

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE.  
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA  
RECHERCHE SCIENTIFIQUE



Université Abderrahmane Mira -Béjaïa-

Faculté des Sciences Exactes

Département de Mathématiques

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme de Master en  
Mathématiques

Option : Analyse Mathématique

Par : Arab Nassima

THÈME

**Intégrale première et cycle limite pour certaines classes  
de systèmes différentiels planaires**

Soutenu publiquement, le 02 / 07 / 2019 devant le jury composé de :

Président :

Mr. Mohand Said BOUKHELIFA M.A.A Univ. A. Mira de Béjaïa

Encadreur :

Mr. Rachid BOUKOUCHA M.C.A Univ. A. Mira de Béjaïa

Examineur :

Mr. Arezki KHELOUFI M.C.A Univ. A. Mira de Béjaïa

Année Universitaire : 2018/2019

# *Remerciements*

Je voudrai tout d'abord remercier Monsieur **Rachid BOUKOUCHA**, Docteur à l'Université Abderrahmane Mira de Béjaïa, mon encadreur de ce Mémoire qui est à l'origine de ce travail. C'est un honneur pour moi de travailler avec lui. Je lui suis infiniment reconnaissant, non seulement parce qu'il a accepté de me proposer un sujet de Mémoire, mais aussi parce qu'il a partagé ses idées avec moi. Il a dirigé mon Mémoire avec beaucoup de patience et il m'a beaucoup encouragé.

J'adresse mes remerciements à Monsieur **Mohand Said BOUKHELIFA**, Enseignant chercheur à l'Université Abderrahmane Mira de Béjaïa, pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury de ce Mémoire, je l'en remercie énormément.

Je tiens aussi à remercier Monsieur **Arezki KHELOUFI**, Docteur à l'Université Abderrahmane Mira de Béjaïa, d'avoir accepté la lourde tâche de lire, commenter et juger ce Mémoire.

Enfin, je remercie **Mes Parents** qui m'ont toujours encouragé et soutenu sous toutes formes et ont toujours cru en ma volonté de réussir.

**Merci a tous...**

# Table des matières

<b>Liste des figures</b>	<b>iii</b>
<b>Liste des principales notations</b>	<b>1</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Notions préliminaires</b>	<b>1</b>
1.1 Introduction . . . . .	2
1.2 Systèmes différentiels autonomes . . . . .	2
1.2.1 Systèmes dynamiques . . . . .	2
1.2.2 Solutions et solutions périodiques . . . . .	3
1.2.3 Points d'équilibre . . . . .	3
1.2.4 Portrait de phase . . . . .	3
1.2.5 Stabilité d'un point d'équilibre . . . . .	4
1.2.6 Classification des points d'équilibre . . . . .	4
1.3 Cycles limites . . . . .	7
1.3.1 Classification des cycles limites . . . . .	7
1.3.2 Cycle limite algébrique, Cycle limite non algébrique . . . . .	8
1.3.3 Courbes invariantes . . . . .	10
1.3.4 Courbes non singulières . . . . .	10
1.4 Problème d'intégrabilité . . . . .	10

<b>Table des matières</b>	<b>iii</b>
1.4.1 Intégrale première . . . . .	10
1.5 L'application de premier retour de Poincaré . . . . .	13
1.6 Critère de Bendixon de non existence . . . . .	15
1.7 Critère de Dulac de non existence . . . . .	16
<b>2 Système linéaire de deux équations différentielles ordinaires</b>	<b>19</b>
2.1 Introduction . . . . .	20
2.2 Solutions d'un système linéaire en dimension 2 . . . . .	21
2.2.1 Premier cas : Cas de deux valeurs propres réelles distinctes.	21
2.2.2 Deuxième cas : Cas d'une valeur propre réelle double. . . .	25
2.2.3 Troisième cas : Cas de deux valeurs propres complexes conjuguées. . . . .	29
<b>3 Intégrale première et cycles limites pour quelques classes de systèmes différentiels</b>	<b>35</b>
3.1 Introduction . . . . .	36
3.2 Expression exacte de l'intégrale première pour une classe de sys- tèmes différentiels . . . . .	36
3.3 Expression exacte du cycle limite pour une classe cubique de sys- tèmes différentiels . . . . .	40
3.4 Conclusion . . . . .	45
<b>Conclusion générale et perspectives</b>	<b>46</b>
<b>Annexe. Le programme P4</b>	<b>47</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>48</b>

# Introduction

Les équations différentielles sont apparues pour la première fois vers la fin du dix-septième siècle dans les travaux d'Isaac Newton, Leibniz et Bernoulli. Elles se sont produites comme conséquence normale des efforts de ces grands savants d'appliquer les nouvelles idées de calculs à certains problèmes en mécanique. Plus tard, la théorie d'intégration des équations différentielles a été développée par des analystes et des mécaniciens comme Lagrange, Poisson, Hamilton, Liouville aux dix-huitième siècle et dix-neuvième siècles. Pendant plus de 300 ans, les équations différentielles ont servi comme un outil essentiel pour décrire et analyser des problèmes dans beaucoup de disciplines scientifiques.

L'importance des équations différentielles a motivé des générations de mathématiciens et d'autres scientifiques pour développer des méthodes pour étudier les propriétés de leurs solutions. Avec son mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle publié en 1881, Henri Poincaré [16] a ouvert la voie pour une approche des équations différentielles où la priorité n'est plus donnée à la résolution, mais à une étude plus géométrique des solutions, en particulier de leurs propriétés. Cette recherche a pour but de trouver les propriétés des solutions sans vraiment trouver les solutions d'une façon explicite, ce sont des méthodes dites qualitatives.

Dans ce travail nous allons utiliser la théorie qualitative des équations différentielles ordinaires pour traiter une classe de systèmes différentiels planaires de la forme :

$$\begin{cases} x' = P(x, y), \\ y' = Q(x, y), \end{cases}$$

où  $P(x, y)$  et  $Q(x, y)$  sont des polynômes.

Un des problèmes principaux dans la théorie qualitative des équations différentielles est l'étude de l'intégrabilité et des cycles limites des systèmes différentiels planaires et spécialement des systèmes différentiels planaires polynômiaux.

L'intérêt des cycles limites des systèmes différentiels planaires est dû à leurs significations importantes dans les modèles mathématiques modélisant des phénomènes issus de la pratique dans plusieurs branches des sciences : Physique, Biologie, Economie, ....

C'est en 1900 que D. Hilbert [15] a posé les fameux vingt-trois problèmes. En particulier dans le 16ème problème, il pose la question du nombre et de la disposition de trajectoires périodiques isolées pour des systèmes différentiels polynômiaux. Ce problème est jusqu'à maintenant non résolu. Beaucoup de travaux récents sont consacrés à l'étude des cycles limites.

Ce mémoire est structuré en trois chapitres, le premier chapitre est consacré aux rappels de quelques notions préliminaires sur les systèmes différentiels planaires. Dans le second chapitre, on va présenter une méthode pour la résolution des systèmes linéaires de deux équations différentielles ordinaires avec des exemples d'applications. Le troisième chapitre est composé de deux parties : Dans la première partie nous considérons une classe de systèmes différentiels planaires, nous nous intéressons à déterminer l'expression exacte de l'intégrale première et les courbes qui sont formées par les orbites de ces systèmes.

Dans la seconde partie nous déterminons les conditions d'existence d'un cycle limite ainsi que son expression exacte pour une classe de systèmes différentiels cubiques.

# Chapitre 1

## Notions préliminaires

## 1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques notions de base pour l'étude qualitative des systèmes dynamiques. On commence par définir les systèmes dynamiques, les systèmes différentiels autonomes, les solutions et solutions périodiques, les orbites périodiques, les points d'équilibre, le portrait de phase, le cycle limite, la classification des points d'équilibre et les cycles limites dans le plan  $\mathbb{R}^2$  et l'intégrabilité des systèmes différentiels. On introduira aussi un rappel sur les théorèmes et les critères fondamentaux sur l'existence et la non existence de solutions périodiques.

## 1.2 Systèmes différentiels autonomes

**Définition 1.1** *On appelle système différentiel autonome du plan un système de la forme :*

$$\begin{cases} x' = \frac{dx}{dt} = P(x(t), y(t)), \\ y' = \frac{dy}{dt} = Q(x(t), y(t)), \end{cases} \quad (1.1)$$

où  $P$  et  $Q$  sont des fonctions qui dépendent uniquement de  $x$  et de  $y$ . Le champ de vecteurs associé au système (1.1) est noté  $X = (P, Q)$ . Si les fonctions  $P$  et  $Q$  sont des polynômes, on appelle alors degré du système (1.1), le nombre  $n = \max(\deg(P), \deg(Q))$ . Sur la courbe  $P(x, y) = 0$ ; dite isocline verticale, le champs de vecteurs est parallèle à l'axe des  $y$ ; et sur la courbe  $Q(x, y) = 0$ ; dite isocline horizontale, le champs de vecteurs est parallèle à l'axe des  $x$ .

### 1.2.1 Systèmes dynamiques

**Définition 1.2** *Un système dynamique est un triplet  $D = (U, T, \Phi)$ , où  $U$  est un ensemble non vide appelé espace d'état,  $T = \mathbb{R}_+$  appelé domaine temporel et  $\Phi : U \times T \rightarrow U$  une fonction telle que :  $\forall x \in U, \forall t \in T$ ,*

$$\begin{cases} \Phi(x, 0) = x, \\ \Phi(\Phi(x, t), s) = \Phi(x, s + t). \end{cases}$$

La fonction  $\Phi$  décrit essentiellement l'évolution de l'état du système dans le temps.

Un système dynamique consiste en un ensemble d'états possibles, avec une loi qui détermine de façon unique l'état présent du système en fonction de ses états passés.

### 1.2.2 Solutions et solutions périodiques

**Définition 1.3** On dit que  $(x(t), y(t))_{t \in I}$  où  $I$  intervalle de  $\mathbb{R}$ , est une solution du système (1.1) si le champ de vecteurs  $X = (P, Q)$  est toujours tangent à la trajectoire représentant cette solution dans le plan de phase. Autrement dit,

$$\forall t \in I : P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t) = 0.$$

**Définition 1.4** On appelle solution périodique du système (1.1), toute solution  $(x(t), y(t))$  pour laquelle il existe un réel  $T > 0$  tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R} : x(t + T) = x(t) \quad \text{et} \quad y(t + T) = y(t).$$

Le plus petit nombre  $T > 0$  qui convient s'appelle alors période de cette solution.

### 1.2.3 Points d'équilibre

Pour connaître l'aspect des trajectoires du système (1.1), au moins localement, nous devons chercher ses points d'équilibre.

**Définition 1.5** On dit que le point  $(x_0, y_0)$  est un point d'équilibre (point critique) du système (1.1), s'il est solution du système

$$P(x_0, y_0) = 0 \quad \text{et} \quad Q(x_0, y_0) = 0.$$

### 1.2.4 Portrait de phase

Soit le système différentiel (1.1).

Les solutions  $(x(t), y(t))$  du système (1.1) représentent dans le plan  $(x, y)$  des courbes appelées orbites et les points d'équilibre de ce système sont des solutions constantes. La figure complète des orbites de ce système ainsi que ses points d'équilibre représentés dans le plan  $(x, y)$  s'appelle portrait de phase, et le plan  $(x, y)$  est appelé plan de phase.

### 1.2.5 Stabilité d'un point d'équilibre

Soit  $(x_0, y_0)$  un point d'équilibre du système (1.1).

Notons par  $X(t) = (P(x(t), y(t)), Q(x(t), y(t)))$  et  $X_0 = (P(x_0, y_0), Q(x_0, y_0))$ .

**Définition 1.6** On dit que  $(x_0, y_0)$  est stable si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \eta \Rightarrow \forall t > 0 : \|X(t) - X_0\| < \varepsilon.$$

Le point  $(x_0, y_0)$  est dit asymptotiquement stable si et seulement si  $(x_0, y_0)$  est stable et  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|X(t) - X_0\| = 0$  quand  $t \rightarrow \infty$ .

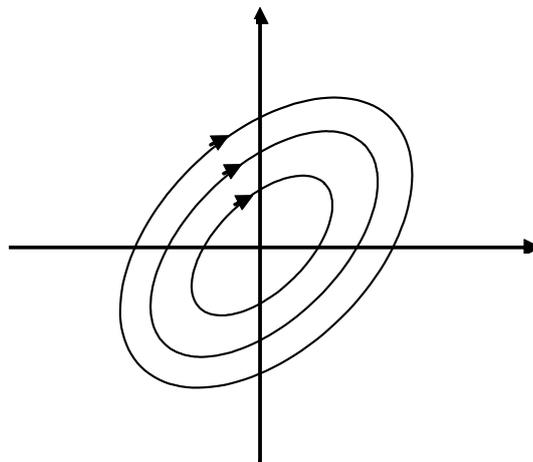
### 1.2.6 Classification des points d'équilibre

Les points d'équilibre qu'on rencontre dans l'étude d'un système à deux variables appartiennent à l'un des types fondamentaux appelés : noeud, col (ou selle), centre (ou sommet) et foyer.

Soit  $(0, 0)$  un point d'équilibre isolé du système (1.1).

#### 1- Point centre

Le point  $(0, 0)$  est dit un centre s'il existe un voisinage de  $(0, 0)$  qui contient un nombre dénombrable  $\gamma_n$  de trajectoires fermées dont chacune contient  $(0, 0)$  dans son intérieur et tel que les diamètres des trajectoires tendent vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .



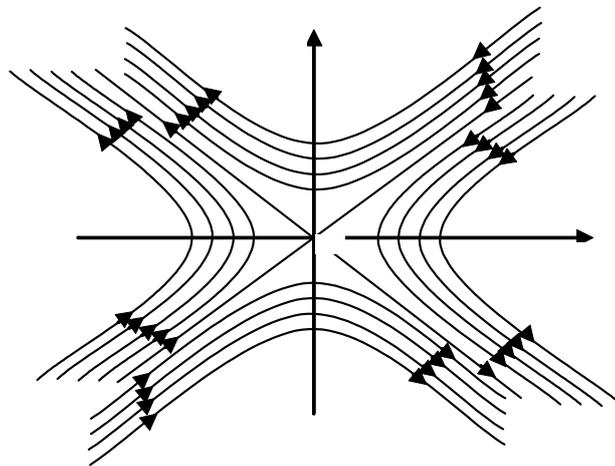
Point centre.

## 2- Point selle (col)

Le point  $(0, 0)$  est dit point selle (col) s'il existe un voisinage de  $(0, 0)$  tel que les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1- il existe deux courbes passant par  $(0, 0)$  tel que l'une est entrante et l'autre est sortante quant  $t \rightarrow +\infty$  ou  $t \rightarrow -\infty$ . Les deux courbes divisent le plan de phase en quatre domaines.

2- dans chacun des quatre domaines, il existe une infinité de trajectoires suffisamment proche de  $(0, 0)$  mais qui ne passent pas par  $(0, 0)$  quand  $t \rightarrow +\infty$  ou  $t \rightarrow -\infty$ .



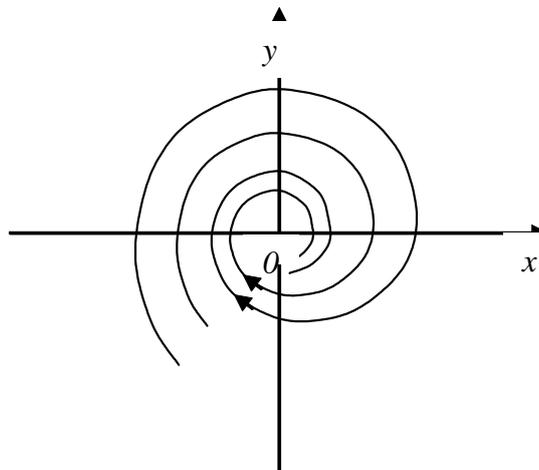
Point selle.

## 3- Point spirale (foyer)

Le point  $(0, 0)$  est dit point spirale (foyer) s'il existe un voisinage de  $(0, 0)$  tel que toute trajectoire  $\gamma$  dans ce voisinage a les propriétés suivantes :

1-  $\gamma$  est définie pour tout  $t > t_0$  (ou bien pour tout  $t < t_0$ ) pour un certain  $t_0$  donné,

2-  $\gamma$  approche  $(0, 0)$  en spirale tournant autour de  $(0, 0)$  une infinité de fois quant  $t \rightarrow +\infty$  (ou bien pour  $t \rightarrow -\infty$ ).

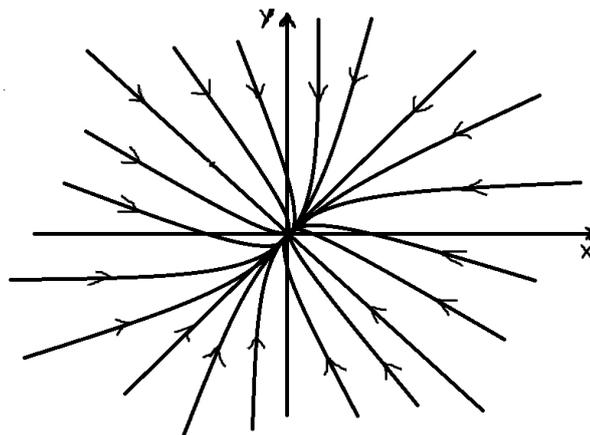


Point spirale (foyer).

#### 4- Point noeud

Le point  $(0,0)$  est dit point noeud s'il existe un voisinage de  $(0,0)$  tel que toute trajectoire  $\gamma$  dans ce voisinage a les propriétés suivantes :

- 1-  $\gamma$  est définie pour tout  $t > t_0$  (ou bien pour tout  $t < t_0$ ) pour un certain  $t_0$  donné,
- 2-  $\gamma$  approche  $(0,0)$  quand  $t \rightarrow +\infty$  (ou bien pour  $t \rightarrow -\infty$ ),
- 3-  $\gamma$  passe par  $(0,0)$  quand  $t \rightarrow +\infty$  (ou bien pour  $t \rightarrow -\infty$ ).



Point noeud.

**Proposition 1.1** *Le point d'équilibre  $(x_0, y_0)$  du système (1.1) est un noeud stable (resp. noeud instable), foyer stable (resp. instable), col, si l'origine du système linéaire associé est un noeud stable (resp. noeud instable), foyer stable (resp. instable), col.*

## 1.3 Cycles limites

**Définition 1.7** *Un cycle limite est l'orbite d'une solution périodique non constante isolée, du système (1.1). Il est représenté dans le plan des phases par une trajectoire fermée et isolée. Elle reflète la périodicité du mouvement et son caractère oscillatoire.*

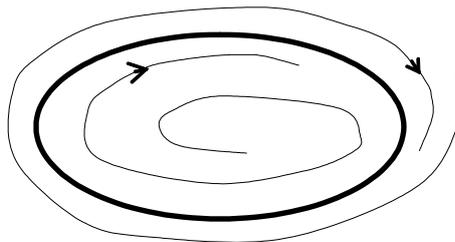
L'intérêt du cycle limite, en tant qu'orbite périodique isolée, apparaît souvent dans plusieurs branches de la science et de la technologie. Le fait que le système admet un cycle limite implique l'existence d'une solution périodique isolée. Le problème général de trouver le nombre de cycles limites pour des systèmes dynamiques est un problème compliqué qui a un raccordement au 16ème problème de Hilbert non encore résolu. L'étude intensive de l'existence de cycles limites pour les systèmes dynamiques est bien justifiée puisque l'existence et les propriétés des cycles limites pour un système dynamique donnent des informations importantes et introduisent des propriétés intéressantes des solutions du système dynamique étudié. Les cycles limites apparaissent seulement dans les systèmes différentiels non-linéaires.

### 1.3.1 Classification des cycles limites

Il existe trois types de cycles limites : cycle limite stable, cycle limite instable et cycle limite semi stable.

#### Cycles limites stables

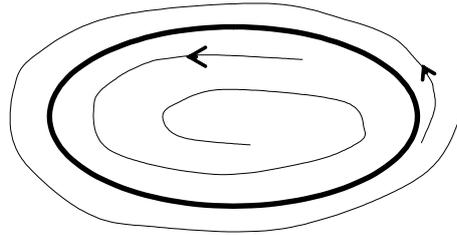
Un cycle limite stable a comme interprétation physique une oscillation limite du système étudié. C'est une solution périodique vers laquelle tendent les autres solutions.



Cycle limite stable.

### Cycles limites instables

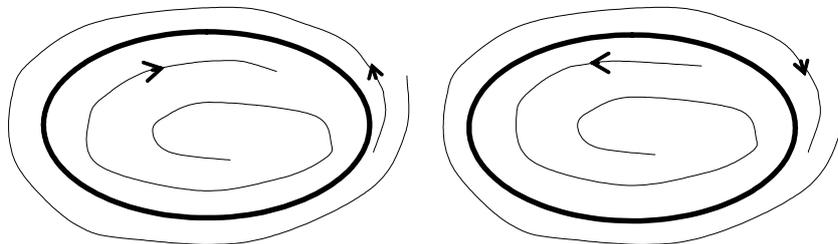
Un cycle limite instable n'apparaît pas physiquement comme une oscillation. Il constitue une séparation de chaque côté de laquelle les trajectoires s'éloignent vers d'autres points singuliers ou vers l'infini.



Cycle limite instable.

### Cycles limites semi stables

Un cycle limite semi stable est une trajectoire fermée vers laquelle tendent les trajectoires d'un côté mais s'éloignent de l'autre côté.



Cycle limite semi stable.

Un tel cycle limite est, théoriquement, une solution périodique du système d'équations étudié.

### 1.3.2 Cycle limite algébrique, Cycle limite non algébrique

On dit que  $F(x, y) = 0$ , est une courbe algébrique si  $F(x, y)$  est un polynôme en  $x$  et  $y$ , sinon elle est dite non-algébrique.

Le cycle limite est dit algébrique s'il est contenu dans une courbe algébrique  $F(x, y) = 0$ , sinon il est dit non-algébrique.

**Théorème 1.1** [17] Soit  $\gamma(t)$  une orbite périodique du système (1.1) de période  $T$ .  $\gamma$  est un cycle limite stable si  $\int_0^T \operatorname{div}(\gamma(t)) dt < 0$ ,

où  $\operatorname{div}(\gamma(t))$  est la divergence du système, définie par

$$\operatorname{div}(\gamma(t)) = \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) \gamma(t).$$

$\gamma$  est un cycle limite instable si

$$\int_0^T \operatorname{div}(\gamma(t)) dt > 0.$$

Dans le cas où la quantité  $\int_0^T \operatorname{div}(\gamma(t)) dt$  est nulle, une étude avancée est nécessaire pour déterminer si l'orbite  $\gamma$  est un cycle limite stable, ou un cycle limite instable ou semi-stable ou il n'est qu'une orbite périodique appartenant à une bande continue d'orbites fermées.

**Définition 1.8 (Cycle limite hyperbolique) :** Si la quantité  $\int_0^T \operatorname{div}(\gamma(t)) dt$  est différente de zéro, on dit que le cycle limite est hyperbolique.

**Exemple :** Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(1 - x^2 - y^2), \\ \dot{y} = x + y(1 - x^2 - y^2). \end{cases} \quad (1.2)$$

En coordonnées polaires, le système (1.2) s'écrit

$$\begin{cases} r' = r(1 - r^2), \\ \theta' = 1, \end{cases}$$

d'où  $r' = 0 \Leftrightarrow r = 0$  ou  $r = 1$ .

Pour  $r = 0$  on a :  $(0, 0)$  est un point d'équilibre du système (1.2) (solution constante), pour  $r = 1$  on a :  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ .

De plus on a :

$$\begin{aligned} \int_0^T \operatorname{div}(\gamma(t)) dt &= \int_0^{2\pi} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) (\cos \theta, \sin \theta) d\theta = \int_0^{2\pi} (2 - 4 \cos^2 \theta - 4 \sin^2 \theta) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} -2 dt = -4\pi < 0. \end{aligned}$$

Donc, le système (1.2) a un cycle limite hyperbolique stable.

### 1.3.3 Courbes invariantes

**Définition 1.9** On appelle courbe invariante du système (1.1) toute courbe d'équation  $U(x, y) = 0$  du plan de phase pour laquelle il existe une fonction  $K = K(x, y)$  appelée cofacteur associé à la courbe invariante, telle que :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}U(x, y) &= P(x, y) \frac{\partial}{\partial x}U(x, y) + Q(x, y) \frac{\partial}{\partial y}U(x, y) \\ &= K(x, y)U(x, y) \end{aligned}$$

### 1.3.4 Courbes non singulières

**Définition 1.10** On dit que la courbe  $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : U(x, y) = 0\}$  est non singulière pour le système (1.1) si les points d'équilibre de système ne sont pas sur la courbe  $\Gamma$ .

## 1.4 Problème d'intégrabilité

La notion d'intégrabilité pour un système différentiel est basée sur l'existence d'intégrales premières, donc la question qui se pose : Si on a un système différentiel, comment connaître s'il a une intégrale première ? ou si on a une classe des systèmes différentiels qui dépendent de paramètres, comment déterminer les valeurs des paramètres pour lesquelles le système a une intégrale première ? Malheureusement ces questions n'ont pas de bonnes réponses. L'étude du problème d'intégrabilité consiste à déduire l'appartenance du facteur intégrant ou de facteur intégrant inverse à une classe de fonctions donnée, la recherche de ces derniers est liée à la recherche d'une intégrale première.

### 1.4.1 Intégrale première

On dit qu'une fonction  $H : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  est une intégrale première du système (1.1) si elle est constante sur les courbes solutions  $(x(t), y(t))$  de ce système, c'est-à-dire

$$\frac{dH(x, y)}{dt} = \frac{\partial H(x, y)}{\partial x}P(x, y) + \frac{\partial H(x, y)}{\partial y}Q(x, y) \equiv 0,$$

sur les points de  $\Omega$ .

On dit que le système différentiel (1.1) est intégrable sur un ouvert  $\Omega$ , s'il admet une intégrale première sur  $\Omega$ .

## Facteur intégrant

La fonction  $R(x, y)$  est un facteur intégrant du système (1.1) sur l'ouvert  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  si  $R \in C^1(\Omega)$ ,  $R \neq 0$  dans  $\Omega$  et vérifie :

$$\operatorname{div}(RP, RQ) = 0, \quad \text{ou} \quad P \frac{\partial R}{\partial x} + Q \frac{\partial R}{\partial y} = -R \operatorname{div}(P, Q),$$

L'intégrale première  $H$  associée au facteur intégrant  $R$  est donnée par

$$H(x, y) = \int R(x, y)P(x, y)dy + h(x),$$

où  $h$  une fonction de  $x$  et  $H$  satisfait  $\frac{\partial H}{\partial x} = -RQ$ . Alors

$$\begin{cases} \dot{x} = RP = \frac{\partial H}{\partial y}, \\ \dot{y} = RQ = -\frac{\partial H}{\partial x}. \end{cases}$$

Inversement, si on a l'intégrale première  $H$  du système (1.1) on peut toujours trouver un facteur intégrant  $R$ .

## Facteur intégrant inverse

La fonction  $V(x, y)$  est un facteur intégrant inverse du système (1.1) sur un ouvert  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  si  $V \in C^1(\Omega)$ ,  $V \neq 0$  sur  $\Omega$  et

$$P \frac{\partial V}{\partial x} + Q \frac{\partial V}{\partial y} = \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) V. \quad (1.3)$$

Il est facile de vérifier que la fonction  $R = \frac{1}{V}$  définit un facteur intégrant, dans  $\Omega \setminus \{V = 0\}$ , du système (1.1).

Le facteur intégrant inverse est parmi les outils qui sont utilisés dans l'étude de l'existence et de la non existence de cycles limites, on peut même déterminer leurs formules en utilisant le facteur intégrant inverse. Cette méthode est introduite par Giacomini, Llibre et Viano en 1996 [14] et est basée sur les Critères suivants :

### Critère 1 [14]

Soit  $(P, Q)$  un champ de vecteur de classe  $C^1$  défini dans un sous ensemble  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  et  $(x(t), y(t))$  une solution périodique de période  $T$ .

Supposons que  $V = V(x, y)$  est une solution de classe  $C^1$  de l'équation aux dérivées partielles linéaires suivante :

$$P \frac{\partial V}{\partial x} + Q \frac{\partial V}{\partial y} = RV \quad (x, y) \in U, \quad (1.4)$$

où  $R : U \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction de classe  $C^1$  vérifiant  $\int_0^T R(x(t), y(t)) dt \neq 0$ .

Alors la trajectoire fermée  $\gamma = \{(x(t), y(t)) \in U : t \in [0, T]\}$  est contenue dans l'ensemble

$$\Sigma = \{(x, y) \in U : V(x, y) = 0\},$$

et  $\gamma$  n'est pas contenu dans un anneau circulaire. De plus, si le champ de vecteur  $(P, Q)$  et les fonctions  $V$  et  $R$  sont analytiques alors  $\gamma$  est un cycle limite.

**Preuve.** Nous définissons  $R(t) = R(x(t), y(t))$  et  $V(t) = V(x(t), y(t))$ . On considère l'équation différentielle  $\dot{Z} = R(t)Z$ . Sa solution générale est  $Z(t) = Z(0) \exp(\int_0^t R(s) ds)$ . Puisque  $V(x, y)$  est une solution de l'équation aux dérivées partielles (1.4), il s'en suit que  $Z = V(t)$  est la solution de  $\dot{Z} = R(t)Z$ . Donc  $V(t) = V(0) \exp(\int_0^t R(s) ds)$ . Puisque  $(x(t), y(t))$  est une solution périodique de période  $T$ ,  $V(T) = V(0)$ . D'où  $\int_0^T R(s) ds \neq 0$ , on trouve que  $V(0) = 0$  et par conséquent  $V(t) \equiv 0$ .

Maintenant nous supposons que  $\gamma$  est contenu dans un anneau circulaire. Alors il y a un anneau circulaire  $A$  voisinage fermé de  $\gamma$ . Nous notons que  $\gamma$  peut-être dans la limite de  $A$ . Puisque  $\int_\gamma R dt \neq 0$ , si  $A$  est suffisamment borné, alors  $\int_\gamma R dt \neq 0$  pour toute trajectoire fermée  $\gamma'$  dans  $A$ , donc  $A \subset \Sigma$ . Donc contradiction avec le fait que  $\Sigma$  est localement 1-dimensionnel (variété de dimension 1), donc  $\gamma$  n'est pas contenu dans un anneau circulaire.

C'est bien connu dans la théorie des systèmes planaires analytiques que la courbe périodique n'est pas un cycle limite, quand elle est contenue dans un anneau circulaire. Puisque la deuxième possibilité ne peut pas se produire, donc  $\gamma$  est un cycle limite. ■

### Critère 2 [14]

Soit  $(P, Q)$  un champ de vecteurs de classe  $C^1$  défini dans un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^2$ . Supposons que  $V = V(x, y)$  est une solution de classe  $C^1$  de l'équation linéaire aux dérivées partielles (1.3). Si  $\gamma$  est un cycle limite du système (1.1), alors  $\gamma$  est contenu dans l'ensemble

$$\Sigma = \{(x, y) \in U : V(x, y) = 0\}.$$

## 1.5 L'application de premier retour de Poincaré

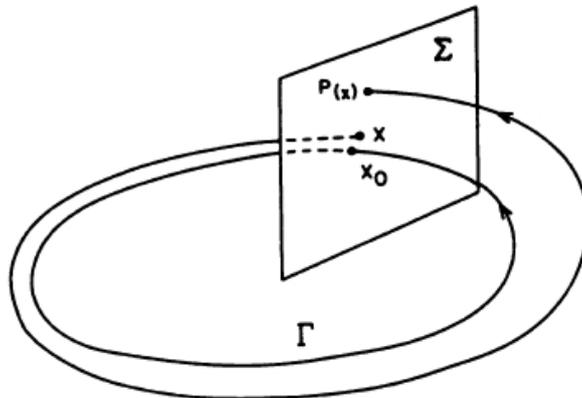
Pour étudier la stabilité des orbites périodiques, l'outil (ou le moyen) le plus fondamental est l'application de premier retour de Poincaré, défini par Henri Poincaré en 1881, voir [16].

L'idée de l'application de Poincaré est simple : Si  $\Gamma$  est une orbite périodique du système

$$x' = f(x) \quad (1.5)$$

passant par le point  $x_0$  et  $\Sigma$  un hyperplan perpendiculaire à  $\Gamma$  en  $x_0$ , alors pour tout point  $x \in \Sigma$  suffisamment proche de  $x_0$ , la solution de (1.5) passant par  $x$  en  $t = 0$ , va retraverser  $\Sigma$  au point  $P(x)$  proche de  $x_0$ , la fonction  $x \rightarrow P(x)$  s'appelle l'application de Poincaré.

L'application de Poincaré peut également être définie lorsque  $\Sigma$  est une surface lisse, passant par un point  $x_0$  de  $\Gamma$ , ce qui n'est pas une tangente à  $\Gamma$  en  $x_0$ . Dans ce cas, on dit que la surface  $\Sigma$  se coupe transversalement avec la courbe  $\Gamma$  en  $x_0$ . Voir la figure suivante :



L'application de premier retour de Poincaré.

Le théorème suivant établit l'existence et la continuité de l'application de Poincaré  $P(x)$  et de sa dérivée première  $DP(x)$ .

**Théorème 1.2** [17] *Soit  $E$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et soit  $f \in C^1(E)$ , supposons que,  $\phi_t(x_0)$  est une solution périodique de (1.5) de période  $T$  et que le cycle :*

$$\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n / x = \phi_t(x_0), \quad 0 \leq t \leq T\},$$

est contenu dans  $E$ . Soit  $\Sigma$  l'hyperplan orthogonal à  $\Gamma$  en  $x_0$ , c'est à dire :

$$\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^n / (x - x_0) \cdot f(x_0) = 0\}.$$

Alors il existe un  $\delta > 0$  et une fonction unique  $\tau(x)$ , définie et continûment différentiable, tel que :

$$\tau(x_0) = T \text{ et } \phi_{\tau(x)}(x) \in \Sigma,$$

pour tout  $x \in N_\delta(x_0)$ .

**Définition 1.11** Soient  $\Gamma$ ,  $\Sigma$ ,  $\delta$  et  $\tau(x)$  définis dans le théorème précédent, alors pour  $x \in N_\delta(x_0) \cap \Sigma$ , la fonction  $P(x) = \phi_{\tau(x)}(x)$  est appelée l'application de premier retour de Poincaré de  $\Gamma$  en  $x_0$ .

**Théorème 1.3** [17] Soit  $E$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  et supposons que  $f \in C^1(E)$ , soit  $\gamma(t)$  une solution périodique de (1.5) de période  $T$ . Alors la dérivée de l'application de Poincaré  $P(s)$  le long d'une ligne droite  $\Sigma$  qui est normale à  $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^2 / x = \gamma(t) - \gamma(0) \quad 0 \leq t \leq T\}$  en  $x = 0$  est donnée par :

$$P'(0) = \exp \int_0^T \nabla \cdot f(\gamma(t)) dt.$$

**Corollaire** [17] Sous les hypothèses du théorème précédent, la solution périodique  $\gamma(t)$  est un cycle limite stable si  $\int_0^T \nabla \cdot f(\gamma(t)) dt < 0$ , et il s'agit d'un cycle limite instable si  $\int_0^T \nabla \cdot f(\gamma(t)) dt > 0$ . Il peut s'agir d'un cycle limite stable, instable ou semi-stable ou appartenir à une bande continue de cycles si cette quantité est égale à zéro.

**Exemple 1.4** Le système (1.2) admet un point d'équilibre à l'origine et un cycle limite  $\Gamma$  donné par :  $(x(t), y(t)) = (\cos t, \sin t)^T$ . On peut trouver l'application de Poincaré de  $\Gamma$  en résolvant le système écrit en coordonnées polaires :

$$\begin{cases} r' = r(1 - r^2), \\ \theta' = 1, \end{cases}$$

avec  $r(0) = r_0$  et  $\theta(0) = \theta_0$ . La première équation peut se résoudre soit comme équation différentielle à variables séparables ou comme une équation de Bernoulli. La solution est donnée par :

$$\begin{aligned} r(t, r_0) &= \left[ 1 + \left( \frac{1}{r_0^2} - 1 \right) e^{-2t} \right]^{-\frac{1}{2}}, \\ \theta(t, \theta_0) &= t + \theta_0. \end{aligned}$$

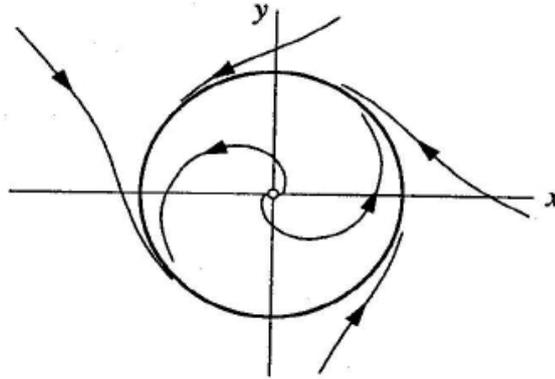


FIG. 1.1 – Portrait de phase du système (1.2).

Si  $\Sigma$  est la droite  $\theta = \theta_0$  passant par l'origine, alors  $\Sigma$  est perpendiculaire à  $\Gamma$  et la trajectoire passant par le point  $(r_0, \theta_0) \in \Sigma \cap \Gamma$  en  $t = 0$  coupe le rayon  $\theta = \theta_0$  une autre fois en  $t = 2\pi$ . Il en résulte que l'application de premier retour de Poincaré est donnée par :

$$P(r_0) = \left[ 1 + \left( \frac{1}{r_0^2} - 1 \right) e^{-4\pi} \right]^{\frac{-1}{2}}.$$

Il est clair que  $P(1) = 1$  est correspond au cycle  $\Gamma$  et on a aussi :

$$P'(r_0) = e^{-4\pi} r_0^{-3} \left[ 1 + \left( \frac{1}{r_0^2} - 1 \right) e^{-4\pi} \right]^{\frac{-3}{2}},$$

et que  $P'(1) = e^{-4\pi} < 1$ . Donc le cycle limite  $\Gamma$  du système (1.2) est stable. Le portrait de phase du système (1.2) est illustré dans la figure suivante :

## 1.6 Critère de Bendixon de non existence

La recherche de solutions périodiques (cycles limites) est conditionnée par le critère de Bendixon stipulant qu'il ne peut y avoir d'orbite fermée entièrement contenue dans une région simplement connexe du plan, si la divergence du champ de vecteurs y garde un signe constant. Dans ce paragraphe, on donne des résultats qui permettent de démontrer la non existence de solutions périodiques pour un système différentiel autonome d'ordre deux.

**Théorème 1.5** (*Critère de Bendixon*)

Soient  $P$  et  $Q$  deux fonctions appartenant à  $C^1(\Omega, \mathbb{R})$ , où  $\Omega$  est un domaine simplement connexe de  $\mathbb{R}^2$ . Considérons le système autonome (1.1).

Si  $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$  n'est pas nulle et ne change pas de signe dans  $\Omega$ , alors le système (1.1) n'admet pas de solutions périodiques dans  $\Omega$ .

**Preuve.** Soit  $\Gamma : X(t), 0 \leq t \leq T$  une trajectoire fermée dans  $\Omega$ . On note par  $D$  l'intérieur de  $\Gamma$ .

Puisque  $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \neq 0$  et ne change pas de signe dans  $D$  alors

$$\iint_D \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy \neq 0,$$

d'autre part en appliquant la formule de Green on a :

$$\begin{aligned} \iint_D \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy &= \oint_{\Gamma} (P dx - Q dy) \\ &= \oint_{\Gamma} (P \dot{y} - Q \dot{x}) dt = \oint_{\Gamma} (P \dot{Q} - P \dot{P}) dt = 0, \end{aligned}$$

qui est une contradiction.

Donc le système (1.1) n'admet pas de solutions périodiques dans  $\Omega$ .

## 1.7 Critère de Dulac de non existence

**Théorème 1.6** (*Critère de Dulac*) [17]

Considérons le système :  $\dot{x} = f(x), x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, f = (f_1, f_2)$ .

Soit  $\Omega$  un domaine simplement connexe dans  $\mathbb{R}^2$  et soit  $\mu$  une fonction scalaire de classe  $C^1$  et positive dans  $\Omega$ , si

$$\operatorname{div}(\mu(x) f(x)) = \frac{\partial(\mu(x) f_1(x))}{\partial x_1} + \frac{\partial(\mu(x) f_2(x))}{\partial x_2},$$

ne s'annule pas sur aucun sous ensemble ouvert de  $\Omega$ , alors le système n'admet pas de solutions périodiques dans  $\Omega$ .

**Preuve.** Soit  $\Phi$  une solution périodique dans  $\Omega$  qui entoure une région  $A \subset \Omega$ .  
Puisque  $\operatorname{div}(\mu(x)f(x)) \neq 0$  et ne change pas de signe dans  $A$ , alors

$$\iint_A \operatorname{div}(\mu f) dA \neq 0.$$

D'autre part, en appliquant la Formule de Green on a :

$$\iint_A \operatorname{div}(\mu f) dA = \oint_{\Phi} \mu f \vec{n} dl,$$

où  $\vec{n}$  est la normale vers l'extérieur et  $dl$  l'élément de déplacement le long de  $\Phi$ .

$f\vec{n} = 0$  puisque  $\Phi$  est une solution périodique donc le champ de vecteur est tangent à  $\Phi$ , alors la normale est perpendiculaire à  $f$  et on a :

$$\oint_{\Phi} \mu f \vec{n} dl = 0.$$

En conclusion on a d'une part

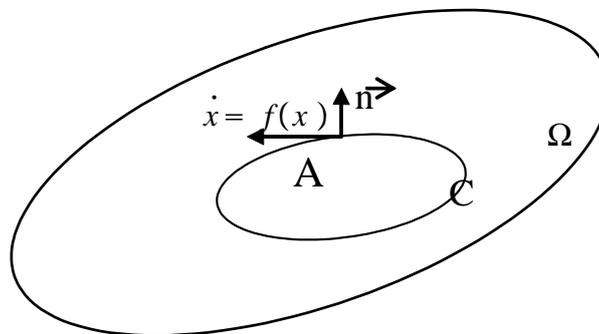
$$\iint_A \operatorname{div}(\mu f) dA \neq 0,$$

et d'autre part

$$\iint_A \operatorname{div}(\mu f) dA = \oint_{\Phi} \mu f \vec{n} dl = 0,$$

qui est une contradiction.

Donc le système  $\dot{x} = f(x)$  n'admet pas de solutions périodiques dans  $\Omega$



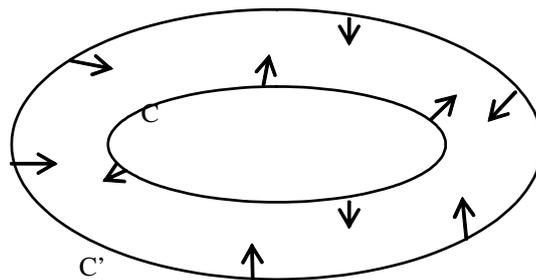
Critère de Dulac de non existence

■

**Théorème 1.7** (*Existence*)

Soient deux courbes fermées  $C$  et  $C'$ , la seconde entoure la première.

Si en chaque point de  $C$ , le vecteur vitesse  $(P, Q)$  de la trajectoire qui y passe est dirigé vers l'extérieur et si en chaque point de  $C'$ , il est dirigé vers l'intérieur, alors il existe au moins un cycle limite compris entre  $C$  et  $C'$ .



Théorème d'existence d'un cycle limite entre  $C$  et  $C'$ .

**Critère de Christopher**

Soit  $f(x, y) = 0$  une courbe algébrique non singulière de degré  $m$  et  $D$  un polynôme du degré 1 tel que la droite  $D = 0$  soit à l'extérieur de toutes les composantes bornées de  $f = 0$ . On choisit les constantes  $\alpha$  et  $\beta$  telles que  $\alpha D_x + \beta D_y \neq 0$ , alors le champ de vecteurs de degré  $m$  suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha f - D f_y, \\ \dot{y} = \beta f + D f_x, \end{cases}$$

a toutes les composantes bornées de  $f(x, y) = 0$  comme cycles limites hyperboliques. En outre, ce champ de vecteurs n'a pas d'autres cycles limites.

**Théorème 1.8** (*Poincaré-Bendixon*) [1]

Soient  $P$  et  $Q$  deux fonctions appartenant à  $C^1(\Omega, \mathbb{R})$ , où  $\Omega$  est un fermé borné de  $\mathbb{R}^2$ . Supposons que :

- Le système (1.1) n'admet pas de point d'équilibre dans  $\Omega$ ,
- L'orbite  $\Gamma = \{(x, y) = (\Phi(t), \Psi(t)), t \geq t_0\}$  reste à l'intérieur de  $\Omega$ .

Alors l'une des deux propositions suivantes est satisfaite :

- 1)  $\Gamma$  est un cycle limite,
- 2)  $\Gamma$  s'enroule en spirale sur un cycle limite.

Dans les deux cas, le système (1.1) admet une solution périodique.

## Chapitre 2

# Systeme linéaire de deux équations différentielles ordinaires

## 2.1 Introduction

La forme générale d'un système linéaire de deux équations différentielles ordinaires est la suivante :

$$\begin{cases} x' = ax + by, \\ y' = cx + dy, \end{cases}$$

ou encore,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

où

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

est une matrice à coefficients constants.

Dans le cas de la linéarisation au voisinage d'un équilibre, la matrice  $A$  est la matrice Jacobienne calculée à cet équilibre.

Tout d'abord, il est facile de voir qu'un système de deux équations différentielles ordinaires est équivalent à une équation différentielle ordinaire du second ordre. En effet, en dérivant la première équation par rapport au temps, on obtient :

$$\begin{aligned} x'' &= ax' + by' \\ &= ax' + b(cx + dy) \\ &= ax' + b\left(cx + d\frac{x' - ax}{b}\right), \end{aligned}$$

d'où

$$x'' - (a + d)x' + (ad - bc)x = 0.$$

Nous pouvons réécrire l'équation en fonction de la trace ( $tr A = a + d$ ) et du déterminant ( $det A = ad - cb$ ) de la matrice  $A$  :

$$x'' - tr Ax' + det Ax = 0.$$

Le résultat inverse est valable, c'est-à-dire qu'une équation du second ordre peut être transformée en un système de deux équations différentielles du premier ordre.

Soit une équation du second ordre :  $ax'' + bx' + cx = 0$ , avec  $a \neq 0$ .

Cette équation peut être écrite sous la forme d'un système de deux équations différentielles du premier ordre en posant  $x' = y$  :

$$\begin{aligned}x' &= y, \\y' = x'' &= -\frac{b}{a}x' - \frac{c}{a}x.\end{aligned}$$

Il est souvent utile de passer d'une forme à l'autre.

## 2.2 Solutions d'un système linéaire en dimension 2

Soit un système linéaire de deux équations différentielles ordinaires du type :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

Soit

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

la matrice des coefficients constants du système linéaire.

Nous allons rechercher la solution de ce système pour une condition initiale donnée :

$$x(0) = x_0 \text{ et } y(0) = y_0.$$

La méthode que nous allons utiliser comporte plusieurs étapes :

- 1) Effectuer un changement de base afin de mettre la matrice sous sa forme de Jordan.
- 2) Résoudre le système dans la nouvelle base.
- 3) Revenir dans la base de départ.

Nous allons donc distinguer ces différents cas.

### 2.2.1 Premier cas : Cas de deux valeurs propres réelles distinctes.

Dans la base de départ, le système s'écrit sous la forme (2.1). Dans le cas de cette section, le discriminant de l'équation caractéristique associée à la matrice  $A$  est positif et cette matrice admet donc deux valeurs propres réelles  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  .

## 2. Système linéaire de deux équations différentielles ordinaires 22

Rappelons les formules qui permettent d'effectuer le changement de la base de départ  $(x, y)$  vers la base de Jordan  $(u, v)$  :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

où  $P$  est la matrice utilisée pour mettre la matrice  $A$  sous sa forme de Jordan.

Rappelons que dans ce cas la matrice  $P$  comporte sur sa première colonne le vecteur propre  $M = (m_1, m_2)^t$  associé à la première valeur propre  $\lambda_1$  et sur sa seconde colonne le vecteur propre  $N = (n_1, n_2)^t$  associé à la seconde valeur propre  $\lambda_2$ , et qu'on a :

$$J = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Dans la nouvelle base, le système s'écrit sous la forme simple suivante :

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

où les deux équations sont découplées :

$$u' = \lambda_1 u \quad \text{et} \quad v' = \lambda_2 v.$$

La solution de ce système est :

$$\begin{aligned} u(t) &= \gamma \exp(\lambda_1 t), \\ v(t) &= \delta \exp(\lambda_2 t). \end{aligned}$$

où  $\gamma$  et  $\delta$  sont des constantes réelles.

La solution du système dans la base de départ s'obtient par retour dans la base d'origine :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \exp(\lambda_1 t) \\ \delta \exp(\lambda_2 t) \end{pmatrix}.$$

Après développement on obtient :

$$\begin{aligned} x(t) &= \gamma m_1 \exp(\lambda_1 t) + \delta n_1 \exp(\lambda_2 t), \\ y(t) &= \gamma m_2 \exp(\lambda_1 t) + \delta n_2 \exp(\lambda_2 t), \end{aligned}$$

qui peut aussi s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} \exp(\lambda_1 t) + \delta \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} \exp(\lambda_2 t).$$

Les constantes  $\gamma$  et  $\delta$  sont déterminées par les conditions initiales.

**Exemple 1 :** Résoudre le système linéaire suivant

$$\begin{cases} x' = 5x - y, \\ y' = 6x. \end{cases}$$

avec la condition initiale  $x(0) = 1$  et  $y(0) = 0$ .

On a

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de la matrice  $A$  associée à ce système sont réelles distinctes :  $\lambda_1 = 3$  et  $\lambda_2 = 2$ . La matrice est diagonalisable en utilisant la matrice de passage suivante :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Dans la base de Jordan, le système s'écrit :

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

dont les solutions sont :

$$\begin{aligned} u(t) &= \gamma \exp(3t), \\ v(t) &= \delta \exp(2t). \end{aligned}$$

où  $\gamma$  et  $\delta$  sont des constantes réelles.

La solution du système dans la base de départ s'obtient par retour dans la base d'origine :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \exp(3t) \\ \delta \exp(2t) \end{pmatrix}.$$

Après développement on obtient :

$$\begin{aligned}x(t) &= \gamma \exp(3t) + \delta \exp(2t), \\y(t) &= 2\gamma \exp(3t) + 3\delta \exp(2t),\end{aligned}$$

Les constantes sont déterminées par la condition initiale :

$$\begin{cases} \gamma + \delta = 1, \\ 2\gamma + 3\delta = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma = 3, \\ \delta = -2. \end{cases}$$

Donc les solutions sont :

$$\begin{aligned}x(t) &= 3 \exp(3t) - 2 \exp(2t), \\y(t) &= 6 \exp(3t) - 6 \exp(2t),\end{aligned}$$

**Exemple 2 :** Résoudre le système linéaire suivant

$$\begin{cases} x' = 3x + 10y, \\ y' = 2x + 4y. \end{cases}$$

On a

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de la matrice  $A$  associée à ce système sont réelles distinctes :  $\lambda_1 = -1$  et  $\lambda_2 = 8$ . La matrice est diagonalisable en utilisant la matrice de passage suivante :

$$P = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dans la base de Jordan, le système s'écrit :

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

dont les solutions sont :

$$\begin{aligned}u(t) &= \gamma \exp(-t), \\v(t) &= \delta \exp(8t).\end{aligned}$$

où  $\gamma$  et  $\delta$  sont des constantes réelles.

La solution du système dans la base de départ s'obtient par retour dans la base d'origine :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \exp(-t) \\ \delta \exp(8t) \end{pmatrix}.$$

Après développement on obtient :

$$\begin{aligned} x(t) &= -5\gamma \exp(-t) + 2\delta \exp(8t), \\ y(t) &= 2\gamma \exp(-t) + \delta \exp(8t). \end{aligned}$$

### 2.2.2 Deuxième cas : Cas d'une valeur propre réelle double.

Avec le changement de base approprié, la matrice peut être mise sous forme de Jordan.

Dans cette nouvelle base, le système s'écrit :

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas, rappelons que la matrice de passage comporte sur sa première colonne le vecteur propre  $M = (m_1, m_2)^t$  associé à la valeur propre double  $\lambda_0$  et sur sa seconde colonne un vecteur  $N = (n_1, n_2)^t$  linéairement indépendant de  $M = (m_1, m_2)^t$  :

$$P = \begin{pmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{pmatrix}.$$

La seconde équation du système linéaire est découplée de la première :

$$v' = \lambda_0 v,$$

et peut être résolue facilement :

$$v(t) = \delta \exp(\lambda_0 t),$$

où  $\delta$  est une constante d'intégration. La substitution de cette solution dans la première équation conduit à l'équation du premier ordre avec second membre suivante :

$$u' = \lambda_0 u + v,$$

ou encore :

$$u' = \lambda_0 u + \delta \exp(\lambda_0 t).$$

La solution de cette équation est :

$$u(t) = (\delta t + \gamma) \exp(\lambda_0 t),$$

où  $\delta$  est une constante réelle.

La solution du système initial s'obtient en revenant dans la base de départ :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\delta t + \gamma) \exp(\lambda_0 t) \\ \delta \exp(\lambda_0 t) \end{pmatrix}.$$

Après développement on obtient :

$$\begin{aligned} x(t) &= (\gamma m_1 + \delta n_1 + \delta m_1 t) \exp(\lambda_0 t), \\ y(t) &= (\gamma m_2 + \delta n_2 + \delta m_2 t) \exp(\lambda_0 t), \end{aligned}$$

les constantes  $\gamma$  et  $\delta$  sont déterminées par les conditions initiales.

**Exemple 1 :** Résoudre le système linéaire suivant

$$\begin{cases} x' = \frac{5}{2}x - \frac{1}{2}y, \\ y' = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y, \end{cases}$$

avec la condition initiale  $x(0) = 1$  et  $y(0) = 0$ .

On a

$$A = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas, la valeur propre de la matrice associée à ce système est réelle et double :  $\lambda_0 = 2$ .

Un choix possible est le vecteur  $M = (1, 1)^t$ , pour le second vecteur qui doit être linéairement indépendant de  $M$ , nous pouvons prendre par exemple  $N = (1, 0)^t$ . Un choix possible de la matrice de passage est le suivant :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice inverse est :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Le changement de base conduit à la matrice diagonale sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} J = P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_0 & c \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Cette matrice n'est pas dans la forme voulue. Afin d'obtenir la forme de Jordan, il faut utiliser une nouvelle matrice qui s'obtient de la manière suivante :

Il faut recommencer l'opération de changement de base avec une nouvelle matrice de passage  $P_1$  qui est donnée par l'expression suivante :

$$P_1 = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

dont l'inverse de  $P_1$  est :

$$P_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Enfin, le changement de base donne cette fois la forme de Jordan voulue :

$$J = P_1^{-1}AP_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}.$$

Dans la base de Jordan, le système s'écrit :

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

dont les solutions sont :

$$\begin{aligned} u(t) &= (\delta t + \gamma) \exp(2t), \\ v(t) &= \delta \exp(2t). \end{aligned}$$

Les solutions s'obtiennent en revenant dans la base de départ :

$$\begin{aligned} x(t) &= (\gamma + 2\delta + \delta t) \exp(2t), \\ y(t) &= (\gamma + \delta t) \exp(2t). \end{aligned}$$

Les constantes sont déterminées par la condition initiale :

$$\begin{cases} \gamma + 2\delta = 1 \\ \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta = \frac{1}{2} \\ \gamma = 0 \end{cases}.$$

Donc les solutions sont :

$$\begin{aligned} x(t) &= \left(1 + \frac{1}{2}t\right) \exp(2t), \\ y(t) &= \frac{1}{2}t \exp(2t). \end{aligned}$$

**Exemple 2 :** Résoudre le système linéaire suivant

$$\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = -x + 4y. \end{cases}$$

On a

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas, la valeur propre de la matrice associée à ce système est réelle et double :  $\lambda_0 = 3$ .

Un choix possible est le vecteur  $M = (1, 1)^t$ , pour le second vecteur qui doit être linéairement indépendant de  $M$ , nous pouvons prendre par exemple  $N = (1, 0)^t$ . Un choix possible de la matrice de passage est le suivant :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice inverse est :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Le changement de base conduit à la matrice diagonale sous la forme suivante :

$$J = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & c \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice n'est pas dans la forme voulue. Afin d'obtenir la forme de Jordan, il faut utiliser une nouvelle matrice qui s'obtient de la manière suivante :

Il faut recommencer l'opération de changement de base avec une nouvelle matrice de passage  $P_1$  qui est donnée par l'expression suivante :

$$P_1 = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

dont l'inverse est :

$$P_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Enfin, le changement de base donne cette fois la forme de Jordan voulue :

$$J = P_1^{-1}AP_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}.$$

Dans la base de Jordan, le système s'écrit :

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

dont les solutions sont :

$$\begin{aligned} u(t) &= (\delta t + \gamma) \exp(3t), \\ v(t) &= \delta \exp(3t). \end{aligned}$$

La solution du système dans la base de départ s'obtient par retour dans la base d'origine :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = P_1 \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\delta t + \gamma) \exp(3t) \\ \delta \exp(3t) \end{pmatrix}.$$

Après développement on obtient :

$$\begin{aligned} x(t) &= (\delta t + \gamma - \delta) \exp(3t), \\ y(t) &= (\delta t + \gamma) \exp(3t). \end{aligned}$$

### 2.2.3 Troisième cas : Cas de deux valeurs propres complexes conjuguées.

Dans ce cas, la matrice  $A$  admet deux valeurs propres complexes et conjuguées :  $\lambda_1 = \alpha + i\beta$  et  $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ .

Avec le changement de base approprié, la matrice  $A$  peut être mise sous forme de Jordan. Dans cette nouvelle base, le système s'écrit :

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

La matrice de passage comporte sur sa première colonne le vecteur  $b$  associé à la partie imaginaire et sur sa seconde colonne le vecteur  $a$  correspondant à la partie réelle des vecteurs propres conjugués  $M_1 = a + ib$  et  $M_2 = a - ib$  :

$$P = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 \\ b_1 & a_2 \end{pmatrix}.$$

Le système d'équations s'écrit donc :

$$\begin{aligned} u' &= \alpha u - \beta v, \\ v' &= \beta u + \alpha v. \end{aligned}$$

Afin de résoudre ce système, nous allons effectuer un changement de coordonnées. Celui-ci peut se faire de deux manières, qui sont d'un point de vue théorique équivalentes, mais dont la mise en oeuvre pratique diffère un peu. La première approche n'utilise que des nombres réels mais nécessite un peu plus de calculs que la seconde qui s'appuie sur l'utilisation des nombres complexes. La première méthode consiste à passer des coordonnées rectangulaires  $(u, v)$  aux coordonnées polaires  $(r, \theta)$ . On a :

$$r = \sqrt{u^2 + v^2}, \quad \tan \theta = \frac{v}{u} \tag{2.2}$$

et aussi :  $u = r \cos \theta$  et  $v = r \sin \theta$

Effectuons le passage en coordonnées polaires, en recherchant l'équation gouvernant le rayon vecteur. En mettant l'équation (2.2) au carré puis en la dérivant il vient :

$$rr' = u'u + vv' = u(\alpha u - \beta v) + v(\beta u + \alpha v) = \alpha (u^2 + v^2) = \alpha r^2.$$

De la même manière, recherchons l'équation gouvernant l'angle  $\theta$  :

$$\frac{d(\tan \theta)}{dt} = \frac{\theta'}{\cos^2 \theta} = \frac{uv' - vu'}{u^2} = \frac{u(\beta u + \alpha v) - v(\alpha u - \beta v)}{u^2} = \frac{\beta (u^2 + v^2)}{u^2}.$$

Dans le système de coordonnées polaires, le système s'écrit finalement :

$$r' = \alpha r \quad \text{et} \quad \theta' = \beta,$$

dont les solutions sont évidentes :

$$r(t) = \gamma \exp(\alpha t) \quad \text{et} \quad \theta(t) = \beta t + \delta,$$

où  $\gamma$  et  $\delta$  sont des constantes d'intégration.

Les solutions  $(u(t), v(t))$  dans la base de Jordan sont donc :

$$\begin{aligned} u(t) &= r(t) \cos \theta(t) = \gamma \exp(\alpha t) \cos(\beta t + \delta), \\ v(t) &= r(t) \sin \theta(t) = \gamma \exp(\alpha t) \sin(\beta t + \delta). \end{aligned}$$

La solution du système initial s'obtient, comme dans les autres cas, en revenant dans la base de départ :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \gamma \exp(\alpha t) \begin{pmatrix} b_1 & a_1 \\ b_1 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\beta t + \delta) \\ \sin(\beta t + \delta) \end{pmatrix}.$$

On obtient finalement :

$$\begin{aligned} x(t) &= \gamma \exp(\alpha t) (b_1 \cos(\beta t + \delta) + a_1 \sin(\beta t + \delta)), \\ y(t) &= \gamma \exp(\alpha t) (b_2 \cos(\beta t + \delta) + a_2 \sin(\beta t + \delta)). \end{aligned}$$

Les constantes  $\gamma$  et  $\delta$  sont déterminées par les conditions initiales. En fait, ces constantes sont données par :

$$r(0) = \gamma \quad \text{et} \quad \theta(0) = \delta.$$

Dans le cas général, cela nécessite encore un peu de calcul pour relier les constantes  $\gamma$  et  $\delta$  aux conditions initiales  $x_0$  et  $y_0$ .

La seconde approche consiste, à la place du changement de coordonnées polaires explicite dans  $\mathbb{R}^2$ , à poser :

$$z(t) = u(t) + iv(t).$$

Il en découle :

$$\begin{aligned} z'(t) &= u'(t) + iv'(t) \\ &= \alpha(u + iv) + \beta(-v + iu) \\ &= \alpha z + i\beta z = \lambda_1 z. \end{aligned}$$

Il s'agit alors d'une équation différentielle à variables séparables comme nous en avons vues en début de chapitre. Sa solution générale s'écrit :

$$z(t) = C \exp(\lambda_1 t),$$

où  $C$  est une constante d'intégration, complexe ici,  $C = z(0) = u(0) + iv(0)$ . D'autre part,

$$\exp(\lambda_1 t) = \exp(\alpha t) \exp(i\beta t) = \exp(\alpha t) (\cos(\beta t) + i \sin(\beta t)).$$

La solution réelle  $(u(t), v(t))$  du système linéaire dans la base de Jordan est donc directement obtenue en prenant les parties réelles et imaginaires respectivement de  $z$ . On obtient :

$$\begin{aligned} u(t) &= \exp(\alpha t) ((u(0)) \cos(\beta t) - v(0) \sin(\beta t)), \\ v(t) &= \exp(\alpha t) ((u(0)) \sin(\beta t) - v(0) \cos(\beta t)). \end{aligned}$$

## 2. Système linéaire de deux équations différentielles ordinaires 32

Comme précédemment, les solutions exprimées dans la base initiale,  $(x(t), y(t))$  sont obtenues en multipliant le vecteur  $(u(t), v(t))$  par la matrice de passage  $P$ .

**Exemple 1 :** Résoudre le système linéaire suivant

$$\begin{cases} x' = 3x + 4y, \\ y' = -2x - y, \end{cases}$$

avec la condition initiale  $x(0) = 1$  et  $y(0) = 0$ .

On a

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

La matrice admet deux valeurs propres complexes et distinctes :  $\lambda_1 = 1 + 2i$  et  $\lambda_2 = 1 - 2i$ . Elle peut être mise sous sa forme de Jordan en utilisant la matrice de passage suivante :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dans la base de Jordan, le système s'écrit :

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Il est plus facile d'écrire ce système avec les coordonnées polaires :

$$r' = r \quad \text{et} \quad \theta' = 2,$$

dont les solutions  $(r(t), \theta(t))$  sont évidentes :

$$r(t) = \gamma \exp(t) \quad \text{et} \quad \theta(t) = 2t + \delta.$$

Les solutions en coordonnées rectangulaires sont donc :

$$\begin{aligned} u(t) &= r(t) \cos \theta(t) = \gamma \exp(t) \cos(2t + \delta), \\ v(t) &= r(t) \sin \theta(t) = \gamma \exp(t) \sin(2t + \delta). \end{aligned}$$

Les solutions en  $(x(t), y(t))$  s'obtiennent en revenant dans la base de départ :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix},$$

ou encore,

$$\begin{aligned} x(t) &= 2\gamma \exp(t) \sin(2t + \delta), \\ y(t) &= \gamma \exp(t) (\cos(2t + \delta) - \sin(2t + \delta)). \end{aligned}$$

Les constantes sont déterminées par la condition initiale :

$$\begin{cases} 2\gamma \sin \delta = 1 \\ \tan \delta = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \gamma = \frac{\pi}{4} \end{cases}.$$

Donc les solutions sont :

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{\pi}{2} \exp(t) \sin\left(2t + \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \\ y(t) &= \frac{\pi}{4} \exp(t) \left(\cos\left(2t + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \sin\left(2t + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right). \end{aligned}$$

**Exemple 2 :** Résoudre le système linéaire suivant

$$\begin{cases} x' = 2x + 9y, \\ y' = -x + 2y, \end{cases}$$

avec la condition initiale  $x(0) = 1$  et  $y(0) = 0$ .

On a

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

La matrice admet deux valeurs propres complexes et distinctes :  $\lambda_1 = 2 + 3i$  et  $\lambda_2 = 2 - 3i$ . Elle peut être mise sous sa forme de Jordan en utilisant la matrice de passage suivante :

$$P = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dans la base de Jordan, le système s'écrit :

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Il est plus facile d'écrire ce système avec les coordonnées polaires :

$$r' = 2r \quad \text{et} \quad \theta' = 3,$$

dont les solutions  $(r(t), \theta(t))$  sont évidentes :

$$r(t) = \gamma \exp(2t) \quad \text{et} \quad \theta(t) = 3t + \delta.$$

Les solutions en coordonnées rectangulaires sont donc :

$$u(t) = r(t) \cos \theta(t) = \gamma \exp(2t) \cos(3t + \delta),$$

$$v(t) = r(t) \sin \theta(t) = \gamma \exp(2t) \sin(3t + \delta).$$

Les solutions en  $(x(t), y(t))$  s'obtiennent en revenant dans la base de départ :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix},$$

ou encore,

$$x(t) = -3\gamma \exp(2t) \cos(3t + \delta),$$

$$y(t) = \gamma \exp(2t) \sin(3t + \delta).$$

## Chapitre 3

Intégrale première et cycles  
limites pour quelques classes de  
systèmes différentiels

### 3.1 Introduction

Ce chapitre est composé de deux parties : Dans la première partie nous considérons une classe de systèmes différentiels planaires de la forme :

$$\begin{cases} x' = P_n(x, y) + xR_m(x, y), \\ y' = Q_n(x, y) + yR_m(x, y), \end{cases}$$

où  $P_n(x, y)$ ,  $Q_n(x, y)$  et  $R_m(x, y)$  sont des polynômes homogènes de degré  $n$ ,  $n$  et  $m$ , respectivement. Nous nous intéressons à déterminer l'expression exacte de l'intégrale première et les courbes qui sont formées par les orbites de ces systèmes. Voir [2].

Dans la seconde partie nous déterminons les conditions d'existence d'un cycle limite ainsi que son expression exacte pour une classe de systèmes différentiels cubiques de la forme :

$$\begin{cases} x' = nx + (\lambda x + \beta y)(ax^2 + bxy + ay^2), \\ y' = ny - (\beta x - \lambda y)(ax^2 + bxy + ay^2), \end{cases}$$

où  $n$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $\lambda$  et  $\beta$  sont des paramètres réels. De plus, nous montrons que ce cycle limite est non algébrique. Voir [3].

### 3.2 Expression exacte de l'intégrale première pour une classe de systèmes différentiels

Dans cette partie, nous nous intéressons à déterminer l'expression exacte de l'intégrale première et les courbes qui sont formées par les orbites de systèmes différentiels planaires de la forme :

$$\begin{cases} x' = P_n(x, y) + xR_m(x, y), \\ y' = Q_n(x, y) + yR_m(x, y), \end{cases} \quad (3.1)$$

où  $P_n(x, y)$ ,  $Q_n(x, y)$  et  $R_m(x, y)$  sont des polynômes homogènes de degré  $n$ ,  $n$  et  $m$ , respectivement. Nous définissons les polynômes trigonométriques :

$$f_1(\theta) = P_n(\cos \theta, \sin \theta) \cos \theta + Q_n(\cos \theta, \sin \theta) \sin \theta,$$

$$f_2(\theta) = R_m(\cos \theta, \sin \theta) \text{ et}$$

$$f_3(\theta) = Q_n(\cos \theta, \sin \theta) \cos \theta - P_n(\cos \theta, \sin \theta) \sin \theta.$$

Le résultat principal sur l'intégrale première et les courbes qui sont formées par les orbites du système (3.1) est contenu dans le théorème suivant :

**Théorème 3.1** *On considère le système différentiel (3.1), alors on a :*

(a) *Si  $f_3(\theta) \neq 0$  pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$  et  $\lambda \neq 0$ , alors le système (3.1) est intégrable et son intégrale première est*

$$H(x, y) = (x^2 + y^2)^{\frac{\lambda}{2}} \exp\left(-\lambda \int^{\arctan \frac{y}{x}} A(\omega) d\omega\right) - \lambda \int^{\arctan \frac{y}{x}} \exp\left(-\lambda \int^w A(\omega) d\omega\right) B(w) dw,$$

où  $A(\theta) = \frac{f_1(\theta)}{f_3(\theta)}$ ,  $B(\theta) = \frac{f_2(\theta)}{f_3(\theta)}$  et  $\lambda = n - m - 1$ .

*De plus, les courbes qui sont formées par les orbites du système différentiel (3.1), s'écrivent :*

$$x^2 + y^2 = \left( \begin{array}{c} h \exp\left(\lambda \int^{\arctan \frac{y}{x}} A(\omega) d\omega\right) + \\ \lambda \exp\left(\lambda \int^{\arctan \frac{y}{x}} A(\omega) d\omega\right) \int^{\arctan \frac{y}{x}} \exp\left(-\lambda \int^w A(\omega) d\omega\right) B(w) dw \end{array} \right)^{\frac{2}{\lambda}},$$

où  $h \in \mathbb{R}$ .

(b) *Si  $f_3(\theta) \neq 0$  pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$  et  $\lambda = 0$ , alors le système (3.1) est intégrable et son intégrale première est*

$$H(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \exp\left(-\int^{\arctan \frac{y}{x}} (A(\omega) + B(\omega)) d\omega\right).$$

*De plus, les courbes qui sont formées par les orbites du système différentiel (3.1), s'écrivent :*

$$\sqrt{x^2 + y^2} = h \exp\left(\int^{\arctan \frac{y}{x}} (A(\omega) + B(\omega)) d\omega\right),$$

où  $h \in \mathbb{R}$ .

(c) *Si  $f_3(\theta) = 0$  pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ , alors le système (3.1) est intégrable et son intégrale première est  $H(x, y) = \frac{y}{x}$ .*

*De plus, les courbes qui sont formées par les trajectoires du système différentiel (3.1), s'écrivent :  $y = hx$  où  $h \in \mathbb{R}$ .*

**Preuve.** Pour démontrer (a), (b) et (c), on écrit le système différentiel polynomial (3.1) en coordonnées polaires  $(r, \theta)$ , définies par  $x = r \cos \theta$  et  $y = r \sin \theta$ , donc le système (3.1) devient :

$$\begin{cases} r' = f_1(\theta) r^n + f_2(\theta) r^{m+1}, \\ \theta' = f_3(\theta) r^{n-1}, \end{cases} \quad (3.2)$$

où les fonctions  $f_1(\theta)$ ,  $f_2(\theta)$  et  $f_3(\theta)$  sont données dans l'introduction et  $r' = \frac{dr}{dt}$ ,  $\theta' = \frac{d\theta}{dt}$ .

(a) Supposons  $f_3(\theta) \neq 0$  pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$  et  $\lambda \neq 0$  :

Prenons la variable  $\theta$  comme une nouvelle variable indépendante, alors le système différentiel (3.2) devient l'équation différentielle de Bernoulli :

$$\frac{dr}{d\theta} = A(\theta)r + B(\theta)r^{1-\lambda}, \quad (3.3)$$

où les fonctions  $A(\theta)$  et  $B(\theta)$  sont définies dans l'hypothèse (a) du théorème 2.1 et  $\lambda = n - m - 1$ . En introduisant le changement de variables de type  $\rho = r^\lambda$ , l'équation différentielle de Bernoulli (3.3) devient l'équation linéaire :

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \lambda(A(\theta)\rho + B(\theta)). \quad (3.4)$$

La solution générale de l'équation linéaire (3.4) est

$$\rho(\theta) = \exp\left(\lambda \int^\theta A(\omega) d\omega\right) \left(\alpha + \lambda \int^\theta \exp\left(-\lambda \int^w A(\omega) d\omega\right) B(w) dw\right),$$

où  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Alors le système (3.1) est intégrable et son intégrale première est

$$H(x, y) = (x^2 + y^2)^{\frac{\lambda}{2}} \exp\left(-\lambda \int^{\arctan \frac{y}{x}} A(\omega) d\omega\right) - \lambda \int^{\arctan \frac{y}{x}} \exp\left(-\lambda \int^w A(\omega) d\omega\right) B(w) dw.$$

Les courbes  $H = h$  avec  $h \in \mathbb{R}$  qui sont formées par les orbites du système différentiel (3.1), s'écrivent sous la forme :

$$x^2 + y^2 = \left( \frac{h \exp\left(\lambda \int^{\arctan \frac{y}{x}} A(\omega) d\omega\right) + \lambda \exp\left(\lambda \int^{\arctan \frac{y}{x}} A(\omega) d\omega\right) \int^{\arctan \frac{y}{x}} \exp\left(-\lambda \int^w A(\omega) d\omega\right) B(w) dw}{\lambda} \right)^{\frac{2}{\lambda}}.$$

Ainsi (a) du Théorème 3.1 est démontré.

(b) Supposons maintenant  $f_3(\theta) \neq 0$  pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$  et  $\lambda = 0$  :

Prenons la variable  $\theta$  comme une nouvelle variable indépendante, alors le système différentiel (3.2) devient l'équation différentielle :

$$\frac{dr}{d\theta} = (A(\theta) + B(\theta))r. \quad (3.5)$$

La solution générale de l'équation linéaire (3.5) est

$$r(\theta) = \alpha \exp \left( \int^{\theta} (A(\omega) + B(\omega)) d\omega \right),$$

où  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Alors le système (3.1) est intégrable et son intégrale première est

$$H(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \exp \left( - \int^{\arctan \frac{y}{x}} (A(\omega) + B(\omega)) d\omega \right).$$

Les courbes  $H = h$  avec  $h \in \mathbb{R}$ , qui sont formées par les orbites du système différentiel (3.1), s'écrivent sous la forme :

$$\sqrt{x^2 + y^2} = h \exp \left( \int^{\arctan \frac{y}{x}} (A(\omega) + B(\omega)) d\omega \right).$$

Ainsi (b) du Théorème 3.1 est démontré.

(c) Supposons maintenant que  $f_3(\theta) = 0$  pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ , donc à partir du système (3.2), il en résulte que  $\theta' = 0$ . Ainsi, les lignes droites passant par l'origine des coordonnées du système différentiel (3.1) sont invariantes par l'écoulement de ce système. Ainsi,  $H(x, y) = \frac{y}{x}$  est une intégrale première du système. Alors les courbes  $H = h$  avec  $h \in \mathbb{R}$ , qui sont formées par les orbites du système différentiel (3.1), s'écrivent sous la forme :  $y = hx$  où  $h \in \mathbb{R}$ .

Ceci termine la démonstration du (c) du Théorème 3.1. ■

L'exemple suivant est donné pour illustration.

**Exemple 3.2** Prenons  $P_3(x, y) = x^3 - x^2y + xy^2 - y^3$ ,  $Q_3(x, y) = x^3 + x^2y + xy^2 + y^3$  et  $R_0(x, y) = -1$ , alors le système (3.1) s'écrit :

$$\begin{cases} x' = -x + x^3 - x^2y + xy^2 - y^3, \\ y' = -y + x^3 + x^2y + xy^2 + y^3. \end{cases} \quad (3.6)$$

Le système (3.6) est intégrable et son intégrale première est

$$H(x, y) = (x^2 + y^2 - 1) \exp \left( -2 \arctan \frac{y}{x} \right).$$

Les courbes qui sont formées par les orbites de système différentiel (3.6) s'écrivent sous la forme :  $x^2 + y^2 - 1 = h \exp \left( 2 \arctan \frac{y}{x} \right)$  où  $h \in \mathbb{R}$ .

### 3.3 Expression exacte du cycle limite pour une classe cubique de systèmes différentiels

Dans cette partie nous déterminons les conditions pour l'existence d'un cycle limite ainsi que son expression exacte pour une classe de systèmes différentiels, de plus, nous montrons que ce cycle limite est non algébrique. Des exemples concrets présentant l'applicabilité de notre résultat sont introduits.

Le résultat principal est contenu dans le théorème suivant :

**Théorème 3.3** *Considérons le système différentiel polynomial cubique suivant :*

$$\begin{cases} x' = nx + (\lambda x + \beta y)(ax^2 + bxy + ay^2), \\ y' = ny - (\beta x - \lambda y)(ax^2 + bxy + ay^2). \end{cases} \quad (3.7)$$

Le système (3.7) admet un cycle limite non algébrique, donné explicitement en coordonnées polaires  $(r, \theta)$ , par :

$$r(\theta, r_*) = e^{-\frac{\lambda}{\beta}\theta} \sqrt{r_*^2 - 2 \int_0^\theta \left( \frac{n}{a\beta + \frac{1}{2}b\beta \sin 2s} e^{\frac{2\lambda}{\beta}s} \right) ds},$$

où  $n, a, b, \lambda, \beta$  et  $r_*$  sont des paramètres réels, tels que  $2a > |b|$ ,  $\beta > 0$ ,  $n > 0$ ,  $\lambda < 0$  et

$$r_* = \sqrt{\frac{4n}{\beta} \frac{1}{1 - e^{\frac{4\lambda}{\beta}\pi}} \int_0^{2\pi} \left( \frac{e^{\frac{2\lambda}{\beta}s}}{2a + b \sin 2s} \right) ds}.$$

**Preuve.** Pour démontrer ce théorème, on écrit le système différentiel polynomial (3.7) en coordonnées polaires  $(r, \theta)$  définies par  $x = r \cos \theta$  et  $y = r \sin \theta$ . Le système (3.7) s'écrit :

$$\begin{cases} r' = nr + \lambda \left( a + \frac{1}{2}b \sin 2\theta \right) r^3, \\ \theta' = -\beta \left( a + \frac{1}{2}b \sin 2\theta \right) r^2, \end{cases} \quad (3.8)$$

où  $\theta' = \frac{d\theta}{dt}$  et  $r' = \frac{dr}{dt}$ .

Puisque  $2a > |b|$  et  $\beta > 0$ , on déduit que  $\theta'$  est négatif pour tout  $t$ . Ce qui signifie que les orbites  $(r(t), \theta(t))$  du système (3.8) ont une orientation opposée par rapport à celles  $(x(t), y(t))$  du système (3.7).

On prend une nouvelle variable indépendante, la coordonnée  $\theta$ . Le système différentiel (3.8) s'écrit :

$$\frac{dr}{d\theta} = -\frac{\lambda}{\beta}r + \frac{-2n}{2a\beta + b\beta \sin 2\theta} \frac{1}{r}, \quad (3.9)$$

qui est une équation de Bernoulli.

On fait le changement de variable  $\rho = r^2$ , on obtient une équation différentielle linéaire

$$\frac{d\rho}{d\theta} = -\frac{2\lambda}{\beta}\rho + \frac{-4n}{2a\beta + b\beta \sin 2\theta}. \quad (3.10)$$

La solution générale de l'équation différentielle linéaire (3.10) est

$$\rho(\theta) = \left( \frac{n}{\beta} \int_0^\theta \left( \frac{-4e^{\frac{2\lambda}{\beta}s}}{2a + b \sin 2s} \right) ds + k \right) e^{-\frac{2\lambda}{\beta}\theta}, \quad (3.11)$$

où  $k \in \mathbb{R}$ .

Donc, la solution générale de l'équation de Bernoulli (3.9) est

$$r(\theta) = e^{-\frac{\lambda}{\beta}\theta} \sqrt{\frac{n}{\beta} \int_0^\theta \left( \frac{-4e^{\frac{2\lambda}{\beta}s}}{2a + b \sin 2s} \right) ds + k}, \quad (3.12)$$

où  $k \in \mathbb{R}$ .

La solution  $r(\theta, r_0)$  de l'équation différentielle de Bernoulli (3.9) telle que  $r(0, r_0) = r_0$  est

$$r(\theta, r_0) = e^{-\frac{\lambda}{\beta}\theta} \sqrt{\frac{n}{\beta} \int_0^\theta \left( \frac{-4e^{\frac{2\lambda}{\beta}s}}{2a + b \sin 2s} \right) ds + r_0^2}, \quad (3.13)$$

où  $r_0 = r(0)$ .

Une solution périodique du système (3.8) doit satisfaire à la condition :  $r(2\pi, r_0) = r(0, r_0)$ , ce qui conduit à une valeur unique  $r_0 = r_*$ , donnée par :

$$r_* = \sqrt{\frac{4n}{\beta} \frac{1}{1 - e^{\frac{4\lambda}{\beta}\pi}} \int_0^{2\pi} \left( \frac{e^{\frac{2\lambda}{\beta}s}}{2a + b \sin 2s} \right) ds}. \quad (3.14)$$

Puisque  $2a > |b|$ ,  $\beta > 0$ ,  $n > 0$  et  $\lambda < 0$ , nous avons  $2a + b \sin 2s > 0$  pour tout  $s \in [0, 2\pi]$ . Par conséquent  $r_* > 0$ .

On remplace  $r_0$  par cette valeur de  $r_*$  dans (3.13), nous obtenons la solution

$$r(\theta, r_*) = 2e^{-\frac{\lambda}{\beta}\theta} \sqrt{\frac{-n}{\beta} \int_0^\theta \left( \frac{e^{\frac{2\lambda}{\beta}s}}{2a + b \sin 2s} \right) ds + \frac{n}{\beta} \left( \frac{1}{1 - e^{\frac{4\lambda}{\beta}\pi}} \right) \int_0^{2\pi} \left( \frac{e^{\frac{2\lambda}{\beta}s}}{2a + b \sin 2s} \right) ds}. \quad (3.15)$$

Alors si  $r(\theta, r_*) > 0$  pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ , nous aurons  $r(\theta, r_*) > 0$  est une orbite périodique, et par conséquent un cycle limite. Dans ce qui suit on montre que  $r(\theta, r_*) > 0$  pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ . En effet

$$r(\theta, r_*) = 2e^{-\frac{\lambda}{\beta}\theta} \sqrt{\frac{-n}{\beta} \int_{2\pi}^{\theta} \left( \frac{e^{\frac{2\lambda}{\beta}s}}{2a + b \sin 2s} \right) ds - \frac{n}{\beta} \left( \frac{e^{\frac{4\lambda}{\beta}\pi}}{e^{\frac{4\lambda}{\beta}\pi} - 1} \right) \int_0^{2\pi} \left( \frac{e^{\frac{2\lambda}{\beta}s}}{2a + b \sin 2s} \right) ds}.$$

Alors

$$r(\theta, r_*) = 2\sqrt{\frac{n}{\beta}} e^{-\frac{\lambda}{\beta}\theta} \sqrt{\int_{\theta}^{2\pi} \left( \frac{e^{\frac{2\lambda}{\beta}s}}{2a + b \sin 2s} \right) ds - \left( \frac{e^{\frac{4\lambda}{\beta}\pi}}{e^{\frac{4\lambda}{\beta}\pi} - 1} \right) \int_0^{2\pi} \left( \frac{e^{\frac{2\lambda}{\beta}s}}{2a + b \sin 2s} \right) ds} > 0.$$

car  $2a > |b|$ ,  $n > 0$  et  $\lambda < 0$ . Par conséquent  $\left( \frac{e^{\frac{4\lambda}{\beta}\pi}}{e^{\frac{4\lambda}{\beta}\pi} - 1} \right) < 0$

et  $\frac{e^{\frac{2\lambda}{\beta}s}}{2a + b \sin 2s} > 0$  pour tout  $s \in \mathbb{R}$ .

On déduit que,  $r(\theta, r_*)$  est un cycle limite pour le système différentiel (3.7).

La courbe  $(r(\theta) \cos \theta, r(\theta) \sin(\theta))$  dans le plan  $(x, y)$  avec :

$$r(\theta, r_*)^2 = 4e^{-\frac{2\lambda}{\beta}\theta} \left( \frac{-n}{\beta} \int_0^{\theta} \left( \frac{e^{\frac{2\lambda}{\beta}s}}{2a + b \sin 2s} \right) ds + \frac{n}{\beta} \left( \frac{1}{1 - e^{\frac{4\lambda}{\beta}\pi}} \right) \int_0^{2\pi} \left( \frac{e^{\frac{2\lambda}{\beta}s}}{2a + b \sin 2s} \right) ds \right)$$

est non algébrique, en raison de l'expression :

$$4e^{-\frac{2\lambda}{\beta}\theta} \left( \frac{n}{\beta} \left( \frac{1}{1 - e^{\frac{4\lambda}{\beta}\pi}} \right) \int_0^{2\pi} \left( \frac{e^{\frac{2\lambda}{\beta}s}}{2a + b \sin 2s} \right) ds \right).$$

Plus précisément, en coordonnées cartésiennes  $r^2 = x^2 + y^2$  et  $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ , la courbe définie par ce cycle limite est

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 4e^{-\frac{2\lambda}{\beta} \arctan\left(\frac{y}{x}\right)} \left( \frac{-n}{\beta} \int_0^{\arctan\left(\frac{y}{x}\right)} \left( \frac{e^{\frac{2\lambda}{\beta}s}}{2a + b \sin 2s} \right) ds + \frac{n}{\beta} \left( \frac{1}{1 - e^{\frac{4\lambda}{\beta}\pi}} \right) \int_0^{2\pi} \left( \frac{e^{\frac{2\lambda}{\beta}s}}{2a + b \sin 2s} \right) ds \right) = 0.$$

Mais il n'y a pas un entier  $n$  pour lequel  $\frac{\partial^{(n)} f}{\partial x^n}$  et  $\frac{\partial^{(n)} f}{\partial y^n}$  disparaissent à la fois.

Pour être convaincu par ce fait, on doit calculer, par exemple  $\frac{\partial f}{\partial x}$  :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x - \frac{4\frac{n}{\beta}y}{(x^2 + y^2)(2a + b \sin(2 \arctan \frac{y}{x}))} - \frac{8\lambda n}{\beta^2} \left( \frac{y \exp\left(-\frac{2\lambda}{\beta} \arctan \frac{y}{x}\right)}{x^2 + y^2} \right) \left( \begin{array}{l} \left( \frac{1}{1 - e^{\frac{4\lambda}{\beta}\pi}} \right) \int_0^{2\pi} \left( \frac{e^{\frac{2\lambda}{\beta}s}}{2a + b \sin 2s} \right) ds - \\ \int_0^{\arctan(\frac{y}{x})} \left( \frac{e^{\frac{2\lambda}{\beta}s}}{2a + b \sin 2s} \right) ds \end{array} \right).$$

Puisque  $f(x, y)$  apparaît à nouveau, donc  $f(x, y)$  reste dans l'ordre de dérivation, alors la courbe  $f(x, y) = 0$  est non-algébrique et le cycle limite sera également non algébrique. ■

Les exemples suivants sont donnés pour illustration.

**Exemple 3.4** Prenons :  $a = \beta = n = 1$  et  $\lambda = b = -1$ , alors le système (3.7) s'écrit :

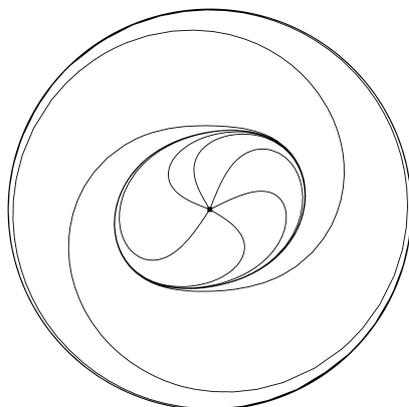
$$\begin{cases} x' = x + (y - x)(x^2 - xy + y^2), \\ y' = y - (y + x)(x^2 - xy + y^2). \end{cases} \quad (3.16)$$

Le système (3.16) admet un cycle limite non algébrique dont l'expression en coordonnées polaires  $(r, \theta)$  est

$$r(\theta, r_*) = e^\theta \sqrt{r_*^2 - 4 \int_0^\theta \left( \frac{e^{-2s}}{2 - \sin 2s} \right) ds},$$

où  $\theta \in \mathbb{R}$  et  $r_* = \sqrt{2 \frac{e^{4\pi}}{e^{4\pi} - 1} \int_0^{2\pi} \left( \frac{2}{2 - \sin 2s} e^{-2s} \right) ds} \simeq 1.1912$ .

Par le programme P4, le Portrait de phase qui contient le cycle limite du système (3.16) est donné dans la figure suivante :



Cycle limite du système (3.16).

**Exemple 3.5** Prenons  $\beta = 1$ ,  $n = a = 2$ ,  $\lambda = -2$  et  $b = -1$ , alors le système (3.7) s'écrit

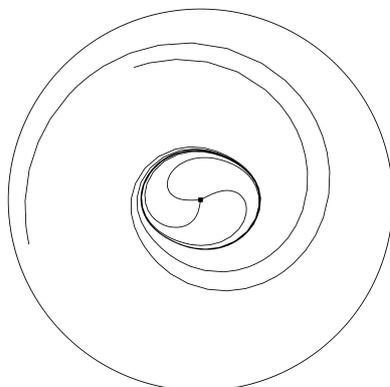
$$\begin{cases} x' = 2x + (-2x + y)(2x^2 - xy + 2y^2), \\ y' = 2y - (x + 2y)(2x^2 - xy + 2y^2). \end{cases} \quad (3.17)$$

Le système (3.17) admet un cycle limite non algébrique dont l'expression exacte dans les coordonnées polaires  $(r, \theta)$  est

$$r(\theta, r_*) = e^{2\theta} \sqrt{r_*^2 - 2 \int_0^\theta \left( \frac{4}{4 - \sin 2s} e^{-4s} \right) ds},$$

où  $\theta \in \mathbb{R}$  et  $r_* = \sqrt{4 \left( \frac{e^{8\pi}}{e^{8\pi} - 1} \right) \int_0^{2\pi} \left( \frac{2}{4 - \sin 2s} e^{-4s} \right) ds} \simeq 0.74808$ .

Par le programme P4, le Portrait de phase qui contient le cycle limite du système (3.17) est donné dans la figure suivante :



Cycle limite du système (3.17).

**Exemple 3.6** Prenons :  $\beta = \sqrt{3}$ ,  $n = \sqrt{2}$ ,  $a = 3$  et  $\lambda = b = -2$ , alors le système (3.7) s'écrit :

$$\begin{cases} x' = \sqrt{2}x + (-2x + \sqrt{3}y)(3x^2 - 2xy + 3y^2), \\ y' = \sqrt{2}y - (\sqrt{3}x + 2y)(3x^2 - 2xy + 3y^2). \end{cases} \quad (3.18)$$

Le système (3.18) admet un cycle limite non algébrique dont l'expression en coordonnées polaires  $(r, \theta)$  est

$$r(\theta, r_*) = e^{\frac{2}{\sqrt{3}}\theta} \sqrt{r_*^2 - 2 \int_0^\theta \left( \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3} - \sqrt{3} \sin 2s} e^{\frac{-4}{\sqrt{3}}s} \right) ds},$$

$$\text{où } \theta \in \mathbb{R} \text{ et } r_* = \sqrt{\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \left( \frac{e^{\frac{8}{\sqrt{3}}\pi}}{e^{\frac{8}{\sqrt{3}}\pi} - 1} \right) \int_0^{2\pi} \left( \frac{2}{6 - 2 \sin 2s} e^{\frac{-4}{\sqrt{3}}s} \right) ds} \simeq 0.53663.$$

**Exemple 3.7** Prenons :  $\beta = \frac{1}{2}$ ,  $n = \frac{1}{5}$ ,  $a = \sqrt{7}$ ,  $\lambda = -\sqrt{5}$  et  $b = \sqrt{2}$ , alors le système (3.7) s'écrit

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{5}x + (-\sqrt{5}x + \frac{1}{2}y)(\sqrt{7}x^2 + \sqrt{2}xy + \sqrt{7}y^2), \\ y' = \frac{1}{5}y - (\frac{1}{2}x + \sqrt{5}y)(\sqrt{7}x^2 + \sqrt{2}xy + \sqrt{7}y^2). \end{cases} \quad (3.19)$$

Le système (3.19) admet un cycle limite non algébrique dont l'expression en coordonnées polaires  $(r, \theta)$  est

$$r(\theta, r_*) = e^{2\sqrt{5}\theta} \sqrt{r_*^2 - 2 \int_0^\theta \left( \frac{4}{10\sqrt{7} + 5\sqrt{2} \sin 2s} e^{-4\sqrt{5}s} \right) ds},$$

$$\text{où } \theta \in \mathbb{R} \text{ et } r_* = \sqrt{\frac{4}{5} \left( \frac{e^{8\sqrt{5}\pi}}{e^{8\sqrt{5}\pi} - 1} \right) \int_0^{2\pi} \left( \frac{2}{2\sqrt{7} + \sqrt{2} \sin 2s} e^{-4\sqrt{5}s} \right) ds} \simeq 0.17905.$$

### 3.4 Conclusion

Dans la première section de ce chapitre on a déterminé l'expression exacte de l'intégrale première et la formule des courbes formées par les orbites d'une classe de systèmes différentiels planaires. Dans la deuxième section de ce chapitre, on a déterminé les conditions d'existence d'un cycle limite pour une classe de systèmes différentiels cubiques planaires pour laquelle nous pouvons obtenir un cycle limite non algébrique donné explicitement.

# Conclusion générale et perspectives

Dans ce travail on s'est intéressé à l'étude qualitative des systèmes différentiels polynômiaux planaires. Il est important pour un système différentiel de savoir s'il admet ou non une intégrale première, une solution périodique, de plus si cette solution périodique est isolée, on parle par définition d'un cycle limite. D'autre part le calcul de l'intégrale première d'un système différentiel planaire détermine complètement le portrait de phase du système. Pour les modèles issus de la pratique, il est important d'étudier ces questions : intégrale première, solution périodique, cycle limite, portrait de phase.

Dans le premier chapitre on a présenté quelques notions de base, concernant la théorie qualitative des systèmes différentiels, en particulier les systèmes différentiels planaires.

Dans le second chapitre on a présenté une méthode pour la résolution des systèmes linéaires de deux équations différentielles ordinaires avec des exemples d'applications, et dans le troisième chapitre on a déterminé l'expression exacte de l'intégrale première et les courbes qui sont formées par les orbites pour une classe de systèmes différentiels. Ensuite dans la seconde partie on a déterminé les conditions d'existence d'un cycle limite ainsi que son expression exacte pour une classe de systèmes différentiels cubiques.

**Pour les perspectives**, vu les techniques qu'on a utilisées pour trouver une classe de systèmes cubiques avec un cycle limite non algébrique, il est possible d'espérer trouver une classe de systèmes différentiels quadratiques qui admettent un cycle limite non algébrique et donné d'une manière explicite. Signalons que ce problème est un problème ouvert jusqu'à présent.

## Annexe. Le programme P4

Dans cette section nous présentons un programme informatique basé sur la théorie des systèmes différentiels polynômiaux planaires. Ce programme est réalisé pour dessiner le portrait de phase de n'importe quel système différentiel polynômial sur le plan obtenu par la compactification de Poincaré. La nouvelle version P5 a changé le langage symbolique de REDUCE au MAPLE, et maintenant il est mis en application plus facilement dans n'importe quel système, WINDOWS, UNIX, ou OS-X de MACINTOSH, c.-à-d. où le MAPLE est disponible.

Le P4 est un outil qui peut être utilisé dans l'étude d'un système différentiel planaire polynômial selon le choix de l'utilisateur, il dessine les portraits de phase sur le disque de Poincaré, ou sur tout rectangle dans le plan fini, ou à l'infini dans une des quatre cartes utilisées dans la compactification. Maintenant nous allons voir comment travaille le P4. En premier lieu P4 vérifie si le champ de vecteurs a un ensemble continu de points singuliers dans le plan c.-à-d., si les deux composants polynômiaux du champ de vecteurs ont un facteur commun. S'ils ont un facteur commun, nous divisons le champ de vecteurs par ce facteur commun et nous étudions le nouveau champ de vecteurs. Parfois, si le champ de vecteurs est trop grand, les logiciels de calcul algébrique utilisés (c.-à-d., REDUCE ou MAPLE) ne peuvent pas trouver ce facteur commun. Dans ces cas le P4 ne fonctionnera pas correctement. Nous déterminons les points singuliers finis isolés. Ceci peut être fait en mode algébrique ou numérique. Dans les deux cas P4 demandera au langage symbolique de résoudre le problème. Si le degré du champ de vecteurs est élevé, la détermination de ces singularités peut prendre beaucoup de temps. Dans ce cas et pour un meilleur fonctionnement, on travaille numériquement.

Pour chaque point singulier  $(x_0, y_0)$ , P4 détermine le portrait de phase local de la façon suivante. D'abord il calcule la matrice Jacobienne pour chaque point

singulier, c.-à.-d.

$$DX_{(x_0, y_0)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix},$$

et calcule ses valeurs propres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ . Nous devons distinguer différents cas, les deux valeurs propres sont réelles, purement imaginaires, ou complexes.

# Bibliographie

- [1] A. A. ANDRONOV, E. A. LEONTOVICH, I. I. GORDON, AND A. L. MAIER, *Qualitative Theory of Second-Order Dynamical Systems*, Wiley, New York, (1973).
- [2] A. BENDJEDDOU AND R. BOUKOUCHA, *Explicit expression for a first integral for some classes of polynomial differential systems*, Int. J. Adv. Appl. Math. and Mech. **3**(1), (2015) 110 – 115.
- [3] A. Bendjeddou, R. Boukoucha, *Explicit limit cycles of a cubic polynomial differential systems*, Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math. **61**(2016), No. 1, 77-85.
- [4] R. BOUKOUCHA AND A. BENDJEDDOU, *On the dynamics of a class of rational Kolmogorov systems*, Journal of Nonlinear Mathematical Physics-Volume 23 No. 1 (2016), 21-27.
- [5] R. BOUKOUCHA, *Explicit limit cycles of a family of polynomial differential systems*, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2017 (2017), No. 217, pp. 1-7.
- [6] R. BOUKOUCHA, *Explicit expression for a hyperbolic limit cycles of a class of polynomial differential systems*, Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN, 2017, Vol. 23. No 3. pp. 300-307.
- [7] R. BOUKOUCHA, *On the non existence of periodic orbits for a class of two dimensional Kolmogorov systems*, Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Matematika. Vol. 2018, No. 1, pp. 3-9.
- [8] J. CAO AND H. JIANG, *Planar polynomial vector fields having first integrals and algebraic limit cycles*, J. Math. Anal. Appl. **361** (2010) 177-186.
- [9] J. CAO, *Limit cycles of polynomial differential systems with homogeneous nonlinearities of degree 4 via the averaging method*, J. Comput. Appl. Math. **220** (2008), 624–631.

- [10] F. DUMORTIER, J. LLIBRE AND J.C. ARTES, *Qualitative Theory of Planar Differential Systems*, Universitext, Springer-Verlag, (2006).
- [11] A. GASULL, H. GIACOMINI AND J. TORREGROSA, *Explicit non-algebraic limit cycles for polynomial systems*, J. of computational and Applied Mathematics **200** (2007), 448–457.
- [12] J. GINE AND J. LLIBRE, *Integrability and algebraic limit cycles for polynomial differential systems with homogeneous nonlinearities*, J. Differential Equations **197** (2004), 147–161.
- [13] A. GASULL AND J. LLIBRE, *Limit cycles for a class of Abel equations*, SIAM J. of Math. Anal. **21** (1990), 1235–1244.
- [14] H. GIACOMINI, J. LLIBRE AND M. VIANO, *On the nonexistence, existence, and uniqueness of limit cycles*, Nonlinearity **9** (1996), 501–516.
- [15] D. HILBERT, *Mathematische Problem (lecture)*, Second Internat. Congress Math. Paris, 1900, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. (1900), pp 253–297.
- [16] H. POINCARÉ, *Memoire sur les courbes définies par une equation differentielle*, J. Mathematiques, **7** (1881), 375–422, Oeuvre (1880-1890), Gauthier-Villiar, Paris.
- [17] L. PERKO, *Differential Equations and Dynamical Systems*, Texts in Applied Mathematics **7**, Springer.
- [18] M.F. SINGER, *Liouvillian first integrals of differential equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **333** (1992), 673–688.
- [19] YE YANQIAN AND OTHERS, *Theory of Limit Cycles*, Transl. Math. Monographs **66**, Amer. Math. Soc., Providence, (1984).
- [20] G. LAVEL, R. PELLAT, *Plasma Physics, in : Proceedings of Summer School of Theoretical Physics*, Gordon and Breach, New York, (1975).
- [21] F. H. BUSSE, *Transition to turbulence via the statistical limit cycle route, Synergetics*, Springer-Verlag, berlin, (1978), p 39.
- [22] R.M. MAY, *Stability and complexity in Model Ecosystems*, Princeton, New Jersey, (1974).
- [23] P. AUGER, C. LETT AND J. C. POGGIALE, *Modélisation Mathématique en écologie*, Dunod, Paris, (2010).

**Résumé :**

L'objectif de ce mémoire est l'étude qualitative de quelques classes de systèmes différentiels planaires. Les résultats obtenus dans cette étude concernent l'intégrabilité et l'existence de solutions périodiques isolées, en d'autres termes, les cycles limites, de plus on détermine explicitement un cycle limite non algébrique pour quelques classes de systèmes différentiels planaires.

**Mots-Clés :** Systèmes différentiels planaires, Intégrale première, Solutions périodiques, Cycles limites algébriques, Cycles limites non algébriques.

**Abstract :**

The objective of this memory is the qualitative study of some classes of planar differential systems. The results obtained in this study concern the integrability and existence of isolated periodic solutions consequently existence of limit cycles, moreover we determined the expression exact of a non algebraic limit cycle for some classes of planar differential systems.

**Key words :** Planar differential systems, First Integral, Periodic solution, Algebraic limit cycle, Non algebraic limit cycle.