



Faculté de Technologie
Département d'**Hydraulique**
Laboratoire de Recherche en Hydraulique Appliquée et Environnement (LRHAE)

MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES

Présenté par :

ABDELLAOUI Akila
CHERAFT Thiziri

En vue de l'obtention du diplôme de **MASTER en Hydraulique**

Option : **Hydraulique Urbaine**

INTITULE :

***Simulation numérique des écoulements à surface libre dans
la transition***

Soutenu le : **07 /07 / 2019**

Devant le jury composé de :

- Président : Mr. MERAH. Ferhat.
- Promoteur : Mr. IKNI. Taher.
- Examineur : Mr. BERREKSI. Ali.

Remerciements

*Nous remercions tous d'abords Allah et clément de nous avoir donné
la foie et le courage pour terminer ce projet de fin d'études, pour les efforts
qui nous a donné, pour pouvoir réaliser ce modeste travail*

*Nous tenons à présenter nous remerciements les plus sincères à notre
promoteur Monsieur Mr Ikni T. pour sa générosité, sa gentillesse, sa
patience et ses précieux conseils pour l'établissement de ce travail.*

Nous remercions les membres de jury qui nous ont honorés de leurs présences.

*Nous tenons à exprimer encore notre gratitude à tous nos enseignants
du département d'hydraulique pour leurs assistances pédagogiques et scientifiques.*

Enfin nous remercions tous nos amis pour leurs soutiens.

*A tous ceux qui ont participé de près ou de loin à la réussite de ce
travail, on leurs dis*

Merci, Merci, Merci ...

Table de matières

Liste des tableaux	
Liste des figures	
Liste des symboles	
Introduction générale.....	1

Chapitre I : Généralités

I.1.Introduction.....	2
I.2.Les canaux	2
I.2.1.Définition	2
I.2.2.Types des canaux	2
I.2.2.1.Les canaux naturels.....	2
I.2.2.2.Les canaux artificiels	2
I.3. Géométrie des canaux	3
I.4. Les paramètres hydrauliques.....	5
I.5.Types des écoulements à surface libre.....	6
I.5.1. Classification suivant le temps.....	6
I.5.1.1.Ecoulement permanent	6
I.5.1.2. Ecoulement non permanent	7
I.5.2. Classification suivant l'espace.....	7
I.5.2.1.Ecoulement uniforme	7
I.5.2.2. Ecoulement non uniforme ou varié.....	8
I.5.3.Classification suivant le temps et l'espace	8
I.6. Régimes d'écoulement.....	9
I.7. Onde de gravite	9
I.7.1. Célérité d'onde.....	9
I.8.Ecoulement avec onde	10
I.9.Conclusion	11

Chapitre II : Le écoulement dans le transition

II.1.Introduction	12
II.2.Transition.....	12
II.3.Déviatiion brusque d'un mur.....	12
II.4.Déviatiion positive d'un mur.....	13
III.5.Rétrécissement dans des conditions d'écoulements torrentielles	16
III.6.Conclusion.....	18

Chapitre III : Equations de base

III.1.Introduction.....	19
III.2. Hypothèses de base	19
III.3. Equations fondamentales.....	19
III.3.1. Equation de continuité (conservation de la masse).....	20
III.3.2. Equation dynamique	21
II.4.Transformation géométrique	26
II.5.Application de la transformation géométrique	27
II.6.Conditions aux limites	29
II.6.1.Conditions amont et aval.....	29
II.6.2.Conditions de symétrie	29
II.6.3. Conditions sur les parois solides.....	30
II.6.4.Procédure de réflexion.....	30
II.7.Conclusion	30

Chapitre IV : Modélisation numérique

IV.1. Introduction.....	31
IV.2. Présentation de MATLAB	31
IV.3. Apercue sur le différents methode numérique	32
IV.3.1.Méthode des différences finies	32
IV.3.2.Méthode des différences finies	32
IV.3.3.Méthode des différences finies	33
IV.3.4. Exemple de discrétisation du domaine 1D.....	33
IV.3. Schéma explicite et schéma implicite	34
IV.4. Les schémas aux différences finies explicites fréquemment utilisés	34

IV.6.Organigramme de calcul	35
VI.7. Conclusion	36

Chapitre V :Expérimentation numérique

V.1.introduction	37
V.2.Etude d'un écoulement à surface libre	37
V.2.1.Résultats et analyse.....	37
V.2.2. Canal convergence	41
V.2.2.1. Résultats et analyse	46
Conclusion générale	47
Bibliographie	47

Liste des tableaux

Tableaux (I.1) :	Eléments géométrique pour différences type des canaux	4
Tableaux (III.1) :	Nombre de conditions amont et aval.....	29
Tableaux (V.1) :	Conditions de l'écoulement.....	49

Liste des figures

Figure (I.1) :	Section transversal d'un canal Naturel.....	2
Figure (I.2) :	Canaux artificiels.....	3
Figure (I.3) :	Eléments géométriques d'une section d'un canal.....	4
Figure (I.4) :	Schéma des écoulements permanents, uniformes et variés.....	6
Figure (I.5) :	Schéma d'un écoulement permanent.....	7
Figure (I.6) :	Schéma d'un écoulement non permanent.....	7
Figure (I.7) :	Schéma d'un écoulement uniforme.....	7
Figure (I.8) :	Schéma d'un écoulement non uniforme.....	8
Figure (I.9) :	Schéma d'une onde dans un canal.....	10
Figure (I.10) :	Représentation schématique des deux valeurs de l'onde (Le cas fluvial).....	11
Figure (I.11) :	Représentation schématique des deux valeurs de l'onde (cas torrentiel).....	11
Figure (I.12) :	Représentation schématique des deux valeurs de l'onde (Le cas critique).....	11
Figure (II.1) :	Déviations d'un mur et notations relatives à l'onde Transversale.....	13
Figure (II.2) :	Schéma d'une déviation positive d'une paroi (onde positive).....	14
Figure (II.3) :	Rétrécissement linéaire à écoulement torrentiel.....	16
Figure (II.4) :	Rétrécissement linéaire à écoulement torrentiel (supercritique).....	17
Figure (III.1) :	Volume de contrôle élémentaire.....	19
Figure (III.2) :	Distribution de pression dans un canal incliné.....	23
Figure (III.3) :	Schématisme à la limite d'une transition.....	27
Figure (III.4) :	Transformation du domaine physique au domaine de calcul.....	27
Figure (III.5) :	Procédure de réflexion au niveau de l'axe de symétrie.....	29
Figure (IV.1) :	Fenêtre principale de MATLAB (version 7.0).....	31
Figure (IV.2) :	Editeur de MATLAB.....	32
Figure (IV.3) :	Quadrillage du plan (x, t).....	33
Figure (V.1) :	Représentation des paramètres hydrauliques dans un canal pour un débit $Q=0.0344 \text{ (m}^3/\text{s)}$	38
Figure (V.2) :	Représentation des paramètres hydrauliques dans un canal pour un débit $Q=0.0689 \text{ (m}^3/\text{s)}$	39
Figure (V.3) :	Représentation des paramètres hydrauliques dans un canal pour un débit $Q=0.093 \text{ (m}^3/\text{s)}$	40
Figure (V.4) :	Rétrécissement rectiligne symétrique à pente nulle.....	41
Figure (V.5) :	Représentation de variation de la hauteur d'eau le long du canal au niveau de l'axe.....	42
Figure (V.6) :	Représentation de variation de la hauteur d'eau le long du canal au niveau de paroi latérale.....	43
Figure (V.7) :	Vue à trois dimensions de h dans tout le canal.....	44
Figure (V.8) :	Représentation de la déviation physique et de calcul pour un canal.....	45

Liste des symboles

$B(x)$	Largeur de la transition
b_1	Largeur amont de la transition
b_2	Largeur aval de la transition
c	Célérité de l'onde
Cn	Nombre de courant
c_ω	Célérité absolue de l'onde
C	Coefficient de Chezy (Maning)
D_h	Profondeur hydraulique
F_r	Nombre de Froude
G	Accélération gravitationnelle
H	Hauteur de l'onde
h	Profondeur de l'écoulement
I	Indice de maillage suivant la direction $x(\xi)$
J	Indice de maillage suivant la direction $x(\eta)$
K	Indice de l'incrément de temps
K_f	Facteur de forme
L	Longueur de la transition
L_t	Longueur totale de la transition
P	Pression hydrostatique
P_m	Périmètre mouillé
Q	Débit de l'écoulement
R_h	Rayon hydraulique
S	Surface du canal
S_m	Surface mouillée (section d'écoulement)
S_{fx}	Pente de frottement suivant l'axe des x
S_{fy}	Pente de frottement suivant l'axe des y
$S_{f\xi}$	Pente de frottement suivant l'axe des ξ
$S_{f\eta}$	Pente de frottement suivant l'axe des η
S_{ox}	Pente suivant l'axe des x
S_{oy}	Pente suivant l'axe des y
$S_{o\xi}$	Pente suivant l'axe des ξ
$S_{o\eta}$	Pente suivant l'axe des η
u	Vitesse de l'écoulement suivant l'axe x
V	Vitesse absolue de l'écoulement
V_m	Vitesse moyenne
V^f	Vitesse absolue de l'écoulement aux points fictifs
v	Vitesse de l'écoulement suivant l'axe y
u^f	Composante de la vitesse de l'écoulement selon x aux points fictifs
v^f	Composante de la vitesse de l'écoulement selon y aux points fictifs
y_m	Hauteur moyenne
α	Angle d'inclinaison du fond du canal

β	Angle de choc
λ	Valeurs propres de la matrice G
ω	Valeurs propres de la matrice H
Δ	Différence avant
Δ_x	Différence avant suivant l'axe x
Δ_y	Différence avant suivant l'axe y
θ	Angle de déviation de la paroi latérale
ρ	Masse volumique
τ	Force de frottement
ψ	Angle que fait la résultante de la vitesse d'écoulement V avec l'axe x

Indices

- 1 : A l'amont de la transition
- 2 : A l'intérieur de la transition
- 3 : A l'aval de la transition

Introduction générale

Introduction générale

L'hydraulique est une science aussi ancienne que la civilisation humaine. C'est une grande partie de la mécanique des fluides qui commande toutes les utilisations de l'eau à travers les grandes époques historiques. Les procédés de datation ont permis de remonter l'hydraulique jusqu'à l'antiquité.

Les écoulements à surface libre, comme leur nom l'indique, ont la particularité de comporter une surface libre en contact avec l'air et dont la forme peut varier.

Les différents paramètres caractéristiques de ses écoulements ainsi que la forme et la nature des canaux qui le contient feront l'objet du premier chapitre qui se terminera par un aperçu sur la notion d'onde de gravité et l'écoulement avec onde.

Les équations de Saint Venant sont utilisées pour la modélisation de l'écoulement à surface libre, ces équations ont été établies sur la base des principes de conservation de la masse et de conservation de la quantité de mouvement après avoir établi un certain nombre d'hypothèses simplificatrices et de conditions aux limites, ce qui fera l'objet du deuxième chapitre.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude des caractéristiques des phénomènes d'instabilités apparaissant à la surface libre d'écoulements dans des canaux prismatiques et non prismatiques. Les canaux non prismatiques sont souvent appelés les transitions du fait qu'ils sont généralement utilisés sur de courtes distances. Généralement les transitions dans les canaux à surface libres sont utilisées dans les applications hydrauliques, notamment dans les coursiers d'évacuateurs de crue, dans la réduction des pertes d'énergie et dans certains bassins d'amortissement.

Dans le quatrième chapitre, nous aborderons les différentes méthodes, notamment les méthodes des différents finis explicites traitant ce genre de problème.

Nous présentons enfin dans le cinquième chapitre les résultats de l'application du code de calcul. Les résultats obtenus seront comparés avec les résultats expérimentaux et numériques d'autres chercheurs. Ceci permet de retrouver et de valider les résultats obtenus, puis d'examiner dans quelle mesure le modèle est capable de rendre compte des phénomènes d'instabilités apparaissant expérimentalement sur ces canaux.

Chapitre I

Généralités

I.1.Introduction

L'hydraulique fluviale, qui fait partie de l'hydraulique, traite des écoulements dans les canaux artificiels et naturels ayant une surface libre soumise à la pression atmosphérique. Ce chapitre, présente les différents types des canaux, les caractéristiques et la classification des écoulements à surface libre.

I.2.Les canaux

I.2.1.Définition

On appelle canal un système de transport dans lequel l'eau s'écoule et dont la surface libre est soumise à la pression atmosphérique.

I.2.2.Types des canaux

On distingue deux catégories de canaux suivant les propriétés géométriques et hydrauliques :

I.2.2.1.Les canaux naturels

Les canaux naturels sont les cours d'eau qui existent naturellement sur terre, tels que les ruisselets, rivières, fleuves et estuaires. Les propriétés géométriques et hydrauliques des canaux naturels sont généralement assez irrégulières. L'application de la théorie hydraulique ne donne que des résultats approximatifs obtenus moyennant certaines hypothèses (Figure (I.1)).



Figure (I.1) : Section transversal d'un canal Naturel

I.2.2.2.Les canaux artificiels

Ce sont des cours d'eau réalisés par l'homme tel que les canaux découverts construits ou ras de sol, les galeries, les tuyaux de drainages, ...etc. Autrement dit, la plupart des ouvrages de ce type utilisés dans la pratique hydrotechnique et d'aménagement des cours d'eau. Les propriétés géométriques et hydrauliques des canaux artificiels sont généralement assez régulières. L'application de la théorie hydraulique donne souvent des résultats satisfaisants (Figure (I.2)).

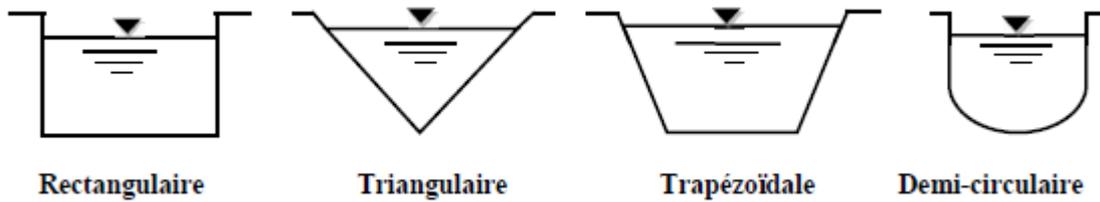


Figure (I.2) : Canaux artificiels

I.3. Géométrie des canaux

Un canal à surface libre est composé des éléments géométriques définis dans le tableau (I.1) et la Figure (I.3) ci-dessous [1] :

- La section transversale S .
- La section mouillée S_m : Section d'écoulement (ou section mouillée) correspond à la section perpendiculaire à l'écoulement, c'est la partie limitée par les parois et la surface libre.
- Le périmètre mouillée P_m : c'est la longueur de la section mouillée en contact avec les berges et le fond du canal sans compter la surface libre.
- Le rayon hydraulique R_h qui est le rapport de la section mouillée et le périmètre mouillé :

$$R_h = \frac{S_m}{P_m} \quad (I.1)$$

- La largeur en surface du canal, notée B , est la distance séparant les berges opposées (ou point de contact air-liquide).
- Hauteur normale h_n : c'est la hauteur d'un canal en régime permanent uniforme.
- La profondeur hydraulique D_h (le rapport de la section mouillée S_m et la largeur en surface B).

$$D_h = \frac{S_m}{B} \quad (I.2)$$

- La profondeur h , appelée aussi hauteur ou tirant d'eau : correspond à la profondeur maximale d'une section d'écoulement.
- La pente de la surface libre (piézométrique) S_f .
- La pente de fond du canal S_0 .

La valeur de la pente de fond dépend essentiellement de la topographie et de la constitution du terrain. Cette pente généralement faible, peut être exprimée par :

$$S_0 = \tan \alpha = \sin \alpha \tag{I.3}$$

α : l'inclinaison de la paroi du fond.

- Coefficient de rugosité : c'est un coefficient qui représente la perte de charge (coefficient de Chézy noté C ou de Manning-Strickler noté K).

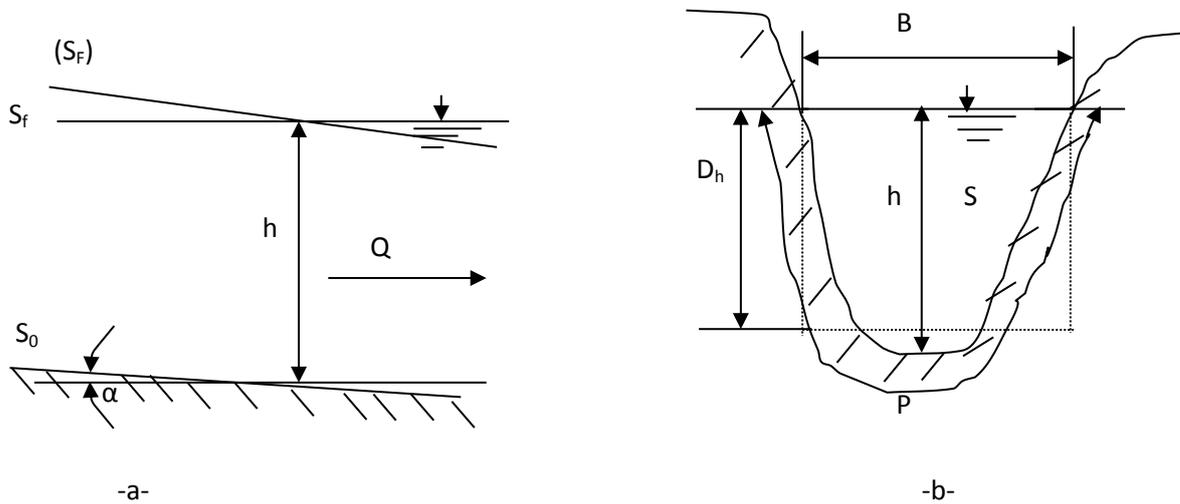


Figure (I.3): Eléments géométriques d'une section d'un canal

Tableau (I.1) : Eléments géométriques pour différents types des canaux

	Rectangle	Trapèze	Triangle	Cercle	Parabole
Surface S	$b h$	$(b + mh)h$	mh^2	$\frac{1}{8}(\theta - \sin \theta) D^2$	$\frac{2}{3} B h$
Périmètre mouillé P	$b + 2h$	$b + 2h\sqrt{1+m^2}$	$2h\sqrt{1+m^2}$	$\frac{1}{2} \theta D$	$B + \frac{8}{3} \frac{h^2}{B}^*$
Rayon hydraulique R_h	$\frac{b h}{b + 2h}$	$\frac{(b + mh) h}{b + 2h\sqrt{1+m^2}}$	$\frac{mh}{2\sqrt{1+m^2}}$	$\frac{1}{4} \left[1 - \frac{\sin \theta}{\theta} \right] D$	$\frac{2B^2 h}{3B^2 + 8h^2}^*$
Largeur B	b	$b + 2mh$	$2mh$	$(\sin \theta/2) D$ ou $2\sqrt{h(D-h)}$	$\frac{3}{2} \frac{S}{h}$
Profondeur hydraulique D_h	h	$\frac{(b + mh) h}{b + 2mh}$	$\frac{1}{2} h$	$\left[\frac{\theta - \sin \theta}{\sin \theta/2} \right] \frac{D}{8}$	$\frac{2}{3} h$

I.4. Les paramètres hydrauliques

➤ Débit

Le débit est défini comme étant le volume d'un fluide transporté à travers une section perpendiculaire à l'écoulement pendant une unité de temps. Il s'exprime en m³/s.

➤ Vitesse moyenne

Elle représente la moyenne des vitesses perpendiculairement sur une section d'écoulement. Il se définit par la division du débit sur la section. Il s'exprime en m/s.

$$V = Q/S \quad (\text{I.4})$$

➤ La charge hydraulique

La charge hydraulique en un point exprimé par la hauteur, la hauteur de la vitesse et l'énergie potentielle de pression. Elle est donnée par la formule de BERNOULLI.

$$H = Z + \frac{V^2}{2g} + \frac{P}{\rho g} \quad (\text{I.5})$$

H: La charge hydraulique

Z: la hauteur par rapport à une référence

V: la vitesse de l'écoulement

g: Accélération gravitationnelle

ρ : La masse volumique

P: la pression du fluide

➤ La charge spécifique

C'est une charge moyenne mesurée par rapport au fond du canal. C'est la différence entre la ligne de charge et le radier.

$$H_s = H - Z = \frac{P}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} \quad (\text{I.6})$$

I.5.type des écoulements a surface libre

L'écoulement de l'eau dans un lit ouvert est appelé écoulement à surface libre. Il a lieu sous l'action des forces de gravité. Il faut souligner que ce type d'écoulement est un phénomène beaucoup plus complexe que l'écoulement en charge parce qu'une telle surface entraîne des variations des sections liquides suivant la longueur du courant même en présence d'obstacles insignifiants. Les écoulements peuvent être répartis suivant plusieurs paramètres comme le temps, l'espace, la viscosité,...etc. Cette répartition donne les différents types suivants:

- Permanent ou non permanent si le paramètre est le temps.
- Uniforme ou non uniforme si le paramètre est l'espace.
- Torrentiel ou fluvial selon Froude.
- Laminaire ou turbulent selon Reynolds.

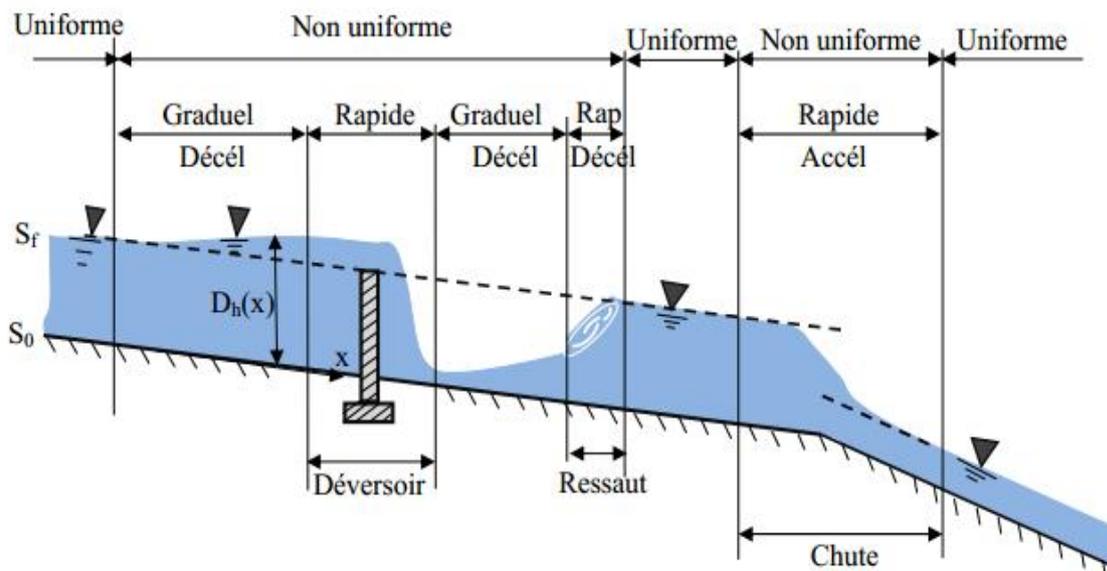


Figure (I.4) : Schéma des écoulements permanents, uniformes et variés

On s'intéressera aux paramètres temps et espace dans la suite de notre étude [2].

I.5.1. Classification suivant le temps

I.5.1.1.Écoulement permanent

Le mouvement est permanent si la vitesse moyenne (V), et la profondeur h , restent invariables dans le temps en grandeur et en direction (Figure (I.5)). Par conséquent, le débit est constant ($Q = VS$) [1].

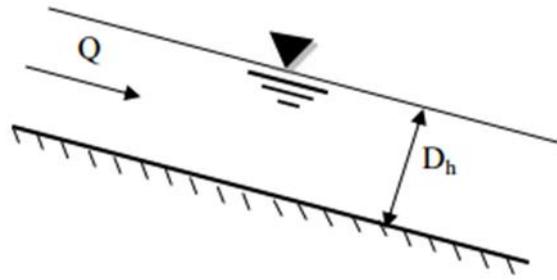


Figure (I.5) : Schéma d'un écoulement permanent

I.5.1.2. Écoulement non permanent

Le mouvement est non permanent si les paramètres de l'écoulement varient avec le temps. Le débit n'est pas constant (Figure (I.6)). Si les variations sont assez lentes et progressives, l'écoulement de l'eau est graduellement varié, dans le cas contraire, l'écoulement de l'eau est rapidement varié .

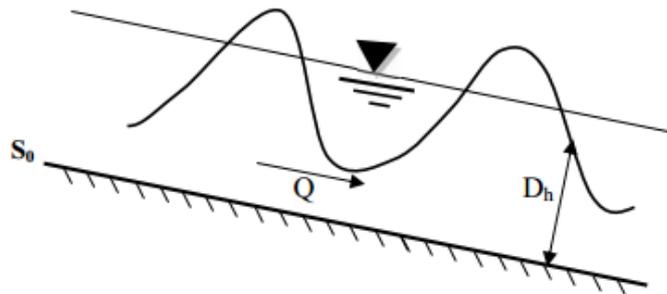


Figure (I.6): Schéma d'un écoulement non permanent

I.5.2. Classification suivant l'espace

I.5.2.1. Écoulement uniforme

Le mouvement est uniforme si la profondeur hydraulique ainsi que les autres paramètres restent invariables dans les diverses sections du canal à faible pente . La ligne de la pente de fond est donc parallèle à la ligne de la surface libre ($S_f = S_0$) (Figure (I.7)) [1].

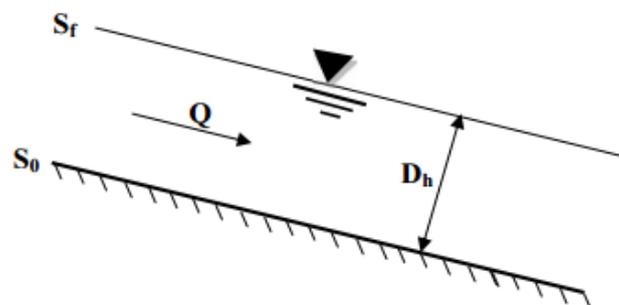


Figure (I.7): Schéma d'un écoulement uniforme

I.5.2.2. Écoulement non uniforme ou varié

Le mouvement est non uniforme ou varié, si la profondeur hydraulique (D_h), ainsi que les autres paramètres changent d'une section à une autre. La pente de fond diffère alors de celle de la surface libre $S_0 \neq S_f$. Il peut être permanent, non permanent, accéléré, ou décéléré, suivant que la vitesse croît ou décroît dans le sens du mouvement (Figure (I.8)) [1].

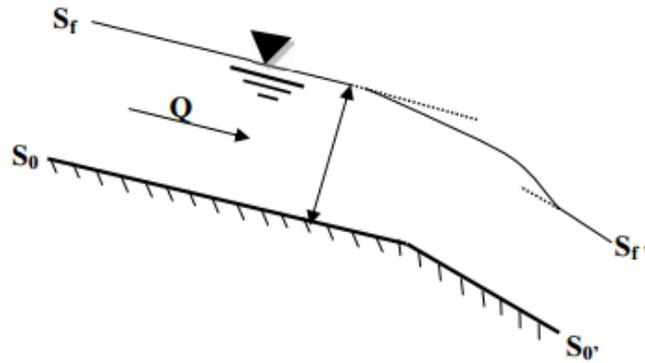
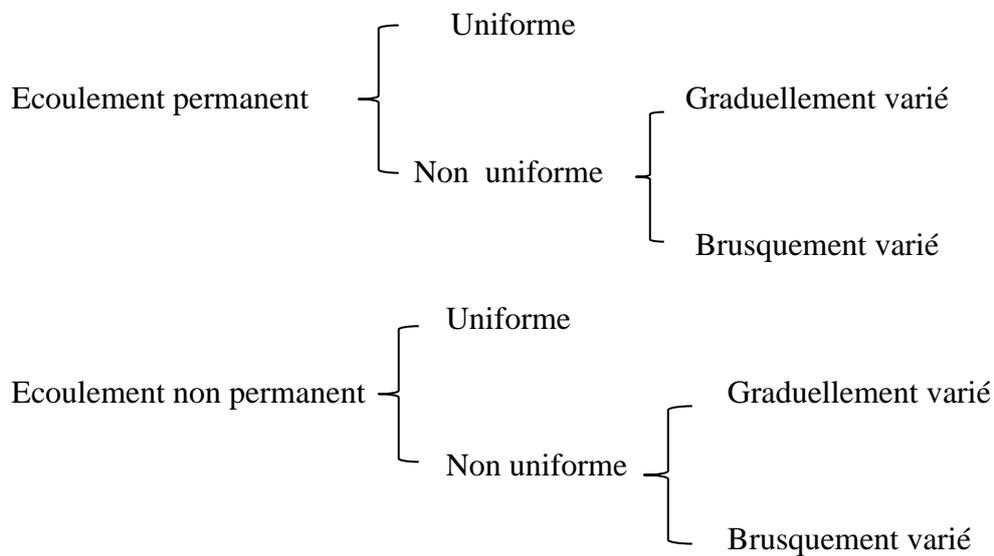


Figure (I.8): Schéma d'un écoulement non uniforme

I.5.3. Classification suivant le temps et l'espace

Il peut y avoir une variation des caractéristiques d'écoulement à la fois dans le temps et dans l'espace, ainsi on distingue :

- L'écoulement permanent uniforme ou non uniforme.
- L'écoulement non permanent uniforme ou non uniforme.



I.6. Régimes d'écoulement

L'écoulement d'un fluide réel dans un canal à surface libre engendre les forces suivantes [1] :

- Forces d'inertie.
- Forces de gravité.
- Forces de frottement (viscosité et rugosité).

Les équations du mouvement font intervenir les coefficients où nombres adimensionnels suivants :

- Le nombre de Froude, qui est le rapport entre les forces d'inertie et celles de gravité, où :

$$Fr = \frac{V}{\sqrt{gh}} \quad (I.7)$$

Le rôle du nombre de Froude est de permettre le classement des écoulements comme suit :

- Ecoulement fluvial $Fr < 1$,
- Ecoulement torrentiel $Fr > 1$,
- Ecoulement critique $Fr = 1$.

Dans la pratique, on peut rencontrer ces trois types d'écoulement.

I.7. Onde de gravite

Les écoulements non permanents se manifestent par des ondes de gravite à leur surface, c'est une caractéristique des écoulements variables dans le temps.

I.7.1. Célérité d'onde

La célérité d'onde est la vitesse de l'onde par rapport au niveau normal du liquide dans le canal. Dans un canal avec un écoulement non uniforme dans le temps se manifeste par une onde de gravité à la surface libre (Figure (I.9)). La théorie hydrodynamique pour les ondes de faible amplitude donne la vitesse apparente de propagation, également appelée célérité d'une intumescence [3].

$$C^2 = \frac{gL}{2\pi} \tan h \left(\frac{2\pi h}{L} \right) \quad (I.8)$$

Où h est la profondeur d'eau

1. Pour les ondes courtes ou ondes de grande profondeur ($L/H < 1$):

$$C^2 = \frac{gL}{2\pi} \quad (I.9)$$

2. Pour les ondes longues ou ondes de faible profondeur ($L/H \gg 1$):

$$C^2 = gh \quad (\text{I.10})$$

3. Pour une section quelconque :

$$C^2 = gD_h \quad (\text{I.11})$$

Selon cette expression de C , la célérité peut avoir deux valeurs égales en valeur absolue. Cela indique tout simplement que la propagation de l'onde peut s'effectuer dans deux directions opposées X^- et X^+ .

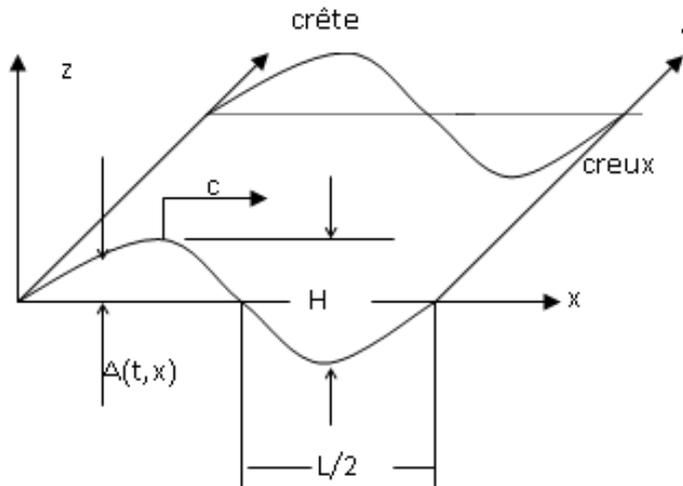


Figure (I.9): Schéma d'une onde dans un canal

I.8.Écoulement avec onde

La relation (I.12) a été démontrée par Lagrange pour un canal rempli d'eau au repos. Elle reste cependant valable même dans le cas où l'eau est en mouvement. La célérité absolue, c_w , d'onde pour un écoulement dans un canal ayant une vitesse moyenne, V , est :

$$c_w = V \pm \sqrt{gD_h} = V \pm c \quad (\text{I.12})$$

Pour un canal de section rectangulaire :

$$c_w = V \pm \sqrt{gh} = V \pm c \quad (\text{I.13})$$

La célérité absolue, c_w , qui est la vitesse par rapport au sol, a évidemment deux valeurs :

$$c'_w = V + c \quad , \quad c''_w = V - c \quad (\text{I.14})$$

On distingue trois cas :

1. $V < c$, l'onde avec célérité, c'_w , se propage vers l'aval et l'onde avec la célérité, c''_w , se propage vers l'amont ; c'est le régime fluvial (Figure (I.10)).

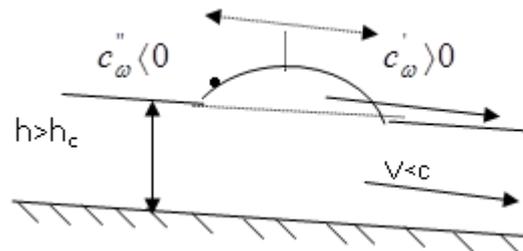


Figure (I.10) : Représentation schématique des deux valeurs de l'onde
(Le cas fluvial).

2. $V > c$, l'onde avec la célérité, c'_w , et l'onde avec la célérité, c''_w , se propage vers l'aval ; c'est le régime torrentiel (Figure (I.11)).

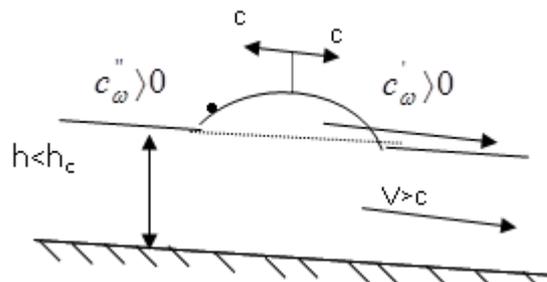


Figure (I.11) : Représentation schématique des deux valeurs de l'onde
(Le cas torrentiel).

3. A la profondeur d'eau pour laquelle la vitesse de courant, V , et la célérité d'onde, c , sont égales ($V=c$), l'écoulement est en régime critique et h_c est la profondeur critique (Figure (I.12)).

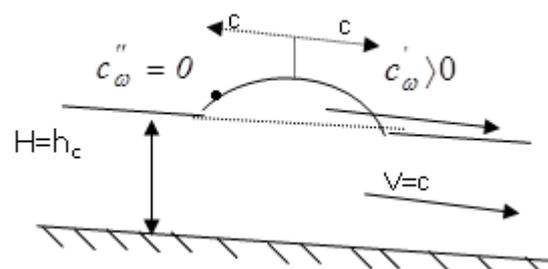


Figure (I.12) : Représentation schématique des deux valeurs de l'onde (Le cas critique)

I.9. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons donné quelques notions sur les caractéristiques et la classification des écoulements à surface libre pour différents types des canaux, ainsi que la répartition des vitesses, la répartition des pressions, et les ondes de gravité.

Chapitre II
le écoulement dans
la transition

II.1.Introduction

L'étude des écoulements non permanents dans des canaux découverts revêt un grand intérêt dans le domaine de l'hydraulique. Ces écoulements dans des canaux non prismatiques présentant des changements de section sont complexes. Ces changements de section qui peuvent être, soit de rétrécissements, élargissements et...etc. Généralement, ils sont aussi appelés «transition ».

II.2.Transition

La transition, qui est un bref passage d'un écoulement uniforme à un autre, représente le cas général d'un écoulement rapidement varié sur une courte distance dans un canal non prismatique où la section est variable [1].

On rencontre des transitions si la section du canal change brusquement :

- Verticalement : le tirant d'eau augmente ou bien diminue, comme décrochement d'un seuil positif ou négatif.
- horizontalement : comme élargissement ou rétrécissement de la largeur de la section.
- Verticalement et horizontalement ensemble.

Une transition peut servir à déterminer le point de contrôle qui est à l'origine d'un écoulement graduellement varié et permet donc de calculer la surface d'eau. Si la transition est courte, suffisamment progressive et raisonnablement profilée, la perte de charge qui en résulte peut souvent être négligée. Ces irrégularités ainsi générées sont négligeables pour les écoulements fluviaux (subcritiques), mais deviennent très importantes pour les écoulements torrentiels (supercritiques).

II.3.Déviations brusques d'un mur

Soit un écoulement torrentiel parallèle dans un canal rectangulaire. En un certain point, le mur est dévié vers l'écoulement, d'un angle θ (Figure (III.1)). La déviation du mur cause une perturbation de l'écoulement le long d'une ligne droite faisant un angle β par rapport à la direction initiale de l'écoulement [3,10].

L'angle β est appelé "angle de choc" et la ligne correspondante « onde transversale ». L'angle de choc β est toujours plus grand que l'angle de déviation du mur θ .

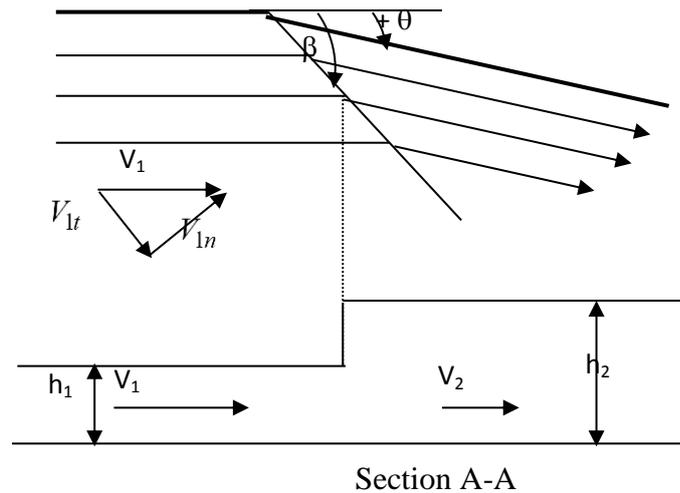


Figure (II.1): Déviation d'un mur et notations relatives à l'onde transversale.

Si une section A-A normale au front d'onde est considérée, on peut observer qu'aucun changement d'élan ne se produit parallèlement au front d'onde. De plus, l'équation de continuité et on peut appliquer l'équation de quantité de mouvement pour une unité de longueur d'onde qui traverse le flux de profondeur h_1 et de vitesse V_1 à un angle β .

II.4. Déviation positive d'un mur

Soit un écoulement torrentiel (Figure (III.2)) amont caractérisé par le nombre de Froude [1] :

$$F_{r1} = \frac{V_1}{\sqrt{gh_1}} = \frac{V_1}{c_1} > 1 \quad (\text{III.1})$$

Où V_1 est la vitesse moyenne et $c_1 = \sqrt{gh_1}$ la célérité de l'onde de gravité. Le courant d'amont subit une déviation directionnelle (par une paroi latérale) par un angle de déflexion, θ . Une onde stationnaire se forme à un angle, β . Les courant d'aval, h_2V_2 , et d'amont, h_1V_1 , sont toutefois considérés comme uniforme.

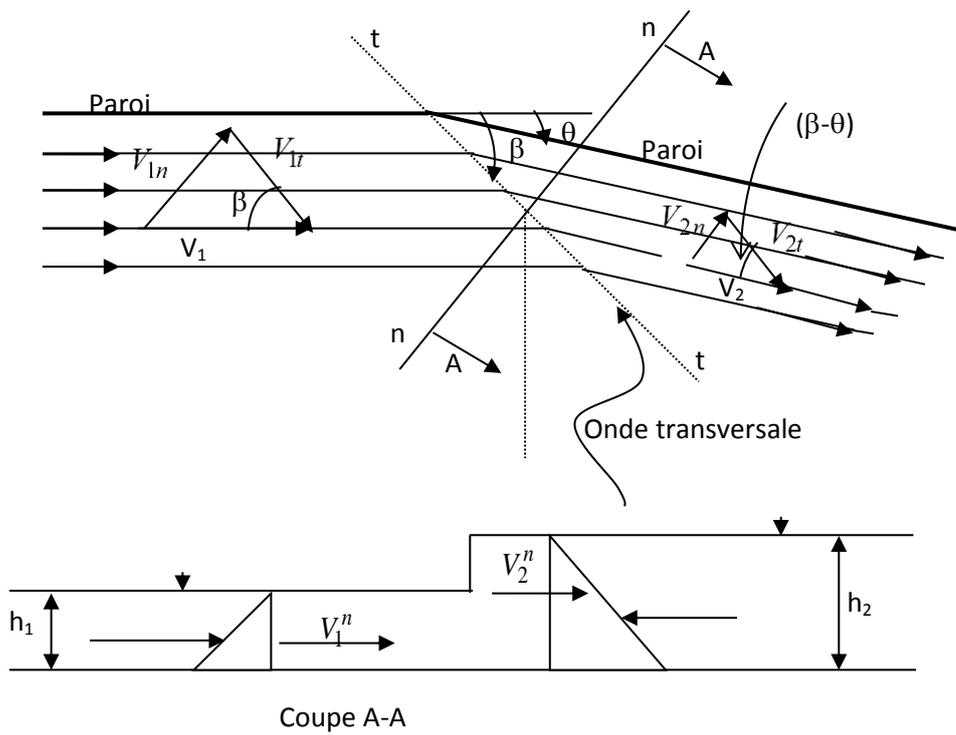


Figure (II.2) : Schéma d'une déviation positive d'une paroi (onde positive)

Pour un canal de largeur unitaire, on applique normalement au front de l'onde l'équation de continuité :

$$h_1 V_{1n} = h_2 V_{2n} \tag{III.2}$$

$$\sum F_n = \gamma \frac{h_1^2}{2} - \gamma \frac{h_2^2}{2} = \rho q (V_{2n} - V_{1n}) \tag{III.3}$$

Avec $q = V_{2n} h_2 = V_{1n} h_1$: débit par unité de largeur.

En remplaçant le débit par unité de largeur, q, dans l'équation (III.3), on a :

$$\frac{h_1^2}{2} + \frac{1}{g} h_1 V_{1n}^2 = \frac{h_2^2}{2} + \frac{1}{g} h_2 V_{2n}^2 \tag{III.4}$$

On admet aussi que, tangentiellement au front de l'onde, la quantité de mouvement est nulle :

A partir de la figure (III.2), on déduit les relations suivantes :

$$V_{1n} = V_1 \sin \beta \text{ et } V_{2n} = V_2 \sin(\beta - \theta) \tag{III.5}$$

$$V_{1t} = V_{1n}/\tan \beta \text{ et } V_{2t} = V_{2n}/\tan(\beta - \theta) \quad (\text{III.6})$$

Les indices «1 » et «2 » indiquent respectivement les positions amont et aval de l'onde transversale.

En introduisant l'équation de continuité (III.2) dans l'équation de quantité de mouvement (III.3), on obtient :

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + 8(\text{Fr}_{1n})^2} - 1 \right) \quad (\text{III.7})$$

Avec, le nombre de Froude suivant la normale définit ainsi :

$$\text{Fr}_{1n} = \frac{V_{1n}}{\sqrt{gh_1}} = \frac{V_1 \sin \beta}{\sqrt{gh_1}} = \text{Fr}_1 \sin \beta \quad (\text{III.8})$$

Soit $Y = \frac{h_2}{h_1}$: le rapport des hauteurs conjuguées, l'équation (III.8) s'écrit :

$$Y = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + (\text{Fr}_1 \sin \beta)^2} - 1 \right) \quad (\text{III.9})$$

L'angle, β de l'onde et l'angle de déviation du mur, θ peuvent être exprimés par les formules suivantes :

$$\sin \beta = \frac{1}{\text{Fr}_1} \sqrt{\frac{1}{2} \frac{h_2}{h_1} \left(\frac{h_2}{h_1} + 1 \right)} \quad (\text{III.10})$$

$$Y = \frac{\tan \beta}{\tan(\beta - \theta)} \quad (\text{III.11})$$

$$\text{Fr}_2^2 = Y^{-1} \left[\text{Fr}_1^2 - \frac{1}{2Y} (Y - 1)(Y + 1)^2 \right] \quad (\text{III.12})$$

$$\text{Fr}_2 = \frac{V_2}{\sqrt{gh_2}} \quad \text{et} \quad \text{Fr}_1 = \frac{V_1}{\sqrt{gh_1}} \quad (\text{III.13})$$

Pour les petites variations de surface, $h_1 \approx h_2$, on obtient :

$$\sin \beta \approx \frac{1}{\text{Fr}_1} = \frac{c_1}{V_1} \quad (\text{III.14})$$

D'après l'équation (III.12), l'angle de choc devient $\theta = 90^\circ$ pour $\text{Fr}_1=1$ et diminue pour les nombres de Froude élevés.

Le système d'équations a été établi en supposant que l'eau est peu profonde.

Dans le cas où $Fr_1 \sin \beta > 1$, l'équation de (III.8) peut être remplacée par l'équation approchée suivante :

$$Y = \sqrt{2} Fr_1 \sin \beta - \frac{1}{2} \quad (III.15)$$

Et Hager [1] a montré que :

$$\beta = \theta + \frac{3}{2\sqrt{2}} Fr_1^{-1} \quad (III.16)$$

Pour $\beta < \frac{\pi}{4}$ et $Fr_1 > 2$, les valeurs caractéristiques de l'équation (III.10) présentent un écart inférieur à 2 %° par rapport à la valeur exacte. De plus, le nombre de Froude aval peut être présenté par l'équation approchée suivante :

$$Fr_2^2 = \frac{Fr_1 \cos^2 \beta}{\sqrt{2} \sin \beta \left[1 - \left(2\sqrt{2} Fr_1 \sin \beta \right)^{-1} \right]} > 1 \quad (III.17)$$

I.5. Rétrécissement dans des conditions d'écoulements torrentielles

La Figure(III.3) montre un rétrécissement linéaire symétrique sous l'angle θ d'un canal rectangulaire de largeur amont B et de largeur aval b [1,4].

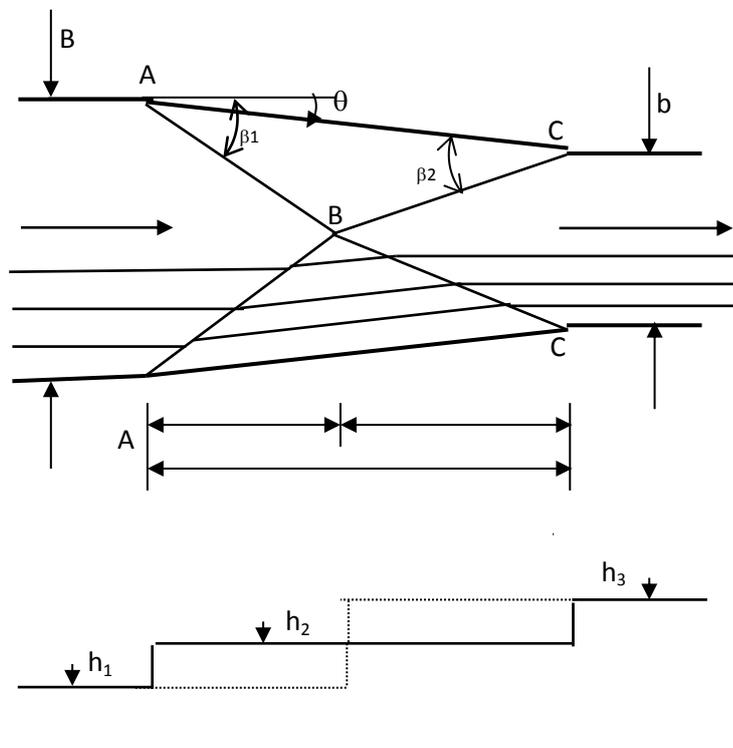


Figure (II.3): Rétrécissement linéaire en écoulement torrentiel

Si les conditions d'écoulement à l'amont et à l'aval sont telles que $Fr_1 > 1$ et $Fr_2 > 1$, le changement de largeur du canal provoque un système d'ondes de choc. En particulier, les fronts d'ondes partent des points A sous un angle β_1 . Les deux ondes de choc du point A se rencontrent au point B situé sur l'axe du canal. Pour un certain choix de θ , les ondes de chocs à l'aval de B touchent exactement les points C sous l'angle β_2 à l'entrée du canal prismatique de largeur b . A l'aval d'un tel rétrécissement, il n'y aura plus de réflexions d'ondes et la surface d'eau sera plane. Le choix de θ dépend du nombre de Froude amont Fr_1 et du rapport des largeurs. Une fois Ψ et θ fixés, chaque changement conduit à la situation représentée dans la figure (III.4).

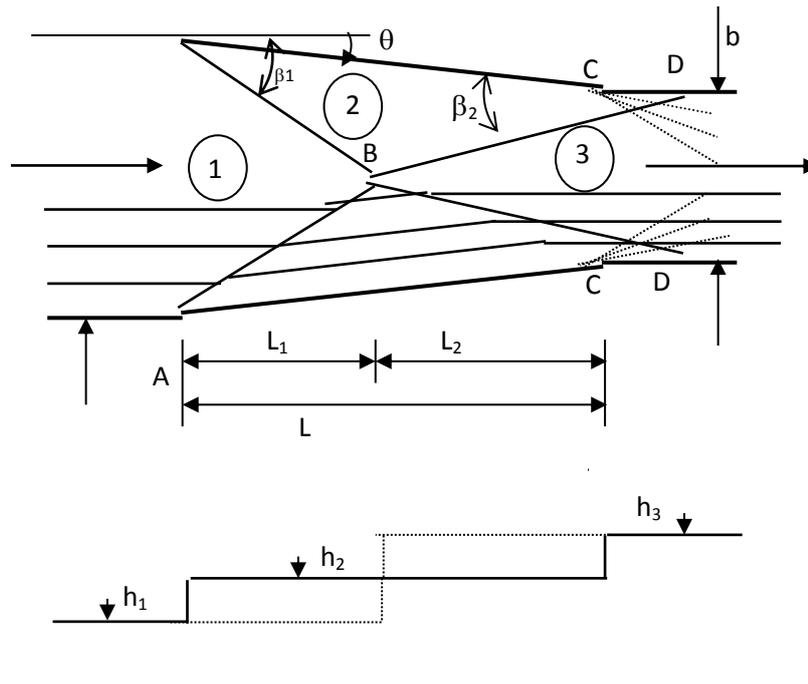


Figure (II.4) : Rétrécissement linéaire en écoulement torrentiel (supercritique) pour $Q=Q_D$

Le front d'onde provenant de B ne touchera donc plus le point C, mais touchera la paroi au point D soit à l'amont ou à l'aval du pont C. Il se formera une nouvelle réflexion et la surface d'eau à l'aval de l'entrée du canal rétrécie et sera fortement perturbée. Des ondulations stationnaires entraîneront une surélévation importante de ces parois.

Pour éviter ou au moins minimiser la propagation d'onde, le dimensionnement d'un tel rétrécissement se base sur le débit maximal $Q_{\max}=Q_D$; les ondulations pour les débits inférieurs $Q < Q_D$ sont tolérables. Il faut encore noter qu'un système d'ondes négatives se forme dans le cas où les points C et D ne sont pas identiques (Figure(III.4)). La superposition des ondes positives et négatives conduit à un écoulement agité. Il en résulte que l'écoulement dans le canal aval sera agité.

L'application du théorème de la quantité de mouvement longitudinalement et perpendiculaire au front de l'onde A-B et de l'équation de continuité fournit les relations (III.8) à (III.17). A partir de la Figure (III.4), des considérations géométriques indiquent de plus que :

$$L = L_1 + L_2 = \frac{B-b}{2\text{tg}\theta} \quad (\text{III.18})$$

avec:

$$L_1 = \frac{B}{2\text{tg}\beta_1} \quad (\text{III.19})$$

$$L_2 = \frac{b}{2\text{tg}(\beta_1 - \theta)} \quad (\text{III.20})$$

III.6.conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté le changement de section ou de direction d'un canal considéré, tel qu'un rétrécissement entraîne une surface d'écoulement irrégulière. Ces irrégularités représentent de grandes perturbations qui provoquent des ondes stationnaires à la surface de l'eau.

Chapitre III

Equations de base

III.1.Introduction

L'étude des écoulements fait partie du domaine de la spécialité de la mécanique des fluides. Quand on traite de la mécanique des fluides, on procède à l'imagination d'un volume élémentaire se trouvant à un instant donné dans un espace bien défini et par la suite appliquer les principes physiques et mécaniques permettant de mettre au point des formulations mathématiques régissant l'écoulement. Pour ce qui nous concerne, ces principes se résument dans le principe de conservation de la masse et le principe de conservation de la quantité de mouvement.

III.2.Hypothèses de base

Les formulations mathématiques ne peuvent avoir lieu qu'après avoir fixé auparavant un certain nombre d'hypothèses. Les principales hypothèses simplificatrices sont [4] :

- Le fluide est incompressible ($\rho = \text{constante}$).
- La répartition des vitesses sur une verticale est uniforme.
- La vitesse verticale (v) est très faible par rapport à la vitesse longitudinale (u).
- Les forces extérieures appliquées au volume de contrôle étudié sont donc :
 - Les forces de pression ;
 - Les forces de volume (conséquences de la gravitation) ;
 - Les forces de frottement

III.3.Equations fondamentales

Pour l'étude d'un écoulement graduellement varié, considérant un volume de contrôle constitué par un prisme de base Δx , Δy et une hauteur h .

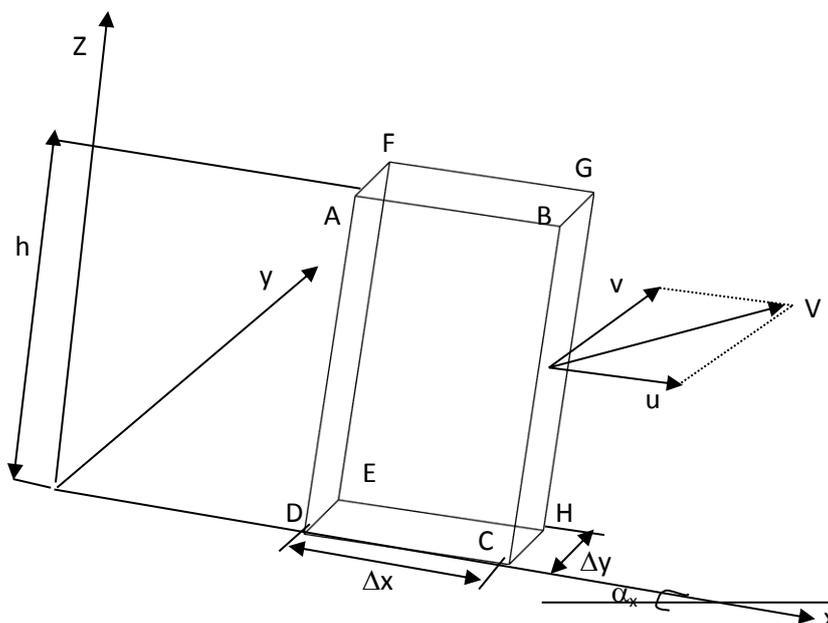


Figure (III.1): Volume de contrôle élémentaire

III.3.1. Equation de continuité (Conservation de la masse)

Cette loi fondamentale de la mécanique élastique s'annonce : « La masse d'une particule d'un système matériel que l'on suit dans son mouvement reste constante, quand le temps varie ». Etablissons l'équation de continuité qui exprime la conservation de la masse du fluide. Considérons un milieu fluide continu soit h , Δx et Δy les cotes d'un prisme de fluide élémentaire (Figure (II.1)). Soit $V(u, v)$ la vitesse d'éléments matériels, dans notre cas c'est la vitesse du volume infiniment petit du fluide. Au bout d'un espace de temps dt le volume du fluide qui entre par la face AFED est [5]:

$$\rho u h dy dt \quad (II.1)$$

La masse qui correspond à ce volume est $\rho u h dy$ - d'après l'hypothèse de la continuité des transformations.

De même la masse du liquide qui sort par la face opposée BGHC sera :

$$\rho u h dy dt + \frac{\partial(\rho u h)}{\partial x} dx dy dt = \left[\rho u h + \frac{\partial(\rho u h)}{\partial x} dx \right] dy dt \quad (II.2)$$

$$\left[\frac{\partial(\rho u h)}{\partial x} dx \right] \text{ est l'augmentation de la fonction } \rho u h .$$

La différence entre la masse sortante et la masse entrante sera :

$$\left[\rho u h + \frac{\partial(\rho u h)}{\partial x} dx \right] dy dt - \rho u h dx dy dt = \left[\frac{\partial(\rho u h)}{\partial x} dx \right] dy dt \quad (II.3)$$

En faisant le même calcul pour l'autre direction :

$$\left[\rho v h + \frac{\partial(\rho v h)}{\partial y} dy \right] dx dt - \rho v h dx dy dt = \left[\frac{\partial(\rho v h)}{\partial y} dy \right] dx dt \quad (II.4)$$

On obtient pour l'ensemble des quatre faces :

$$\left[\frac{\partial(\rho u h)}{\partial x} dx \right] dy dt + \left[\frac{\partial(\rho v h)}{\partial y} dy \right] dx dt \quad (II.5)$$

Si la masse du volume du fluide considéré à l'instant t est égale à $\rho h dx dy dt$, sa diminution sera :

$$- \frac{\partial(\rho h)}{\partial t} dt dx dy \quad (II.6)$$

On obtient de l'égalité des deux équations (II.5) et (II.6) :

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u h)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v h)}{\partial y} = 0 \quad (II.7)$$

par hypothèse la masse volumique ρ ne varie:

$$\frac{\partial(h)}{\partial t} + \frac{\partial(u h)}{\partial x} + \frac{\partial(v h)}{\partial y} = 0 \quad (IV.8)$$

III.3.2 .Equations dynamiques

Les équations dynamiques s'obtiennent en appliquant l'équation de quantité de mouvement au prisme considéré. Considérons le mouvement d'une masse liquide M_Ω correspondant au volume Ω fixe et délimité par la surface extérieure S. Afin de déterminer la quantité de mouvement relative à la masse M_Ω rappelons que, selon la mécanique classique, la quantité de mouvement I relative à un ensemble de particules est exprimée à un (instant) temps t par la somme [6] :

$$I = \sum_{j=1} m_j V_j \quad (\text{II.9})$$

avec, m_j : masse d'une particule et V_j : vitesse d'une particule.

Pour un fluide continue la généralisation de cette somme est donnée par l'intégrale :

$$I_\Omega(t) = \int_V (\rho V) d\Omega \quad (\text{II.10})$$

La loi de Newton exige que le taux de variation totale de I_V soit égal à la résultante de toutes les forces F (de volume, surface et de frottement) agissant sur la masse M_Ω .

$$\frac{DI_\Omega}{Dt} = \sum F_{\text{ext}} = F \quad (\text{II.11})$$

$$\frac{DI_V}{Dt} = \frac{D}{Dt} \left(\int_\Omega (\rho V) d\Omega \right) = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial t} (\rho V) d\Omega + \int_S (\rho V \cdot n) V d\Omega \quad (\text{II.12})$$

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial t} (\rho V) d\Omega + \int_S (\rho V \cdot n) V d\Omega = \sum (F_{\text{ext}}) = F \quad (\text{IV.13})$$

(1) (2) (3)

Le premier terme (1) représente la quantité de mouvement du fluide qui se trouve dans le volume V fixe à l'instant $t + \Delta t$.

Le deuxième terme (2) exprime la différence nette des quantités de mouvement sortant et entrant dans le volume V pendant Δt .

Le troisième terme (3) représente toutes les forces extérieures dans notre cas c'est la force de pression, la force de frottement et la force de gravité.

Projection de ce théorème sur les deux axes x et y avec u est la vitesse suivant l'axe des x et v est la vitesse suivant l'axe des y.

- suivant l'axe des x :

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial t} (\rho u) d\Omega + \int_S (\rho V \cdot n) u dS = \left(\sum F_{\text{ext}} \right)_x \quad (\text{II.14})$$

- suivant l'axe des y :

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial t} (\rho V) d\Omega + \int_S (\rho V \cdot n) v dS = \left(\sum F_{\text{ext}} \right)_y \quad (\text{II.15})$$

l'intervalle de La variation de la quantité de mouvement dans l'élément de volume de contrôle pendant temps Δt qui est $\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} (\rho V) d\Omega$, pour le volume de contrôle est [7]:

- suivant l'axe des x :

$$[(\rho h u \Delta x \Delta y)_{t+\Delta t} - (\rho h u \Delta x \Delta y)_t] \quad (\text{II.16})$$

- suivant l'axe des y :

$$[(\rho h v \Delta x \Delta y)_{t+\Delta t} - (\rho h v \Delta x \Delta y)_t] \quad (\text{II.17})$$

Par ailleurs, l'augmentation de la quantité de mouvement dans l'élément du volume de contrôle pris en considération est définie par la différence entre celle entrant par la section x (respectivement y) et celle sortant par la direction $x + \Delta x$ (respectivement $y + \Delta y$), et qui est donnée par $\int_S (\rho V \cdot n) V dS$. Pour le volume de contrôle de volume $h \Delta x \Delta y$ la quantité de mouvement est [7] :

- suivant l'axe des x :

$$- \left[(\rho h u^2 \Delta y \Delta t)_{x+\Delta x} - (\rho h u^2 \Delta y \Delta t)_x \right] + \left[(\rho h u v \Delta x \Delta t)_{y+\Delta y} - (\rho h u v \Delta x \Delta t)_y \right] \quad (\text{IV.18})$$

- suivant l'axe des y :

$$\left[(\rho h v^2 \Delta x \Delta t)_{y+\Delta y} - (\rho h v^2 \Delta x \Delta t)_y \right] + \left[(\rho h u v \Delta y \Delta t)_{x+\Delta x} - (\rho h u v \Delta y \Delta t)_x \right] \quad (\text{II.19})$$

Les principales forces extérieures sont dues à la pression, au poids et au frottement.

a. Force de pression

L'hypothèse d'une répartition hydrostatique des pressions sur une verticale d'un écoulement en canal à ciel ouvert) n'est valide que si la courbure des lignes de courants est faible, suffisamment pour négliger l'accélération verticale par rapport à la pesanteur.

Par ailleurs, l'augmentation de la pente de fond du canal en écoulement à surface libre

- cas d'une forte pente, elle aura un effet sur l'expression de la pression. En se référant au canal à forte pente α par rapport à l'horizontal, illustré par la figure (II.2).

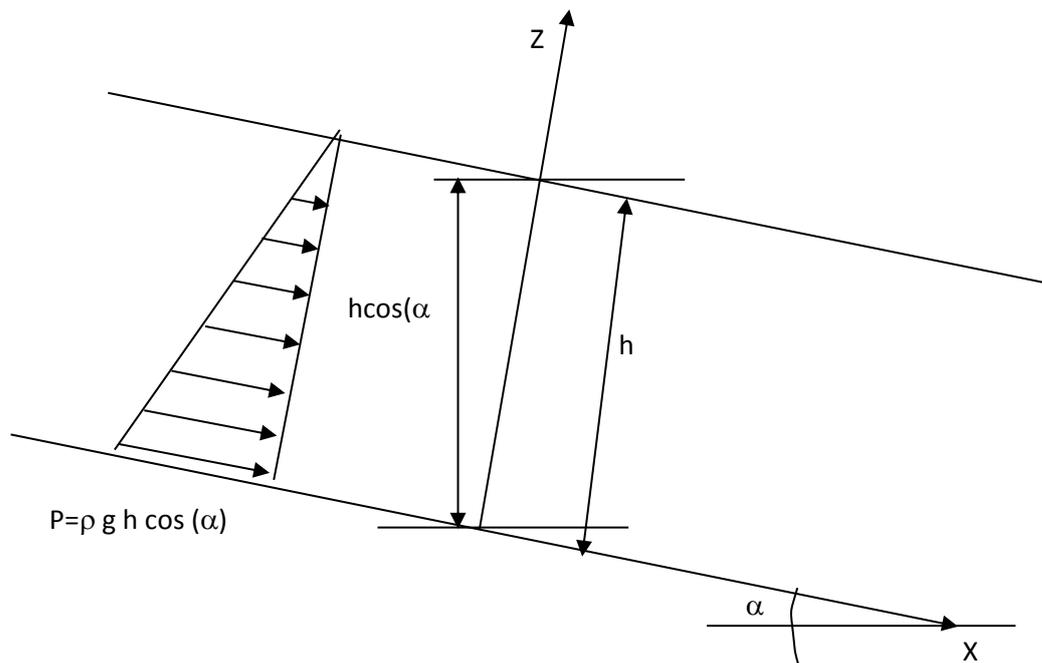


Figure (III.2) : Distribution de pression dans un canal incliné.

L'expression est alors donnée par la formule suivante :

$$P = \rho g h \cos(\alpha) \quad (\text{II.20})$$

On constate d'après cette formule que la pression P est multipliée par un facteur de correction $\cos(\alpha)$, où α représente l'angle d'inclinaison du fond du canal avec l'horizontal, et h , la hauteur d'eau mesurée perpendiculairement au fond du canal. Ainsi avec l'hypothèse, d'une distribution hydrostatique de la pression, les isobares sont des surfaces parallèles à la surface libre. Soit P la résultante des forces de pression s'exerçant sur le prisme élémentaire :

$$\left| \vec{F}_p \right| = \rho g h \cos(\alpha) \Delta x \Delta y \quad (\text{II.21})$$

La composante $\left| F_p \right|$ suivant l'axe des x est :

$$F_{Px} = -\rho g h \frac{\partial h}{\partial x} \cos(\alpha)_x \Delta x \Delta y \quad (\text{II.22})$$

La composante $\left| F_p \right|$ suivant l'axe des y est :

$$F_{Py} = -\rho g h \frac{\partial h}{\partial y} \cos(\alpha)_y \Delta x \Delta y \quad (\text{II.23})$$

Remarque : Si la pente est supposée très faible, on a alors le terme $\cos(\alpha) \approx 1$ et $\sin(\alpha) \approx \text{tg}(\alpha)$. L'expression de la pression et celle de la résultante des forces seront respectivement :

$$P = \rho g h$$

$$|\vec{F}_P| = \rho g h \Delta x \Delta y$$

b. Force de gravite

La projection de la force de gravite F_g , correspondant à l'élément de volume de contrôle étudié, suivant les deux axes x et y nous donne suivant :

- L'axe des x :

$$F_{Px} = \rho g h \Delta x \Delta y \sin(\alpha)_x \quad (\text{II.24})$$

- L'axe des y :

$$F_{Py} = \rho g h \Delta x \Delta y \sin(\alpha)_y \quad (\text{II.25})$$

On remarque ici que si le fond du canal est horizontal alors le poids n'intervient pas, car il est parallèle à l'axe \vec{Z} (c'est à dire $\sin(\alpha) = 0$).

c. Force de frottement

La force due au frottement est proportionnelle à la surface de contact de l'eau et du fond : le fond étant supposé relativement plat, cette surface est égale, pour le prisme élémentaire, à $\Delta x \Delta y$. Elle est proportionnelle au carré de la vitesse et dirigée en sens opposé à l'écoulement:

$$F_f = -\frac{1}{2} \rho C_f |\vec{V}| \vec{V} \Delta x \Delta y \quad (\text{II.26})$$

$$C_f = \frac{2g}{C^2} \quad \text{avec, } C : \text{coefficient de Chézy.}$$

De nombreux chercheurs, ont proposé une grande quantité de formules essentiellement empiriques pour déterminer la valeur du coefficient de Chézy C. Parmi les formules utilisées, on propose les formules suivantes [3]:

- Formule d'Agroskine : $C = 17,72(k + \lg R_h)$ (II.27)

avec, $k = \frac{1}{17,72n}$, le paramètre du poli

ou,
$$C = \frac{1}{n} + 17,72 \lg R_h \quad (\text{II.28})$$

- Formule de Pavlovski : $C = \frac{1}{n} R_h^y$ (II.29)

- Formule de Manning : $C = \frac{1}{n} R_h^{1/6}$ (II.30)

avec, n : est le coefficient de rugosité, R_h : le rayon hydraulique et y : un exposant variable dans la formule de Pavlovski qui dépend du coefficient de rugosité et du rayon hydraulique ; D'après les recommandations de Pavlovski, l'exposant y peut être pris :

à $0.1m < R_h < 1m$ $y \approx 1.5\sqrt{n}$; à $3m \geq R_h > 1m$ $y \approx 1.3\sqrt{n}$.

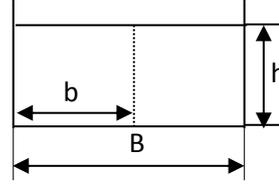
On se propose dans notre cas d'utiliser la formule de Manning.

Pour les canaux non prismatiques avec une section transversale rectangulaire on a alors :

$$R_h = \frac{S_m}{P_m} = \frac{\text{Surface mouillée}}{\text{périmetremouillé}} = \frac{Bh}{B + 2h}$$

avec, B : largeur du canal

h : hauteur du tirant d'eau



De plus, puisque le canal est symétrique, en remplaçant $b=B/2$, le rayon hydraulique devient :

$$R_h = \frac{bh}{b + h}$$

La force de frottement suivant l'axe des x est :

$$F_{fx} = -\rho g n^2 \left(\frac{b+h}{bh} \right)^{1/3} u \sqrt{u^2 + v^2} \Delta x \Delta y \quad (\text{II.31})$$

La force de frottement suivant l'axe des y est :

$$F_{fy} = -\rho g n^2 \left(\frac{b+h}{bh} \right)^{1/3} v \sqrt{u^2 + v^2} \Delta x \Delta y \quad (\text{II.32})$$

Le principe de la quantité de mouvement s'écrit alors :

- Suivant l'axe des x :

$$[(\rho h u \Delta x \Delta y)_{t+\Delta t} - (\rho h u \Delta x \Delta y)_t] + \quad (\text{II.33})$$

$$[(\rho h u^2 \Delta y \Delta t)_{x+\Delta x} - (\rho h u^2 \Delta y \Delta t)_x] + [(\rho h u v \Delta x \Delta t)_{y+\Delta y} - (\rho h u v \Delta x \Delta t)_y] = -\rho g h \frac{\partial h}{\partial x} \cos(\alpha)_x \Delta x \Delta y \Delta t + \rho g h \Delta x \Delta y \Delta t \sin(\alpha)_x - \rho g n^2 \left(\frac{b+h}{bh} \right)^{1/3} u \sqrt{u^2 + v^2} \Delta x \Delta y \Delta t$$

- Suivant l'axe des y :

$$[(\rho h v \Delta x \Delta y)_{t+\Delta t} - (\rho h v \Delta x \Delta y)_t] + \quad (\text{II.34})$$

$$[(\rho h v^2 \Delta x \Delta t)_{y+\Delta y} - (\rho h v^2 \Delta x \Delta t)_y] + [(\rho h u v \Delta y \Delta t)_{x+\Delta x} - (\rho h u v \Delta y \Delta t)_x] = -\rho g h \frac{\partial h}{\partial y} \cos(\alpha)_y \Delta x \Delta y \Delta t + \rho g h \Delta x \Delta y \Delta t \sin(\alpha)_y - \rho g n^2 \left(\frac{b+h}{bh} \right)^{1/3} v \sqrt{u^2 + v^2} \Delta x \Delta y \Delta t$$

En divisant les équations ci-dessus par $\Delta x \Delta y \Delta t$ et faisant tendre ensuite ces grandeurs vers zéro tout en sachant que ρ est constante par hypothèse, les équations dynamiques suivant les deux directions x et y sont respectivement.

$$\frac{\partial}{\partial t}(uh) + \frac{\partial}{\partial x} \left(u^2 h + g \frac{h^2}{2} \cos(\alpha)_x \right) + \frac{\partial}{\partial y} (uvh) = gh(S_{ox} - S_{fx}) \quad (\text{II.35})$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(vh) + \frac{\partial}{\partial x} (uvh) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v^2 h + g \frac{h^2}{2} \cos(\alpha)_y \right) = gh(S_{oy} - S_{fy})$$

$$\text{avec, } S_{ox} = \sin(\alpha)_x \quad (\text{II.36})$$

$$S_{fx} = \frac{n^2}{2} \left(\frac{b+h}{bh} \right)^{1/3} u \sqrt{u^2 + v^2} \quad (\text{II.37})$$

$$S_{oy} = \sin(\alpha)_y \quad (\text{II.38})$$

$$S_{fy} = \frac{n^2}{2} \left(\frac{b+h}{bh} \right)^{1/3} v \sqrt{u^2 + v^2} \quad (\text{II.39})$$

Le modèle mathématique en terme des variables de l'écoulement (h , uh , vh), se résume finalement dans le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uh) + \frac{\partial}{\partial y}(vh) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(uh) + \frac{\partial}{\partial x}\left(u^2h + g\frac{h^2}{2}\cos(\alpha)_x\right) + \frac{\partial}{\partial y}(uvh) &= gh(S_{ox} - S_{fx}) \\ \frac{\partial}{\partial t}(vh) + \frac{\partial}{\partial x}(uvh) + \frac{\partial}{\partial y}\left(v^2h + g\frac{h^2}{2}\cos(\alpha)_y\right) &= gh(S_{oy} - S_{fy}) \end{aligned} \quad (\text{II.40})$$

et sous la forme générale est :

$$U_t + E_x + F_y + S = 0 \quad (\text{II.41})$$

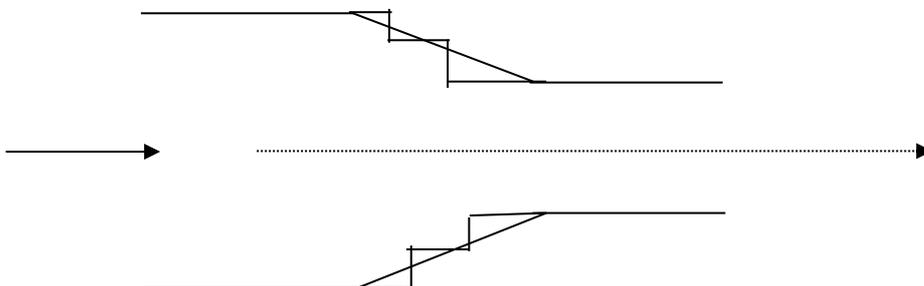
avec, $U_t = (h, uh, vh)^t$, $E_x = \begin{bmatrix} uh \\ u^2h + g\frac{h^2}{2}\cos(\alpha)_x \\ uvh \end{bmatrix}$, $F_y = \begin{bmatrix} vh \\ uvh \\ v^2h + g\frac{h^2}{2}\cos(\alpha)_y \end{bmatrix}$

et $S = \begin{bmatrix} 0 \\ -gh(S_{ox} - S_{fx}) \\ -gh(S_{oy} - S_{fy}) \end{bmatrix}$

III.4. Transformation géométrique

La plupart du canal ont des géométries irrégulières ou curvilignes. L'inclusion de limites devient un problème lors de l'analyse de ces canaux par les méthodes de différences finies. L'approximation illustrée par la figure (II.3), et dont les points de la grille ne coïncident généralement pas avec les limites de la transition, nécessitant ainsi des procédures d'interpolation qui se sont avérées détériorer la solution. Pour éviter ce problème, les coordonnées peuvent être transformées de telle sorte que les axes de coordonnées coïncident avec les limites. Par exemple, la transformation de coordonnées simple suivante donne de bons résultats. Elle induit de fortes instabilités, principalement si les ondes de chocs sont présentes.

Pour éviter ces instabilités, la transformation des équations de l'écoulement à surface libre dans un système de coordonnées transformées ξ - η adaptées aux frontières pour représenter les géométries irrégulières s'avère nécessaire [8].



III.5. Application de la transformation géométrique

Considérons une transition symétrique comme le montre la figure (II.4.a). En raison de symétrie, seule la moitié du canal peut être analysée. La transformation suivante des variables indépendantes X et Y convertit le domaine physique en un domaine de calcul (Figure (II.4.b)) est obtenu en utilisant la transformation de coordonnées suivante :

$$\begin{cases} \xi = X \\ \eta = \frac{Y}{b(x)} \end{cases} \quad (\text{II.42})$$

Soit f une fonction de $x(\xi, \eta)$, $y(\xi, \eta)$, on peut écrire d'après les propriétés de dérivées partielles que :

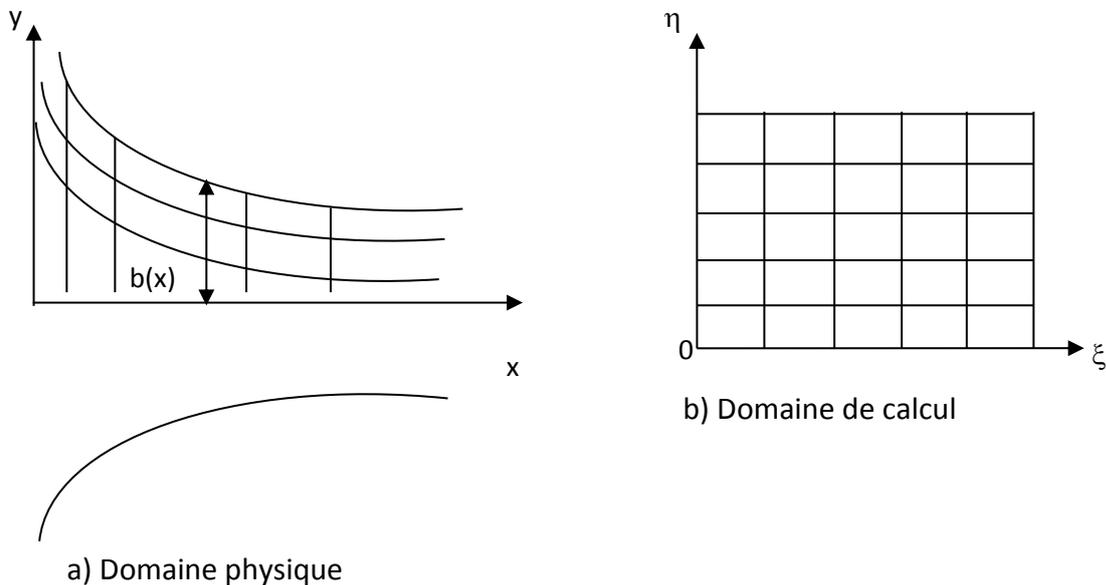


Figure (III.4): Transformation du domaine physique au domaine de calcul

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.43})$$

En appliquant ces propriétés de la dérivée partielle à la transformation de coordonnées géométriques (II.42), donnent :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial \xi} - \frac{\eta}{b(\xi)} b'(\xi) \frac{\partial f}{\partial \eta} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{1}{b(\xi)} \frac{\partial f}{\partial \eta} \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.44})$$

où,
$$b'(\xi) = \frac{\partial b(\xi)}{\partial \xi}$$

L'application de la transformation géométrique (II.42) et les propriétés de la dérivée partielle (II.43) au système d'équations (II.40) du mouvement écrit en termes des variables de l'écoulement $U_t = (h, uh, vh)^t$ donne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi}(uh) - \frac{\eta}{b(\xi)} b'(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi}(uh) + \frac{1}{b(\xi)} \frac{\partial}{\partial \eta}(vh) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(uh) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(u^2 h + g \frac{h^2}{2} \cos(\alpha)_\xi \right) - \frac{\eta}{b(\xi)} b'(\xi) \frac{\partial}{\partial \eta} \left(u^2 h + g \frac{h^2}{2} \cos(\alpha)_\eta \right) + \frac{1}{b(\xi)} \frac{\partial}{\partial \eta}(uvh) &= gh(S_{o\xi} - S_{f\xi}) \\ \frac{\partial}{\partial t}(vh) + \frac{\partial}{\partial \xi}(uvh) - \frac{\eta}{b(\xi)} b'(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi}(uvh) + \frac{1}{b(\xi)} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(v^2 h + g \frac{h^2}{2} \cos(\alpha)_\eta \right) &= gh(S_{o\eta} - S_{f\eta}) \end{aligned} \quad (\text{II.45})$$

- Si le vecteur d'écoulement $U_t = (h, uh, vh)^t$, le système aura la forme suivante :

$$V_t + E_\xi - \frac{\eta}{b(\xi)} b'(\xi) E_\eta + \frac{1}{b(\xi)} F_\eta + S = 0 \quad (\text{II.46})$$

avec,

$$E_\xi = \begin{bmatrix} uh \\ u^2 h + g \frac{h^2}{2} \cos(\alpha)_\xi \\ uvh \end{bmatrix}, \quad F_\eta = \begin{bmatrix} vh \\ uvh \\ v^2 h + g \frac{h^2}{2} \cos(\alpha)_\eta \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 0 \\ -gh(S_{o\xi} - S_{f\xi}) \\ -gh(S_{o\eta} - S_{f\eta}) \end{bmatrix} \quad (\text{II.47})$$

III.6. Conditions aux limites

La prise en compte des limites est un aspect très important lors de l'utilisation des techniques numériques dans le but d'obtenir de bons résultats. Les équations hyperboliques sont particulièrement très sensibles, car chaque erreur qui s'introduit au niveau des frontières se propage à travers la grille de calcul, ce qui mène dans la plupart des cas à de fortes instabilités. Trois types de conditions aux limites doivent être utilisées dans les différentes applications liées au problème physique étudié dans le présent travail à savoir[9] :

- Conditions amont et conditions aval.
- Conditions de symétrie.
- Conditions sur les parois solides.

III.6.1. Conditions amont et aval

Les conditions d'amont et d'aval sont aussi connues comme étant des conditions aux frontières ouvertes ; ou l'écoulement peut entrer ou quitter le domaine de calcul. Ces conditions seront spécifiées selon le type de l'écoulement et le type du problème considéré. Le nombre de conditions est résumé dans le tableau ci-dessus

Tableau III.1 : Le nombre de conditions amont et aval

Problème considéré	Ecoulement supercritique $Fr > 1$	
	Amont (entrée)	Aval (sortie)
2D	3	0

D'après le tableau, trois conditions aux frontières doivent être spécifiées à l'amont et aucune à l'aval, c'est-à-dire le vecteur d'écoulement (h, u et v) est imposé à l'amont et le domaine de calcul est libre à l'aval pour un écoulement supercritique.

III.6.2. Conditions de symétrie

Le principe de cette condition de symétrie consiste à remplacer les valeurs des variables h, u et v aux points fictifs du maillage par les valeurs correspondant du maillage (figure (II.5)).

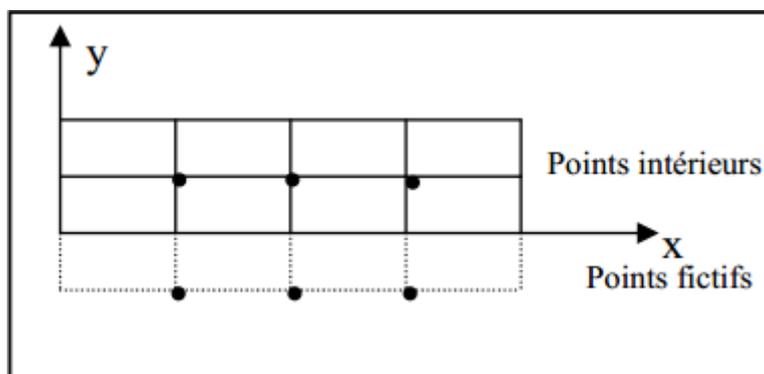


Figure (III.5) : Procédure de réflexion au niveau de l'axe de symétrie.

Dans ce cas, une réflexion symétrique est utilisée pour déterminer h et u , et une procédure asymétrique pour déterminer v . Cette procédure est exacte pour une ligne symétrique.

III.6.3. Conditions sur les parois latérales

En général, on impose en tous les points du contour, des équations portant soit sur la fonction (U) : problème Dirichlet, soit sur le gradient de (U) .

III.6.4. Procédure de réflexion

Le principe de la méthode de la procédure de réflexion consiste à considérer que la profondeur de l'écoulement h et la vitesse résultante V au point de réflexion fictif du maillage sont les mêmes que les valeurs correspondant aux points intérieurs de la grille de calcul.

La direction de la vitesse résultante V , est déterminée telle que sa composante normale au niveau du mur soit nulle.

Si θ est l'angle que fait la paroi avec l'axe des x , et ψ l'angle que fait la vitesse résultante V aux points intérieurs du maillage et l'axe des x , alors, les composantes de la vitesse u^f et v^f aux points fictifs (points de réflexion) sont:

$$u^f = V \cos(2\theta - \psi) \quad (\text{II.52})$$

$$v^f = -V \sin(2\theta - \psi) \quad (\text{II.53})$$

III.7. Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté les équations de Barré de Saint Venant bidimensionnelles, basé sur les deux lois, de conservation de la masse et la conservation de quantité de mouvement, ainsi qu'on a donné les conditions initiales et conditions aux limites.

Chapitre IV
Modélisation
numérique

IV.1.Introduction

Les grands progrès scientifiques dans le domaine de l'analyse numérique ont permis de développer plusieurs méthodes numériques permettant à l'ingénieur de résoudre les problèmes liés aux équations aux dérivées partielles. Diverses méthodes numériques ont été par la suite développées dans ce contexte, parmi ces dernières, on peut citer : Méthode des différences finies, Méthode des éléments finis, Méthode des volumes finis,...et etc. Il existe trois approches de méthodes qui permettent à l'ingénieur de résoudre un problème physique donné :

- L'approche expérimentale,
- L'approche théorique,
- L'approche numérique.

L'approche numérique utilise un nombre d'hypothèses et nécessite un ordinateur pour résoudre les équations qui régissent le système physique. Notons que les limites des méthodes numériques sont liées à la capacité de stockage et à la vitesse d'exécution du calculateur, cet inconvénient est surmontable avec l'avancée importante des moyens de calcul, dans ce chapitre, nous avons choisi la méthode de différence finies pour simuler l'écoulement à surface libre.

IV.2.Présentation de MATLAB

MATLAB (MATrix LABoratory) est un logiciel interactif basé sur le calcul matriciel. Il est utilisé dans les calculs scientifiques et les problèmes d'ingénierie parce qu'il permet de résoudre des problèmes numériques complexes en moins de temps requis par les langages de programmation courant, et ce grâce à une multitude de fonctions intégrées et à plusieurs programmes outils testés et regroupés selon usage dans des dossiers appelés boîtes à outils ou "toolbox". Au démarrage de MATLAB sur un PC, l'interface se présente comme suit :

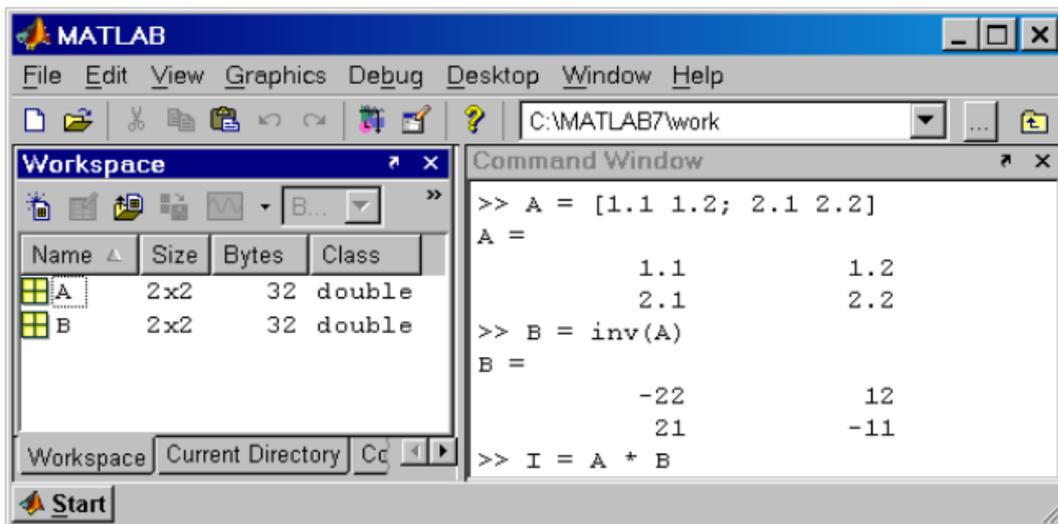


Figure IV.1: fenêtre principale de MATLAB (version 7.0)

La fenêtre principale de MATLAB contient deux fenêtres secondaires pouvant être déplacées ou fermées. À droite, la fenêtre des commandes permet à la fois d'afficher les résultats et d'introduire les commandes ligne par ligne. Le symbole (>>) indique l'attente d'une

commande. A gauche, sont imbriquées en volets les fenêtres Workspace, Current Directory et parfois Command History.

- Workspace permet d'afficher les variables utilisées avec leurs tailles.
- Current Directory affiche le chemin d'accès ou le répertoire en cours avec tous les fichiers et les sous répertoires.
- Command History affiche les commandes ayant été saisies.

Les déclarations et les commandes peuvent aussi être introduites sous forme d'un script dans un fichier texte d'extension ".m". MATLAB est équipé d'un éditeur de texte permettant de saisir les fichiers script. La commande `edit prog1` ouvre l'éditeur et charge le fichier `prog1.m` s'il existe, sinon l'éditeur s'ouvre sur un fichier vide. La figure suivante montre l'éditeur de MATLAB ouvert sur le fichier `prog1.m` en cours de création.

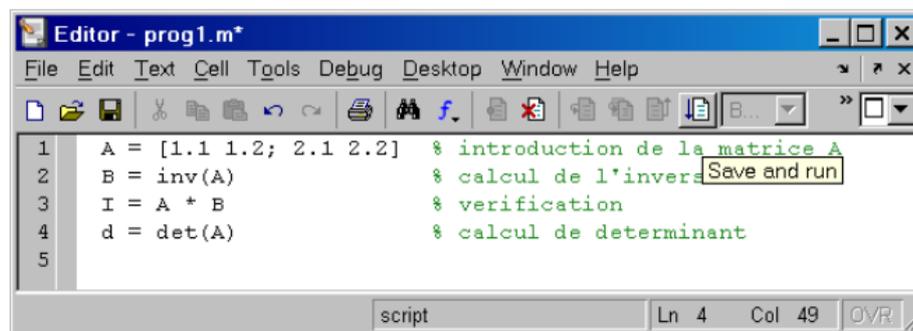


Figure IV.2 : Editeur de MATLAB

L'exécution du script (les commandes une après une) se fait à l'aide du bouton Save and Run (sélectionné dans la figure) ou avec le menu `debug/Save and Run` ou bien, simplement, en appuyant sur la touche fonction `F5`. Les résultats sont affichés dans la fenêtre des commandes.

IV.3. Aperçu sur les différentes méthodes numériques

IV.3.1. Méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis consiste à approcher, dans un sous-espace de dimension finie, un problème écrit sous forme variationnelle (comme minimisation de l'énergie, en général) dans un espace de dimension infinie. Elle est la méthode la plus utilisée pour les études des structures à trois dimensions, car elle étend les possibilités des méthodes matricielles à un très vaste domaine d'application et permet donc l'analyse des structures complexes. La solution approchée est dans ce cas une fonction déterminée par un nombre fini de paramètres comme, par exemple, ses valeurs en certains points (les nœuds du maillage) [2,11].

IV.3.2. Méthode des volumes finis

La méthode des volumes finis intègre, sur des volumes élémentaires de forme simple, les équations écrites sous forme de loi de conservation. Elle fournit ainsi de manière naturelle des formulations discrètes conservatives et est donc particulièrement adaptée aux équations de la

mécanique des fluides. Bien qu'elle ne soit pas fondamentalement différente aux méthodes aux différences finies ou aux éléments finis, il est d'usage de la considérer à part, parce qu'elle trouve un domaine d'application tout à fait spécifique.

Il existe une grande variété de méthodes selon le choix de la géométrie des volumes élémentaires et des formules de calcul des flux. Par contre, on dispose de peu de résultats théoriques de convergence [2,11].

IV.3.3. Méthode des différences finies

Cette méthode consiste à déterminer les valeurs de la fonction recherchée notée U en quelques points particuliers. Dans le cas de la résolution des équations de Saint Venant on recherche les paramètres hydrauliques. Un problème aux équations différentielle nécessite de :

- Réduire le domaine de résolution de l'équation différentielle à un domaine borné ;
- Définir une grille (maillage) finie des points de ce domaine ;
- Approcher les dérivées qui figurent dans l'équation à l'aide d'un développement de Taylor autour des points de la grille. Pour les points situés aux bords du domaine de calcul, on écrit les conditions aux limites de manière exacte ou éventuellement approchée [2,11].

IV.3.4. Exemple de discrétisation du domaine 1D

On commence par quadriller le plan (x, t) afin d'obtenir des mailles de taille $(\Delta x, \Delta t)$ où Δx est le pas d'espace et Δt le pas de temps. Le but est de calculer les valeurs de vitesse et de hauteur d'eau en chaque point du maillage. Les méthodes aux différences finies sont toutes basées sur les développements de Taylor des fonctions continues et dérivables. Plus les pas de temps et d'espace sont petits plus les développements limités sont proches des valeurs exactes [14]. La figure ci-dessous montre une grille de computation typique, la position du nœud est dénotée par l'indice i et le temps par l'indice j . $U_i^n = U(i\Delta x, j\Delta t)$

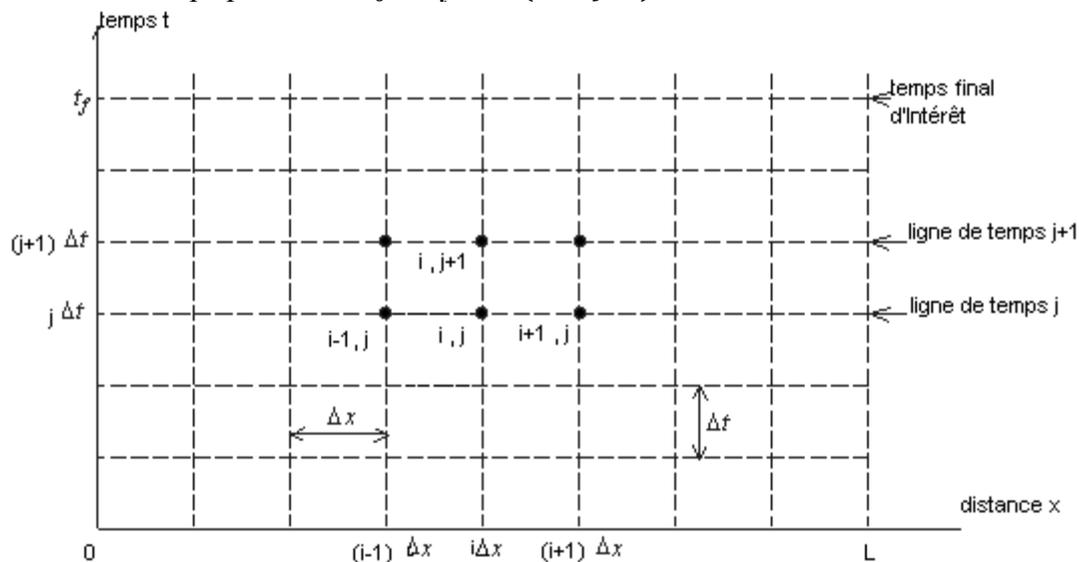


Figure IV.3 : Quadrillage du plan (x, t)

IV.4. Schéma explicite et schéma implicite

Un schéma est explicite, si chaque valeur approchée de la solution au temps $t + \Delta t$ et au point x donné, est décrite à partir des valeurs de la solution précédente au temps t en ce même point. Cette valeur est donc explicitement fonction des valeurs connues, déjà calculées, et s'obtient directement pour tous les points du maillage [12].

Un schéma est implicite, si la valeur approchée en un point au temps $t + \Delta t$, est écrite en fonction de la solution précédente au temps t , et les valeurs voisines au temps $t + \Delta t$. Il s'agit donc d'une liaison, entre toutes les valeurs au temps $t + \Delta t$, qui se résout globalement.

IV.5. Les schémas aux différences finies explicites fréquemment utilisés

Plusieurs schémas aux différences finies explicites de second ordre ont été développés pour la résolution des systèmes d'équations de nature hyperbolique, qu'on rencontre toujours dans la dynamique des fluides [8,12,13].

a. Schéma de Lax-Friedrichs

Le schéma de Lax-Friedrichs est un schéma de premier ordre dans le temps et de deuxième ordre dans l'espace. Il introduit un terme supplémentaire que l'on appelle la viscosité numérique. Lorsque Δx tend vers zéro, l'équation parabolique tend vers l'équation hyperbolique.

Le schéma explicite de Lax-Friedrichs s'écrit :

$$U_i^{n+1} = \alpha U_i^n + (1-\alpha) \frac{U_{i+1}^n + U_{i-1}^n}{2} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (F_{i+1}^n - F_{i-1}^n) + \Delta t S_i^n \quad (\text{IV.1})$$

Où les indices i et n représentent respectivement les pas de variations dans l'espace et dans le temps.

b. Schéma de MacCormack

La méthodologie du schéma de MacCormack consiste à discrétiser les équations de base en deux séquences, une séquence de prédiction et une autre de correction. Ces chapitre est du deuxième ordre dans le l'espace et dans le temps.

- **Etape de Prédiction**

$$\tilde{U}_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1}^n - F_i^n) + \Delta t S_i^n \quad (\text{IV.2})$$

- **Etape de correction**

$$\hat{U}_i^{n+1} = \tilde{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\tilde{F}_i - \tilde{F}_{i-1}) + \Delta t \tilde{S}_i \quad (\text{IV.3})$$

Dans lesquelles \tilde{u} et \hat{u} sont les valeurs intermédiaires de u . La valeur de la variable u au pas de temps $(n+1)$ est telle que :

$$U_i^{n+1} = \frac{1}{2} (\hat{U}_i + \tilde{U}_i^n) \quad (\text{IV.4})$$

On ajoute la viscosité artificielle aux étapes de prédiction et correction, on aura :

- *Etape de Prédiction*

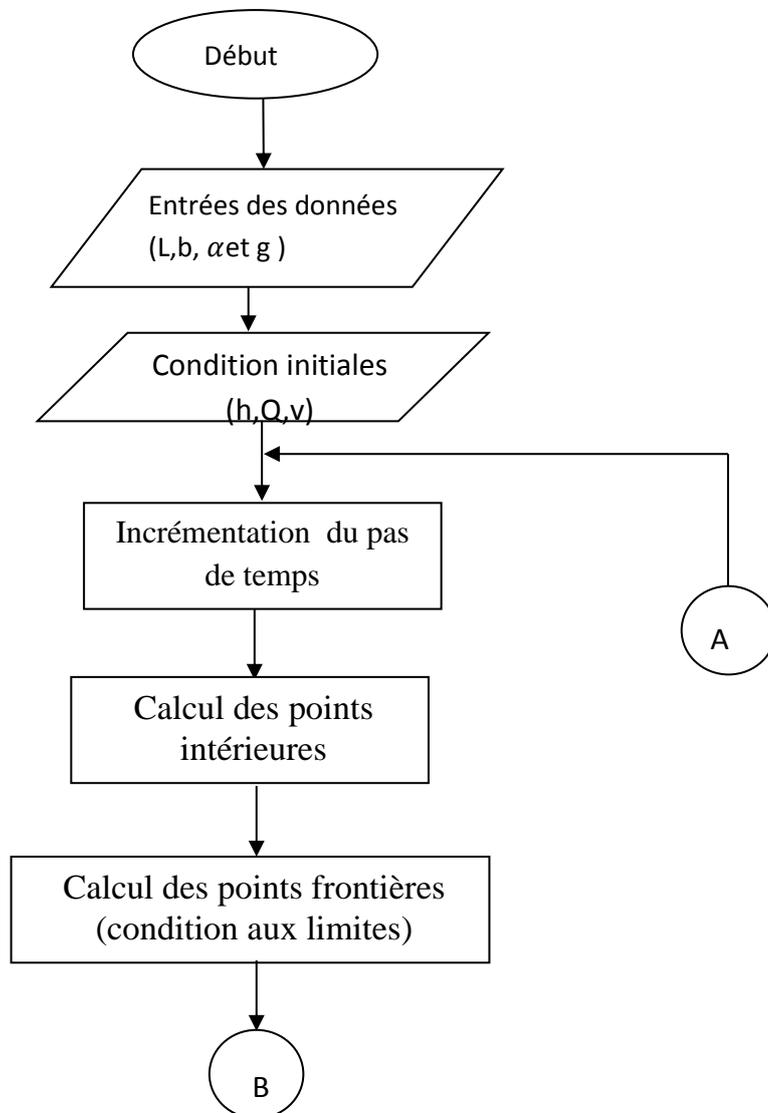
$$\tilde{U}_i^{n+1} = \alpha U_i^n + (1-\alpha) \frac{U_{i+1}^n + U_{i-1}^n}{2} - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1}^n - F_i^n) + \Delta t S_i^n \quad (\text{IV.5})$$

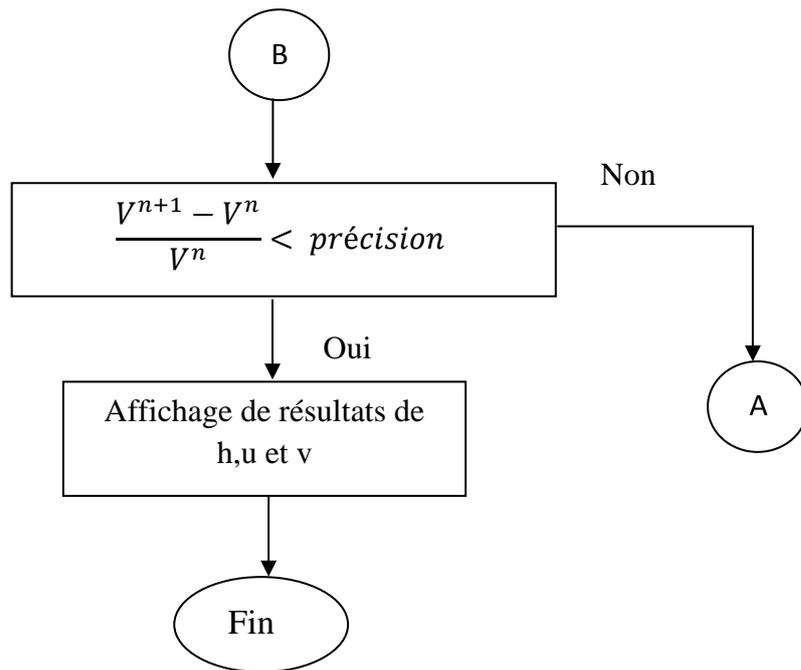
- *Etape de correction*

$$\hat{U}_i^{n+1} = \alpha \tilde{U}_i + (1-\alpha) \frac{\tilde{U}_{i+1}^n + \tilde{U}_{i-1}^n}{2} - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\tilde{F}_i - \tilde{F}_{i-1}) + \Delta t \tilde{S}_i \quad (\text{IV.6})$$

$$U_i^{n+1} = \frac{1}{2} (\hat{U}_i + \tilde{U}_i^n) \quad (\text{IV.7})$$

IV.6. Organigramme de calcul





IV.6. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté la méthode explicite de différence finies. Deux schémas numériques de Lax-Friedrichs et MacCormack pour la résolution des équations de Barré Saint Venant

Chapitre V
Expérimentation
numérique

V.1.introduction

Dans ce chapitre nous avons utilisé les équations de Saint Venant pour modéliser le phénomène de l'écoulement a surface libre. La méthode des différences finies a été choisie pour simuler le phénomène. Dans le but de tester la validité du modèle mathématique qui gouverne les écoulements non permanents à surface libre, les simulations numériques seront comparées avec les résultats expérimentaux et numériques d'autres auteurs.

V.2.Application

Le modèle réduit en question est un canal dont la pente du radier est d'environ 28^0 sur une longueur de 0.74 m et possédant une section rectangulaire symétrique de 0.41 m. L'étude expérimentale a été faite avec des débits de $0.0344 \text{ m}^3/\text{s}$ (débit réel $1000 \text{ m}^3/\text{s}$), de $0.0689 \text{ m}^3/\text{s}$ (débit réel $2000 \text{ m}^3/\text{s}$) et pour un débit exceptionnel de $0.093 \text{ m}^3/\text{s}$ (débit réel $2700 \text{ m}^3/\text{s}$). Par simulation numérique, on va déterminer l'allure de la ligne d'eau au niveau de la paroi latérale pour les trois débits précédents. Les conditions de l'écoulement sont résumées dans le tableau suivant :

Tableau (V.1) : Les conditions de l'écoulement

Hauteur d'eau à l'amont (m)	0.0656	0.1000	0.1300
Vitesse longitudinale (m/s)	1.2800	1.6805	1.7450
Vitesse transversale (m/s)	0	0	0

Le maillage est composé de mailles de dimensions : $\Delta X=0.02$ et $\Delta Y=0.01$.

Le coefficient de Manning est de 0.01.

La pente du fond est $\alpha=28.1245^0$.

La profondeur de l'écoulement h , la vitesse longitudinale u_0 et la vitesse transversale v_0 sont par ailleurs spécifiées en tous les points du maillage comme conditions initiales.

V.2.1. Résultats et analyse

Les figures (V.1), (V.2) et (V.3) montrent les résultats numériques de la hauteur d'eau, nombre de Froude, la vitesse de l'écoulement et le plan d'eau pour les différents débits.

D'après les figures, on ne constate que les résultats numériques obtenus d'une manière satisfaisante avec les résultats expérimentaux.

Ces figures montrent aussi, lorsque la hauteur diminue la vitesse augmente avec le nombre de Froude

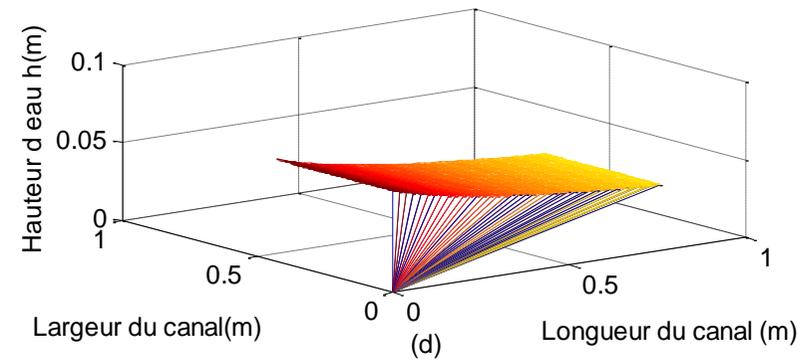
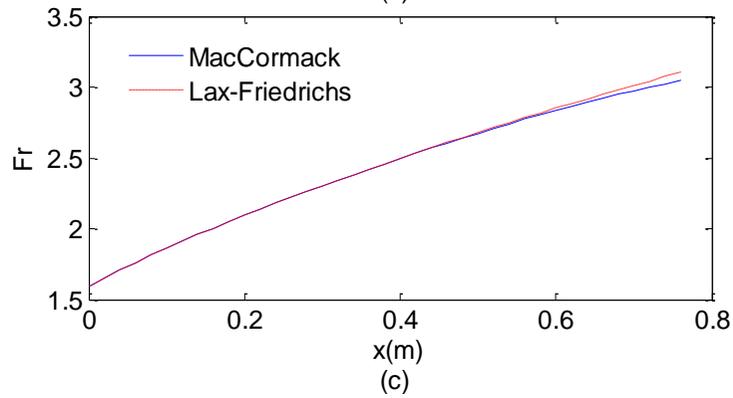
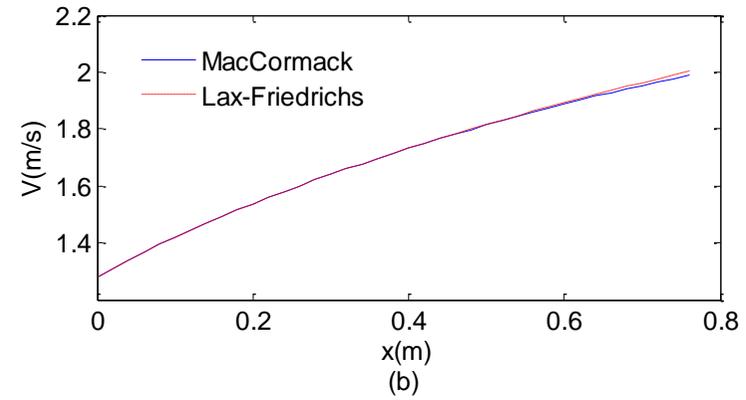
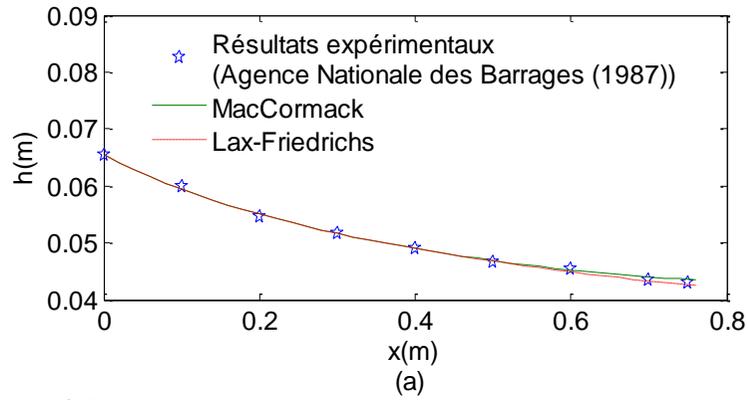


Figure (V.1) : Représentation des paramètres hydrauliques dans un canal pour un débit $Q=0.034\text{m}^3/\text{s}$

a : variation de la hauteur d'eau le long du canal

b : variation de la vitesse d'écoulement

c : le nombre de Froude

d : représentation de h dans tout le canal

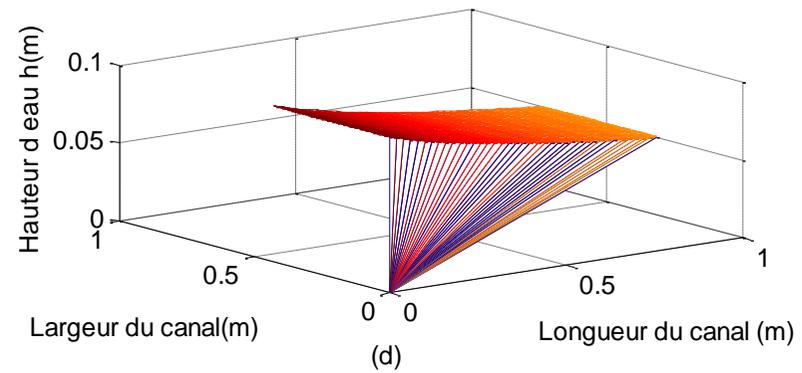
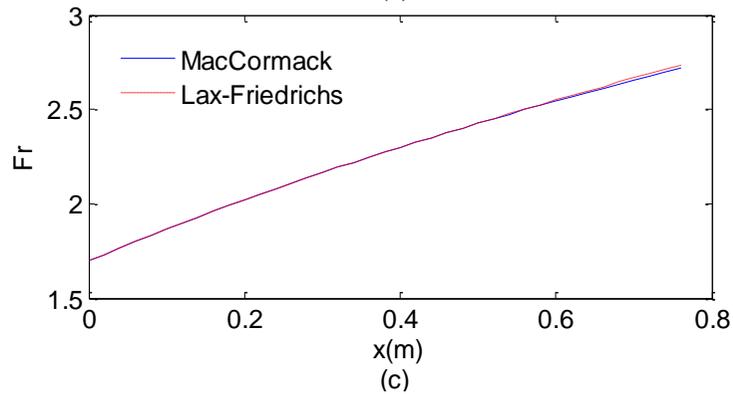
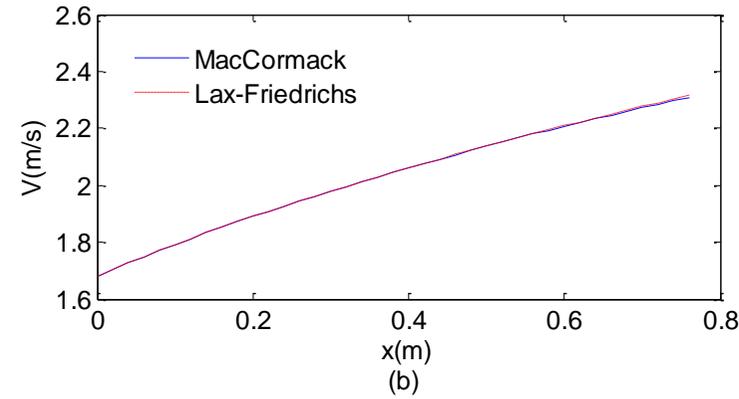
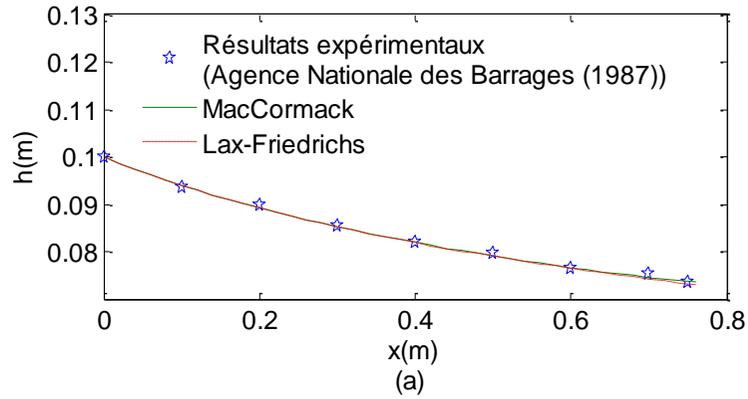


Figure (V.2) : Représentation des paramètres hydraulique dans un canal pour un débit $Q=0.0689m^3/s$

a : variation de la hauteur d'eau le long du canal

b : variation de la vitesse d'écoulement

c : le nombre de Froude

d : représentation de h dans tout le canal

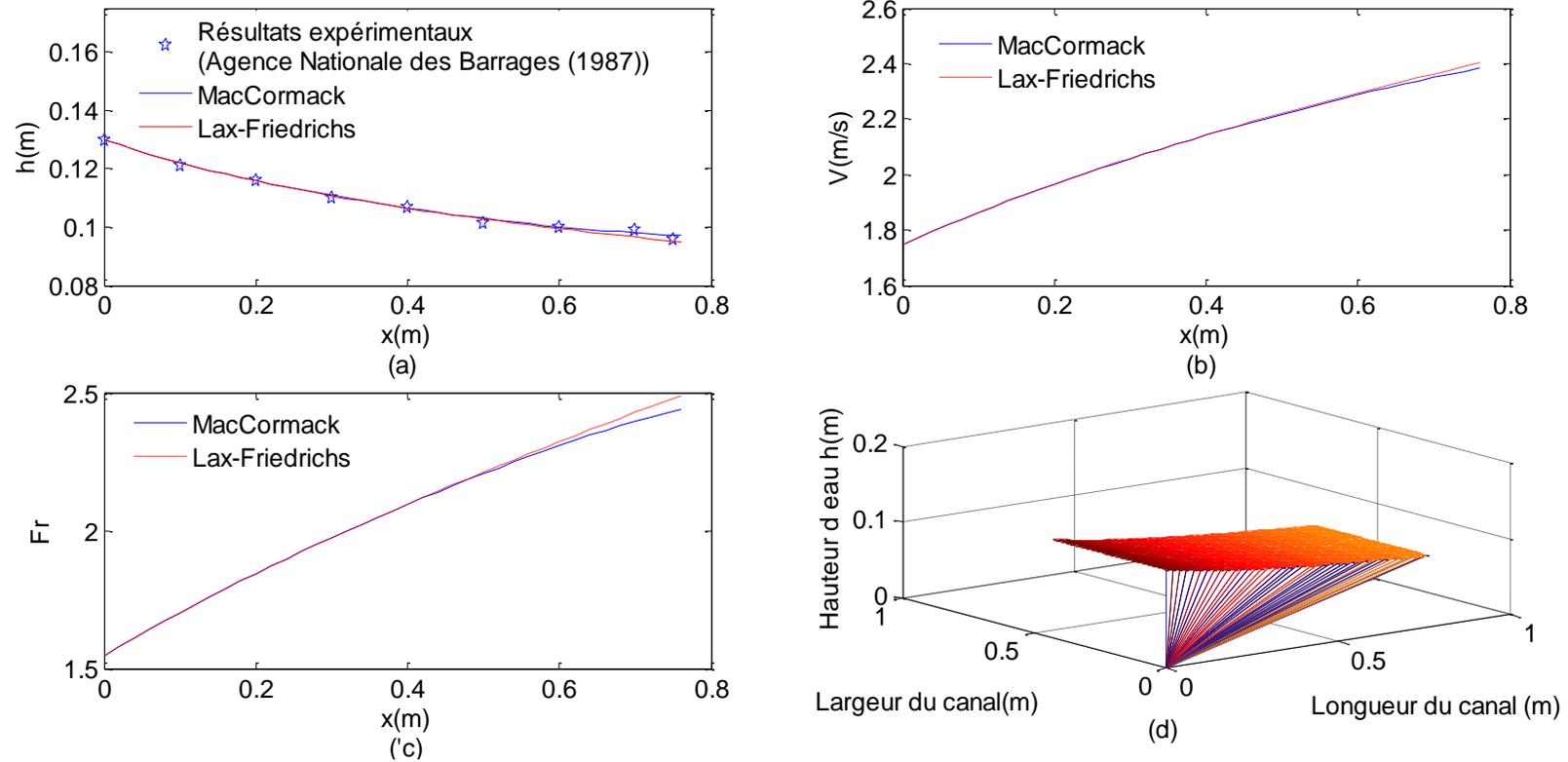


Figure (V.3) : Représentation des paramètres hydraulique dans un canal pour un débit $Q=0.093\text{m}^3/\text{s}$

a : variation de la hauteur d'eau le long du canal

b : variation de la vitesse d'écoulement

c : le nombre de Froude

d : représentation de h dans tout le canal

Conclusion

L'écoulement supercritique dans un canal prismatique à forte pente entraîne une diminution de la hauteur d'eau au niveau du canal (Figures (V.1.a), (V.2.a) et (V.3.a)). Ce rabaissement est dû principalement à l'augmentation de la vitesse d'écoulement (Figures (V.1.b), (V.2.b) et (V.3.b)). Les résultats que nous avons obtenus nous permettent de dire que les deux schémas utilisés dans cette application sont bien adaptés pour la simulation de l'écoulement. Ces deux schémas peuvent être utilisés dans le dimensionnement de ce type de canaux cité ci-dessus.

D'après les Figures (V.1), (V.2) et (V.3), on constate que les résultats obtenus avec le schéma numérique explicite de Lax-Friedrichs et de MacCormack sont très proche.

V.2.2. Canal convergence

Dans cette application, on analysera un écoulement supercritique dans un rétrécissement rectiligne symétrique, à section transversale rectangulaire, avec une pente de fond nulle. Les dimensions de la contraction sont données par la Figure (VI.4).

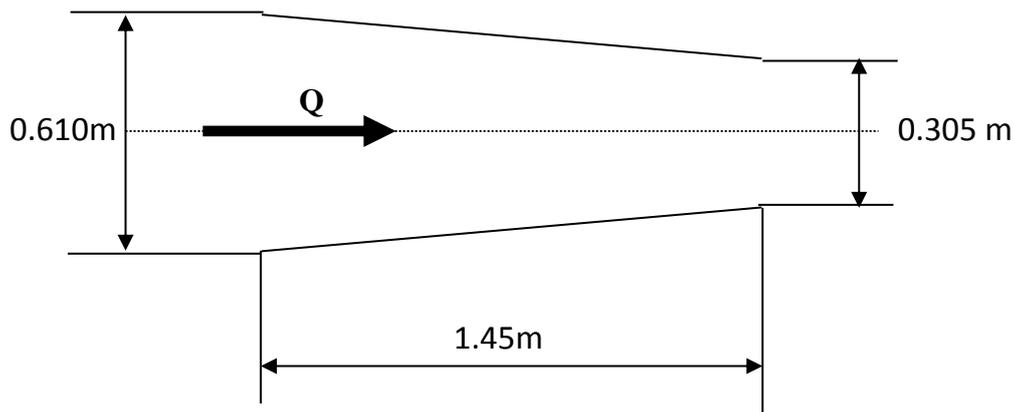


Figure (V.4): Rétrécissement rectiligne symétrique à pente nulle

Les conditions aux limites d'écoulement sont :

- Le tirant d'eau à l'amont $h=0.0305$ m
- La vitesse longitudinale à l'amont $u=2.188$ m/s
- La vitesse transversale $v=0$ m/s

La pente du fond et les frottements sont supposés nuls.

La profondeur de l'écoulement $h=0.0305$ m, la vitesse longitudinale $u=2.188$ m/s et la vitesse transversale $v=0$ m/s sont par ailleurs spécifiées en tout point du maillage comme conditions initiales.

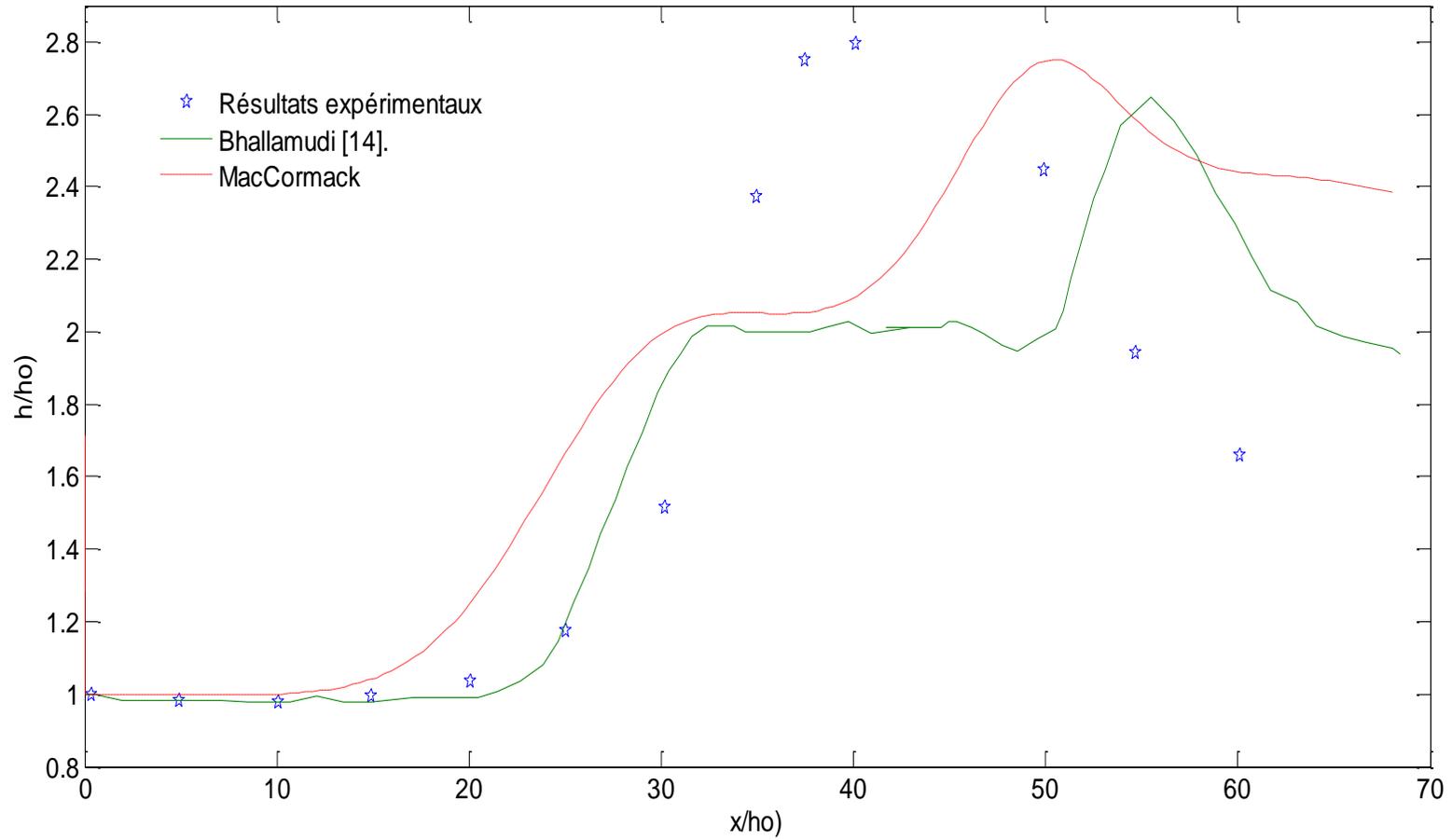


Figure V.5 : Représentation de variation de la hauteur d'eau le long du canal au niveau de l'axe.

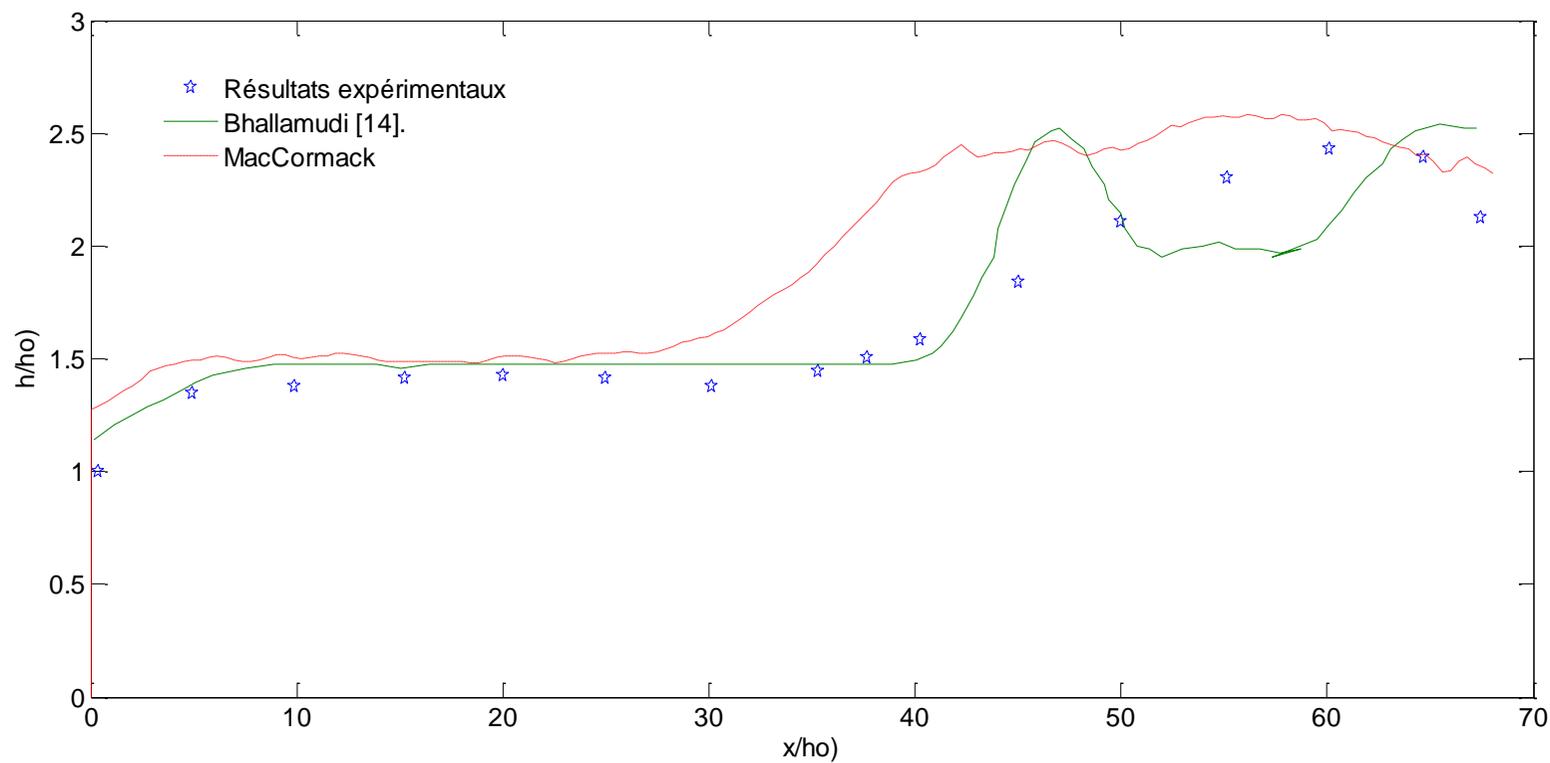


Figure V.6 : Représentation de variation de la hauteur d'eau le long du canal au niveau de paroi latérale.

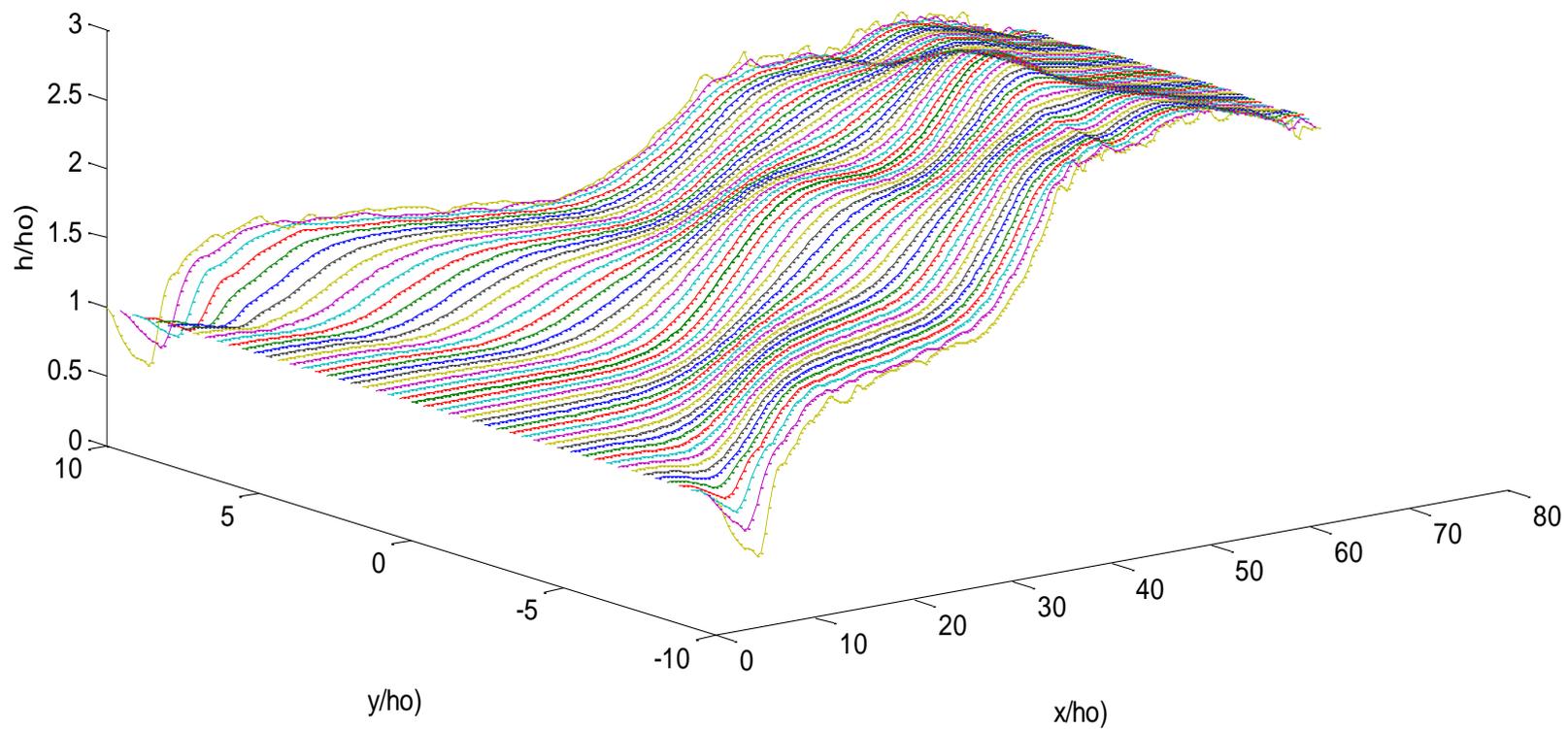


Figure V.7 : vue à trois dimensions de h dans tout le canal

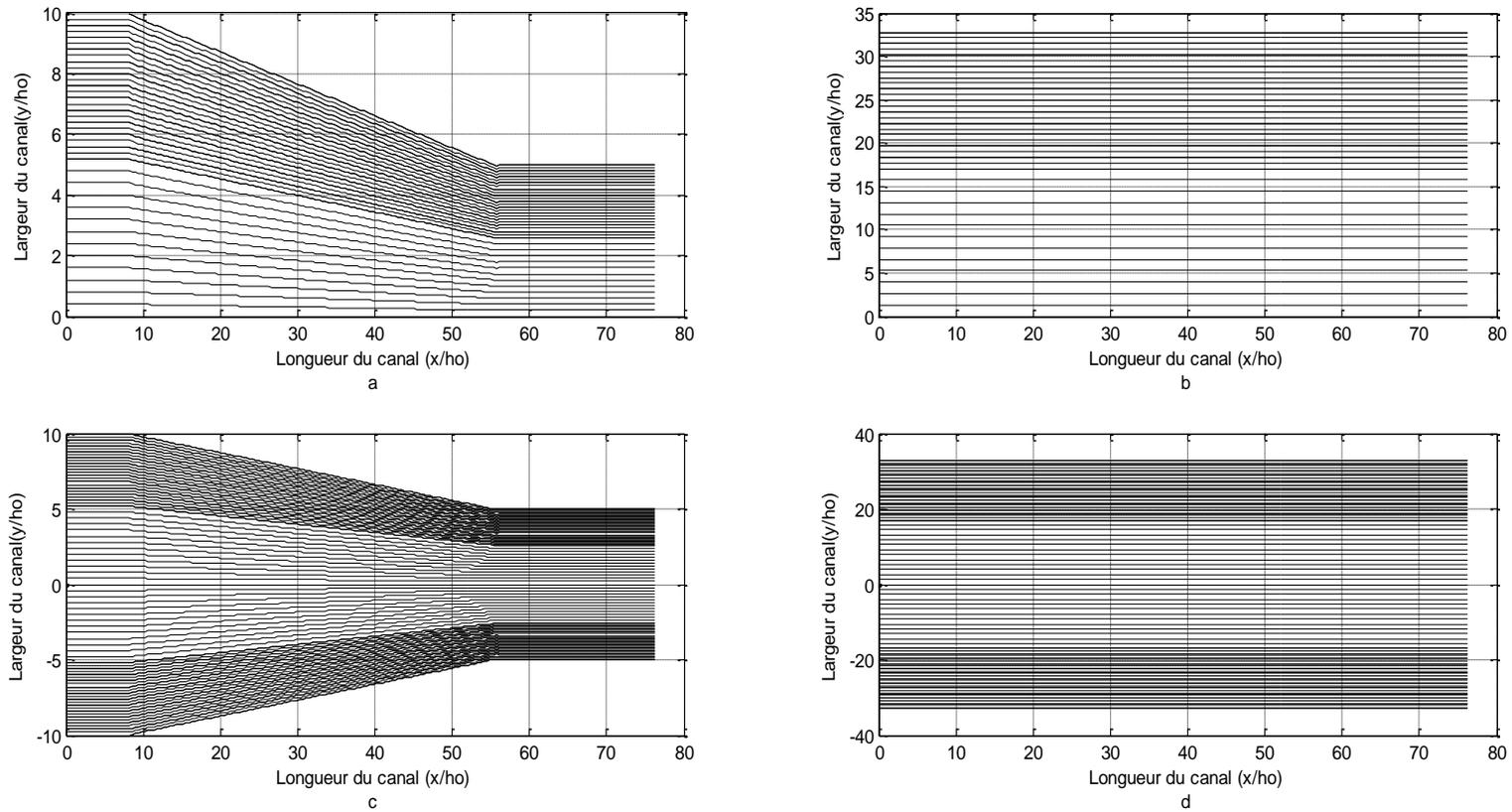


Figure V.8 : Représentation du domaine physique et de calcul

- a) : représente la moitié du domaine physique (moitié du convergent) b) : représente la grille de calcul.
 c) : par symétrie axiale, représentation tout le domaine physique du convergent d) : représente toute la grille de calcul.

V.2.2.1. Résultats et analyse

Les Figures (V.5) et (V.6) montrent respectivement le profil de la surface libre le long de l'axe médiane et le long de la paroi latérale du convergent. Ces figures regroupent les résultats obtenus par le schéma numérique explicite de MacCormak.

On remarque à partir des Figures (V.5) et (V.6) que :

- Au niveau de l'axe du canal sur la première partie du canal la hauteur d'eau calculée avec le schéma numérique explicite de MacCormak est proche de la hauteur expérimentale et dans la deuxième partie du canal la hauteur MacCormak calculée est au-dessous de la hauteur expérimentale. Et presque sur tout le canal la hauteur d'eau calculée de BHALLAMUDI est très proche de la hauteur expérimentale.
- Au niveau de la paroi latérale du convergent sur la première partie du canal la hauteur d'eau calculée avec le schéma numérique explicite de MacCormak est proche de la hauteur expérimentale et dans la deuxième partie du canal la hauteur calculée est au-dessous de la hauteur expérimentale. Et presque sur tout le canal la hauteur d'eau calculée avec le schéma numérique explicite de Mac Cormak est très proche de la hauteur expérimentale.

Conclusion

En comparant les résultats obtenus avec les résultats expérimentaux et numériques, nous constatons qu'au niveau de l'axe nos résultats sont meilleurs. Par contre au niveau de la paroi latérale la hauteur calculée avec BHALLAMUDI, sont plus proches des mesures expérimentales.

Conclusion générale

Conclusion générale

Le travail numérique que nous avons mené à permis d'obtenir des résultats, sur la présence des ondes de choc dans les écoulements supercritiques, surtout de voir l'impact de la pente du radier et du débit sur la surface libre de l'eau.

Nous avons choisi de mener toute une série d'expérimentation numérique d'un écoulement supercritique dans un canal à géométrie uniforme à forte pente avec variation du débit et dans un convergent à pente nulle à débit constant.

Dans la partie consacrée à l'étude des écoulements dans un convergent, nous avons montré que les hauteurs d'eau maximales se trouvent toujours à l'intérieur de la contraction et plus exactement dans l'axe de la transition. Les résultats de simulations ont montrés pour un écoulement dans un canal prismatique à forte pente que la profondeur d'eau diminue et la vitesse d'écoulement augmente.

Par soucis de fiabilité de nos résultats numériques obtenus, un travail de comparaison avec les résultats d'autres chercheurs (expérimentaux et numériques), a été entrepris pour la validation des modèles numériques basé sur les schémas de Lax-Friedrichs de de MacCormack utilisés dans ce travail.

La majorité des schémas aux différences finies explicites entraînent, par ailleurs, de très grandes oscillations numériques près des discontinuités. Les ondes transversales représentent justement ces discontinuités. Afin d'amortir ces oscillations, nous avons utilisé une procédure dont le principe consiste à introduire un terme supplémentaire dit "viscosité artificielle" dans les équations de base, et qui a la propriété d'être négligeable partout où la solution est régulière et permet par contre un lissage des singularités.

Les résultats obtenus avec les schémas numériques de Lax-Friedrichs de MacCormack dans l'étude d'un écoulement supercritique à travers un canal à géométrie prismatique sont très satisfaisant.

Par contre, les résultats obtenus dans le cas du convergent rectiligne avec pente nulle sont appréciables au niveau de l'axe de l'écoulement et au niveau de la paroi latérale du convergent.

Nous concluons que les schémas numériques utilisés dans ce travail donnent beaucoup plus de bons résultats pour un écoulement dans un canal uniforme que dans un canal non prismatique. Pour améliorer les résultats obtenus dans ce dernier cas (convergent), il est préférable de tester d'autres conditions aux limites pour mieux valider le schéma numérique utilisé.

Bibliographie

Bibliographie

- [1] **GRAF, W. H. et ALTINAKAR, M. S. (2000)**, « Hydraulique fluviale, Tome II Ecoulement et phénomènes de transport dans les canaux à géométrie simple». Edition. Presses Polytechnique et universitaires Romandes, Lausanne.
- [2] **BENAMIROUCHE, D. et MAHDAOUI, H.**, « Résolution numérique des équations de Saint Venant 1D par la méthode des différences finis», Mémoire de fin d'études, Université de Bejaia, Algérie, 77 pages, 2014.
- [3] **IKNI, T.**, « Simulation numérique des écoulements à surface libre dans des canaux à géométrie variable en utilisant le schéma de Beam et Warming», Mémoire de Magister, Université de Bejaia, Algérie, 2002.
- [4] **SINNIGER, R. O. et HAGER, W. H., (1989)**, « Constructions Hydrauliques- Ecoulements stationnaires », Presses polytechniques romandes, Lausanne.
- [5] **METREVILI, V., (1991)**, « Mécanique des milieux continus », Edition OPU.
- [6] **RYHMING, I., (1985)**, « Dynamique Des Fluides », Ed. Presses Polytechniques et universitaires Romandes, Lausanne.
- [7] **HUG, M., (1975)**, « Mécanique des fluides appliquée », Editions Eyrolles.
- [8] **CHAUDHRY, M. H. (2008)**, « Open Channel Flow ». Deuxième Edition, Springer.
- [9] **IKNI, T., BERREKSI, A., BENMAMAR, S. et KETTAB, A.**, « Modélisation et simulation par la méthode des volumes finis des écoulements torrentiels (supercritiques) à surface libre dans des canaux à géométrie variable », Laboratoire des Sciences de l'Eau (LRS-EAU), Ecole Nationale Polytechnique, Alger, 2008.
- [10] **BEN MEFTAH, M., DE SERIO, F., MOSSA, M., et POLLIO, A.**, « Experimental observations on undular hydraulic jumps with very high aspect ratio », Department of Environmental Engineering and Sustainable Development, Technical University of Bari.
- [11] **J-H SAIAC**, "Analyse numérique des équations aux dérivées partielles", Polycopié des cours, 2006.
- [12] **FENNEMA, R. J. and CHAUDHRY, M. H. (1987)**, « Simulation des écoulements monodimensionnels consécutifs aux ruptures des barrages ». Journal of Hydraulic Research, Vol. 25, N° 1, pp. 41-50.
- [13] **SCHWCIZERISCHE BOUZELTING (1971)**. Calcul de la propagation des crues dans un cours d'eau avec submersion de champ d'inondations ». 89. Jahrgang Heft 24. 17.

[14] **BHALLAMUDI, S. M. and CHAUDHRY, M. H., (1992)**, “Computation of flow in open-channel transitions’’, *Journal of Hydraulic Research*, volume 30, N°1, pp. 77-93.

ملخص

يتم الحصول على معادلات حركة الماء ثنائية الأبعاد (معادلات سانت فينانت) بعد تكامل معادلات نافير ستوكز. يتم حساب ثنائية الأبعاد باستخدام طريقة الأحجام المتناهية. تم إجراء التقدير التقديري بعد استخدام الإحداثيات المنحنية عن طريق تحويل المجال الفزيائي المعقد إلى مجال حسابي مستطيل وبالتالي فإن النموذج الرياضي سوف يعتمد على المعادلات في الإحداثيات المنحنية. مقارنة النتائج التي تم الحصول عليها مع النموذج الرياضي والنتائج التي تم الحصول عليها تجريبيا تشير إلى أن هناك اتفاق جيد. الهدف الرئيسي من هذا العمل هو إيجاد شكل السطح المياه في مجاري متغيرة الأبعاد الهندسية.

الكلمات المفتاحية: طريقة الأحجام المتناهية، معادلات سانت فينانت، معادلات نافير ستوكز.

Résumé

Le but de cette étude est la résolution des équations bidimensionnelles en régime supercritique et non permanent régissant l'écoulement de l'eau dans les transitions hydrauliques. Ces équations sont celles de Saint Venant généralisées à deux dimensions spatiales sont obtenues après application des deux principes de continuité et de quantité de mouvement. La résolution des équations de Barré de Saint-Venant à deux dimensions est alors faite en utilisant deux schémas aux différences finies à savoir le schéma de Lax-Friedrichs et de MacCormack. La discrétisation a été faite après l'utilisation des coordonnées curvilignes en convertissant le domaine physique en domaine de calcul rectangulaire et le modèle mathématique sera donc basé sur les équations en coordonnées curvilignes. La comparaison des résultats obtenus avec le modèle mathématique et les résultats obtenus expérimentalement laisse conclure qu'il y a une bonne concordance. L'objectif principal de ce travail est la détermination de l'allure de la surface libre dans les canaux non prismatiques tels qu'un convergent linéaire par simulation numérique pour mieux dimensionner les canaux.

Mots clés : schéma explicite; méthode des volumes finis; équations de Saint-Venant; équations de Navier Stocks.

Summary

The objective of this study is the resolution of the two-dimensional supercritical and unsteady equations governing water flow in the hydraulic transitions. The equations are those of Saint Venant generalized with two space dimensions are obtained after application of the two principles of continuity and momentum. The resolution of the equations of Barred Saint-Venant to two dimensions is then made by using two schemes with the finite differences to know the scheme of Lax-Friedrichs and the scheme of MacCormack. The discretization was made after the use of the curvilinear co-ordinates by converting the physical field into rectangular field of calculation and the mathematical model will thus be based on the equations in curvilinear co-ordinates. The comparison between the results obtained and the mathematical model and the results obtained in experiments lets conclude that there is a good agreement. The principal objective of this work is the determination of the pace of the free face in the nonprismatic channels such as convergent linear by digital simulation for better dimensioning the channels.

Keywords: explicit scheme; finite volumes method; Saint-Venant equations; Navier Stokes equations.