**République Algérienne Démocratique et Populaire**
**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique**

**Université A/Mira de Béjaia**
**Faculté des Sciences Exactes**
**Département de Mathématiques**

*MÉMOIRE DE MASTER*

**En**
**Mathématiques**

**Option**

*Analyse Mathématiques*

# Thème

# Systèmes dynamiques définis sur un espace de Cantor.

**Présenté par : Mr. SAADA Smail**

**Soutenu le 07 Juillet 2019 devant le jury composé de :**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Mme. | S. Tas | Pr | Université A. Mira de Béjaia | Président |
| Mr. | R.Chemlal | MCB | Université A. Mira de Béjaia | Promoteur |
| Mr. | S. Khoufache | MAA | Université A. Mira de Béjaia | Examinateur |

Béjaia, Juillet 2019.

# ⁜ *Remerciements* ⁜

Dieu merci pour la santé, la volonté et le courage qui m'ont accompagnés durant le cursus universitaire afin de réaliser ce modeste travail.

Je tiens à exprimer mes vifs remerciements et ma sincère gratitude à :

Aux membres du jury d'avoir accepté d'examiner ce travail.

A mon encadreur Mr Rezki Chemlal pour son suivi, ses conseils sa disponibilité et sa patience. Je lui témoigne ici toute ma reconnaissance.

À Mr AISSAOUI, le Chef du Département de Mathématiques.

Mes remerciements à toute ma famille .

A tous ceux qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce modeste travail.

## ⁜ *Dédicaces* ⁜

Dieu avec tout mon amour, je dédie ce modeste travail :
À mes chers parents.
À mes chers soeurs et frères.
Et à mes amis , collègues et tous ceux qui m'ont aidé.

# Table des matières

# *Introduction*

Un système dynamique discret est définis par la donnée d'un espace métrique compact et d'une application continue de cet espace dans lui même.

Ce mémoire est consacré à l'étude des systèmes dynamiques définis sur un espace de Cantor et en général tout espace homéomorphe à un espace de Cantor.

La propriétés topologiques particulières de ces espaces influent sur les propriétés des systèmes dynamiques définis sur ces derniers.

Le premier chapitre est consacré au rappel des définitions et résultats de bases sur les systèmes dynamiques.

Le deuxième chapitre est consacré aux propriétés topologiques des espaces de Cantor et des espaces symboliques qui ont pour éléments les suites définies sur un ensemble fini.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude des propriétés des systèmes dynamiques définis sur un Cantor. Nous montrerons à travers des exemples comment reconnaitre l'existence de points d'équicontinuités ainsi que la caractérisation de la sensibilité aux conditions initiales.

# Chapitre 1

# Introduction aux systèmes dynamiques discrets

## 1.1 Généralités

Un système dynamique discret est un couple (X, F) .

Le premier élément X est un espace métrique compact. L'ensemble X est dit espace de phases.

Le second élément f est une application continue vérifiant $f(X) \subset X$

Pour $n \in \mathbb{N}$ on définit l'itéré $f^n = \underbrace{f \circ ........ \circ f}_{n}$ on note $Id = f^0$ Comme $f^{n+m} = f^n \circ f^m$

Les itérés de f forment un groupe si f est inversible et un semi-groupe dans le cas contraire.

## 1.2 Points fixes et points périodiques

**Définition 1.2.1.** *L'ensemble $\{f^k(x), k \geq 0\}$ des itérés positifs de $x$ est dit orbite de $x$ et on note $\theta(x)$*

**Définition 1.2.2.** *1- Un point $x \in X$ est un point fixe si $f(x) = x$.*

*2- Un point $x$ est périodique s'il existe $k \in N$ tel que $f^k(x) = x$ . Le plus petit entier vérifiant cette propriété est nommé période de $x$*

*3- Soit $x$ un point périodique de période $k$. L'ensemble $\{f^i(x), 0 \leq i \leq k\}$ est appelé un cycle d'ordre $k$*

*4- Un point $x$ est dit ultimement périodique si $f^m(x)$ est périodique pour un certain $m \geq 0$*

## 1.3 Quelques systèmes dynamiques classiques

### 1.3.1 Les rotations :

La rotation d'angle $\theta_0 = 2i\pi$ correspond à effectuer successivement le produit par

$x_0 = exp(2i\pi\alpha)$ dans le cercle unite.

Soit $x = exp(2i\pi\theta)$ on alors $T_\alpha(x) = x_0 x = exp(2i\pi(\theta + \alpha)$

Comme la période de rotation est $2\pi$ on se contente par abus de langage de parler

De rotation d'angle $\alpha$.Une rotation R d'angle $\alpha \in [0, 1[$ est la fonction

définit sur[0, 1[ par :$R_\alpha(x) = (x + \alpha) \mod 1$

**Remarque 1.3.1.** *On peut démontrer par récurrence que : $R^n_\alpha(x) = (x + n\alpha) \mod 1$.*

**Proposition 1.3.1.** *Soit $R_\alpha$une rotation d'angle $\alpha$ on a alors :*
*1- Si $\alpha \in \mathbb{Q} \cap [0, 1[$ alors tous les points sont periodiques.*

*2- Si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \cap [0, 1[$ alors il n'existe aucun point périodique.*

*Démonstration.* 1- Si $\alpha \in \mathbb{Q} \cap [0, 1[$ alors il existe $(p, q) \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)$ tel que $\alpha = \dfrac{p}{q}$

avec $(p \wedge q) = 1$ (p et q premier entre eux).
En evaluant $f^q_\alpha(x)$ on obtient :$f^q_\alpha(x) = (x + q \times \dfrac{p}{q})mod1 = (x + p)mod1 = x$

Ainsi $x$ est un point périodique et sa période est un diviseur de q.

2- Si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \cap [0, 1[$ On raisonne par l'absurde. Supposons qu'il existe un

point périodique $x$ on alors : $\exists p \in \mathbb{N}, x = f^p_\alpha(x) = (x + \alpha \times p) \mod 1$

D'où on obtient :

$$(p \times \alpha) \mod 1 = 0 \Rightarrow \exists p \times \alpha = p^{'} \Rightarrow \alpha = \frac{p}{p^{'}}$$

$\square$

### 1.3.2 La fonction doublement de période

La fonction doublement de période est obtenue en élevant au carré sur le cercle unité.

Soit $x = exp(2i\pi\theta)$ en l'élevant au carré on obtient $x^2 = exp(2i\pi(2\theta))$. Comme la période de rotation est $2\pi$ on définit alors la fonction B par :

$\forall x \in [0, 1[ : B(x) = 2x \mod 1 \Longrightarrow$

$$B(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}[ \\ 2x - 1 & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1[ \end{cases}$$

**Remarque 1.3.2.** [1]
*On peut démontrer par récurrence que :* $B^n(x) = 2^n x \mod 1$.

#### Points périodique de la fonction doublement de période

Nous allons chercher les points périodiques de la fonction doublement de période Pour trouver.

Analytiquement les points périodiques nous allons d'abord effectuer un développement En base 2.

$$x \in \left[0, \frac{1}{2}\right[ \Rightarrow x = \sum_{2}^{\infty} \frac{a_i}{2^i} \Rightarrow f(x) = 2\sum_{2}^{\infty} \frac{a_i}{2^i} = \sum_{2}^{\infty} \frac{a_i}{2^{i-1}} = \sum_{1}^{\infty} \frac{a_{i+1}}{2^i}$$

$x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[ \Rightarrow x = \sum_1^\infty \frac{a_i}{2^i}$ ou $a_1 = 1$.

$$\Rightarrow f(x) = 2\sum_{1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i} - 1 = \sum_{1}^{\infty} \frac{a_i}{2^{i-1}} - 1 = \sum_{0}^{\infty} \frac{a_{i+1}}{2^i} - 1 = \sum_{1}^{\infty} \frac{a_{i+1}}{2^i}$$

1. Dite aussi récurrence de Baker dans certains ouvrages.

**Points fixes**

- On commence par chercher les points fixes dans l'intervalle $[0, \frac{1}{2}[$

  Resoudre l'equation $x = f(x)$ revient a resoudre $\sum_2^\infty \frac{a_i}{2^i} = \sum_1^\infty \frac{a_{i+1}}{2^i}$cette equation possède une solution dans le cas où

  $\forall i : a_i = 0$ d'où on a un point fixe $x = 0$.
- On cherche les points fixes dans l'intervalle $[\frac{1}{2}, 1[$

  Résoudre l'équation $x = f(x)$ revient à résoudre $\sum_2^\infty \frac{a_i}{2^i} = \sum_1^\infty \frac{a_{i+1}}{2^i}$ avec $a_1 = 1$ cette équation possède une solution dans le cas où

  $\forall i : a_i = 1$ d'où on a un point fixe $x = 1$.

**Cycles de périodes 2**

Les points périodiques de période 2 vérifient l'équation $f^2(x) = x$.De plus si $x \in [0, \frac{1}{2}[$ alour $f(x) \in [\frac{1}{2}, 1[$ et vis versa.

Ainsi il suffit de chercher les points $x \in [\frac{1}{2}, 1[$qui vérifient l'équation $f^2(x) = x$.

Les développements périodiques de période 2 dans la base 2 s'écrivent sous la forme suivante : $x = \sum_1^\infty \frac{a_i}{2^i}$

*Démonstration.* $B(x) = 2x \mod 1 = \sum_1^\infty \frac{a_i}{2^{i-1}} = \frac{a_1}{2^0} + \underbrace{\sum_2^\infty \frac{a_i}{2^{i-1}}}_{n<1} = \sum_2^\infty \frac{a_i}{2^{i-1}}$

$$B^2(x) = \left(2 \sum_2^\infty \frac{a_i}{2^{i-1}}\right) \mod 1 = \sum_2^\infty \frac{a_i}{2^{i-2}} \mod 1 = \frac{a_2}{2^0} + \underbrace{\sum_3^\infty \frac{a_i}{2^{i-2}}}_{n<1} = \sum_3^\infty \frac{a_i}{2^{i-2}}$$

$$B^2(x) = x \Leftrightarrow \sum_3^\infty \frac{a_i}{2^{i-2}} = \sum_1^\infty \frac{a_i}{2^i}$$

**(*)** On peut résumer l'identification dans le tableau ci dessuons

| $x$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | $a_6$ | $a_7$ | $a_8$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $B^2(x)$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | $a_6$ | $a_7$ | $a_8$ | $a_9$ | $a_{10}$ |

D'où $a_2 = a_4 = a_6 = a_8 ....... = 1, a_{2i+1} = 0 \Rightarrow x_3 = \sum_1^\infty \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{3}$

$$a_1 = a_3 = a_5 = a_7 ......... = 1, a_{2i+1} = 0 \Rightarrow x_4 = \frac{1}{2}\sum_0^\infty \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{2}{3}$$

Nous avons donc retrouvé les deux points fixes et deux autres points.

Si on remplace dans la fonction on constate que $f(x_3) = f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} = x_4$ et $f(x_4) = f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3} = x_3$

$\square$

Le graphe ci dessous permet de confirmer géométriquement nos résultats.En rouge : Graphe de la fonction où les discontinuités sont reliés.En vert : Première bissectrice

Ainsi $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$ sont deux points priodiques de fonction doublement de période

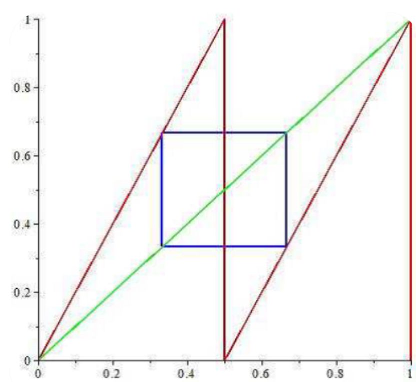


FIGURE 1.1 – Cycle de période 2 pour la fonction de Baker .

### Cycles de périodes p

D'une façon générale tout point avec développement binaire périodiques de pèriode p est un point périodiques de période p pour la fonction de Baker Ainsi on conclut que les points periodiques sont les rationnels de [0, 1] et les points non periodiques sont les irrationnels de $[0, 1]$

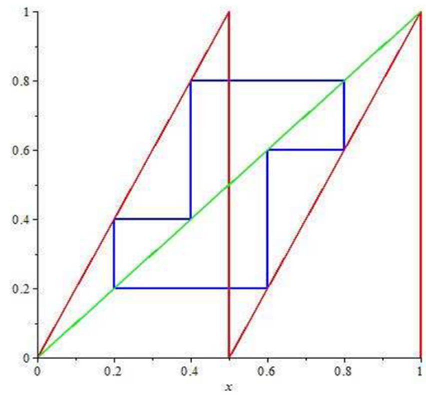


FIGURE 1.2 – Cycle de période 4 pour la fonction de Baker 0.2, 0.4, 0.8, 0.6.

### 1.3.3 Stabilité au sens de Lyapunov

**Définition 1.3.1.** *Soit $(X, f)$ un système dynamique*

*1- Un point fixe $x \in X$ est stable si $\forall \varepsilon > 0$ , $\exists \delta > 0$ $\forall y \in B_\delta(x)$ $\forall n \geq 0$ $d(f^n(y), x) < \varepsilon$*

*2- Un point fixe $x \in X$ est attractif s'il vérifie :*

$$\exists \delta > 0, \forall y \in B_\delta(x), \lim_{n\to\infty} d(f^n(y), x) = 0$$

*3- Un point fixe est asymptotiquement stable s'il est stable et attractif.*

*4- Un point fixe est instable s'il n'est pas stable.*

**Remarque 1.3.3.** *Un cycle d'ordre $k$ est dit stable (reps attractif, asymptotiquement stable) si l'un de ses points est stable (reps Attractif, asymptotiquement stable) en tant que point fixe de l'application $f^k$*

## 1.4 Critères de stabilité des SDD sur l'intervalle.

### 1.4.1 Stabilité des points fixes

**Proposition 1.4.1.** *Soit $x_{n+1} = f(x_n)$une récurrence admettant un point fixe $x^*$ Si $f$ est Dérivable on a alors :*

*1- Si $|f^{'}(x^*)| < 1$ alors $x^*$ est un point fixe attractif.*

*2- Si $|f^{'}(x^*)| > 1$ alors $x^*$ est un point fixe instabal*

*Démonstration.* En effectuant un développement de Taylor au voisinage du point fixe on obtient :

Soit $y \in V(x^*)$

$$f(y) = f(x^*) + (y - x^*)f^{'}(x^*)$$

$$f(y) - f(x^*) = (y - x^*)f^{'}(x^*)$$

D'après développement de Taylor et $y \in V(x^*)$ on a :

$$f^n(y) - f(x^*) = (f^{'}(x^*))^n(y - x^*)$$

$$f^n(y) - x^* = (f^{'}(x^*))^n(y - x^*)$$

**1-** Pour $|f^{'}(x^*)| < 1$

On a :$\left(f^{'}(x^*)\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors $\left(f^{'}(x^*)\right)^n (y - x^*) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (car $\exists\delta > 0$, $(y - x^*) < \delta < +\infty$)

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} |f^n(y) - x^*| = \lim\limits_{n\to+\infty} |f^{'}(x^*)|^n.|y - x^*| = 0$ D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} |f^n(y) - x^*| = 0$

Alors $x^*$ est point fixe attractif.

**2-** Pour $|f^{'}(x^*)| > 1$

On a :$\left(f^{'}(x^*)\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \infty$ alors $\left(f^{'}(x^*)\right)^n (y - x^*) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ (car $\exists\delta > 0$, $(y - x^*) < \delta < +\infty$)

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} |f^n(y) - x^*| = \lim\limits_{n\to+\infty} |f^{'}(x^*)|^n.|y - x^*| = +\infty$ D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} |f^n(y) - x^*| = +\infty$

Alors $x^*$ est point fixe instable.

□

**Définition 1.4.1.** *Un point fixe $x^*$ de la récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$ est semi-stable a droite*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, 0 < x_0 - x^* < \delta \Rightarrow \forall n > 0, x_n - x^* < \varepsilon$$

*Si en plus on a :*

$$\exists \delta > 0, 0 < x_0 - x^* < \delta \Rightarrow \forall n > 0 \lim_{n\to\infty} x_n = x^*$$

*Le point est dit semi asymptotiquement stable à droite. On définit d'une façon similaire la semi-stabilité à gauche et la semi-stabilité asymptotique à gauche.*

**Proposition 1.4.2.** *Soit $x_{n+1} = f(x_n)$une récurrence admettant un point fixe $x^*$ On suppose que $f \in C^{n+1}(I)$*

*Si $f^{'}(x) = 1$ on considère la première n-éme dérivée non nulle en $x^*$qu'on notera $f^n(x) \neq 0$ on a alors :*

*1-i) Si n est impair et $f^{(n)}(x) < 0$ alors $x^*$ est asymptotiquement stable.*

*ii) Si n est impair et $f^{(n)}(x) > 0$ alors $x^*$ est instable.*

*2 Si n est pair alors $x^*$est instable. Le point fixe sera :*

*i) Semi stable a droite si $f^{(n)}(x^*) < 0$.*

*ii) Semi stable a gauche si $f^{(n)}(x^*) > 0$.*

*Démonstration.* En effectuant un développement de Taylor au voisinage du point fixe on obtient

$$x_{n+1} - r = f(x_n) - f(r) = f^{'}(r)(x_n - y) + \frac{f^{(n)}(r)}{n!}(x_n - r)^n + R$$

$$\simeq (x_n - r) + \frac{f^{(n)}(r)}{n!}(x_n - r)^n \Rightarrow \frac{(x_{n+1} - r)}{(x_n - r)} = 1 + \frac{f^{(n)}(r)}{n!}(x_n - r)^{n-1}$$

**1 i** Si n est impair alors on a n - 1 est pair d'où $(x_n - r)^{n-1} > 0$.

Considérons le cas $f^n(x) < 0$ et soit r un point initial tel que$|\frac{f^{(n)}(r)}{n!}(x_n - r)^{n-1}| < 1$

on a alors :

$$\begin{cases} 0 < \frac{f^{(n)}(r)}{n!}(x_n - r)^{n-1} < 1 \Rightarrow \frac{(x_1 - r)}{(x_0 - r)} < 1 \\ 1 + \frac{f^{(n)}(r)}{n!}(x_n - r)^{n-1} \Rightarrow \frac{(x_n - r)}{(x_{n-1} - r)} < 1 \end{cases}$$

On constate que $(x_n - r)$ et $(x_{n-1} - r)$ sont de même signe. Par consequent si r commence a droite de x. les itères $x_n$ seront également a droite de r et si $x_0$ commence a gauche de r les itères $x_n$ seront également a gauche de r

**a)** Supposons a présent que $x_0$ est a droite de r

$$\begin{cases} 0 < (x_0 - r) \text{ et } 0 < \frac{(x_1 - r)}{(x_0 - r)} < 1 \\ 0 < (x_n - r) \text{ et } 0 < \frac{(x_n - r)}{(x_{n-1} - r)} < 1 \Rightarrow 0 < (x_n - r) < (x_{n-1} - r) \end{cases}$$

On déduit donc que la suite $x_n$ est décroissante et minorée par r Elle est par conséquent

Convergente et converge vers le point fixe r On démontre ainsi que le point fixe est attractif.

De plus comme la suite est décroissante il suffit de poser $\delta = \epsilon$ dans la définition de La stabilité pour montrer que le point fixe est stable.

**b)** Supposons a présent que $x_0$ est a gauche de r

$$\begin{cases} (x_0 - r) < 0 \text{ et } 0 < \frac{(x_1 - r)}{(x_0 - r)} < 1 \Rightarrow (x_0 - r) < (x_1 - r) < 0 \\ 0 < (x_{n-1} - r) \text{ et } 0 < \frac{(x_n - r)}{(x_{n-1} - r)} < 1 \Rightarrow 0 < (x_{n-1} - r) < (x_n - r) < 0 \end{cases}$$

On deduit donc que la suite $x_n$ est croissante et majorée par r Elle est par conséquent convergente et converge vers le point fixe r On démontre ainsi que le point fixe est attractif.

De plus comme la suite est croissante il suffit de poser $\delta = \epsilon^2$ dans la définition de

la stabilité pour montrer que le point fixe est stable.

**2 ii)** Considérons le cas $f^{(n)}(r) > 0$

$$1 + \frac{f^{(n)}(r)}{n!}(x_0 - r)^{n-1} = C_0 > 1 \Rightarrow (x_1 - r) = C_0(x_0 - r)$$

$$1 + \frac{f^{(n)}(r)}{n!}(x_1 - r)^{n-1} = C_1 > 1 \Rightarrow (x_2 - r) = C_1(x_1 - r) = C_0C_1(x_0 - r)$$

Comme $(x_1 - r) > (x_0 - r)$ il s'ensuit que $C_1 > C_0$ d'ou : $x_2 - r > C_0^2(x_0 - r)$

On peut généraliser ensuite par récurrence pour obtenir :$x_n - r > C_0^n(x_0 - r)$ avec

$C_0 > 1$ d'où on conclut que le point fixe est instable

Le première dérivée non nulle d'ordre pair Notour par $x_n = f^n(x_0)$ et $x_{n+1} = f(x_n) = f^{n+1}(x_0)$

$$x_{n+1} - r = f(x_n) - f(r)$$

Par la développement de Taylor on obtient au V(r)

$$x_{n+1} = f(r) + f^{'}(r)(x_n - y) + \frac{f^{(m)}(r)}{n!}(x_n - r)^m - f(r)$$

En divisant par$(x_n - r)$

$$\frac{(x_{n+1}-r)}{(x_n-r)} = 1 + \frac{f^{(m)}}{m!}(x_n-r)^{m-1}$$

m pair $\Rightarrow m-1$ impair $f^{(m)}(r) > 0$.............$(*)$

Si $x_n$ est à droite de r l'expression (*) est de signe positif

$\frac{(x_{n+1}-r)}{(x_n-r)} > 1$ $(x_n estdroit (x_n-r) > 0)$

$\Rightarrow x_{n+1}-r > x_n-r$ donc $x_n$ est suite croissant donc $x_n$ un tendre par vers r

Si $x_n$ est à gauche :

On choisit les $x_0$ qui vérifient :

$$\left|\frac{(x_1-r)}{(x_0-r)}\right| < 1$$

Comme $x_0$ est à gauche de r alors $(x_0-r) < 0$

$\frac{(x_1-r)}{(x_0-r)}$ <1 alors $x_1-r$ également négatif

D'une façon général la suite $x_n$ est croissante et majorée par r

$\Rightarrow x_n$ est convergente

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = l \Rightarrow f(l) = l \Rightarrow l = r$$

$\square$

**Définition 1.4.2.** *La dérivée Schwarzienne Sf (x) de f (x) est la fonction*

$$Sf(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(x)}{f'(x)}\right)^2$$

**Proposition 1.4.3.** *Soit f une fonction 3 fois derivables et $x^*$ un point fixe de f (x) tel que $f'(x^*)$ = -1*

**i-** *Si Sf* $(x^*) < 0$ *alors x. est asymptotiquement stable.*

**ii-** *Si Sf* $(x^*) > 0$ *alors x. est instable.*

*Démonstration.* Soit $g(x) = f^2(x)$ alors $g(x^*) = f^2(x^*) = x^*$ De plus si $x^*$ est

asymptotiquement stable par rapport à f alors il est asymptotiquement stable par rapport à g. on a :

$g^{'}(x) = f^{'}(f(x)).f^{'}(x) \Rightarrow g^{'}(x^*){=}f^{'}(f(x^*)).f^{'}(x^*) = f^{'}(x^*).f^{'}(x^*) = (-1).(-1) = 1$

On calcule ensuite la dérivée seconde :

$$g^{''}(x) = f^{''}(f(x)).(f^{'}(x))^2 + f^{'}(f(x)).f^{''}(x)$$

$$\Rightarrow g^{''}(x^*) = f^{''}(f(x^*)).(f^{'}(x^*))^2 + f^{'}(f(x^*)).f^{''}(x^*) = 0$$

Comme la dérivée seconde est nulle on calcule la dérivée 3ème :

$$g^{'''}(x) = [f^{'''}(f(x)).(f^{'}(x))^3 + 2f^{''}(f(x)).f^{''}(x).f^{'}(x)]$$

$$+[f^{''}(f(x)).f^{''}(x).f^{'}(x) + f^{'}(f(x)).f^{'''}(x)]$$

En remplaçant par $x$ on obtient :

$$g^{'''}(x^*) = [f^{'''}(f(x^*)).(f^{'}(x^*))^3 + 2f^{''}(f(x^*)).f^{''}(x^*).f^{'}(x^*)]$$

$$+[f^{''}(f(x^*)).f^{''}(x^*).f^{'}(x^*) + f^{'}(f(x)).f^{'''}(x^*)]$$

$$\Rightarrow g^{'''}(x^*) = -f^{'''}(x^*) - 2(f^{''}(x^*))^2 - (f^{''}(x^*))^2 - f^{'''}(x^*)$$

$$\Rightarrow g^{'''}(x^*) = -2f^{'''}(x^*) - 3(f^{''}(x^*))^2 = 2Sf(x^*) car f^{'}(x^*) = -1$$

□

### 1.4.2 Stabilité des cycles

**Proposition 1.4.4.** *Soit* $\{f^i(x), 0 \leq i \leq k\}$ *un cycle d'ordre k d'une fonction continument différentiable alors on a :*

*1-* $|f^{'}(x_0).f^{'}(x_1).f^{'}(x_2)......f^{'}(x_{k-1})| < 1$ *alors le cycle d'ordre k est attractif.*

*2-* $|f^{'}(x_0).f^{'}(x_1).f^{'}(x_2)......f^{'}(x_{k-1})| > 1$*alors le cycle d'ordre k est instable*

*Démonstration.* Il suffit d'appliquer le critère de stabilité à la fonction $f^k$ et à $x_0$ considéré comme son point fixe.

$$(f^k)^{'}(x_0) = (f \circ f^{k-1})^{'}(x) = f^{'}(f^{k-1}(x_0))(f^{k-1})^{'} = f^{'}(x_{k-1}).f^{'}(f^{k-1})^{'}(x_0)$$

$$= ..... = f^{'}(x_{k-1}).f^{'}(x_{k-2})f^{'}(x_{k-3}).........f^{'}(x_1)f^{'}(x_0)$$

□

## 1.5 Bassin d'attraction des points fixes (cycles).

**Définition 1.5.1.** *Soit (X, f) un système dynamique. Un sous ensemble* $U \subset X$ *est dit*

*Invariant par f si on a* $f(U) \subset U$.

**Définition 1.5.2.** *Le bassin d'attraction d'un point fixe x est défini par :*

$$B(x^*) = \{x : \lim_{n\to\infty} f^n(x) = x^*\}$$

## 1.6 Attracteurs

La notion d'attracteur est une généralisation de la notion de point fixe attractif ou

De point périodique attractif introduite précédemment.

**Définition 1.6.1.** *La distance entre un point x et un ensemble Y est définie par d (x, Y )* $= inf d(x, y) : y \in Y$

*On définit en outre* $B_\delta(Y) = \{x \in X : d(x, Y) < \delta\}$.

**Définition 1.6.2.** *Soit (X,F) un système dynamique et* $Y \subseteq X$ *un sous ensemble non vide*

**1-** *Y est un attracteur si c'est un ferme non vide et invariant tel que pour chaque* $\epsilon > 0$ *il existe un* $\delta > 0$ *verifiant pour tout point* $x \in X$

$$d(x, Y) < \delta \forall n \geq 0, d(F^n(x), Y) < \epsilon \lim_{n \to \infty} d(F_n(x), Y) = 0$$

**2-** *Y est un attracteur minimal si tout ensemble* $Z \subset Y$ *n'est pas un attracteur.*

**3-** *Y est un quasi attracteur sil est l'intersection d'un ensemble dénombrable d'attracteurs mais pas un attracteur.*

**4-** *Le bassin d'attraction d'un attracteur Y est défini par B(x)=*$\{x \in X : \lim_{n \to \infty} d(F^n(x), Y) = 0\}$

## 1.7 Transitivité

**Définition 1.7.1.** *Soit (X,F) un système dynamique.*

*1 Un point* $x_0$ *est dit errant si et seulement si il existe un voisinage U de*

$x_0$ *et un ouvert V tel que pour tout n>0* $f^n(U) \cap V = \emptyset$

*2- Un point et non-errant s'il n'est pas errant autrement dit pour tout un*

*voisinage U de* $x_0$ *et un ouvert V tel que pour tout n>0* $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$

*3- On dit que le système (X,F) est transitif si tout ses points sont non errants*

*4- On dit que le point x est transitif si son orbite est dense dens X*

**Exemple 1.7.1.** *On va montrer que le system* $([0, 1[, R_{\frac{1}{3}})$ *n'est pas tronsitif*

*Soient* $u = \left]0, \frac{1}{6}\right[, \; v = \left]\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right[$

*on a :*$\forall n > 0 : F^n(u) \cap v = \emptyset$

$$\left]0, \frac{1}{6}\right[ : R_{\frac{1}{3}}\left(\left]0, \frac{1}{6}\right[\right) = \left]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right[$$

$$R_{\frac{1}{3}}\left(\left]\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right[\right)=\left]\frac{2}{3},\frac{5}{6}\right[$$

$$R_{\frac{1}{3}}\left(\left]\frac{2}{3},\frac{5}{6}\right[\right)=\left]0,\frac{1}{6}\right[$$

**Exemple 1.7.2.** *On va montrer que* $([0,1],B(x))$ *est tronsitif on a :*$B(x)=2xmod1$ *il suffit la preuve pour intervalle c-à-d :*

$\forall ]a,b[,]c,d[,\exists n>0\ B^n([a,b])\cap]c,d[\neq \emptyset$

$\forall x\in[a,b[\ \exists(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *avec* $\forall i\ \alpha_i\in\{0,1\}$ *tel que*

$$x=0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3.......\alpha_k.......$$

$\forall y\in]c,d[\ \exists(\beta_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *avec* $\forall i\ \beta_i\in\{0,1\}$ *tel que*

$$x\in[a,b]\Rightarrow x=0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3.......\alpha_k.......$$

*il suffit d'écrie x sons la forme :*

$$x=0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3.......\alpha_k\beta_1\beta_2.......\beta_m$$

$B^n(x)=0,\beta_1\beta_2.......\beta_m\in]c,d[\neq \emptyset$

*Donc* $B^n([a,b])\cap[c,d]\neq\emptyset$

**Proposition 1.7.1.** $([0,1[,R_\alpha)$ *est transitif si* $\alpha\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$

*Démonstration.* Il suffit démontrer que $\theta(0)$ est dense
$\forall x \in [0,1[$ , $\forall \epsilon > 0$ ,$\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $d(R_\alpha^n(0), x) < \epsilon$

On considère l'ensemble :

$$Card(\{x, R_\alpha(0), R_\alpha^2(0), ........, R_\alpha^{p-1}(0)\}) = p$$

$\exists i, j \in \mathbb{N}$ tel que $d(R_\alpha^i(0), R_\alpha^j(0)) < \dfrac{1}{p}$

On choisit p et q $\in \mathbb{N}$ $\dfrac{1}{p} < \epsilon$

$$i > j, d(R_\alpha^i(0), R_\alpha^j(0)) = d(R_\alpha^{i-1}(0), R_\alpha^{j-1}(0))$$

$$= d(R_\alpha^{i-j}(0), 0) = d(R_{\underbrace{\alpha(i-j)}_{\beta}}(0), 0) = d(R_\beta(0), 0) < \epsilon$$

l'orbite de 0 par rotation $R_\beta$ donnée un partition du cercle.

$\forall x \in [0,1[$ ,$\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $x \in [R_\beta^k(0), R_\beta^{k+1}(0)]$

$$\Rightarrow d(x, R_\beta^k(0)) < \epsilon$$
$$\Rightarrow d(x, R_\beta) < \epsilon$$

□

**Proposition 1.7.2.** *Soit (X,F) systèmes dynamiques les conditions suivantes sont équivalentes*

**(i)** *(X,F) systèmes dynamiques transitif*

**(ii)** *Pour tout ouvert $U, V \subset X$ on peux trouver $n \in \mathbb{Z}$ tel que $U \cap F^{-n}(V) \neq \emptyset$*

**(iii)** *L'ensemble des points transitifs est un $G_\delta$ denses .c'est à dire qu'il inclut l'intersection dénombrable d'ouvert denses*

**(iv)** *L'ensemble des points transitifs n'est pas vide*

**mélangeant**

**Définition 1.7.2.** *(X,F) systémes dynamiques on dit que (X,F) est mélangeant si seulment si* $\forall U, V \in X$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que* $\forall n \geq n_0$ $F^{-n}(U) \cap V \neq \emptyset$

**Remarque 1.7.1.** *(X,F) mélangeant* $\Longrightarrow$ *(X,F) transitif*

## 1.8 Minimalité

**Définition 1.8.1.** *Soit (X, F) un système dynamique on dit que (X, F) est minimal si seulement si tout les orbites sont denses*

**Proposition 1.8.1.** $([0,1[, R_\alpha)$ $,\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \cap [0,1[$ *est minimal*

*Démonstration.* Il suffit démontrer que $\theta(x)$ est dense
$\forall x \in [0,1[$ , $\forall \epsilon > 0$ ,$\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $d(R_\alpha^n(x), x) < \epsilon$

On considère l'ensemble :

$$Card(\{x, R_\alpha(x), R_\alpha^2(x), ........, R_\alpha^{p-1}(x)\}) = p$$

$\exists i, j \in \mathbb{N}$ tel que $d(R_\alpha^i(x), R_\alpha^j(x)) < \dfrac{1}{p}$

On choisit p et q $\in \mathbb{N}$ $\dfrac{1}{p} < \epsilon$

$$i > j, d(R_\alpha^i(x), R_\alpha^j(x)) = d(R_\alpha^{i-1}(x), R_\alpha^{j-1}(x))$$

$$= d(R_\alpha^{i-j}(x), 0) = d(R_{\underbrace{\alpha(i-j)}_{\beta}}(x), 0) == d(R_\beta(x), 0) < \epsilon$$

l'orbite de x par rotation $R_\beta$ donnée un partition du cercle.

$\forall x \in [0,1[$ ,$\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $x \in [R_\beta^k(x), R_\beta^{k+1}(x)]$

$$\Rightarrow d(x, R_\beta^k(x)) < \epsilon$$
$$\Rightarrow d(x, R_\beta) < \epsilon$$

□

### 1.8.1 Conjugaison topologique

**Définition 1.8.2.** *Soient (X,F),et (X,G) deux systèmes dynamiques et* $\pi$ *un application continue* $\pi : X \to Y$ *vérifiant* $\pi \circ F = G \circ \pi$

*i- Si* $\pi$ *est bijective on dit que* $\pi$ *est une conjugaison que et que (X,F),(Y,G)*

*Sont typologiquement conjugués*

*ii- Si* $\pi$ *est surjectif on dit que* $\pi$ *est un facteur et que (X,F) est une*

*extension de (Y,G) ou que (Y,G) est un facteur(X,F)*

*iii- Si* $\pi$ *est injectif on dit que (X,F) est sous systéme (Y,G)*

### 1.8.2 Points fixes des Fonction conjugués

Soit F et G deux récurrences conjuguées soit $x^*$ un poit fixe de la de la fonction F on a alors :

$$(\pi \circ F)(x^*) = \pi(F(x^*)) = \pi(x^*) = (G \circ \pi)(x^*) = G(\pi(x^*))$$

D'où $G(\pi(x^*)) = \pi(x^*)$ ainsi si $x^*$ est un poit fixe de F alors $\pi(x^*)$

Est un point fixe de G.

Si $\pi(x^*)$ est conjugaison topologique alors le nombre de points fixesest même pour les récurrences F et G

### 1.8.3 Cycles des Fonction conjugués

Soit F et G deux récurrences conjuguées soit $x_0$ un point d'un cycle périodique de périod k de la fonction F on a alors :

$$\pi \circ F = G \circ \pi \Rightarrow \pi \circ F \circ \pi^{-1} = G$$

D'où

$$G^k = (\pi \circ F \circ \pi^{-1})^k = \pi \circ F^k \circ \pi^{-1} \Rightarrow \pi \circ F^k = G^k \circ \pi$$

$$\Rightarrow (\pi \circ F^k)(x_0) = (G^k \circ \pi)(x_0) \Rightarrow \pi(F^k(x_0)) = G^k(\pi(x_0)) = \pi(x_0)$$

Ainsi on a $G^k(\pi(x_0)) = \pi(x_0)$ ainsi $x_0$ un point d'un cycle périodique de période k de la fonction F on a alors $\pi(x_0)$ est points d'un cycle périodique de période k de la fonction G

## 1.9 Equicontinuité et sensibilité

### 1.9.1 Equicontinuité

**Définition 1.9.1.** *Soit (X,F) un système dynamique*

*On dit qu'un pointe $x \in X$ est un point d'équicontinuité s'il vérifie :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall \in B_\delta(x), \forall n \geq 0, d(F^n(y) - F^n(x)) < \epsilon$$

**Remarque 1.9.1.** *L'ensemble des point d'équicontinuités $\varepsilon$ est invariant par F*

#### Sensibilité

**Définition 1.9.2.** *On dit que (X,F) est sensible aux condition initiales si pour chaque poite $x \in X$ on a :*

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall \in B_\delta(x) \ \forall n \geq 0 \ d(F^n(y) - F^n(x)) \geq \epsilon$$

**Proposition 1.9.1.** *L'ensemble des point d'équicontinuités d'un système dynamique (X,F) est inversement invariant i.e.*

$$F(x) \in \varepsilon \Rightarrow x \in \varepsilon$$

*Démonstration.* $F(x) \in \varepsilon$ et fixons $\delta$ qui satisfait la condition de la définition de $\varepsilon$ pour

$F(x)$ il existe par continuité $\eta$ tel que $\forall (z, y) d(z, y) < \eta \Rightarrow d(F^n(y) - F^n(x)) < \delta$

Ainsi si $y, z \in B_\eta(x)$ $F(y), F(z) \in B_\delta(F(x))$ d'où $d(F^n(y) - F^n(x)) < \epsilon$

pour tout $n \geq 0$ D'où $x \in \varepsilon$ $\square$

**Théoreme 1.9.1.** *(Akin Auslaned Berg 1996) systèmes dynamiques transitif est sensible à la condition initiales ou presque D'équicontinuité*

# Chapitre 2

# Espaces de Cantor

## 2.1 Généralités sur les espaces topologiques

**Définition 2.1.1.** *(Topologie) Une topologie $\tau$ sur l'ensemble $X$ est une partie $\tau \in P(X)$ Vérifiant :*

**1-** *L'ensemble vide $\emptyset$ et $X$ sont dans $\tau$.*

**2-** *$\tau$ est stable par réunions arbitraires.*

**3-** *$\tau$ est stable par intersections finies.*

*Un tel couple $(X;\tau)$ est appelé espace topologique. Les éléments de $\tau$ sont Appelés les ouverts de la topologie. Une partie de $X$ est dite fermée si son complémentaire est ouvert.*

**Définition 2.1.2.** *$X$ est un ensemble quelconque et $\tau$ est famille de tout le sous-ensemble de $X$ c'est la topologie discrète sur $X$ tout partie de $X$ est un ouvert .dit une espace topologique discret tout ensemble muni de Topologie discrète.*

**Exemple 2.1.1.**

- X = Ø, $\rho(X)$ = {Ø} est la seule topologie discrète sur X.
- $X = \{a\}$ , $\rho(X)$ ={Ø,{a}} est la seule topologie discrète sur X.

**Proposition 2.1.1.** *Soit $X$ espace topologique discret les Propositions suiventes sont vérifiées :*

*1- Tout sous-ensemble de $X$ est un ouvert-fermé ;*

*2- $X$ est complètement métrisable, par exemple par la distance discrète, i.e. la distance $d$ .*

*Définie par : $d(x,y) = 1$ si $x \neq y$ et $d(x,x) = 0$ ;*

*3- Un espace topologique X est discret si et seulement si tous ses singletons sont ouverts ;*

*4- Un espace topologique fini X est discret si et seulement s'il est séparé, auquel cas il est même compact.*

*5- Deux espaces topologiques discrets équipotents sont homéomorphes.*

**Définition 2.1.3.** *Soit (E,$\tau$) un espace topologique on dit que E est séparé si :*

$\forall x, y \in E$ *avec* $x \neq y$

$\exists V_x \in v_x$, $\exists V_x \in v_x$, *tel que :*$V_x \cap V_y = \emptyset$.

**Définition 2.1.4.** *(Point d'accumulation) Soit (E,$\tau$) un espace topologique $A \subset E$ et $x \in E$ on dit que $x$ est point d'accumulation de $A$ si :*

$$\forall V \in v(x), (V - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$$

**Définition 2.1.5.** *Soit E et F deux espaces topologiques f :E $\to$ F une application : on dit que f est un homéomorphes si : f est bijective et f bi continue (ie f et $f^{-1}$ sont continue).*

### 2.1.1 Compacité

**Définition 2.1.6** (Recouvrement ouvert)**.** *soit $(E, \tau)$ un espace topologique .Soit $(\theta_i)_{i\in I}$ famille quelconque d'ouvert.*

*On dit que la famille $(\theta_i)_{i\in I}$ est recouvre de E si E$= \cup_{i\in I}\theta_i$ on dit aussi que la famille $(\theta_i)_{i\in I}$ est recouvrement ouvert E .*

*Si $A \subset E$ on dit que la famille est une famille $(\theta_i)_{i\in I}$ recouvre A si $A \subset \cup_{i\in I}\theta_i$*

**Définition 2.1.7.** *Soit E un espace topologique séparé. On dit que E est compact si de tout recouvrement ouvert de E, on peut extraire un Sous-recouvrement fini.*

*Autrement dit pour toute famille d'ouverts $(\theta_i)_{i\in I}$ de E tel que $E = \cup_{i\in I}\theta_i$,il existe un sous-ensemble fini J de I tel que $E = \cup_{i\in J}\theta_i$ c'est-à-dire*

$E = \cup\theta_i \Rightarrow (\exists I_0$ *(fini)* $I_0 < I$ *tel que* $E = \cup_{i\in I_0}\theta_i)$

**Proposition 2.1.2.** *Soit X est espace topologique séparé les propriétés suivantes sont équivalentes :*

*(i) X est compact*

*(ii) De toute famille de fermés de X dont l'intersection est vide on peut extraire une sous-Famille fine dont l'intersection est vide*

**Proposition 2.1.3.** *Soit E un espace topologique séparé alors toute partie compacte de E est fermée et bornée.*

### 2.1.2 Connexité

**Définition 2.1.8.** *On dit qu'un espace topologique X est connexe s'il n'est pas réunion*

*De deux ensembles ouverts non vides disjoints. Autrement dit ,pour tous ouverts*

*Disjoints U et V tels que* $X = U \cup V$*,alors on bien* $U = \emptyset$ *ou* $V = \emptyset$.

**Proposition 2.1.4.** *Soit X un espace topologique.les propriétés suivantes sont équivalentes*

*(i) L'espace X est connexe .*

*(ii) L'espace X n'est pas réunion de deux ensembles fermés non vides disjoints.*

*(iii) Il n'existe pas dans X d'autres parties qui soient a la Fois ouvertes et fermées que X, Ø.*

*(iv) Toute application continue de X dans l'espae discrete* $\mathbb{Z}$ *est constante.*

*(v) Toute application continue de X dans l'espace discret* $\{0, 1\}$ *est constante.*

**Remarque 2.1.1.** *Si X est un espace connexe et si A et B sont deux ensemble non vides et ouverts (reps. fermés) tel que* $X = A \cup B$*, alors* $A \cap B = \emptyset$.

**Définition 2.1.9.** *on dit qu'un espace topologique X est discontinu s'il n'est pas connexe. Autrement dit, S'il existe deux ouverts disjoints et non vides U et V dans X tels que* $X = U \cup V$.

**Définition 2.1.10.** *on dit qu'une partie A d'un espace topologique X et un ensemble connexe,si A muni De la topologie induite est un espace connexe.*

**Exemple**

(1)- Tout espace muni de la topologie grossière est connexe.

(2)- Dans un espace topologique, l'ensemble vide et tout ensemble réduit à un point sont Connexes.

(3)- Dans un espace topologique séparé,tout ensemble fini comprenant plus d'un point et Plus généralement Tout ensemble non réduit à un point et possédant au moins un point isolé est non connexe.

## 2.2 Espace de Cantor

### 2.2.1 Ensemble triadique de Cantor

On construit l'ensemble triadique de Cantor de la façon suivante :
On commence par l'intervalle $A_0 = [0, 1]$
On enlève le tiers milieu (ouvert) à cet intervalle, ce qui nous donne

$$A_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right];$$

On recommence avec les deux intervalles que l'on obtenus :

$$A_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right];$$

L'application enlever les tiers milieux des intervalles présents peut être explicitée de la manière suivante :

$$A_{n+1} = T(A_n) = \frac{(A_n] \cup (A_n + 2))}{3};$$

Où T est l'opérateur (ablation du tiers central) défini par T : I $\rightarrow I_0 \cup I_1$

$$[a, b] :\mapsto [a, a + (b - a)/3] \cup [b - (b - a)/3, b]$$

On procède de cette manière à l'infini. L'ensemble triadique de Cantor est :

$$C = \bigcap_{i=1}^{+\infty} A_n.$$

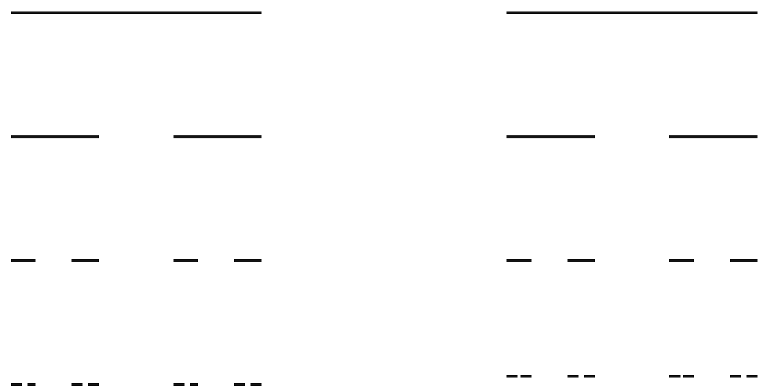

FIGURE 2.1 – Construction de l'ensemble de Cantor. représentent $A_1$,$A_2$, $A_3$, $A_4$

### Écriture en base 3

On peut aussi définir l'ensemble de Cantor via l'écriture en base 3. En effet
Tout réel $x \in [0,1]$ peut s'écrire $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n}$;

Avec $x_n \in \{0,1,2\}$.On écrit alors $x = 0, x_1x_2x_3x_4x_5\ldots$

Cette figure un représentent Écriture en base 3 dans l'ensemble de Cantor

L'ensemble de Cantor est formé des réels de [0, 1] ayant une écriture en base 3

Ne contenant que des 0 et des 2.Ou plus formellement :

$$C = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} \mid \forall i \in \mathbb{N}^*, x_i \in \{0,2\} \right\}.$$

Par exemple Le réel $\dfrac{1}{3}$ est dans cet ensemble , puisqu'il admet les deux écritures $(0,1000$ et $0,02222)$ en base 3.

Le réel $\dfrac{2}{3}$ également $(0,2000$ ou $0,12222)$. On peut remarquer que parmi les nombres

Admettant un développement propre et un développement impropre, il n'en existe

Aucun dont les deux écritures vérifient la propriété demandée.

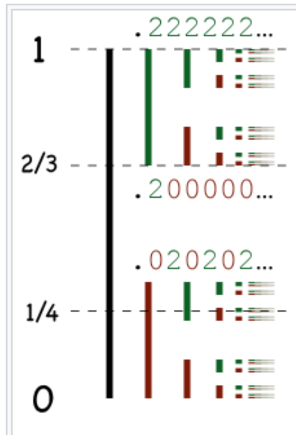


FIGURE 2.2 – Positions $\frac{1}{4}, \frac{2}{3}$ et 1 dans l'ensemble de Cantor.

**Proposition 2.2.1.** *L'ensemble triadique de Cantor $C$ est aussi l'ensemble des réels de $[0,1]$ dont le développement 3-adique ne comporte que des 0 ou des 2.*

**Proposition 2.2.2.** *L'ensemble triadique de Cantor $C$ est homéomorphe à $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, ensemble des Suites de $\{0,1\}$ Muni de la topologie produit de la topologie discrète sur $\{0,1\}$*

*Démonstration.* Soit la fonction $f$ qui à une suite $u_n$ de $\{0,1\}$ associe la somme des $2 \cdot \frac{u_n}{3^n}$.

Cette fonction est injective, clairement. Elle est surjective Voyons maintenant la continuité De $f$ ; en fait on va considérer la continuité de $f^{-1}$. Pour cela on considère l'image Réciproque d'un ouvert non vide de la base d'ouverts de la topologie produit constituée des Produits d'ouverts tels qu'un nombre fini d'ouverts seulement soient différents de$\{0,1\}$. Il est suffisant pour que l'image réciproque de $x$ soit dans cet ouvert que les premiers chiffres Soient les mêmes, et donc que la distance soit suffisamment petite. Enfin toute fonction continue Bijective d'un compact dans un séparé est un homéomorphisme, ce qui permet de conclure. □

**Proposition 2.2.3.** *L'ensemble de Cantor est de mesure nulle, c'est-à-dire négligeable au sens de la mesure de Lebesgue. En effet en notant $\lambda$ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ , on a :*

**1-** $\lambda([0,1]) = 1$

**2-** *Pour une réunion $A_n$ d'intervalles :$\lambda(A_{n+1}) = \lambda(T(A_n)) = \frac{2}{3}\lambda(A_n)$ où $T$ est l'opérateur (ablation du tiers central)*

*Démonstration.* Montrons que C est de mesure de Lebesgue nulle. Au rang $n \in \mathbb{N}$ on a

$2^n$ intervalles de longueur $\left(\frac{1}{3}\right)^n$. Donc la mesure de Lebesgue de $A_n$ est $\lambda(A_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$.
Comme la mesure de $A_0 = [0,1]$ est finie, et que les $A_n$ sont Décroissants, $\lambda(\cap_{n=0}^{\infty} A_n) =$

$\lim_{n\to\infty} \lambda(A_n) = \lim \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ L'ensemble de Cantor est donc " petit " au sens de la mesure de Lebesgue. $\square$

**Proposition 2.2.4.** *Chaque points des l'ensemble cantor est point d'accumulation*

*Démonstration.* Il reste ' voir que chaque point est point d'accumulation. Prenons un point $p \in C$ et $\epsilon > 0$. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\left(\frac{2}{3}\right)^{n_0} \leq \epsilon$. Alors il existe un $C_p$ intervalle de $A_{n_0}$ contenant p. l'étape $n_0 + 1$ on obtient deux intervalles $C_{p_0}$ et $C_{p_1}$ contenus dans $C_p$. L'un de ces deux intervalles contient p, sans perte de Généralité supposons que $p \in C_{p_0}$. Alors $C_{p_1}$ contient un point $q \in C$ (il suffit de Prendre un point des extrémités de $C_{p_1}$ ) avec $d(p,q) \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n_0} \leq \epsilon$ Donc toute boule $B(p,\epsilon)\backslash p$ intersecte C .

$\square$

### 2.2.2 Définition de la distance dans Espace de Cantor

Lu espace de cantor est un espace métrique muni d'une distance :

**Proposition 2.2.5.** *Soit $A^{\mathbb{Z}}$ espace topologique compacte*

*d(x,y)*$= 2^{-n}$ *avec* $n = \min\{i \geq 0 : x_i \neq y_i, x_{-i} \neq y_{-i}\}$

*d est une distance* $\forall x, y \in A^{\mathbb{Z}}$

*Démonstration.* On va montrer que d est une distance dans $A^{\mathbb{Z}}$

d est bien définie car $d(x,y) = 2^{-n} < \infty \ \forall x, y \in A^{\mathbb{Z}}$ et $n \in \mathbb{N}$

$$\forall x, y \in A^{\mathbb{Z}}, d(x,y) = 2^{-n} \geq 0$$

Vérifier que d un symétrique :

$$\begin{cases} d(x,y) = 2^{-n}, \forall x, y \in A^{\mathbb{Z}} \\ d(y,x) = 2^{-n}, \forall x, y \in A^{\mathbb{Z}} \end{cases} \Leftrightarrow d(x,y) = d(y,x) = 2^{-n}$$

Donc d est symétrique

Montrer inégalité triangulaire c'est-à-dire montrons que $\forall x, y$ et $z \in A^{\mathbb{Z}}$ :

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$$

On a : $\min\{x_i \neq y_i, x_{-i} \neq y_{-i}\} + \min\{z_i \neq y_i, z_{-i} \neq y_{-i}\} \leq \min\{x_i \neq y_i, x_{-i} \neq y_{-i}\}$

$n = \min\{x_i \neq y_i, x_{-i} \neq y_{-i}\}$ ,$m = \min\{z_i \neq y_i, z_{-i} \neq y_{-i}\}$ ,$k = \min\{x_i \neq y_i, x_{-i} \neq y_{-i}\}$

$$2^{-n} \leq 2^{-n} + 2^{-m} \Rightarrow d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$$

□

**Proposition 2.2.6.** *Soit $A^{\mathbb{Z}}$ espace topologique compacte*

$$d((x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mid x_n - y_n \mid}{2^n}$$

*Avec $x_n$ et $y_n$ deux suite dans $\{0,1\}$*

*$d$ est un distance $\forall x, y \in A^{\mathbb{Z}}$*

*Démonstration.* Montrons que $A^{\mathbb{Z}}$ est une distance

d est bien définie car $d(x,y) < \infty \ \forall x, y \in A^{\mathbb{Z}}$

$d(x,y) \geq 0$ .

Si $x = y \Rightarrow d(x,y) = 0$.

$d(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a \mid x_n - y_n \mid}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mid y_n - x_n \mid}{2^n} = d(y,x) \Rightarrow d(x,y) = d(y,x)$

Inégalité triangulaire : montrons que $\forall x, y$ et $z \in A^{\mathbb{Z}}$ : $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

$d(x,z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mid x_n - z_n \mid}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mid x_n - z_n + y_n - y_n \mid}{2^n}$

$$\leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mid x_n - y_n \mid}{2^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mid y_n - z_n \mid}{2^n} = d(x,y) + d(y,z)$$

$$\Rightarrow d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$$

□

**Proposition 2.2.7.** *Un ensemble de cantor $C$ est un espace métrique compact.*

*Démonstration.* La compacité provient du fait que c'est une intersection de fermées contenue dans un compact. □

**Proposition 2.2.8.** *L'ensemble triadique de Cantor $C$ n'est pas connexe.*

*Démonstration.* Un espace X muni de la topologie discrète est totalement discontinu. En

Effet, soit un sous ensemble $C \subset X$ contenant au moins deux éléments. Alors $C$ peut

S'écrire sous forme d'une union disjointe de deux parties non vides de X. Ces parties sont

Ouvertes, donc $C$ n'est pas connexes. □

# Chapitre 3

# Systèmes dynamiques définis sur un Cantor

## 3.1 Décalage de Bernoulli

**Définition 3.1.1.** *L'application shift ou décalage définie sur l'ensemble* $A^{\mathbb{N}}$ $(respA^{\mathbb{Z}})$ *dans* $A^{\mathbb{N}}$ $(respA^{\mathbb{Z}})$ *est définie par :*

$$\sigma(x)_i = x_{i+1}$$

**Proposition 3.1.1.** *L'application shift sur l'ensemble* $A^{\mathbb{Z}}$ *dans* $A^{\mathbb{Z}}$ *est une application bijective.Elle est surjective sur* $A^{\mathbb{N}}$

*Démonstration.* Montrer d'abord que $\sigma(x)_i = x_{i+1}$ injectif

On va montrer que si $\sigma(x)_i = \sigma(y)_i \Rightarrow x = y$.

On a :$\sigma(x)_i = x_{i+1}$,$\sigma(y)_i = y_{i+1} \Rightarrow x_{i+1} = y_{i+1}$ $\forall i \in \mathbb{Z}$ alors $x = y$.

Donc $\sigma$ est injective.

On montre que $\sigma$ est surjective ?

On montre que $\forall y \in A^{\mathbb{Z}}$ $\exists x \in A^{\mathbb{Z}}$ tel que $\sigma(x)_i = y$.

$$y \in A^{\mathbb{Z}}, \exists x \in A^{\mathbb{Z}} \Rightarrow \sigma(x)_i = x_{i+1} = y$$

On pose $x_i = y_{i-1}$ d'ou $\sigma(x) = y \Rightarrow \sigma$ est surjective dans $A^{\mathbb{Z}}$

La preuve précédente reste valable pour $A^{\mathbb{N}}$. □

**Remarque 3.1.1.** *L'application shift sur l'ensemble* $A^{\mathbb{N}}$ *n'est pas injective*

**Contre Exemple**

$$\sigma : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \{0,1\}^{\mathbb{N}}$$

$$x = 01111111.......$$

$$y = 11111111.......$$

càd $x \neq y$

$$\sigma(x) = 1111111.......$$

$$\sigma(y) = 1111111.......$$

$$\sigma(x) = \sigma(y)$$

$\sigma$ n'est pas injective.

## 3.2 Points fixes et périodiques de la fonction décalage

### 3.2.1 Points fixes de la fonction décalage

Soit le système dynamique , $sigma : A^{\mathbb{Z}} \to A^{\mathbb{Z}}$. Les points fixes de la fonction décalage doivent vérifier $\sigma(x) = x$. Par définition de la fonction On doit avoir

$$\forall i \in \mathbb{N} : x_i = \sigma(x)_i = x_{i+1}.$$

Par conséquent il existe $a \in A$ tel que pour tout $i \in \mathbb{Z}$ $x_i = a$.

Ainsi les nombres de points fixes de la fonction décalage est égal au cardinal A.

### 3.2.2 Points Périodiques de la fonction décalage.

Les points périodiques de période 2 de la fonction décalage doivent vérifier la condition

$$\forall i \in \mathbb{N} : x_i = \sigma^2(x)_i = x_{i+2}, \exists a, b \in A, \forall i \in \mathbb{N}, x_i = a, x_{i+1} = b.$$

Ainsi les points périodiques sont issus des combinaisons possibles de deux éléments de A.

On peut généraliser ce résultat à aux points périodiques p quelconque qui sont issus des combinaisons possibles de p éléments de A.

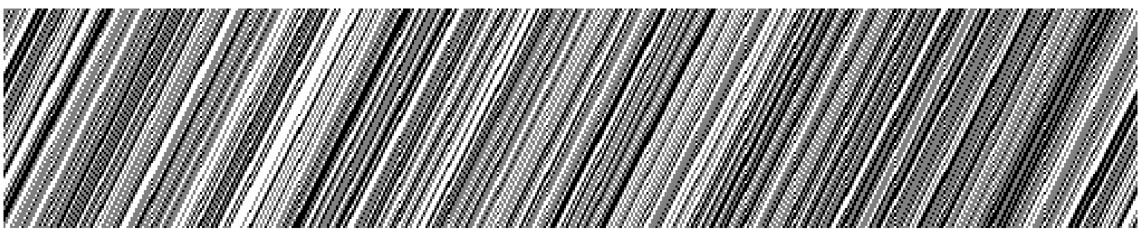

FIGURE 3.1 – Graphe de fonction décalage de Bernoulli.

**Proposition 3.2.1.** *Le décalage de Bernoulli est le conjugué topologique du système doublement de période.*

*Démonstration.* Le système dynamique doublement de période est donné par :$2x \mod 1$, $x \in [0,1] \Rightarrow$

$$B(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0, 1/2[ \\ 2x - 1 & \text{si } x \in [1/2, 1[ \end{cases}$$

Le décalage de Bernoulli est défini par :

$$\sigma : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \{0,1\}^{\mathbb{N}}$$

$$(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \longmapsto \sigma(x)_i = x_{i+1} : \forall x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$$

On définit la fonction $\pi : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to [0,1]$ par :

$$x_i \mapsto \pi(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} 2^{-i-1} x_i$$

$\pi$ une est fonction bijective

On a :$\pi \circ \sigma = B \circ \pi$

$$\pi(\sigma) = \pi(x_1 x_2 .....x_n...) = \sum_{i=0}^{+\infty} 2^{-i-1} x_{i+1}$$

$$B(\pi(x)) = B\left(\sum_{i=0}^{+\infty} 2^{-i-1} x_i\right)$$

$$B(\pi(x)) = \sum_{i=0}^{+\infty} 2^{-i-1} x_{i+1}$$

□

**Proposition 3.2.2.** $(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \sigma)$ *est transitif*

*Démonstration.* On a : $(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \sigma)$, $\sigma(x)_i = x_{i+1}$

$$\forall U, V \subset \{0,1\}^{\mathbb{N}}$$

$$\exists n > 0 : \sigma^n(x)_i = x_{n+i}$$

comme U est ouvert $\exists n > 0$ tel que $\sigma^n(U) = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$

d'ou $\sigma^n(U) \cap V = V \neq \emptyset$ □

**Définition 3.2.1.** $(A^{\mathbb{Z}}, F)$ *est Systèmes dynamique.*

*On dit que la fonction F est définie par bloc si seulement si* $\exists m, a \in \mathbb{N}$ *tel que*

$f : A^{a-m+1} \to A$ *et Pour tout* $x \in A^{\mathbb{Z}}$ *et* $i \in \mathbb{N}$ *:*

$$F(x)_i = f(x_{[i+m, i+a]})$$

.

$r = \max\{-m, a\} \geq 0$ *appelé le rayon de F et* $d = a - m \geq 0$ *son diamètre.*

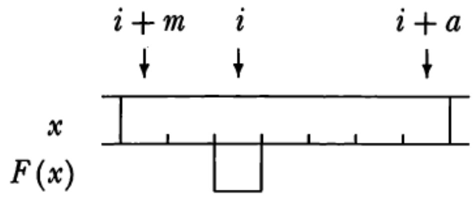


FIGURE 3.2 – Graphe de règle locale .

## 3.3 Règle de produit

**Définition 3.3.1.** *Soit le système dynamique* $(A^{\mathbb{Z}}, P)$ *où* $P$ *est défini par :*

$$P(x)_i = (x_i * x_{i+1}) \mod 2$$

### 3.3.1 Points fixes de Règle de produit

**Proposition 3.3.1.** *Le Règle de produit* $P$ *est admet deux point fixes (*$0^\infty$ *et* $1^\infty$*)c'est à dire (*$P(0^\infty) = 0^\infty$*) et* $P(1^\infty) = 1^\infty$*)*

*Démonstration.*

$$x = 10111111111...........$$

$$P(x) = 00111111............$$

$$P^2(x) = 00011111.........$$

$$P^n(x) = 00000000......... \Rightarrow P^n(x) = 0^\infty$$

Donc $0^\infty$ une est point fixe .

$$x = 11111111111...........$$

$$P(x) = 11111111............$$

$$P^2(x) = 11111111.........$$

$$P^n(x) = 11111111......... \Rightarrow P^n(x) = 1^\infty$$

Donc $1^\infty$ une est point fixe .

$\square$

**Remarque 3.3.1.** $0^\infty$ *un point fixe attractif et* $1^\infty$ *est point fixe instable*

FIGURE 3.3 – Graphe de Règle de produit.

### 3.3.2 Bassin d'attraction des points fixes Règle de produit

**Proposition 3.3.2.** *La Bassin d'attraction des points fixes* $0^\infty$ *et* $1^\infty$ *:*

$$B(0^\infty) = A^{\mathbb{Z}} \backslash \{1^\infty\}$$

$B(1^\infty) = \{1^\infty\}$ *on déduit que le point fixe* $\{1^\infty\}$ *est instable.*

**Remarque 3.3.2.** *Le règle produit n'admet aucun point périodique de période* $\geq 2$

*car la réunion de bassin d'attraction deux point fixe* $(0^\infty$ *et* $1^\infty)$ *est égale* $A^{\mathbb{Z}}$

*C'est à dire* $(B(0^\infty) \cup B(1^\infty) = A^{\mathbb{Z}})$.

## 3.4 Règle de la Somme

**Définition 3.4.1.** *Soit le système dynamique* $(2^{\mathbb{Z}}, S)$ *où* $S$ *est défini par :*

$$S(x)_i = (x_{i-1} + x_{i+1}) \mod 2$$

| $x$ | 000 | 001 | 010 | 011 | 100 | 101 | 110 | 111 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $S(x)$ | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |

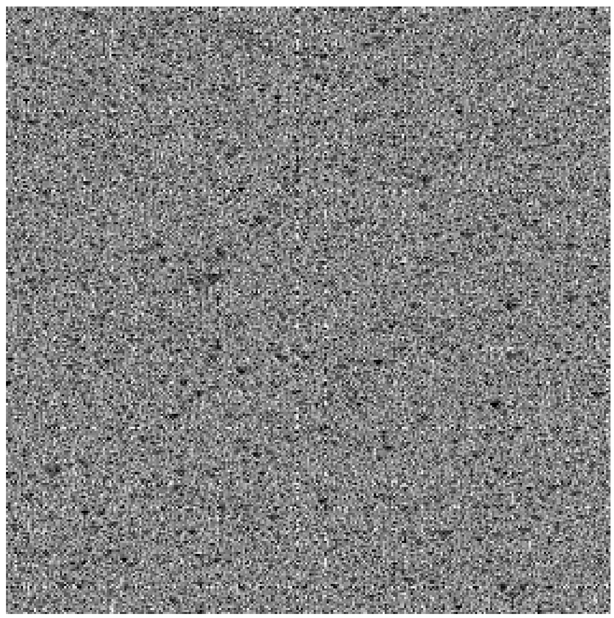

FIGURE 3.4 – Graphe Règle de la somme

### 3.4.1 Points fixes dans la Règle de Somme

**Proposition 3.4.1.** *Le Règle de la somme admet deux point fixes* $0^\infty$ *et* $(10)^\infty$.

*Démonstration.* Montrer que $0^\infty$ et $(10)^\infty$ deux point fixe dans règle de la somme.

On va montrer que $S(x)_i = x_i$ alors on montrer que $(x_{i-1} + x_{i+1}) \mod 2 = x_i$.

On a $(x_{i-1} + x_{i+1}) \mod 2 = x_i \Rightarrow -x_i + (x_{i-1} + x_{i+1}) \mod 2 = 0 \Rightarrow x_i = 0$ et $(x_{i-1} + x_{i+1}) \mod 2 = 0 \Rightarrow x_i = 0$ et $((x_{i-1} + x_{i+1}) = 0 ou (x_{i-1} + x_{i+1}) = 2)$.

Pour $(x_i = 0$ et $(x_{i-1} + x_{i+1}) = 0) \Rightarrow x_{i-1} = x_i = x_{i+1} = 0 \Rightarrow 0^\infty$ un est point fixe.

Pour ($x_i = 0$ et $(x_{i-1} + x_{i+1}) = 2) \Rightarrow x_i = 0$ et $x_i = x_{i+1} = 1 \Rightarrow (10)^\infty$ un est point fixe. □

## 3.5 Règle de Majorité

**Définition 3.5.1.** *Soit le système dynamique* $(2^{\mathbb{Z}}, M)$ *où* $M$ *est défini par :*

$$M(x)_i = \left\lfloor \frac{x_{i-1} + x_i + x_{i+1}}{2} \right\rfloor$$

| $x$ | 000 | 001 | 010 | 011 | 100 | 101 | 110 | 111 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $M(x)$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |

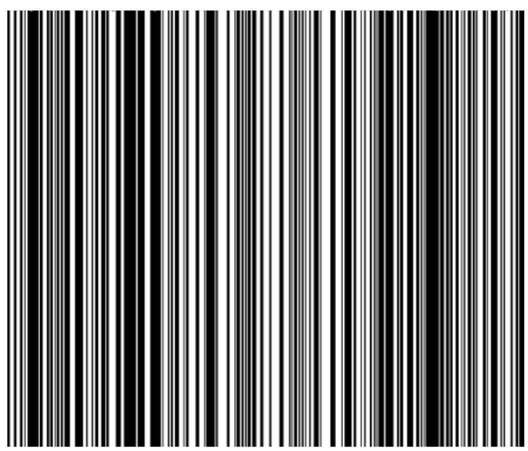

FIGURE 3.5 – Graphe de la règle de la majorité.

### 3.5.1 Points fixes de la Règle de la Majorité

**Proposition 3.5.1.** $(2^{\mathbb{Z}}, M)$ *admet deux point fixes* $0^\infty$ *et* $1^\infty$

*Démonstration.* Montrer que $0^\infty$ et $1^\infty$ deux point fixe Le règle de la Majorité admet des points fixes alors $M(x)_i = x_i$

On a $M(x)_i = x_i$ alors $\left\lfloor \frac{x_{i-1} + x_i + x_{i+1}}{2} \right\rfloor = x_i \Rightarrow (x_{i-1} + x_i + x_{i+1}) \mod 2 = x_i \Rightarrow (x_{i-1} + x_{i+1}) \mod 2 = 0 \Rightarrow (x_{i-1} + x_{i+1}) = 2$ ou $(x_{i-1} + x_{i+1}) = 0$

Pour $(x_{i-1}+x_{i+1})=0 \Rightarrow x_{i-1}=x_{i+1}=0 \Rightarrow M(x)_i=0 \Rightarrow x_i=0 \Rightarrow 0^\infty$ une est point fixe.

Pour $(x_{i-1}+x_{i+1})=2 \Rightarrow x_{i-1}=x_{i+1}=1 \Rightarrow M(x)_i=1 \Rightarrow x_i=1 \Rightarrow 1^\infty$ une est point fixe.

□

## 3.6 Règle de Trafic

**Définition 3.6.1.** *Soit le système dynamique $((2^{\mathbb{Z}}, T))$ où $T$ est défini par :*
$T(x)_i = 1 \Longleftrightarrow x_{[i-1,i]} = 10$ *ou* $x_{[i,i+1]} = 11$

| *000* | *001* | *010* | *011* | *100* | *101* | *110* | *111* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *0* | *0* | *0* | *1* | *1* | *1* | *0* | *1* |

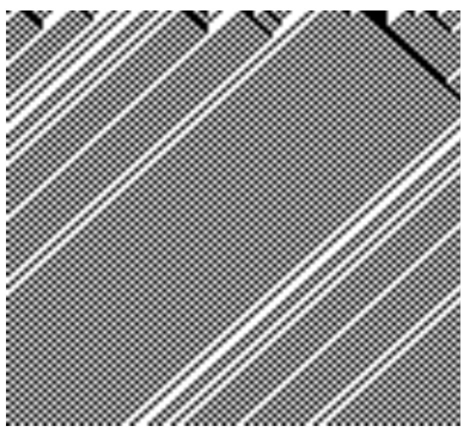

FIGURE 3.6 – Graphe de Règle de la Trafic

### 3.6.1 Points fixes et périodiques de Règle de Trafic

#### Points fixes de Règle de Trafic

**Proposition 3.6.1.** *La Règle de la Trafic admet deux point fixes* $0^\infty$ *et* $1^\infty$

*Démonstration.* Oa va montrer que $0^\infty$ et $1^\infty$ deux point fixe .

la règle de trafie admet des point fixe alors $T(x)_i = x_i$.Test définie par :
$T(x)_i = 1 \Longleftrightarrow x_{[i-1,i]} = 10$ ou $x_{[i,i+1]} = 11$

pour $T(x)_i = 1$ et $T(x)_i = x_i \Rightarrow x_i = 1$ donc $x_{[i,i+1]} = 11$
d'où $1^\infty$ est point fixe .

pour $(T(x)_i = 0$ et $T(x)_i = x_i) \Rightarrow x_i = 1$ donc $x_{[i-1,i]} = 00$.

d'où $0^\infty$ est point fixe .

$\square$

**Points périodiques de Régle de Traffic**

**Proposition 3.6.2.** *La Règle de la Trafic admet deux point périodique* $(01)^\infty$ *et* $(10)^\infty$ *de période* $\geq 2$

| x | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T(x) | | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| $T^2(x)$ | | | 1 | 1 | 0 | 1 | | |
| $T^3(x)$ | | | | 0 | 1 | | | |

donc $(01)^\infty$ un point périodique de période $\geq 2$

| x | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T(x) | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | |
| $T^2(x)$ | | | 1 | 1 | 1 | 0 | | |
| $T^3(x)$ | | | | 1 | 0 | | | |

donc $(10)^\infty$ un point périodique de période $\geq 2$

**Proposition 3.6.3.** $(2^{\mathbb{N}}, T)$ *est transitif*

**Proposition 3.6.4.** *Régle de Traffic* $(2^{\mathbb{N}}, T)$ *est sensibe .*

*Démonstration.* Comme le règle de trafic est transitif alors d'après (Théorème 1.9.1) de chapitre 1 on a $(2^{\mathbb{N}}, T)$ est sensibe.

$\square$

## 3.7 Les points d'équicontinuités dans l'espace de Cantor

**Définition 3.7.1.** *Soit* $(A^{\mathbb{Z}}, F)$ *un système dynamique*

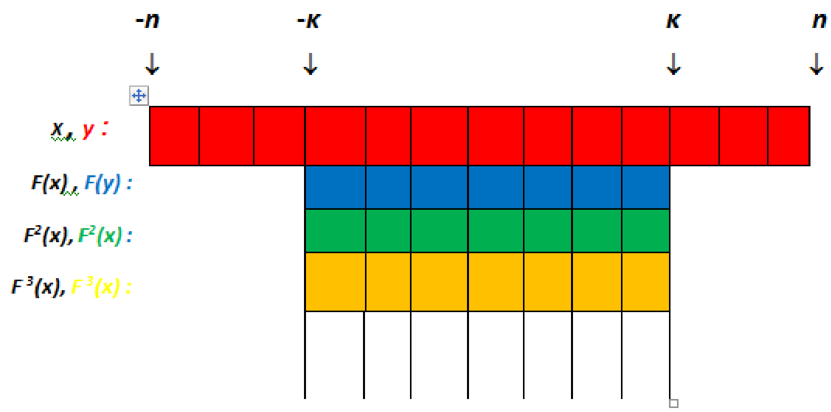


FIGURE 3.7 – Point équicontiuité d'espace Cantor.

*On dit qu'un pointe $x \in A^{\mathbb{Z}}$ est un point d'équicontinuité s'il vérifie :*

$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall y \in B_\delta(x) \; \forall n \geq 0 \; F^n(y) \in B_\epsilon(F^n(x))$

**Proposition 3.7.1.** *Le Décalage de Bernoulli n'admet pas de point équicontiuité.*

*Démonstration.* On suppose par absurde que $\sigma$ admet un point d'équicontiuité c'est à dire

$\forall x, y \in A^{\mathbb{Z}} \; \forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall y \in B_\delta(x) \; \forall n \geq 0 \; (\sigma^n(y))_i \in B_\epsilon((\sigma^n(x))_i)$

on a :$y \in B_\delta(x)$ alors $d(x, y) < \delta$ mais $x, y \in A^{\mathbb{Z}}$ càd $d(x, y) = 2^{-n}$ donc $2^{-n} < \delta$
D'ou $x_{[-m,m]} = y_{[-m,m]}$.

$\sigma(y)_{[-n,n]} \in B_\epsilon(\sigma(x)_{[-m,m]})$ alors $d(\sigma(x)_{[-m,m]}, \sigma(y)_{[-m,m]}) < \epsilon$ mais $x, y \in A_{\mathbb{Z}}$ càd $d(\sigma(x)_{[-m,m]}, \sigma(y)_{[-m,m]}) = 2^{-n}$ donc $2^{-n} < \epsilon$ D'ou $\sigma(x)_{[-m,m]} \neq \sigma(y)_{[-m,m]}$.

d'après la continuité uniforme de $\sigma, \sigma^2, .......\sigma^n$ donc $\sigma^n(x)_{[-m,m]} \neq \sigma^n(y)_{[-m,m]}$.

contradiction $\sigma$ n'admet pas un point d'équicontiuité

□

# *Conclusion générale*

Dans le cadre de ce mémoire, nous avons abordé les principales notions liées au système dynamique discret. Dans le premier chapitre nous avons définit les systèmes dynamiques discrets d'une façon très générale. La théorie des systèmes dynamiques discrets s'intéresse aux propriétés qua qualitatives d'actions de groupes sur des cette espaces de façon plus intuitive, et nous avons présent système dynamique discret est un couple (X, F).Le premier élément X est un espace métrique compact. L'ensemble X est dit espace des phases. Le second élément F est une application continue et invariante.

Dans le deuxième chapitre, nous avons présenté quelques propriétés de base, dans espace topologique puis défini l'ensemble triadique de cantor d'une façon générale et applique propriétés espace topologique dans cet ensemble.

Dans le dernier chapitre nous avons posé la problématique étudiée dans le cadre de ce mémoire, il s'agit du problème dans système dynamique symbolique les propriétés d'analyse n'est pas applicable car dans système symbolique le fonction est définie comme liste (fine ou infinie) des nombre donc cette fonction ne peut pas dire est (dérivable ou intégrable ...).

Ensuit nous avons présenter quelques règles permetent de résoudre ce type de problèmes .

Proposition d'une règle qui permet de résoudre le problème .

# *Annexes*

**Programme de fonction Dédecalge de Bernoulli**

with(LinearAlgebra) : decalbernoulli := proc (X, p)

local i, j, n, M :

n := nops(X) ;

M := Matrix(p+1, n) ;

for i to n do

M[1, i] := X[i] end do ;

for i from 2 to p+1 do

for j to n do

$M[i, j] := M[i-1, (j \mod n) + 1] enddoenddo;$

M end proc ;

X := [seq((rand(0 .. 1))(), i = 1 .. 1000)]

decalbernoulli(X, 100) ;

le resoultat le Figure 2.1

**expliquer cette programme**

M est Matrece p+1 linge et n coloun fixe le promier linge avac la lists X

dapre linge doux on a :

$i = 2, j = 1$ ;on a : $M[2, 1] = M[2-1, (1 \mod 6) + 1] = M[1, 2] = a_{12}$
$i = 2, j = 2$ ;on a : $M[2, 2] = M[2-1, (2 \mod 6) + 1] = M[1, 3] = a_{13}$
$i = 2, j = 3$ ;on a : $M[2, 3] = M[2-1, (3 \mod 6) + 1] = M[1, 4] = a_{14}$

$i = 2$ ,j=6 ;on a : $M[2,6] = M[2-1, \underbrace{(6 \mod 6)}_{0} +1] = M[1,1] = a_{11}$

$i = 6$ ,j=1 ;on a : $M[6,1] = M[6-1, (1 \mod 6) + 1] = M[5,2] = a_{16}$
$i = 6$ ,j=2 ;on a : $M[6,2] = M[6-1, (2 \mod 6) + 1] = M[5,3] = a_{11}$

$i = 6$ ,j=6 ;on a : $M[2,1] = M[6-1, \underbrace{(6 \mod 6)}_{0} +1] = M[5,1] = a_{15}$

$X := [a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{15}, a_{16}]$

Le resoultat donnée la Matrice sauvent :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{11} \\ a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{11} & a_{12} \\ a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{15} & a_{16} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{16} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \end{pmatrix}$$

**Programme de Règle de Produit**

```
with(LinearAlgebra) :

majori := proc (X)

local n, i, r, j, M, C :

n := nops(X) ;

M := Matrix(3*n, 3*n) :

C := Matrix(n, n)

for r to 3 do

for i to n do

M[1, (r-1)*n+i] := X[i] :

end do : end do :
```

for i from 2 to n do

for j from i to 3*n-i+1 do

M[i, j] := $(M[i-1, j-1] * M[i-1, j]) \mod 2$
end do end do;

C := SubMatrix(M, 1 .. n, n+1 .. 2*n); C end proc;

X := [seq((rand(0 .. 1))(), i = 1 .. 1000)];

majori(X);

le resoultat le Figure 2.2

**expliquer cette programme**

M :Matrice carré 3n linge et 3n coloun; X :liste de démontion n; C :Matrice carré n linge et n coloun; le problame de promeir et darniere conposent

pour déclarée le promeir linge de la Matrice M :

$M[1, i] := X[i] \forall i = 1....n$;
$M[1, n+i] := X[i] \forall i = 1....n$
$M[1, 2n+i] := X[i] \forall i = 1....n$
càd Ajoté méme liste gouche et droite :

| | | |
|---|---|---|
| $x_0 x_1 .........x_n$ | $x_0 x_1 .........x_n$ | $x_0 x_1 .........x_n$ |

d'apre deuxéme linge on a :

$M[i, j] := M[i-1, j-1] * M[i-1, j] * M[i-1, j+1] \forall i = 2....n et j = i....3n - i + 1$
le reseltat anlyse abrégée de graphe suivant :

$C := SubMatrix(M, 1..n, n+1..2*n)$ càd effese dans la matrice M Aprter deitervale $1....n$ et $n+1....2n$

**Programme de Règle de Somme**

with(LinearAlgebra); somme := proc (X)
local n, i, r, j, M, C :

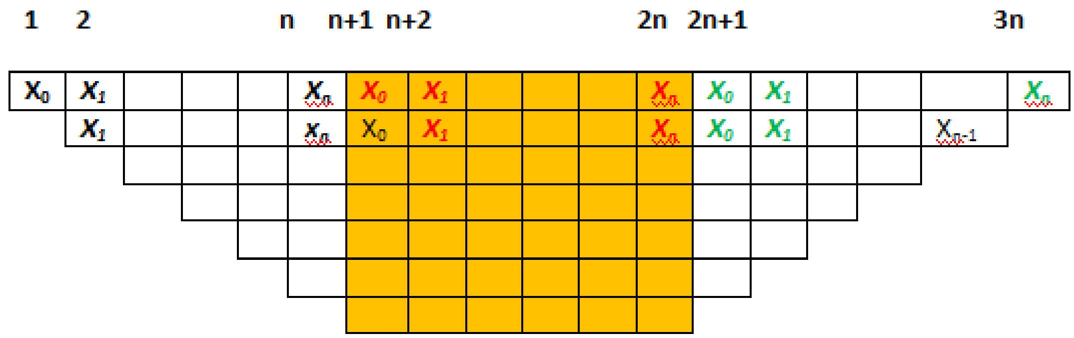


FIGURE 3.8 – Graphe de expliquer la Régle de produit .

n := nops(X) :

M := Matrix(3*n, 3*n) :

C := Matrix(n, n) :

for r to 3 do

for i to n do

M[1, (r-1)*n+i] := X[i]

end do end do :
for i from 2 to n do

for j from i to 3*n-i+1 do

if $(M[i-1, j-1] + M[i-1, j+1]) \mod 2 > 0$ then $M[i, j] := 1$ else $M[i, j] := 0$ .

end if end do end do :

C := SubMatrix(M, 1 .. n, n+1 .. 2*n)

C end proc ;

**expliquer cette programme**

le méme prencibe de travail de programme précédant mais d'apre douxéme linge on a taste si $(M[i-1,j-1]+M[i-1,j+1]) \mod 2>0$ alors $M[i,j]:=1$ si non $M[i,j]:=0$

**Programme de Règle de Majorité**

restart ; with(LinearAlgebra) :

majori := proc (X)

local n, i, r, j, M, C :

n := nops(X) ;

M := Matrix(3*n, 3*n) :

C := Matrix(n, n)

for r to 3 do

for i to n do

M[1, (r-1)*n+i] := X[i] :

end do : end do :

for i from 2 to n do

for j from i to 3*n-i+1 do

if $(M[i-1,j-1]+M[i-1,j]+M[i-1,j+1]) \geq 2$ then $M[i,j]:=1$

end if end do end do ;

$C := SubMatrix(M, 1..n, n+1..2*n)$; C end proc ;

$X := [seq((rand(0..1))(), i=1..1000)]$;

majori(X) ;

le resoultat le Figure 2.4

**expliquer cette programme**

le méme prencibe de travail de programme précédant mais d'apre douxéme linge on a taste si $2 \leq M[i-1, j-1] + M[i-1, j] + M[i-1, j+1]$ alors $M[i, j] := 1$ ;

**Programme de Règle de Produit**

```
restart ;

with(LinearAlgebra) ;

traff := proc (X)

local n, i, r, j, M, C ;

n := nops(X) ;

M := Matrix(3*n, 3*n) ;

C := Matrix(n, n) ;

for r to 3 do

for i to n do M[1, (r-1)*n+i] := X[i] ;

end do end do ;

for i from 2 to n do

for j from i to 3*n-i+1 do

if M[i-1, j]+M[i-1, j+1] = 2 or (M[i-1, j-1] = 1 and M[i, j-1] = 0) then M[i, j] := 1

else M[i, j] := 0

end if end do end do ;

C := SubMatrix(M, 1 .. n, n+1 .. 2*n) ;

C end proc ;

X := [seq((rand(0 .. 1))(), i = 1 .. 1000)] ;
```

traff(X)

# Bibliographie

[1] PetrKurka *TOPOLOGICAL AND SYMBOLIC DYNAMICS*,Michel WALDSCHMIDT, ©Societe Mathematique de France 2003.

[2] Nawfal El Hage Hassan *Topologie générale et espaces normés*, Dunod Parise 2011,978-2-10-056725-6