



Faculté de Technologie
Département d'**Hydraulique**

Laboratoire de Recherche en Hydraulique Appliquée et Environnement (LRHAE)

MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES

Présenté par :

M^r. BENAMARA Madjid Mohand Cherif

En vue de l'obtention du diplôme de **MASTER en Hydraulique**

Option : **OUVRAGES ET AMENAGEMENTS HYDRAULIQUES**

INTITULE :

CONTRIBUTION A L'ETUDE DES ECOULEMENTS DANS LES CANAUX AVEC APPORT LATERAL

Soutenu le **03 /07 /2019** Devant le jury composé de :

- Président : **M^r. AMIROUCHE. M.**
- Promoteur (s) : -**M^r. BENDAHMANE. I.**
- **M^r. AMARA. L.**
- Examineur : **M^r. BERREKSI. A.**

Remerciements

Au terme de ce travail, je remercie dieu qui m'as donné la force d'achever ce modeste travail.

Je remercie mes promoteurs : **M. BENDAHMANE I** et **M. AMARA L** qui ont été toujours à la disposition, pour m'écouter et m'orienter pour trouvée issue pour chaque difficulté. Et je les remercie aussi pour les conseils qui m'ont été prodigué de leur part.

Je remercie aussi Mr Berreksi A. qui nous as aidé lors de l'élaboration de l'expérience au laboratoire.

Mes sincères remercîments pour Mr Seghir A. pour ces discussions motivante qui donne des perspectives très lointaines pendant les trois années, aussi pour son aide durant les années d'études.

Je remercie Mr Hamani.S pour l'aide qui m'as fourni.

Je tiens à remercier les membres de jury qui ont accepté d'examiner mon travail.

Je tiens à remercier la promotion 2019 spécialement le groupe Ouvrages et Aménagements hydrauliques,ZA3IM,Chahra,Farodja,Nawel,Messad,Parnaki ,Mehdi,Latif,Sofiane,Djugo, Fateh, Mazigh et aussi mes amis de I104 , et tous mes amis .

Dédicace

Je dédie mon travail à mes parents

A ma sœur

A mon frère

A vous tous le mérite

Merci...

Sommaire

Remerciments.....	i
Dédicaces.....	ii
Sommaire.....	iii
Liste des figures.....	vi
Liste des tableaux.....	ix
Listes des symboles.....	xi
Introduction generale.....	1

Chapitre I : Généralités et revue de littérature

I.1	Introduction	2
I.2	Ecoulement à surface libre	2
I.3	Classification des écoulements.....	2
I.3.1	Classification selon le temps	2
I.3.1.1	Ecoulement permanent.....	2
I.3.1.2	Ecoulement non permanent.....	3
I.3.2	Classification selon l'espace.....	3
I.3.2.1	Ecoulement uniforme	3
I.3.2.2	Ecoulement non uniforme	4
I.4	Déversoirs.....	4
I.4.1	Définition.....	4
I.4.1.1	Déversoir de surface.....	5
I.4.1.2	Déversoir en charge :	6
I.4.2	Choix de type de déversoir	7
I.4.3	Type des déversoirs	8
I.4.3.1	Déversoir à paroi mince	8
a)	Déversoir rectangulaire sans contraction latérale (déversoir de Bazin).....	8
b)	Déversoir rectangulaire avec contraction latérale	8
c)	Déversoir triangulaire.....	9
d)	Déversoir trapézoïdal	9
e)	Déversoir labyrinthe	10
f)	Déversoir en touche de piano (PK-Weir)	11
g)	Déversoir circulaire.....	11
h)	Déversoir incliné	12

i) Déversoir oblique	13
j) Déversoir latéral	13
k) Déversoir avec courbe de débit à équation linéaire (déversoir de Sutro)	13
I.4.3.2 Déversoir à crête épaisse	14
I.5 Canaux :	16
I.5.1 Définition :	16
I.5.1.1 Types des canaux	16
I.5.1.2 Pentes des talus et vitesse admissible	16
I.5.2 Revêtement des canaux	16
I.5.3 Caractéristiques géométriques des canaux	17
I.5.4 Canaux à adduction latérale	18
I.6 Synthèse bibliographique et état de l'art :	19
I.7 Conclusion	23

Chapitre II : Dispositif expérimental

II.1 Introduction	24
II.2 Objectif de l'expérience	24
II.3 Canal d'essai H12 MK2	24
II.3.1 Caractéristiques du canal	25
II.3.2 Les expériences envisageables	25
II.3.3 Dimensions du canal	25
II.3.4 Capacité du réservoir de pesée	25
II.3.5 Caractéristiques de la pompe	26
II.3.6 Conduite d'apport latéral	26
II.4 Protocole expérimental	27
II.4.1 Mesure de débit	28
II.4.2 Mesure de temps	29
II.4.3 Mesure de hauteur	29
II.5 Les difficultés et imprécisions	30
II.6 Calcul de l'imprécision	30
II.7 Conclusion	31

Chapitre III : Modèle numérique de résolution

III.1	Introduction :	32
III.2	Démonstration des équations différentielles ordinaire de base :	32
III.3	Ecoulement avec débit croissant	32
III.4	Equation de la surface libre	35
III.5	Approche de HAGER	37
III.6	Présentation générale de la méthode des éléments finis	38
III.6.1	Historique	39
III.6.2	Discrétisation du domaine et polynôme d'interpolation	43
III.7	Méthode de Galerkin	46
III.8	MEF par la méthode de Galerkin	48
III.9	Application au cas du canal avec apport latéral	53
III.10	Conclusion	57

Chapitre IV : Résultat et discussion

IV.1	Introduction	58
IV.2	Résultats	58
IV.2.1	Résultats pour un Débit Q_1	59
IV.2.2	Résultats pour un Débit Q_2	60
IV.2.3	Résultats pour un Débit Q_3	61
IV.2.4	Résultats pour un Débit Q_4	63
IV.2.5	Résultats pour un Débit Q_5	64
IV.2.6	Résultats pour un Débit Q_6	66
IV.2.7	Résultats pour un Débit Q_7	67
IV.2.8	Résultats pour un Débit Q_8	69
IV.2.9	Résultats pour un Débit Q_9	70
IV.2.10	Résultats pour un Débit Q_{10}	72
IV.2.11	Résultats pour un Débit Q_{11}	74
IV.3	Etude comparative	75
IV.4	Etude expérimental du débit latéral	81
IV.5	Discutions des résultats	82
IV.6	Conclusion	82
Conclusion generale		83
Référence		84

Liste des Figures

Figure (I.1) : Eléments géométrique de la section	2
Figure (I.2) : Ecoulement permanent.....	2
Figure (I.3) : Ecoulement non permanent.....	3
Figure (I.4) : Ecoulement uniforme.....	3
Figure (I.5) : Type d'écoulement.....	4
Figure (I.6) : Vue d'un déversoir.....	5
Figure (I.7) : Coupe d'un déversoir.....	5
Figure (I.8) : Evacuateur frontal.....	6
Figure (I.9) : Déversoir puit.....	6
Figure (I.10) : Déversoir siphon.....	7
Figure (I.11) : Vue en perspective d'un déversoir rectangulaire sans contraction latérale.....	8
Figure (I.12) : Vue en perspective d'un déversoir rectangulaire avec contraction latérale.....	9
Figure (I.13) : Vue en perspective d'un déversoir triangulaire.....	9
Figure (I.14) : Coupe transversale d'un déversoir trapézoïdale.....	10
Figure (I.15) : Vue en perspective d'un déversoir labyrinthe.....	10
Figure (I.16) : Vue en plan d'un déversoir labyrinthe (représente en cycle)	10
Figure (I.17) : Déversoir en touche de piano (barrage de campareuil)	11
Figure (I.18) : Coupe transversale d'un déversoir circulaire	12
Figure (I.19) : Coupe longitudinale d'un déversoir incliné.....	13
Figure (I.20) : Vue en plan d'un déversoir oblique.....	13
Figure (I.21) : Schéma du déversoir de type latéral.....	13
Figure (I.22) : Profile symétrique.....	14

Figure (I.23) : Profile asymétrique.....	14
Figure (I.24) : Les différents types des déversoirs à crête mince.....	14
Figure (I.25) : Déversoir à seuil épais.....	15
Figure (I.26) : Les types des déversoirs à crête épaisse.....	15
Figure (I.27) : Canal avec adduction latérale.....	19
Figure (I.28) : Vues typiques du canal : (a) de l'amont ; (b) forme en aval	21
Figure (I.29) : Vues des eaux de fuite du canal latéral Translet pour la conception finale avec une largeur réduite : (a) avec structure à deux vortex, (b) à un seul vortex	22
Figure (I.30) : Canal latéral de Karahnjukar: (a) latéral (b) vues de l'eau arrière pour avec vortex tornade visible avec entraînement de l'air et écoulement prononcé à deux vortex	22
Figure (II.1) : Dispositif expérimental.....	24
Figure (II.2) : Pompe d'alimentation.....	26
Figure (II.3) : Support de la conduite d'apport.....	26
Figure (II.4) : Trous de la conduite d'apport.....	27
Figure (II.5) : Phases de mesure : a) position d'attente sans poids ; b) début de chronométrage ; c) fin de chronométrage ; d) position finale avec poids.....	28
Figure (II.6) : Information de poids et bras de levier.....	28
Figure (II.7) : Chronomètre électronique.....	29
Figure (II.8) : Mesure de la hauteur avec (Plot Digitizer)	30
Figure (III.1) : Schéma d'un écoulement graduellement varié avec apport latéral.....	33
Figure (III.2) : Organigramme la MEF.....	41
Figure (III.3) : Discrétisation en élément finis.....	42
Figure (III.4) : Domaine de solutions globales discrète.....	44
Figure (III.5) : La fonction de forme linéaire pour l'élément (i).....	45

Figure (III.6) : La fonction de forme linéaire pour le nœud (i).....	51
Figure (IV.1) : Graphique de comparaison pour Q_1	76
Figure (IV.2) : Graphique de comparaison pour Q_2	76
Figure (IV.3) : Graphique de comparaison pour Q_3	77
Figure (IV.4) : Graphique de comparaison pour Q_4	77
Figure (IV.5) : Graphique de comparaison pour Q_5	78
Figure (IV.6) : Graphique de comparaison pour Q_6	78
Figure (IV.7) : Graphique de comparaison pour Q_7	79
Figure (IV.8) : Graphique de comparaison pour Q_8	79
Figure (IV.9) : Graphique de comparaison pour Q_9	80
Figure (IV.10) : Graphique de comparaison pour Q_{10}	80
Figure (IV.11) : Graphique de comparaison pour Q_{11}	81
Figure (IV.12) : Variation du débit latéral.....	81

Liste des Tableaux

Tableau (I.1) : Propriété géométrique des sections courante.....	18
Tableau (II.1) : Erreur relative au débit latéral avec débit total Q1.....	30
Tableau (II.2) : Erreur relative au débit latéral avec débit total Q2.....	31
Tableau (IV.1) : Les résultats expérimentaux.....	58
Tableau (IV.2) : Les résultats expérimentaux pour Q ₁	59
Tableau (IV.3) : Les résultats avec la méthode de perturbation pour Q ₁	59
Tableau (IV.4) : Les résultats par MEF pour Q ₁	60
Tableau (IV.5) : Les résultats expérimentaux pour Q ₂	60
Tableau (IV.6) : Les résultats avec la méthode de perturbation pour Q ₂	61
Tableau (IV.7) : Les résultats par MEF pour Q ₂	61
Tableau (IV.8) : Les résultats expérimentaux pour Q ₃	62
Tableau (IV.9) : Les résultats avec la méthode de perturbation pour Q ₃	62
Tableau (IV.10) : Les résultats par MEF pour Q ₃	63
Tableau (IV.11) : Les résultats expérimentaux pour Q ₄	63
Tableau (IV.12) : Les résultats avec la méthode de perturbation pour Q ₄	64
Tableau (IV.13) : Les résultats par MEF pour Q ₄	64
Tableau (IV.14) : Les résultats expérimentaux pour Q ₅	65
Tableau (IV.15) : Les résultats avec la méthode de perturbation pour Q ₅	65
Tableau (IV.16) : Les résultats par MEF pour Q ₅	66
Tableau (IV.17) : Les résultats expérimentaux pour Q ₆	66
Tableau (IV.18) : Les résultats avec la méthode de perturbation pour Q ₆	67
Tableau (IV.19) : Les résultats par MEF pour Q ₆	67
Tableau (IV.20) : Les résultats expérimentaux pour Q ₇	68
Tableau (IV.21) : Les résultats avec la méthode de perturbation pour Q ₇	68
Tableau (IV.22) : Les résultats par MEF pour Q ₇	69
Tableau (IV.23) : Les résultats expérimentaux pour Q ₈	69
Tableau (IV.24) : Les résultats avec la méthode de perturbation pour Q ₈	70

Tableau (IV.25) : Les résultats par MEF pour Q_8	70
Tableau (IV.26) : Les résultats expérimentaux pour Q_9	71
Tableau (IV.27) : Les résultats avec la méthode de perturbation pour Q_9	71
Tableau (IV.28) : Les résultats par MEF pour Q_9	72
Tableau (IV.29) : Les résultats expérimentaux pour Q_{10}	72
Tableau (IV.30) : Les résultats avec la méthode de perturbation pour Q_{10}	73
Tableau (IV.31) : Les résultats par MEF pour Q_{10}	73
Tableau (IV.32) : Les résultats expérimentaux pour Q_{11}	74
Tableau (IV.33) : Les résultats avec la méthode de perturbation pour Q_{11}	74
Tableau (IV.34) : Les résultats par MEF pour Q_{11}	75

Liste des symboles

- b largeur du canal (m)
- B Largeur du canal à la surface libre (m)
- C Coefficient de Chézy ($m^{1/2}/s$)
- D Diamètre de la conduite (m)
- D_h La profondeur hydraulique (m)
- e Epaisseur (m)
- F Nombre de froude (-)
- F_f La force de frottement avec le fond (N)
- J_0 Pente du canal (-)
- J_f Pente du frottement (-)
- g Accélération de la pesanteur (m/s^2)
- h Hauteur d'eau (m)
- H Energie spécifique (m)
- h_{CG} Hauteur au centre de gravité (m)
- L Longueur du déversoir latéral (m)
- n Rugosité ($m^{-2/3}/s$)
- P_{he} Plus haute eau (m)
- P Hauteur de pelle (m)
- q Débit latéral (m^2/s)
- Q_m Débit massique (Kg/s)
- Q_v Débit volumique (m^3/s)
- Q' Changement longitudinal du débit ($m^3/s/m$)
- R Rayon hydraulique (m)
- S surface mouillée (m^2)
- V Vitesse d'écoulement (m/s)
- V_1 Vitesse latéral (m/s)
- W Pesanteur (N)

Z Cote géométrique (m)

Φ Angle latéral par rapport à l'axe du canal (-)

α Coefficient de Coriolis (-)

ρ Masse volumique (Kg/m³)

γ Poids spécifique (N/m³)

Δx Pas de discrétisation spatiale (m)

Introduction générale

Introduction générale

Les écoulements à surface libre, comme leur nom l'indique, ont la particularité de comporter une surface libre en contact avec l'air et dont la forme de la ligne d'eau peut varier, ce qui implique une variation possible de la forme et des dimensions de la section transversale du canal.

L'un des problèmes fréquemment rencontrés dans l'exercice de conception et calcul des ouvrages et systèmes hydrauliques à surface libre est celui des débits variables dans l'espace (spatialement varié).

L'ouvrage typique de ce genre d'écoulement est le canal avec apport latéral. Il est très fréquent dans l'exercice de conception des systèmes de canaux à surface libre de recourir à des schémas où un apport volumique régulier latéral est opéré. Ainsi, l'écoulement n'est plus uniforme et le dimensionnement du canal requiert alors la connaissance de la ligne d'eau dans l'ouvrage considéré.

L'exemple typique de ce genre de problème est retrouvé dans les évacuateurs de crue et canaux d'irrigation. Pour ce faire, on retrouve plusieurs approches dans la littérature pour solutionner le problème. La plus rigoureuse consiste à résoudre l'équation différentielle de l'écoulement spatialement varié, chose pas aisée à cause de son caractère non linéaire. Dans ce cas des techniques mathématiques et numériques appropriées sont alors exigées pour y parvenir.

L'objectif principal du sujet est d'essayer de répondre à la question de l'écoulement avec apport latéral dans un canal prismatique à profil rectangulaire et ce, par voie expérimentale et numérique.

Pour atteindre l'objectif, nous avons réparti ce travail en quatre chapitres : Dans le premier chapitre de ce manuscrit, nous présenterons les notions de base de l'hydraulique à surface libre et leur classification, avec une vue générale sur les types des déversoir et canaux avec apport latéraux, ensuite on citera quelques travaux effectués dans cet axe de recherche.

Le deuxième chapitre se concentre sur l'étude expérimentale faite au laboratoire hydraulique, nous allons présenter le dispositif expérimental la description des essais effectués sur le modèle au niveau du Laboratoire Hydraulique de l'université de Bejaia.

Le troisième chapitre on a présenté une analyse théorique et mathématique du phénomène avec l'application de conservation d'énergie et de la quantité de mouvement qui vas nous permettre de formuler l'équation différentielle qui gouverne l'écoulement avec apport latéral. Une discussion sera présentée dans la littérature et sa solution générale sera présentée.

Dans le quatrième et dernier chapitre, nous présenterons l'ensemble des résultats obtenus, avec une étude comparative et une discussion des résultats.

Chapitre I : Généralités et revue de littérature

I.1 Introduction

Dans ce chapitre on essaye de donner une vue générale sur les écoulements à surface libre et leur classification, on aborde notamment les types des déversoirs et canaux, puis on soulignera plus spécifiquement les canaux avec apport latérale et une synthèse bibliographique dans cet axe de recherche.

I.2 Ecoulement à surface libre

On appelle écoulement à surface libre, un écoulement qui se fait en contact avec l'atmosphère (L'écoulement dans les conduites est dit en charge). Le canal dans lequel se fait l'écoulement est dit prismatique si la largeur de son fond ne change pas en longueur, sinon, on parle d'un canal non prismatique. On considère également les écoulements uniformes et les écoulements non uniformes (Gouzrou, 2013).

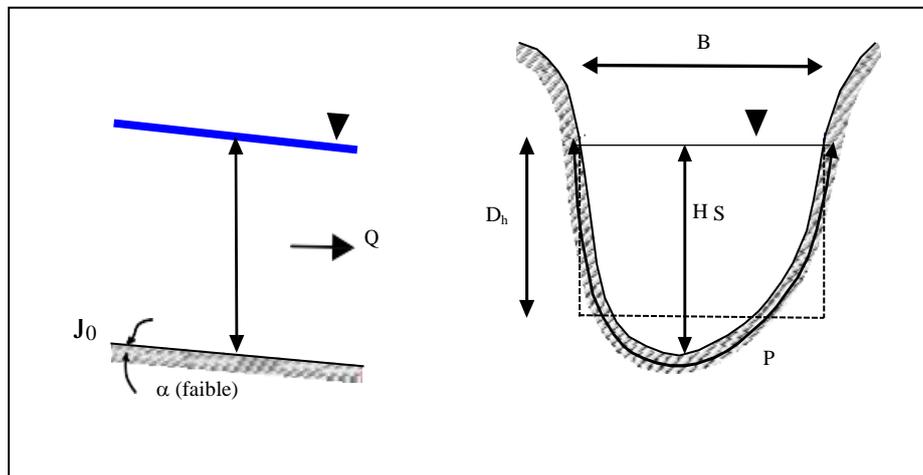


Figure (I.1) : Eléments géométriques de la section (Graf et Altinkar,1993).

I.3 Classification des écoulements

On peut définir les écoulements suivant la variabilité des caractéristiques hydrauliques tels que le tirant d'eau et la vitesse en fonction du temps et de l'espace (Bennis, 2009).

I.3.1 Classification selon le temps

I.3.1.1 Ecoulement permanent

On dit qu'un écoulement est permanent (stationnaire) (Figure (I.2)), lorsqu'en chaque section du canal on trouvera les paramètres tels que la profondeur d'eau (h) et la vitesse d'écoulement (V) restent en chaque instant constant en grandeur et direction c.-à-d. $(\frac{\partial h}{\partial t} = 0)$ et $(\frac{\partial v}{\partial t} = 0)$ donc un débit constant (Graf et Altinkar,1993).

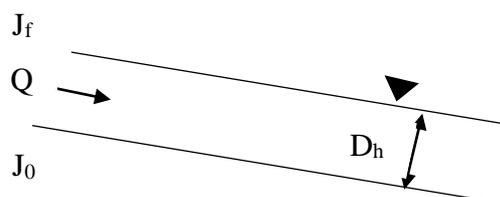


Figure (I.2) : Ecoulement permanent.

En fait, un tel écoulement est souvent retenu dans les conditions suivantes :

- Par souci de simplification, l'ingénieur se place volontairement dans ce contexte idéal dans l'étape de conception ou de réhabilitation,
- Dans certains cas, les propriétés de l'écoulement varient lentement de telle sorte que l'hypothèse de permanence est acceptable (Bennis, 2009).

I.3.1.2 Écoulement non permanent

On dit qu'un écoulement est non permanent Figure (I.3), si les paramètres ci-dessus cités varient en fonction du temps. ($\frac{\partial h}{\partial t} \neq 0$) et ($\frac{\partial v}{\partial t} \neq 0$)

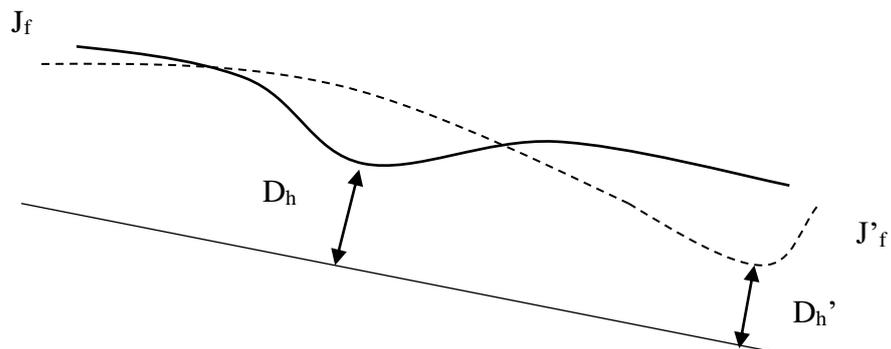


Figure (I.3) : Écoulement non permanent.

I.3.2 Classification selon l'espace

I.3.2.1 Écoulement uniforme

On dit qu'un écoulement est uniforme (Figure (I.4)) si ses paramètres tels que la profondeur, la vitesse, la pente...etc. restent invariables dans toutes les sections du canal. Les lignes des pentes de fond J_0 et de surface J_f sont parallèles alors ($J_f=J_0$) (Graf et Altinkar, 1993).

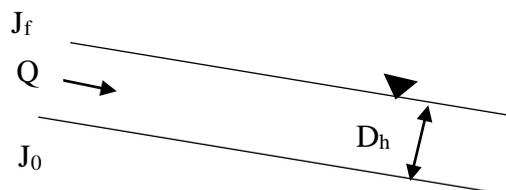


Figure (I.4) : Écoulement uniforme.

I.3.2.2 *Écoulement non uniforme*

L'écoulement est non-uniforme ou varié si les paramètres caractérisant l'écoulement changent d'une section à l'autre. La pente de la surface libre diffère de celle du fond ($J_f \neq J_0$).

En récapitulant figure (I.5), on aura :

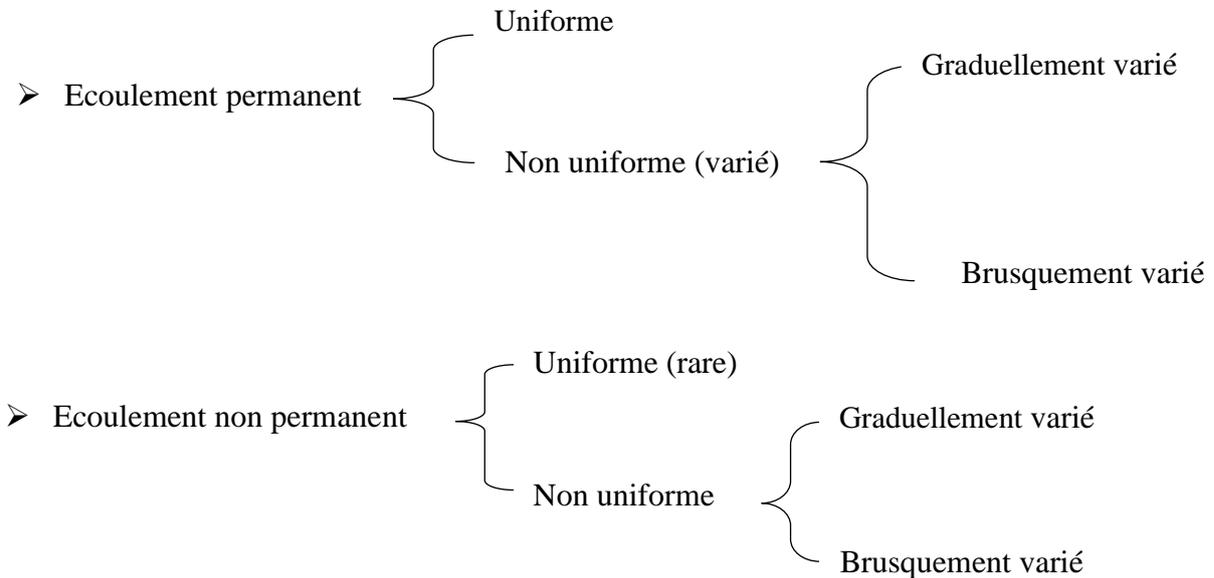


Figure (I.5) : Types d'écoulement.

I.4 Déversoirs

I.4.1 Définition

Un déversoir est un dispositif qu'on utilise pour mesurer ou contrôler le débit s'écoulant dans les canaux. Un déversoir est essentiellement une paroi, mince ou épaisse, ayant une hauteur qui peut être variable. Il est disposé verticalement pour obstruer plus ou moins la section du canal (Figure (I.6)) et (Figure (I.7)).

- A l'amont, le niveau d'eau supposé constant s'abaisse sensiblement au-dessus de seuil. On appelle charge, la hauteur d'eau entre le niveau amont constant et le niveau du seuil.
- A l'aval du seuil, la lame déversante peut prendre différentes formes en rapport avec la charge et la hauteur d'eau à l'aval (Carlier, 1980).

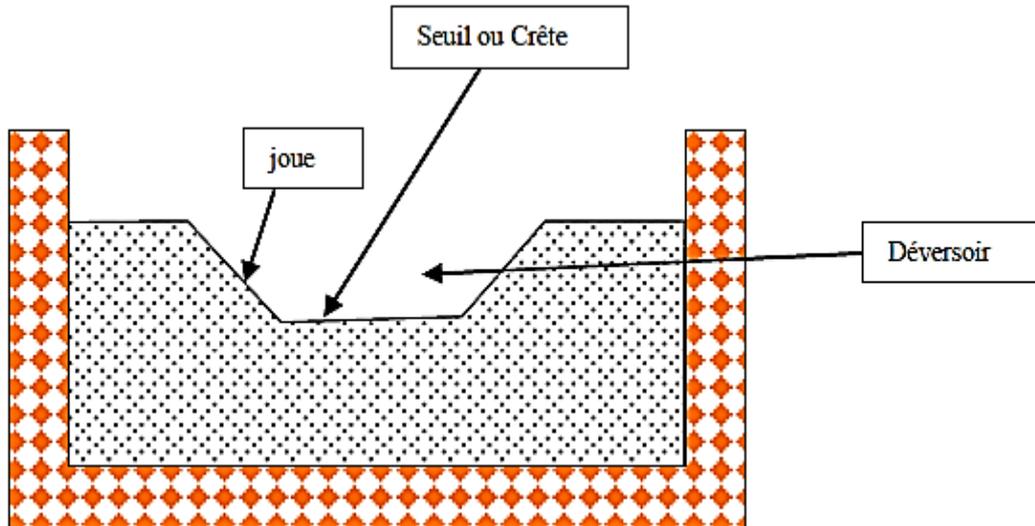


Figure (I.6) : Vue d'un déversoir.

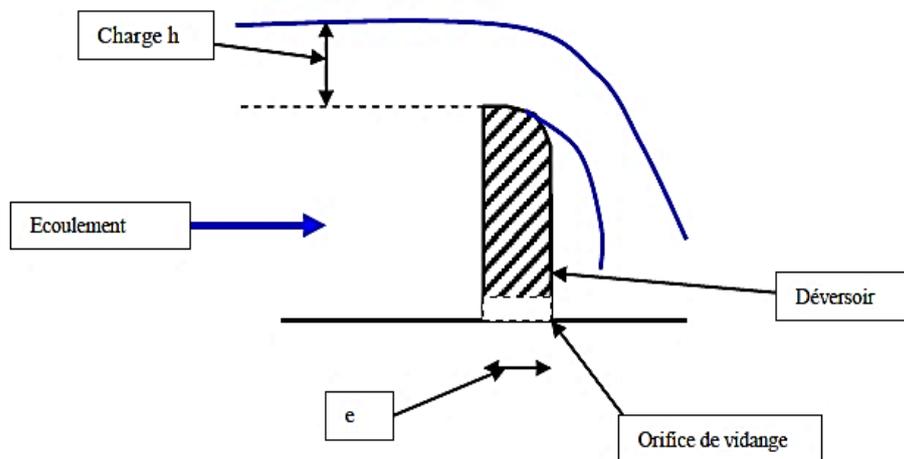


Figure (I.7) : Coupe d'un déversoir.

Les déversoirs peuvent être groupés en deux principaux types : les déversoirs de surface et les déversoirs en charge.

I.4.1.1 Déversoir de surface

Il s'agit du type le plus communément utilisé et aussi le plus fiable. L'évacuateur de surface débute par un seuil. Ce seuil dans un chenal à faible pente qui amène l'eau à l'aval de la digue. L'eau emprunte ensuite le coursier dont la pente permet de rattraper la différence de cote entre le niveau de la retenue et celui de l'oued à l'aval. Le coursier aboutit soit directement dans l'oued (différence de cote faible), soit dans un bassin d'amortissement (cas de forte pente).

L'évacuateur de surface est placé selon les cas de la (figure (I.8))

- déversoir latéral : latéralement à l'axe du barrage sur une rive
- déversoir frontal : parallèlement à l'axe du barrage.

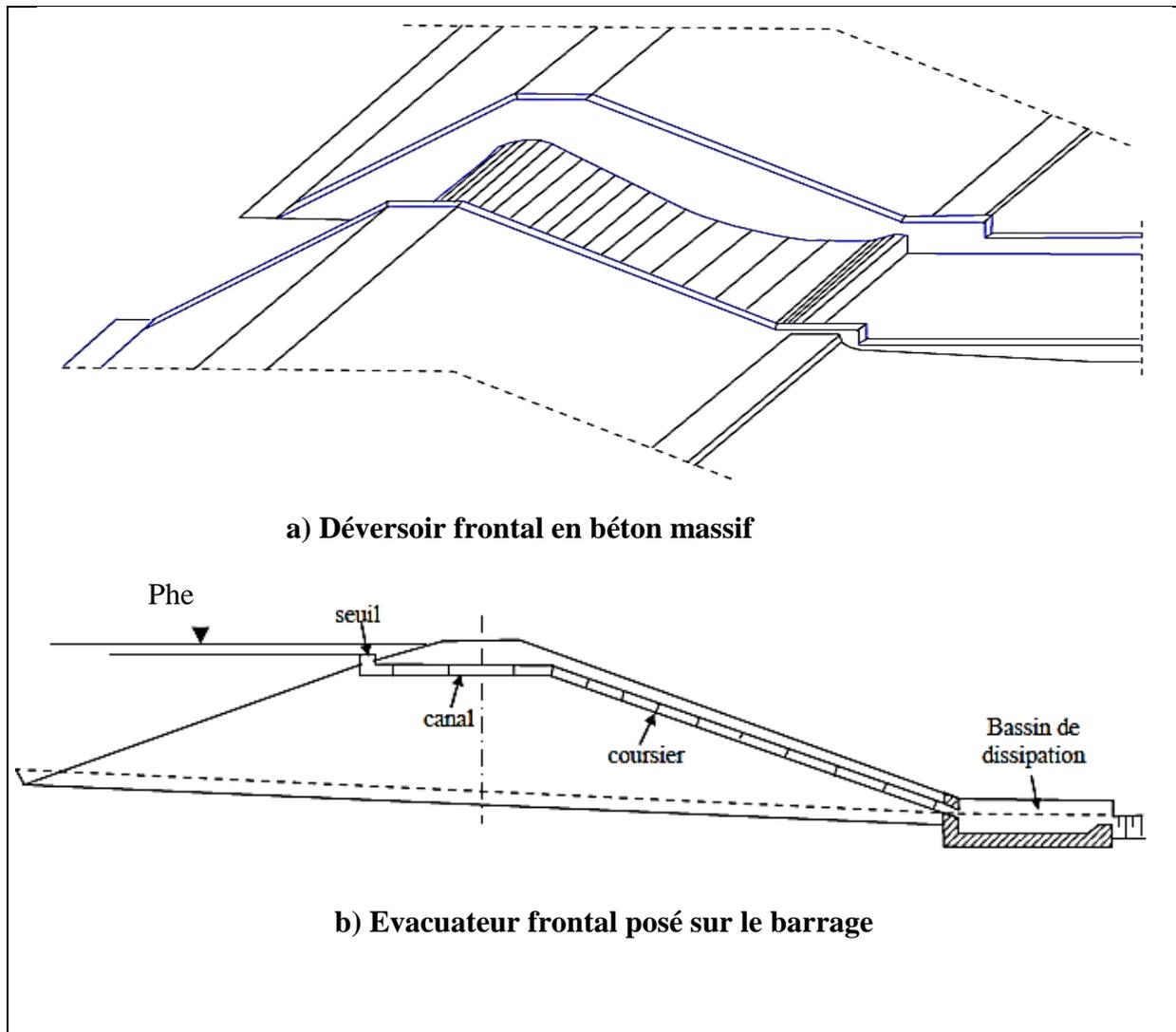


Figure (I.8) : Evacuateur frontal (PNUD/OPE, 1987).

I.4.1.2 Déversoir en charge :

Ils peuvent être du type puits ou type siphon figure (I.9) et figure (I.10).

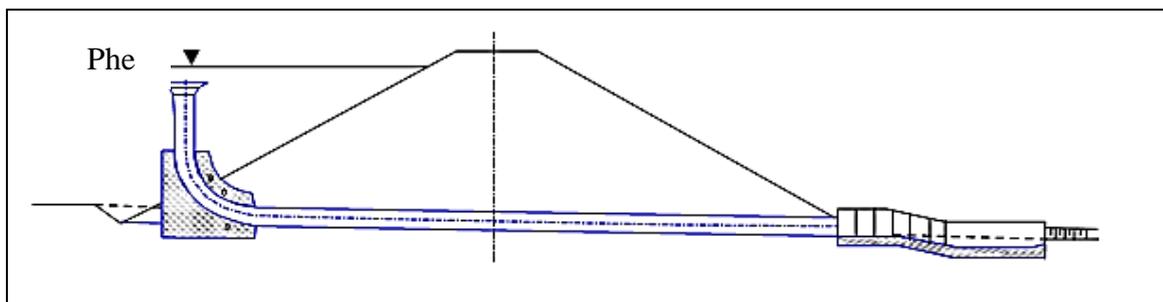


Figure (I.9) : Déversoir puit.

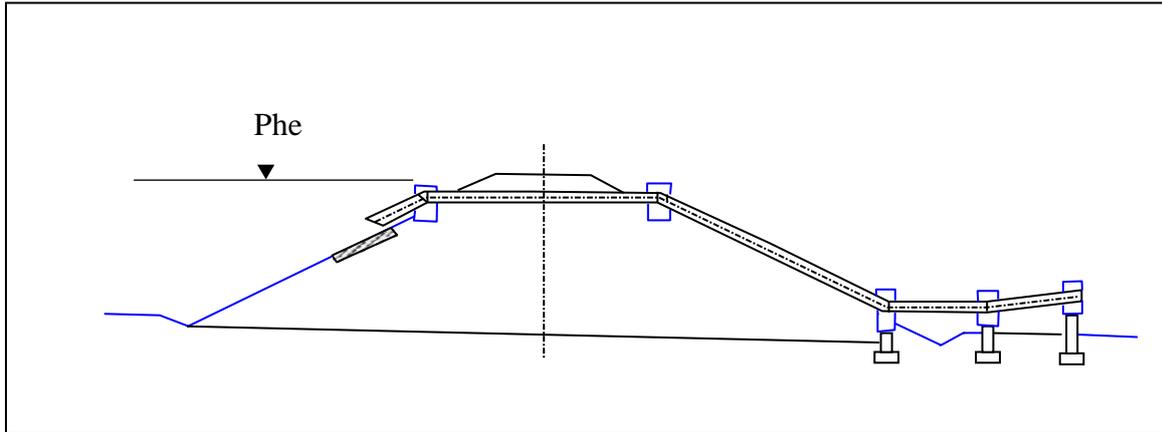


Figure (I.10) : Déversoir siphon.

❖ L'évacuateur en puit

Est un ouvrage en béton de forme circulaire. Il évacue l'eau par chute verticale dans la conduite enterrée débouchant à l'aval de la digue dans un bassin de dissipation. Le puit peut servir également de tour de prise d'eau. La conduite d'évacuation joue le rôle de conduite de vidange.

❖ L'évacuateur en siphon

Est constitué d'une simple conduite qui fonctionne par aspiration. Cette conduite peut être incorporée dans la digue ou, de préférence, posée dans une tranchée latérale creusée dans la berge. Des grilles installées à l'entrée de l'évacuateur permettent d'éviter l'obstruction par les corps flottants.

I.4.2 Choix de type de déversoir

Le choix entre un déversoir de surface et un déversoir en charge dépend :

- de l'importance des débits à évacuer
- de la dénivellation entre la cote des plus hautes eaux et celle du lit de l'oued dans la zone de rejet des eaux à l'aval,
- de la nature des terrains traversés par l'ouvrage, en particulier par le canal ou coursier (rendant nécessaire ou pas le revêtement).

Dans tous les cas, il est recommandé de concevoir l'évacuateur de crues le plus simplement possible afin de circonscrire les coûts dans les limites raisonnables.

Il faut noter que les déversoirs en charge ont, par rapport aux déversoirs de surface :

- une marge de sécurité beaucoup moins grande, due aux variations du débit en fonction de la charge nettement moins élevée ($H^{1/2}$ et $H^{3/2}$) (Bennis, 2009).
- Un coût de réalisation plus élevé.

I.4.3 Type des déversoirs

La classification des déversoirs est basée sur leurs caractéristiques telles que le profile et dimensions de la section transversale de la paroi, la forme de l'échancrure, disposition en plan, conditions amont du courant.

I.4.3.1 Déversoir à paroi mince

Le déversoir est à mince paroi ou à crête mince, si l'épaisseur de la crête est inférieure à la moitié ou même quelquefois aux deux tiers la charge (Carlier, 1980).

a) Déversoir rectangulaire sans contraction latérale (déversoir de Bazin)

Sur le déversoir rectangulaire sans contraction latéral, habituellement désigné par déversoir de Bazin, il existe un grand nombre d'observation, ce qui permet d'obtenir une bonne précision dans la mesure des débits (Lencastre, 1996).

Un déversoir rectangulaire est dit « sans contraction latérale » lorsque la largeur d'écoulement sur le déversoir (L) est égale à la largeur d'écoulement (B) en amont du déversoir (Figure (I.11)).

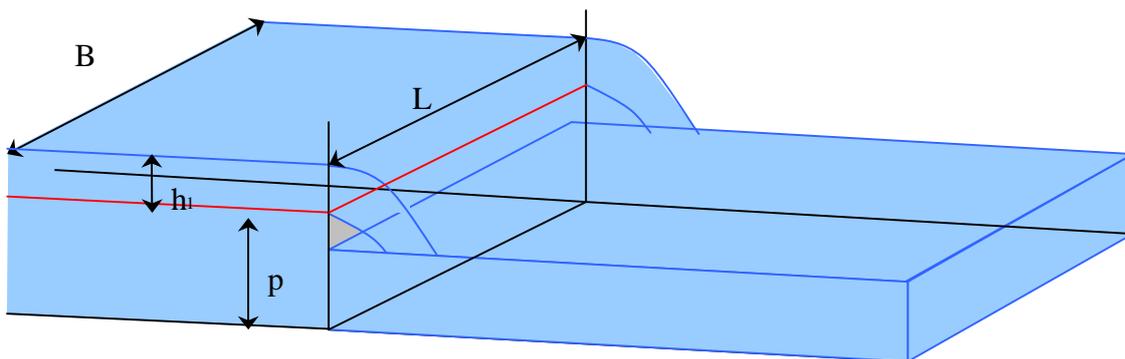


Figure (I.11) : vue en perspective d'un déversoir rectangulaire sans contraction latérale.

b) Déversoir rectangulaire avec contraction latérale

Un déversoir rectangulaire est dit « avec contraction latérale » lorsque la largeur du canal B est supérieure à la largeur d'écoulement L du déversoir (Figure (I.12)).

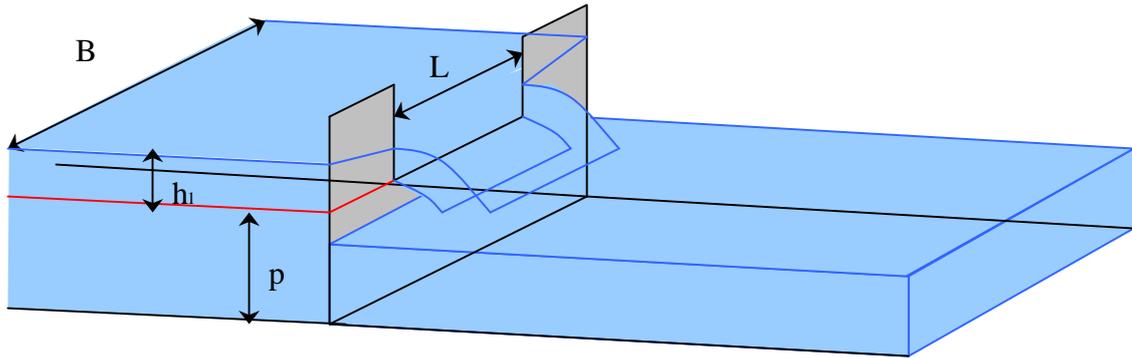


Figure (I.12) : vue en perspective d'un déversoir rectangulaire avec contraction latérale.

c) Déversoir triangulaire

Ce type de déversoir comporte une pelle dont l'échancrure en forme de V est symétrique par rapport à l'axe du canal (la bissectrice est verticale). Il est généralement appelé le déversoir de Thomson (Lencastre, 1996).

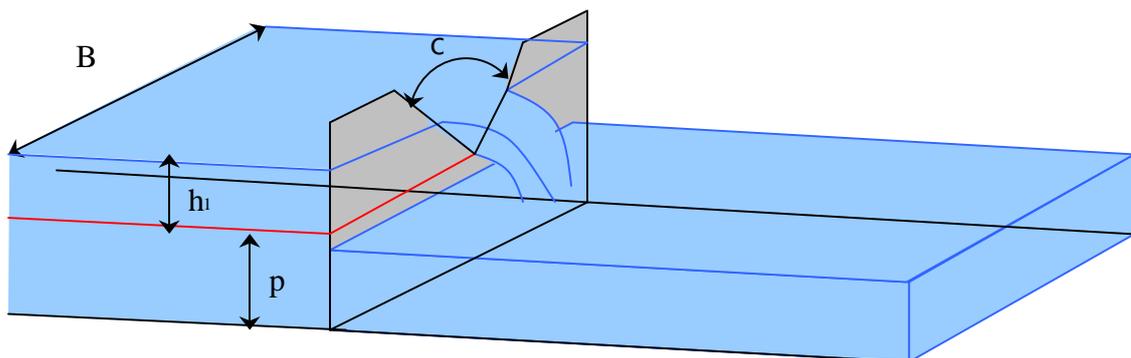


Figure (I.13) : vue en perspective d'un déversoir triangulaire.

D) Déversoir trapézoïdal

Si l'échancrure du déversoir a la forme d'un trapèze isocèle évasé vers le haut, le débit s'écoulant au travers de cette section trapézoïdale peut être déterminé par une formule ne dépendant pas du coefficient de débit. Cependant, le type de déversoir le plus couramment utilisé (avec une forme trapézoïdale) est celui de Cipolletti (Cas particulier : $\text{tg } c = \frac{1}{4}$, déversoir de cipolletti) (Lencastre, 1996).

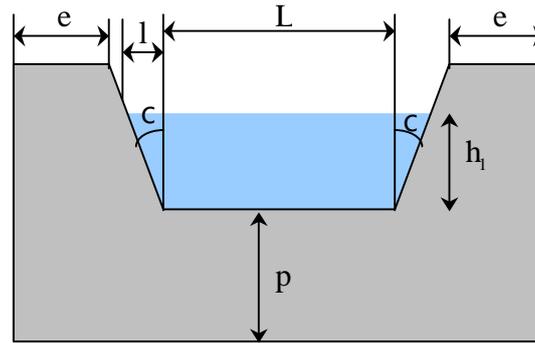


Figure (I.14) : coupe transversale d'un déversoir trapézoïdal.

e) Déversoir labyrinthe

Pour augmenter la longueur d'une crête du déversant, normalement rectiligne, on peut leur donner une forme polygonale en plan (Figure I.15), représente un tel déversoir, dit déversoir labyrinthe. L'avantage du déversoir labyrinthe, comparé au déversoir rectiligne, est une capacité de débit augmentée pour des charges faibles, de l'ordre de 1m. cette structure est cependant inappropriée pour des débits importants (Hager & Schleiss, 2009).

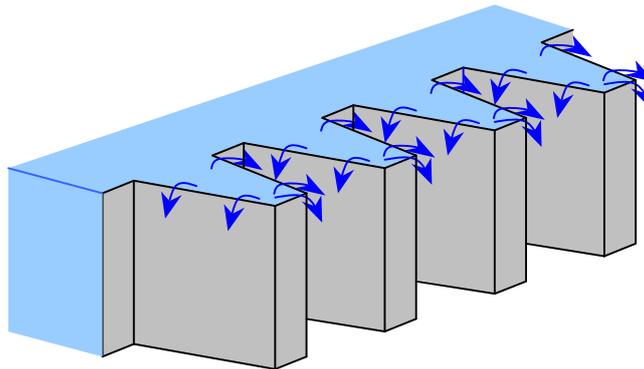


Figure (I.15) : vue en perspective d'un déversoir labyrinthe.

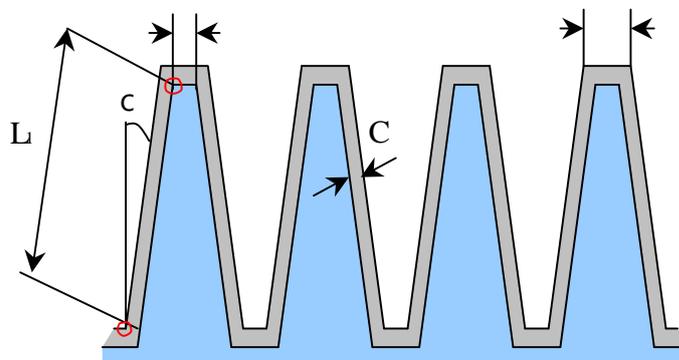


Figure (I.16) : vue en plan d'un déversoir labyrinthe (représente un cycle).

f) Déversoir en touche de piano (PK-Weir)

Récemment, un nouveau type d'évacuateur labyrinthe figure (I.17) appelé PK-Weir (piano Key Weir, ou déversoir en touche de piano) a été développé par Hydrocoop (France), en collaboration avec le Laboratoire de Développement Hydrauliques et Environnement de l'Université de Biskra Algérie et le laboratoire national hydraulique et environnement d'électricité de France (EDF-LNHE chatou)(Lempérière et Ouamane2003,Ouamane et Lempérière 2006).Le concept de l'ouvrage repose sur une longueur de crête développée, plus longue que la largeur du déversoir. Ceci implique alors une lame d'eau déversante et par conséquent une capacité d'évacuation plus importante que pour un déversoir de type Creager à crête rectiligne.la longueur des portes à faux des alvéoles amont et aval différencie le PK-Weir d'un simple déversoir labyrinthe. Son implantation sur le couronnement est alors minimisée et facilitée et son efficacité d'évacuation comparée aux déversoirs à crête linéaire font du PK-Weir, une alternative intéressante dans les projets de réhabilitation de barrages. Le premier exemple de ce type de déversoir a été construit par EDF sur le barrage de Goulours (France) (Laugier ,2007) (Hager & Schleiss, 2009).

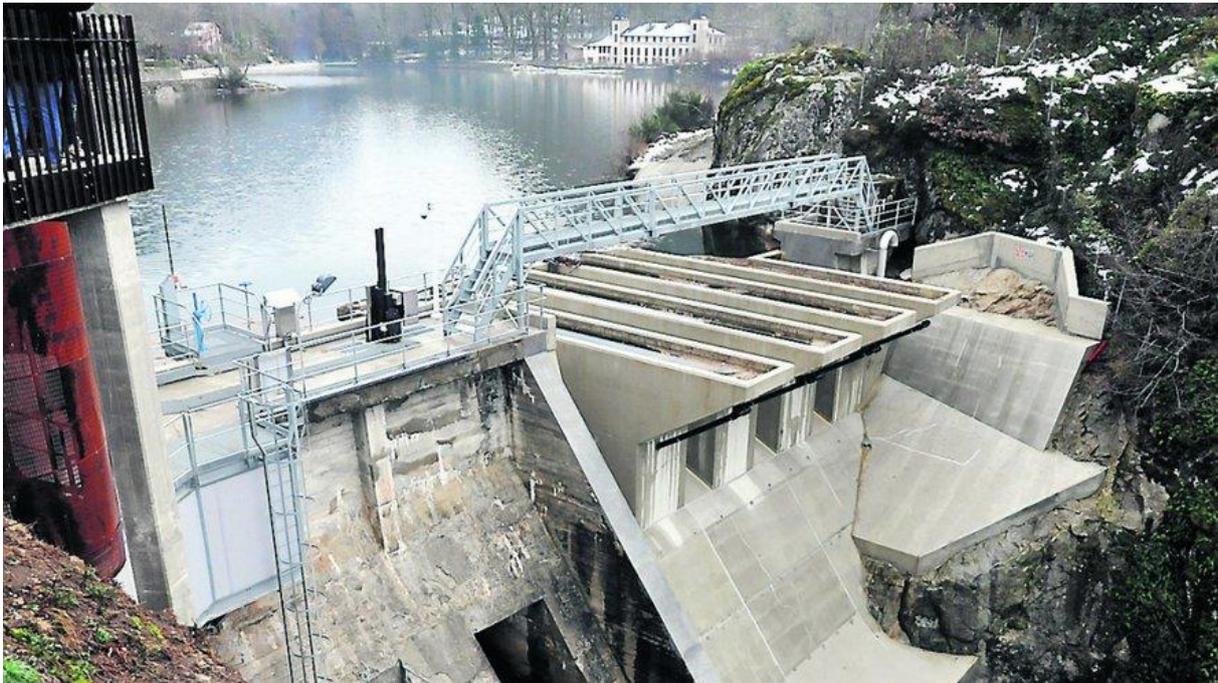


Figure (I.17) Déversoir en touche de piano (barrage de campaureil).

g) Déversoir circulaire

Ce type de déversoir, assez similaire à un écoulement de type orifice du point de vue géométrique, n'en est pas moins totalement différent du point de vue hydraulique.

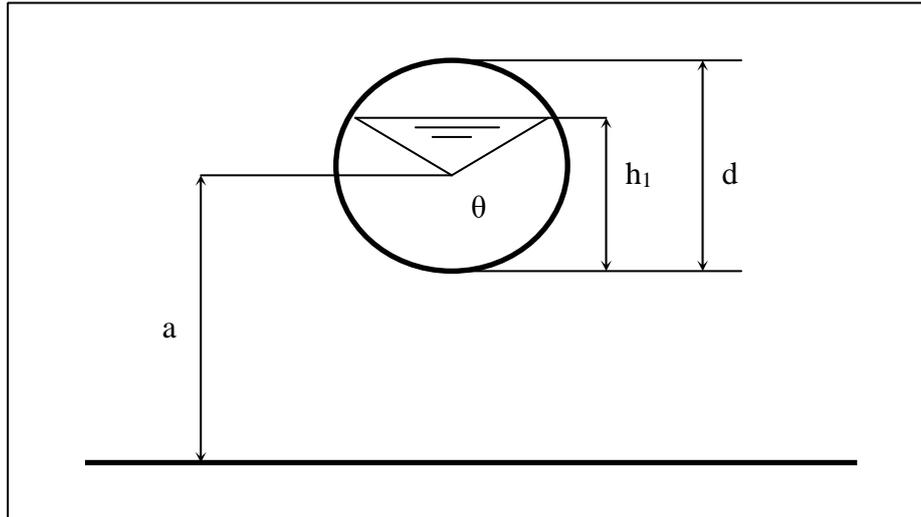


Figure (I.18) : Coupe transversale d'un déversoir circulaire (Dupont,1996).

Avec :

- h_1 :différence entre ligne d'eau en amont et le seuil (m)
- θ : Angle (rad)
- a : distance au centre du déversoir au fond du canal (m)
- d :diamètre du déversoir (m)

En effet, ce type de déversoir comporte une section d'écoulement à surface libre et présente les avantages suivants :

- Simplicité et facilité d'exécution et de mise en place (il n'y a ni à placer le seuil parfaitement horizontalement comme c'est le cas pour un déversoir rectangulaire, ni à placer la bissectrice parfaitement verticalement comme c'est le cas pour un déversoir triangulaire),
- Facilité de ventilation de la nappe,
- Une plus grande précision que le déversoir rectangulaire pour la mesure des petits débits (MTETM, 2005)

h) Déversoir incliné

Un déversoir incliné a une crête perpendiculaire à l'axe du canal, mais le plan qui le contient est incliné par rapport à la verticale (Figure (I.19)).

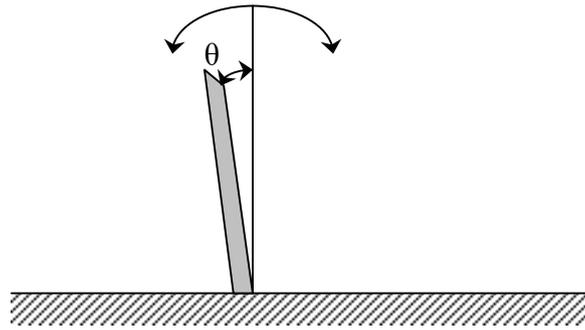


Figure (I.19) : coupe longitudinale d'un déversoir incliné.

i) Déversoir oblique

C'est un déversoir vertical dont la crête est disposée obliquement par rapport à l'axe longitudinal du canal dans lequel il est placé comme il est illustré dans la figure (I.20) Ci-contre.

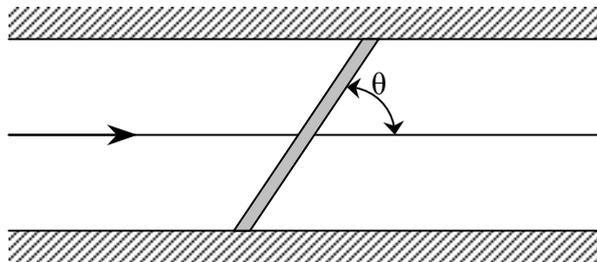


Figure (I.20) : vue en plan d'un déversoir oblique.

j) Déversoir latéral

C'est un déversoir ménagé dans la paroi latérale d'un canal. Nous supposons sa crête horizontale de longueur L et désigneront par P la hauteur de pelle, le fond du canal sera supposé horizontal sur la courte distance considérée (Carlier, 1980).

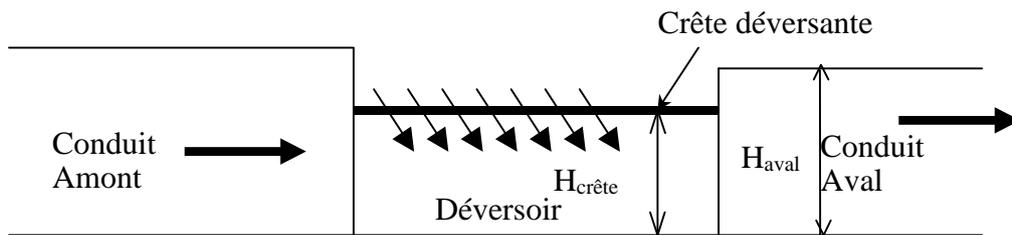


Figure (I.21) : Schéma du déversoir de type latéral.

k) Déversoir avec courbe de débit à équation linéaire (déversoir de Sutro)

Dans ce déversoir, désigné par déversoir Sutro (1908), le débit déchargé varie linéairement avec la charge. Le profil de déversoir est défini par une zone rectangulaire associée à une zone courbe (Figure (I.22) et (I.23)).

Le profil de la zone courbe est défini par l'équation :

$$x = \left(1 - \frac{2}{\pi} \cot \frac{y}{b}\right)L \quad (I.1)$$

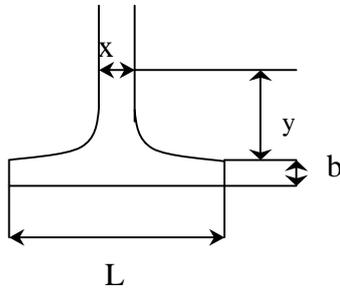


Figure (I.22) : profil symétrique.

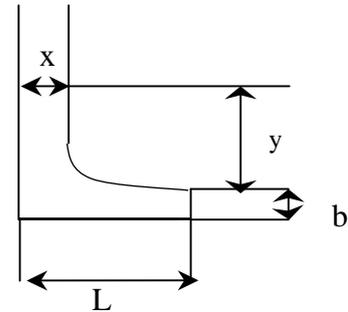


Figure (I.23) : profil asymétrique.

Les formes les plus courantes de ce type de déversoir sont celles qui correspondent aux profils symétrique et asymétrique.

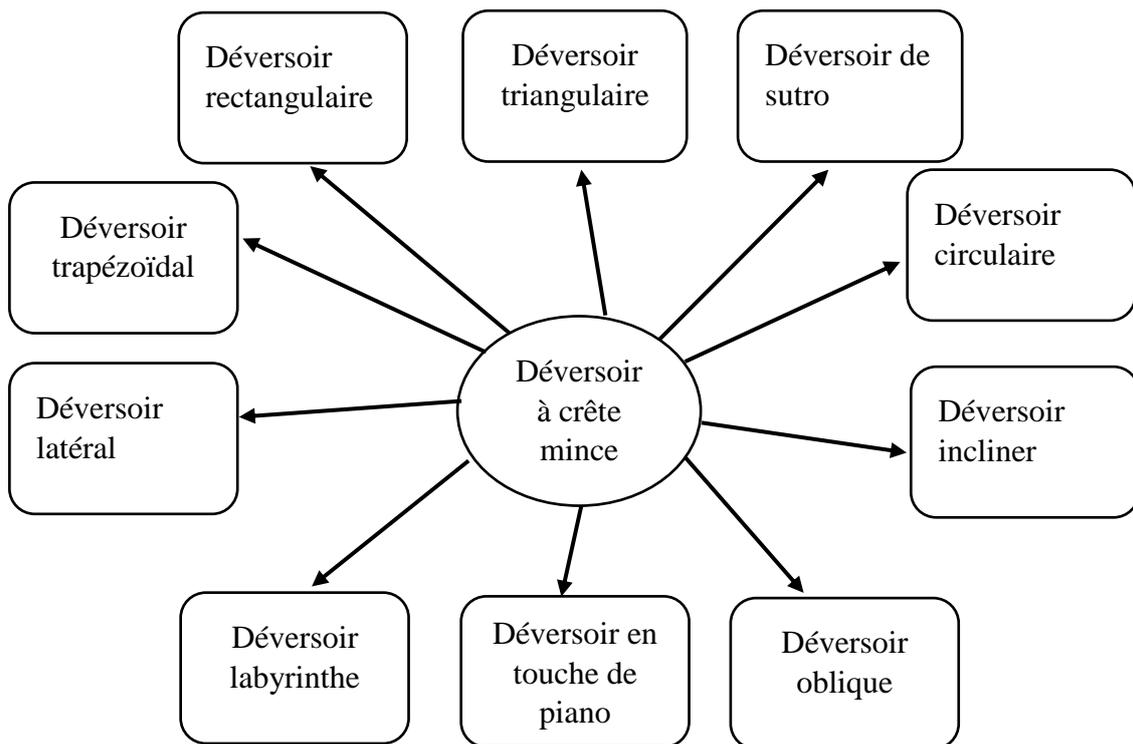


Figure (I.24) : Les différents types des déversoirs à crête mince.

I.4.3.2 Déversoir à crête épaisse

Un déversoir est dit à seuil épais lorsque la surélévation de la crête s'étale sur une assez grande distance W pour obtenir une surface libre horizontale et parallèle au seuil.

Pratiquement, on suppose que le déversoir est à seuil épais si $W > 3h$ (Bennis, 2009).

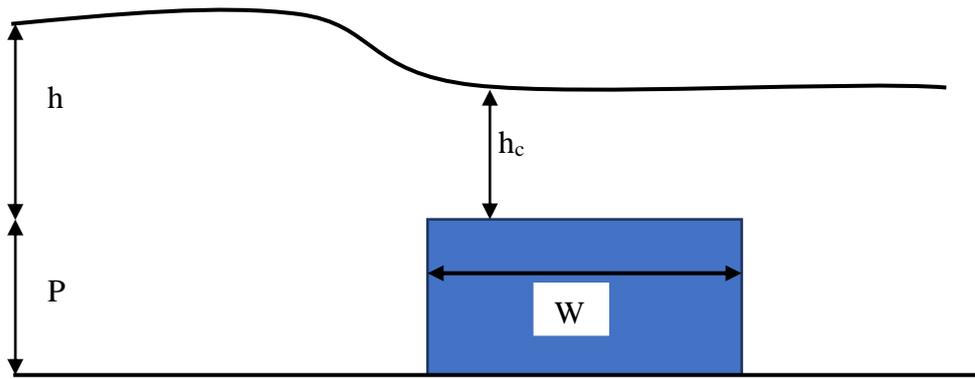


Figure (I.25) : Déversoir à seuil épais.

Les différents types de ce dernier sont classés comme schématisée ci-dessous (Figure (I.26)).

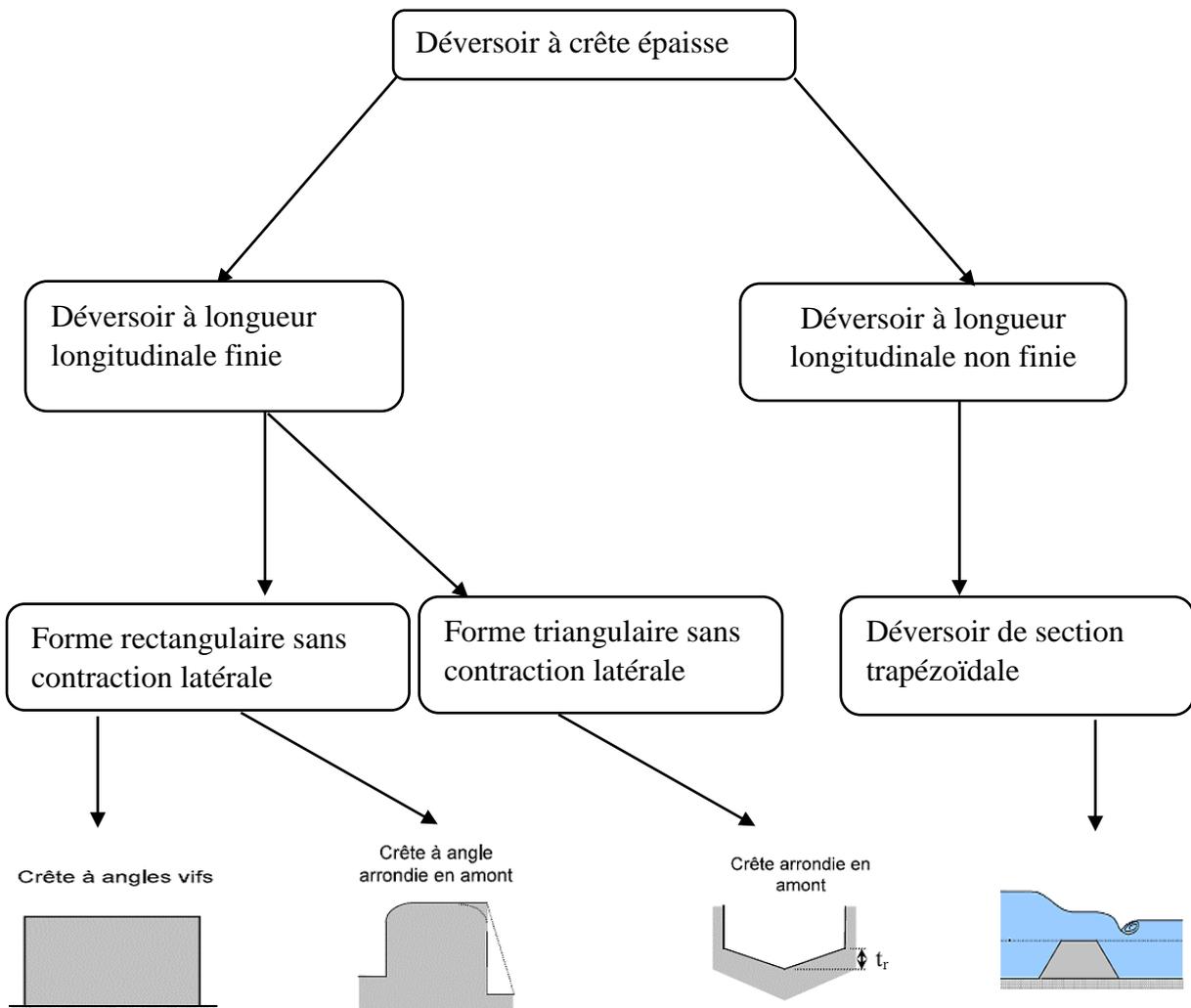


Figure (I.26) : Les types des déversoirs à crête épaisse.

I.5 Canaux :

I.5.1 Définition :

Sont des ouvrages hydrauliques linéaire qui transportent de l'eau à surface libre.

I.5.1.1 Types des canaux

1. **Canaux naturels** : comme les rivières et les torrents etc...
2. **Canaux construits**
 - Canaux d'adduction
 - Canaux de restitution
 - Canaux de drainage
 - Canaux d'adduction
 - Evacuateur de crue

Dans un canal, l'écoulement de l'eau s'effectue à ciel ouvert (surface libre) et obéit à des lois hydrauliques faisant intervenir le débit, la pente et les caractéristiques de la section transversale (superficie, rugosité, forme géométrique) (MILLOGO, 2009).

I.5.1.2 Pentes des talus et vitesse admissible

La pente du canal et celle des talus doit être telle que la vitesse de l'eau assure un débit suffisant sans entraîner une érosion du fond et des parois. La pente longitudinale d'un canal varie de 1/10 000 (10 cm/km) à 1/100 (10 m/km). Un canal ne doit pas avoir de contre pente et son plafond doit s'abaisser constamment et régulièrement de l'amont vers l'aval. Lorsque la pente est trop forte, on introduit des chutes dans le tracé du canal. Les vitesses d'écoulement sont comprises entre (0,5 et 1) m/s pour les canaux en terre et entre 0,75 m/s et 1,5 m/s pour les canaux revêtus. Les pentes des talus des canaux trapézoïdaux varient de 2/3 pour les canaux en terre à 1/1 pour les canaux revêtus. Les canaux rectangulaires ont toujours des parois verticales et sont toujours revêtus (MILLOGO, 2009) .

I.5.2 Revêtement des canaux

Le revêtement d'un canal remplit trois rôles :

- diminuer la rugosité des berges pour faciliter l'écoulement de l'eau ;
- assurer l'étanchéité des berges du canal
- accroître la résistance des talus à l'érosion

Les canaux trapézoïdaux peuvent ne pas être revêtus tandis que les canaux rectangulaires sont toujours revêtus. Les revêtements peuvent être de différentes natures en béton, en maçonnerie).

I.5.3 Caractéristiques géométriques des canaux

- La pente du fond du canal

$$J_0 = -\frac{dZ}{dx} \quad (I.2)$$

- la section mouillée S (dans les écoulements en charge, le contour d'une section était nécessairement fermé et la section est entièrement mouillée).
- le périmètre mouillé, P formé de la ligne de contact entre la surface mouillée et le lit y compris les berges, mais ne comprenant pas la surface libre.
- La largeur au miroir (ou à la surface libre), B
- le rayon hydraulique, donné par :

$$R = \frac{S}{P} \quad (I.3)$$

- la largeur superficielle B , du canal à la surface libre
- la profondeur hydraulique, D_h , définit par :

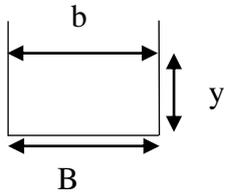
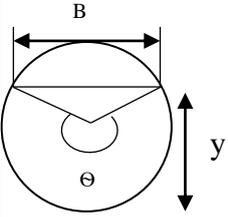
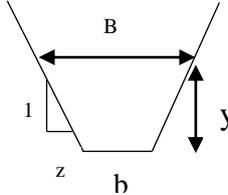
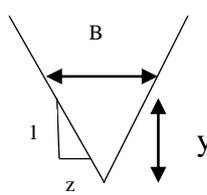
$$D_h = \frac{S}{B} \quad (I.4)$$

- la profondeur (hauteur ou tirant) d'eau h ; puisque la pente du fond est faible, la profondeur d'eau suivant la verticale et perpendiculaire au fond peuvent être considérées confondues.

Dans un canal prismatique (la pente du fond, la section et la rugosité restent constante).

Le tableau (I.1) suivant donne les formules des éléments géométriques pour les types de sections de canaux (Bennis, 2009).

Tableau (I.1) : propriétés géométriques des sections courantes (Bennis, 2009).

Forme de section	Section mouillée (S)	Périmètre mouillé (P)	Rayon hydraulique(R)	Largeur du miroir (B)
	by	$b + 2y$	$\frac{by}{b + 2y}$	b
	$\frac{D^2}{8}(\theta - \sin\theta)$	$\frac{\theta D}{2}$	$\frac{D}{4}(1 - \frac{\sin\theta}{\theta})$	$D \sin \frac{\theta}{2}$
	$(b + zy)y$	$b + 2y\sqrt{1 + z^2}$	$\frac{(b + zy)y}{b + 2y\sqrt{1 + z^2}}$	$b + 2zy$
	zy^2	$2y\sqrt{1 + z^2}$	$\frac{zy}{2y\sqrt{1 + z^2}}$	$2zy$

I.5.4 Canaux à adduction latérale

Les canaux de fuite des évacuateurs de crue ne sont pas toujours disposés dans la direction de l'écoulement du déversoir, mais ils sont souvent perpendiculaires. Une auge, longeant latéralement le déversoir, collecte donc les eaux déversées, comme le montre la Figure (I.27). Le débit Q dans cette auge croît localement avec la coordonnée longitudinale x (Hager & Schleiss, 2009).

Et pour décrire l'écoulement d'un canal avec apport latéral ou un débit entrant ou sortant entre deux sections il faut modifier les équations du mouvement.

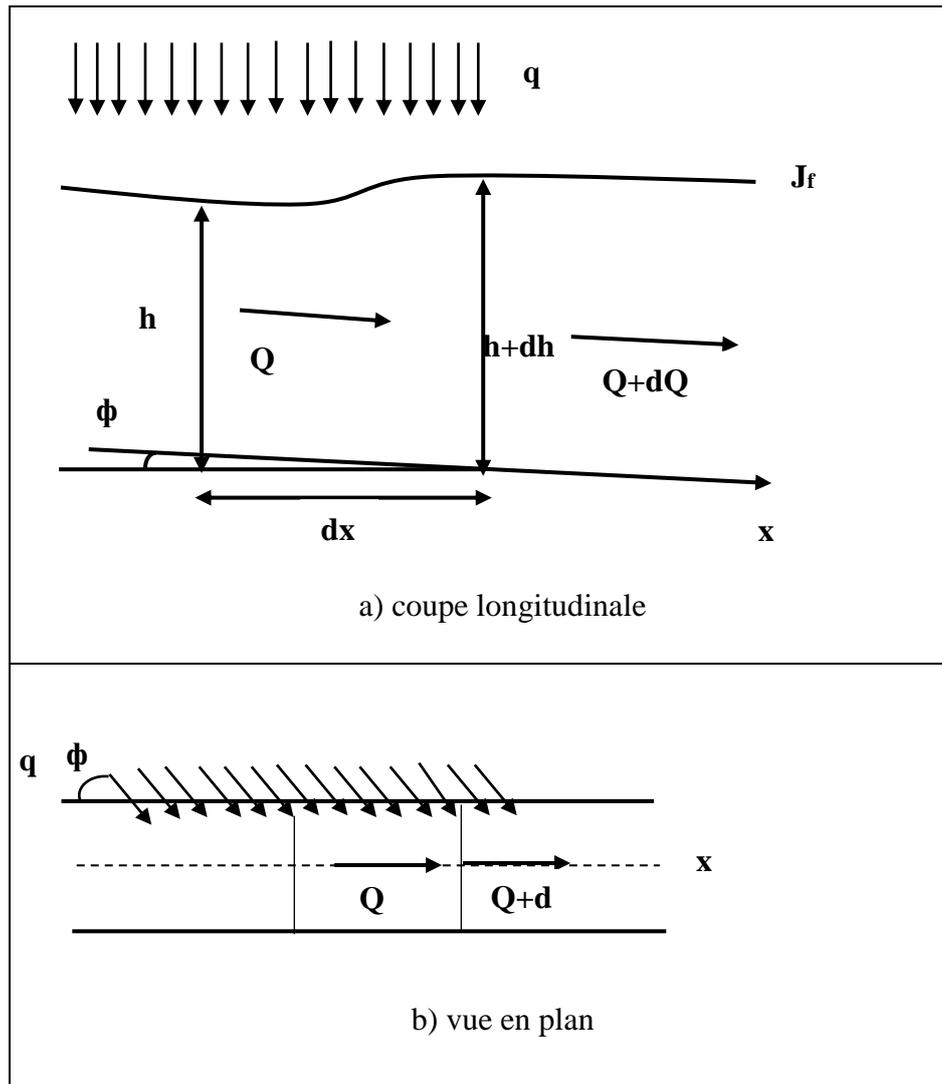


Figure (I.27) : canal avec adduction latérale.

I.6 Synthèse bibliographique et état de l'art :

L'écoulement dans les canaux avec apport latéral est un cas typique de l'écoulement spatialement varié. Des solutions analytiques, expérimentales et numérique ont été proposés par plusieurs chercheurs. Ce type de canal sont extrêmement utiles et sont très utilisés dans les évacuateurs de crue et canaux d'irrigation... etc.

Les études existantes ont comme objectif de répondre aux problèmes des écoulements avec apport latéral et ce par les différentes voies.

Des études notables sur l'hydraulique des canaux latéraux ont été établies à partir des années 1920 aux États-Unis, et portent principalement sur la construction des grands barrages. La première étude complète a été présentée par Hinds (1926), qui a présenté à la fois une étude expérimentale et les équations de l'écoulement spatialement varié.

Favre (1932) a effectué un travail similaire à l'école polytechnique fédérale de Zurich (ETH) qui a déduit la même équation de base en appliquant une approche plus rigoureuse. McConaughy (1933) a été le premier à appliquer l'approche précédente au plus grand chenal

latéral alors en construction, à savoir celui de l'évacuateur de crue Nevada. Le barrage de Boulder (aujourd'hui Hoover).

Meyer-Peter et Favre (1934) ont discuté ses résultats sur la base d'un modèle réduit établi à l'ETH Zurich.

McConaughy a répondu en fermant l'orientation de la recherche fondamentale de son approche de 1933.

Une grande campagne expérimentale a ensuite été entreprise par le US Bureau of Reclamation (USBR 1938). Concernant le barrage de Boulder, ce qui a entraîné de nombreux détails de cette structure hydraulique.

Camp (1940) a présenté un autre article très intéressant sur les canaux latéraux, utilisés dans les bassins de décantation des eaux usées et les stations de traitement.

De Marchi (1941) et son collaborateur Citrini (1942, 1948) au Laboratoire hydraulique de Milan, en Italie, ont étudié le débit du canal latéral, à la fois expérimentale et numérique. Ils ont également examiné l'effet d'une augmentation progressive de la largeur du canal latéral.

Hager (1983) a pu déterminer que l'équation générale des courbes de remous avec débits croissant est présentée pour l'écoulement à une dimension, stationnaire avec répartition des pressions hydrostatique. Les canaux rectangulaires prismatiques avec pente du fond quelconque et ceux non-prismatiques avec pente du fond horizontale sont examinés en détail. L'équation du profil de la surface est résolue pour des conditions arbitraires ; la procédure de résolution est expliquée à l'aide d'exemples. La comparaison avec des résultats d'expériences indique une bonne concordance.

En conclusion le théorème unidimensionnel et la distribution hydrostatique permettent une description relativement précise en raison des incertitudes qui sont causées au début et à la fin de la zone d'apport latéral due à la variation discontinue du débit.

L'étude expérimentale de Bremen et Hager (1989), sur les déversoirs à canaux latéraux rectangulaires sont présentée avec une attention particulière pour les effets d'une section transversale non prismatique et la pente inférieure sur le profil de la surface libre. Pour un écoulement sub-critique, la différence des profils de surface le long de l'axe du canal et des parois latérales est soulignée.

En outre, les configurations d'écoulement avec des conditions d'entrée supercritiques une formation du ressaut hydraulique le long de la longueur d'entrée latérale est discutée.

Les observations sont comparées à des prédictions basées sur une théorie étendue. Incluant ainsi la contribution de la quantité de mouvement dans la direction de l'écoulement latérale. L'équation du modèle étendue proposée doit être considérée chaque fois que la pente du fond du canal latéral est supérieure à un certain pourcentage Figure (I.28).

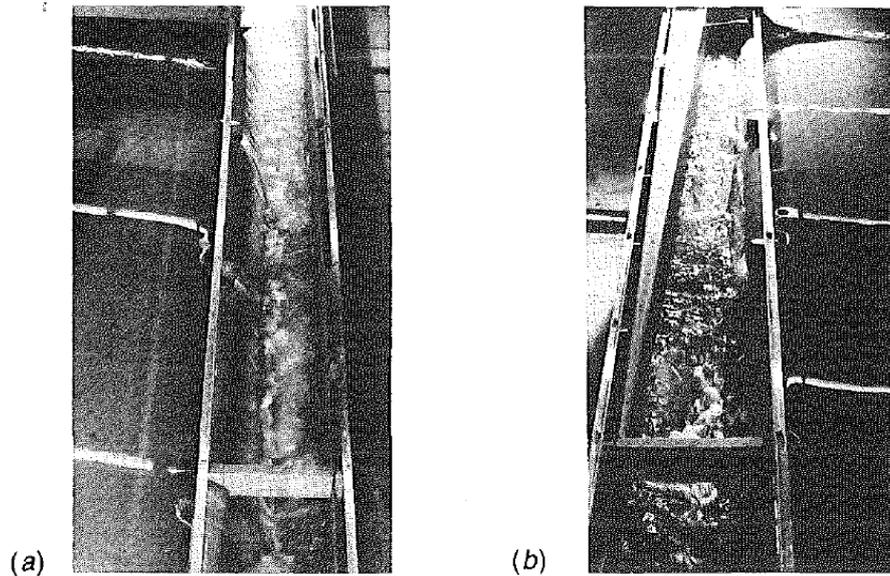


Figure (I.28) Vues typiques du canal : (a) de l'amont ; (b) forme en aval (Bremen, 1989).

Une étude expérimentale et numérique est faite par Kouchakzadeh (2002) et al) ces travaux résultent que la largeur du lit de cour d'eau varie spatialement avec l'augmentation du débit, influence sur la direction de l'écoulement. Cette procédure crée une coupe irrégulière de cour d'eau. Il présente aussi une nouvelle forme d'équation dynamique dans cette situation d'écoulement qui est basée sur la loi de conservation linéaire des moments, l'équation proposée et capable de calculer le profil de niveau d'eau.

Une étude récente a été élaborée par Lucas et al. 2015, sur des canaux latéraux est présentée. Il s'agit notamment des canaux latéraux du barrage de Translet, en Suède, du barrage de Kârahnjukar, en Islande, et du tunnel de dérivation de Lyssbach, en Suisse, dont les deux premiers ont une section transversale trapézoïdale et le dernier une section transversale rectangulaire. Les modèles d'écoulement observés sont décrits, avec une attention particulière pour les modèles d'écoulement en spirale à un et deux vortex, la formation d'un vortex en tornade et l'entraînement d'air. Les profils de surface libre mesurés en débit sont comparés à des calculs unidimensionnels sur la base de l'équation d'écoulement standard à variation spatiale. Bien qu'un bon accord aboutît en général, les écarts sont principalement expliqués par des perturbations locales. Les profils de surface libre en coupe transversale mesurés indiquent une augmentation de la profondeur d'écoulement le long des parois latérales par rapport à la profondeur d'écoulement calculée au point d'impact de l'entrée latérale. Pour la conception du canal latéral, les mesures de sécurité doivent donc être prises en compte. Les canaux latéraux de complexité géométrique et présentant un potentiel de

risque élevé doivent être étudiés lors d'essais détaillés sur des modèles hydrauliques (Figure(I.29)et (I.30)).

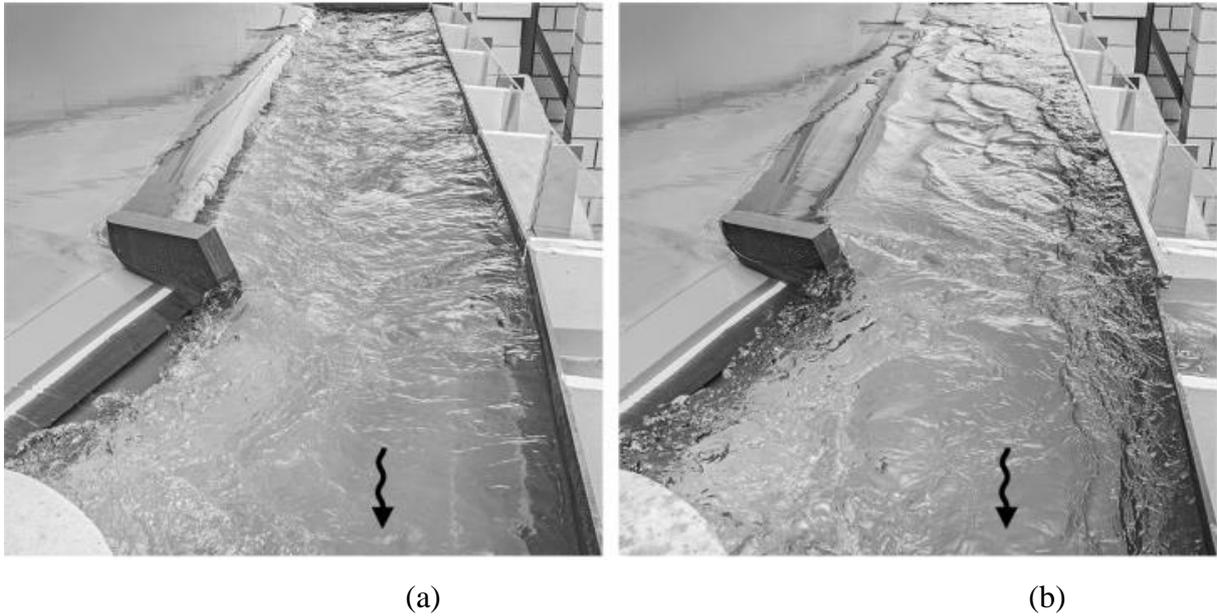


Figure (I.29) Vues des eaux de fuite du canal latéral Translet pour la conception finale avec une largeur réduite : (a) avec structure à deux vortex, (b) à un seul vortex (Lucas et al.2015).

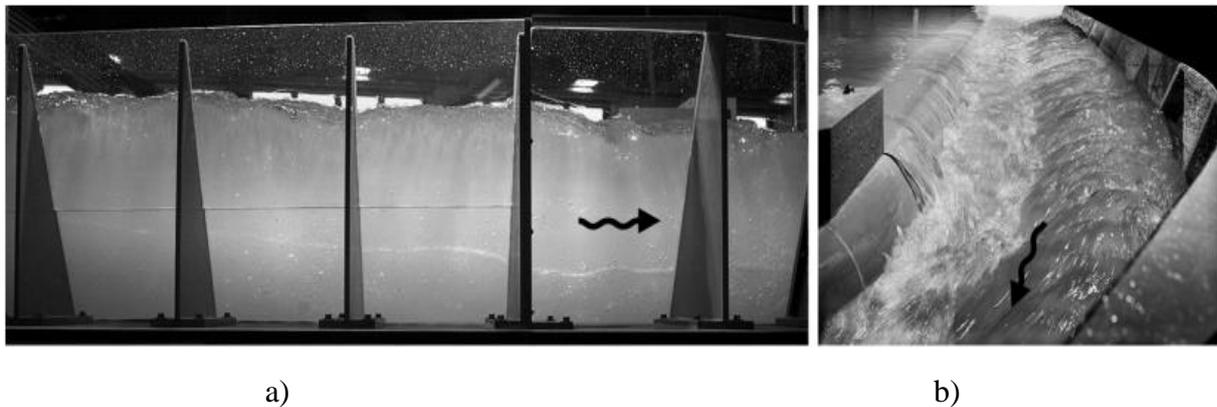


Figure (I.30) : Canal latéral de Karahnjukar: (a) latéral (b) vues de l'eau arrière pour avec vortex tornade visible avec entraînement de l'air et écoulement prononcé à deux vortex (Lucas et al.2015).

I.7 Conclusion

L'analyse et la compréhension du phénomène hydraulique est primordial pour chaque étude. Dans ce chapitre on a exposé les écoulements à surface libre et les différents types de déversoirs qui peuvent être rencontrés et les canaux avec ou sans apport latéral qui est le problème sur lequel notre étude se consacrera, une synthèse bibliographique dont on a cité les travaux significatifs qui ont été élaboré par des chercheurs.

Le chapitre suivant va représenter le dispositif expérimental effectué au laboratoire hydraulique de l'université de Bejaia.

Chapitre II : Dispositif expérimental

II.1 Introduction

L'étude expérimentale consiste à reproduire le phénomène au laboratoire, le présent chapitre porte sur l'étude de l'évolution de la ligne d'eau dans un écoulement à surface libre avec apport latéral et ce par voie expérimental pour confirmer l'approche théorique.

Ainsi dans ce chapitre, nous aborderons deux volets : la préparation du dispositif expérimental et la description des essais effectués sur le modèle au niveau du Laboratoire hydraulique de l'Université de Bejaia.

II.2 Objectif de l'expérience

L'objectif est de visualiser la variation de la ligne d'eau dans le canal expérimentalement pour établir une comparaison avec la solution analytique effectuée par un binôme à l'université de Jijel et la résolution par (Méthode des éléments finis).

II.3 Canal d'essai H12 MK2

Le canal d'écoulement hydraulique H12 MK2 est une version repensée d'un modèle précédent, qui présente des possibilités améliorées en matière de contrôle de l'écoulement et de mesure.

Pour les besoins du présent d'écoulement le canal a été modifié en ajoutant une conduite que l'on a placé aux dessus du canal. La conduite est en pvc trouée pour simuler l'effet d'une adduction latéral.



Figure (II.1) : Dispositif expérimental.

II.3.1 Caractéristiques du canal

- Canal inclinable avec parois latéral en plexiglas.
- Visualisation complète de l'écoulement.
- Fonctionne en circuit fermé.
- Instrumentation complète comprenant :
 - Dispositif précis pour mesure de débit par pesée.
 - Limnimètre à vernier.
 - Tube Pitot.
- Modèles standards fournis :
 - Déversoir a paroi mince avec nappe ventilée.
 - 2 déversoirs à seuil épais.
 - Vanne de sortie réglable.
 - Venturi.
 - Vanne verticale guillotine.
 - Piles de pont.
- L'installation se place sur le sol.
- Seule une alimentation électrique est nécessaire.
- Convient parfaitement à des démonstrations devant des groupes d'étudiant.

II.3.2 Les expériences envisageables

Les expériences suivantes sont données à titre indicatif de nombreuse autre expérience peuvent être envisagées :

1. Ecoulement uniforme dans un canal à surface libre.
2. Changement de profondeur lors d'un ressaut hydraulique.
3. Ecoulement sous une vanne noyée, avec ressaut hydraulique.
4. Ecoulement au-dessus d'un seuil épais.
5. Emploi d'un seuil épais comme moyen de mesure de débit.
6. Ecoulement à travers un venturi.
7. Ecoulement avec apport latéral.

II.3.3 Dimensions du canal

- Longueur 5 mètres.
- Hauteur 150 mm.
- Largeur 75 mm.

II.3.4 Capacité du réservoir de pesée

La capacité du réservoir de pesée est 136 litres.

II.3.5 Caractéristiques de la pompe

- Type : centrifuges.
- Matière : Bronze
- Vitesse de rotation : (2850 tr/min)
- Alimentation : Electrique monophasée 220/240v-50 Hz
- Débit compris entre 50 (l/min) sous une hauteur d'eau de 26 mètres et 300 (l/min) sous une hauteur d'eau de 15 mètres.

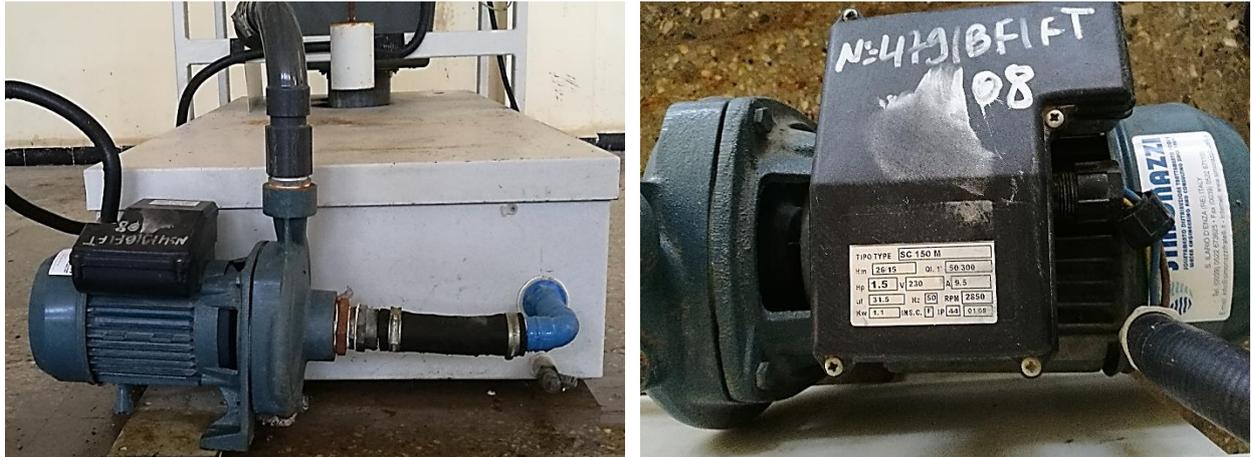


Figure (II.2) : Pompe d'alimentation.

II.3.6 Conduite d'apport latéral

La conduite est placée au-dessus du canal fixé avec des supports métalliques (Figure (II.3)) avec une hauteur de 34 (cm) par apport au fond du canal.

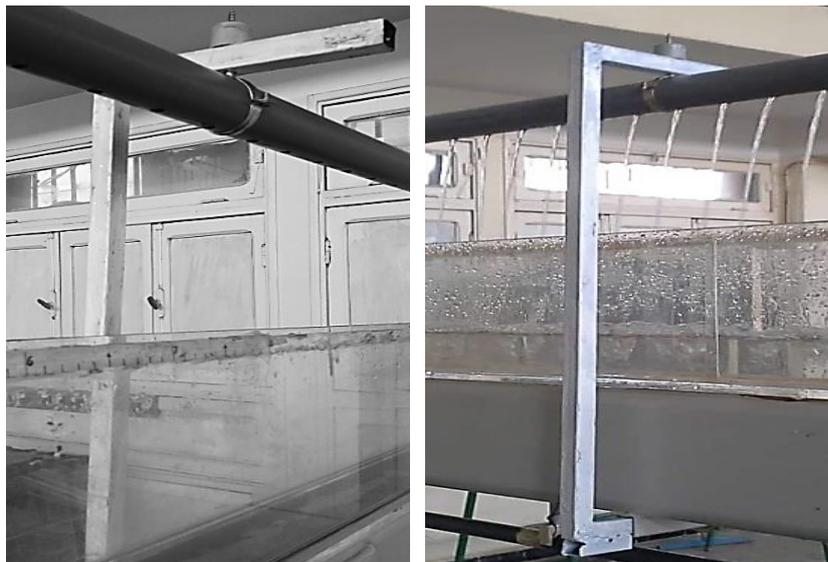


Figure (II.3) : Support de la conduite d'apport.

- Diamètre de la conduite 40 mm.
- Longueur 5 m.
- Trouée avec une mèche de 8 mm.
- Espacement entre les trous 5 cm.

La figure (III.4) montre l'écoulement au travers des trous et son déversement dans le canal.

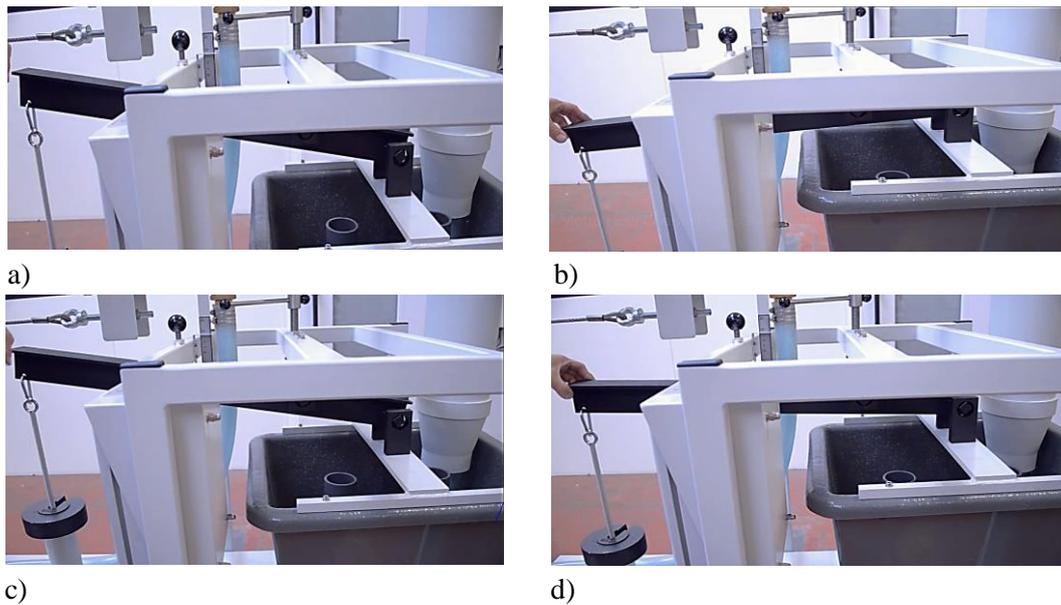


Figures (II.4) : Trous de la conduite d'apport.

II.4 Protocole expérimental

Pour peser l'eau dans le banc hydraulique nous utilisant une méthode par différence, le réservoir est suspendu à extrémité d'un fléau et contre-balancer par une série de masse à l'autre extrémité.

Pour effectuer la mesure on place préalablement une masse supérieure à celle du réservoir vide, et l'on déclenche le chronomètre lorsque le fléau revient en butée haute. On ajoute alors une série de masses qui font redescendre le fléau et on arrête le chronomètre lorsque le fléau remonte à sa position haute. Le temps enregistré correspond donc à celui d'une certaine masse d'eau.



Figures (II.5) : phases de mesure : a) position d'attente sans poids ; b) début de chronométrage ; c) fin de chronométrage ; d) position finale avec poids.

Etant donné que le bras de levier du fléau est de 3 pour 1, chaque masse de 1 kg supplémentaire sur l'accroche poids représente 3 Kg d'eau recueillie dans le réservoir de mesure.



Figeur (III.6) : Information de poids et bras de levier.

Le banc est pourvu d'un système de trop plein qui permet d'étudier le débordement si le réservoir de pesée reste en position. Néanmoins il est recommandé d'éviter de placer des masses sur le fléau dans cette position.

La gamme recommandée d'intervalle de temps pour les mesures située entre 10 secondes et 60 secondes .il est nécessaire de déterminer la masse supplémentaire pour qu'elle corresponde à cet intervalle de temps.

II.4.1 Mesure de débit

Pour la mesure de débit on doit d'abord mesurer le temps et le débit massique qui sera ensuite transformer en débit volumique par la formule suivante :

$$Q_v = \frac{Q_m}{\rho} = \frac{Kg/s}{Kg/m^3} \quad (III.1)$$

- $Q_m = \frac{M}{t}$: le débit massique (Kg/s)
- Q_v : le débit en (m^3/s)
- M : la masse (Kg)
- t : le temps en (s)
- ρ : la masse volumique en (Kg/m^3)

Pour la masse on utilise une masse de 10kg toute au long de notre expérience donc la variabilité sera le temps de remplissage du réservoir.

II.4.2 Mesure de temps

Un chronomètre électronique a été utilisé. C'est l'instrument de mesure de temps, son nom est dérivé du grec ancien khrōnos (le temps) et métron (mesure) (Figure (II.7)).



Figure (II.7) : Chronomètre électronique.

II.4.3 Mesure de hauteur

N'ayant pas pu mesurer la profondeur de l'écoulement au moyen d'un Linnimètre qui est un instrument intrusif pour l'apport latéral, c'est pour ça nous avons été amenés à utiliser une technique photométrique.

Le principe consiste à déterminer le profil de la surface libre $y(x)$ avec un calibrage métrique sur photo instantanée de l'écoulement. Les prises de photo sont opérées à mi-longueur du canal à distance cible suffisamment éloignée pour y parvenir, avec une bonne précision, le canal entier. Vu que la ligne d'eau aux extrémités du canal ne sont pas perpendiculaires au point de prise photo, on peut reprocher une certaine distorsion aux mesures due à l'effet d'obliquité. Cependant, cet effet reste très confiné étant donné la faible longueur du canal. En d'autres termes, on peut attacher un certain facteur de confiance (heuristiquement) tant que le rapport $\frac{L}{d} = 1$, Où

L : longueur du canal

d : distance de prise photo.



Figure (II.8) Mesure de la hauteur avec (Plot Digitizer).

II.5 Les difficultés et imprécisions

- Création des écumes (moutonnement) lors de l'apport latérale.
- La non rectitude parfaite des trous le long de la conduite.
- Les apports ne sont pas absolument perpendiculaires à l'axe du canal.
- Une légère différence de débit latérale dans le trou initial et le trou final.

II.6 Calcul de l'imprécision

Dans cette opération on a effectué deux variations du débit total pour mesurer les débits latéraux afin d'obtenir une comparaison entre ces débits comme présentée dans les tableaux (II.1) et (II.2) avec $Q_1=0,95923261$ (l/s) et $Q_2=0,29931158$ (l/s).

Tableau (II.1) Erreur relative au débit latéral avec débit total Q_1 .

Mesures	T ₁ (s)	T ₂ (s)	Volume1 (ml)	Volume2 (ml)	q(lateral1) (ml/s)	q(lateral2) (ml/s)
Trous						
Trous 1 (début)	6,85	11,32	190	300	27,737226	26,501766
Trous 2 (milieu)	9,63	8,97	250	260	25,96054	28,985507
Trous 3 (fin)	5,53	3,95	380	280	68,716094	70,886075

Tableau (II.2) Erreur relative au débit latéral avec débit total Q2.

Mesures	T ₁ (s)	T ₂ (s)	Volume1 (ml)	Volume2 (ml)	q(lateral1) (ml/s)	q(lateral2) (ml/s)
Trous						
Trous 1 (début)	6,33	4,86	160	120	25,276461	24,69135
Trous 2(milieu)	5,99	8,79	145	200	24,207011	22,753128
Trous 3 (fin)	4,55	4,03	260	240	57,142857	59,553349

On remarque y'as une différence importante du débit latéral dans les trous.

II.7 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté l'objectif de l'expérience et le dispositif expérimental mis en place pour cette étude, nous avons ensuite décrit les appareils de mesure.

Dans le chapitre suivant nous allons présenter les équations différentielles ordinaires de base qui gouverne l'écoulement à surface libre avec apport latéral qui en résulte lors de l'application du principe conservation de masse et de quantité de mouvement.

Chapitre III : Modèle numérique de résolution

III.1 Introduction :

Après avoir exposé le dispositif expérimental, nous aborderons à présent l'analyse théorique et mathématique du phénomène avec l'application de conservation d'énergie et de la quantité de mouvement qui vas nous permettre de formuler l'équation différentielle qui gouverne l'écoulement avec apport latéral.

III.2 Démonstration des équations différentielles ordinaire de base :

Pour l'étude de l'écoulement spatialement varié, les hypothèses seront faites (Chow, 1959).

- La distribution de pression est hydrostatique
- La méthode d'analyse unidimensionnelle est utilisée (le facteur de correction d'énergie cinétique α est utilisée pour représenter adéquatement la non-uniformité de la distribution des vitesses.
- Les pertes par frottement sont adéquatement représentées par la formule de Manning
- Le déversement de l'eau n'affecte pas le contenu énergétique par unité de masse d'eau dans le canal.
- L'écoulement est considéré permanent.
- Le canal est prismatique de pente faible.

Le débit varie le long du canal en raison de l'apport ou du déversement latéral. Ainsi, le débit spatialement variable peut être classé en deux catégories : avec débit croissant et avec débit² décroissant. Comme il existe une différence considérable dans le flux et l'analyse de ces deux catégories, la discussion est donnée séparément pour l'écoulement avec un débit croissant et l'écoulement avec un débit décroissant (Subramanya, 2009).

III.3 Ecoulement avec débit croissant

Pour décrire l'écoulement d'un canal avec apport latéral ou un débit entrant ou sortant entre deux sections, il faut modifier les équations de mouvement (Graf & Alkinakar, 2000).

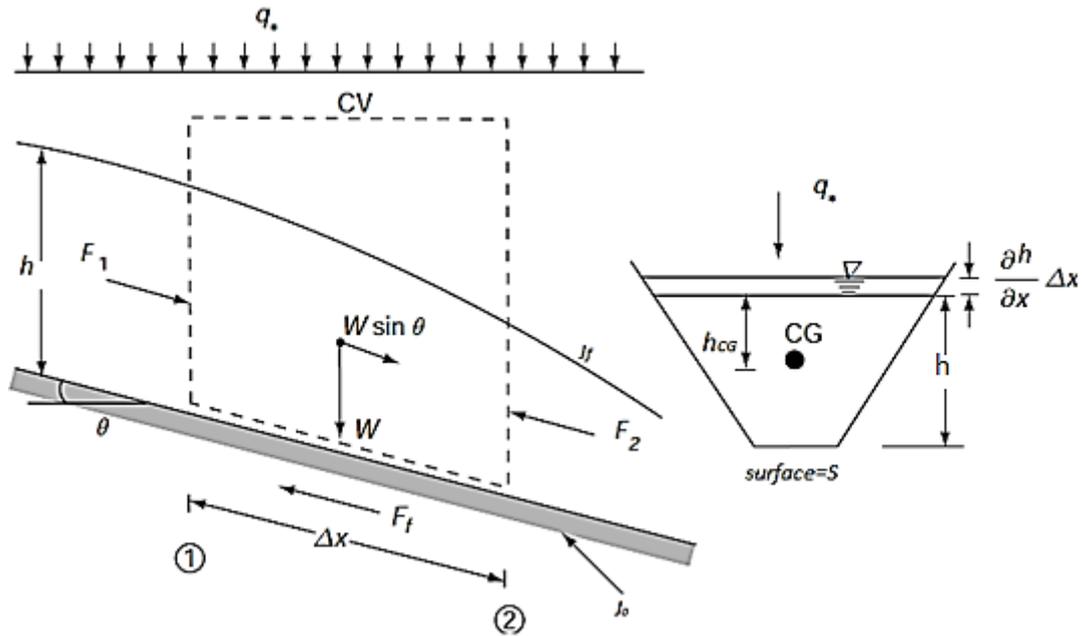


Figure (III.1) : Schéma d'un écoulement graduellement varié avec apport latéral.

L'équation de continuité en écoulement permanent s'écrit alors :

$$\frac{dQ}{dx} = \pm q(x) \quad (\text{III.1})$$

Ou q est le débit latéral par unité de longueur qui sort (-), ou qui entre (+).

Dans notre cas un débit croissant donc q est un (+).

Pour un écoulement latéral entrant, on peut donc admettre que :

$$q = \frac{dQ}{dx} = S \cdot \frac{dv}{dx} + V \frac{dS}{dx} \quad (\text{III.2})$$

La somme des quantités de mouvement à travers la surface d'un volume de fluide est équivalente à la somme des forces qui lui sont appliquées.

En projection avec la direction du canal à pente faible on écrit :

$$\sum F_x = \Delta F_p + W \sin \alpha - F_f = \rho \Delta(QV) \quad (\text{III.3})$$

- Epure de force hydrostatique :

$$\Delta F_p = \gamma \cdot S \cdot h_{CG} - \gamma \cdot S \cdot (h_{CG} + dh) = -\gamma \cdot S \cdot dh. \quad (\text{III.4})$$

Où h_{CG} c'est la profondeur du centre de gravité.

- La pesanteur est :

$$W \sin \alpha = \gamma.S. \sin \alpha .dx = \gamma.S.J_0 dx \quad (\text{III.5})$$

Où la pente du fond est donnée par $\sin \alpha \cong J_0$, valable pour des faibles pentes.

- La force de frottement est :

$$F_F = \tau_0.P.dx = \gamma.J_F .dx.S \quad (\text{III.6})$$

Avec la tension due aux forces de frottement $\tau_0 = \gamma.R_h.J_F$,

- La quantité de mouvement à travers la surface d'un volume fluide est :

$$\rho.\Delta(QV) = \rho(Q + dQ)(V + dV) - \rho(QV) - \rho(q.dx)(V_l \cos \phi) \quad (\text{III.7})$$

Où $q.dx = dQ$, et le débit supplémentaire entrant avec la vitesse supplémentaire V_l , sous un angle ϕ , par rapport à l'axe du canal.

Pour $\phi = 90^\circ$, en négligeant $dQ.dV$, on écrit :

$$\rho.\Delta(QV) \cong (V.dQ + Q.dV) - 0$$

Par conséquent :

$$-\gamma.S.dh + \gamma.S.dx - \gamma.J_0 .dx - \gamma.J_f .dx.S = \rho(V.dQ + Q.dV) \quad (\text{III.8})$$

En divisant par $\gamma.S.dx$ on aura :

$$\frac{dh}{dx} = J_0 - J_f - \frac{V}{g} \left(\frac{1}{S} \cdot \frac{dQ}{dx} + \frac{dv}{dx} \right) \quad (\text{III.9})$$

Où

$$\frac{dv}{dx} = \frac{d\left(\frac{Q}{S}\right)}{dx} = \frac{q.S - B.Q}{s^2} \frac{dh}{dx} \quad (\text{III.10})$$

En remplaçant dans (III.8) :

$$\frac{dh}{dx} = J_0 - J_f - \frac{V}{g} \left(\frac{q}{S} + \frac{q}{S} - \frac{dh}{dx} \frac{BQ}{S^2} \right) \quad (\text{III.11})$$

Et finalement :

$$\frac{dh}{dx} = \frac{J_0 - J_f - \frac{2.q.Q}{g.S^2}}{1 - \frac{B.Q^2}{g.S^3}} \quad (\text{III.12})$$

En posant que $V + dV = \frac{Q + dQ}{S + dS}$, puis en négligeant les termes $S.ds$ et $dQ.dS$ mais en laissant

$\phi = 90^\circ$, On obtient :

$$\frac{dh}{dx} = \frac{J_0 - J_f - q \left[\frac{2.Q}{g.S^2} - \frac{1}{gS} (V_l \cos \phi) \right]}{1 - \frac{B.Q^2}{g.S^3}} \quad (\text{III.13})$$

L'équation c'est l'équation différentielle de base régissant le mouvement dans l'écoulement spatialement varié avec une augmentation de débit. C'est une équation non linéaire de premier ordre. Les solutions sous formes closes ne sont pas possibles, sauf dans les cas très simplifiés.

Cette équation permet de calculer les formes de la surface libre avec plusieurs méthodes.

III.4 Equation de la surface libre

La maîtrise de l'écoulement graduellement varié avec apport latéraux est importante pour les canaux de distribution d'eau, les canaux d'adduction et les déversoirs latéraux.

Le problème qui se pose dans l'étude d'un écoulement spatialement variée est de déterminer la forme, $h(x)$, dans chaque position x , de la surface libre pour un débit Q , et une forme géométrique de section S , donnée. Il est habituel de supposer que la perte d'énergie due au déversement de l'eau est nulle et que l'équation d'énergie est utilisée pour dériver l'équation de base du mouvement. Les hypothèses qui sont illustrées précédemment demeurent toujours applicable.

Cette étude peut être faite à partir de l'équation de l'énergie :

$$H = Z + h + \alpha \frac{V^2}{2g} \quad (\text{III.14})$$

Et l'équation de continuité :

$$Q = V.S \quad (\text{III.15})$$

Par dérivation par rapport à (x), l'équation (II.6) devient :

$$\frac{dh}{dx} = \frac{dh}{dx} + \frac{dZ}{dx} + \frac{d\left(\alpha \frac{V^2}{2g}\right)}{dx} \quad (\text{III.16})$$

Et :

$$\frac{d\left(\alpha \frac{V^2}{2g}\right)}{dx} = \frac{d\left(\alpha \frac{Q^2}{2gS^2}\right)}{dx} = \frac{a}{2g} \left(\frac{2Q}{S^2} \frac{dQ}{dx} - \frac{2Q^2}{S^3} \frac{dS}{dx} \right) \quad (\text{III.17})$$

Cependant par définition, et en utilisant la relation de Chézy :

$$\frac{dH}{dx} = -J_f = -\frac{\left(\frac{Q}{S}\right)^2}{R_h C^2} \quad (\text{III.18})$$

$$\frac{dZ}{dx} = -J_0 \quad (\text{III.19})$$

$$\frac{dS}{dx} = B \cdot \frac{dh}{dx} \quad (\text{III.20})$$

Donc, l'équation (III.14) vas devenir

$$\frac{dh}{dx} = \frac{J_0 - J_f - \frac{\alpha Q^2}{gS^2}}{1 - \frac{BQ^2}{gS^3}} \quad (\text{III.21})$$

Où :

$$\frac{dh}{dx} = \frac{J_0 - J_f - \frac{\alpha Qq}{gS^2}}{1 - F^2} \quad (\text{III.22})$$

C'est l'équation différentielle de base de mouvement dans l'écoulement spatialement variable avec un débit croissant permet de tracer la ligne d'eau pour les différents cas possibles et ceci sans que on soit obligé d'intégrer.

Avec α un coefficient pour tenir compte de l'inégalité de la répartition des vitesses le long de la section transversale considérée qui s'appelle coefficient de Coriolis.

III.5 Approche de HAGER

Le débit entrant latéralement dans l'auge de longueur L perturbe l'écoulement dans l'auge elle-même. Ce fait est à l'origine de pertes de charge additionnelles non négligeables qui ne permettent pas d'appliquer l'équation de Bernoulli. Le profil de la surface de l'eau doit donc être déterminé par application du théorème de la quantité de mouvement.

Supposons dans le canal un écoulement stationnaire et unidimensionnel, pour lequel la répartition des pressions est hydrostatique et celle des vitesses uniformes. En se référant à la figure (II.1), on constate que l'application du théorème de la quantité de mouvement doit tenir compte des forces de pression et d'inertie amont et aval, de la composante longitudinale du poids de l'eaux entre les deux sections, des forces de frottement et de la force exercée par le débit latéral.

$$M = h_{CG}S + \frac{Q^2}{gS} \quad (\text{III.23})$$

La variation longitudinale $\frac{dM}{dx}$ est égale à la somme des forces extérieures (Figure (III.1)). Ces

dernières se composent du poids liquide dans la direction longitudinale $J_0 S dx$, du frottement

$- J_F S dx$, de la force sur les parois du canal non prismatique $\frac{dS}{dx} h_{CG} dx$ et du débit $dQ > 0$

entrant latéralement sous un angle ϕ par rapport à l'axe du canal $V_l \cos \phi \frac{dQ}{g}$, V_l étant la vitesse

de l'apport latéral. Ainsi donc on a :

$$dM = (J_0 - J_f)Sdx + h_{CG}S'dx + \frac{V \cos \Phi}{g} dQ \quad (\text{III.24})$$

En dérivant l'équation par rapport à x et en divisant l'équation par dx , on obtient :

$$h' S + \frac{2QQ'}{gs} - \frac{Q^2S'}{gS^2} = (J_0 - J_f)S + \frac{V \cos \Phi}{g} Q' \quad (\text{II.25})$$

Avec $h'_{CG} = h'$ a cause de la repartition hydrostatique de la pression. Etant donné que la section mouillée dépend de la hauteur d'eau et varie longitudinalement avec x , $S=S(x, h)$, donc

$S = \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial h} h'$, la relation peut être écrite comme suit (Hager & Schleiss, 2009).

$$h' = \frac{(J_0 - J_f) + \left(\frac{V_1 V \cos \Phi - 2V^2}{g} \right) \frac{Q'}{Q} + \frac{Q^2}{gS^3} \frac{\partial S}{\partial x}}{1 - F^2} \quad (\text{II.26})$$

Cette équation de l'écoulement graduellement varié avec apport latéral, $q = \frac{dQ}{dx}$ permet de calculer les formes de la surface libre avec les méthodes par approximations successives.

III.6 Présentation générale de la méthode des éléments finis

Pour analyser un phénomène naturel en générale ou un problème d'ingénierie en particulier, on est souvent amené à développer un modèle mathématique pouvant décrire d'une manière aussi fiable que possible le problème en question.

Le développement d'un modèle mathématique s'appuie généralement sur quelques postulats de base et plusieurs hypothèses simplificatrices pour aboutir à des équations gouvernantes qui sont souvent des équations différentielles auxquelles sont ajoutées des conditions aux limites.

La résolution analytique d'équations différentielles pose parfois des difficultés insurmontables, et une solution exacte décrivant bien le problème étudié n'est pas toujours facile à trouver. Le recours aux modèles physiques et à la simulation expérimentale pour la recherche d'une solution analogue à la solution recherchée peut s'avérer coûteuse en temps et en moyens.

Avec les progrès enregistrés dans le domaine de l'informatique et les performances des ordinateurs de plus en plus grandes, il est devenu possible de résoudre des systèmes d'équations différentielles très complexes. Plusieurs techniques de résolution numérique ont été ainsi

développées et appliquées avec succès pour avoir des solutions satisfaisantes à des problèmes d'ingénierie très variés.

La méthode des éléments finis est l'une des techniques numériques les plus puissantes. L'un des avantages majeurs de cette méthode est le fait qu'elle offre la possibilité de développer un programme permettant de résoudre, avec peu de modifications, plusieurs types de problèmes. En particulier, toute forme complexe d'un domaine géométrique où un problème est bien posé avec toutes les conditions aux limites, peut être facilement traité par la méthode des éléments finis.

Cette méthode consiste à diviser le domaine physique à traiter en plusieurs sous domaines appelés éléments finis à dimensions non infinitésimales. La solution recherchée est remplacée dans chaque élément par une approximation avec des polynômes simples et le domaine peut ensuite être reconstitué avec l'assemblage ou sommation de tous les éléments (Seghir, 2014).

III.6.1 Historique

La méthode des éléments finis est le fruit de deux domaines de recherche : Les mathématiques et les sciences de l'ingénieur.

Mathématique : Outils qui remontent jusqu'aux résidus pondérés de Gauss (1775), Galerkin (1915) et Biezenokoch (1923), ainsi qu'aux méthodes variationnelles de Rayleigh (1870) et Ritz (1909).

Sciences de l'ingénieur : Dont la contribution a débuté dans les années quarante avec Hrenikoff (1941), Henry (1943) et Newmark (1949) qui touchèrent pour la première fois aux structures continues, en faisant une approximation sur des portions de petites dimensions dans un problème continu d'une barre longue. D'où l'idée de base des éléments finis. Argyris (1955), Turner (1956), Glough (1956) et Martin (1956) ont fait une analogie directe en adoptant un comportement simplifié pour des petites portions : ils représentent un milieu continu élastique à deux dimensions par un assemblage de panneaux triangulaires, sur lesquels les déplacements sont supposés variés linéairement comme pour chaque barre ou poutre du système discret : chaque panneau est décrit par une matrice de rigidité et l'assemblage donnait la rigidité globale du milieu continu. D'où la naissance d'éléments finis avec "panneaux" comme nom.

Argyris et Kelsy (1960) utilisent la notion d'énergie dans l'analyse des structures et font appel à des méthodes mathématiques (résidus pondérés, principes variationnels ...).

Le terme " élément fini " est utilisé pour la première fois par Glough (1960), et dès lors, il y a un développement rapide de la méthode.

Dans les années soixante ; Zienkiwicz (1965), De Arante (1968), Oliviera (1968), Green (1969), Tones (1969), Lay (1969), Storne (1969), et Finlayson (1975) ont reformulé la méthode à partir de considérations énergétiques et variationnelles sous forme générale de résidus pondérés, d'où le modèle mathématique de la MEF. En 1969 la MEF est reconnue comme un outil général de résolution d'EDP, et utilisée pour résoudre des problèmes non linéaires et non stationnaires dans plusieurs domaines.

En mécanique des fluides, la résolution des équations de Navier Stokes incompressibles par éléments finis en utilisant la formulation vitesse – pression a commencé dans les années 1970.

L'idée de base de la méthode des éléments finis repose sur une discrétisation de l'espace fonctionnel dans lequel le problème continu est posé. A partir du problème initial écrit sous forme variationnelle (ou faible) dans un espace fonctionnel de dimension infinie, il s'agit de chercher une caractérisation d'une solution approchée, choisie dans un sous espace de dimension finie. La méthode des élément finis peut être appliquée pour résoudre des équations aux dérivée ordinaire par la méthode de Rayleigh-Ritz, colocation et de Galerkin ,et pour résoudre des équations aux dérivée partielles telles que l'équation de Poisson et l'équation de diffusion. Tous ce qui concerne la méthode des éléments finis sont illustré dans la figure (II.2) ce dessous.

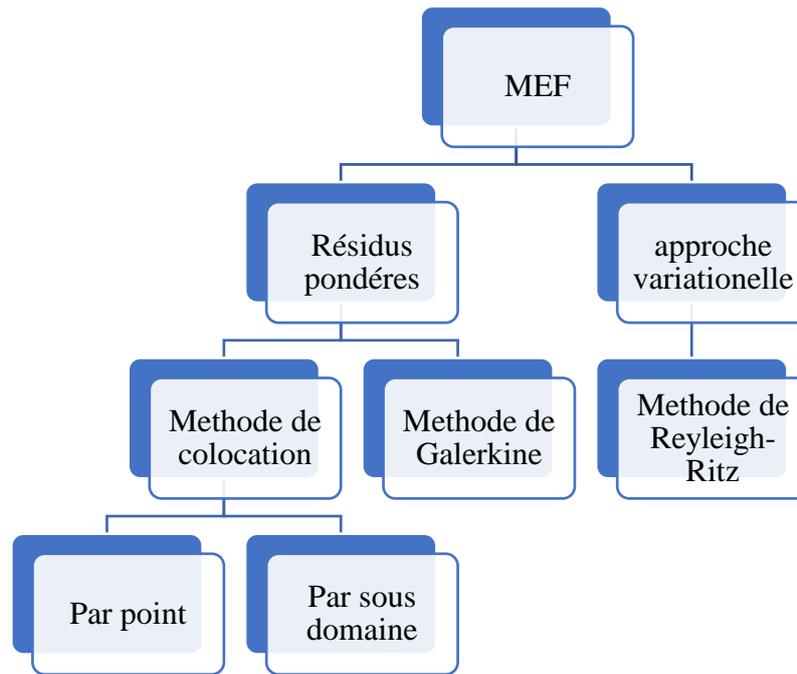


Figure (III.2) : organigramme la MEF (Hoffman, 2001).

Le concept qui sous-entend l'extension de la base de l'approche Rayleigh-Ritz ou l'approche des résidus pondérés de Galerkin à l'approche par éléments finis est illustré sur la figure (II.3). La figure (II.3a) illustre le domaine de la solution globale $D(x)$.

La fonctionnelle $I[C_i]$ de l'approche de Rayleigh-Ritz, ou l'intégrale résiduelle pondérée $I(C_i)$ de l'approche des résidus pondérés de Galerkin, s'applique à l'ensemble du domaine de la solution globale $D(x)$.

La figure (II.3b) illustre la solution globale discrétisée le domaine $D(x)$ qui est discrétisée en I nœud et $I - 1$ éléments. Notez que le symbole I étant utilisée pour la fonctionnelle $I[C_i]$, l'intégrale pondérée $I(C_i)$, et le nombre de nœuds. L'indice (i) désigne les points de la grille, ou nœuds, et l'exposant (i) indique l'élément. L'élément (i) commence au nœud i et se termine au nœud $i + 1$. Les longueurs d'élément (c'est-à-dire, la grille incréments) sont $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$.

La figure (III.3c) illustre la discrétisation de l'intégrale globale I dans la somme des intégrales discrétisées $I^{(i)}$ ($i = 1, 2 \dots I - 1$). Chaque intégrale discrétisée $I^{(i)}$ sur la figure (II.3c) est évaluée exactement comme l'intégrale globale I dans la figure (II.3a). Ce processus donne ensemble d'équation reliant les valeurs nodales dans chaque élément, que l'on appelle les équations nodales.

L'intégrale globale $I = \sum I^{(i)}$ pourrait être différenciée directement par rapport à (C_i) dans une étape en différenciant toutes les intégrales d'élément individuels (c'est-à-dire, $\frac{\partial I^i}{\partial C_i}$)

et résumer les résultats. Cette approche produirait immédiatement des équations pour I nœuds de valeurs C_i . cependant, l'algèbre est considérablement simplifiée en différenciant une seule intégrale discrétisée générique $I^{(i)}$ par rapport à tout C_i . ces équations sont appelées les équations d'éléments. Cet ensemble complet des équations d'éléments est appelée système d'équation.

L'équation de système est ajustée pour tenir compte des conditions aux limites, et résolue pour les valeurs nodales $(C_i)(i = 1, 2 \dots I - 1)$.

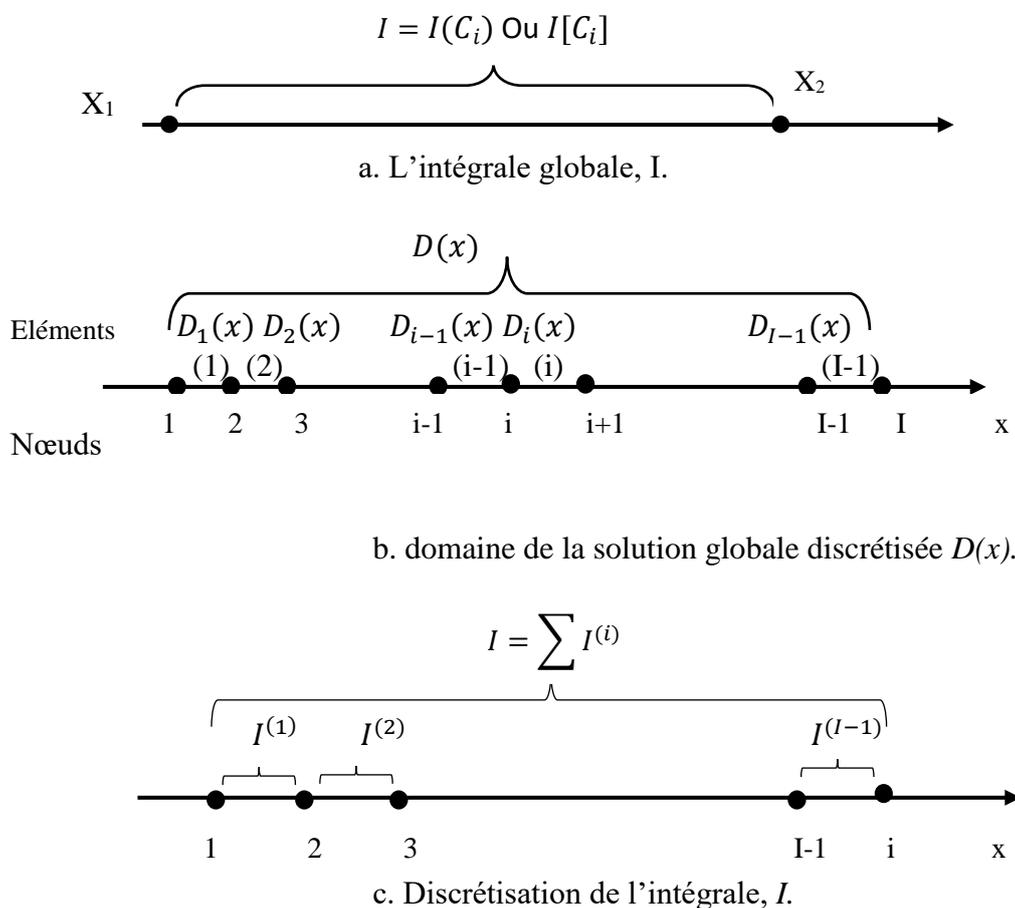


Figure (III.3) : discrétisation en élément finis.

La procédure générale de résolution par éléments finis est donnée par les étapes suivantes (Hoffman, 2001) :

1. Formuler le problème, si l'approche de Rayleigh Ritz doit être utilisée, pour trouver la fonctionnelle I à extraire, si l'approche des résidus pondérés de Galerkin doit être utilisée, déterminer l'équation différentielle à résoudre.
2. Discrétiser le domaine de solution globale $D(x)$ en sous domaine (c'est-à-dire en éléments). $D_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, I$). Spécifier le type d'élément à utilisée (c'est-à-dire, linéaire quadratique, etc.).
3. Supposer la forme fonctionnelle de la solution approximative. $y(x)$ dans chaque élément, et choisir les fonctions d'interpolation pour les éléments.
4. Pour le modèle Rayleigh-Ritz, substituer l'approximation solution $y(x)$ dans la fonctionnelle I pour déterminer $I[C_i]$. pour l'approche de résidus pondérés de Galerkin, substituer la solution approximative $y(x)$ dans l'équation différentielle et déterminer le résidus $R(x)$ avec les fonctions de pondération $\psi_j(x)$ et former l'intégrale résiduelle pondérée $I(C_i)$.
5. Déterminer les équations des éléments. Pour l'approche Rayleigh-Ritz, évaluer les dérivées partielles de la fonctionnelle $I[C_i]$, par rapport aux valeurs nodale C_i , et les assimiler à zéros. Pour l'approche des résidus pondérés de Galerkin, évaluer les dérivées partielles de l'intégrale résiduelle pondérée $I(C_i)$ par rapport aux valeurs nodales C_i et les égalent à zéros.
6. Assembler les équations des éléments pour déterminée l'équations du système.
7. Ajustez l'équations du système pour prendre en compte les conditions aux limites.
8. Ressoudre le système d'équation ajusté pour les valeurs nodales C_i .

D'où la discrétisation du domaine de la solution globale et la spécification du polynôme d'interpolation sont réalisée de la même manière pour l'approche Rayleigh-Ritz et l'approche des résidus pondérée par Galerkin.

III.6.2 Discrétisation du domaine et polynôme d'interpolation

Nous allons discrétiser le domaine de la solution globale $D(x)$ en nœuds I et en élément $I - 1$, comme illustrée sur la figure (III.4). En admettant que le problème peut être formulée initialement par une équation différentielle ordinaire avec les conditions aux limites appropriées, on a :

$$\bar{y}'' + Q\bar{y} = F \quad (\text{III.27})$$

Où : $Q = Q(x)$ et $F = F(x)$

Supposons que la solution globale exacte $\bar{y}(x)$ soit approximée par la valeur globale de la solution approximative $y(x)$ qui est la somme d'une série de polynômes d'interpolation locaux $y^i(x) = (i=1,2,\dots,I-1)$ qui sont valables dans chaque élément. La solution approchée donnée par :

$$y(x) = y^{(1)}(x) + y^{(2)}(x) + \dots + y^{(I-1)}(x) = \sum_{i=1}^{I-1} y^{(i)}(x) \quad (\text{III.28})$$

Sachant que les polynômes locaux $y^i(x)$ sont définis comme suit :

$$y^{(i)}(x) = y_i N_i^{(i)}(x) + y_{i+1} N_{i+1}^{(i)}(x) \quad (\text{III.29})$$

Où y_i et y_{i+1} sont les valeurs de $y(x)$ aux nœuds i et $i+1$, respectivement, et $N_i^{(i)}(x)$ et $N_{i+1}^{(i)}(x)$ sont des polynômes linéaire dans l'élément (i) . L'indice i désigne le point de grille, Ou $N_i^{(i)}(x) = 1, 0$, et l'exposant (i) désigne l'élément dans lequel $N_i^{(i)}(x)$ s'applique. Les polynômes d'interpolation sont généralement appelés fonction de forme dans la littérature des éléments finis (Belegundu & Chandrupalta, 2002).

Les fonctions de formes sont définies pour être unité à leurs respectifs nœud, zéros aux autres nœuds, et zéro partout en dehors de leur élément. Ainsi, $y^i(x_i) = y_i$, les y_i représentent la solution aux nœuds, la figure (II.5) illustre les fonctions de forme linéaire pour l'élément (i) .

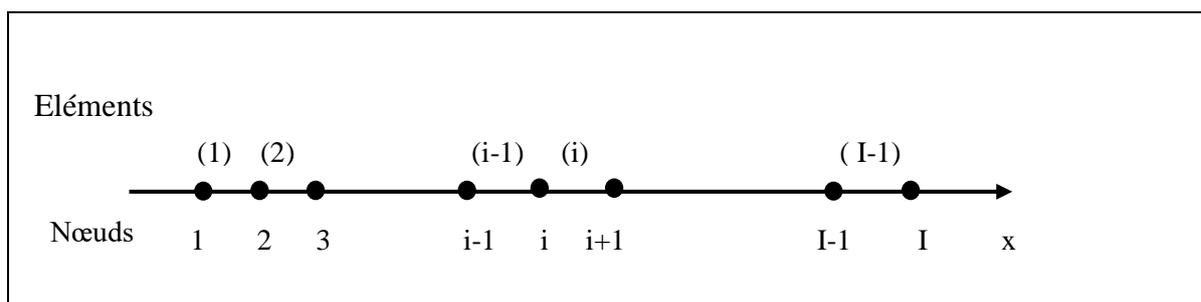


Figure (III.4) : Domaine de solutions globales discrètes.

De la figure (III.4) , On obtient :

$$N_i^{(i)}(x) = \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} = \frac{x_{i+1} - x}{\Delta x_i} \quad (\text{III.30})$$

$$N_{i+1}^{(i)} = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{x - x_i}{\Delta x_i} \quad (\text{III.31})$$

En substituant les équations (III.30) et (III.31). Dans l'équation (III.29), on obtient :

$$y^{(i)}(x) = y_i \left(\frac{x_{i+1} - x}{\Delta x_i} \right) + y_{i+1} \left(\frac{x - x_i}{\Delta x_i} \right) \quad (\text{II.32})$$

L'équation (III.29) est en fait un polynôme linéaire de Lagrange appliqué à l'élément(i).

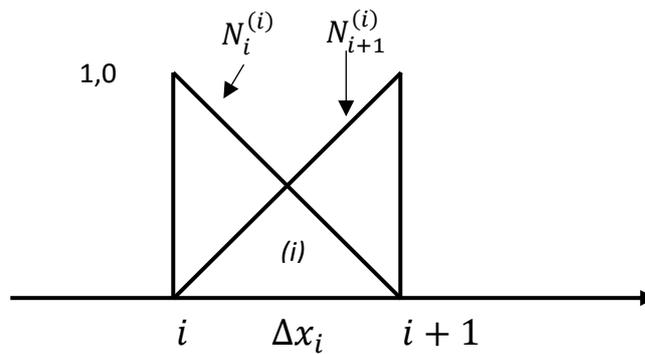


Figure (III.5) : la fonction de forme linéaire pour l'élément(i).

Les deux fonctions de formes peuvent s'écrire sous forme des polynômes de Lagrange :

$$N_i^{(i)}(x) = \prod_{i \neq j} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad (\text{III.33})$$

Le polynôme d'interpolation représenté dans l'équation (III.32) est un polynôme linéaire, et l'élément correspondant est appelé un élément linéaire. Ainsi, il y'a $(I-1)$ éléments, il y'a 2 $(I-1)$ Fonctions de forme dans le domaine de la solution globale $D(x)$ Le 2 $(I-1)$ forme des fonctions dans l'équation (III.30) et (III.31) forment ensemble linéairement indépendant.

III.7 Méthode de Galerkin

La méthode des résidus pondérés de Galerkin est basée sur l'intégrale du résidu sur le domaine d'intérêt (géométrique). En fait, le résidu $R(x)$ est pondérée sur le domaine d'intérêt en multipliant $R(x)$ par des fonction de pondération $\psi_j(x)(j=1,2,\dots)$, intégrant les résidus pondérés sur la plage d'intégration, mettant les intégrales des résidus pondérés égalent à zéros donnent des équations pour l'évaluation des coefficients C_i des fonctions de base $y_i(x)$ (Belegundu & Chandrupalta, 2002).

Galerkin a montré que les fonctions de pondération $\psi_j(x)$ sont basées sur les fonctions de base $y_i(x)$ de la solution approximative $y(x)$ donnent des résultats exceptionnelement bons.

Ce choix est présentée dans l'analyse suivante.

Les étapes de la méthode de Galerkin sont les suivantes (Hoffman, 2001) :

- Déterminer l'équation différentielle à résoudre, par exemple équation (III.27)
- Supposer que la forme fonctionnelle de la solution d'approximation $y(x)$ est donnée par :

$$\bar{y}(x) \approx y(x) = \sum_{i=1}^I C_i y_i(x) \quad (\text{III.34})$$

Choisir la forme fonctionnelle des fonctions de base $y_i(x)$ et s'assurer qu'elles sont linéairement indépendantes et satisfassent les conditions aux limites.

- Introduire la solution d'approximation $y(x)$ dans l'équation différentielle et définir le résidu $R(x)$:

$$R(x) = y'' + Qy - F \quad (\text{III.35})$$

- Choisir les fonctions de pondération $\psi_j(x)(j=1,2,\dots)$,
- Définir les intégrales des résidus pondérés $\psi_j(x)R(x)$ égale a zéros

$$\int_{x_1}^{x_2} \psi_j(x) R(x) dx = 0, (j=1,2,\dots) \quad (\text{III.36})$$

- Intégrer l'équation (2) et ressoudre système d'intégrales des résidus pondérés pour les coefficients $C_i (i = 1, 2, \dots, I)$.

Pour illustrer la méthode des résidus pondérés de Galerkin, appliquons-la pour résoudre le problème de valeur aux limites spécifié par l'équation (III.27) avec les conditions spécifiques donnée par $\bar{y}(0,0) = 0,0$ et $\bar{y}(1,0) = Y$, et on suit les étapes ci-dessous :

- **Etape 1.** L'équation différentielle à résoudre est donnée par l'équation (III.27).
- **Etape 2.** Supposer que la forme fonctionnelle des solutions d'approximation $y(x)$ donnée par l'équation :

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + C_3 y_3(x) = C_1 x + C_2 x(x-1) + C_3 x^2(x-1) \quad (\text{III.37})$$

Les trois fonctions de base dans (III.35) sont linéairement indépendant. En appliquant les conditions aux limites on obtient $C_1 = Y$. ainsi, la solution approchée est donnée par :

$$y(x) = Yx + C_2 x(x-1) + C_3 x^2(x-1) \quad (\text{III.38})$$

- **Etape 3.** Définir le résidu $R(x)$:

$$R(x) = y'' + Qy - F \quad (\text{III.39})$$

De l'équation (III.38), on trouve :

$$y'' = 2C_2 + C_3(6x - 2) \quad (\text{III.40})$$

La substitution des équations (III.38) et (III.40) dans l'équation (III.39) donne :

$$R(x) = 2C_2 + C_3(6x - 2) + Q[Yx + C_2 x(x-1) + C_3 x^2(x-1)] - F \quad (\text{III.41})$$

- **Etape 4.** Choisir deux fonctions de pondération $\Psi_2(x)$ et $\Psi_3(x)$. soit

$\Psi_2(x) = y_2$ et $\Psi_3(x) = y_3$, ainsi on a l'équation ainsi :

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + C_3 y_3(x) = C_1 x + C_2 x(x-1) + C_3 x^2(x-1) \quad (\text{III.42})$$

Donc :

$$\Psi_2(x) = x(x-1) \text{ Et } \Psi_3(x) = x^2(x-1) \quad (\text{III.43})$$

- **Etape 5.** Définir les intégrales des résidus pondérés égales à zéro. Ainsi donc :

$$\int_0^1 x(x-1)[2C_2 + C_3(6x-2) + Q[Yx + C_2x(x-1) + C_3x^2(x-1)] - F].dx = 0 \quad (\text{III.44})$$

$$\int_0^1 x^2(x-1)[2C_2 + C_3(6x-2) + Q[Yx + C_2x(x-1) + C_3x^2(x-1)] - F].dx = 0 \quad (\text{III.45})$$

Les fonctions $Q(x) = Q$ et $F(x) = F$ doivent être substituées dans l'équation (III.41) avant d'intégrer.

- **Etape 6.** Intégrer l'équation (III.44) et (III.45), Pour $Q =$ constante,

$F =$ constante, après évaluation des résultats, et collection de termes, le résultat final est :

$$C_2\left(\frac{1}{3} - \frac{Q}{30}\right) + C_3\left(\frac{1}{6} - \frac{Q}{60}\right) = \frac{-QY}{12} + \frac{FQ}{6} \quad (\text{III.46})$$

$$C_2\left(\frac{1}{6} - \frac{Q}{60}\right) + C_3\left(\frac{2}{15} - \frac{Q}{105}\right) = \frac{-QY}{20} + \frac{FQ}{12} \quad (\text{III.47})$$

La résolution de ces deux équations nous donne les valeurs de C_2 et C_3 ,

$$C_2 = \frac{Q(30F - 10Y + 2QY - 5FQ)}{(Q-6)(Q-10)} \quad (\text{III.48})$$

$$C_3 = \frac{Q}{(Q-6)}(Y) \quad (\text{III.49})$$

Et la substitution de ces dernier dans l'équation (II.25) permet d'obtenir l'approximation $y(x)$.

III.8 MEF par la méthode de Galerkin

L'approche des résidus pondérés de Galerkin est également la méthode la plus simple comparativement aux autres, puisqu'il n'est pas nécessaire de la fonctionnelle correspondante à l'EDO aux limites. la méthode d'élément fini est basée sur l'approche de Galerkin est illustrée dans cette section, en l'appliquant pour résoudre le problème aux limites linéaire donnée par l'équation (III.27).

Le résidu $R(x)$ donnée par l'équation (III.35) est multiplié par un ensemble de facteurs de pondération $\psi_j(x)$ ($j = 1, 2, \dots$), et intégrer sur le domaine globale $D(x)$.

Pour obtenir l'intégrale pondérée donnée par :

$$I(y(x)) = \int_a^b \psi_j(x) R(x) dx \quad (\text{III.50})$$

En remplaçant l'équation (II.22) dans l'équation (II.35), on trouve :

$$I(y(x)) = \int_a^b \psi_j(x) (y' + Qy - F) dx \quad (\text{II.51})$$

On intègre le premier membre de l'équation (II.36), on obtient :

$$\begin{aligned} \int_a^b \psi_j(x) (y'') dx &= - \int_a^b \psi_j'(x) y' dx + [\psi_j y']_a^b \\ &= - \int_a^b \psi_j'(x) (y') dx + y_b' \Psi_{j_b} - y_a' \Psi_{j_a} \\ &= - \int_a^b \psi_j'(x) (y') dx + y_b' \Psi_j(b) - y_a' \Psi_j(a) \end{aligned} \quad (\text{III.52})$$

Les deux derniers termes de l'équation (III.52) impliquant la dérivée aux point limites. Pour condition aux limites de Dirichlet, ces termes ne sont pas nécessaires.

Pour la condition de Neumann, ces deux termes introduisent les conditions de dérivée aux limites du domaine de la solution globale. En substituant l'équation (III.52) dans l'équation (III.51), on obtient :

$$I(y(x)) = \int_a^b (-y' \Psi_j' + \Psi_j Qy - \Psi_j F) dx + y_b' \Psi_j(b) - y_a' \Psi_j(a) = 0 \quad (\text{III.53})$$

En termes de solution approximative globale $y(x)$ et du domaine de solution globale discrétisée illustrée sur la figure (III.4), l'équation (III.53) peut s'écrire comme suit :

$$I(y(x)) = I^{(1)}(y(x)) + I^{(2)}(y(x)) + I^{(3)}(y(x)) + \dots + I^{(i-1)}(y(x)) + I^{(i)}(y(x)) + \dots + I^{(I-1)}(y(x)) + y'_b \Psi'_j(b) - y'_a \Psi'_j(a) = 0 \quad (\text{III.54})$$

D'où $I^{(i)}(y(x))$ et donnée par :

$$I^{(i)}(y(x)) = \int_{x_1}^{x_2} (-y' \frac{d[\Psi_j(x)]}{dx} + \Psi_j Qy - \Psi_j F) dx = 0 \quad (\text{III.55})$$

Où $y^{(i)}(x)$ est le polynôme d'interpolation et $\Psi_j(x)$ indique les fonctions de pondération applicable à l'élément (i). Le polynôme d'interpolation $y^i(x)$ est donné par l'équation (III.29), avec les fonctions de formes $N_i^{(i)}(x)$ et $N_{i+1}^{(i)}(x)$ sont donnée par l'équation (III.30) et (III.31). dans l'approche des résidus pondérée de Galerkin, les fonction de pondérations $\Psi_j(x)$ sont choisi être les fonction de forme $N_i^{(i)}(x)$ et $N_{i+1}^{(i)}(x)$ Rappelons que ces deux dernier sont nulles partout à l'extérieure de l'élément(i).

Sachant que $\Psi_j = N_i^{(i)}(x)$, en remplaçant dans l'équation (III.55) et on obtient :

$$I^{(i)}(y(x)) = \int_{x_1}^{x_2} (-y' \frac{d[N_i^{(i)}(x)]}{dx} + N_i^{(i)}(x) Qy - N_i^{(i)}(x) F) dx = 0 \quad (\text{III.56})$$

De même $\Psi_j = N_{i+1}^{(i)}(x)$, en remplaçant dans l'équation (III.55) et on obtient :

$$I^{(i)}(y(x)) = \int_{x_1}^{x_2} (-y' \frac{d[N_{i+1}^{(i)}(x)]}{dx} + N_{i+1}^{(i)}(x) Qy - N_{i+1}^{(i)}(x) F) dx = 0 \quad (\text{III.57})$$

Les équations (III.56) et (III.57) sont des équations d'éléments pour l'élément (i). Une autre approche est basée sur la fonction $N_i^{(i)}(x)$ illustrée dans la figure (III.6). Ainsi :

$$N_i^{(i)}(x) = N_i^{(i-1)}(x) + N_i^{(i)}(x) \quad (\text{III.58})$$

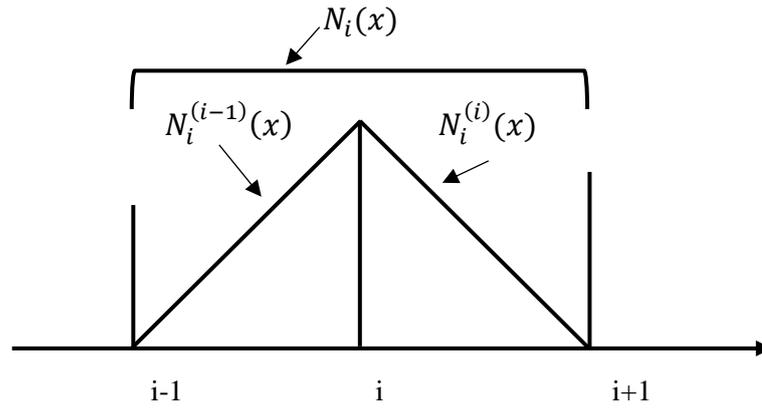


Figure (III.6) : la fonction de forme linéaire pour le nœud i .

L'équation (III.58) exprime simplement le fait que $N_i^{(i)}(x) = N_i^{(i-1)}(x)$ dans l'élément (i-1) et $N_i^{(i)}(x) = N_i^{(i)}(x)$ dans l'élément (i). On prend $N_i^{(i)}(x) = \Psi_j(x)$ et remplaçant dans l'équation (II.38), on aboutit à une fonction pour le nœud i , donne :

$$I(y(x)) = \int_{x_1}^{x_2} \left(-y' \frac{d[N_i^{(i-1)}(x)]}{dx} + N_i^{(i-1)}(x) Qy - N_i^{(i-1)}(x) F \right) dx + \int_{x_1}^{x_2} \left(-y' \frac{d[N_i^{(i)}(x)]}{dx} + N_i^{(i)}(x) Qy - N_i^{(i)}(x) F \right) dx = 0 \quad (\text{III.59})$$

Donc l'équation (III.30) et (III.31) on trouve les dérivées des fonctions de formes sont :

$$\frac{d[N_i^{(i)}(x)]}{dx} = -\frac{1}{\Delta x_i} \quad (\text{III.60})$$

$$\frac{d[N_{i+1}^{(i)}(x)]}{dx} = \frac{1}{\Delta x_i} \quad (\text{III.61})$$

En substituant les équations (III.60) et (III.61) dans les équations (III.56) et (III.57) respectivement, on obtient :

$$\frac{1}{\Delta x_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} y' dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} N_i^{(i)} Qy dx - \int_{x_i}^{x_{i+1}} N_i^{(i)} F dx = 0 \quad (\text{III.62})$$

$$-\frac{1}{\Delta x_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} y' dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} N_{i+1}^{(i)} Qy dx - \int_{x_i}^{x_{i+1}} N_{i+1}^{(i)} F dx = 0 \quad (\text{III.63})$$

L'équation (III.62) nécessite les fonctions $y(x)$, $y'(x)$, $N_i^{(i+1)}(x)$, $N_{i+1}^i(x)$ qui sont donnée par les équations (III.32), (III.30) et (III.31), substituer toutes ces expressions dans l'équation (III.62), et évaluant $Q(x)$, $F(x)$ comme des valeurs moyennes pour chaque élément on obtient :

$$\bar{Q}^{(i)} = \frac{Q_i + Q_{i+1}}{2} \quad (\text{III.64})$$

$$\bar{F}^{(i)} = \frac{F_i + F_{i+1}}{2} \quad (\text{III.65})$$

L'intégration et l'évaluation des résultats aux limites d'intégration donnent les équations à deux éléments :

$$-y_i \left(\frac{1}{\Delta x_i} - \frac{\bar{Q}^{(i)} \Delta x_i}{3} \right) + y_{i+1} \left(\frac{1}{\Delta x_i} + \frac{\bar{Q}^{(i)} \Delta x_i}{6} \right) - \frac{\bar{F}^{(i)} \Delta x_i}{2} = 0 \quad (\text{III.66})$$

$$y_i \left(\frac{1}{\Delta x_i} + \frac{\bar{Q}^{(i)} \Delta x_i}{6} \right) - y_{i+1} \left(\frac{1}{\Delta x_i} - \frac{\bar{Q}^{(i)} \Delta x_i}{3} \right) - \frac{\bar{F}^{(i)} \Delta x_i}{2} = 0 \quad (\text{III.67})$$

Les deux équations sont valables pour (III.66) et (III.67) sont valable pour Δx non uniforme. En fixant $\Delta x_i = \Delta x = cst$ en multipliant par Δx , on aura :

$$-y_i \left(1 - \frac{\bar{Q}^{(i)} \Delta x_i^2}{3} \right) + y_{i+1} \left(1 + \frac{\bar{Q}^{(i)} \Delta x_i^2}{6} \right) - \frac{\bar{F}^{(i)} \Delta x_i^2}{2} = 0 \quad (\text{III.68})$$

$$y_i \left(1 + \frac{\bar{Q}^{(i)} \Delta x_i^2}{6} \right) - y_{i+1} \left(1 - \frac{\bar{Q}^{(i)} \Delta x_i^2}{3} \right) - \frac{\bar{F}^{(i)} \Delta x_i^2}{2} = 0 \quad (\text{III.69})$$

Ces deux cas dernière équations sont valable pour Δx uniforme. En substituant les équations des éléments pour une grille uniforme, équations (III.68) et (III.69). En les appliquant pour l'élément (i-1),

On obtient :

$$-y_{i-1} \left(1 - \frac{\bar{Q}^{(i-1)} \Delta x_i^2}{3} \right) + y_{i+1} \left(1 + \frac{\bar{Q}^{(i-1)} \Delta x_i^2}{6} \right) - \frac{\bar{F}^{(i-1)} \Delta x_i^2}{2} = 0 \quad (\text{III.70})$$

$$y_{i-1} \left(1 + \frac{\bar{Q}^{(i-1)} \Delta x_i^2}{6} \right) - y_{i+1} \left(1 - \frac{\bar{Q}^{(i-1)} \Delta x_i^2}{3} \right) - \frac{\bar{F}^{(i-1)} \Delta x_i^2}{2} = 0 \quad (\text{III.71})$$

Et pour l'élément (i) on obtient les même que (III.68) et (III.69), l'addition des équation (III.71) et (III.60) donne l'équation nodale pour le nœud i. Ainsi :

$$y_{i-1} \left(1 + \frac{\bar{Q}^{(i-1)} \Delta x_i^2}{6} \right) - 2y_i \left(1 - \frac{\bar{Q}^{(i-1)} + \bar{Q}^{(i)} \Delta x_i^2}{6} \right) + y_{i+1} \left(1 + \frac{\bar{Q}^{(i)} \Delta x_i^2}{6} \right) = \left(\frac{\bar{F}^{(i-1)} + \bar{F}^{(i)}}{2} \right) \quad (\text{III.72})$$

III.9 Application au cas du canal avec apport latéral

Soit l'équation qui caractérise l'écoulement avec apports latéraux s'écrivant sous la forme :

$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, avec la méthode de Galerkin on écrit :

$$\frac{dy}{dx} - f(x, y) = R \quad (\text{III.73})$$

En écrivant l'équation dans le domaine Ω , on aura :

$$\int_{\Omega} RN_i d\Omega = 0 \quad (\text{III.74})$$

Pour l'élément :

$$\int_{x_i}^{x_j} \left[\frac{dy}{dx} - f(x, y) \right] N_i dx = 0 \quad i = 1, 2 \quad (\text{III.75})$$

Sachant que :

$$y = N_1 y_1 + N_2 y_2; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dN_1}{dx} y_1 + \frac{dN_2}{dx} y_2 \quad (\text{III.76})$$

D'où :

$$\int_{x_i}^{x_j} \left[\frac{dN_1}{dx} y_1 + \frac{dN_2}{dx} y_2 - f(x, y) \right] N_i dx = 0 \quad (\text{III.77})$$

Pour le nœud $i=1$:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{dN_1}{dx} y_1 + \frac{dN_2}{dx} y_2 \right] N_1 dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y) N_1 dx \quad (\text{III.78})$$

Pour le nœud $i=2$:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{dN_1}{dx} y_1 + \frac{dN_2}{dx} y_2 \right] N_2 dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y) N_2 dx \quad (\text{III.79})$$

Donc on peut écrire sous forme matricielle :

$$\int_{x_1}^{x_2} \begin{bmatrix} N_1 \frac{dN_1}{dx} & N_1 \frac{dN_2}{dx} \\ N_2 \frac{dN_1}{dx} & N_2 \frac{dN_2}{dx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} dx = \int_{x_1}^{x_2} \begin{bmatrix} f(x, y) N_1 \\ f(x, y) N_2 \end{bmatrix} dx \quad (\text{III.80})$$

Ayant :

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dx} = -\frac{1}{\Delta x} \\ \frac{dN_2}{dx} = +\frac{1}{\Delta x} \end{cases} \quad (\text{III.81})$$

D'où l'on déduit la matrice de rigidité de l'élément :

$$K_{ij} = \int_{x_1}^{x_2} \begin{bmatrix} -\frac{N_1}{\Delta x} & \frac{N_1}{\Delta x} \\ -\frac{N_2}{\Delta x} & \frac{N_2}{\Delta x} \end{bmatrix} dx \quad (\text{III.82})$$

En intégrant les termes de la matrice on obtient :

$$\begin{cases} \int_{x_1}^{x_2} \frac{-N_1}{\Delta x} dx = -\frac{1}{2} \\ \int_{x_1}^{x_2} \frac{N_1}{\Delta x} dx = +\frac{1}{2} \\ \int_{x_1}^{x_2} \frac{-N_2}{\Delta x} dx = -\frac{1}{2} \\ \int_{x_1}^{x_2} \frac{N_2}{\Delta x} dx = +\frac{1}{2} \end{cases} \quad (\text{III.83})$$

Donc, la matrice élémentaire écrit comme suit :

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \int_{x_1}^{x_2} \begin{bmatrix} f(x, y)N_1 \\ f(x, y)N_2 \end{bmatrix} dx \quad (\text{III.84})$$

❖ Pour le calcul de l'intégrale $\int_{x_1}^{x_2} f(x, y)N_i dx$.

Pour approximation linéaire on a $f(x, y) = f_i + \frac{x}{\Delta x}(f_{i+1} - f_i)$

$$f(x, y) = f_i \left(1 - \frac{x}{\Delta x}\right) + \left(\frac{x}{\Delta x}\right) f_{i+1} \quad (\text{III.85})$$

Qui est sous la forme $f(x, y) = N_1 F_1 + N_2 F_2$,

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} f(x, y)N_1 dx &= \int_{x_1}^{x_2} (N_1 F_1 + N_2 F_2)N_1 dx = \int_{x_1}^{x_2} \left[F_1 \left(1 - \frac{x}{\Delta x}\right) + F_2 \left(\frac{x}{\Delta x}\right) \right] N_1 dx \\ &= \frac{F_1}{\Delta x} \left[\int_{x_1}^{x_2} \Delta x N_1 dx - \int_{x_1}^{x_2} x N_1 dx \right] + \frac{F_2}{\Delta x} \int_{x_1}^{x_2} x N_1 dx \end{aligned} \quad (\text{III.86})$$

En tirant $\int_{x_1}^{x_2} \Delta x N_1 dx$ comme facteur, on aura :

$$\frac{F_1}{\Delta x} \int_{x_1}^{x_2} \Delta x N_1 dx \left[1 - \frac{\int_{x_1}^{x_2} x N_1 dx}{\int_{x_1}^{x_2} \Delta x N_1 dx} \right] + \frac{F_2}{\Delta x} \int_{x_1}^{x_2} \Delta x N_1 dx \frac{\int_{x_1}^{x_2} x N_1 dx}{\int_{x_1}^{x_2} \Delta x N_1 dx} \quad (\text{III.87})$$

En Ponson $\theta = \frac{\int_{x_1}^{x_2} x N_1 dx}{\int_{x_1}^{x_2} \Delta x N_1 dx}$ (facteur de pondération)

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x, y)N_1 dx = \frac{F_1}{\Delta x} \int_{x_1}^{x_2} \Delta x N_1 dx [1 - \theta] + \frac{F_2}{\Delta x} \theta \int_{x_1}^{x_2} \Delta x N_1 dx \quad (\text{III.88})$$

Ils nous restent à calculer $\int_{x_1}^{x_2} \Delta x N_1 dx$ et $\int_{x_1}^{x_2} x N_1 dx$.

$$\int_{x_1}^{x_2} x N_1 dx = \int_{x_1}^{x_2} \left[x - \frac{x^2}{\Delta x} \right] dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3\Delta x} \right]_{x_1}^{x_2} \quad (\text{III.89})$$

Après intégration et simplification on aura :

$$\int_{x_1}^{x_2} x N_1 dx = \frac{\Delta x^2}{6} \quad (\text{III.90})$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \Delta x N_1 dx = \int_{x_1}^{x_2} \left[1 - \frac{x}{\Delta x} \right] \Delta x dx = \Delta x \left[x - \frac{x^2}{2\Delta x} \right]_{x_1}^{x_2} \quad (\text{III.91})$$

Après simplification et intégration :

$$\int_{x_1}^{x_2} \Delta x N_1 dx = \frac{\Delta x^2}{2} \quad (\text{III.92})$$

Donc, $\theta = \frac{1}{3}$.

$$\frac{F_1}{\Delta x} \frac{\Delta x^2}{2} [1 - \theta] + \frac{F_2}{\Delta x} \theta \frac{\Delta x^2}{2} = \frac{\Delta x}{2} F_1 [1 - \theta] + [\theta] \frac{\Delta x}{2} F_2 \quad (\text{III.93})$$

Avec $\theta = \frac{1}{3}$.

$$\frac{\Delta x}{2} F_1 \left[1 - \frac{1}{3} \right] + \left[\frac{1}{3} \right] \frac{\Delta x}{2} F_2 = \frac{\Delta x}{2} \left[\frac{2}{3} F_1 + \frac{1}{3} F_2 \right] \quad (\text{III.94})$$

Alors :

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x, y) N_1 dx = \frac{\Delta x}{2} \left[\frac{2}{3} F_1 + \frac{1}{3} F_2 \right] \quad (\text{III.95})$$

Avec le même raisonnement on aura :

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x, y) N_2 dx = \frac{\Delta x}{2} \left[\frac{1}{3} F_1 + \frac{2}{3} F_2 \right] \quad (\text{III.96})$$

En regroupant tous ces résultats dans la matrice élémentaire on aura :

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \frac{\Delta x}{6} \begin{bmatrix} 2f_1(x, y) + f_2(x, y) \\ f_1(x, y) + 2f_2(x, y) \end{bmatrix} \quad (\text{III.97})$$

III.10 Conclusion

Dans ce chapitre on a présenté les équations différentielles ordinaires de base qui gouverne l'écoulement à surface libre avec apport latéral qui en résulte lors de l'application du principe conservation de masse et de quantité de mouvement.

En second lieux nous avons exposé l'une des méthodes les plus puissantes de résolution numérique des équations différentielles à débit spatialement varié, qui est la méthode des éléments finis. Par ailleurs une discrétisation par la méthode des éléments finis de Galerkin a été présentée en détail et la mise en application au cas de l'écoulement avec apport latéral. Il nous rester donc de mettre en application et expérimenter ce concept.

Chapitre IV : Résultats et discussion

IV.1 Introduction

Dans ce chapitre nous présenterons les résultats expérimentaux et numériques obtenus pour l'étude nous intéressons plus spécifiquement à la variation de la ligne d'eau tout le long canal, ensuite nous allons faire une comparaison de nos résultats expérimental et numérique avec analytique (Méthode de perturbation) faite par un binôme de l'université de Jijel.

IV.2 Résultats

On a effectué 11 essais aux niveaux du laboratoire d'hydraulique pour avoir une comparaison importante de la ligne d'eau. Avec $m=30\text{Kg}$ pour tous les essais.

Tableau (IV.1) : Les résultats expérimentaux.

N°(essai)	Tmoyen(s)	Qm (Kg/s)	Qv (m ³ /s)
1	10,693	2,805	0,002805
2	10,723	2,798	0,002798
3	10,887	2,756	0,002756
4	10,927	2,746	0,002746
5	11,240	2,669	0,002669
6	11,383	2,635	0,002635
7	11,563	2,594	0,002594
8	12,647	2,372	0,002372
9	16,137	1,859	0,001859
10	35,140	0,854	0,000854
11	57,420	0,522	0,000522

IV.2.1 Résultats pour un Débit Q_1

Tous les résultats obtenus avec les différentes méthodes sont représentés dans les tableaux ci-dessous pour un débit Q_1 :

Tableau (IV.2) : Les résultats expérimentaux pour Q_1 .

Position(m)	Hauteur(m)	Position(m)	Hauteur(m)
0,00014	0,061814	1,219694	0,071001
0,061844	0,060403	1,364089	0,067716
0,095794	0,062389	1,611617	0,069098
0,125969	0,0643	1,820509	0,072348
0,146126	0,063383	2,047144	0,068934
0,182616	0,064104	2,23842	0,071836
0,219629	0,059136	2,421387	0,07019
0,311049	0,061819	2,865176	0,077203
0,348798	0,062564	3,121884	0,081397
0,374803	0,063078	3,347632	0,080596
0,443605	0,06356	3,632893	0,083601
0,481386	0,062553	3,829123	0,090984
0,548558	0,060373	4,143823	0,090187
0,614875	0,059053	4,428355	0,08704
0,691196	0,061437	4,665215	0,07506
0,78002	0,068453	4,788892	0,057338
0,882393	0,068721	4,858581	0,044156
1,038453	0,070051	4,86	0,044156

Tableau (IV.3) : Les résultats avec la méthode de perturbation pour Q_1 .

Position(m)	Hauteur(m)	Position(m)	Hauteur(m)
0,00014	0,0657549	1,219694	0,07125988
0,061844	0,06576936	1,364089	0,07255207
0,095794	0,06578963	1,611617	0,07497683
0,125969	0,06581501	1,820509	0,07716598
0,146126	0,06583584	2,047144	0,07960042
0,182616	0,06588144	2,23842	0,08162565
0,219629	0,06593812	2,421387	0,08346489
0,311049	0,06601663	2,865176	0,08544149
0,348798	0,06612306	3,121884	0,08705612
0,374803	0,06621809	3,347632	0,08818969
0,443605	0,06628988	3,632893	0,08833705
0,481386	0,06650463	3,829123	0,08703266
0,548558	0,06663781	4,143823	0,08493546
0,614875	0,06690106	4,428355	0,07903442
0,691196	0,06719389	4,665215	0,07042707
0,78002	0,06757076	4,788892	0,06040721
0,882393	0,06806196	4,858581	0,05399826
1,038453	0,06869616	4,86	0,044156

Tableau (IV.4) : Les résultats par MEF pour Q_1 .

Position(m)	Hauteur(m)
4,86	0,044156
4,374	0,081106113
3,888	0,0708
3,402	0,0619
2,916	0,0554
2,43	0,0518
1,944	0,0503
1,458	0,0497
0,972	0,0495
0,486	0,0495
0	0,0495

IV.2.2 Résultats pour un Débit Q_2

Tous les résultats obtenus avec les différentes méthodes sont représentés dans les tableaux ci-dessous pour un débit Q_2 :

Tableau (IV.5) : Les résultats expérimentaux pour Q_2 .

Position(m)	Hauteur(m)	Position(m)	Hauteur(m)	Position(m)	Hauteur(m)
0,001558	0,061964	1,901546	0,076451	1,901546	0,076451
0,104472	0,06337	2,049389	0,074382	2,049389	0,074382
0,184943	0,06413	2,226433	0,075189	2,226433	0,075189
0,249743	0,064743	2,494084	0,079884	2,494084	0,079884
0,327696	0,06288	2,7321	0,082999	2,7321	0,082999
0,423414	0,063784	2,941344	0,08281	2,941344	0,08281
0,5001	0,061476	3,148858	0,086504	3,148858	0,086504
0,552171	0,064568	3,24074	0,089971	3,24074	0,089971
0,642371	0,06672	3,339917	0,083111	3,339917	0,083111
0,69952	0,070292	3,404705	0,085022	3,404705	0,085022
0,750359	0,06904	3,527917	0,090086	3,527917	0,090086
0,870662	0,06801	3,565219	0,086972	3,990047	0,087954
0,997736	0,067478	3,692733	0,084711	4,078554	0,09009
1,126944	0,065233	3,762992	0,090574	4,209032	0,087857
1,18916	0,070587	3,826624	0,079911	4,455115	0,088882
1,41782	0,077946	3,863447	0,082859	4,748401	0,069126
1,628788	0,074307	3,892212	0,087029	4,801491	0,053166
1,754149	0,075925	3,926036	0,093847	4,858719	0,0435

Tableau (IV.6) : Les résultats par la méthode de perturbation pour Q_2 .

Position(m)	Hauteur(m)	Position(m)	Hauteur(m)	Position(m)	Hauteur(m)
0,001558	0,05304192	1,41782	0,06416033	3,565219	0,09083044
0,104472	0,05310409	1,628788	0,06740601	3,692733	0,09008254
0,184943	0,0532373	1,754149	0,06944973	3,762992	0,08942511
0,249743	0,05339885	1,901546	0,0719291	3,826624	0,08866753
0,327696	0,05365748	2,049389	0,07446332	3,863447	0,08815531
0,423414	0,05407098	2,226433	0,07750167	3,892212	0,08771618
0,5001	0,05447818	2,494084	0,08192962	3,926036	0,08715487
0,552171	0,05479289	2,7321	0,08547132	3,945624	0,08680712
0,642371	0,05541041	2,941344	0,08806577	3,990047	0,08595517
0,69952	0,05584856	3,148858	0,08995749	4,078554	0,08398545
0,750359	0,05626844	3,24074	0,09052386	4,209032	0,08037518
0,870662	0,05737257	3,339917	0,09091679	4,455115	0,07100439
0,997736	0,05870185	3,404705	0,09103907	4,748401	0,05475176
1,126944	0,06021588	3,527917	0,09094804	4,801491	0,05114098
1,18916	0,06100002	3,565219	0,09083044	4,858719	0,047

Tableau (IV.7) : Les résultats par MEF pour Q_2 .

Position(m)	Hauteur(m)
4,86	0,0435
4,374	0,077341111
3,888	0,0649
3,402	0,0521
2,916	0,0411
2,43	0,0328
1,944	0,0283
1,458	0,0265
0,972	0,0259
0,486	0,0258
0	0,0258

IV.2.3 Résultats pour un Débit Q_3

Tous les résultats obtenus avec les différentes méthodes sont représentés dans les tableaux ci-dessous pour un débit Q_3 :

Tableau (IV.8) : Les résultats expérimentaux pour Q_3 .

Position(m)	Hauteur(m)	Position(m)	Hauteur(m)
0	0,054759	1,476385	0,059429
0,079286	0,055482	1,832139	0,062127
0,194419	0,056012	2,194353	0,063625
0,31732	0,057664	2,493176	0,064308
0,380712	0,05848	2,821766	0,067156
0,454443	0,058073	3,076664	0,076236
0,484195	0,057909	3,27717	0,076295
0,739045	0,059999	3,473859	0,085695
0,890413	0,062659	3,773952	0,082876
0,957677	0,062289	4,08444	0,086989
1,0482	0,058295	4,511196	0,068327
1,168531	0,062291	4,765944	0,055272
1,265538	0,060591	4,856357	0,034969

Tableau (IV.9) : Les résultats par la méthode de perturbation pour Q_3 .

Position(m)	Hauteur(m)	Position(m)	Hauteur(m)
0	0,05940938	1,476385	0,06901487
0,079286	0,05943819	1,832139	0,07354984
0,194419	0,0595833	2,194353	0,07841031
0,31732	0,05987401	2,493176	0,0822309
0,380712	0,06007882	2,821766	0,08576393
0,454443	0,0603638	3,076664	0,08766252
0,484195	0,06049298	3,27717	0,08841379
0,739045	0,06192739	3,473859	0,08833615
0,890413	0,06304796	3,773952	0,08625654
0,957677	0,06360687	4,08444	0,08094704
1,0482	0,06441555	4,511196	0,06681402
1,168531	0,0655858	4,765944	0,05366084
1,265538	0,06660308	4,856357	0,034969

Tableau (IV.10) : Les résultats par MEF Q_3 .

Position(m)	Hauteur(m)
4,86	0,0435
4,374	0,068015351
3,888	0,068933492
3,402	0,069318579
2,916	0,069398914
2,43	0,06930002
1,944	0,069093417
1,458	0,068819883
0,972	0,06850024
0,486	0,068140053
0	0,067730351

IV.2.4 Résultats pour un Débit Q_4

Tous les résultats obtenus avec les différentes méthodes sont représentés dans les tableaux ci-dessous pour un débit Q_4 :

Tableau (IV.11) : Les résultats expérimentaux pour Q_4 .

Position(m)	Hauteur(m)	Position(m)	Hauteur(m)
0	0,056366	2,649904	0,069057
0,076962	0,054487	2,907959	0,071447
0,40766	0,056227	3,261249	0,07768
0,605513	0,050937	3,568091	0,073764
0,742091	0,055586	3,877509	0,076868
0,818527	0,058424	4,092933	0,074943
1,137918	0,056744	4,196887	0,074014
1,464882	0,060865	4,459892	0,07049
1,726695	0,063221	4,69161	0,069593
1,955908	0,062346	4,800455	0,056881
2,096207	0,06344	4,851587	0,032856
2,378059	0,065617	4,86	0,032856

Tableau (IV.12) : Les résultats par la méthode de perturbation pour Q_4 .

Position(m)	Hauteur(m)	Position(m)	Hauteur(m)
0	0,04903792	2,649904	0,08285913
0,076962	0,04907401	2,907959	0,08663162
0,40766	0,05005928	3,261249	0,09004142
0,605513	0,051293	3,568091	0,0905635
0,742091	0,05241996	3,877509	0,08788892
0,818527	0,05314606	4,092933	0,08360892
1,137918	0,05687822	4,196887	0,08070723
1,464882	0,06172754	4,459892	0,07056532
1,726695	0,06618786	4,69161	0,05781863
1,955908	0,07036331	4,800455	0,05043088
2,096207	0,07297822	4,851587	0,032856
2,378059	0,07818426	4,86	0,032856

Tableau (IV.13) : Les résultats par MEF pour Q_4 .

Position(m)	Hauteur(m)
4,86	0,032856
4,374	0,061287779
3,888	0,063501975
3,402	0,064643444
2,916	0,065181042
2,43	0,065371901
1,944	0,065352424
1,458	0,065196439
0,972	0,064941403
0,486	0,064599508
0	0,0641602

IV.2.5 Résultats pour un Débit Q_5

Tous les résultats obtenus avec les différentes méthodes sont représentés dans les tableaux ci-dessous pour un débit Q_5

Tableau (IV.14) : Les résultats expérimentaux Q_5 .

Position(m)	Hauteur(m)	Position(m)	Hauteur(m)
0	0,054703	1,953822	0,060392
0,146139	0,054534	2,117365	0,062479
0,30593	0,052067	2,303377	0,063401
0,48695	0,054134	2,458181	0,065499
0,61803	0,052841	2,886389	0,071835
0,782819	0,053787	3,253415	0,070265
0,867716	0,058246	3,573008	0,073309
1,035001	0,05805	3,963752	0,070572
1,226003	0,056686	4,430656	0,073443
1,34336	0,062247	4,661583	0,054938
1,570564	0,059702	4,783915	0,047956
1,754081	0,061766	4,857555	0,031

Tableau (IV.15) : Les résultats par la méthode de perturbation pour Q_5 .

Position(m)	Hauteur(m)	Position(m)	Hauteur(m)
0	0,04812716	1,953822	0,06930812
0,146139	0,04825674	2,117365	0,07234566
0,30593	0,04869764	2,303377	0,07578557
0,48695	0,04957625	2,458181	0,07856633
0,61803	0,05046165	2,886389	0,08528883
0,782819	0,05186487	3,253415	0,0889349
0,867716	0,05271024	3,573008	0,08950327
1,035001	0,05460876	3,963752	0,08543049
1,226003	0,05712935	4,430656	0,07096966
1,34336	0,05884757	4,661583	0,05880284
1,570564	0,0624891	4,783915	0,05075358
1,754081	0,06567468	4,857555	0,031

Tableau (IV.16) : Les résultats par MEF Q_5 .

Position(m)	Hauteur(m)
4,86	0,031
4,374	0,061484259
3,888	0,063864058
3,402	0,06509922
2,916	0,065686163
2,43	0,065902628
1,944	0,065895409
1,458	0,065743451
0,972	0,065486708
0,486	0,065138297
0	0,064687124

IV.2.6 Résultats pour un Débit Q_6

Tous les résultats obtenus avec les différentes méthodes sont représentés dans les tableaux ci-dessous pour un débit Q_6 :

Tableau (IV.17) : Les résultats par expérimentaux pour Q_6 .

Position(m)	Hauteur(m)	Position(m)	Hauteur(m)	Position(m)	Hauteur(m)
0,002845	0,065656	2,375796	0,083305	4,215068	0,073442
0,43633	0,066258	2,663656	0,082757	4,273473	0,073234
0,499747	0,066376	2,92151	0,083989	4,330619	0,072633
0,732591	0,068886	3,21652	0,08664	4,38025	0,07175
0,818202	0,0736	3,403822	0,085386	4,430231	0,067117
0,875706	0,069666	3,638662	0,082869	4,482417	0,0691
1,062166	0,068011	3,781449	0,088645	4,521197	0,067994
1,345535	0,072948	3,927252	0,076485	4,666762	0,065819
1,618024	0,075999	4,009489	0,07918	4,739772	0,065767
1,872578	0,07937	4,150809	0,072922	4,800426	0,05138
2,085716	0,076408	4,18089	0,075298	4,85673	0,04

Tableau (IV.18) : Les résultats par la méthode de perturbation pour Q_6 .

Position(m)	Hauteur(m)	Position(m)	Hauteur(m)	Position(m)	Hauteur(m)
0,002845	0,05665637	2,375796	0,07808056	4,215068	0,07553139
0,43633	0,05753354	2,663656	0,0815366	4,273473	0,07380053
0,499747	0,05780745	2,92151	0,08402458	4,330619	0,07194933
0,732591	0,05912507	3,21652	0,08576317	4,38025	0,07021022
0,818202	0,05972948	3,403822	0,08603045	4,430231	0,06833108
0,875706	0,06017036	3,638662	0,08518287	4,482417	0,06622758
1,062166	0,06178443	3,781449	0,08389999	4,521197	0,06456796
1,345535	0,06472709	3,927252	0,08189449	4,666762	0,05756677
1,618024	0,06800947	4,009489	0,080421	4,739772	0,05357128
1,872578	0,07134566	4,150809	0,0772552	4,800426	0,04999192
2,085716	0,07422839	4,18089	0,07647129	4,85673	0,04

Tableau (IV.19) : Les résultats par MEF pour Q_6 .

Position(m)	Hauteur(m)
4,86	0,042
4,374	0,0766209
3,888	0,06635365
3,402	0,0566760
2,916	0,0494378
2,43	0,04532443
1,944	0,04348346
1,458	0,04212731
0,972	0,04168852
0,486	0,041605
0	0,04159746

IV.2.7 Résultats pour un Débit Q_7

Tous les résultats obtenus avec les différentes méthodes sont représentés dans les tableaux ci-dessous pour un débit Q_7 :

Tableau (IV.20) : Les résultats expérimentaux pour Q_7 .

Position(m)	Hauteur(m)	Position(m)	Hauteur(m)
0,001418	0,053958	2,452536	0,066528
0,157635	0,054663	2,880285	0,072204
0,410555	0,055095	3,241069	0,073477
0,594046	0,055723	3,69234	0,068754
0,788696	0,056319	4,007268	0,07475
0,975908	0,056936	4,252745	0,074054
1,186679	0,058635	4,456058	0,070033
1,375137	0,061545	4,620923	0,061529
1,82519	0,063714	4,757257	0,048513
2,117787	0,065181	4,856402	0,04382

Tableau (IV.21) : Les résultats par la méthode de perturbation pour Q_7 .

Position(m)	Hauteur(m)	Position(m)	Hauteur(m)
0,001418	0,04838925	2,452536	0,07742498
0,157635	0,04853376	2,880285	0,08383977
0,410555	0,04937558	3,241069	0,08727452
0,594046	0,05045626	3,69234	0,08718361
0,788696	0,05202453	4,007268	0,08291982
0,975908	0,05392462	4,252745	0,07642982
1,186679	0,05649003	4,456058	0,06852082
1,375137	0,05912583	4,620923	0,06017012
1,82519	0,06642078	4,757257	0,05180457
2,117787	0,07158628	4,856402	0,04482

Tableau (IV.22) : Les résultats par MEF pour Q_7 .

Position(m)	Hauteur(m)
4,86	0,04
4,374	0,06640994
3,888	0,0661
3,402	0,056629111
2,916	0,049812876
2,43	0,045955340
1,944	0,044225638
1,458	0,04360308
0,972	0,043430268
0,486	0,043397522
0	0,043394386

IV.2.8 Résultats pour un Débit Q_8

Tous les résultats obtenus avec les différentes méthodes sont représentés dans les tableaux ci-dessous pour un débit Q_8 :

Tableau (IV.23) Les résultats expérimentaux pour Q_8 .

Position(m)	Hauteur(m)	Position(m)	Hauteur(m)	Position(m)	Hauteur(m)
0,00322	0,060213	1,719206	0,071018	3,761623	0,074738
0,199929	0,059536	1,848967	0,072029	3,83982	0,076914
0,343207	0,06069	1,967919	0,073975	3,890147	0,077939
0,485444	0,061849	2,086024	0,07287	3,945458	0,077626
0,536288	0,062216	2,232844	0,075531	4,001596	0,076436
0,614589	0,064392	2,370499	0,075189	4,08644	0,077265
0,673237	0,066024	2,516488	0,077855	4,151293	0,072533
0,748921	0,064723	2,652468	0,07534	4,189978	0,07406
0,851229	0,065017	2,793046	0,077163	4,272303	0,070103
0,978908	0,065604	2,97147	0,079209	4,474829	0,068521
1,100353	0,067099	3,104143	0,08064	4,595423	0,066093
1,214308	0,067764	3,280068	0,081827	4,740948	0,059595
1,319105	0,066734	3,437253	0,078319	4,828667	0,053425
1,431413	0,070464	3,558683	0,076759	4,860698	0,04

Tableau (IV.24) : Les résultats par la méthode de perturbation pour Q_8 .

Position(m)	Hauteur(m)	Position(m)	Hauteur(m)	Position(m)	Hauteur(m)
0,00322	0,052188201	1,719206	0,061986262	3,761623	0,079843986
0,199929	0,052359443	1,848967	0,06408495	3,83982	0,079240559
0,343207	0,05269486	1,967919	0,065707322	3,890147	0,078501584
0,485444	0,053203889	2,086024	0,067223877	3,945458	0,077661753
0,536288	0,053428118	2,232844	0,068740949	4,001596	0,077017172
0,614589	0,05381651	2,370499	0,070616382	4,08644	0,076209977
0,673237	0,054141263	2,516488	0,072333967	4,151293	0,075280344
0,748921	0,054602544	2,652468	0,074075134	4,189978	0,073653415
0,851229	0,05530008	2,793046	0,075585835	4,272303	0,072220171
0,978908	0,056285844	2,97147	0,076994454	4,474829	0,071283312
1,100353	0,05733636	3,104143	0,078488789	4,595423	0,069076575
1,214308	0,058415718	3,280068	0,079333321	4,740948	0,062317591
1,319105	0,059482285	3,437253	0,080020071	4,828667	0,05730936
1,431413	0,060696746	3,558683	0,08013401	4,860698	0,050185673

Tableau (IV.25) : Les résultats par MEF pour Q_8 .

Position(m)	Hauteur(m)
4,86	0,04
4,374	0,078436204
3,888	0,0712
3,402	0,0653
2,916	0,0616
2,43	0,0596
1,944	0,0588
1,458	0,0585
0,972	0,0584
0,486	0,0584
0	0,0584

IV.2.9 Résultats pour un Débit Q_9

Tous les résultats obtenus avec les différentes méthodes sont représentés dans les tableaux ci-dessous pour un débit Q_9 :

Tableau (IV.26) : Les résultats expérimentaux pour Q_9 .

Position(m)	Hauteur(m)	Position(m)	Hauteur(m)
0,003161	0,047303	2,240476	0,060207
0,125827	0,047053	2,459255	0,060017
0,304129	0,046152	2,781798	0,064531
0,423034	0,048313	3,176366	0,064653
0,520395	0,047175	3,507713	0,065514
0,696184	0,047487	3,854264	0,068564
0,859344	0,04913	4,110866	0,059647
1,028827	0,0507	4,265175	0,061394
1,180591	0,051293	4,442197	0,059325
1,358924	0,052759	4,662146	0,05202
1,758614	0,057555	4,788448	0,039892
2,002682	0,057069	4,85412	0,033207

Tableau (IV.27) : Les résultats par la méthode de perturbation pour Q_9 .

Position(m)	Hauteur(m)	Position(m)	Hauteur(m)
0,003161	0,05175793	2,240476	0,0621935
0,125827	0,05179651	2,459255	0,06363061
0,304129	0,05198498	2,781798	0,06538866
0,423034	0,05219846	3,176366	0,06651112
0,520395	0,05242539	3,507713	0,06608083
0,696184	0,05295212	3,854264	0,0637019
0,859344	0,0535716	4,110866	0,06027995
1,028827	0,05434074	4,265175	0,05739744
1,180591	0,05512965	4,442197	0,05321443
1,358924	0,05616407	4,662146	0,04654227
1,758614	0,0588009	4,788448	0,04188623
2,002682	0,06052667	4,85412	0,033207

Tableau (IV.28) : Les résultats par MEF Q_9 .

Position(m)	Hauteur(m)
4,86	0,033207
4,374	0,063753069
3,888	0,0564
3,402	0,0500
2,916	0,0455
2,43	0,0432
1,944	0,0421
1,458	0,0418
0,972	0,0417
0,486	0,0417
0	0,0417

IV.2.10 Résultats pour un Débit Q_{10}

Tous les résultats obtenus avec les différentes méthodes sont représentés dans les tableaux ci-dessous pour un débit Q_{10} :

Tableau (IV.29) Les résultats expérimentaux pour Q_{10} .

Position(m)	Hauteur(m)	Position(m)	Hauteur(m)	Position(m)	Hauteur(m)
0,003696	0,035463	1,141113	0,03911	3,482397	0,049336
0,386359	0,037739	1,892465	0,045406	3,568319	0,052338
0,584894	0,036659	2,078304	0,043383	3,734678	0,052937
0,618756	0,037678	2,16973	0,045956	3,842197	0,053324
0,649236	0,03689	2,32974	0,046083	4,014903	0,054395
0,706385	0,036199	2,510915	0,046287	4,361591	0,054746
0,792319	0,035611	2,656098	0,049951	4,559297	0,048278
0,829146	0,035743	2,970615	0,050186	4,741768	0,040409
0,93031	0,037903	3,172113	0,049116	4,805286	0,033458
1,040798	0,036506	3,316463	0,048739	4,852703	0,031385

Tableau (IV.30) : Les résultats par la méthode de perturbation pour Q_{10} .

Position(m)	Hauteur(m)	Position(m)	Hauteur(m)	Position(m)	Hauteur(m)
0,003696	0,031057305	1,141113	0,032693144	3,482397	0,039209758
0,386359	0,031242383	1,892465	0,035304946	3,568319	0,039050518
0,584894	0,031485515	2,078304	0,036038939	3,734678	0,038535273
0,618756	0,031537109	2,16973	0,036399801	3,842197	0,038039844
0,649236	0,03158606	2,32974	0,037019678	4,014903	0,036939677
0,706385	0,031684224	2,510915	0,037684219	4,361591	0,033384973
0,792319	0,031847361	2,656098	0,038169611	4,559297	0,032393353
0,829146	0,031922918	2,970615	0,038992159	4,741768	0,031393353
0,93031	0,032147583	3,172113	0,039282433	4,805286	0,030993353
1,040798	0,032420856	3,316463	0,03933792	4,852703	0,03

Tableau (IV.31) : Les résultats par MEF pour Q_{10} .

Position(m)	Hauteur(m)
4,86	0,031385
4,374	0,05569458
3,888	0,0540
3,402	0,0527
2,916	0,0520
2,43	0,0518
1,944	0,0508
1,458	0,0502
0,972	0,0495
0,486	0,0495
0	0,0495

IV.2.11 Résultats pour un Débit Q_{11}

Tous les résultats obtenus avec les différentes méthodes sont représentés dans les tableaux ci-dessous pour un débit Q_{11} :

Tableau (IV.32) : Les résultats expérimentaux pour Q_{11} .

Position(m)	Hauteur(m)	Position(m)	Hauteur(m)
0,000984	0,030105	3,17833	0,033137
0,123375	0,030335	3,406942	0,032626
0,281649	0,030325	3,70719	0,036065
0,527846	0,029689	3,979745	0,033012
0,77531	0,030159	4,444476	0,028593
1,025275	0,029496	4,634121	0,025015
1,559191	0,035732	4,73963	0,024265
1,878209	0,031234	4,807427	0,020439
2,179703	0,03355	4,842566	0,016845
2,581652	0,031806	4,862643	0,014473

Tableau (IV.33) : Les résultats par la méthode de perturbation pour Q_{11} .

Position(m)	Hauteur(m)	Position(m)	Hauteur(m)
0,000984	0,02345891	3,17833	0,02808223
0,123375	0,02346924	3,406942	0,02834877
0,281649	0,02351366	3,70719	0,02834368
0,527846	0,02365542	3,979745	0,027914
0,77531	0,02388924	4,444476	0,02697813
1,025275	0,02421728	4,634121	0,02375111
1,559191	0,0251943	4,73963	0,02168147
1,878209	0,02591098	4,807427	0,0203038
2,179703	0,02662539	4,842566	0,01932585
2,581652	0,02752591	4,862643	0,01878909

Tableau (IV.34) : Les résultats par MEF pour Q_{11} .

Position(m)	Hauteur(m)
4,86	0,014473
4,374	0,039392218
3,888	0,0380
3,402	0,0370
2,916	0,0364
2,43	0,0361
1,944	0,0360
1,458	0,0359
0,972	0,0359
0,486	0,0359
0	0,0359

IV.3 Etude comparative

Dans cette étude on ‘as présenté les graphiques expérimentales, numériques et analytique sur une seule figure pour visualiser l’allure des lignes d’eau (expérimentales, numériques et analytique) et une bonne observation de l’écart (erreur) en chaque débit.

Nous allons présenter graphiquement les résultats obtenus numériquement et expérimentalement et les comparons avec l’analytique pour les 11 essais effectués dans le laboratoire.

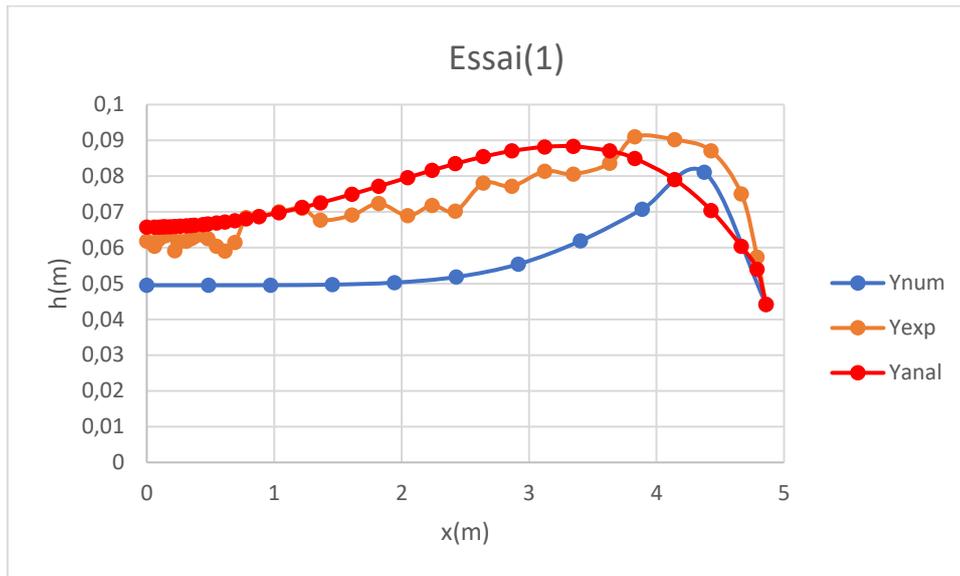


Figure (IV.1) : Graphique de comparaison pour Q_1 .

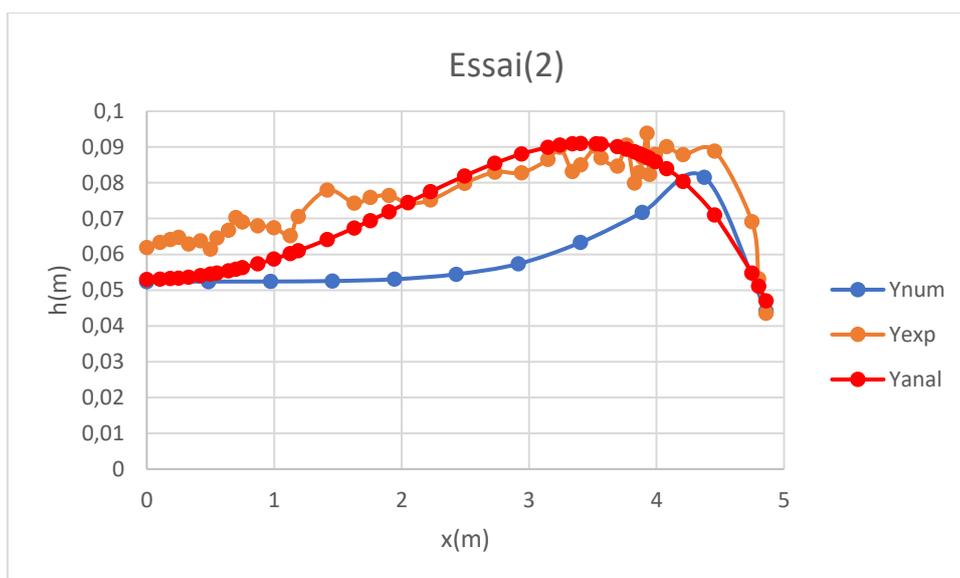


Figure (IV.2) : Graphique de comparaison pour Q_2 .

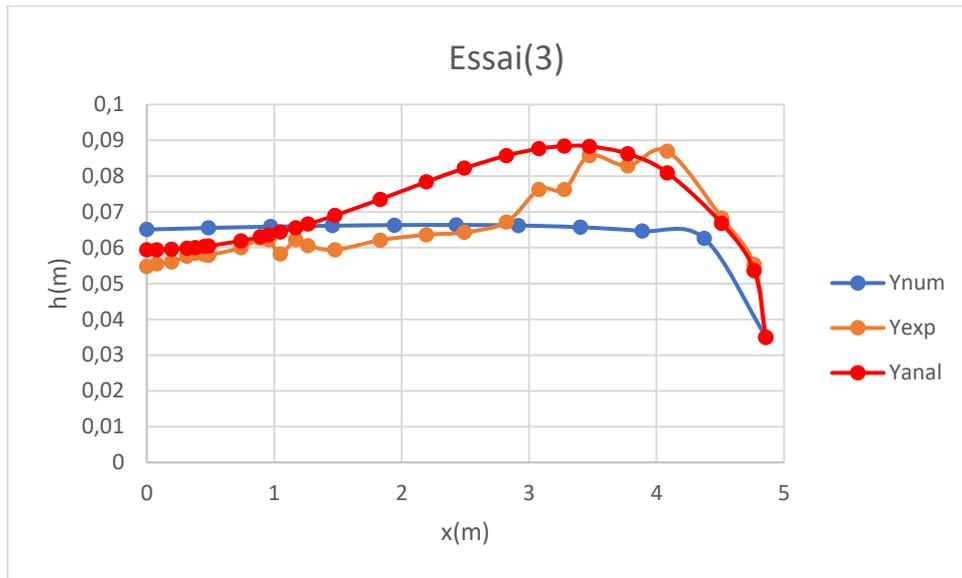


Figure (IV.3) : Graphique de comparaison pour Q_3 .

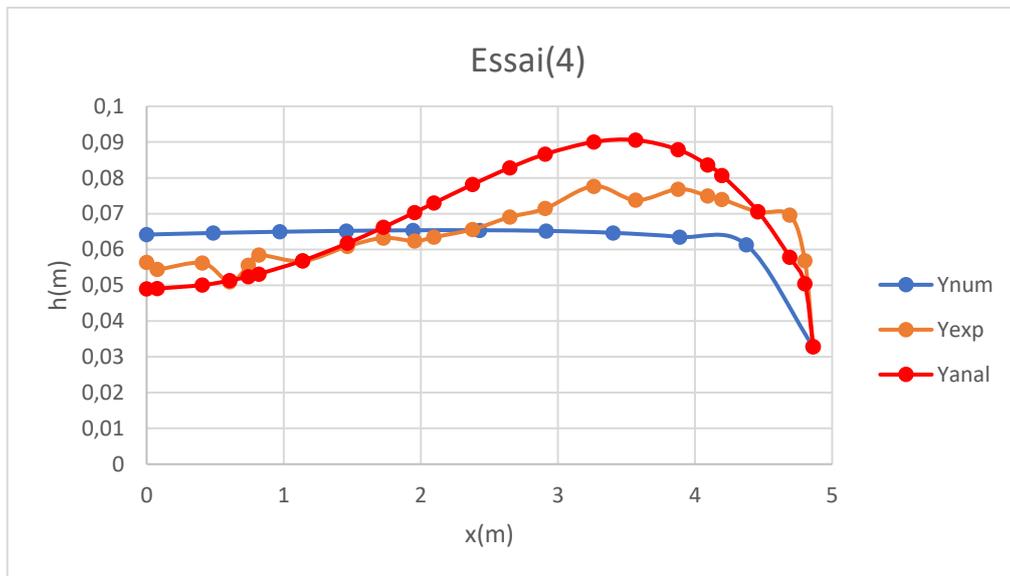


Figure (IV.4) : Graphique de comparaison pour Q_4 .

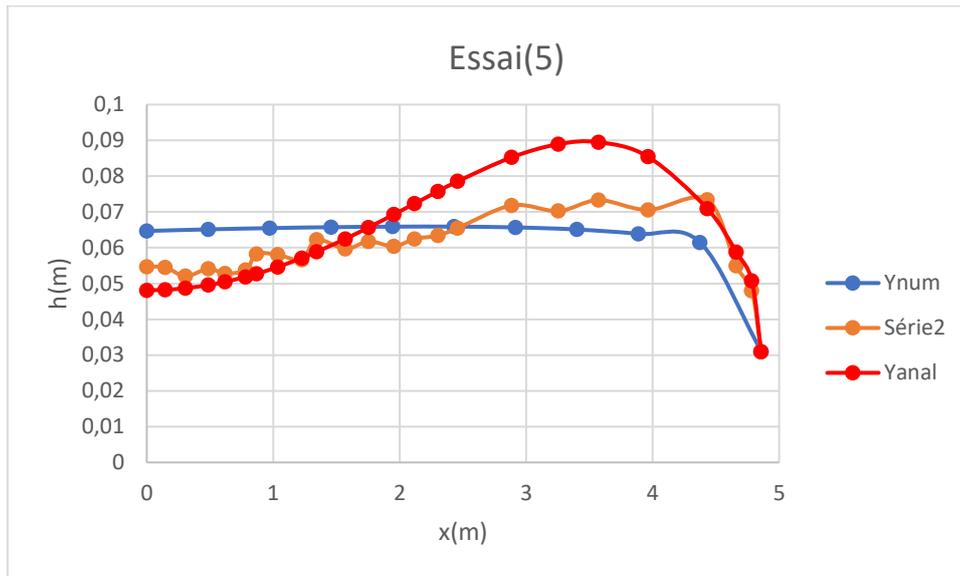


Figure (IV.5) Graphique de comparaison pour Q_5 .

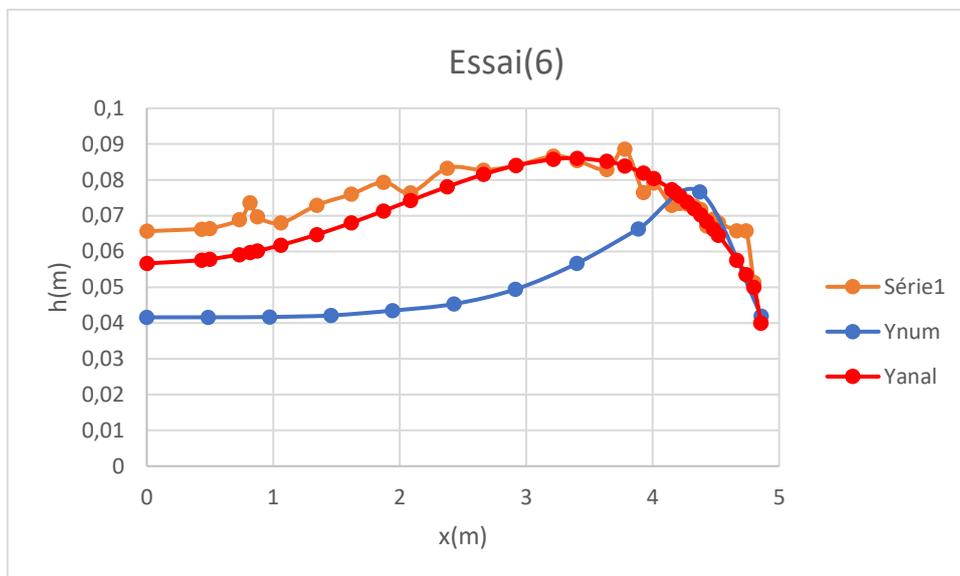


Figure (IV.6) Graphique de comparaison pour Q_6 .

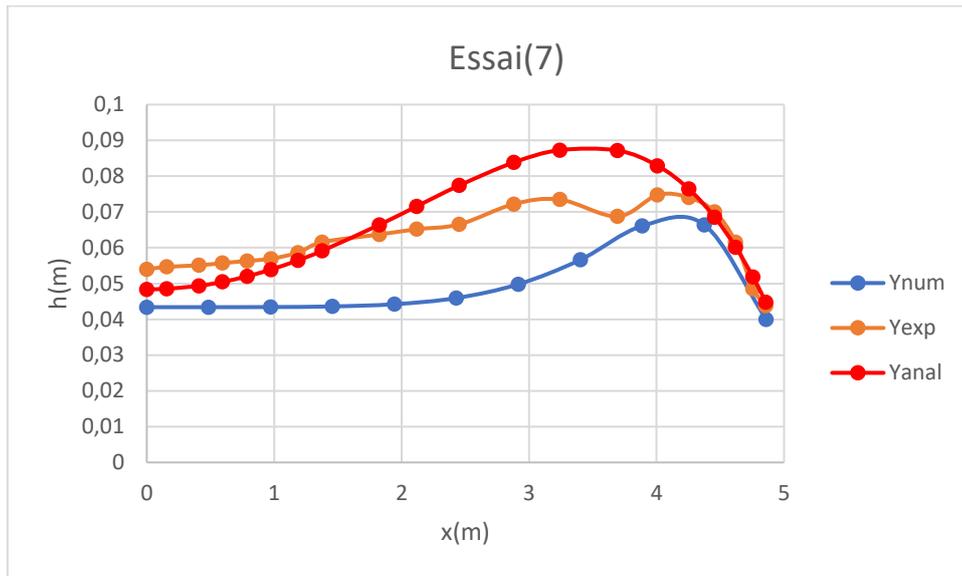


Figure (IV.7) Graphique de comparaison pour Q_7 .

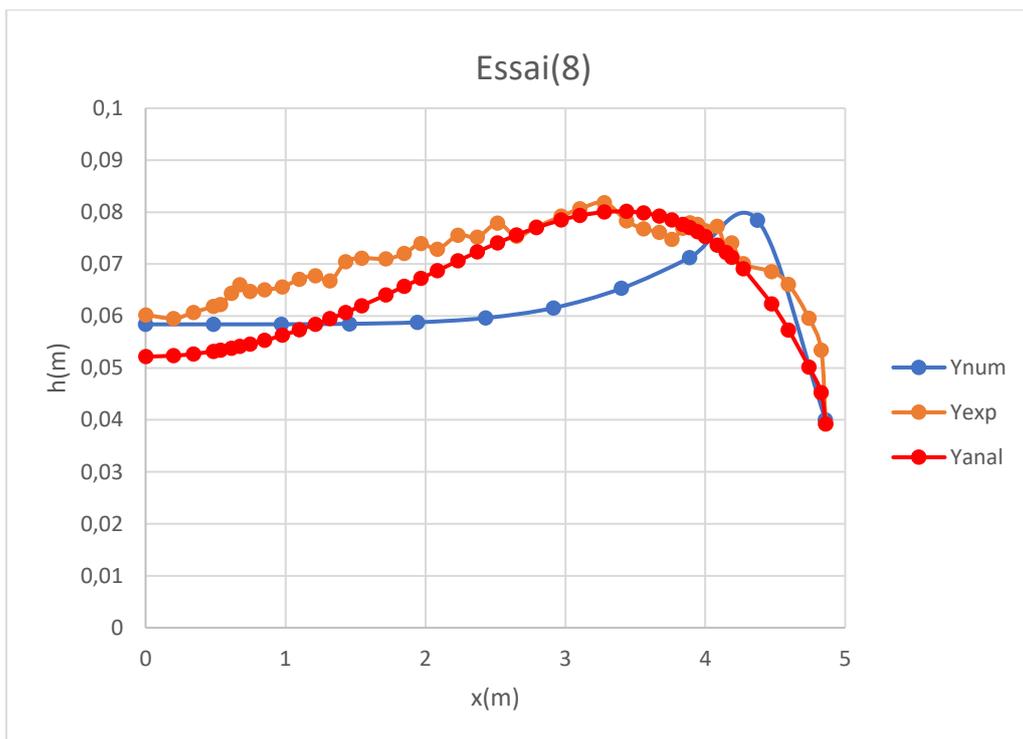


Figure (IV.8) Graphique de comparaison pour Q_8 .

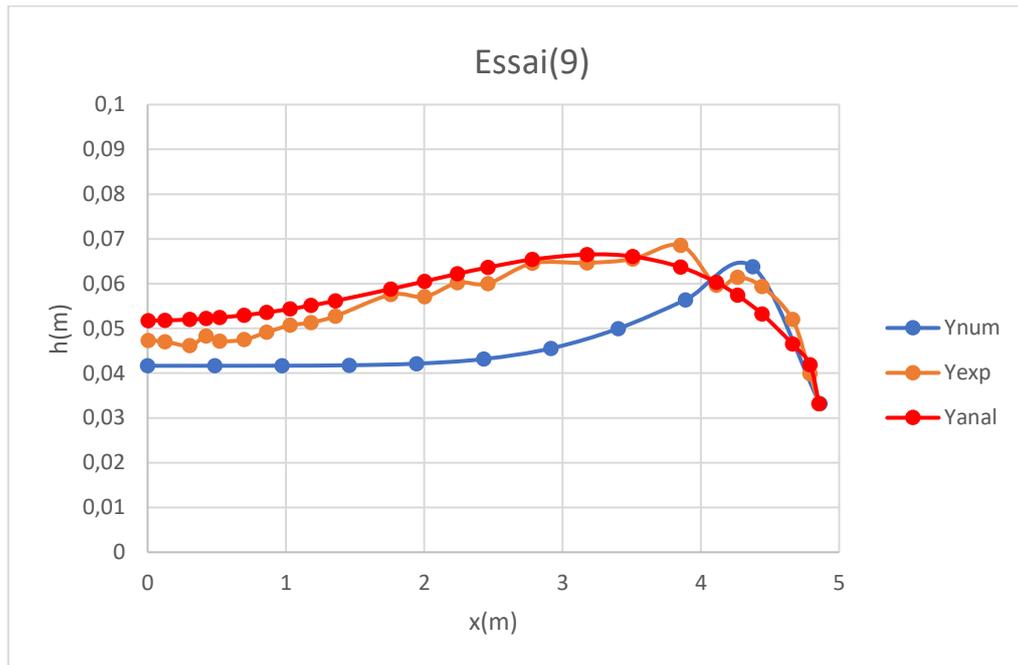


Figure (IV.9) : Graphique de comparaison pour Q_9 .

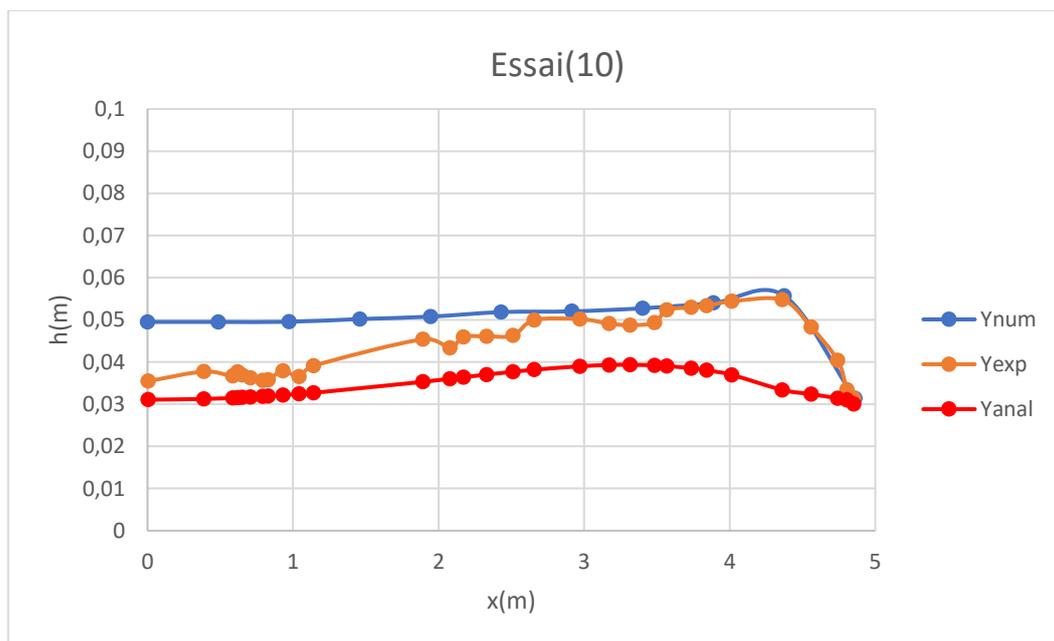


Figure (IV.10) : Graphique de comparaison pour Q_{10} .

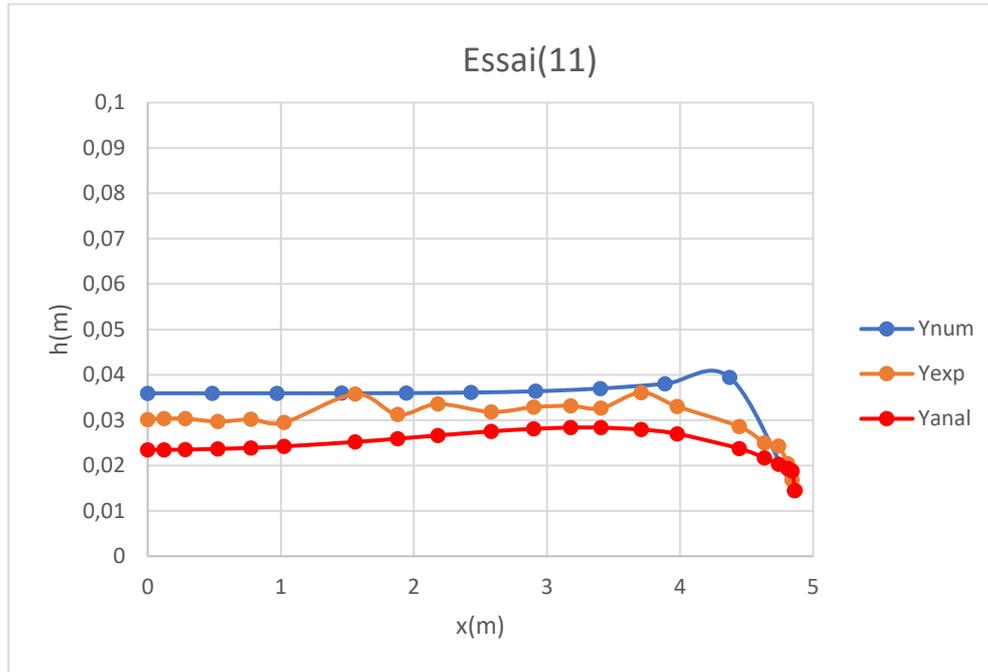


Figure (IV.11) Graphique de comparaison pour Q_{11} .

IV.4 Étude expérimental du débit latéral

Cette étude est conçue pour voir la variation du débit latéral tout le long du canal, et ceux par voie de mesure effectuée dans la mesure de l'erreur tableau (II.1) et tableau (II.2) comme représenté dans la (figure (IV.12)) Ci-dessous.

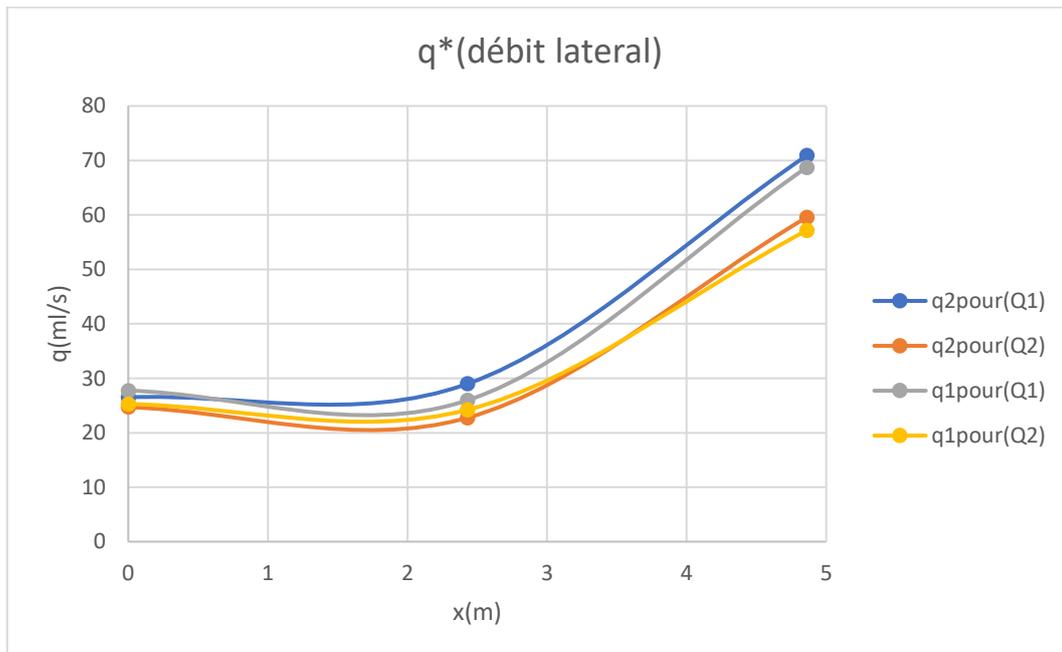


Figure (IV.12) Variation du débit latéral.

Et on remarque une importance du débit latéral qui croit vers la fin du canal ce qui provoque une incertitude lors du calcul numérique.

IV.5 Discussions des résultats

La ligne d'eau expérimentale n'est pas mesurée avec exactitude c'est par voie photométrique.

La non uniformité de l'apport latéral comme le représente la figure (IV.12) elle engendre une perturbation de l'écoulement et provoque une fluctuation de la ligne d'eau expérimentale, cette augmentation du débit latéral se positionne en ($x=2.43\text{m}$ à $x=4.86\text{m}$) du milieu jusqu'à la fin du canal ce qui nous mène à mesurer une condition aux limites plus en moins précise.

Au vu de la Figure (IV.1), portant sur l'essai 1 à fort débit on constate une différence de hauteur qui peut atteindre jusqu'à 2cm entre les résultats numériques et expérimentales dû à une forte débitance.

Concernant l'essai (2) Figure (IV.2) avec une petite diminution du débit par rapport à l'essai (1), on remarque une chute importante numériquement due à une erreur relative à la condition aux limites mesurer expérimentalement.

En outre pour l'essai (3) Figure (IV.3) avec une diminution faible du débit par rapport à l'essai (2), on constate que la ligne d'eau numérique prend une allure plus élevée à celle de l'essai (2), contrairement à nous attend.

Les essais (8,9,10,11), (Figures (IV.8), (IV.9), (IV.10), (IV.11)) respectivement le débit total diminue qui intervient avec une stabilisation du débit latéral (uniforme), qui nous donne des résultats proches avec une erreur plus en moins importante comme les montre les figures.

Au vu des graphes de la méthode de perturbation dans toute les figures y'a une convergence dans les essais à fort débit de 1 à 9 et ensuite on observe une petite divergence contrairement à ceux du numérique vu que c'est une fonction de puissance de plus en plus diverge essais 10 et 11.

IV.6 Conclusion

L'étude expérimental de l'écoulement a surface libre avec apport latéral permet de représenter les principaux résultats trouver, d'après les résultats obtenus dans l'étude comparative on se permet de dire que la méthode des éléments finis de Galerkin est bien adaptée à ce genre de phénomène.

Dans cette partie nous avons présenté les résultats numériques et analytiques et expérimental avec leur discussion.

Conclusion générale

Conclusion Générale

A travers ce modeste travail, nous avons essayé de toucher à l'un des problèmes importants et complexes en hydraulique, en l'occurrence celui des écoulements à débit spatialement varié en cas du canal avec apport latéral et ceux par voie expérimental et numérique et comparer aux résultats analytiques.

L'intérêt de ce sujet se trouve de connaître de quelle manière l'eau varie le long du canal avec un apport latéral. Dans cette optique, notre travail s'inscrivait dans ces efforts de modélisation et de calcul numérique, faisant usage de la méthode des éléments finis.

Dans un premier temps, nous avons donné l'équation différentielle de base régissant sur l'écoulement à surface libre avec un apport latéral, lequel est obtenue en utilisant les principes de conservation de quantité de mouvement et celui de conservation de masse.

Ensuite nous avons effectué une étude expérimentale pour ce problème, Nous avons utilisé des techniques manuelles pour déterminer la hauteur d'eau en chaque point, Plusieurs difficultés ont été rencontrées dans cette étude, principalement relatives au matériel utilisé.

Ensuite pour résoudre l'équation différentielle qui gouverne sur l'écoulement avec apport latéral, nous avons présenté l'une des méthodes numériques comme étant l'une des plus performante. Ainsi, nous avons donné les fondements et les applications de la méthode des résidus pondérés de Galerkin, l'une des méthodes des MEF, Ou nous l'avons appliqué à l'équation différentielle non linéaire du cas du canal avec apport latéral.

En quatrième chapitre, c'est le principal noyau de notre travail, nous avons présenté une application directe de notre problème dans le but de comparer avec les résultats numérique et analytique, les résultats numériques accordent assez bien avec ceux obtenues expérimentalement et analytiquement.

En ce qui concerne les perspectives de ce travail, nous pensons que le protocole expérimental peut être amélioré, l'étude expérimentale proposée dans ce mémoire pourrait donner des résultats plus satisfaisants. Ce travail peut donner suite à plusieurs travaux :

- Extension de ce cas avec une incorporation d'un déversoir dans le canal
- Une étude pour d'autre géométrie des canaux
- Une étude d'une courbe de remous avec présence d'une vanne ou d'un seuil.

Enfin, au terme de ce modeste travail, nous espérons avoir contribué à la modélisation et résolution numérique d'un des problèmes de l'écoulement spatialement varié.

Bibliographie

GOUZROU, A : ‘l’hydraulique au pluriel ‘, Marrakech Edition 2013, Maroc.

GRAF, W – Hydraulique fluviale (Tome I). Ecoulement permanent uniforme et non uniforme (1993).

BENNIS, S. : "*Hydraulique et Hydrologie*". Deuxième édition, Presse de l’Université du Québec, 2009.

CARLIER, M. : "*Hydraulique générale et appliquée*". Eyrolles, Paris, 1980.

PNUD/OPE – Ressources en eau dans les pays de l’Afrique du nord. Guide Maghrébin pour l’exécution des études et des travaux de retenues collinaires. Projet RAB/80/011 (1987).

LENCASTRE, A. : "*Hydraulique générale*". Eyrolles, Paris, 1996.

HAGER, W.H. et SCHLEISS, A. J. : "*Constructions Hydrauliques*". Volume 15, Deuxième édition Presses Polytechniques Romandes, 2009.

DUPONT J.M., "*Modélisation et étude bibliographique des déversoirs d’orage*", 3ème année de l’Ecole Polytechnique de Paris ,1996.

MFTEM (Ministère des transports, de l’équipements du tourisme et de la mer). "*Notice sur les déversoirs : synthèse des lois d’écoulement au droit des seuils et déversoirs*", 2005.

MILLOGO F. A, '*Ouvrages Hydrauliques* '. Aout 2009.

HINDS, J. (1926). "*Side channel spillways : Hydraulic theory, economic factors, and experimental determination of losses.*" Trans. Am. Soc. Civ. Eng., 89(1), 881–927.

FAVRE, H. (1932). "*Contribution à l’étude des courants liquides (contribution to the study of liquid currents)*"', Rascher, Zurich, Switzerland (in French).

MCCONAUGHY, D. C. (1933). "*Spillways in canyon walls to handle floodwaters.*" Engineering News-Record 114, 480–482.

MEYER-PETER, E., et FAVRE, H. (1934). "*Analysis of Boulder Dam spillways made by Swiss laboratory.*" Engineering News-Record 113, 520–522.

USBR (U.S. Bureau of Reclamation). (1938). "*Model studies of spillways.*" Bulletin 1. Boulder Canyon Project, Final Rep. Part VI : Hydraulic Investigations, U.S. Dept. Of the Interior, Denver.

CAMP, T. R. (1940). "*Lateral spillway channels.*" Trans. Am. Soc. Civ. Eng., 105(1), 606–617.

MARCHI, G. (1941). “*Canali con portata progressivamente crescente (channels with progressively increasing discharge).*” L’Energia Elettrica, 18(6), 351–360 (in Italian).

CITRINI, D. (1942). “*Canali rettangolari con portata e larghezza gradualmente variabili (rectangular channels with linearly varied discharge and width).*” L’Energia Elettrica, 19(6), 297–301 (in Italian).

CITRINI, D. (1948). “*Canali rettangolari con apporto laterale di portata (rectangular channels with spatially-varied discharge).*” L’Energia Elettrica, 25(4), 155–166 (in Italian).

HAGER 1983, “*open channel hydraulics of flows with increasing discharge*” Zurich, Switzerland
Published online : 21 Jan 2010.

BREMEN, R., AND HAGER, W. H. (1989). “*Experiments in side-channel spillways.*” J. Hydraul. Eng., 10.1061/(ASCE)0733 9429(1989)115 :5(617), 617–635.

KOUCHAKZADEH.S ET VATANKHAH MOHAMMAD-ABADI (2002). “*spatially varied flow in non-prismatic channels*” Irrigation and Reclamation Engineering Dept., University of Tehran, P.O. Box 4111, Karaj, 31587-11167, Iran.

JILL LUCAS, NICOLA LUTZ, ADRIANO LAIS, WILLI H. HAGER, F. ASCE, et ROBERT M. BOES, 2015 “*side-channel flow : physical model studies*” 2015 American Society of Civil Engineers.

CHOW, V.T. : “*Open-channel hydraulics*”. McGraw-Hill, New York, 1959.

SUBRAMANYA, K. : “*Flow in Open Channels*”. Troisième édition, McGraw-Hill, New Delhi, 2009.

Walter H Graf et ALTINKAR M S : “*écoulement et phénomènes de transport dans les canaux à géométrie simple*”, Vol 16, presse polytechnique et université de romandes 2000.

TAHAR ABBES, M. : “*Méthodes Numériques*”. Office de Publications Universitaires, Alger, 2007.

HOFFMAN, J D : “*Numerical Methods for Engineers and Scientists*”. Deuxième édition, Marcel Dekker, Inc., New York, 2001.

CHANDRUPATLA, T.R., ET BELEGUNDU, A.D. : “*Introduction to Finite Elements in Engineering*”. Troisième édition, Prentice Hall, Inc., New Jersey, 2002.

ملخص:

واحدة من المشاكل التي يواجهها المهندس الهيدروليكي هي مشكلة التدفق المتنوع مكانيا، حالة القناة مع مساهمة جانبية. يركز عملنا الحالي على دراسة تجريبية، عددية وجبرية. بعد ان استذكرنا المعادلات التفاضلية غير الخطية التي تتفاعل مع المشكلة، قدمنا الجهاز التجريبي الذي تم تنفيذه في المختبر الهيدروليكي بجامعة بجاية والنمذجة العددية لاستخدام طريقة العناصر المحددة فاليركين، تتم مقارنة أداء هذه الطريقة مع القياسات التجريبية من خلال الاختبارات الإحدى عشر والنتائج باستخدام طريقة الاضطراب.

الكلمات المفتاحية: قناة الإدخال الجانبي، الدراسة التجريبية، النمذجة العددية، المعادلة التفاضلية غير الخطية، طريقة العناصر المحددة.

Résumé :

L'un des problèmes rencontrés dans la pratique de l'ingénieur hydraulicien est celui du débit spatialement varié, cas du canal avec apport latéral. Notre présent travail à alors porté sur une étude expérimentale, numérique et analytique, après avoir rappelé les équations différentielles non linéaire réagissant le problème, on a présenté le dispositif expérimentale effectuée au laboratoire hydraulique de l'université de Bejaia, la modélisation numérique est donnée par usage de la méthode des éléments finis de Galerkin, les performances de cette méthode sont confrontées aux mesures expérimentales des onze essais et les résultats par la méthode de perturbation.

Mot clés : Canal avec apport latéral, Étude expérimentale, Modélisation numérique, Équation différentielle non linéaire, Méthode des éléments finis (MEF).

Abstract :

One of the problems encountered in the practice of the hydraulic engineer is that of the spatially varied flow, case of the channel with lateral contribution. Our present work then focuses on an experimental, numerical and analytical study, after having recalled the nonlinear differential equations governing on the problem, then we presented the experimental device carried out at the hydraulic laboratory of the University of Bejaia, the numerical modeling is given by use of Galerkin finite element method, the performances of this method are compared to the experimental measurements of eleven tests and the results of perturbation method.

Key words: Lateral input channel, Experimental study, Numerical modeling, Nonlinear differential equation, Finite element method (FEM).