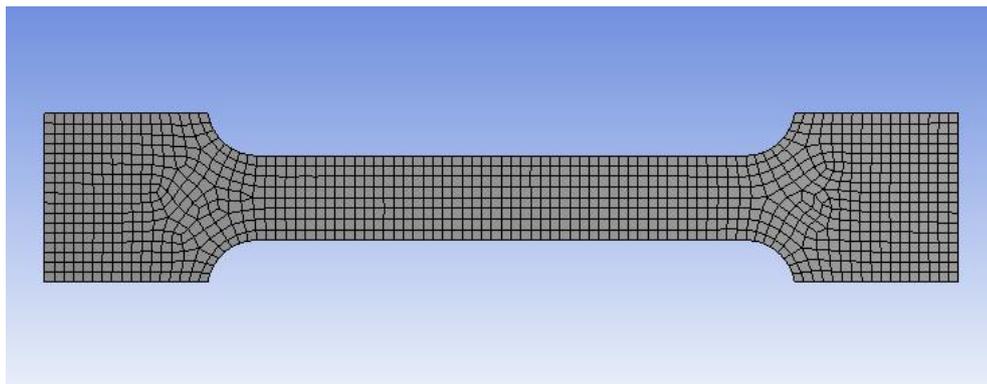


Figure III.3 : Modèle maillé.

Nombre des nœuds	3317
Nombre des éléments	1028

III.2.2.3 Modélisation du problème

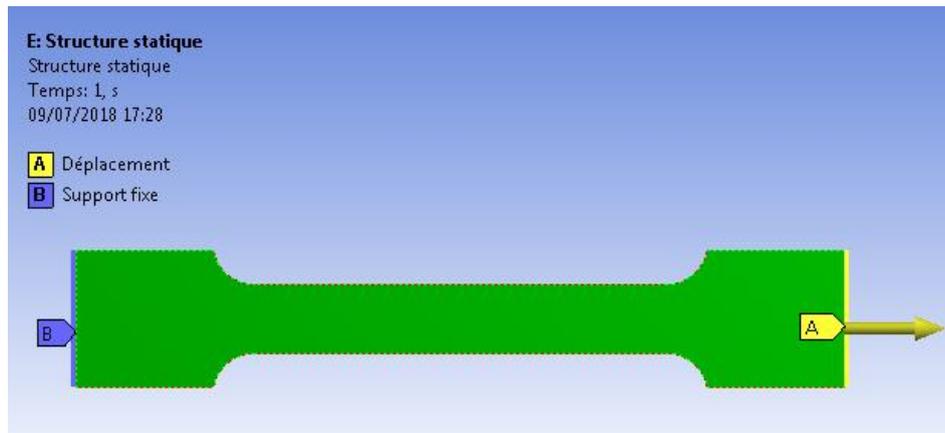


Figure III.4 : Modèle simplifié de l'éprouvette.

Comme il est représenté dans la figure, nous avons fixé la pièce avec un support fixe et nous avons appliqué un chargement imposé sous forme d'un déplacement dans l'autre extrémité.

III.2.2.4 Résultats

Le matériau constitutif de l'éprouvette est supposé de type Mooney-Rivlin quasi - incompressible, nous avons mené plusieurs expériences sur l'éprouvette, en changeant à chaque fois la largeur intermédiaire B.

Pour une élongation $\lambda = \lambda_T = 1 + \frac{U}{L_0} = 2$, où $L_0 = 560\text{mm}$, et U est le déplacement imposé, les résultats de la simulation numérique pour différentes valeurs de B sont donnés sur les figures suivantes :

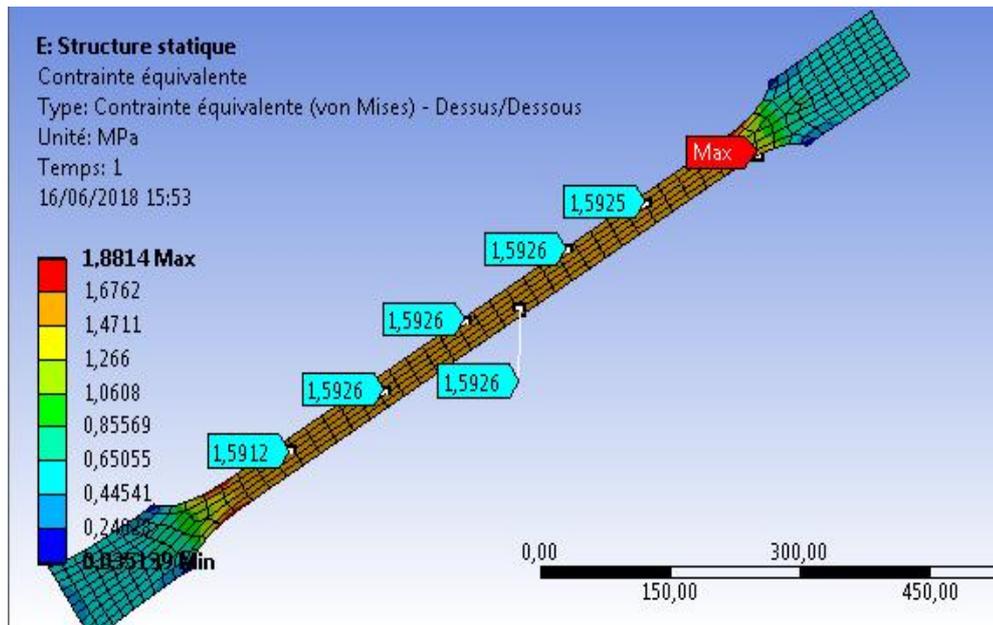


Figure III.5 : Distribution de la contrainte de Von Mises pour B = 50 mm.

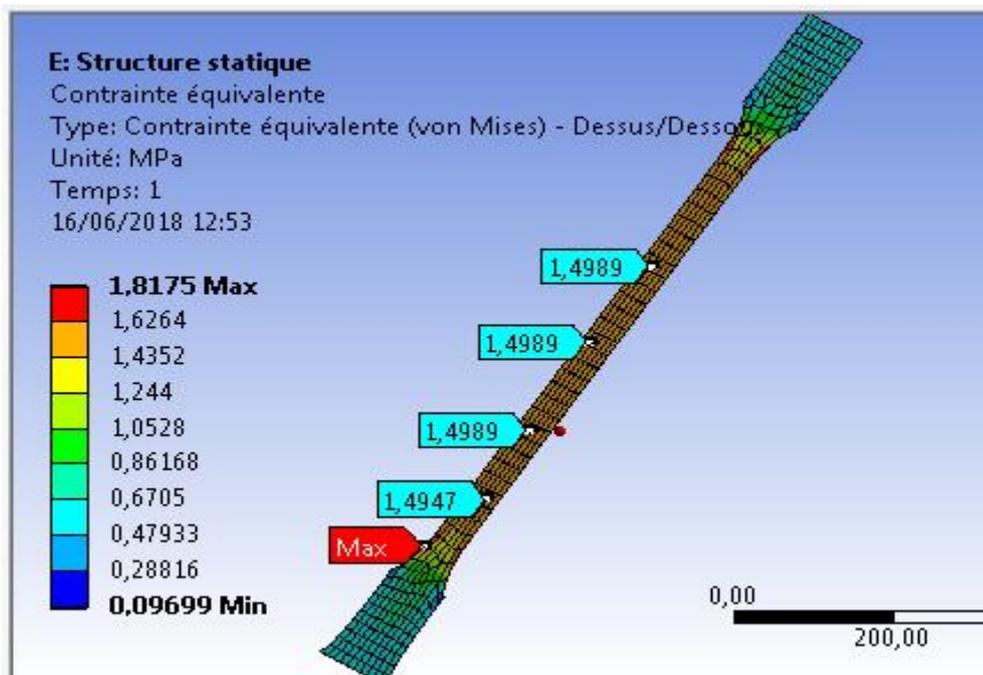


Figure III.6 : Distribution de la contrainte de Von Mises pour B = 60 mm.

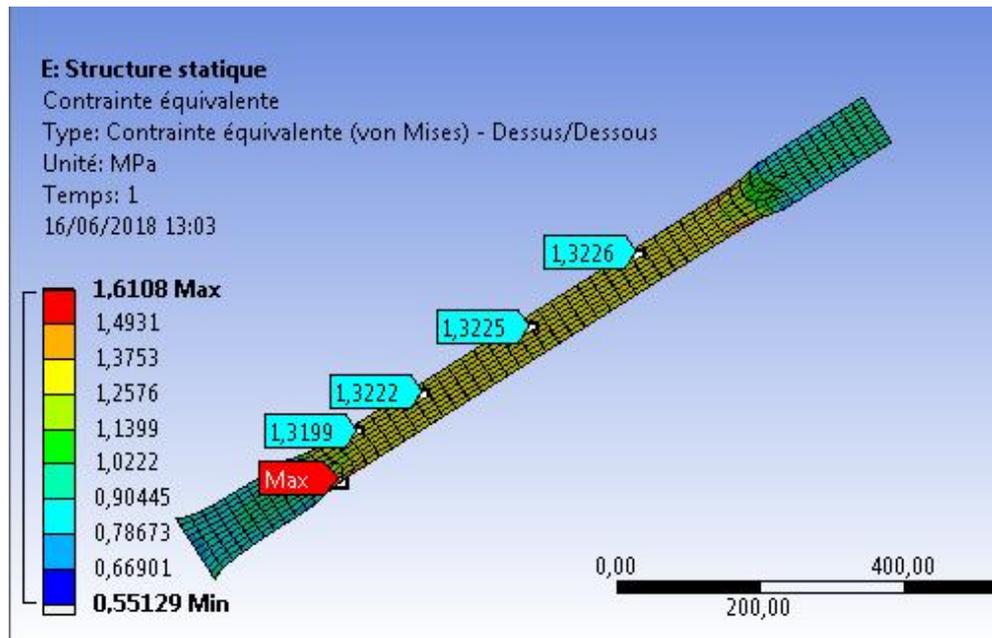


Figure III.7 : Distribution de la contrainte de Von Mises pour B = 80 mm.

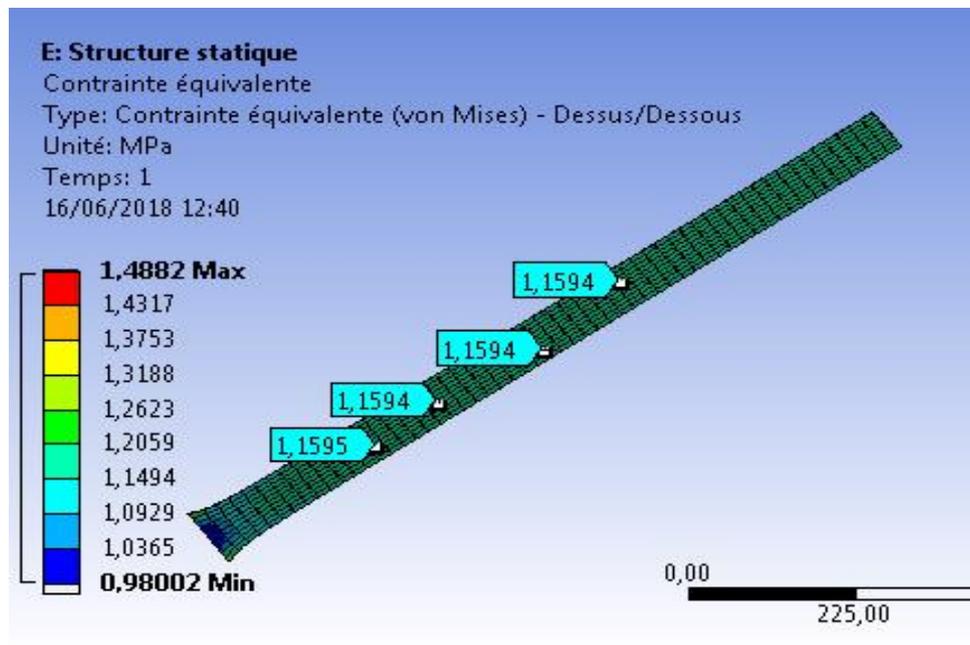


Figure III.8 : Distribution de la contrainte de Von Mises pour B = 100 mm.

Nous remarquons que la géométrie de l'éprouvette est l'un des paramètres qui influent sur les résultats des tests de traction uniaxiale. Dans la première géométrie, nous constatons que pour une elongation égale à 2, la contrainte numérique équivalente (Von-Mises) dans la zone utile est plus grande par rapport à la contrainte théorique qui égale à 1,15 MPa . Les déplacements dans la zone utile sont plus grands que les déplacements dans les zones d'extrémités et par conséquent les déformations ne sont pas homogènes le long de l'éprouvette.

Le tableau suivant représente les différentes valeurs des contraintes dans la zone utile en fonction des elongations et cela pour différentes valeurs de la largeur B :

Largeur B (mm)	50	60	80	100		
Contrainte numérique σ_i (i=1:4), (MPa) (dans la zone utile)	(σ_1)	(σ_2)	(σ_3)	(σ_4)	Contrainte théorique σ_{Th} (MPa)	Contrainte expérimentale σ_{Exp} (MPa)
λ						
1	0	0	0	0	0	0
1.5	0.687	0.65	0.58	0.52	0.53	0.585
2	1.592	1.49	1.32	1.15	1.15	1.08
2.5	2.73	2.55	2.22	1.92	1.92	1.9
3	4.125	3.83	3.3	2.84	2.84	2.84
3.5	5.747	5.32	4.56	3.91	3.97	3.6
4	7.60	7.02	6	5.14	5.15	4.92
4.5	9.70	8.94	7.63	6.53	6.54	6.61
5	12.03	11.08	9.44	8.07	8.09	8.55
5.5	14.6	13.43	11.44	9.77	9.8	11.33
6	17.39	15.95	13.62	11.63	11.67	15.3
6.5	20.49	18.77	15.98	13.64	13.71	20.99
7	23.68	21.77	18.52	15.82	15.91	28.14
7.4	26.46	24.32	20.69	17.67	17.87	38.628

Tableau III.1 : Évolution des contraintes équivalentes de Von-Mises en fonction des elongations pour différentes valeurs de B.

Nous constatons que les contraintes numériques approchent progressivement aux résultats théoriques au fur et à mesure que la largeur B approche de la valeur B_{Max} .

Nous avons tracé la courbe donnant les contraintes pour différentes valeurs de B et cela pour un déplacement $U = L_0$, la contrainte théorique correspondante est $\sigma = 1.15$ MPa.

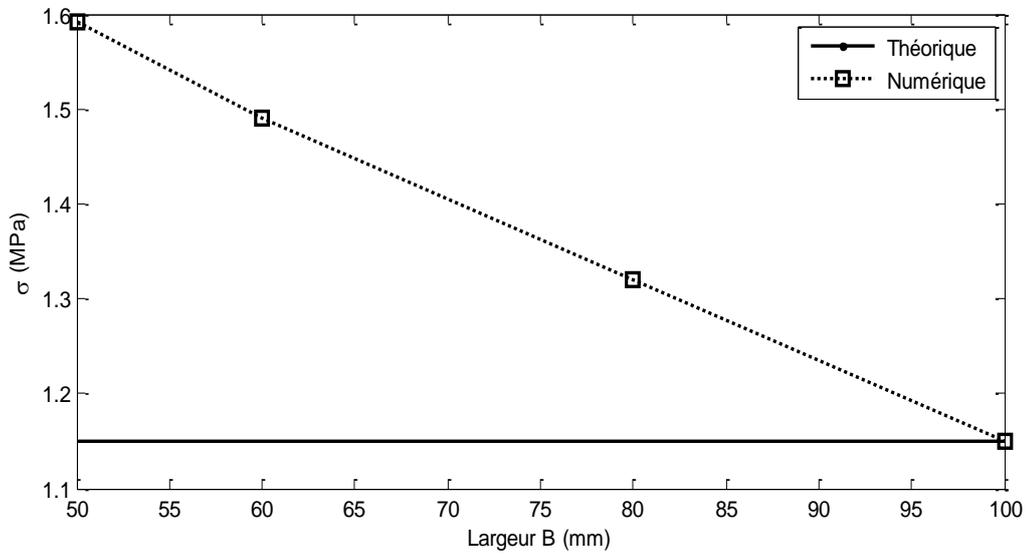


Figure III.9 : Variation de la contrainte numérique en fonction de la largeur B pour $\lambda_T = 2$.

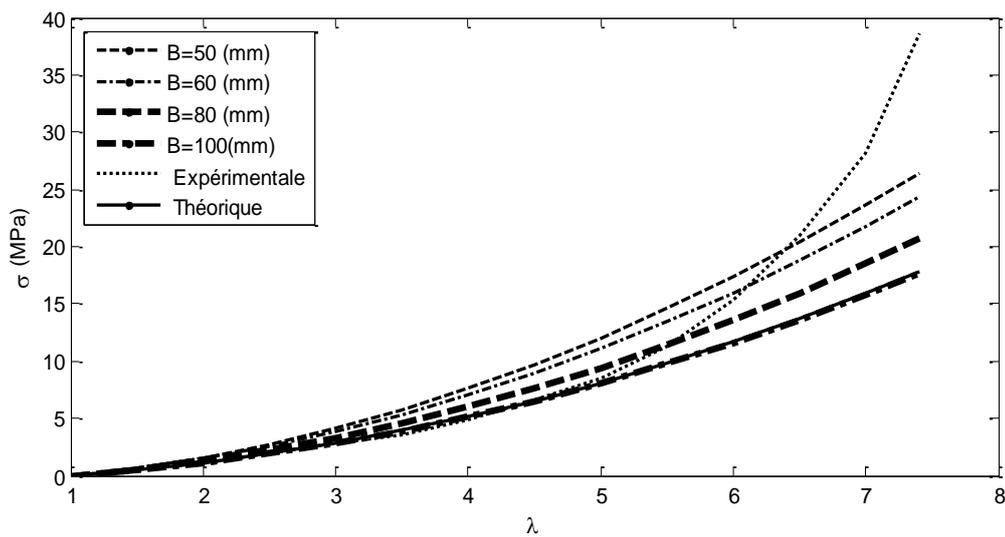


Figure III.10 : Comparaison des courbes numériques, théorique et expérimentale dans le cas de la traction uni-axiale.

On montre sur la figure (III.10) l'évolution des différentes contraintes calculées numériquement pour différentes valeurs de B ainsi que les contraintes théoriques et expérimentales.

Les résultats de la simulation numérique dans le cas d'une éprouvette de section constante et les résultats théoriques sont confondus. Les déformations sont homogènes et par conséquent l'élongation est la même en tout point de l'éprouvette.

Nous constatons que le modèle analytique de Mooney-Rivlin reproduit d'une manière satisfaisante, les résultats expérimentaux d'un test de traction uniaxiale jusqu'à une élongation de 500% c'est-à-dire $\lambda=5$. A partir de cette élongation ($\lambda=5$), la courbe analytique dévie progressivement de la courbe expérimentale vers des valeurs inférieures.

III. 3 Chargement de Traction équi-bi-axiale

III. 3.1 Calcul analytique

Dans le cas de la traction équi-biaxiale, on impose dans les deux directions principales la même élongation, soient x et y. L'élongation dans la direction z est déduite par la condition d'incompressibilité

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \quad \text{et} \quad \lambda_3 = \lambda^{-2} \quad \text{et} \quad I_1 = 2\lambda^2 + \lambda^{-4}$$

Compte tenu des conditions aux limites, on a : $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$, $\sigma_3 = 0$

La matrice du tenseur gradient de déformation pour une condition d'isotrope et d'incompressibilité s'exprime par la forme suivante :

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-2} \end{bmatrix}$$

Ce qui donne : $\sigma = 2(C_{10} + C_{01} \cdot \lambda^2) (\lambda^2 - \lambda^{-4})$

Avec C_{10}, C_{01} sont les paramètres du modèle Mooney-Rivlin ($C_{10} = 0.162$ MPa,

$C_{01} = 0.0059$ MPa).

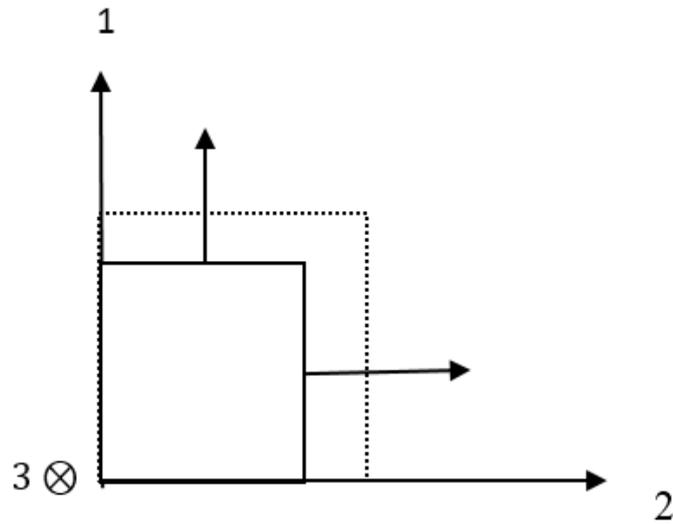


Figure III.11 : Schématisation de l'essai de traction équibi-axiale.

III.3.2 Simulation numérique de l'essai de la traction équibiaxiale

III.3.2.1 Présentation de la géométrie

Nous prenons le cas d'une éprouvette cruciforme dont les dimensions sont exprimées en millimètre dans la Figure (III.12).

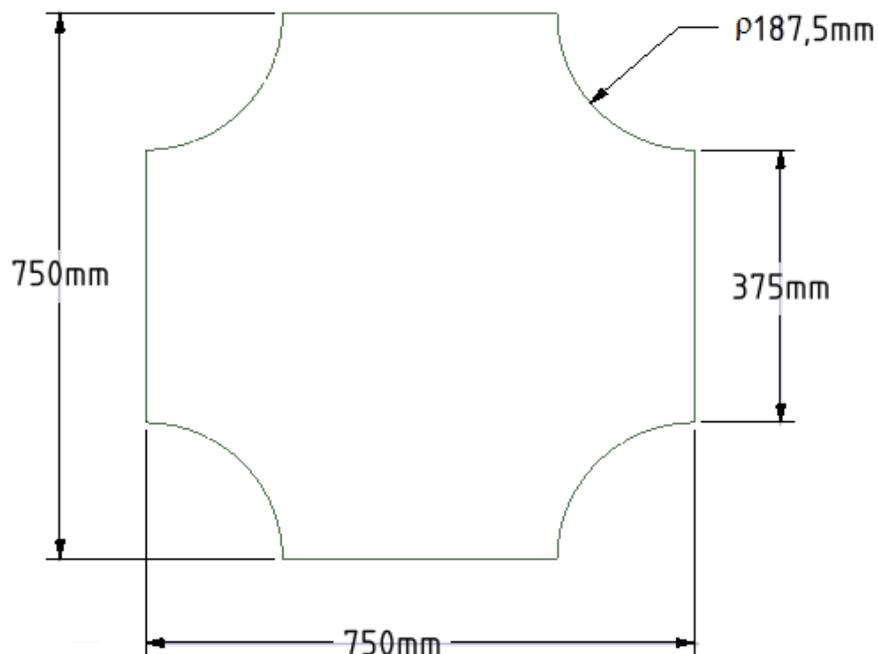


Figure III.12 : Modèle étudié.

Compte tenu de la symétrie cylindrique, nous considérons un quart de l'éprouvette

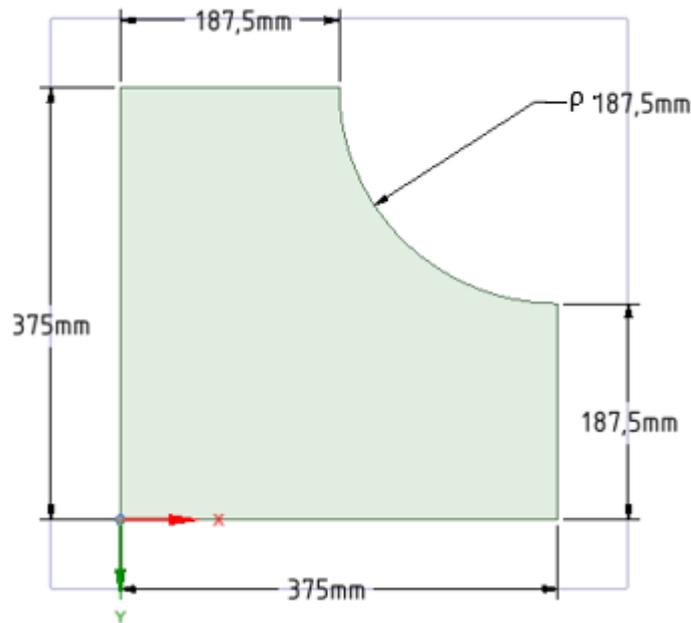


Figure III.13 : Modèle simplifiée

III.3.2.2 Problématique

On cherche la valeur du rayon ρ de telle sorte que donnant la contrainte de Von Mises au centre de l'éprouvette soit égale à la valeur de la contrainte théorique ?

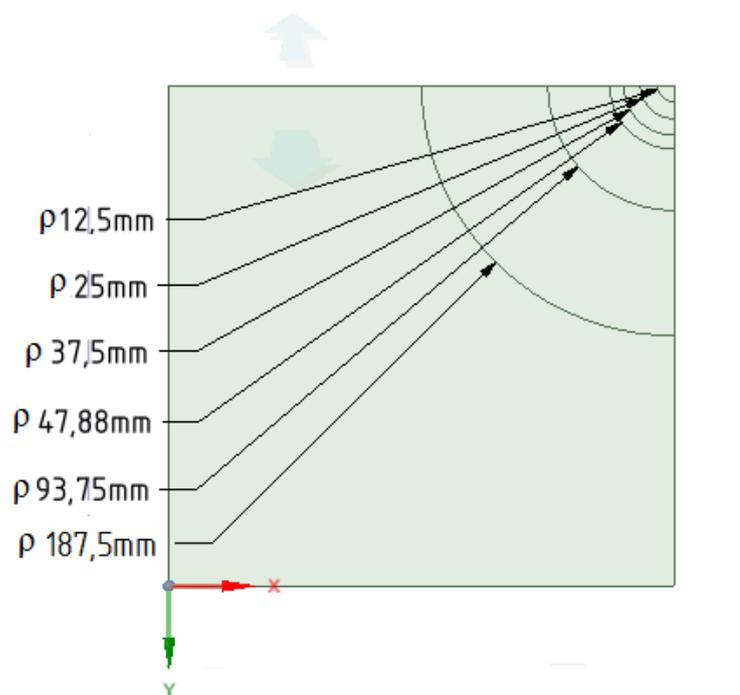


Figure III.14 : Le 1/4 de l'éprouvette avec une variation de ρ .

III.3.2.3 Modélisation du problème

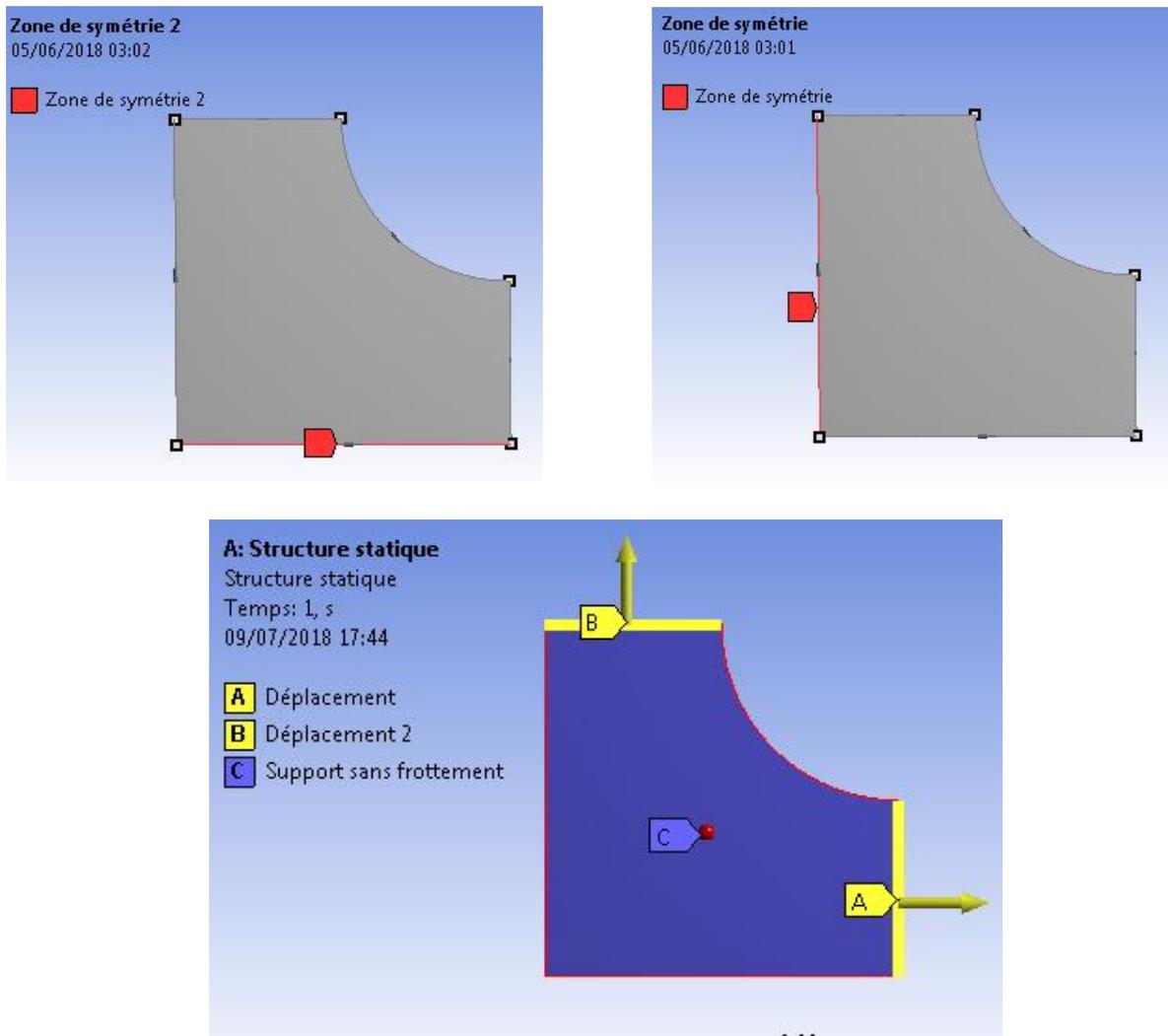


Figure III.15 : Modèle simplifié.

Comme il est représenté sur la figure III.15, nous avons défini des contraintes de symétrie dans les deux axes de symétrie et nous avons appliqué des déplacements égaux dans les extrémités des bras de l'éprouvette A et B.

III.3.2.4 Condition aux limites

Nous avons appliqué des déplacements aux deux extrémités de l'éprouvette, en variant le rayon $\rho = \frac{L_0}{2}, \frac{L_0}{4}, \frac{L_0}{8}, \frac{L_0}{10}, \frac{L_0}{15}, \frac{L_0}{20}, 0$, où $2L_0 = 750$ mm est la longueur maximale de l'éprouvette. On compare les contraintes numériques (Von Mises) de chaque géométrie avec la contrainte théorique.

III.3.2.5 Maillage

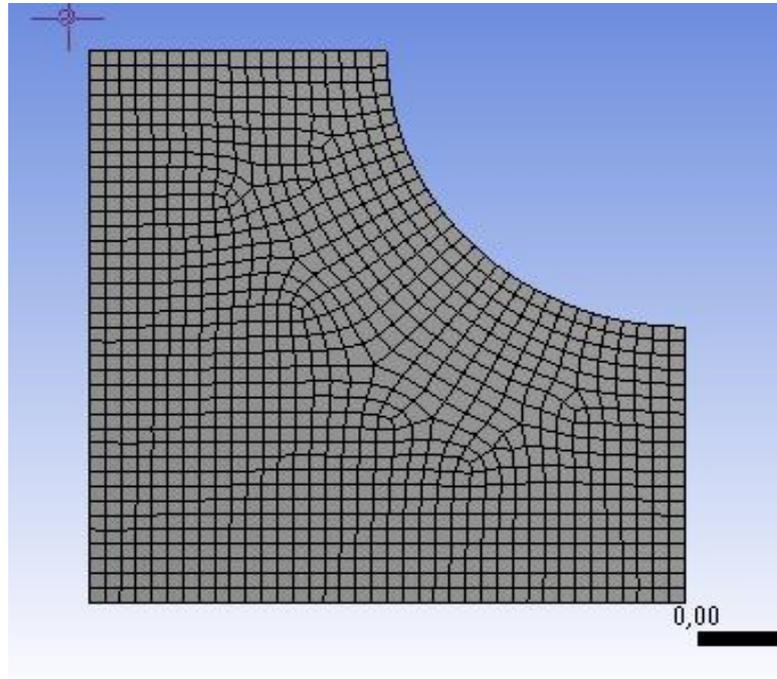


Figure III.16 : Modèle maillé.

Nombre des nœuds	3341
Nombre des éléments	1066

III.3.2.6 Résultats

Les résultats numériques obtenus en traction équibiaxiale pour une élongation égale à 2,2 sont donnés dans les figures suivantes, et cela pour différentes valeurs de ρ .

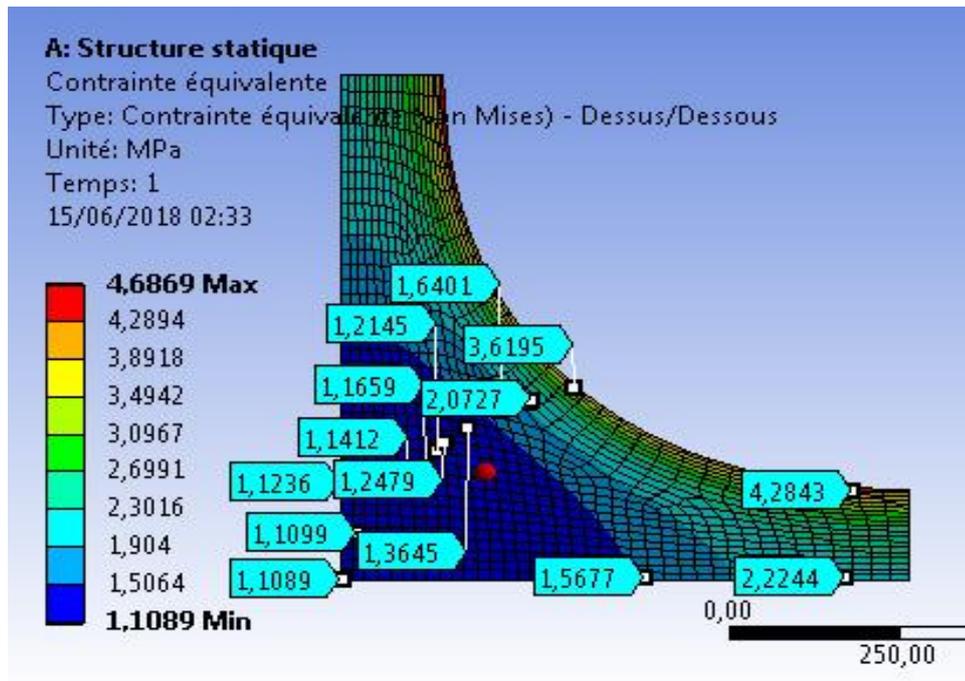


Figure III.17 : Distribution des contraintes de Von Mises pour $\rho=L/2$.

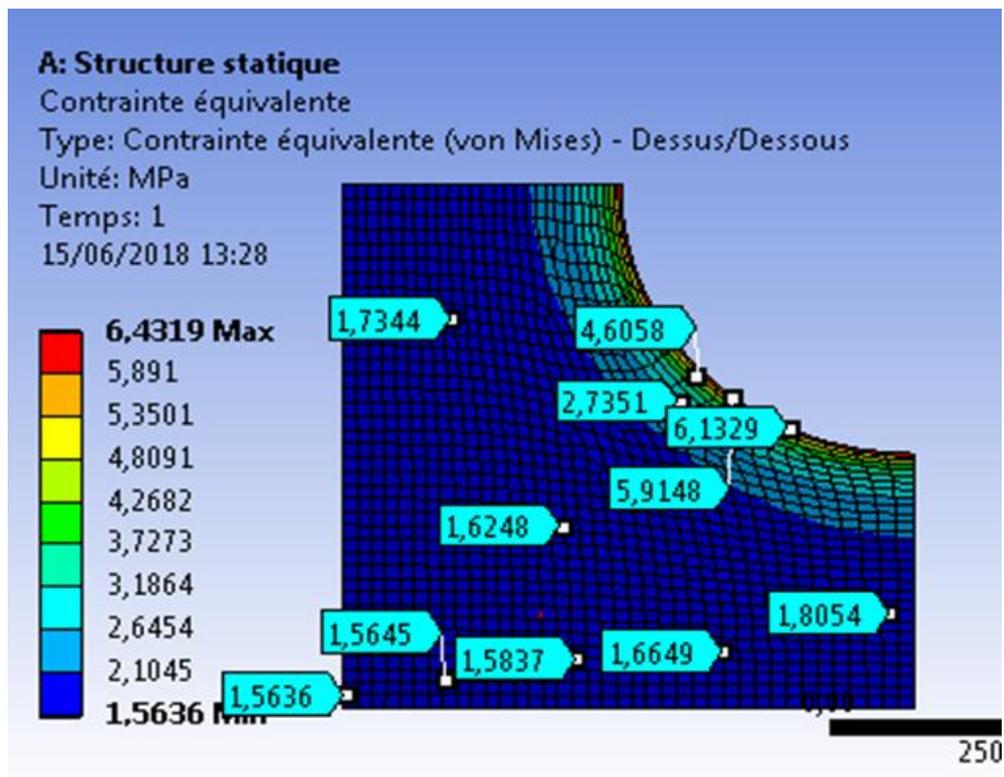


Figure III.18 : Distribution des contraintes de Von Mises pour $\rho=L/4$.

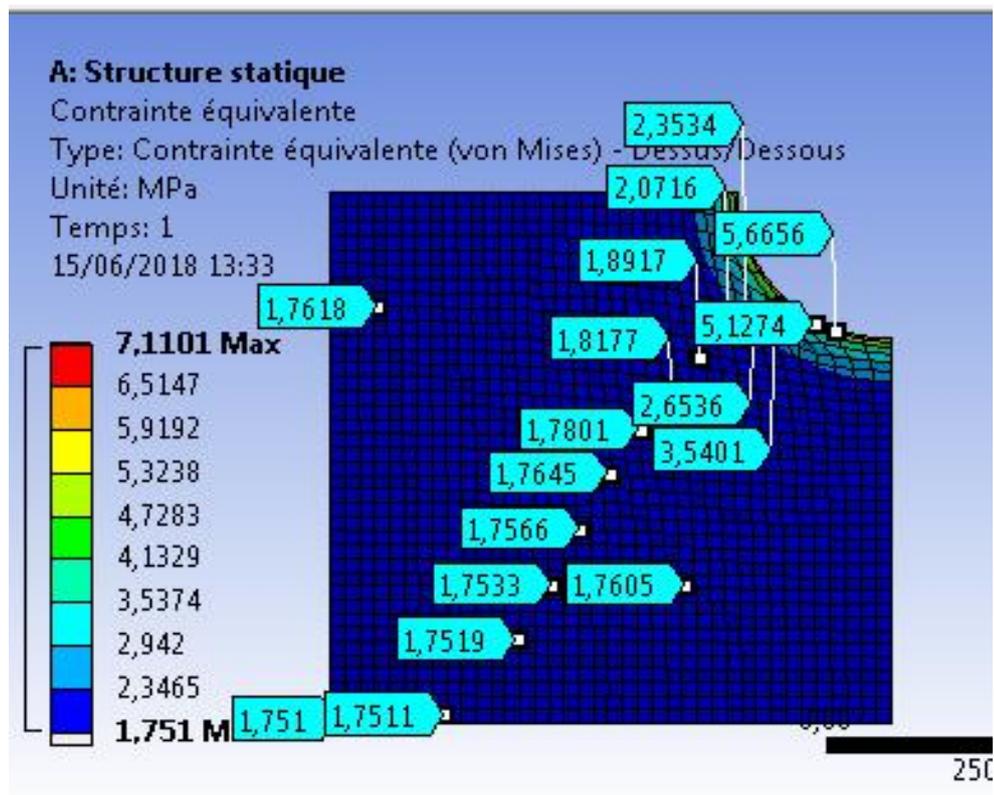


Figure III.19 : Distribution des contraintes de Von Mises pour $\rho=L/8$.

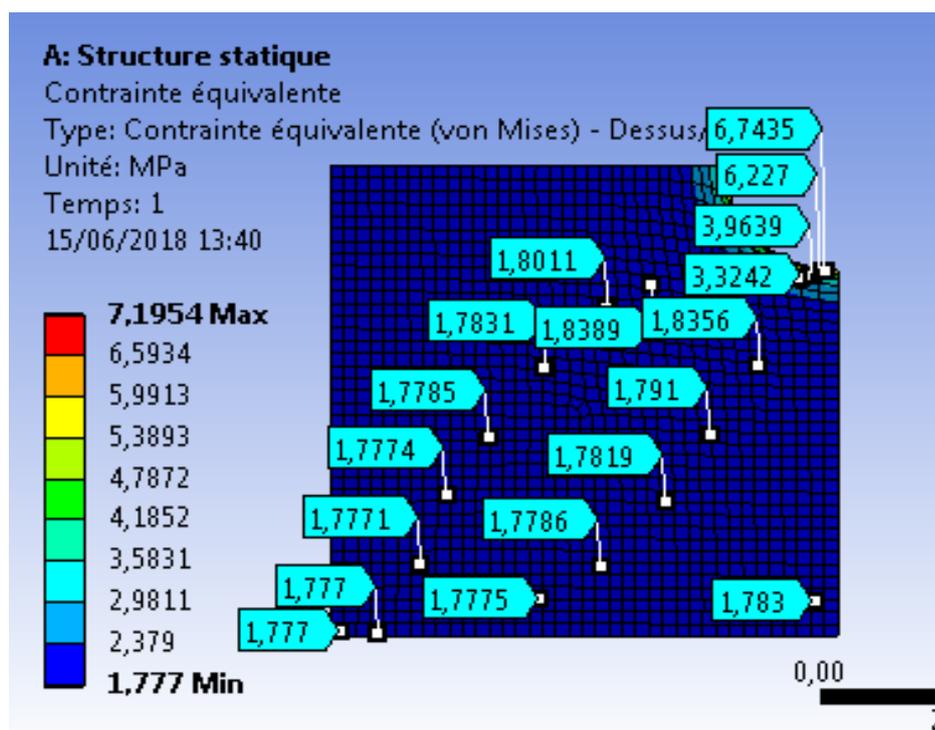


Figure III.20 : Distribution des contraintes de Von Mises pour $\rho=L/10$.

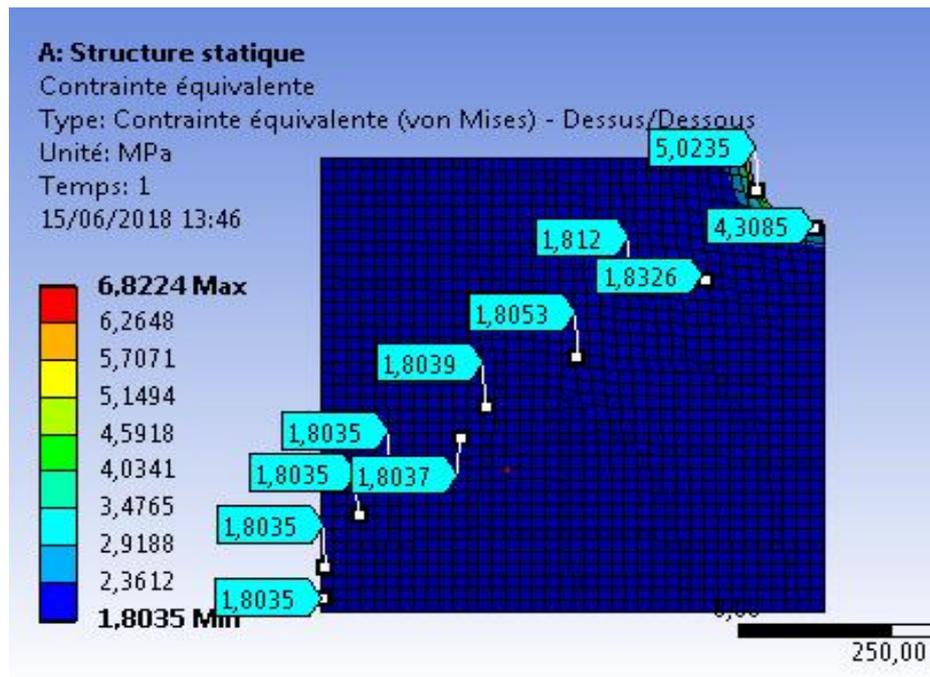


Figure III.21 : Distribution des contraintes de Von Mises pour $\rho=L/15$.

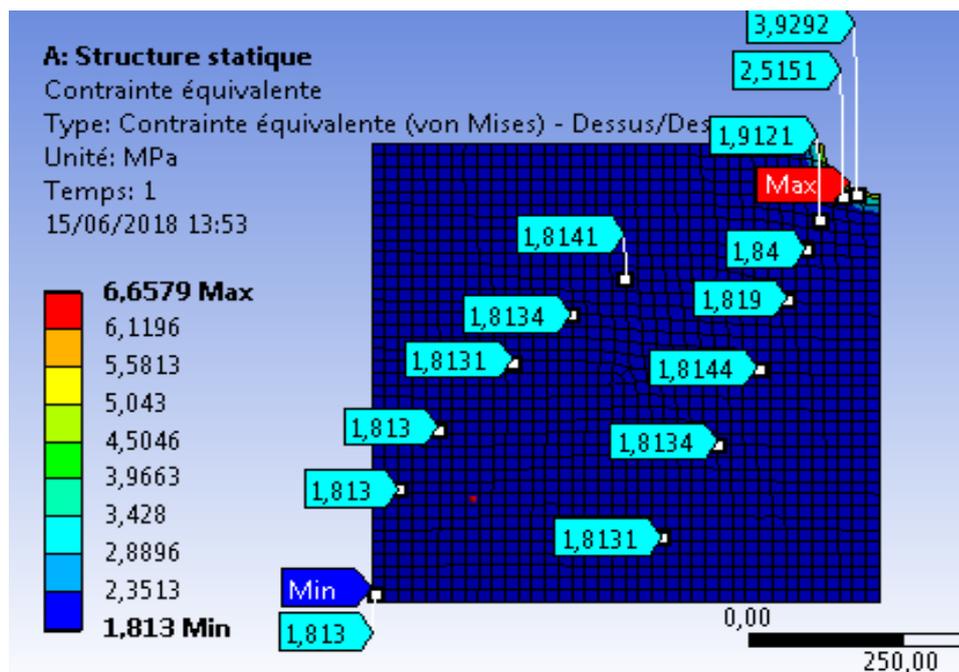


Figure III.22 : Distribution des contraintes de Von Mises pour $\rho=L/20$.

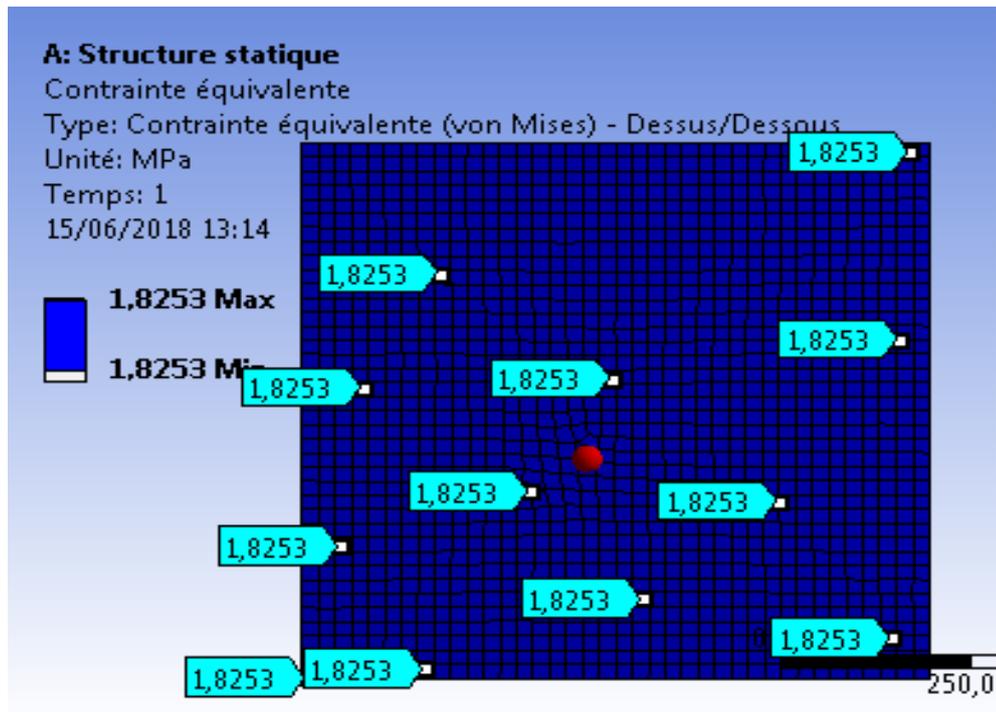


Figure III.23 : Distribution des contraintes de Von Mises pour $\rho=0$.

Les contraintes de Von Mises au centre de l'éprouvette pour les différentes valeurs de ρ sont données ci-dessous :

		Rayon ρ	L/2	L/4	L/8	L/10	L/15	L/20	0
λ	σ (MPa)	Contrainte théorique (σ_{Th})	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5	σ_6	σ_7
	1	<u>0</u>	0	0	0	0	0	0	0
1.2	<u>0.326</u>	0.2	0.285	0.31	0.318	0.233	0.323	<u>0.32</u>	
1.5	<u>0.719</u>	0.46	0.63	0.69	0.7	0.71	0.719	<u>0.71</u>	
1.7	<u>0.991</u>	0.631	0.86	0.95	0.968	0.981	0.994	<u>0.991</u>	
1.9	<u>1.295</u>	0.81	1.12	1.24	1.26	1.27	1.281	<u>1.29</u>	
2.2	<u>1.828</u>	1.1	1.563	1.74	1.777	1.8	1.814	<u>1.82</u>	
2.5	<u>2.475</u>	1.44	2.07	2.35	2.39	2.43	2.54	<u>2.47</u>	
2.8	<u>3.258</u>	1.82	2.67	3.07	3.135	3.19	3.266	<u>3.24</u>	
3.1	<u>4.198</u>	2.24	3.35	3.92	4.011	4.05	4.07	<u>4.182</u>	
3.4	<u>5.318</u>	2.7	4.11	4.9	5.03	5.17	4.97	<u>5.29</u>	
3.7	<u>6.644</u>	3.18	4.95	6.03	6.22	6.42	6.87	<u>6.6</u>	

4	<u>8.2</u>	3.71	5.86	7.31	7.58	7.87	8.12	<u>8.13</u>
4.3	<u>10.023</u>	4.27	6.85	9.12	9.11	9.53	9.48	<u>9.92</u>
4.45	<u>11.04</u>	4.6	7.36	9.51	9.94	10.44	10.21	<u>10.93</u>

Tableau III.2 : Contraintes de Von Mises analytique et numériques.

La figure (III.24) montre les résultats obtenus pour les différentes valeurs de ρ .

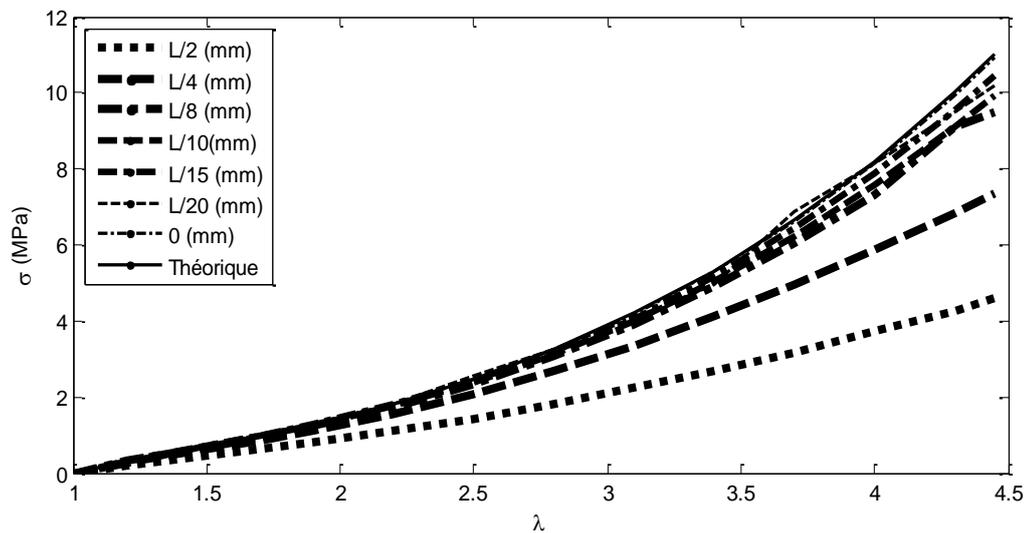


Figure III.24 : Contraintes de Von Mises en fonction de l'élongation (Expérimentale, analytique, numériques (au centre de l'éprouvette et pour différentes valeurs de ρ)).

On constate que lorsque le rayon ρ croît, les contraintes numériques au centre de l'éprouvette approchent aux contraintes théoriques.

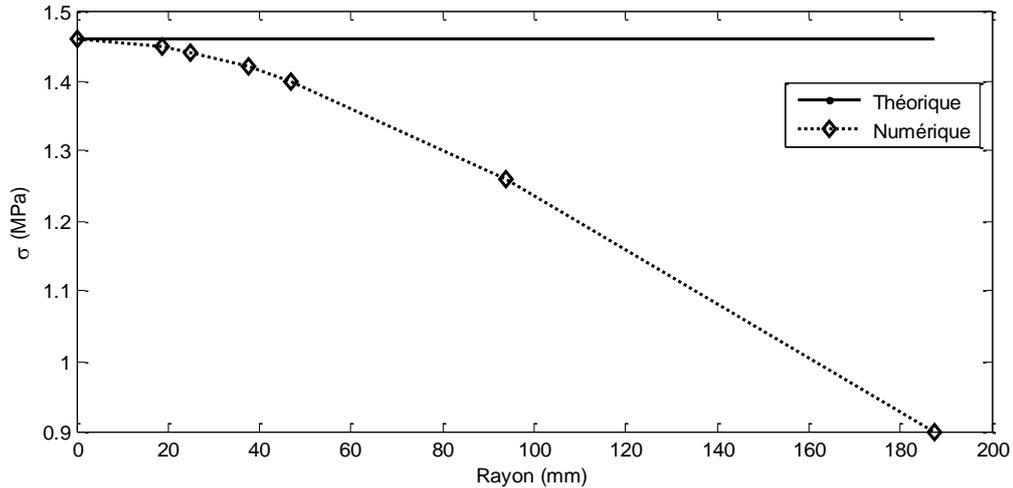


Figure III.25 : Comparaison des contraintes de Von Mises théoriques/numériques au centre de l'éprouvette pour différentes valeurs de ρ ($\lambda_T = 2$, $\sigma_T = 1,46$ MPa).

Les résultats montrent que la géométrie de l'éprouvette dont le rayon $\rho = 0$ permettant la comparaison des deux contraintes (théorique et numérique).

Le tableau suivant résume tous les résultats pour un rayon $\rho = 0$:

Elongation (λ)	Contrainte numérique σ_{Num} (MPa)	Contrainte théorique σ_{Th} (MPa)
1	0	0
1.2	0.32	0.326
1.5	0.71	0.719
1.7	0.991	0.991
1.9	1.29	1.295
2.2	1.82	1.828
2.5	2.47	2.475
2.8	3.24	3.258
3.1	4.182	4.198
3.4	5.29	5.318
3.7	6.6	6.644
4	8.13	8.20
4.3	9.92	10.023
4.45	10.93	11.04

Tableau III.3 : Evolution des contraintes équivalentes (Von-Mises) en fonction des élongations.

La courbe (III.26) donne les contraintes numériques et théoriques en fonction des élongations.

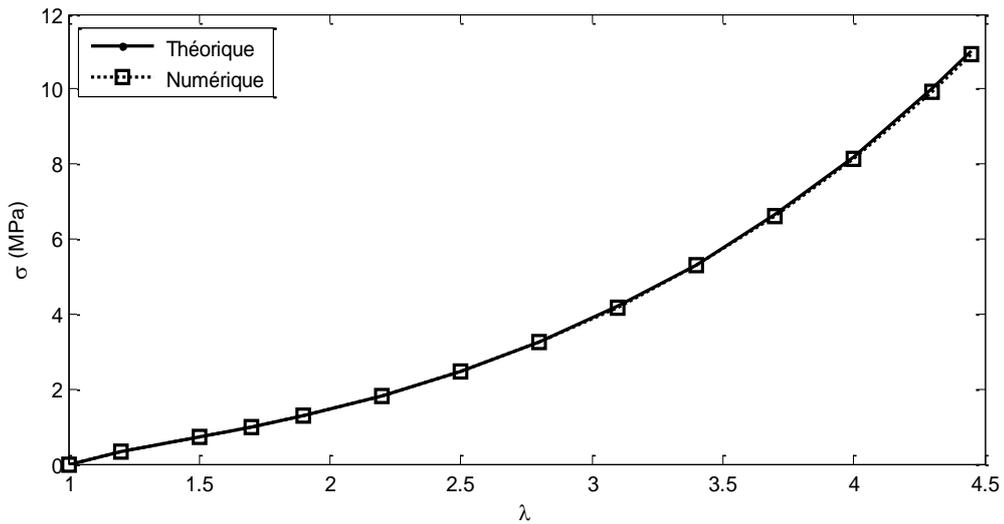


Figure III.26 : Comparaison des contraintes de Von Mises théoriques/numériques dans le cadre de la traction équilibiaxiale.

Les résultats numériques obtenus pour $\rho \approx 0$ sont confrontés aux résultats analytiques, dans le cas d'un test de traction équilibiaxiale.

On constate que le modèle numérique reproduit les résultats théoriques pour toutes les valeurs de l'élongation.

III.3.2.7 Distribution des contraintes suivant des trajectoires ($\rho = \frac{L}{2}$)

Nous représentons quatre trajectoires qui correspondent aux angles $\theta = 0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ pour une élongation $\lambda_T = 2$. La contrainte théorique est égale à 1.46 MPa.

Trajectoire 1 ($\theta = 0^\circ$): $R \in [0 ; 375 \text{ mm}]$

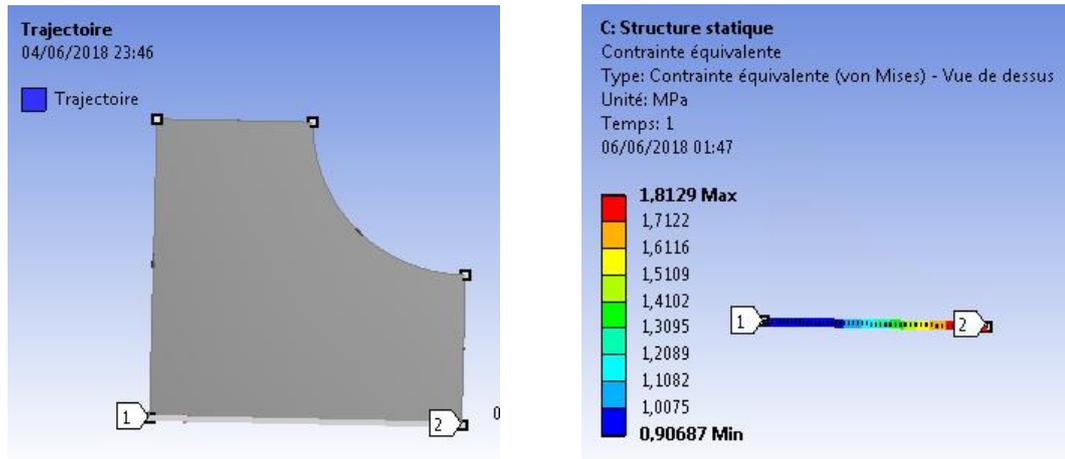


Figure III.27 : Distribution des contraintes de Von Mises le long de la trajectoire à $\theta = 0^\circ$

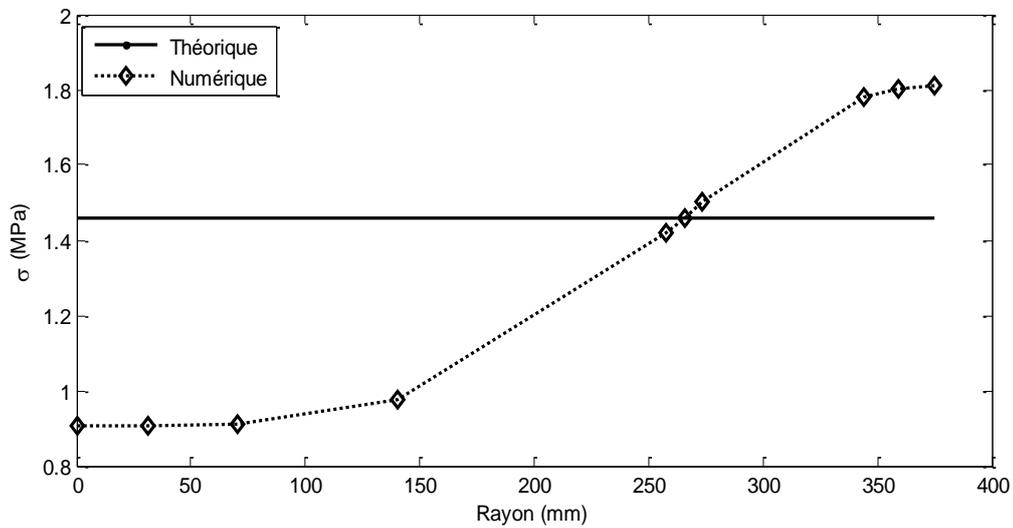


Figure III.28 : Variation des contraintes de Von Mises en fonction du rayon R ($\theta = 0^\circ$).

Pour la première trajectoire, la valeur de la contrainte numérique pour un rayon

$R = 265.63 \text{ mm}$ est égale à la valeur de la contrainte théorique.

Trajectoire 2 ($\theta = 30^\circ$): $R \in [0 ; 378,88 \text{ mm}]$

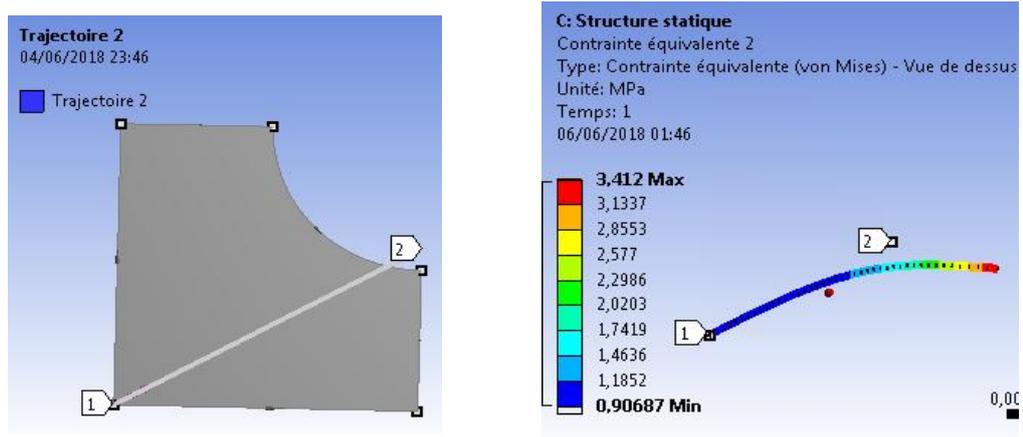


Figure III.29 : Distribution des contraintes de Von Mises le long de la trajectoire à $\theta = 30^\circ$.

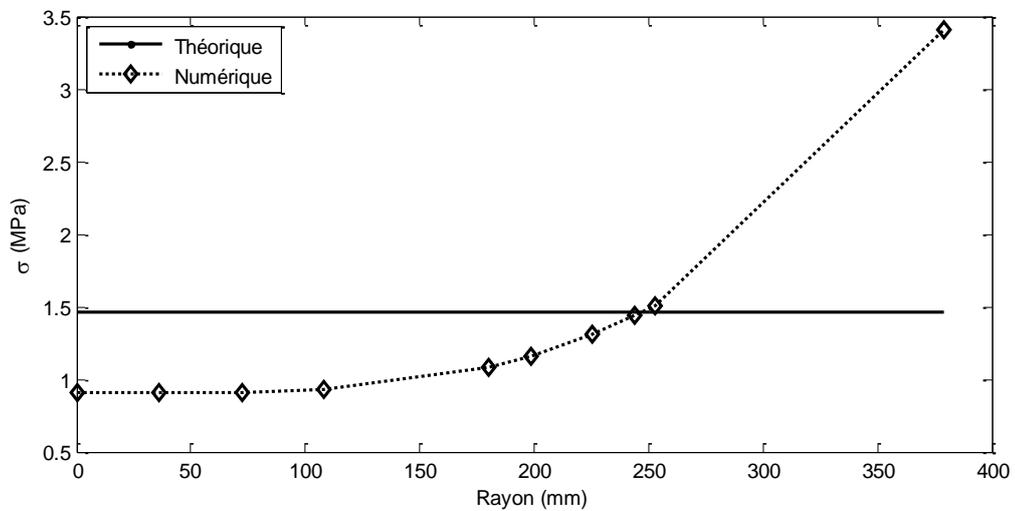


Figure III.30 : Variation des contraintes de Von Mises en fonction du rayon R ($\theta = 30^\circ$)

Pour un rayon $R = 247.35 \text{ mm}$, la contrainte numérique est égale à la contrainte théorique.

Trajectoire 3 ($\theta = 45^\circ$): $R \in [0 ; 342,5 \text{ mm}]$

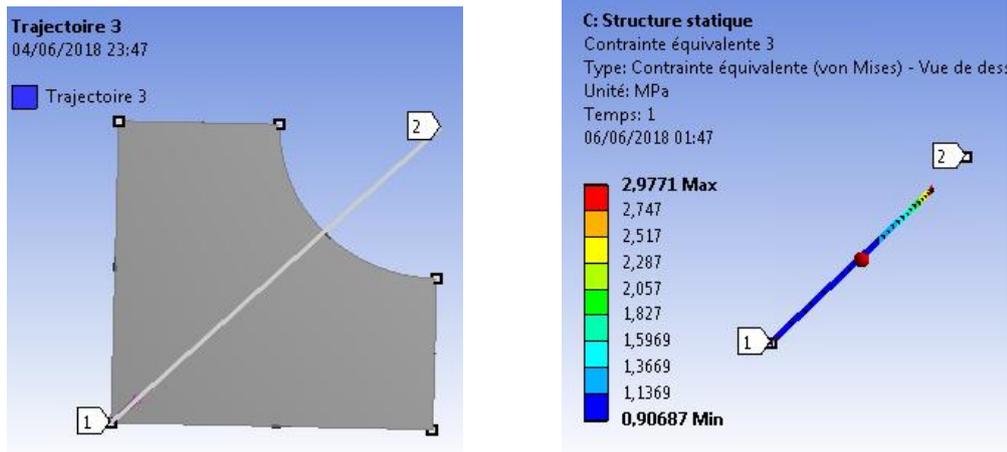


Figure III.31 : Distribution des contraintes de Von Mises le long de la trajectoire à $\theta = 45^\circ$.

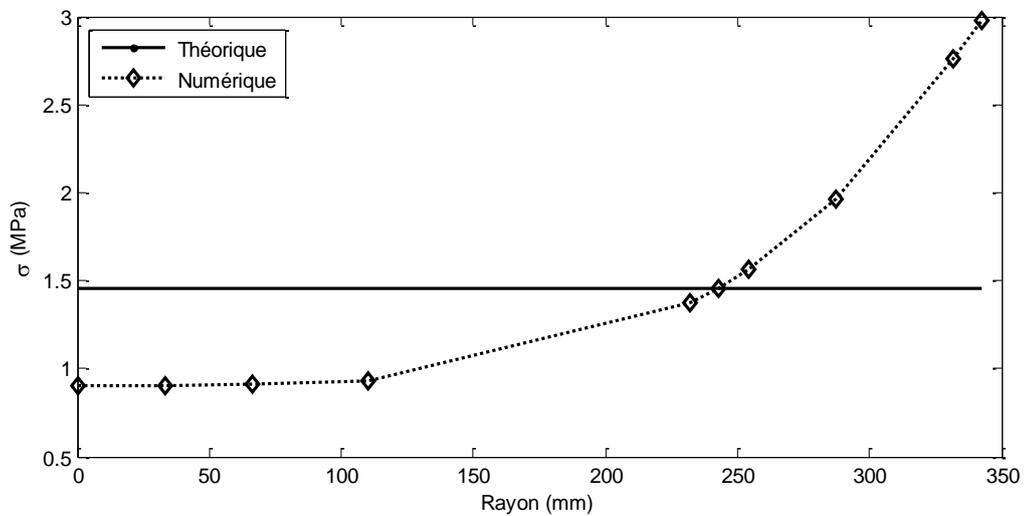


Figure III.32 : Variation des contraintes de Von Mises en fonction du rayon R ($\theta = 45^\circ$).

Pour la troisième trajectoire, la contrainte numérique est égale à la contrainte théorique pour un rayon $R = 243.07 \text{ mm}$.

Trajectoire 4 ($\theta = 90^\circ$): $R \in [0 ; 375 \text{ mm}]$

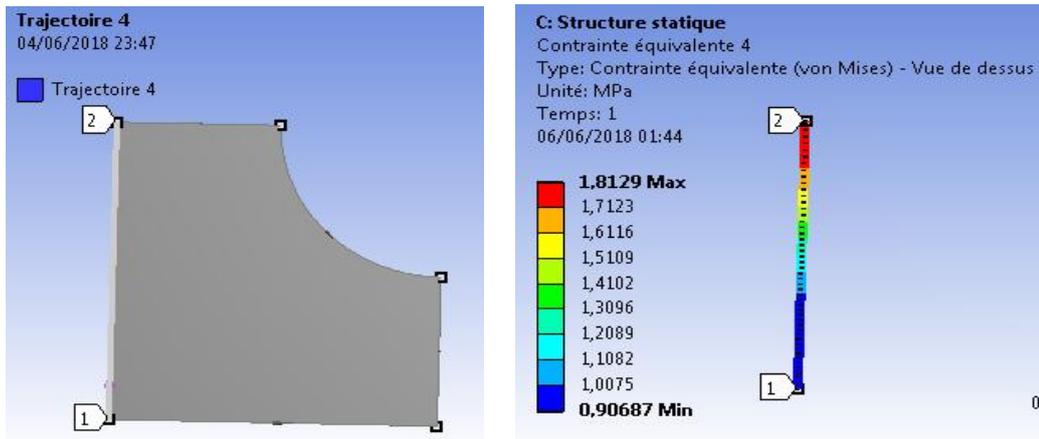


Figure III.33 : Distribution des contraintes de Von Mises le long de la trajectoire à $\theta = 90^\circ$

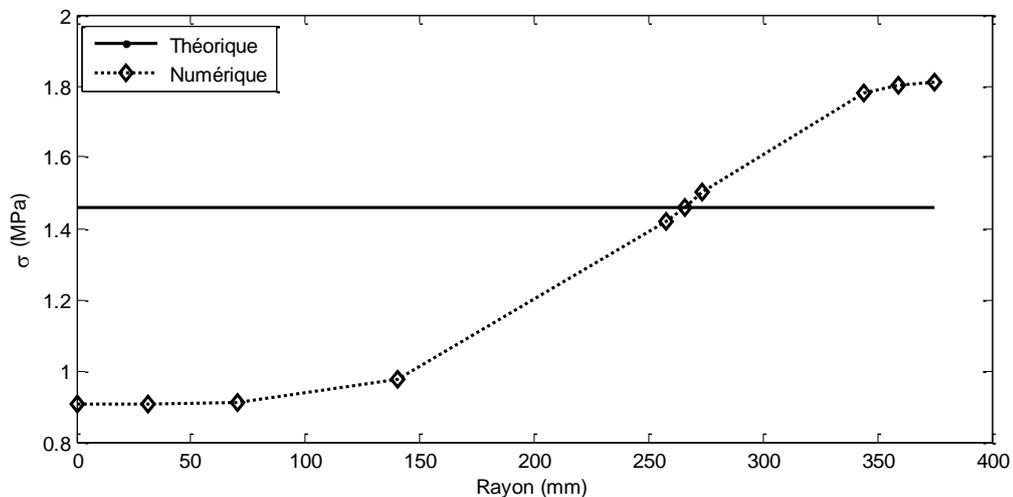


Figure III.34 : Variation des contraintes de Von Mises en fonction du rayon ($\theta = 90^\circ$).

Pour le quatrième cas, pour un rayon $R = 265.43 \text{ mm}$, la contrainte numérique a la même valeur que la contrainte théorique.

Dans la figure (III.35), on montre les variations des contraintes en fonction du rayon pour les quatre trajectoires. On voit bien que pour de faibles rayons (c'est-à-dire, au voisinage du centre de l'éprouvette ($R < 100 \text{ mm}$ pour le cas étudié), les contraintes ne varient que très légèrement, de plus, les quatre courbes sont confondues, ce qui implique une distribution

uniforme du champ des contraintes dans la **zone centrale**. L'hétérogénéité de la distribution des contraintes devient plus importante au fur et à mesure de s'éloigner du centre. Notons que cette variation est plus importante dans le cas où $\theta = 45^\circ$.

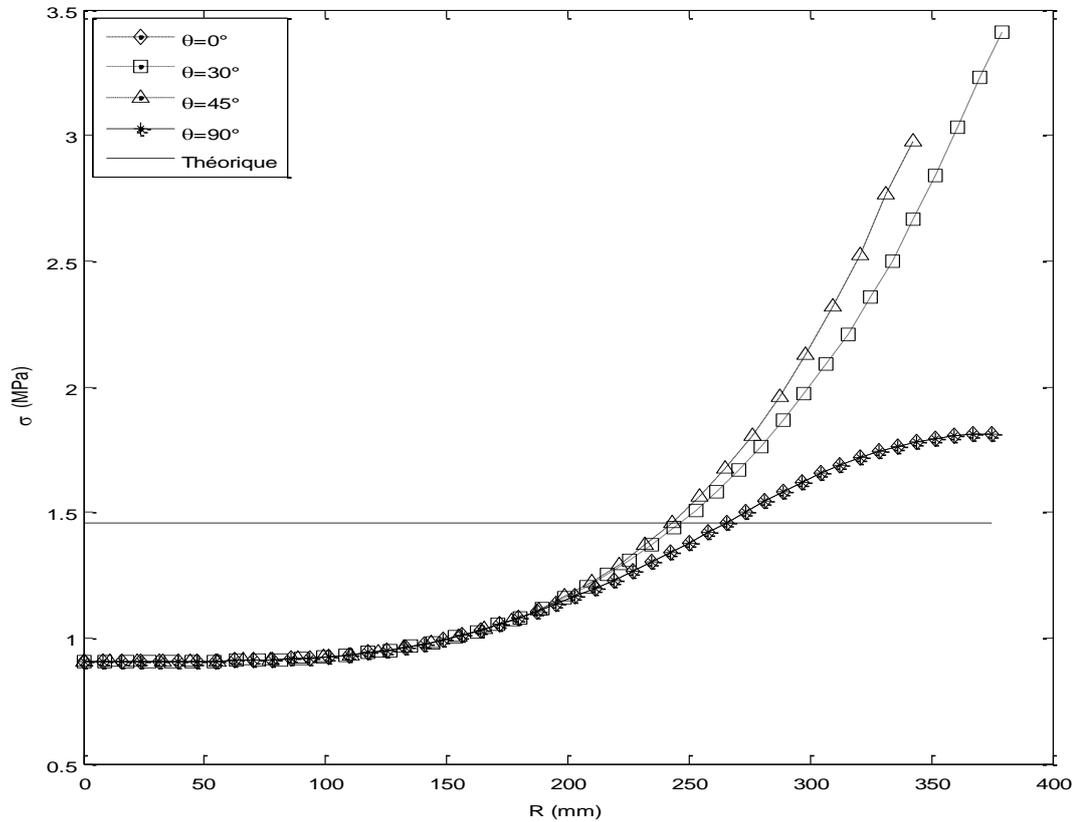


Figure III.35 : Variation des contraintes de Von Mises en fonction du rayon (pour les quatres trajectoires).

Soit $\Delta\sigma_\theta(R) = \sigma_c - \sigma_\theta(R)$ où σ_c est la valeur de la contrainte au centre de l'éprouvette, et $\sigma_\theta(R)$ est la valeur de la contrainte évaluée numériquement en un point quelconque suivant la direction θ .

Evaluons la différence relative définie par : $Y_\theta(R) = \left| \frac{\Delta\sigma_\theta(R)}{\sigma_c} \right| = \left| \frac{\sigma_c - \sigma_\theta(R)}{\sigma_c} \right|$,

Les tracés des courbes $Y_\theta(R)$ sont illustrés sur les figures (III.36 (a, b)).

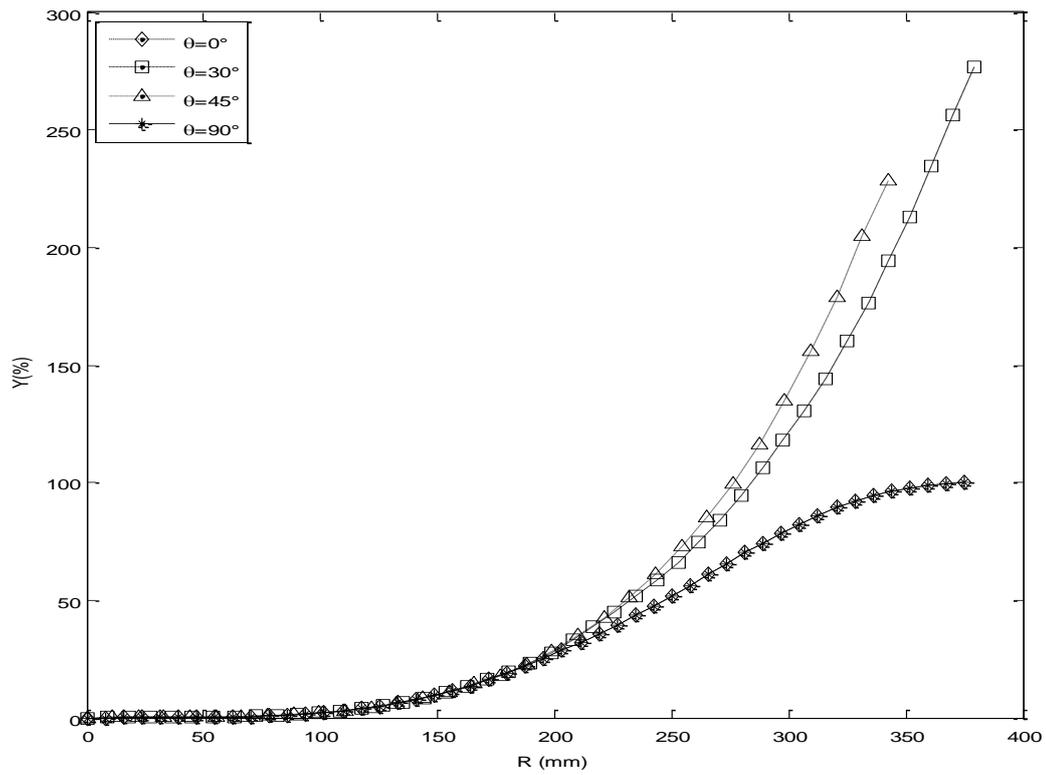


Figure III.36a : Différence relative Y en fonction du rayon (échelle linéaire)
(pour les quatres trajectoires).

Il est clair que la distribution des contraintes est uniforme dans la zone centrale, ($R < 100$ mm pour le cas étudié).

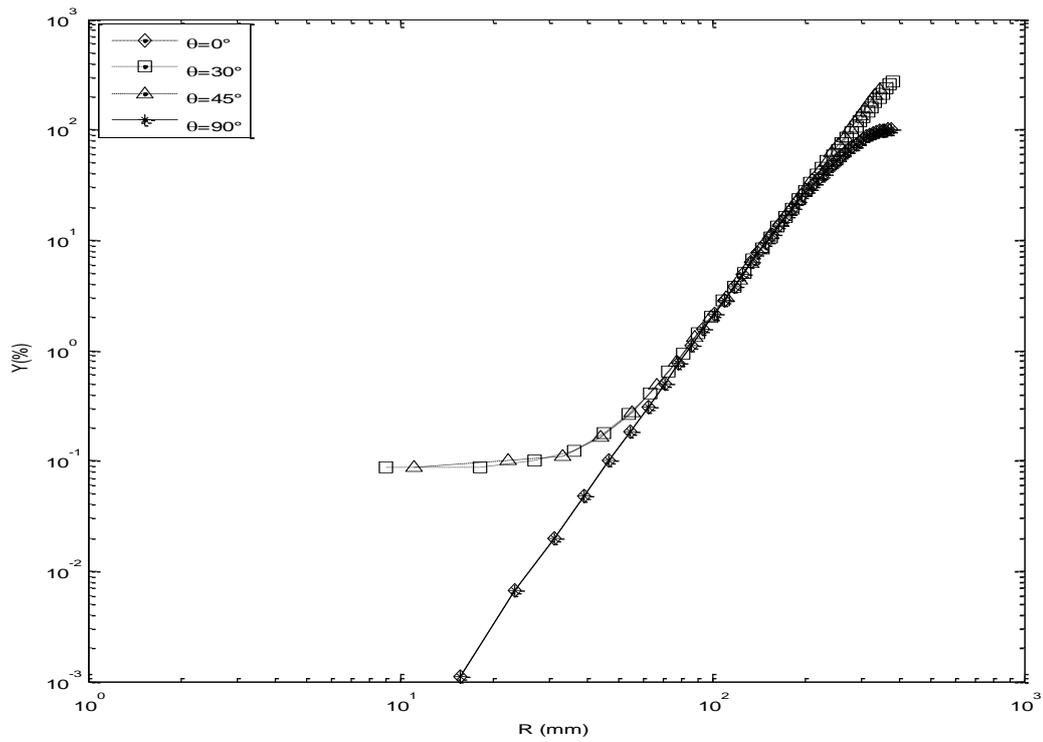


Figure III.36b : Différence relative Y en fonction du rayon (échelle logarithmique)
(pour les quatres trajectoires).

L'hétérogénéité de la distribution des contraintes devient plus forte en s'éloignant du centre de l'éprouvette.

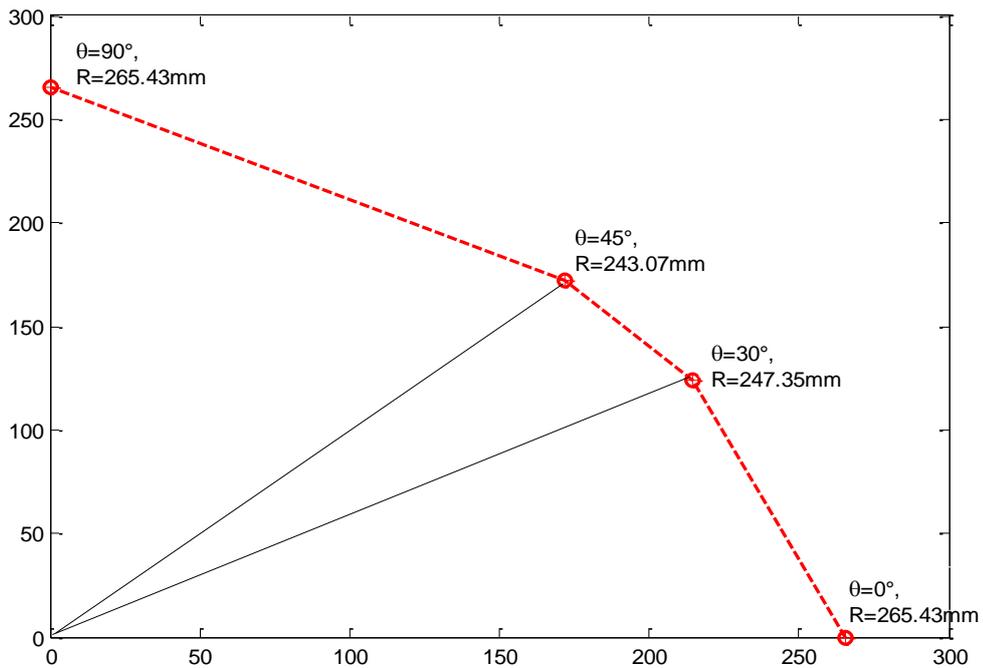


Figure.III.37a : Localisation de la contrainte théorique pour les différentes orientations ($\lambda_T = 2$).

On constate que les points géométriques où les contraintes numériques égales à la contrainte théorique décrivent presque un cercle de rayon $R=265.43\text{mm}$.

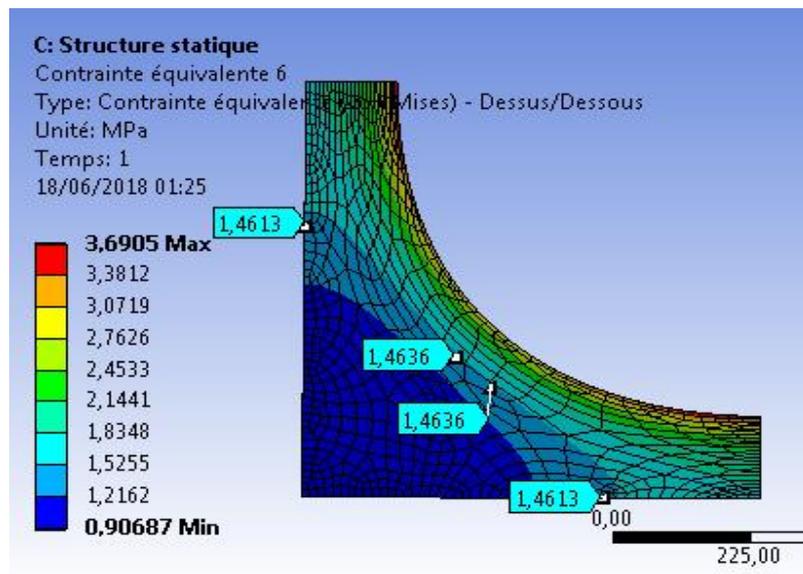


Figure III. 37b : Localisation de la contrainte théorique pour différentes orientations ($\lambda_T = 2$).

III.3.3 Détermination analytique du champ de déformations pour une orientation à 45° et pour un rayon $\rho = L/2$

Cherchons la distribution des déformations pour un rayon $\rho = L/2$ (voir Fig. III .38).

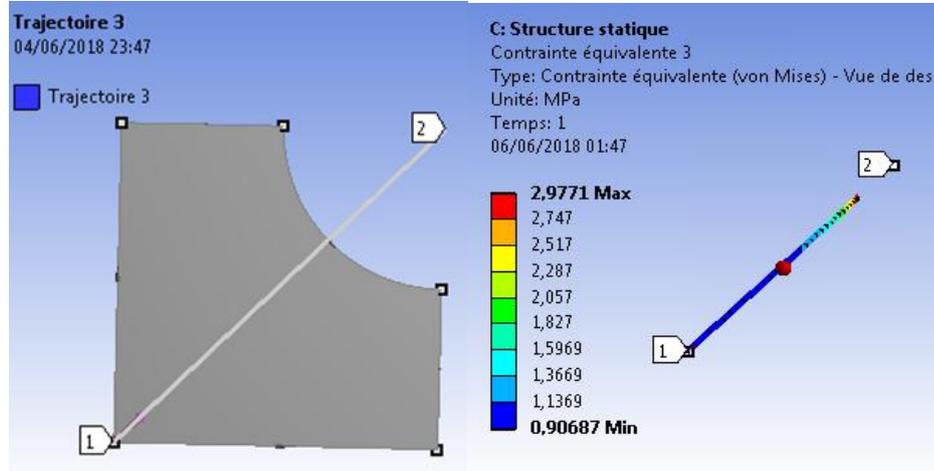


Figure III.38 : Distribution des contraintes de Von Mises le long de la trajectoire à $\theta = 45^\circ$

Le tenseur de déformation de Green Lagrange est défini par :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I})$$

Où $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$ est le tenseur de Cauchy Green droit.

Dans le cas de la traction équilibaxiale, on a :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \lambda^2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-4} - 1 \end{pmatrix}$$

Soit : $E_{11} = E_{22} = \frac{1}{2}(\lambda^2 - 1)$ et $E_{33} = \frac{1}{2}(\lambda^{-4} - 1)$

Les résultats de la simulation numérique pour un déplacement $U = L_0$ et pour une orientation à 45° donnent les contraintes de Von Mises en fonction de R (Voir Fig. III .39).

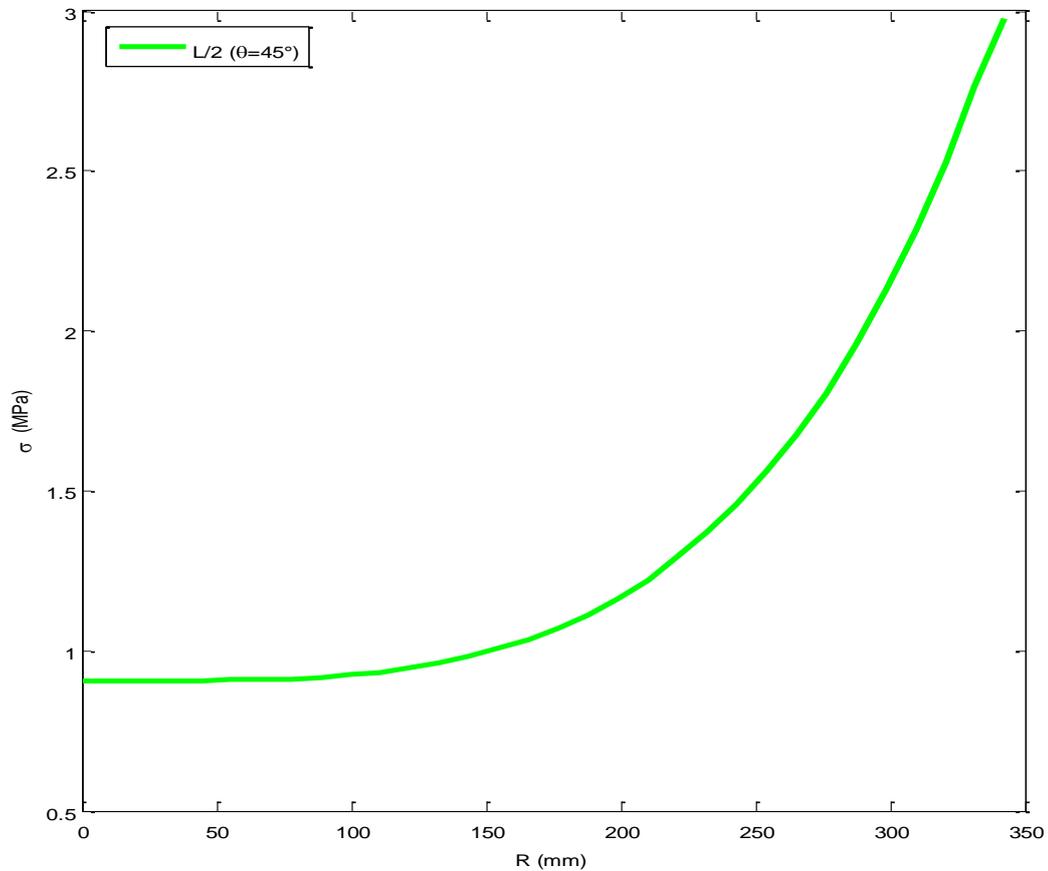


Figure.III.39 : Distribution des contraintes de Von Mises pour un déplacement $U = L_0$, soit

$$\lambda_T = 2.$$

La contrainte théorique est : $\sigma_T = 1.46 MPa$, et la valeur de R pour laquelle $\sigma_T = \sigma_{Num}$ est égale à $R = 243.07 mm$.

On constate que la variation des contraintes devient plus importante pour les très grandes valeurs de R .

La distribution des contraintes dans la zone centrale est uniforme (pour $R \leq 100mm$).

La contrainte de Cauchy est définie par $\sigma = 2(c_{10} + c_{01}\lambda^2)(\lambda^2 - \lambda^{-4})$

On peut déduire à partir de cette relation et du graphe de σ en fonction de R , on peut tracer la courbe donnant la variation de λ en fonction de R .

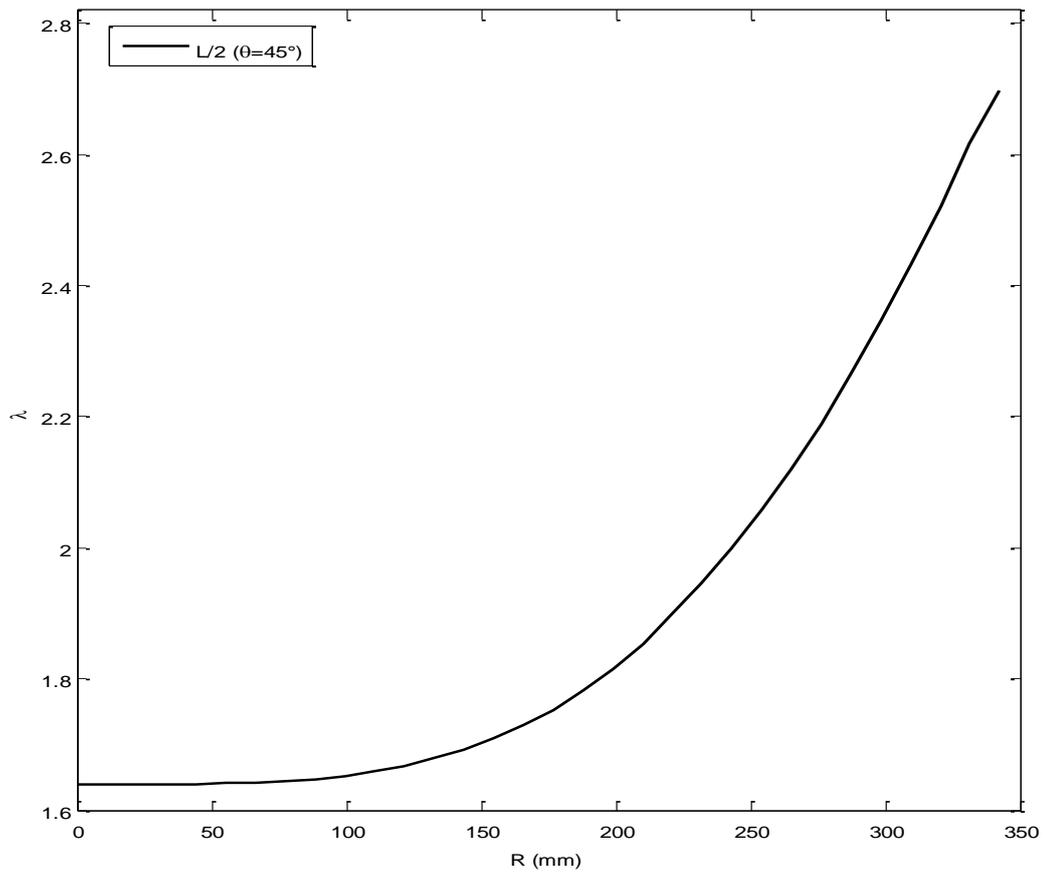


Figure. III.40 : Variation de λ en fonction de R ($\lambda_T = 2$).

Les variations des déformations en fonction de R sont illustrées sur les figures suivantes.

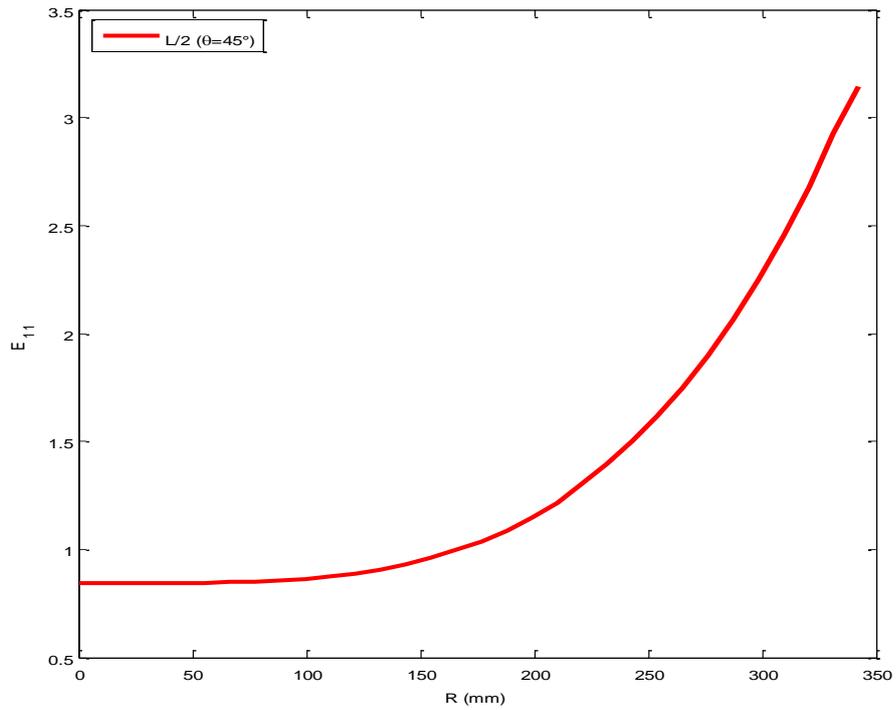


Figure.III.41 : Variation de E_{11} en fonction de R ($\lambda_T = 2$).

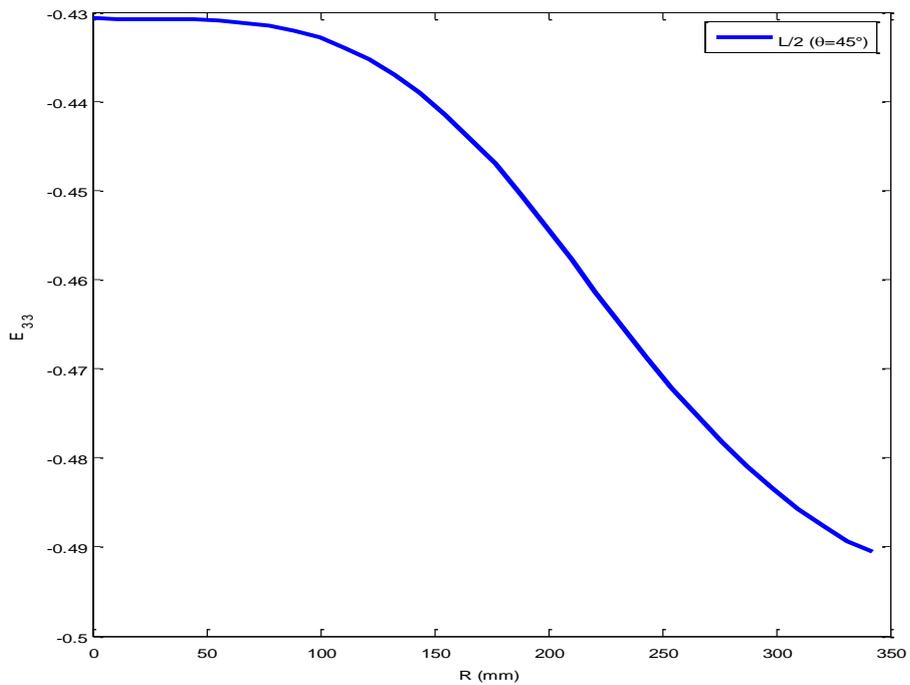


Figure.III.42 : Variation de E_{33} en fonction de R ($\lambda_T = 2$).

La distribution des déformations dans la zone centrale est uniforme (pour $R \leq 100\text{mm}$).

En s'éloignant du centre de l'éprouvette, on constate une variation importante des déformations suivant les directions x et y , (On a : $E_{11} = E_{22}$), tandis que la variation de E_{33} est faible.

L'élongation varie d'un point à un autre dans la surface de l'éprouvette, et par conséquent la distribution des déformations est hétérogène. Cette hétérogénéité est due à la modification de la géométrie (variation de la section) dans l'éprouvette utilisée pour l'essai de la traction équibiaxiale.

Conclusion

Les résultats de la simulation numérique des essais de traction uni-axiale et de traction équibiaxiale sont en bons accords avec les résultats théoriques dans le cas où l'éprouvette simulée est de section constante. La variation de la géométrie entraîne une hétérogénéité du champ de déplacement, et par conséquent des hétérogénéités des champs des déformations et des contraintes.

Nous avons montré que les champs des contraintes et des déformations dans la zone centrale ne dépendent pas de R . Le rayon de délimitation de cette zone est lié aux dimensions de l'éprouvette, et plus particulièrement au rapport $\frac{p}{L}$.

Le choix d'une éprouvette de section constante est nécessaire afin de pouvoir comparer entre les résultats théoriques et les résultats de la simulation numérique.

Conclusion générale

Conclusion générale

Plusieurs modèles hyperélastiques ont été développés dans la littérature, certains se basent sur une approche phénoménologique d'autres sont physiques. Dans notre étude, nous avons utilisé le modèle Mooney Rivlin incompressible.

Les paramètres matériels du modèle Mooney Rivlin ont été identifiés en utilisant les données expérimentales de l'essai de traction uni-axiale.

Cependant, les valeurs numériques de ces paramètres ne peuvent pas reproduire le comportement multiaxial, notamment la traction équibiaxiale.

L'étude numérique utilisée dans un code éléments finis 2D montre que les champs des déformations et des contraintes varient du centre au bord de l'éprouvette. Les distributions des champs des contraintes et des déformations sont hétérogènes sauf dans la zone centrale. On montre aussi qu'il existe un lien entre les dimensions de l'éprouvette et le rayon définissant la zone centrale.

Bibliographie

Bibliographie

- [1] : Erwan.Verron. Modélisation du comportement des structures et des matériaux élastomères, 2003, thèse de doctorat, Université de Nantes.
- [2] : Patricia. Saad. Modélisation et identification du comportement non linéaire des cales, 2003, thèse de doctorat, l'école centrale de Lyon.
- [3] : Ida. Raoult : structures élastomères sous chargement cyclique : comportement- fatigue- durée de vie, 2005, thèse de doctorat de l'école polytechnique, France pages.
- [4] : S.Bouzidi. Modélisation micromécanique du comportement hyperélastique des élastomères composite, 2006, thèse magister, université de Bejaia.
- [5] : A. Brahmi et S.Idir. Analyse des contraintes dans un tube épais hyperélastique et isotrope, 2014, université de Bejaia.
- [6] : Adel.Zine. Fatigue multiaxiale des élastomères vers un critère de dimensionnement unifié, 2006, thèse de doctorat, université de Lille.
- [7] : Adnane.Boukamel. Modélisation mécanique et numérique des matériaux et structures en élastomères. Mécanique [physico-Med-ph], 2006, mémoire d'habilitation a dirigé des recherches, université de Méditerranée-AIX-Marseille II.
- [8]: G.Marckman, and E.Verron, comparaison of hyperélastique models for rabberilike materials.

Annexes

I. Contrainte équivalente (Von Mises)

Trajectoire 1 : angle 0° pour un rayon égal à L/2 et une elongation égale à 2

Rayon (mm)	Contrainte équivalente Von Mises (MPa)
0	0,90687
7,8125	0,90687
15,625	0,90688
23,438	0,90693
31,25	0,90705
39,063	0,90731
46,875	0,90777
54,688	0,90852
62,5	0,90968
70,313	0,91139
78,125	0,91376
85,938	0,91696
93,75	0,9211
101,56	0,92625
109,38	0,93284
117,19	0,94129
125	0,95145
132,81	0,96333
140,63	0,9768
148,44	0,99189
156,25	1,0089
164,06	1,0295
171,88	1,0536
179,69	1,0788
187,5	1,1061
195,31	1,1363
203,13	1,1671
210,94	1,1969
218,75	1,229
226,56	1,2652
234,38	1,3029
242,19	1,339
250	1,3763
257,81	1,4181
265,63	1,4607
273,44	1,5023
281,25	1,5425
289,06	1,581
296,88	1,6185
304,69	1,6544
312,5	1,6869
320,31	1,7164
328,13	1,7419
335,94	1,7632
343,75	1,7807

Annexe

351,56	1,7941
359,38	1,8041
367,19	1,8106
375	1,8129

Tableau 1 : Variation des contraintes équivalentes Von-Mises de trajectoire 1.

Trajectoire 2 : angle 30° pour un rayon égal à $L/2$ et une élongation égale à 2

Rayon (mm)	Contrainte Von Mises (MPa)
0	0,906
9,021	0,9068
18,042	0,9068
27,063	0,9069
36,084	0,9071
45,105	0,9076
54,126	0,9084
63,147	0,9097
72,168	0,9118
81,189	0,9145
90,21	0,9188
99,231	0,9242
108,25	0,9314
117,27	0,9404
126,29	0,9518
135,32	0,9658
144,34	0,9826
153,36	1,0022
162,38	1,0248
171,4	1,0523
180,42	1,0813
189,44	1,1186
198,46	1,1572
207,48	1,2044
216,5	1,2561
225,53	1,3119
234,55	1,3725
243,57	1,4364
252,59	1,506
261,61	1,5816
270,63	1,6696
279,65	1,7622
288,67	1,8676
297,69	1,9751
306,72	2,0895

315,74	2,209
324,76	2,3566
333,78	2,5011
342,8	2,6647
351,82	2,8371
360,84	3,0298
369,86	3,2274
378,88	3,412

Tableau 2 : Variation des contraintes équivalentes Von-Mises de trajectoire 2.

Trajectoire 3 : angle 45° pour un rayon égal à L/2 et une élongation égale à 2

Rayon (mm)	Contrainte équivalente Von Mises (MPa)
0	0.906
11,049	0.9068
22,097	0.9069
33.146	0.907
44.194	0.9075
55.243	0.9085
66.291	0.9104
77.34	0.9132
88.388	0.9178
99.437	0.9243
110.49	0.9334
121.53	0.9452
132.58	0.9611
143.63	0.98091
154.68	1.0068
165.73	1.0359
176.78	1.0682
187.83	1.1129
198.87	1.164
209.92	1.222
220.97	1.2917
232.02	1.3706
243.07	1.4605
254.12	1.5632
265.17	1.6759
276.21	1.8064
287.26	1.9596
298.31	2.1292
309.36	2.3176
320.41	2.5262
331.46	2.7632
342.5	2.9771

Tableau 3 : Variation des contraintes équivalentes Von-Mises de trajectoire 3.

Trajectoire 4 : angle 90° pour un rayon égal à L/2 et une élongation égale à 2

Rayon (mm)	Contrainte équivalente Von Mises (MPa)
0	0,90687
7,8125	0,90687
15,625	0,90688
23,438	0,90693
31,25	0,90705
39,063	0,90731
46,875	0,90777
54,688	0,90852
62,5	0,90968
70,313	0,91139
78,125	0,91376
85,938	0,91696
93,75	0,9211
101,56	0,92625
109,38	0,93284
117,19	0,94129
125	0,95145
132,81	0,96333
140,63	0,9768
148,44	0,99189
156,25	1,0089
164,06	1,0295
171,88	1,0536
179,69	1,0788
187,5	1,1061
195,31	1,1363
203,13	1,1671
210,94	1,1969
218,75	1,229
226,56	1,2652
234,38	1,3029
242,19	1,339
250	1,3763
257,81	1,4181
265,63	1,4607
273,44	1,5023
281,25	1,5425
289,06	1,581
296,88	1,6185
304,69	1,6544
312,5	1,6869
320,31	1,7164
328,13	1,7419
335,94	1,7632
343,75	1,7807

Annexe

351,56	1,7941
359,38	1,8041
367,19	1,8106
375	1,8129

Tableau 4 : Variation des contraintes équivalentes Von-Mises de trajectoire 4.

Résumé

Le travail concerne la simulation numérique de l'essai de la traction équi biaxiale des matériaux hyper élastiques. Nous avons montré que les champs des contraintes et des déformations varient du centre au bord de l'éprouvette cruciforme utilisée pour les essais de la traction biaxiale. Dans la zone centrale de l'éprouvette, les distributions des contraintes et des déformations sont homogènes, et elle décrit un cercle de rayon qui varie avec les dimensions de l'éprouvette.

Abstract

The work concerns the numerical simulation of the equi-axial tensile test of hyper elastic materials. We have shown that stress and strain fields vary from center to edge of cruciform test specimen used for biaxial tensile tests. In the central zone of the specimen, the stress and strain distributions are homogeneous, and it describes a circle of radius that varies with the dimensions of the specimen.