

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université A.MIRA-BEJAIA



Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques

Mémoire de Fin de Cycle

Pour l'obtention du diplôme de master

Filière : Mathématiques

Option : Probabilités Statistiques et Applications

Thème

Sur la résolution des Problèmes inverses

Présenté Par :
Imad LOUNIS

Devant le Jury composé de :

Président :	Mr. R. BENMEZIANE	MCB	Université de Béjaïa
Promotrice :	Mme. K. TIMERIDJINE	MCA	Université de Béjaïa
Examinatrice :	Mme. H. BECHIR	MCA	Université de Béjaïa
Examinatrice :	Mme. B. BARACHE	MCB	Université de Béjaïa

Année Universitaire : 2018/2019

Remerciement

Je tiens avant tout à remercier Madame TIMERIDJINE Karima d'avoir bien voulu être rapporteur de ce mémoire. Je voudrais lui dire toute ma gratitude pour tous ses précieux conseils et sa patience tout au long de ce travail, mais aussi pour les nombreuses discussions et échanges que nous avons eu.

Je suis très honoré que Monsieur R.BENMEZIANE, de l'université A/Mira ait accepté de présider mon jury.

Je voudrais exprimer ma gratitude à Mme BECHIR de l'université A/Mira pour l'intérêt qu'elle a bien voulu porter à ce travail et pour avoir accepté d'être membre de mon jury.

Je remercie également Mme BARACHE de l'université A/Mira ait accepté d'être membre de mon jury.

Toute ma reconnaissance à l'ensemble des enseignants du département de mathématiques, tout particulièrement les enseignants de l'option PSA, qui ont enrichi mon cursus universitaire.

Enfin, j'adresse mes remerciements à tous mes proches et amis, qui m'ont toujours soutenu et encouragé. En particulier Ahlem et mes amis de chambre (J308).

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à :

- Mes chers parents qui m'ont soutenu tout au long de mes études.
- Toute ma famille.
- Tous mes amis.
- Toute la promotion de 2ème année PSA (2018/2019).
- Et tous ceux qui ont contribué à ce travail de près ou de loin.

”Imad”

Table des matières

Remerciement	2
Dédicaces	3
Notation	7
Introduction générale	8
0.1 Introduction	8
0.2 Présentation de mémoire	12
1 Notions fondamentales et modélisation des problèmes inverses	13
1.1 Généralité sur les matrices	13
1.1.1 Inverse d'une matrice	14
1.1.2 Les normes	15
1.1.3 Conditionnement d'une matrice	16
1.1.4 Décomposition d'une matrice	16
1.2 Espace de Hilbert	17
1.2.1 Définitions	17
1.2.2 Opérateur linéaire sur un espace de Hilbert	17
1.3 problèmes inverses	18
1.3.1 Modélisation et résolution des problèmes inverses	19
1.3.2 Exemples de problèmes inverse mal posés	21
2 Méthodes de résolution de problèmes mal posés	25
2.1 Introduction	25
2.2 Aspect déterministe et stochastique	25
2.3 Méthode de régularisation de problèmes mal posés	28
2.4 Méthodes directes	29
2.4.1 Méthode de Tikhonov	29
2.4.2 Approche de moindres carrés linéaire	31
2.5 Méthodes itératives	34
2.5.1 Méthode de Landweber	35
2.5.2 Procédures semi itératives et ν -méthodes	35
2.6 Décomposition en valeurs singulières (Méthode SVD)	37

TABLE DES MATIÈRES

2.6.1	Résolution du problème de moindres carrés par décomposition en valeurs singulières	39
2.6.2	La SVD et la stabilité du système $Ax=b$	42
3	Simulation : Comparaison des méthodes Tikhonov et SVD	43
3.1	Introduction	43
3.2	Problème I	43
3.3	Application de la méthode de Tikhonov	44
3.3.1	A et b exacts	44
3.3.2	A exact et b perturbé	46
3.3.3	A perturbé et b exacts	47
3.4	Application de la méthode de décomposition en valeur singulière	49
3.4.1	A et b exacts	49
3.4.2	A exact et b perturbé	50
3.4.3	A perturbé et b exact	51
3.5	Interprétation des résultats	52
	Conclusion générale	54
	Bibliographie	56

Notation

\mathbb{H}, \mathbb{K}	Espaces de Hilbert
\mathbb{E}, \mathbb{F}	Deux espaces vectoriels
\mathbb{R}	Ensemble des nombres réels
A	Opérateur linéaire défini sur un espace de Hilbert
A^*	L'opérateur adjoint de l'opérateur A
ImA	L'image de l'opérateur A
$\ker A$	Le noyau de l'opérateur A
R_α	L'opérateur de régularisation
$\ \cdot\ $	La norme
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Produit scalaire
SVD	Décomposition en valeur singulière
MC	Moindre carrés

Introduction générale

0.1 Introduction

L'analyse statistique et numérique des problèmes inverses en général et des problèmes mal posés en particulier a connu un essor considérable, par l'intérêt porté tant par les mathématiciens purs que par les mathématiciens appliqués à ces problèmes.

La majorité de ces problèmes sont étroitement liés à des phénomènes du monde réel. Les problèmes mal posés sont les plus contraignants d'un point de vue pratique mais les plus attrayants d'un point de vue mathématique.

Le premier traitement des problèmes mal posés date de 1902 a porté sur l'étude du problème de Cauchy pour reconstruire la solution du problème à partir de la condition initiale étudié par J.Hadamard (Mathématicien Français 1865/1963), il introduit dans son livre "Lectures on cauchy's problem in linear partial diffirential équations" la notion de problèmes mal posés, un problème est dit bien posé si :

- Il admet une solution pour toutes les données admissibles (existence);
- la solution du problème est unique (unicité);
- la solution dépend continûment des données (stabilité).

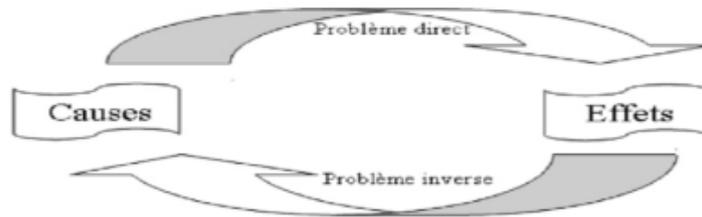
Si l'une au moins des conditions précédentes n'est pas vérifiée, le problème est dit mal posés.

La non-unicité est un problème sérieux. S'il y a plusieurs solutions, il faut un moyen de choisir l'une d'entre elles. Disposer d'une information supplémentaire (information à priori), comme critère du choix d'une unique solution

La question la plus difficile est sans aucun doute, celle de la stabilité. Si l'on change légèrement les données (conditions initiales, conditions aux limites, coefficients, la géométrie du domaine, et les éventuelles variations en temps de ces derniers), la solution varie-t-elle peu ou beaucoup ? C'est-à-dire, varie-t-elle continûment en fonction des données ? Il y a des problèmes où une petite différence dans les paramètres entraîne un comportement totalement différent de la solution.

Le manque de stabilité est problématique, en effet, le fait d'entrer par exemple les données sur un calculateur électronique, ou de remplacer le problème exact par un problème approché implique en général des perturbations sur les données. Si on n'est pas assuré que de « petites » perturbations sur les données entraînent des perturbations « pas trop grandes » sur la solution, il devient très difficile de calculer une solution approchée du problème.

Un problème inverse est une situation dans laquelle les valeurs de certains paramètres (ou inconnues) d'un modèle doivent être identifiées à partir d'observations (ou mesures) du phénomène. C'est également le contraire d'un problème direct. Autrement dit, un problème inverse consiste à déterminer des causes connaissant des effets, ce problème est l'inverse de celui appelé direct, consistant à déduire les effets, les causes étant connues [10].



L'étude des problèmes inverses nécessite de manière générale, une bonne connaissance du problème direct. Le problème est ensuite reformulé sous la forme de la minimisation d'une fonctionnelle d'erreur entre les mesures et la solution issue du modèle direct. Parmi les problèmes inverses, il y a les problèmes linéaires et non-linéaires. Ces derniers sont plus difficiles à traiter. Il existe moins de résultats généraux les concernant.

Les problèmes linéaires, sont quant à eux plus ou moins «faciles» à étudier. L'analyse fonctionnelle et l'algèbre linéaire donnent des méthodes génériques et des résultats précis. Comme par exemple, la décomposition en valeurs singulières de l'opérateur considéré et la régularisation de Tikhonov sont des outils fondamentales pour l'étude des problèmes linéaires.

Selon Tikhonov, on peut reformuler le problème comme suit :

$$A : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{K}$$

Où A un opérateur compact défini d'un espace de Hilbert \mathbb{H} dans un autre espace de Hilbert \mathbb{K} .

L'équation

$$Ax = b$$

est bien posée si elle vérifie les conditions suivantes :

- La solution x existe pour tout b de \mathbb{K} (surjectivité de A);
- Cette solution est unique (injectivité de A);
- A^{-1} est continue.

D'un point de vue statistique, l'un des avantages majeurs est que l'étude des problèmes inverses nous donne un cadre cohérent dans lequel évoluer. On se pose ainsi des questions qui apparaissent logiques pour ce sujet. Les divers travaux à accomplir et les objectifs à atteindre se manifestent alors assez naturellement. Malgré tout, et ceci est essentiel, ce cadre ne limite pas les possibilités.

En effet, les différents grands thèmes statistiques habituels sont présents. On peut s'intéresser à la construction de tests statistiques, ou d'estimateurs,... Les problèmes inverses fournissent donc un cadre, plus difficile, pour faire des statistiques, avec toutes les questions usuelles, plus de nouveaux problèmes directement issus du sujet (opérateurs bruités, bases inadéquates).

Le choix d'une étude intensive des problèmes inverses a été dicté par la richesse du sujet. En effet, le fort développement actuel du thème le confirme. Les problèmes inverses sont réellement présents dans de nombreux domaines. Les mathématiques, bien sûr, avec la base fondamentale que forme la théorie des opérateurs, mais aussi, les équations aux dérivées partielles qui sont à l'origine du premier problème mal-posé d'Hadamard (existence, unicité et stabilité). La physique, où naturellement les chercheurs se sont trouvés confronter à des observations indirectes, les amenant à résoudre des problèmes inverses.

En particulier, en optique et en géophysique où apparaissent de nombreux modèles de stéréologie et autres. L'imagerie médicale est aussi l'un des domaines les plus impliqués dans ce type de problème. La tomographie, notamment, est un sujet récurrent en

radiologie, scanner, IRM.

Les problèmes inverses constituent donc l'un des sujets où le lien entre la théorie mathématique et la pratique est le plus fort. De nombreux prototypes de scanners sont testés dans des universités ou des instituts de recherche à travers le monde (notamment au Japon et aux USA). Cette proximité est, bien entendu, particulièrement stimulante [3].

0.2 Présentation de mémoire

Ce mémoire s'intéresse à quelques méthodes de résolution des problèmes inverses linéaires mal posés. Il est subdivisé comme suit :

Le premier chapitre de ce mémoire est consacré aux préliminaires. Nous donnerons des définitions et les outils de base d'analyse fonctionnelle, en particulier nous présenterons la théorie des opérateurs linéaires nécessaires aux développements des méthodes proposées dans ce manuscrit, et des exemples de problème linéaire mal posés.

Dans le deuxième chapitre, nous présenterons différents types de méthodes de résolution.

Au chapitre 3, une application numérique en matlab sur un problème mal conditionné on compare la méthode de décomposition en valeur singulière et la méthode de Tikhonov aux cas où l'opérateur A^{-1} n'est pas continu (manque de stabilité).

L'objectif de ce travail est de trouver une solution approchée de la solution exacte d'un système linéaires mal posé. Un système linéaire est un ensemble de n équations linéaires à n inconnues. Il s'écrit sous forme matricielle :

$$Ax = b$$

où on cherche à trouver $x \in \mathbb{R}^n$ connaissant le second membre b .

Chapitre 1

Notions fondamentales et modélisation des problèmes inverses

Ce chapitre contient deux sections, dans la première section "Généralités sur les matrices" nous rappelons les concepts de base d'algèbre linéaire nécessaire, relatives aux matrices.

Dans la deuxième section "problèmes mal posés" nous rappelons la notion de problème inverse et problème inverse bien et mal posé.

1.1 Généralité sur les matrices

Définition 1.1.1. Une matrice A de taille $m \times n$, est un tableau rectangulaire d'éléments de K ($K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}), tel que :

$$A = (a)_{ij>0} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ a_{m1} & \cdot & \cdot & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Remarque 1.1.1. 1. m représente le nombre de lignes et n le nombre de colonnes ;

2. Une matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ est carrée d'ordre n si $n = m$;

3. La trace d'une matrice carrée A d'ordre n est la somme de ses éléments diagonaux :

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

4. Une matrice carrée est dite matrice unité, si $\forall i \ a_{ii} = 1$ et $\forall i \neq j \ a_{ij} = 0$;

5. Matrice diagonale $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$.

Définition 1.1.2. Soit A une matrice de $M_{m,n}(K)$. On appelle matrice adjoint de A , notée A^* , la matrice de $M_{m,n}(K)$ définie par :

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\} \quad \begin{cases} A^* = A^t & \text{si } K = \mathbb{R} \\ A^* = (\bar{A})^t & \text{si } K = \mathbb{C} \end{cases}$$

Une matrice A est symétrique si

$$A^t = A$$

Elle est dite hermitienne ou auto-adjointe si $A^* = A$

Définition 1.1.3. Une matrice carrée A est dite normale si et seulement si :

$$A^*A = AA^*$$

1.1.1 Inverse d'une matrice

Définition 1.1.4. Une matrice carrée $A \in M_{n,n}(K)$ est inversible s'il existe une unique matrice carrée $B \in M_{n,n}(K)$ telle que $AB = BA = I_n$, où I_n est la matrice unité de dimension n . La matrice B , si elle existe appelée matrice inverse de A et notée A^{-1} :

Définition 1.1.5. Une matrice carrée non inversible est dite singulière. Une matrice inversible est dite non singulière.

Proposition 1.1.1. *Si A et B sont inversibles, alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

Si A est inversible, alors A^t est inversible et $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t = A^{-t}$.

Preuve 1.1.1. $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = I$ donc (AB) est inversible d'inverse $B^{-1}A^{-1}$.

Et

$$A^t(A^{-1})^t = (A^{-1}A)^t = I$$

1.1.2 Les normes

Normes vectorielles

Définition 1.1.6. *Une norme d'un espace vectoriel E est une application $\|\cdot\|$ de E dans*

\mathbb{R}^+ *qui vérifie les propriétés suivantes :*

Pour tout $x \in E$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

Pour tout $x \in E$, $\|x\| \geq 0$;

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in E$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$;

Pour tout $x, y \in E$, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Dans \mathbb{R}^n , les trois normes les plus courantes sont la norme absolue, la norme euclidienne et la norme infinie.

— *norme absolue : $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$*

— *norme 2 ou euclidienne : $\|x\|_2 = \sqrt{x^t x}$, ou $x = (x_1, \dots, x_n)^t$.*

— *norme infinie : $\|x\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|$;*

La norme euclidienne est donc définie par le produit scalaire $\langle x, y \rangle = x^t y$

Normes matricielles

On suppose que l'on a choisi une norme dans chacun des deux espaces \mathbb{R}^m et \mathbb{R}^n . On

définit alors la norme matricielle subordonnée dans l'espace des matrices $\mathbb{R}^{m \times n}$ par :

$$\text{pour tout } A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

Lorsque les normes absolue, euclidienne ou infinie sont respectivement choisies pour les deux ensembles à la fois, on note les normes subordonnées correspondantes de la même manière.

1.1.3 Conditionnement d'une matrice

Définition 1.1.7. Soit $\|\cdot\|$ une norme matricielle, le conditionnement de la matrice A associée à cette norme, est le nombre

$$\text{cond}(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$$

Remarque 1.1.2. On dira qu'une matrice est bien conditionnée si son conditionnement est proche de 1, (le conditionnement supérieur à 1).

1.1.4 Décomposition d'une matrice

Pour certaines matrices carrées, on peut faire une décomposition ou bien des factorisation. Dans cette partie nous allons rappeler quelques unes des décompositions les plus connues et importantes.

Définition 1.1.8. Une matrice $A \in M_{n,n}(K)$ est diagonalisable s'il existe une matrice P inversible telle que

$$A = PDP^{-1}$$

avec $D \in M_{n,n}(K)$ matrice diagonale.

Nous allons voir aussi la décomposition en valeurs singulières, avec un peu de détails dans le chapitre 2.

1.2 Espace de Hilbert

1.2.1 Définitions

Définition 1.2.1. *Un espace préhilbertien est un espace vectoriel réel ou complexe muni d'un produit scalaire.*

Définition 1.2.2. *On appelle espace de Hilbert un espace préhilbertien dont la norme associée en fait un espace complet.*

Définition 1.2.3. *On dit qu'un espace métrique (X, d) est complet si toute suite de Cauchy de X est convergent dans X , un espace vectoriel normé qui est complet s'appelle espace de Banach*

1.2.2 Opérateur linéaire sur un espace de Hilbert

Sur un espace de Hilbert il sera naturel d'étudier les applications qui respectent à la fois la structure d'espace vectoriel (applications linéaires) et la structure hilbertienne (applications continues).

Soient \mathbb{H} et \mathbb{K} deux espaces de Hilbert

Définition 1.2.4. *Un opérateur (linéaire, continu) A définie sur un espace de Hilbert \mathbb{H} dans un espace de Hilbert \mathbb{K} est une application linéaire continue de \mathbb{H} dans \mathbb{K} , c'est à dire qui vérifie :*

$$1. \forall (u, v) \in \mathbb{H} \times \mathbb{H}, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, A(\alpha u + \beta v) = \alpha Au + \beta Av;$$

$$2. \exists M > 0, \forall u \in \mathbb{H}, \|Au\|_{\mathbb{K}} \leq M\|u\|_{\mathbb{H}}.$$

Le nombre M s'appelle la norme de l'opérateur A qui s'écrit sous la forme :

$$\|A\| = \sup_{u \in \mathbb{H}} \frac{\|Au\|_{\mathbb{K}}}{\|u\|_{\mathbb{H}}} \quad \text{tel que } \|u\| \neq 0$$

Définition 1.2.5. Un opérateur linéaire $A : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{K}$ est dit compact si l'image de tout sous ensemble borné de \mathbb{H} par A est relativement compact dans \mathbb{K} .

Proposition 1.2.1. Soit A un opérateur linéaire définie de H dans K :

Le noyau de A noté $\ker A$ est le sous-espace de \mathbb{H} :

$$\ker A = \{u \in \mathbb{H}, Au = 0\}$$

L'image de A noté ImA est le sous-espace de \mathbb{K} :

$$ImA = \{v \in \mathbb{K}, \exists u \in \mathbb{H}, Au = v\}$$

1.3 problèmes inverses

Un problème inverse est une situation dans laquelle on tente de déterminer les causes d'un phénomène à partir des observations expérimentales de ses effets.

La résolution du problème inverse passe en général par une étape initiale de modélisation du phénomène, dite problème direct qui décrit comment les paramètres du modèle se traduisent en effets observables expérimentalement. Ensuite, à partir des mesures obtenues sur le phénomène réel, la démarche consiste à approximer au mieux les paramètres qui permettent de rendre compte ces mesures. Cette résolution peut se faire par simulation numérique ou de façon analytique. La résolution mathématique est rendue difficile par le fait que les problèmes inverses sont en général des problèmes mal posés, c'est-à-dire que les seules observations expérimentales ne suffisent pas à déterminer parfaitement tous les paramètres du modèle.

1.3.1 Modélisation et résolution des problèmes inverses

Plusieurs problèmes qui se posent dans différents domaines des sciences appliquées peuvent être souvent regardés mathématiquement comme une équation à opérateur. Maintenant on donne de façon plus formelle la forme de problème inverse linéaire. Celui-ci se présente de façon suivante :

Soient \mathbb{E} et \mathbb{F} deux espaces vectoriels et soit $A : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$ un opérateur linéaire. On cherche à trouver une bonne approximation de la solution de l'équation suivante :

$$Ax = b \tag{1.1}$$

lorsqu'on dispose d'une mesure de $b \in \mathbb{F}$.

Les problèmes mal posés vont occuper l'essentielle de notre attention dans ce mémoire. Selon la nature et les propriétés de l'opérateur A . Trois cas majeurs se distinguent pour trouver la solution $x \in \mathbb{E}$

- Si l'opérateur A n'est pas surjectif \Rightarrow pour tout $b \in \mathbb{F}$ la solution n'existe pas ;
- Si l'opérateur A n'est pas injectif \Rightarrow la solution, peut ne pas être unique auquel cas il nous incombe de réfléchir sur quelle solution privilégier ;
- Si A^{-1} n'est pas continu \Rightarrow de petites perturbations sur les données b peuvent engendrer de forts écarts sur la solution.

En d'autres termes, à partir de b on trouve " $x = A^{-1}b$ ", ceci est beaucoup plus délicat que le cas direct où l'on cherche simplement à calculer b à partir de x .

La résolution de l'équation (1.1) nécessite l'inversion d'un opérateur même si b et A sont connus. Cette opération n'est pas forcément évidente d'un point de vue numérique.

Cependant, de nombreux problèmes se posent concernant l'existence, l'unicité ou la

continuité de la solution par rapport à la donnée b . Ces propriétés mises en évidence par Hadamard sont au cœur de la théorie des problèmes inverses.

Il existe plusieurs méthodes pour résoudre l'équation (1.1). Nombre d'entre elles viennent de l'analyse numérique. Citons, en plus des méthodes de régularisation de Tikhonov, que nous allons voir plus en détails dans le deuxième chapitre, la régularisation variationnelle, la régularisation itérative, la décomposition en valeur singulière (SVD) les techniques d'estimation récursives dans les espaces de Hilbert, les méthodes de projection et les méthodes de quasi-solution (pour plus de détails voir [18]).

La méthodologie classique pour la résolution de ces problèmes est de les régulariser en approximant l'opérateur compact auto-adjoint A^*A par un opérateur de régularisation dont l'inverse est continu et converge vers A^*A .

Résoudre ainsi l'équation

$$A^*Ax = A^*b$$

et construire la fonction $x_\alpha^\delta = R_\alpha A^*b^\delta$ où R_α est un opérateur de régularisation qui converge vers l'inverse de l'opérateur (A^*A) . De manière générale, l'opérateur de régularisation dépend d'un paramètre de lissage qui tend vers 0.

Pour démontrer la convergence de l'estimateur x_α^δ vers la vraie solution, on pose la condition suivante $\|x_\alpha - x\|^2 = O(\alpha^\beta)$ où β est un paramètre de contrôle de la vitesse de convergence. L'espace Φ_β défini par :

$$\Phi_\beta = \{x : \|x_\alpha - x\|^2 = O(\alpha^\beta)\}$$

Φ_β s'appelle un espace de saturation.

La condition $x \in \Phi_\beta$ est cruciale pour obtenir la vitesse de convergence de l'estimateur

et intervient dans de nombreux problèmes inverses mal posés. On peut voir par exemple les travaux de Loubes et Vanhems [15].

Donc la régularisation est un moyen systématique pour transformer le problème mal posé en un problème bien posé. Cet avantage à un prix considérable. Régulariser ainsi un problème mal posé revient à faire des hypothèses fortes sur le signal (solution inconnue x) à savoir que :

- Le signal est dans un espace de Hilbert ;
- La solution est optimum bayésien qui consiste à voir le signal x comme une réalisation d'un processus aléatoire centré et dont la matrice de covariance est la matrice du produit scalaire qui définit l'espace de Hilbert.

Ces hypothèses sont parfois difficiles à justifier. Par ailleurs, le choix d'un espace de Hilbert précis est arbitraire, alors qu'il a une influence déterminante sur la forme de la solution. Dans le cas où l'opérateur A est continu dans un espace de Hilbert, l'équation (1.1) est dite mal posée au sens d'Hadamard si A n'admet pas d'inverse borné.

1.3.2 Exemples de problèmes inverse mal posés

On présente dans ce paragraphe quelques exemples simples de problèmes mal posés, les références suivantes nous ont servi de support [7],[10],[19].

Exemple 1.3.1. *Les sondages sont des problèmes mal posés par nature. Pour connaître l'avis d'une population, il est rare d'interroger l'ensemble de la population, sauf dans des cas où l'erreur est interdite (les présidentielles, référendum...). Seul un échantillon est prélevé pour représenter l'ensemble de la population. Il n'est pas rare en France de*

CHAPITRE 1. NOTIONS FONDAMENTALES ET MODÉLISATION DES PROBLÈMES INVERSES

représenter 60 millions d'habitants avec 1000 personnes. Le fait d'extrapoler l'avis de quelques personnes est un problème inverse. Et il est par nature mal posé.

Si l'échantillon ne contient que des doctorants, la représentation sera faussée. La connaissance a priori de la population (statut social, âge,...) est indispensable.

Nous sommes ici dans une approche type bayésienne où les statistiques sont essentielles. Dans ce cas, il peut être plus judicieux de prendre un nombre de personnes bien choisi que de prendre aléatoirement un plus grand nombre. Il s'agit donc d'un compromis entre quantité et qualité de l'information.

Exemple 1.3.2. On souhaite résoudre le système linéaire $Ax = b$, où A est une matrice donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}$$

La solution exacte de $Ax = b$ est :

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Prenons maintenant un second membre b_* très légèrement différent de b , soit :

$$b_* = \begin{pmatrix} 32.1 \\ 22.9 \\ 33.1 \\ 30.9 \end{pmatrix}$$

On vérifie alors que la solution de $Ax = b_*$ est :

$$x = \begin{pmatrix} 9.2 \\ -12.6 \\ 4.5 \\ -1.1 \end{pmatrix}$$

On remarque que de très petites perturbations sur b ont conduit à de grandes variations sur x .

Dans cet exemple et de façon précise, $\text{Cond}(A) = 2984,0924$ (conditionnement de la matrice A qui est défini par : $\text{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$, où la norme choisie est la norme matricielle associée à $\|\cdot\|$ sur \mathbb{R}^4).

Ce phénomène de mauvais conditionnement explique en partie la difficulté de prévoir certains phénomènes. Les appareils de mesure ne sont jamais fiables, et il est impossible de connaître exactement b , cela peut entraîner une très grande imprécision sur la valeur de x .

Exemple 1.3.3. *Le nombre de racines réelles du polynôme $p(x) = -x^2 + 3x - m$ varie de façon discontinue quand m varie continûment sur la droite réelle. Il y a en effet, deux racines réelles si $m \leq \frac{9}{4}$, et aucune racine si $m > \frac{9}{4}$.*

En effet $\Delta = 9 - 4m$ d'où :

- *Si $m > \frac{9}{4}$ on aura $\Delta < 0 \Rightarrow$ pas de racines sur \mathbb{R} ;*
- *Si $m < \frac{9}{4}$ on aura $\Delta > 0 \Rightarrow$ deux racines distinctes;*
- *Si $m = \frac{9}{4}$ on aura $\Delta = 0 \Rightarrow$ une racine double.*

Exemple 1.3.4. *Pour toute fonction intégrable φ , l'équation*

$$\int_0^1 (3x^2t + xt^2 + t^3)\varphi(t) dt = \sin x$$

n'admet pas de solution.

CHAPITRE 1. NOTIONS FONDAMENTALES ET MODÉLISATION DES PROBLÈMES INVERSES

En effet, le membre gauche de l'équation est un polynôme de degré 2 et le membre droit est un sinus et sinus n'est jamais égal à un polynôme.

Chapitre 2

Méthodes de résolution de problèmes mal posés

2.1 Introduction

Les problèmes inverses mal posés sont classés en deux classes, Les problèmes inverses mal posés déterministes et les problèmes inverses mal posés stochastiques.

Dans ce chapitre, Nous allons présenter quelques méthodes de résolutions des problèmes inverses déterministes et stochastiques :

- Les méthodes directes : parmi elles, citons : méthode des moindres carrés, méthode de Tikhonov, méthode de Lavrentiev, méthode de quasi-réversibilité, méthode de décomposition en valeur singulières (SVD).
- les méthodes itérative : on peut citer : méthode de Landweber (1951), procédure semi itératives et v-méthode, méthode du gradient conjugué [12].

Nous nous intéressons spécialement à l'aspect stochastique.

2.2 Aspect déterministe et stochastique

Dans ce chapitre, nous considérons que l'opérateur n'est pas continûment inversible pour un problème mal posés, i.e deux données proches au sens d'une norme, peuvent

conduire à des solutions significativement différentes.

Soit une équation à opérateur linéaire compact, dans beaucoup de cas intéressants, une telle équation est souvent mal posée, puisque un opérateur compact n'est pas continûment inversible.

$$Ax = b \quad (2.1)$$

Où A est opérateur définie $A : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{K}$. \mathbb{H} et \mathbb{K} sont deux espaces de Hilbert. On note par $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire (sur \mathbb{H} ou \mathbb{K}) et par $\|\cdot\|$ leurs normes associées et A^* l'opérateur adjoint de l'opérateur compact A .

Même si on suppose que b appartient à l'image de A , l'approximation $\hat{x} = A^{-1}b$ n'est pas du tout recevable, car l'opérateur A^{-1} n'est pas continu, rien ne garantit qu'une petite perturbation conduira à un estimateur de bonne qualité. Dés lors, il faut réfléchir à des méthodes d'estimation de x qui seront plus fines. Les méthodes de régularisation ont ainsi fait leurs apparitions [19].

Définition 2.2.1. La famille des opérateurs linéaires bornés $\Phi_\alpha : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{K}$ pour un paramètre de régularisation $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, avec une règle de choix du paramètre α :

$$\alpha : \{(\delta, b_\delta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{K}, \exists b \in \text{Im}(A) \|b_\delta - b\| \leq \delta\} \rightarrow \mathbb{R}^+$$

est dite méthode de régularisation linéaire pour l'opérateur A , si :

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} R_\alpha b = A^* b$$

pour tout $b \in \text{Im}(A)$ et si les solutions de régularisations $x_\alpha^\delta = \Phi_\alpha b_\delta$ convergent vers la meilleure solution approximée x^+ pour tout $b \in \text{Im}(A)$ dans le sens suivant :

$$\sup\{\|x_\alpha^\delta - x^+\| : \|b_\delta - b\| \leq \delta\} \quad \text{quand} \quad \delta \rightarrow 0$$

Si α dépend seulement du niveau de bruit δ , on dit que c est une règle a priori du choix du paramètre. Sinon, on dit que c est une règle de choix a posteriori.

On cherche à retrouver le signal (ou fonction) x en utilisant la donnée b . D'un point de vue pratique, ce n'est pas toujours possible, car la valeur exacte de b est généralement inconnue, on a seulement une mesure approximative. On se ramène alors, à la résolution de l'équation

$$b = Ax + \varepsilon \quad (2.2)$$

Où ε représente un bruit ou une erreur. On cherche une solution de l'équation (2.2) qui soit la plus proche possible de la solution de l'équation (2.1).

A partir du moment où la donnée observée b est perturbée, il est difficile voire impossible de retrouver de manière exacte la solution x de l'équation (2.1). Une partie de l'information est en quelque sorte perdue. On espère alors se rapprocher le mieux possible de la solution exacte. Idéalement, plus l'erreur est petite, plus la solution approximée est proche de la solution exacte. Plus formellement, le minimum requis pour un estimateur est de converger "en un sens à préciser" vers la vraie valeur inconnue. i.e $\hat{x} \rightarrow x_e$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$, où x_e est la solution exacte de l'équation (2.1) [19].

Dans la littérature, deux approches différents ont été étudiés pour considérer l'erreur sur les observations [16] :

Approche déterministe

C'est historiquement la première modélisation utilisée. On s'intéresse à l'équation $b = Ax$ pour laquelle seule une donnée bruitée b_ζ est disponible, cette dernière vérifiant :

$$\|b_\zeta - b\| \leq \zeta \quad (2.3)$$

La quantité $\zeta > 0$ modélise l'erreur présente dans b_ζ . pour plus de détails voir les travaux de [1], [2], [17].

Approche stochastique

Cette fois-ci la donnée bruitée est aléatoire. représentée par :

$$b = Ax + \varepsilon \xi \quad (2.4)$$

Où $\varepsilon > 0$ désigne le niveau de bruit, ξ est un élément aléatoire à valeur dans \mathbb{K} , qui représente un bruit blanc, généralement, on le suppose suivre une loi gaussienne.

Pour tout élément $v \in \mathbb{K}$, il est possible d'observer

$$\langle b, v \rangle = \langle Ax, v \rangle + \varepsilon \langle \xi, v \rangle; \text{ pour } \langle \xi, v \rangle \sim N(0, \|v\|^2) \quad (2.5)$$

Pour tout élément $v_1, v_2 \in \mathbb{K}$, la covariance entre $\langle \xi, v_1 \rangle$ et $\langle \xi, v_2 \rangle$ est donnée par :

$$E(\langle \xi, v_1 \rangle \langle \xi, v_2 \rangle) = \langle v_2, v_1 \rangle$$

Ce type d'objet est étudié en détail voir [9].

2.3 Méthode de régularisation de problèmes mal posés

On aborde dans cette partie le principe de quelques méthodes de régularisation. En fait, cette partie est une introduction aux méthodes de régularisation les plus courantes : La méthode de Tikhonov, Pour une lecture plus approfondie on propose de voir le livre de Kirsch [11].

Régulariser un problème mal-posé, c'est le remplacer par un autre bien-posé de sorte que l'erreur commise soit compensée par le gain de stabilité. La principale difficulté dans

l'application d'une méthode de régularisation à un problème particulier est la détermination du paramètre de régularisation lui-même.

On distingue deux types de méthodes pour régulariser un problème mal posés :

2.4 Méthodes directes

2.4.1 Méthode de Tikhonov

La méthode de Tikhonov est une méthode directe parce qu'elle donne (dans le cas d'un problème linéaire de dimension fini) la solution exacte du problème régularisé en un nombre fini d'opérateur. Pour des problèmes de taille modérée, elles sont les plus utilisées. La difficulté de ce type de méthodes est la détermination du paramètre de régularisation. Puisque la méthode des moindres carrés est peu satisfaisantes dans la mesure où la norme de l'opérateur $(A^*A)^{-1}$ est infinie, un terme de régularisation est introduit dans la minimisation de la quantité suivant :

$$\|Ax - b\|^2 + \|\gamma x\|^2$$

On cherche à contrôler la norme de la solution approximée sachant que γ est l'opérateur de régularisation de Tikhonov, qui doit être judicieusement choisi pour le problème considéré. x est la solution inconnue de l'équation (2.1) qu'on cherche à exprimer. L'opérateur γ représente l'identité I . Ce qui favorise les solutions de petites normes. Dans d'autre cas, c'est l'opérateur de différence ou opérateur transformé de fourier pondéré utilisé pour éliminer les variations rapides de la fonction lorsqu'on a de bonnes raisons de croire que x est une approximation d'une fonction continue.

Cette régularisation améliore les conditionnements du problème, permettant ainsi, de trouver une solution unique. Ce qui revient à résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$\hat{x} = \arg \min_{x \in \mathbb{H}} \|Ax - b\|^2 + \|\gamma x\|^2$$

En effet soit G la fonction définie par $G : x \rightarrow \|Ax - b\|^2 + \|\gamma(x)\|^2$.

Proposition 2.4.1. *Pour toute $h \in \mathbb{H}$, la fonction différentielle de G en h est donnée par :*

$$D_x G : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$h \rightarrow D_x G.h = \langle 2A^*(Ax - b) + 2\gamma x, h \rangle$$

Preuve 2.4.1. *pour $x, h \in \mathbb{H}$, tel que $\|h\| \rightarrow 0$:*

$$\begin{aligned} G(x+h) - G(x) &= \langle A(x+h) - b, A(x+h) - b \rangle + \langle \gamma(x+h), \gamma(x+h) \rangle \\ &\quad - \langle Ax - b, Ax - b \rangle - \langle \gamma x, \gamma x \rangle \\ &= 2\langle Ax - b, Ah \rangle + 2\langle \gamma x, \gamma h \rangle + \|Ah\|^2 \\ &= \langle 2A^*(Ax - b) + 2\gamma^* \gamma x, h \rangle + \|Ah\|^2 \\ &= \langle \nabla D_x, h \rangle + o(\|h\|) \end{aligned}$$

On obtient ainsi $\forall h \in \mathbb{H}$

$$\begin{aligned} \nabla_x G = 0 &\Leftrightarrow 2A^*(Ax - b) + 2\gamma^* \gamma x = 0 \\ &\Leftrightarrow (A^*A + \gamma^* \gamma)x = A^*b \end{aligned}$$

A l'aide du théorème de Lax-Milgrame, on donne la solution \hat{x} :

$$\hat{x} = (A^*A + \gamma^* \gamma)^{-1} A^*b$$

L'effet de la régularisation dépend du choix de l'opérateur γ . Dans le cas où $\gamma^* \gamma = \alpha I, \alpha > 0$, l'estimateur de Tikhonov \hat{x}_α est :

$$\hat{x}_\alpha = R_\alpha(A^*A)A^*b = (A^*A + \alpha I)^{-1}A^*b$$

plus α est petite, plus $R_\alpha(A^*A)$ est proche de $(A^*A)^{-1}$ et donc, plus l'erreur induite est importante. Mais, au contraire, la norme $\|\hat{x}_\alpha\|$ sera mieux contrôlé par les grandes valeurs de α , au risque de s'éloigner de la solution exacte x_e .

Pour $\gamma^*\gamma = \alpha I$, lorsque $\alpha = 0$, on revient au cas de la solution non régularisée des moindres carrés pourvu que l'opérateur $(A^*A)^{-1}$ existe [19].

2.4.2 Approche de moindres carrés linéaire

Étant donnée une matrice réelle A d'ordre $m \times n$ et un vecteur b élément de \mathbb{R}^m , nous considérons le problème de la détermination d'un vecteur x élément de \mathbb{R}^n qui vérifie le système linéaire suivant :

$$Ax = b \tag{2.6}$$

Il est bien connu que ce système admet une, et une seule solution, pour tout b élément de \mathbb{R}^m sous les conditions nécessaires et suffisantes qu'il soit équi-contraint ($m = n$) et que sa matrice A soit inversible. Aussi, l'investigation des cas ($m \geq n$) et sur-contraint ($m \leq n$) nous confrontera à l'un des trois cas suivants [14] :

1. Le système linéaire (2.6) admet une solution et une seule ;
2. Le système linéaire (2.6) n'admet pas de solution ;
3. Le système linéaire (2.6) admet une infinité de solutions.

Corollaire 2.4.1. *Si A est définie positive, le système linéaire $Ax = b$ a une solution unique. Dans la pratique, le cas (2) se rencontre en général dans le cas d'un système sur-contraint alors que les systèmes équi-contraints singuliers et sous-contraints conduisent en général à le cas 3.*

Pour résoudre un système linéaire du type (2.6), il nous faut d'abord définir ce que nous appellerons solution aux sens de moindres carrés et sur l'optimisation différentiable pour définir, quel que soit le type de système, une solution qui est toujours unique.

Méthode des moindres carrés

Considérons une matrice $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ et un vecteur $b \in \mathbb{R}^m$, nous cherchons un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ solution du système :

$$Ax = b \tag{2.7}$$

Il est connu que dans le cas $m > n$, ce système n'a en général pas de solution et même si la solution existe, elle ne sera pas unique. Mais dans la pratique, on doit privilégier une solution et on doit choisir x de façon à ce que Ax soit le plus proche possible de b .

La méthode des moindres carrés consiste à minimiser le résidu $\|Ax - b\|_2$, telle que $\|\cdot\|_2$ est la norme euclidienne de \mathbb{R}^n

Soit $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^m$ donnés. On appelle problème de moindre carrés le problème :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2^2 \tag{2.8}$$

On notera \tilde{x} la solution de ce problème.

Explicitons la fonction à minimiser,

$$\text{On pose : } E(x) = \|Ax - b\|_2^2$$

$$E(x) = \langle Ax - b, Ax - b \rangle = x^t A^t A x - b^t A x - x^t A^t b + \|b\|_2^2$$

Le problème des moindres carrés peut donc se reformuler en :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} J(x) = x^t G x - 2h^t x$$

où $G = A^t A$ est symétrique et $h = A^t b$ est un vecteur de \mathbb{R}^n .

On appelle fonction quadratique une fonction $J : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, de la forme :

$$J(x) = x^t Gx - 2h^t x$$

Où G est une matrice $n \times n$ symétrique et h est un vecteur donné de \mathbb{R}^n .

Rappelons que si $J : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continûment dérivable, admet un minimum $\tilde{x} \in \mathbb{R}$, alors

$$J'(\tilde{x}) = 0$$

De manière générale si $J : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est continûment dérivable, alors :

$$J(\tilde{x}) \leq J(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \nabla J(\tilde{x}) = 0, \quad \nabla \text{ Oprateur gradient.}$$

Calcul de gradient de J :

$$\text{On a } J(x) = x^t Gx - 2h^t x, \quad \nabla J(x) = \left(\frac{\partial J}{\partial x_1}, \frac{\partial J}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial J}{\partial x_n} \right)$$

Développons la fonction $J : J(x) = \sum_{i=1}^n x_i (Gx)_i - 2 \sum_{i=1}^n h_i x_i$,

$$\Rightarrow \frac{\partial J}{\partial x_k} = (Gx)_k + \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_k} (Gx)_i - 2h_k,$$

Et

$$\frac{\partial J}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sum_{j=1}^n g_{ij} x_j \right) = g_{ik} = g_{ki}.$$

$$\text{Donc } \frac{\partial J}{\partial x_k} = (Gx)_k + \sum_{i=1}^n x_i g_{ki} - 2h_k = (Gx)_k + (Gx)_k - 2h_k = 2(Gx)_k - 2h_k$$

d'où le résultat : $\nabla J(x) = 2(Gx - h)$.

Et la solution \tilde{x} du problème de moindres carrés vérifie donc nécessairement $G\tilde{x} = h$,

d'où :

$$A^t A \tilde{x} = A^t b \tag{2.9}$$

L'équation (2.9) est dite équation normale.

Remarque 2.4.1. *a/ Quand $m = n$ et A est inversible, donc il existe un unique minimiseur $x = A^{-1}b$. Dans ce cas, un Problème de moindre carré est équivalent à la résolution d'un système linéaire.*

b/ Quand A n'est pas inversible où $m \neq n$ (c'est-à-dire lorsque on est en présence d'un système surdéterminé où d'un système sous déterminé) alors la méthode des moindre carrés permet de généraliser la résolution du système.

c/ Toute solution d'un système (2.7) est solution du problème par la méthode MC. La réciproque est fausse.

2.5 Méthodes itératives

On utilise ces méthodes pour résoudre des problèmes de grande taille, ces méthodes consistent à chercher des suites de solutions approchées qui convergent vers la solution désirée.

Il faut régulariser le processus itératif quand la suite construite ne converge pas vers la solution du problème, puisque dans le cas pratique on se retrouve dans des situations qui nécessitent beaucoup de calcul.

Nous n'examinerons dans ce paragraphe que la plus simple des méthodes itératives : la méthode de Landweber [13], qui a pour principal avantage de se prêter à une analyse simple. Malheureusement, elle converge trop lentement pour être utilisable en pratique, d'autant plus que des méthodes beaucoup plus performantes existent. Les deux plus importantes sont la méthode de Brakhage (voir [4]), et surtout la méthode du gradient conjugué et ses variantes. Cette dernière méthode est celle qui est le plus communément employée. Dans le contexte des problèmes mal posés, un exposé accessible se trouve dans le

livre de Kirch [11].

2.5.1 Méthode de Landweber

L'équation (2.1) peut s'écrire sous la forme suivant :

$$x = x + \rho A^*(b - Ax)$$

tel que $0 < \rho < 1$, on pose $\hat{x}_0 = 0$ pour tout $t > 1$ connaissant \hat{x}_{t-1} la t^{eme} itération de Landweber est définie par la formule de récurrence suivant :

$$\hat{x}_t = \hat{x}_{t-1} + \rho A^*(b - A\hat{x}_{t-1}) \quad (2.10)$$

On prend t de telle sorte que $\|\rho A^*\| < 1$, ce qui garanti la convergence de la méthode lorsque $t \rightarrow \infty$.

Cette méthode n'utilise pas d'inverse d'opérateur. Le paramètre de régularisation est représenté par $\alpha = \frac{1}{t+1}$, si t est grand l'erreur induite sera petite. Par contre, si t est petit l'erreur dans l'estimateur sera complètement contrôlée, au dépend de la précision.

On a

$$R_\alpha(\lambda) = \sum_{j=1}^{t-1} (1 - \lambda)^j$$

avec R_α satisfaisant :

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} R_\alpha(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$$

pour tout $\lambda \in \sigma(A^*A) \setminus \{0\}$.

2.5.2 Procédures semi itératives et ν -méthodes

Cette procédure est une généralisation de méthode du Landweber, les itérations tien-

dront compte des estimateurs obtenus aux itérations précédentes.

On pose $\hat{x}_0 = 0$, pour tout $t > 1$ connaissant $\hat{x}_j, j = 0, \dots, t-1$, la t^{eme} itération, s'écrit

$$\hat{x}_t = \mu_{1,t}\hat{x}_{t-1} + \dots + \mu_{t,t}\hat{x}_0 + \omega_t A^*(b - A\hat{x}_{t-1})$$

avec $\mu_{1,t} + \dots + \mu_{t,t} = 1$

On revient à la méthode de Landweber précédente si on trouve $\mu_{1,t} = \dots = \mu_{t,t} = 0$ et $\omega_t = \rho$.

Cette procédure semi-itérative est plus facile à mettre en œuvre car elle n'utilise pas d'inverse d'opérateur. Elle nécessite beaucoup moins d'itérations, ce qui fait qu'elle réduit le temps de calcul.

Les ν -méthodes sont des cas particuliers des méthodes itératives, elles sont très utilisées en analyse numérique. C'est la méthode semi-itérative avec le choix des paramètres suivants :

$$\mu_1 = 1, \quad \omega_1 = \frac{4\nu + 2}{4\nu}, \quad \text{pour } \nu \in [0, 1]$$

$$\mu_k = 1 \frac{(k-1)(2k-3)(2k+2\nu-1)}{(k+2\varepsilon-1)(2k+4\nu-1)(2k+2\nu-3)}; \quad \omega_k = \frac{(2k+2\nu-1)(k+\varepsilon-1)}{(k+2\varepsilon-1)(2k+4\varepsilon-1)}$$

$$\hat{x}_t = \mu_t \hat{x}_{t-1} + (1 - \mu_t) \hat{x}_{t-2} + \omega_t A^*(b - A\hat{x}_{t-1})$$

Les méthodes de régularisations dépendent du choix du paramètre de régularisation α (ou t) ce qui est une problématique de très grande importance aussi bien en analyse numérique qu'en statistique.

2.6 Décomposition en valeurs singulières (Méthode SVD)

La décomposition en valeurs singulières (Singular Value Décomposition en anglais) est devenue depuis quelques décennies un outil fondamental pour étudier les problèmes linéaires. Cette technique a été initiée par BELTRAMI il y a plus d'un siècle, mais elle devint stable numériquement seulement en 1965 grâce à G.GOLUB [5].

Définition 2.6.1. Une suite de vecteurs $x_1, \dots, x_p \in \mathbb{R}^m$ est orthogonale si $x_i^t x_j = 0$ pour tout $i \neq j$ est orthonormale si $x_i^t x_j = \delta_{ij}$.

Une matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ est orthogonale si $A^t A = I$. Si $A = [a_1, \dots, a_m]$ est orthogonale, alors les a_i forment une base orthogonale de \mathbb{R}^m .

Nous allons à présent, formaliser la décomposition en valeurs singulières. Les sources suivantes nous ont servi de support [6],[8].

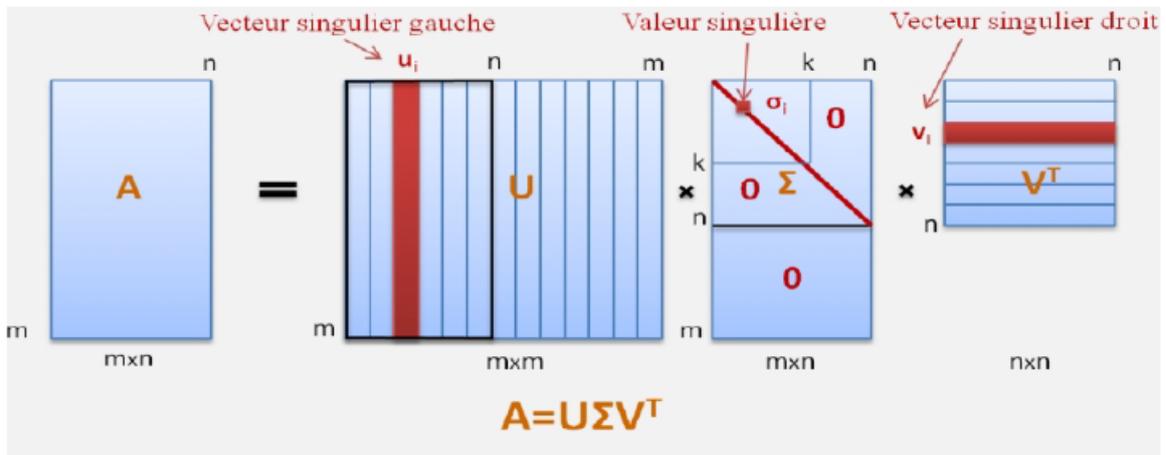
Théorème 2.6.1. Soit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ une matrice de rang r . Il existe deux matrice orthogonales $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$, ($U^t U = U U^t = I_m$) et $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$, ($V^t V = V V^t = I_n$) telles que :

$$A = U \Sigma V^t, \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

$$U^t A V = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r) \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

où $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$ est une matrice dite "pseudo-diagonale", avec $\Sigma_1 = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r)$, $r = \min(m, n)$, et $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$.

Théorème 2.6.2. Si l'on note $U = (u_1, \dots, u_m)$ et $V = (v_1, \dots, v_n)$ les colonnes des matrices U et V , alors les vecteurs u_i et v_j sont respectivement, les vecteur singuliers gauche et droits associés à la valeur singulière σ_i .



Proposition 2.6.1. (voir[13]) On a les relations suivantes :

- i) Le rang de A est égal au nombre de valeurs singulières non-nulles ;
- ii) $\ker A = \text{vect}(v_{r+1}, \dots, v_n)$, $\text{Im}A = \text{vect}(u_1, \dots, u_r)$;
- iii) $\ker A^t = \text{vect}(v_1, \dots, v_r)$, $\text{Im}A^t = \text{vect}(u_{r+1}, \dots, u_m)$;
- iv) $\|A\|_2 = \sigma_1$.

Commentaire :

Le système $Ax = b$ telle que $A = U\Sigma V^t$ admet alors l'inversion, nous obtenons ainsi le vecteur des entrées par :

$$x = V\Sigma^{-1}U^t b$$

Le système est alors équivalent à $\Sigma x' = b'$ telle que $x' = V^t x$ et $b' = U^t b$.

Dans la plupart des cas, le système admet une infinité de solutions (le noyau n'est pas réduit à 0 et le nombre de valeurs singulières est inférieur à n), on parle alors des quasi-solutions. Donc le problème devient un problème de minimisation.

Remarque 2.6.1. *La décomposition d'une matrice est une factorisation en un produit de matrices sous une forme donnée, ce qui facilite son étude. Le procédé de décomposition en valeurs singulières s'apparente en algèbre linéaire à un outil de factorisation des matrices rectangulaires ($m \times n$) réelles ou complexes.*

La décomposition en valeurs propres par contre, ne s'applique que pour certaines matrices carrées. Néanmoins, dans certains cas, les deux décompositions restent liées. Par exemple pour une matrice hermitienne (ou auto-adjointe), semi-définie positive, les valeurs singulières et vecteurs singuliers correspondent aux valeurs et vecteurs propres de la matrice.

D'un point de vue géométrique, la SVD de la matrice A , fournit deux bases de vecteurs orthonormées, à savoir les colonnes des matrices U et V , telles que la principale différence avec la diagonalisation. Bien que toute matrice possède une décomposition en valeurs singulières, seules les matrices normales sont diagonalisables dans une base orthonormée.

2.6.1 Résolution du problème de moindres carrés par décomposition en valeurs singulières

La solution du problème de moindres carrés x donnée par :

$$x = (A^t A)^{-1} A^t b$$

Pour

$$A = U \Sigma V^t$$

on a

$$x = ((U \Sigma V^t)^t (U \Sigma V^t))^{-1} (U \Sigma V^t)^t b$$

$$x = (V\Sigma^2V^t)^{-1}(U\Sigma V^t)^t b \quad \text{puisque } U^tU = I$$

$$x = (V\Sigma^{-2}V^t)(V\Sigma U^t)b \quad \text{puisque } V^tV = I$$

$$x = V\Sigma^{-1}U^t b \quad \Sigma^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{\sigma_i}\right)$$

$$x = \sum_{i=1}^r \frac{u_i^t b}{\sigma_i} v_i$$

où $r = \text{rang}(A)$, et u_i et v_i sont respectivement le $i^{\text{ème}}$ colonne de U et V dans le problème de moindre carrés :

$$\|Ax - b\|_2^2 = \|U\Sigma V^t x - b\|_2^2 = \|\Sigma V^t x - U^t b\|_2^2$$

puisque U est orthogonale. Notons $w = U^t b$ ($\|w\|_2 = \|b\|_2$), et posons $y = V^t x$ ($\|y\|_2 = \|x\|_2$), puisque V est orthogonale, ce qui sera important pour calculer la solution de norme minimale. Comme Σ est diagonale ce problème est découpé, et se résout composante par composante dans les bases (u_1, \dots, u_m) et (v_1, \dots, v_m) .

Nous avons donc :

$$\|Ax - b\|_2^2 = \|\Sigma y - w\|_2^2 = \sum_{i=1}^r |\sigma_i y_i - w_i|^2$$

On obtient donc toutes les solutions du problème $A = U\Sigma V^t$ en posant :

$$y_i = \begin{cases} \frac{w_i}{\sigma_i} & \text{pour } i = 1, \dots, p \\ \text{quelconque} & \text{pour } i = p+1, \dots, n \end{cases} \quad (2.12)$$

Pseudo-inverse et solution au sens des moindres carrés

Une autre application de la décomposition en valeurs singulières consiste en la notion de pseudo-inverse au sens de moindres carrés

$$\Sigma^+ = \begin{pmatrix} 1/\sigma_1 & & & 0 & 0 & 0 \\ : & 1/\sigma_2 & & : & : & : \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1/\sigma_r & & \\ 0 & & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ Si } m \leq n$$

Où

$$\Sigma_r^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{\sigma_1}, \frac{1}{\sigma_2}, \dots, \frac{1}{\sigma_r}\right)$$

Ceci étant, nous utilisons la décomposition $A = U\Sigma V^t$ de la matrice A pour définir son pseudo-inverse A^+ par :

$$A^+ = U\Sigma^+V^t \tag{2.13}$$

De même, de la décomposition $A = U\Sigma V^t$ de la matrice A nous tirons

$$A^tA = U\Sigma^t\Sigma U^t$$

De sorte que la pseudo-inverse $(A^tA)^+$ de la matrice A^tA est définie par :

$$(A^tA)^+ = U\Sigma^+(\Sigma^t)^+U^t$$

Nous sommes maintenant en mesure de fournir une interprétation simple de la solution au sens des moindres carrés définie par (2.9) est :

$$x = (A^tA)^+A^tb$$

Nous retrouvons le fait que, pour tout b élément de \mathbb{R}^n , il existe un unique vecteur solution

de

$$A^t Ax = A^t b$$

Soit l'existence et l'unicité de la solution au sens des moindres carrés (2.9) du système

$$Ax = b$$

Remarque 2.6.2. *La pseudo-inverse d'une matrice est définie à partir de la décomposition en valeur singulière de cette matrice.*

Alors, comme la décomposition SVD n'est pas unique, la matrice pseudo-inverse n'est pas unique.

2.6.2 La SVD et la stabilité du système $Ax=b$

On a

$$A = U\Sigma V^t = \sum_{i=1}^r \sigma_i u_i v_i^t$$

$$\hat{x} = (A^t A)^{-1} A^t b = \sum_{i=1}^r \frac{u_i^t b}{\sigma_i} v_i$$

Si σ_1 (la plus grande valeur singulière de A) est petite, alors un petit changement dans A ou b entraîne un changement significatif dans x , tel que

$$\text{cond}\|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_n}$$

$\|A\| = \sqrt{\lambda_{\max}} = \sigma_1$ tel que λ_{\max} est la valeur propre de $A^t A$

Chapitre 3

Simulation : Comparaison des méthodes Tikhonov et SVD

3.1 Introduction

Dans ce chapitre nous allons présenter un aspect numérique du problème inverse considéré, pour lequel nous mettrons en pratique les deux méthodes, (Méthode de Tikhonov et la méthode de décomposition en valeur singulière). En nous basant sur des résultats numériques, nous déduirons quelle est la méthode qui donne la meilleure solution au système.

3.2 Problème I

En analyse numérique matricielle ainsi qu'en statistique, les données sont généralement entachées d'erreurs et parfois une légère perturbation sur les données peut entraîner une grande perturbation sur la solution du problème considéré.

Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ une matrice carré inversible et $b \in \mathbb{R}^n$ un vecteur colonne. On cherche à étudier l'influence des erreurs d'arrondi de la matrice A et du vecteur b sur la solution $x \in \mathbb{R}^n$ du système $Ax = b$.

$$\begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

La solution exact de ce système est $x_e = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3.3 Application de la méthode de Tikhonov

Dans un premier cas, nous intéressons à la résolution de l'équation (3.1) par la méthode de Tikhonov dans trois cas (A et b exacts, A exacts et b perturbé, A perturbé et b exacts).

Ce problème est un problème mal posé car la troisième condition n'est pas satisfaite (A^{-1} l'inverse de A existe mais n'est pas continue)

3.3.1 A et b exacts

$$\begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

On cherche à trouver solution de l'équation (3.2) :

Application de la méthode de régularisation de Tikhonov

$$A = [10 \ 7 \ 8 \ 7; 7 \ 5 \ 6 \ 5; 8 \ 6 \ 10 \ 9; 7 \ 5 \ 9 \ 10];$$

$$b = [32 \ 23 \ 33 \ 31]';$$

$$x_e = [1 \ 1 \ 1 \ 1]';$$

$$k = \text{cond}(A);$$

$$I = [1 \ 0 \ 0 \ 0; 0 \ 1 \ 0 \ 0; 0 \ 0 \ 1 \ 0; 0 \ 0 \ 0 \ 1];$$

$$x = \text{inv}(A' * A + \alpha I) * A' * b;$$

$$\text{err} = \text{norm}(xe - x);$$

Résultats d'algorithme

résultats pour $\alpha = 0.001$

$$>> k = \text{cond}(A)$$

$$k = 2.9841e + 003$$

$$>> x_1 = \text{inv}(A' * A + \alpha I) * A' * b$$

$$x_1 = (1.1109 \quad -0.8163 \quad 1.0462 \quad 0.9726)^t$$

$$>> \text{err}_1 = \text{norm}(xe - x_1)$$

$$\text{err}_1 = 0.2212$$

résultats pour $\alpha = 0.01$

$$>> x_2 = \text{inv}(A' * A + \alpha I) * A' * b$$

$$x_2 = (1.1210 \quad -0.7994 \quad 1.0505 \quad 0.9700)^t$$

$$>> \text{err}_2 = \text{norm}(xe - x_2)$$

$$\text{err}_2 = 0.2415$$

résultats pour $\alpha = 0.1$

$$>> x_3 = \text{inv}(A' * A + \alpha I) * A' * b$$

$$x_3 = (1.1211 \quad -0.7974 \quad 1.0524 \quad 0.9691)^t$$

$$>> \text{err}_3 = \text{norm}(xe - x_3)$$

$$\text{err}_3 = 0.2438$$

3.3.2 A exact et b perturbé

$$\begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32.43 \\ 23.89 \\ 33.39 \\ 31.77 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

On cherche à trouver la solution de l'équation (3.3) lorsque le second membre est perturbé, le second membre est connu à une erreur aléatoire près, dans notre cas nous avons un erreur $\varepsilon \sim N(0, 1)$.

La solution du nouveau système devient $(-25.35, 44.78, -10.14, 7.66)^t$ il ya une forte instabilité numérique de la solution.

Application de la méthode de régularisation de Tikhonov

$$A = [10 \ 7 \ 8 \ 7; 7 \ 5 \ 6 \ 5; 8 \ 6 \ 10 \ 9; 7 \ 5 \ 9 \ 10];$$

$$b = [32.43 \ 23.89 \ 33.39 \ 31.77]';$$

$$xe = [1 \ 1 \ 1 \ 1]';$$

$$k = \text{cond}(A);$$

$$I = [1 \ 0 \ 0 \ 0; 0 \ 1 \ 0 \ 0; 0 \ 0 \ 1 \ 0; 0 \ 0 \ 0 \ 1];$$

$$y = \text{inv}(A' * A + \alpha I) * A' * b;$$

$$\text{err} = \text{norm}(xe - y);$$

Résultats d'algorithmme

résultats pour $\alpha = 0.001$

$$\gg k = \text{cond}(A)$$

$$k = 2.9841e + 003$$

$$\gg y_1 = \text{inv}(A' * A + \alpha I) * A' * b$$

$$y_1 = (-1.2675 \ 4.9034 \ -0.1289 \ 1.7225)^t$$

$$>> \text{err}_1 = \text{norm}(xe - y_1)$$

$$\text{err}_1 = 4.7090$$

résultats pour $\alpha = 0.01$

$$>> y_2 = \text{inv}(A' * A + \alpha I) * A' * b$$

$$y_2 = (0.9422 \ 1.2434 \ 0.7925 \ 1.1757)^t$$

$$>> \text{err}_2 = \text{norm}(xe - y_2)$$

$$\text{err}_2 = 0.3695$$

résultats pour $\alpha = 0.1$

$$>> y_3 = \text{inv}(A' * A + \alpha I) * A' * b$$

$$y_3 = (1.1774 \ 0.8422 \ 0.9135 \ 1.1013)^t$$

$$>> \text{err}_3 = \text{norm}(xe - y_3)$$

$$\text{err}_3 = 0.2722$$

3.3.3 A perturbé et b exacts

$$\begin{pmatrix} 10.47 & 7.79 & 8.60 & 7.75 \\ 7.01 & 5.31 & 6.26 & 5.45 \\ 8.33 & 6.53 & 10.65 & 9.08 \\ 7.16 & 5.16 & 9.69 & 10.23 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

On cherche à trouver la solution de l'équation (3.4) lorsque l'opérateur A est légèrement perturbé, l'opérateur est connu à une erreur aléatoire près, dans notre cas nous avons générer un erreur $\varepsilon \sim N(0, 1)$.

La solution du nouveau système devient $(-23.99, 36.10, -8.38, 9.54)^t$ il ya une forte instabilité numérique sur la solution.

Application de la méthode de régularisation de Tikhonov

$$A = [10.47 \ 7.79 \ 8.60 \ 7.75; 7.01 \ 5.31 \ 6.26 \ 5.45; 8.33 \ 6.53 \ 10.65 \ 9.08; 7.16 \ 5.16 \ 9.69 \ 10.23];$$

$$b = [32 \ 23 \ 33 \ 31]';$$

$$xe = [1 \ 1 \ 1 \ 1]';$$

$$k = \text{cond}(A);$$

$$I = [1 \ 0 \ 0 \ 0; 0 \ 1 \ 0 \ 0; 0 \ 0 \ 1 \ 0; 0 \ 0 \ 0 \ 1];$$

$$z = \text{inv}(A' * A + \alpha I) * A' * b;$$

$$\text{err} = \text{norm}(xe - z);$$

Résultats d'algorithmme

résultats pour $\alpha = 0.001$

$$>> k = \text{cond}(A)$$

$$2.5387e + 003$$

$$>> z_1 = \text{inv}(A' * A + \alpha I) * A' * b$$

$$z_1 = (-2.5049 \ 5.5569 \ -0.1263 \ 2.0953)^t$$

$$>> \text{err}_1 = \text{norm}(xe - z_1)$$

$$\text{err}_1 = 5.9597$$

résultats pour $\alpha = 0.01$

$$>> z_2 = \text{inv}(A' * A + \alpha I) * A' * b$$

$$z_2 = (0.5073 \ 1.2754 \ 1.0300 \ 1.0527)^t$$

$$>> \text{err}_2 = \text{norm}(xe - z_2)$$

$$\text{err}_2 = 0.5677$$

résultats pour $\alpha = 0.1$

$$\gg z_3 = \text{inv}(A' * A + \alpha I) * A' * b$$

$$z_3 = (0.8592 \ 0.7785 \ 1.1545 \ 0.9395)^t$$

$$\gg \text{err}_3 = \text{norm}(xe - z_3)$$

$$\text{err}_3 = 0.3105$$

3.4 Application de la méthode de décomposition en valeur singulière

Dans le deuxième cas, nous intéressons à la résolution de l'équation (3.1) par la méthode de décomposition en valeur singulière dans trois cas (A et b exacts, A exacts et b perturbé, A perturbé et b exacts)

3.4.1 A et b exacts

$$\begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

On cherche à trouver solution de l'équation (3.5) :

Application de décomposition en valeur singulière

$$A = [10 \ 7 \ 8 \ 7; 7 \ 5 \ 6 \ 5; 8 \ 6 \ 10 \ 9; 7 \ 5 \ 9 \ 10];$$

$$b = [32 \ 23 \ 33 \ 31]';$$

$$xe = [1 \ 1 \ 1 \ 1]';$$

$$k = \text{cond}(A);$$

$$[U, S, V] = \text{svd}(A);$$

$$x_s = V * inv(S) * U' * b;$$

$$errr = norm(xe - x_s);$$

Résultats d'algorithmme

$$>> k = cond(A)$$

$$k = 2.9841e + 003$$

$$>> [U, S, V] = svd(A);$$

$$>> x_s = V * inv(S) * U' * b;$$

$$x_s = (1 \ 1 \ 1 \ 1)^t$$

$$>> errr = norm(xe - x_s)$$

$$errr = 3.2592e - 013$$

3.4.2 A exact et b perturbé

$$\begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32.43 \\ 23.89 \\ 33.39 \\ 31.77 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

On cherche à trouver la solution de l'équation (3.5) lorsque le second membre est perturbé, le second membre est connu à une erreur aléatoire près, dans notre cas nous avons générer un erreur $\varepsilon \sim N(0, 1)$.

La solution du nouveau système devient $(-25.35, 44.78, -10.14, 7.66)^t$ il ya une forte instabilité numérique de la solution.

Application de décomposition en valeur singulière

$$A = [10 \ 7 \ 8 \ 7; 7 \ 5 \ 6 \ 5; 8 \ 6 \ 10 \ 9; 7 \ 5 \ 9 \ 10];$$

$$b = [32.43 \ 23.89 \ 33.39 \ 31.77]';$$

$$xe = [1 \ 1 \ 1 \ 1]';$$

$$k = \text{cond}(A);$$

$$[U, S, V] = \text{svd}(A);$$

$$y_s = V * \text{inv}(S) * U' * b;$$

$$\text{errr} = \text{norm}(xe - y_s);$$

Résultats d'algorithme

$$>> k = \text{cond}(A)$$

$$k = 2.9841e + 003$$

$$>> [U, S, V] = \text{svd}(A);$$

$$>> y_s = V * \text{inv}(S) * U' * b;$$

$$y_s = (-25.35 \ 44.78 \ -10.14 \ 7.66)^t$$

$$>> \text{errr} = \text{norm}(xe - y_s)$$

$$\text{errr} = 52.7288$$

3.4.3 A perturbé et b exact

$$\begin{pmatrix} 10.47 & 7.79 & 8.60 & 7.75 \\ 7.01 & 5.31 & 6.26 & 5.45 \\ 8.33 & 6.53 & 10.65 & 9.08 \\ 7.16 & 5.16 & 9.69 & 10.23 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

On cherche à trouver la solution de l'équation (3.6) lorsque l'opérateur est légèrement perturbé, l'opérateur est connu à une erreur aléatoire près, dans notre cas nous avons générer une erreur $\varepsilon \sim N(0, 1)$.

La solution du nouveau système devient $(-23.99, 36.10, -8.38, 9.54)^t$ il ya une forte instabilité numérique sur la solution.

Application de décomposition en valeur singulière

$$A = [10.47 \ 7.79 \ 8.60 \ 7.75; 7.01 \ 5.31 \ 6.26 \ 5.45; 8.33 \ 6.53 \ 10.65 \ 9.08; 7.16 \ 5.16 \ 9.69 \ 10.23];$$

$$b = [32 \ 23 \ 33 \ 31]';$$

$$xe = [1 \ 1 \ 1 \ 1]';$$

$$k = \text{cond}(A);$$

$$[U, S, V] = \text{svd}(A);$$

$$z_s = V * \text{inv}(S) * U' * b;$$

$$\text{errr} = \text{norm}(xe - z_s);$$

Résultats d'algorithmme

$$>> k = \text{cond}(A)$$

$$2.5387e + 003$$

$$>> [U, S, V] = \text{svd}(A);$$

$$>> z_s = V * \text{inv}(S) * U' * b;$$

$$z_s = (-23.99 \ 36.10 \ -8.38 \ 9.54)';$$

$$>> \text{errr} = \text{norm}(xe - z_s)$$

$$\text{errr} = 44.9188$$

3.5 Interprétation des résultats

méthode	A et b exacts		A exacts et b perturbé		A perturbé et b exacts	
	Tikhonov	S V D	Tikhonov	S V D	Tikhonov	SVD
erreur	0.2212	3.2592×10^{-13}	4.7090	52.7288	5.9597	44.9188
	0.2415		0.3695		0.5677	
	0.2438		0.2722		0.3105	

CHAPITRE 3. SIMULATION : COMPARAISON DES MÉTHODES TIKHONOV ET SVD

Pour le premier cas A et b exacts, nous avons constaté numériquement que la méthode de décomposition en valeur singulière est meilleur que la méthode de Tikhonov, elle donne une solution stable au système mal conditionné de meilleur façon que la méthode de Tikhonov.

Pour les deux cas où A exacts et b perturbé et A perturbé et b exacts, on remarque que la méthode de Tikhonov est meilleure que la méthode de décomposition en valeurs singulières car la régularisation stabilise la solution

Le choix du paramètre de régularisation α est crucial. En effet plus α s'éloigne de zéro, dans le cas de perturbation la solution de système s'approche considérablement de la solution exacte de système non perturbé et s'éloigne de la solution du système perturbé.

Conclusion générale

Les problèmes inverses ont un domaine d'investigation très large, ils constituent une branche de recherche Mathématique dont l'importance ne cesse de croître. On les trouve aussi bien dans le domaine de la mécanique, de la thermique, de la météorologie, qu'en statistiques, en traitements d'imagesetc, d'où la naissance de plusieurs méthodes de résolutions à ces problèmes.

Un problème inverse est en général une situation où on est dans l'ignorance du système (certaines informations concernant la géométrie, les matériaux, les conditions initiales....).

La plupart de ces problèmes sont modélisés (étape difficile, se concerter avec un spécialiste du domaine étudié). En fait, notre travail consiste en la présentation de quelques méthodes de résolution, en particulier la méthode de régularisation de Tikhonov. Une étude comparative des deux méthodes de résolution des problèmes inverses linéaires Tikhonov et SVD est présentée dans ce mémoire.

Dans ce mémoire, nous avons étudié la meilleure approximation de la solution du problème $Ax = b$ dans le cas où l'opérateur est une matrice carré inversible. Nous avons utilisé la méthode de régularisation Tikhonov ainsi que la méthode de décomposition en valeurs singulières dans différents cas système exacte et opérateur A ou b perturbé. On a constaté que la méthode de Tikhonov est meilleur que SVD dans les cas de perturbation.

Conclusion générale

En pratique, il est conseillé d'utiliser la méthode de Tikhonov, car les données sont obtenues à partir d'une expérience, elle sont donc non exactes. Si on refait l'expérience dans les mêmes conditions on n'obtiendra pas les mêmes valeurs.

Notre étude est portée sur un opérateur qui est une matrice carré inversible, mais peut être étendue au cas d'une matrice rectangulaire ou un autre opérateur quelconque (intégrale,...).

Bibliographie

[1] A. ASPREMONT (2003). Interest rate model Calibration using semidefinite programming. *Applied Mathematical Finance*, 10 (3) : 183-213.

[2] T. CARLEMAN (1939). Sur un problème d'unicité pour les systèmes d'équations aux dérivées partielles à deux variables indépendantes. *Ark. Mat. Astr. Fys.*, 26B (17), 1-9.

[3] L. CAVALIER (2003). Problèmes inverses en statistique. Mémoire pour obtenir l'habilitation à diriger des recherches.

[4] H. W. Engl, M. Hanke, and A. Neubauer (1996). *Regularization of Inverse Problems*. Kluwer, Dordrecht.

[5] G. Golub et W.Kahan (1965). "Calculating the Singular Values and Pseudo-Inverse of a matrix.

[6] G. H. GOLUB et C. F. VAN LOAN (1996). *Matrix Computations*. The Johns Hopkins University Press, Baltimore, MD, third edition édition, p 695.

[7] R.GOUSSEM, R.LASMI(2015). Méthode de régularisation de Tikhonov et application.

- [8] C. HANSEN (1998). RANK-Deficient and Discrete Ill-Posed Problems. SIAM, Philadelphia, 247 p.
- [9] T. HIDA (1980). Brownian motion. Springer-Verlag, New-York.
- [10] S. KHOUFACHE (2012). Problème inverses en EDP.Memoire de Magister.
- [11] A. Kirsch(1996). An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems. Number 120 in Applied Mathematical Sciences. Springer-Verlag, New-York.
- [12] A. Kirsch (1996). An Introduction to the mathematical theory of inverse problems. Springer .
- [13] L. Landweber (1951). An iteration formula for Fredholm integral equations of the first kind. Amer. J. Math., 73 :615–624.
- [14] P. Lascaux, R. Theodor (1986). Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur, tomes 1 et 2 - MASSON.
- [15] J. M. Loubes et A. Vanhems (2002). Estimating the solution of a differential equation with endogeneous effects. Prepublications de l'université de Paris Sud, 12.
- [16] C. MARTEAU (2007). Recherche d'inégalités oracles pour des problèmes inverses. Thèse doctorat.
- [17] D. NICOLAY (2002). Calibration et couverture de produits dérivés. Thèse doctorat.

Bibliographie

[18] A. G. Ramm (1990). Random Fields Estimation Theory. Longman Scientific/Wiley, New York.

[19] K. TIMERIDJINE (2013). Opérateur linéaire dans un problème de calibration à erreur aléatoire. Thèse doctorat.