

**RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE**  
**MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR**  
**ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**UNIVERSITE ABDERRAHMANE MIRA BEJAIA**  
**FACULTÉ DE TECHNOLOGIE**  
**DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE**

MEMOIRE

PRÉSENTÉ POUR L'OBTENTION DU DIPLÔME DE

**MASTER**

FILIÈRE : GÉNIE MÉCANIQUE

SPÉCIALITÉ : INSTALLATION ÉNERGÉTIQUE ET TURBOMACHINES

PAR :

**GHEBRIOUA KHELIL**

**HAMOU MOULOUD**

## Thème

---

**Contribution à l'étude de la convection mixte dans un anneau  
cylindrique horizontal en utilisant des ailettes poreuses**

---

Soutenu le 02/06/2019 devant le jury composé de:

Mr. BENSLIMAN. H	Président
Mr. SADAOUI. D	Rapporteur
Mr. CHERFI. R	Rapporteur
Mr. SAHI. A	Examineur

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2018-2019

## **Remerciements**

*Tout d'abord on remercie dieu tout puissant de nous avoir donné le courage de faire ce modeste travail.*

*Ensuite, on tient à remercier vivement notre encadreur Mr D. SADAoui Professeur à l'université de Bejaia pour nous avoir parfaitement guidés tout le long de la réalisation de ce travail.*

*On tiens également à dédier ces remerciements à Mr CHERFI Ryad pour sa disponibilité, ses conseil, toute au long de ce travail.*

*Nous adressons aussi nos remerciements les plus sincères à Mr BENSLIMAN pour l'honneur qui il nous a fait de présider ce jury.*

*On remercie également Mr SAHI d'avoir accepté d'examiner notre travail.*

*On remercie chaleureusement tout le corps enseignant du département Génie Mécanique pour leurs contributions à cette formation.*

*Nos remerciements s'adressent aussi à toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce travail tout particulièrement à BENAZOUZ Koceila, et MOULOUD Smail.*

*On remercie chaleureusement nos familles et nos amis.*

## ***Dédicaces***

*Je dédie ce travail...*

*À....*

*Mes très chers parents qui ont toujours été la  
Pour moi et qui m'ont donné un magnifique modèle  
De labeur et de persévérance. J'espère qu'ils trouveront dans ce  
Travail toute ma reconnaissance  
Et tout mon amour.  
Mais chers frères  
hicham et adnane  
Toute ma famille.  
Une personne exceptionnelle  
Sylia  
Tous mes amis (es).*

*GHEBRIOUA Khelil*

*Mes très chers parents qui ont toujours été la  
Pour moi et qui m'ont donné un magnifique modèle  
De labeur et de persévérance. J'espère qu'ils trouveront dans ce  
Travail toute ma reconnaissance  
Et tout mon amour.  
Mon cher frère et mes adorables sœurs  
Fares, yassmin et sara.  
Tous mes amis et collèges (es).  
Tous les habitants du village Talefsa.*

*HAMOU Mouloud*

# SOMMAIRE

Nomenclature.....	i
Listes des figures.....	ii
Listes des tableaux.....	iii
Introduction générale.....	1

## CHAPITRE I

### Généralité et Revue bibliographique

Introduction .....	3
I.1. Convection .....	3
I.2. Milieu poreux.....	4
I.2.1 Définition du milieu poreux .....	4
I.2.2. Paramètre caractérisant les milieux poreux.....	4
I.2.2.1. Le volume élémentaire représentatif .....	4
I.2.3. Caractérisation géométrique des milieux poreux .....	5
I.2.3.1. Porosité .....	5
I.2.3.2. Perméabilité .....	6
I.2.3.3. Tortuosité.....	6
I.2.4. Propriétés thermophysiques d'un milieu poreux.....	7
I.2.4.1. Viscosité effective .....	7
I.2.4.2. Conductivité effective.....	7
I.2.5 Modèles d'écoulement dans les milieux poreux .....	8
I.2.5.1. Modèle de Darcy .....	9
I.2.5.2. Modèle de Brinkman .....	9
I.2.5.3. Modèle de Forchheimer.....	10
I.3. Revue bibliographique .....	10
Conclusion.....	21

## CHAPITRE II

### Modélisation mathématique

Introduction .....	22
II.1. Géométrie étudiée : .....	22
II.2. Hypothèses simplificatrices .....	23
II.3. Équations gouvernantes .....	24
II.3.1. Forme dimensionnelle des équations .....	24
II.3.1.1 Domaine fluide libre.....	24
II.3.1.2 Domaine poreux .....	25
II.3.2 les conditions aux limites.....	26
II.3.3 Forme adimensionnelle des équations .....	27
II.3.3.1 Domaine fluide .....	27
II.3.3.2 Domaine poreux .....	28
II.3.4 Conditions aux limites adimensionnelles : .....	28
II.5 coefficients de transfert de chaleur : .....	29
II.5.1 Nombre de Nusselt local : .....	29
II.5.2 Nombre de Nusselt moyen : .....	29
II.6 Conclusion.....	30

## CHAPITRE III

### Présentation de la méthode des volumes finis

Introduction : .....	31
III.1 Principe de la méthode des volumes finis : .....	32
III.2 Discrétisation : .....	33
III.2.1 Schéma de la discrétisation spatiale : .....	35
III.2.1.1 Schéma aux différences centrées (CDS) : .....	36
III.2.1.2 Schéma Upwind (UPS): .....	36
III.2.1.3 Schéma à la loi de puissance (PLDS) : .....	37
III.2.2 Schéma de discrétisation temporelle : .....	39
III.2.2.1 Schéma explicite ( $\theta=0$ ) : .....	39

III.2.2.2 Schéma implicite ( $\theta = 1$ ) :.....	39
III.2.2.3 Schéma de cranck-nicolson ( $\theta = 1/2$ ) :.....	40
III.2.3 Discrétisation des équations de quantité de mouvement :.....	40
III.2.3.1 Algorithme SIMPLE (Semi - Implicit - Method for Pressure - Linked - Equation).....	42
III.3. Résolution des systèmes d'équations :.....	47
Conclusion.....	48

## CHAPITRE IV

### Résultats et discussions

Introduction .....	49
IV.1 Validation des résultats .....	49
IV.2 Choix du maillage .....	51
IV.3 Interprétation des résultats .....	52
IV.3.1 Effet du nombre de Richardson sur les lignes de courantes et les isothermes .....	53
IV.3.2 Effet du nombre de Grashof sur les lignes de courantes et les isothermes .....	56
IV.3.3 Effet de la position de l'ailette .....	59
IV.4 analyse du transfert de chaleur.....	61
IV.4.1 Effet de nombre de Richardson sur le nombre de Nusselt local.....	61
IV.4.2 Effet de nombre de Grashof sur le nombre de Nusselt local :.....	64
IV.4.3 Effet de nombre de Darcy sur le nombre de Nusselt moyen pour différents Ri .....	65
IV.4.4 Effet de nombre de Grashof sur le nombre de Nusselt moyen.....	66
IV.4.5 Effet de l'orientation des ailettes sur le nombre de Nusselt moyen :.....	67
Conclusion.....	69
Conclusion générale .....	70
Références bibliographiques .....	71

# Nomenclature

$C_p$ : Chaleur spécifique à pression constante .....	[ J/kg.K ]
$C_f$ : Coefficient de Forchheimer .....	[ - ]
$d$ : diamètre des pores .....	[ m ]
$E$ : Epaisseur du mur .....	[ m ]
$e$ : épaisseur de l'ailette .....	[ m ]
$g$ : Accélération de la pesanteur .....	[ m/s <sup>2</sup> ]
$h$ : Coefficient d'échange par convection .....	[ W m <sup>-2</sup> K <sup>-1</sup> ]
$H$ : longueur caractéristique .....	[ m ]
$K$ : la perméabilité du milieu poreux .....	[ m <sup>2</sup> ]
$l_a$ : Longueur de l'ailette poreuse .....	[ m ]
$p$ : Pression .....	[ Pa ]
$P$ : pression adimensionnelle .....	[ - ]
$S$ : aire de la surface d'échange solide / fluide .....	[ m <sup>2</sup> ]
$t$ : temps .....	[ s ]
$T$ : Température .....	[ K ]
$r_i, r_0$ : Rayons des cylindres intérieur et extérieur .....	[ m ]
$u, v$ : Composantes de la vitesse suivant les axes x et y .....	[ m s <sup>-1</sup> ]
$U, V$ : Composantes adimensionnelles de la vitesse .....	[ - ]

## Symboles grecs :

$\alpha$ : Diffusivité thermique .....	[ m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup> ]
$\beta$ : Coefficient de dilatation à pression constante .....	[ K <sup>-1</sup> ]
$\phi$ : Angle .....	[ degré ]
$\tau$ : Temps adimensionnel .....	[ - ]
$\mu$ : Viscosité dynamique .....	[ Kg m <sup>-1</sup> s <sup>-1</sup> ]
$\nu$ : Viscosité cinématique .....	[ m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup> ]
$\rho$ : Masse volumique de l'air .....	[ Kg m <sup>-3</sup> ]
$\lambda$ : Conductivité thermique .....	[ W m <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup> ]
$\varepsilon$ : La porosité du milieu poreux .....	[ m <sup>3</sup> ]
$\Delta T$ : Différence de température .....	[ K ]

$\theta$  : Température adimensionnelle .....[ - ]  
 $\omega$  : Vitesse angulaire.....[ rad/s ]  
 $\Phi$  : flux de chaleur transmis par convection .....[ W ]

**Nombres adimensionnelles :**

Gr : Nombre de Grashof .....[ - ]  
Da : Nombre de Darcy .....[ - ]  
Pr : Nombre de Prandtl .....[ - ]  
Re : Nombre de Reynolds.....[ - ]  
Ri : Nombre de Richardson.....[ - ]  
Ra : Nombre de Rayleigh .....[ - ]  
Nu : Nombre de Nusselt .....[ - ]

**Indice :**

eff : effectif

ref : référence

h, c : surface chaude et froide

\* : Valeur adimensionnelle ou estimé

# Liste des figures

<b>Figure I.1</b> : structure d'un milieu poreux.....	4
<b>Figure I.2</b> : Diagramme schématique d'un système et d'un volume Élémentaire représentatif (Kim et al, 2002) [2].....	5
<b>Figure I.3</b> : types de porosité.....	6
<b>Figure I.4</b> : tortuosité d'un milieu poreux.....	7
<b>Figure I.5</b> : Lignes de courants et d'isothermes pour $RaL=104$ ; $Pr=0,7$ ; $L/Di=0,8$ ; $\Delta\psi=3,0$ et $\Delta\Phi=0,1$ .....	11
<b>Figure I.6</b> : Modèle physique considéré dans [7] .....	11
<b>Figure I.7</b> : Modèle physique considéré par J. S. YOO [10] .....	13
<b>Figure I.8</b> : Schéma du problème considéré par Teamah [14] .....	14
<b>Figure I.9</b> : Modèle physique considéré par [16] .....	15
<b>Figure I.10</b> : Différents arrangements d'ailettes (a) : 2 ailettes horizontale, (b) : 2 ailettes verticales, (c) : 4 ailettes (2 horizontales et 2 verticales), (d) : 4 ailettes décalées de $45^\circ$ par rapport à l'horizontale et à la verticale, (e) : 12 ailettes.....	18
<b>Figure I.11</b> : Cylindre avec des ailettes internes .....	19
<b>Figure I.12</b> : la géométrie d'étude [27] .....	20
<b>Figure II.1</b> : géométrie du problème .....	23
<b>Figure III.1</b> : Volume de contrôle bidimensionnel .....	32
<b>Figure III.2</b> : Volume de contrôle à travers lequel se fait l'intégration .....	34
<b>Figure III.3</b> : Volume de contrôle dans le cas à une dimension .....	36
<b>Figure III.4</b> : Illustration d'une grille décalée pour « u » et « v » .....	41
<b>Figure III.5</b> : Volume de contrôle correspondant à la vitesse « U » .....	42
<b>Figure III.6</b> : Volume de contrôle correspondant à la vitesse « V » .....	42
<b>Figure III.7</b> : Représentation de l'organigramme de calcul .....	46

<b>Figure IV.1</b> : Comparaison des isothermes et des lignes de courants avec la référence [21]	50
.....	
<b>Figure IV.2</b> : Comparaison des isothermes et des lignes de courants avec la référence [31]	50
.....	
<b>Figure IV.3</b> : Coefficient de transfert de chaleur le long de la surface du cylindre extérieur comparaison avec la référence [21]	51
<b>Figure IV.4</b> : Domaine numérique pour un maillage de 100X100 nœuds	52
<b>Figure IV.5</b> : Influence du nombre de Richardson sur les lignes de courant et les isothermes pour $Gr=10^4$ et $10^5$ : a) $Da=10^{-2}$ b) $Da=10^{-4}$ c) $Da=10^{-6}$	55
<b>Figure IV.6</b> : Influence du nombre de Grashof sur les isothermes et les lignes de courants pour $Ri=1$ , $Gr=10^3-10^6$ : a) $Da=10^{-2}$ b) $Da=10^{-4}$ et c) $Da=10^{-6}$	58
<b>Figure IV.7</b> : Lignes de courants et isothermes pour différentes positions des ailettes $Ri=1$ et $Gr=10^4-10^5$ : a) $Da=10^{-2}$ b) $Da=10^{-4}$ c) $Da=10^{-6}$	60
<b>Figure IV.8</b> : Nombre de Nusselt local sur le cylindre extérieur pour différentes valeurs des nombres de Darcy, Grashof et Richardson	63
<b>Figure IV.9</b> : Nombre de Nusselt local sur le cylindre extérieur pour différents nombres de Darcy, Richardson et Grashof	64
<b>Figure IV.10</b> : Effet du nombre de Darcy sur le nombre de Nusselt moyen pour trois régimes d'écoulement : $Ri=0.1$ ; 1 et 10	65
<b>Figure IV.11</b> : Nombre du Nusselt moyen sur le cylindre extérieur en fonction du nombre de Grashof et $Ri$	67
<b>Figure IV.12</b> : Nombre du Nusselt moyen sur le cylindre extérieur en fonction de la position de l'ailette pour différents nombres de Darcy et Grashof	68

## Liste des tableaux

<b>Tableau II.1</b> : les conditions aux limites dimensionnelles .....	26
<b>Tableau II.2</b> : les grandeurs de références .....	27
<b>Tableau II.3</b> : conditions aux limites adimensionnelles .....	28
<b>Tableau II.4</b> : définition et fonction des nombres adimensionnels .....	29
<b>Tableau III.1</b> : Cas des Equations de transport dans le milieu fluide .....	33
<b>Tableau III.2</b> : Cas des équations de transport dans le milieu poreux .....	34
<b>Tableau IV.1</b> : Nusselt moyen pour différents maillages considérés .....	52
<b>Tableau IV.2</b> : Données générales pour les simulations .....	52

## **Introduction générale**

Le transfert de chaleur est un processus qui se manifeste sous diverses formes (rayonnement, conduction et convection '*naturelle, forcée ou mixte*') on le trouve dans plusieurs secteurs de l'industrie tel que les échangeurs de chaleur, les composants électroniques, réacteurs nucléaires, stockage de fluide, capteurs solaires ...etc.

La simulation numérique dans l'étude des problèmes physiques tels que les écoulements de fluides et les phénomènes de transferts thermiques occupe une place très importante dans la recherche et l'industrie. Dans ce domaine, la modélisation mathématique est fondée sur les équations de conservation de la mécanique des fluides, couplées avec l'équation de conservation de l'énergie. Leur résolution numérique est rendue possible en utilisant une méthode numérique convenable.

Le phénomène de convection dans les milieux poreux a une importance fondamentale et trouve des applications dans de nombreux domaines (astrophysique, océanographie, géophysique, pollution de l'air, diffusion souterraine des polluants, enfouissement souterrain des déchets radioactifs, isolation thermique, métallurgie, extractions pétrolières, exploitation géothermique et stockage de certains produits agricoles) ; notamment le refroidissement des composants électroniques car la majorité des composants d'un ordinateur chauffent, allant d'une très faible production de chaleur pour les lecteurs optiques, à une production beaucoup plus importantes pour les microprocesseurs par exemple.

Cette étude présente une simulation numérique de la convection mixte entre deux cylindres horizontales à la présence des ailettes poreuses en utilisant la méthode des volumes finis. Le cylindre intérieur et les ailettes ils sont totalement chauffées, contrairement au cylindre extérieur qui est à la température froide. L'étude a pour objectif de déterminer l'influence des paramètres essentielles du problème sur le transfert de chaleur par convection.

Ce travail est présenté en quatre chapitres :

Le premier chapitre, est consacré à la présentation du transfert de chaleur, le milieu poreux et ces caractéristiques la recherche bibliographique concernant les phénomènes de convection mixte, notamment à travers des études expérimentales et numériques des cas classiques : conduites annulaires horizontales, deux cylindres coaxiaux l'un chaud et l'autre froid et conduites annulaires munies d'ailettes solides ou poreuses longitudinales.

Le deuxième chapitre, présente la géométrie d'étude, les hypothèses simplificatrices ainsi que la formulation mathématique du problème physique qui se traduit par les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie pour un écoulement laminaire d'un fluide incompressible à propriétés physiques constantes. Les conditions aux limites relatives à ce problème sont explicitées avec soin.

Le troisième chapitre, c'est la présentation de la méthode numérique utilisée pour la discrétisation des équations de conservations qui est basée sur la méthode des volumes finis. Le schéma de la loi de puissance PLDS « Power Low Differencing scheme » pour la discrétisation des termes de convection et l'algorithme « Simple » pour le couplage vitesse-pression sont adoptés. La procédure de résolution désignant l'utilisation du code de calcul est décrite d'une manière succincte.

Le quatrième chapitre réservé à la discussion des différents résultats obtenus sous l'effet de certains paramètres tel que : le nombre de Richardson, le nombre de Grashof, et l'effet de la rotation du cylindre intérieur ainsi que l'orientation des ailettes.

Nous finissons par une conclusion générale qui résume les principaux résultats obtenus.

## Introduction

La convection est un phénomène physique par lequel la chaleur est transmise en mettant en jeu des déplacements de matière. Ce mode de transfert de chaleur existe au sein des milieux fluides ou lorsqu'un fluide circule autour d'un solide, et on retrouve deux types de convection, la convection naturelle et la convection forcée.

La convection mixte étant un mode de transfert de chaleur où les deux types de convection coexistent. Lorsqu'une action extérieure contribue à faire circuler le fluide (ventilateur, pompe, compresseur ou un vent ou la gravité ...) on est dans les conditions de convection forcée.

Depuis de nombreuses années, les études de la convection mixte sous ces différentes formes et différentes configurations, trouvent son application dans divers secteurs et industriels telle que les échangeurs de chaleur, le stockage d'énergie, dans le secteur agroalimentaire tel que le refroidissement des aliments, dans le secteur aéronautique et nucléaire tel que le transport et le stockage d'énergie, dans les chambres de combustion ainsi que le refroidissement des composants électroniques, les bâtiments et les mouvements océanographiques et atmosphériques.

### I.1. Convection

La convection est l'un des trois modes de transfert de chaleur avec la conduction et le rayonnement. Le terme de convection fait référence aux transferts de chaleur se produisant entre une surface et un fluide en mouvement lorsque ceux-ci sont à des températures différentes.

Le transfert thermique par convection est divisé en deux parties suivant la nature de l'écoulement :

- La convection forcée apparaît lorsque l'écoulement est engendré par des moyens externes comme : (pompe, ventilateur ou vents atmosphériques).
- La convection naturelle se produit lorsque l'écoulement est induit par une différence de masse volumique qui varie en fonction de la température au sein du fluide.

Le transfert de chaleur par convection décrit par la loi de Newton :

$$\Phi = h \cdot S(T_p - T_\infty) \quad (I.1)$$

## I.2. Milieu poreux

### I.2.1 Définition du milieu poreux

Un milieu poreux est un milieu composé d'une structure solide et d'espaces vides appelés pores. Ces pores peuvent être connectés ou non, et remplis partiellement ou totalement de liquide ou de gaz. Les milieux poreux peuvent être consolidés, comme une roche par exemple, ou non consolidée, comme un sable ou un empilement de billes, figure (I.1).

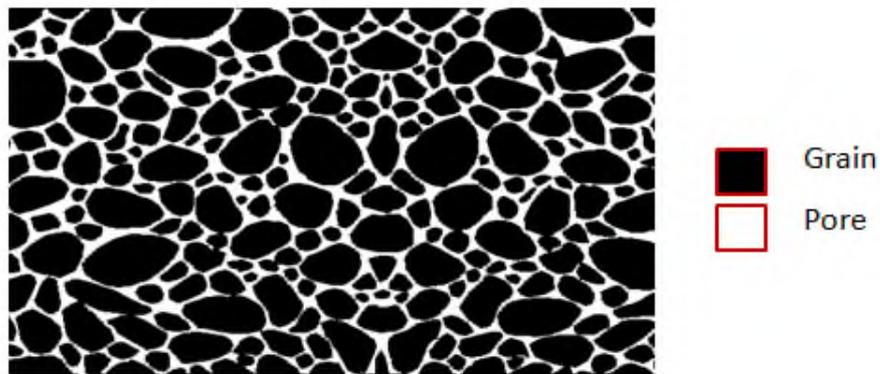


Figure (I.1) : structure d'un milieu poreux

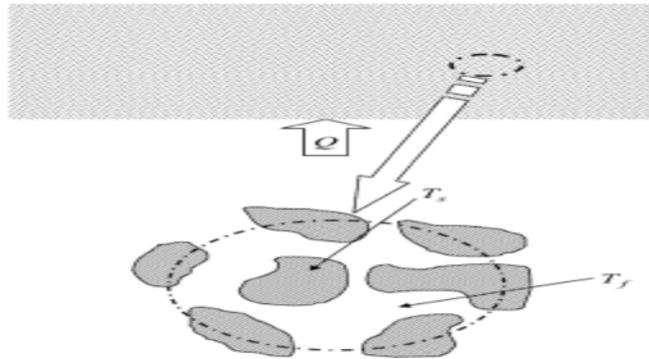
### I.2.2. Paramètre caractérisant les milieux poreux

#### I.2.2.1. Le volume élémentaire représentatif

Pour résoudre un problème de la physique, il est nécessaire d'avoir un milieu continu pour établir des relations aux dérivées partielles. Dans le cas d'un milieu poreux, les propriétés physiques (porosité, perméabilité...etc.) sont discontinues au niveau microscopique. La dérivation de solution du problème d'écoulement doit donc définir la notion d'un volume élémentaire représentatif (V.E.R) à l'intérieur duquel les propriétés moyennes du fluide et du matériau sont supposées uniformes et continues (Lefebvre, 2003) [1], figure (I.2). Le volume élémentaire représentatif doit respecter nécessairement les conditions suivantes :

- Les dimensions du V.E.R sont généralement grandes par rapport à la taille du grain.

- Les V.E.R doivent cependant être suffisamment petits pour que les variations d'un Paramètre dans le domaine d'étude puissent être représentées par des fonctions continues.



**Figure (I.2) :** Diagramme schématisé d'un système et d'un volume élémentaire représentatif (Kim et al, 2002) [2]

### I.2.3. Caractérisation géométrique des milieux poreux

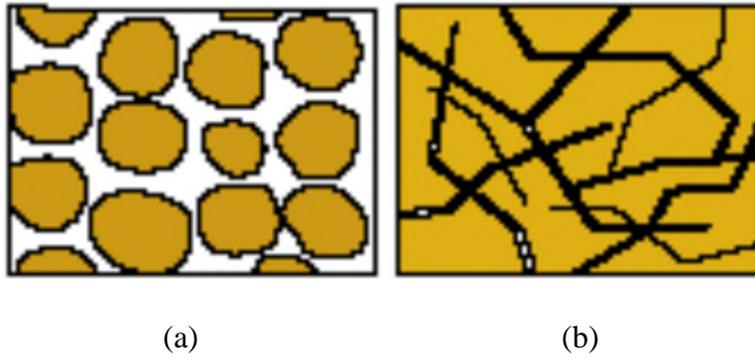
#### I.2.3.1. Porosité

La présence de l'espace vide distribuée dans la matrice solide est connue sous le nom de porosité du milieu poreux.  $V_s$  et  $V_v$  Dénote le volume occupé par les phases solide et liquide respectivement. Nous définissons la porosité ( $\epsilon$ ) du milieu poreux comme étant le rapport du volume des vides (ou pores) au volume total  $V_T$  (somme du volume du solide et du vide). Soit :

$$\epsilon = \frac{V_v}{V_T} = \frac{V_v}{V_s + V_v} \quad (\text{I.2})$$

Puisqu'il s'agit d'un rapport de mêmes propriétés, la porosité n'a pas d'unités et elle est souvent exprimée en pourcentage.

La porosité peut être sous deux formes. La porosité d'interstice figure (I.3.a), et la porosité de fissure figure (I.3.b).



**Figure (I.3) :** types de porosité.

### I.2.3.2. Perméabilité

La perméabilité d'un corps poreux est définie comme la capacité du milieu à laisser passer un fluide. Cette constante caractéristique d'un milieu poreux est liée à la forme des grains et à la porosité. Cette grandeur est déterminée généralement par des mesures expérimentales, à partir de la loi de Darcy régissant le mouvement du fluide dans le milieu poreux. Il y'a des relations qui donne la perméabilité  $K$  en fonction de la porosité  $\varepsilon$  et d'une dimension caractéristique de la matrice solide à l'échelle du pore. On note notamment, la relation de Kozeny-Carman (Delache) [3], qui donne une estimation satisfaisante de ( $K$ ) dans le cas d'un empilement de grains de formes à peu près identiques et dont la distribution de la taille des grains n'est pas trop éloignée d'une taille moyenne  $D$  :

$$K = \frac{D^2 \varepsilon^3}{36C_0(1-\varepsilon)^2} \quad (I.3)$$

$C_0$  est un coefficient de forme, il est compris entre 3.6 et 5. Pour les grains sphériques  $C_0 = 4.8$ .  $D$  dans ce cas représente le diamètre de la sphère.

### I.2.3.3. Tortuosité

La description de la géométrie des pores fait intervenir la notion de connectivité, correspondant à la complexité du chemin continu à travers l'espace des pores. Il faut aussi tenir compte des "bras morts", qui sont nombreux dans les milieux peu poreux et très hétérogènes. Pour décrire ces différents aspects, on introduit un paramètre  $T$  appelé tortuosité, que l'on définit de la manière suivante :

$$\mathbf{T} = \frac{L_e}{L} \quad (\text{I.4})$$

Où ( $L_e$ ) est la longueur réelle moyenne des lignes de courant du fluide traversant un échantillon de longueur ( $L$ ) d'un milieu poreux modélisé sous la forme d'un réseau de capillaires ou ondulés. Ce rapport joue un rôle important dans les problèmes de diffusion.

On note que  $L_e \geq L$ , donc  $\mathbf{T} \geq 1$ . Dans le cas où les tuyaux capillaires sont rectilignes, on obtient  $L_e = L$  donc  $\mathbf{T} = 1$ . Plus  $\mathbf{T}$  est grand plus le milieu est "tortueux",

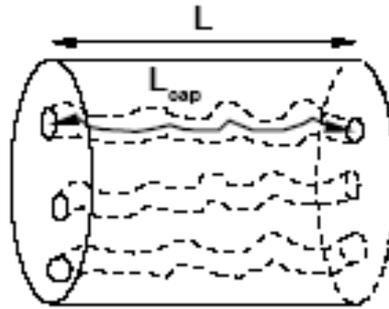


Figure (I.4) : Tortuosité d'un milieu poreux.

## I.2.4. Propriétés thermophysiques d'un milieu poreux

### I.2.4.1. Viscosité effective

La notion de viscosité effective a été initialement introduite par Brinkman afin de traiter la discontinuité des contraintes aux interfaces fluide-poreux. Il a suggéré de prendre la viscosité effective égale à la viscosité du fluide. Lungren a montré que la viscosité effective était fonction de la viscosité du fluide et de la porosité du milieu.

### I.2.4.2. Conductivité effective

La complexité de la structure géométrique du milieu poreux, ainsi que la présence de deux phases (solide et fluide) et leurs propriétés thermiques différentes, fait apparaître la notion de la conductivité thermique effective. Cette dernière est la somme des conductivités thermiques statiques et de la conductivité thermique de dispersion [4] :

$$\lambda_{eff} = \lambda_d + \lambda_T \quad (\text{I.5})$$

Avec :

$\lambda_T$  : conductivité thermique statique,

$\lambda_d$  : conductivité thermique de dispersion.

La conductivité thermique statique dépend des conductivités du fluide et du solide, ainsi que de la porosité. Par contre, la conductivité thermique de dispersion représente l'interaction entre le champ de température et le champ de vitesse à l'échelle des pores.

Il existe plusieurs modèles de conductivité thermique effective, mais dans notre étude on s'intéresse seulement à deux modèles les plus réponsus :

➤ **Modèle en série :**

Le flux de chaleur dans ce modèle traverse successivement les phases solide et fluide. La résistance thermique du milieu est égale à la somme des résistances thermique dans chacune des phases [4]:

$$\frac{1}{\lambda_{eff}} = \frac{(1-\varepsilon)}{\lambda_s} + \frac{\varepsilon}{\lambda_f} \quad (I.6)$$

$\lambda_s$  : Conductivité thermique de la structure solide,

$\lambda_f$  : Conductivité thermique du fluide.

➤ **Modèle en parallèle :**

Le flux de chaleur dans ce modèle traverse en même temps les deux phases qui sont en parallèles. La conductivité effective est égale à la somme des conductivités phasiques pondérées par leur taux d'occupation dans l'espace [4] :

$$\lambda_{eff} = \varepsilon\lambda_f + \lambda_s(1 - \varepsilon)$$

### I.2.5 Modèles d'écoulement dans les milieux poreux

En raison de la complexité géométrique de l'espace des pores, les équations régissant les principes de conservation de quantité de mouvement, d'énergie ou de la masse ne peuvent être mises en application qu'après passage à une échelle macroscopique qui permet de faire une équivalence entre un milieu réel désordonné et un milieu continu fictif. La formulation des équations macroscopiques de conservation est obtenue à partir d'équations microscopiques auxquelles sont appliquées des procédures de changement d'échelle.

Nous présenterons, dans ce qui suit, les différents modèles de régimes d'écoulement construits à partir du modèle de Darcy avec les différentes extensions tenant compte de certains effets existant dans les milieux poreux.

### I.2.5.1. Modèle de Darcy

La dynamique des fluides homogènes dans les milieux poreux est décrite par la loi de Darcy établie en 1856 sur des fondements expérimentaux. Cette, loi mise en évidence à partir d'écoulements unidirectionnels sur des colonnes de sables, fait apparaître la proportionnalité entre le gradient de pression appliqué et le débit d'eau traversant la colonne de sable. Depuis, les sciences hydrogéologiques se sont basées, même pour les écoulements multidirectionnels, sur la loi de Darcy. Elle s'écrit :

$$\vec{\nabla}P = -\frac{\mu}{K}\vec{V} + \rho\vec{g} \quad (\text{I.7})$$

### I.2.5.2. Modèle de Brinkman

Dans le cas où la porosité est importante (de l'ordre de 0.8), il faut tenir compte des effets de diffusion visqueuse au niveau des parois (Delache) [3]. Pour cette situation Brinkman propose de modifier l'équation de Darcy de la façon suivante :

$$\vec{\nabla}_p = \rho_f\vec{g} - \frac{\mu_f}{K}\vec{v}_{fil} + \mu_p\nabla^2\vec{v}_{fil} \quad (\text{I.8})$$

Où :

$\mu_p = \mu[1+2.5(1-\epsilon)]$ , représente la viscosité effective de milieu poreux. En général  $\mu_p$  est considéré équivalent à la viscosité dynamique  $\mu$  (kalla) [5]. Donc la vitesse de filtration est donnée comme suit :

$$\vec{v}_{fil} = -\frac{K}{\mu}[\vec{\nabla}_p - \rho_f\vec{g}] + K\nabla^2\vec{v}_{fil} \quad (\text{I.9})$$

Dans le but d'introduire l'approximation de Boussinesq, en choisissant le modèle de Brinkman, dans ce cas l'équation de la conservation de la quantité de mouvement s'écrit :

$$\vec{v}_{fil} = -\frac{K}{\mu}[\vec{\nabla}_p - \rho_0\vec{g}(\beta(T - T_o))] + K\nabla^2\vec{v}_{fil} \quad (\text{I.10})$$

Avec :  $\beta = -\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)$  : le coefficient d'explosion volumique thermique du fluide

$T_o$  : la température de référence.

### I.2.5.3. Modèle de Forchheimer

Lorsque la loi de darcy n'est pas adaptée aux écoulements à forte vitesse et aux écoulements des gaz à basse pression. En 1974 Scheidegger a examiné les effets de glissement de Kundsén, (la rugosité de la surface interne, l'absorption de la surface, condensation capillaire et la diffusion moléculaire sur la perméabilité), et il a remarqué que les perméabilités aux gaz et liquide d'une même matrice poreuse être remarquablement différentes.

Au début du 20<sup>ème</sup> siècle, Forchheimer a mis en évidence expérimentalement qu'il y a apparition de recirculations à l'échelle du pore lorsque le débit de l'écoulement est important. Ces recirculations produisent une chute supplémentaire de pression exprimée sous la forme d'une fonction quadratique de la vitesse de filtration :

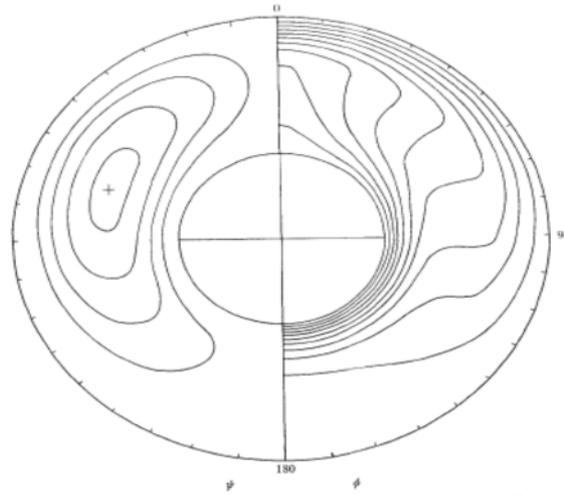
$$\vec{\nabla}P = -\frac{\mu}{K}\vec{V} + C_F K^{\frac{1}{2}} \rho_F |\vec{V}|\vec{V} + \rho \vec{g} \quad (I.11)$$

### I.3. Revue bibliographique

Le but de cette recherche bibliographique est de se mettre au diapason des études existantes réalisées dans le domaine de la convection (naturelle et mixte) dans les anneaux cylindriques horizontaux avec et sans ailettes. La revue de la littérature est vaste et variée tant sur le plan expérimental, analytique ou numérique. Vu l'intérêt scientifique, nous avons jugé utile d'exposer quelques travaux antérieurs sur la convection dans les anneaux cylindriques horizontaux.

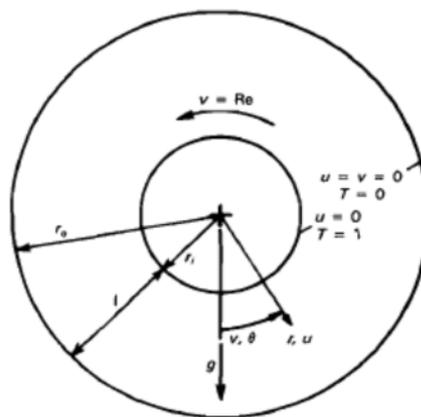
La convection dans les espaces annulaires et particulièrement entre deux cylindres horizontaux dont les surfaces sont isothermes est l'objet d'un intérêt grandissant en raison de leurs nombreuses applications industrielles (stockage d'énergie thermique, le refroidissement des composants électroniques et les câbles de transmission électriques, etc....).

**T. H. Kuehn et al [6]** ont mené une étude expérimentale et numérique sur la convection naturelle dans une cavité cylindrique et mis l'accent sur la distribution de la température, de la vitesse et le taux de transfert de chaleur. L'analyse est faite pour deux fluides différents (l'eau et l'air) et un rapport caractéristique  $L/D_i$  de 0,8 (figure (I.5)).



**Figure (I.5) :** Lignes de courants et d'isothermes pour  $RaL=104$  ;  $Pr=0,7$  ;  $L/Di=0,8$  ;  $\Delta\psi=3,0$  et  $\Delta\Phi=0,1$ .

**Toru Fusegi, Bakhtier Farouk et Kenneth S. Ball [7]** ont conduit une étude expérimentale sur la convection mixte dans une cavité horizontale cylindrique dont le cylindre intérieur est chauffé et tournant dans le sens antihoraire, figure (I.6). Ils ont mis l'accent sur la vitesse d'écoulement et les caractéristiques du flux de transfert de chaleur. Les résultats ont été obtenus pour une gamme du nombre de Grashof allant de  $1,39 \times 10^2$  à  $1,39 \times 10^5$  avec des valeurs variables du paramètre de rotation  $\omega$  (de  $m$  à 1). Le nombre de Prandtl considéré était de 0,72.



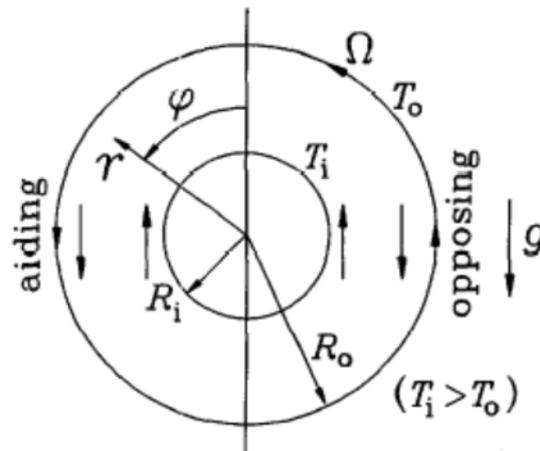
**Figure (I.6) :** Modèle physique considéré dans [7]

**Ashley M. Thornhill et E. kobla Glakpe [8]** ont présenté une étude expérimentale sur la convection naturelle dans un espace annulaire concentrique horizontal et vertical, pour  $Pr=0,7$  et un rapport des diamètres de 2,6. Ils ont montré que la position du cylindre interne a

un effet significatif sur le taux de transfert de chaleur dans l'espace annulaire. Le cas excentrique positif (0.627) présente des effets convectifs plus prononcés comparés au cas excentrique négatif (0.652). Les effets de conductivité sur le cylindre intérieur pour un nombre de Rayleigh de  $10^6$  sont moins importants pour le cas excentrique positif comparé au cas excentrique négatif. L'inverse est vrai sur la partie haute de l'anneau. L'augmentation du nombre de Rayleigh entraîne une augmentation des niveaux de transfert de chaleur.

**T.S. Lee [9]** a conduit une étude numérique sur la convection mixte dans un espace annulaire entre deux cylindres concentriques et excentriques, sous l'effet de la rotation du cylindre intérieur pour déterminer les configurations des isothermes et des lignes de courants. Pour éviter l'interaction entre la convection naturelle et la rotation élevée du cylindre intérieur excentrique ( $Re=2000$ ) qui produit des écoulements tridimensionnels complexes avec des vortex de Taylor, il a limité les simulations numériques à des nombres de Reynolds  $Re < 1500$ . L'état stationnaire du mouvement du fluide soumis à une approximation de Boussinesq, peut être approché par un ensemble d'équations pseudo transitoire. Il constate que pour un nombre de Rayleigh  $Ra > 10^6$ , les résultats numériques obtenus dans la plage de  $Re < 1100$  sont instables. L'auteur a prouvé dans cette recherche que le nombre de Nusselt moyen augmente avec le nombre de Rayleigh pour les deux cas concentriques et excentriques. Pour un nombre de Rayleigh fixe, le nombre de Nusselt moyen diminue pour un cylindre en rotation. Il constate aussi que pour  $Re=140$ , le point d'échange local maximal sur le cylindre extérieur se décale de  $30^\circ$  dans la direction de rotation et diminue en le comparant avec le cas du cylindre fixé. Pour le cylindre intérieur, le point d'échange minimal, correspondant au point de formation du panache thermique, se déplace de  $45^\circ$  dans la direction de rotation. En augmentant le nombre de Reynolds de 140 à 1120, l'échange global entre les deux cylindres diminue, et l'échange local tend à être uniforme le long des surfaces des deux cylindres.

**J. S. Yoo [10]** a conduit une étude numérique sur la convection mixte dans un espace annulaire entre deux cylindres concentriques, figure (I.7). Le cylindre intérieur chaud tourne lentement dans le sens antihoraire avec une vitesse angulaire constante alors que le cylindre extérieur est supposé fixe. Les résultats sont obtenus pour diverses combinaisons de  $Ra$  et  $Re$  et pour  $Pr = 0,7$ . L'objectif de cette étude est d'enquêter sur l'effet de la force centrifuge (due à la rotation du cylindre intérieur) sur les caractéristiques de transfert de chaleur et les caractéristiques de l'écoulement à l'intérieur de l'anneau horizontal en régime de convection mixte.



**Figure (I.7) :** Modèle physique considéré par J. S. YOO [10].

**C. Nour [11]** a relaté l'influence de la viscosité variable sur l'écoulement laminaire forcée d'un fluide newtonien dans un tube annulaire horizontal. Les cylindres intérieur et extérieur sont soumis à un flux thermique constant. Le profil de température à l'entrée est uniforme. L'hypothèse de Prandtl et de Boussinesq ont été adoptées. L'équation de continuité et les équations de mouvement et d'énergie sont résolues numériquement avec la méthode de différences finies. Ils ont constaté que près de la section d'entrée, la convection forcée est le mécanisme dominant et qu'une diminution de la viscosité du fluide avec la température conduit à :

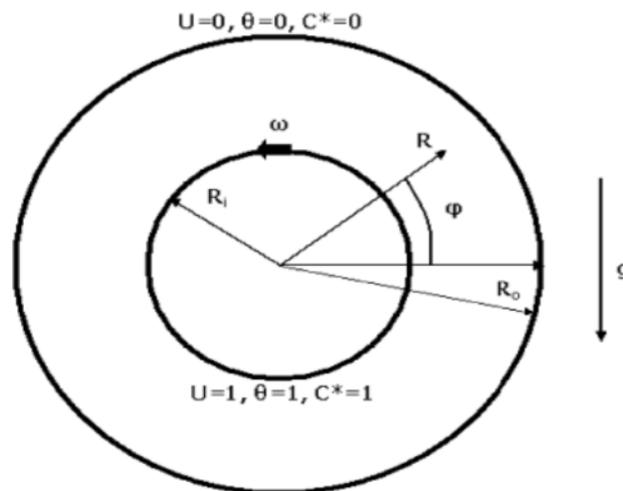
- Une augmentation de la vitesse axiale dans la partie supérieure du conduit annulaire et une diminution dans la partie inférieure ;
- Une élévation de l'intensité d'écoulement secondaire ;
- Une réduction dans la différence de la température entre les parties supérieures et inférieures du cylindre ;
- Une augmentation du coefficient de transfert de chaleur global.

**N. Islam et al [12]** ont étudié numériquement le transfert de chaleur par convection mixte en régime laminaire stationnaire à l'entrée de l'espace annulaire constitué de deux cylindres coaxiaux. Sur le tube intérieur, un flux de chaleur constante est imposé tandis que le tube extérieur est supposé adiabatique. Ils ont trouvé qu'une augmentation des nombres de Rayleigh et de Prandtl ainsi que du rapport d'aspect engendre une augmentation du transfert de chaleur.

**P. Teertstra, M. M. Yovanovich et J. R. Culham [13]** ont analysé analytiquement la convection naturelle dans une cavité cylindrique horizontale et dans d'autres géométries

(cercle dans un carré, un diamant dans un carré, ellipse dans un cercle, un carré dans un cercle et hexagonal dans un cercle ...). Le but de cette étude est de prédire le taux de transfert de chaleur total (par unité de longueur) dans l'enceinte intérieure en régime de convection naturelle.

Durant les deux dernières décennies, les chercheurs se sont intéressés aux cavités en présence de partitions et des obstacles de différentes formes (carré, cylindre...). **M.A Teamah [14]** a considéré la convection mixte dans l'espace annulaire limité par deux cylindres coaxiaux en régime à double diffusion (thermique et massique). Le cylindre intérieur maintenu à une température chaude  $T_h$  tourne dans le sens antihoraire tandis que le cylindre extérieur immobile est à une température froide  $T_c$ , figure (I.8). L'étude est conduite pour les  $10^6 \geq Ra_T \geq 10^2$ ;  $0,1 \leq Le \leq 10$ . Dans cette étude le nombre de Prandtl, le nombre de Reynolds rotatif et le rapport des rayons sont maintenus constants et valent respectivement  $Pr=0,7$ ;  $Re=10^2$  et  $r_e/r_i=0,5$ . Une comparaison a été faite avec les résultats disponibles dans la littérature et une bonne concordance est constatée.

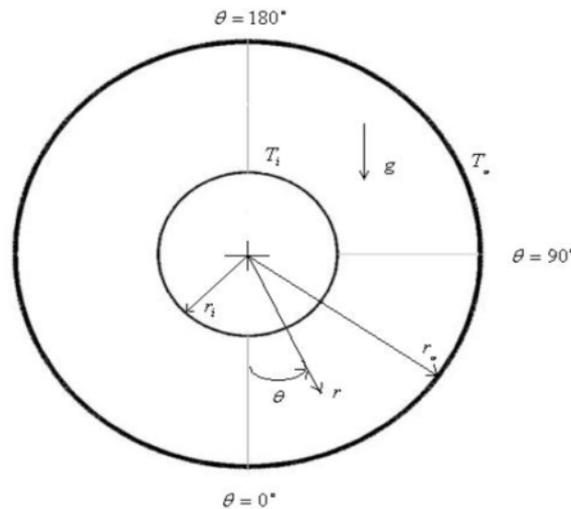


**Figure (I.8) :** Schéma du problème considéré par Teamah [14]

La stabilité de la convection mixte instationnaire dans un anneau horizontal entre deux cylindres concentriques a été analysée numériquement par **K. Kahveci [15]**. Il a considéré un cylindre intérieur chaud tournant à une vitesse angulaire constante alors que le cylindre extérieur supposé froid est fixe. L'approximation de Boussinesq est utilisée pour formuler les forces de flottabilité. Les équations d'écoulement de fluide et de transfert de chaleur dans l'espace annulaire ont été résolues par une méthode des éléments finis pour différentes valeurs des paramètres géométriques (rapport de rayon) et des nombres de Rayleigh et de Reynolds. L'évolution de l'écoulement convectif et du transfert de chaleur a été exprimée par le nombre

moyen de Nusselt sur le cylindre extérieur. Le flux devient plus instable avec l'augmentation du Nombre de Reynolds.

**Hazar et al [16]** ont considéré l'écoulement dans un espace annulaire compris entre deux cylindres concentriques. Le cylindre extérieur étant refroidi et le cylindre intérieur étant chauffé, figure (I.9). La comparaison avec les résultats expérimentaux de Kuehn et Goldstein [6] montrent un bon accord. Les isothermes, les lignes de courant et le champ de vitesse ont été présentés pour  $Ra=2,66 \times 10^4$ .



**Figure (I.9) :** Modèle physique considéré par [16].

Le refroidissement par convection naturelle à l'aide des surfaces ailetées offre souvent une solution économique et gratuite dans de nombreuses situations. Pour améliorer le transfert de chaleur, les ailettes sont utilisées dans de nombreux systèmes techniques pour dissiper la chaleur à l'environnement.

**Yucel et Dinler [17]** ont modélisé et résolu numériquement le cas d'un écoulement laminaire et turbulent à travers une conduite munie d'ailettes pour améliorer le transfert de chaleur. Les équations gouvernantes soumises aux conditions aux limites sont discrétisées par la méthode des volumes finis. Les résultats trouvés dans le cas d'un écoulement laminaire montrent que le nombre de Nusselt moyen diminue et le facteur de frottement augmente avec un nombre croissant d'ailettes. Pour le cas d'un écoulement turbulent, l'augmentation de  $Re$  et de la perturbation dans l'écoulement provoque une augmentation du nombre de Nusselt.

**B. Premachandran et al [18]** ont considéré la convection mixte dans un canal horizontal dans lequel quatre sources de chaleur sont montées sur sa paroi inférieure. Les surfaces extérieures du canal sont supposées adiabatiques. L'écoulement est supposé, laminaire, incompressible, hydrodynamiquement et thermiquement développé. Le fluide

utilisé est l'air. Les équations gouvernantes sont résolues en employant la méthode des volumes finis. L'algorithme SIMPLE est employé pour traiter le couplage vitesse-pression. L'objectif principal du travail est d'étudier l'effet des forces de flottabilité pour des paramètres géométriques fixes. Les résultats indiquent que la température diminue avec l'augmentation du nombre de Reynolds et une augmentation du nombre de Grashof provoque une diminution linéaire de la température.

**Yong et al. [19]** ont étudié numériquement le transfert de chaleur en régime de convection mixte dans un canal horizontal en présence de chicanes (obstacles) disposées périodiquement. Les résultats ont montré que le transfert de chaleur par convection change d'un état stable vers un état instable avec l'augmentation du nombre de Reynolds.

Les articles mentionnés jusqu'ici traitent uniquement la convection (naturelle et mixte) entre deux cylindres coaxiaux. Toutefois, la convection dans les anneaux cylindriques coaxiaux, en munissant le cylindre intérieur ou extérieur d'ailettes, a reçu une attention particulière au cours de ces dernières années en raison de son apport thermique dans plusieurs applications industrielles.

**A.K. Tolpadi et T. H. Kuehn [20]**, ont conduit une étude expérimentale sur la convection naturelle autour d'un cylindre horizontal. Il muni d'une ailette longitudinale. La longueur, la conductivité de l'ailette, les nombres de Rayleigh et de Prandtl du fluide, étant fixés, ils ont varié l'angle d'orientation de l'ailette (de la position verticale haute à la position verticale basse). Les résultats ont montré qu'il y a décalage du panache thermique vers le bout de l'ailette lorsque  $0 < \phi < 50^\circ$  et une zone de transition à  $50 < \phi < 65^\circ$  ou deux panaches se forment, l'une au bout de l'ailette l'autre dans la partie haute du cylindre. Pour  $65^\circ < \phi < 180^\circ$  le panache se forme dans la partie haute du cylindre comme dans le cas sans ailette. Le nombre de Nusselt sur l'ailette décroît en variant son orientation de la position verticale (basse) à la position verticale (haute), cela étant dû à l'existence d'un faible gradient de température dans l'ailette. Une comparaison des résultats pour le nombre de Nusselt locale sur la partie du cylindre sans ailette avec le cas d'un cylindre seul montre que l'échange est affecté au voisinage de l'ailette, et en s'éloignant du voisinage de celle-ci l'échange devient approximativement le même. L'échange global dans le cas du cylindre avec ailette diffère peu avec un cylindre sans ailettes.

**Rustum et Soliman [21]** ont présenté des résultats d'une étude numérique par la méthode des différences finies sur la convection mixte dans un conduit cylindrique horizontal

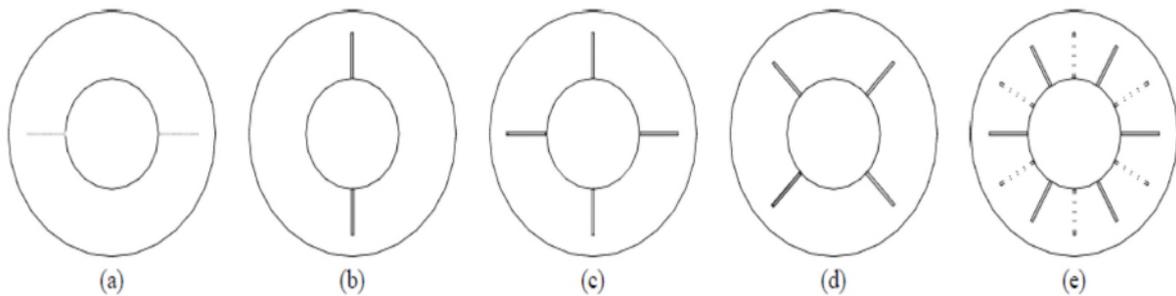
avec plusieurs ailettes longitudinales droites distribuées régulièrement sur la circonférence intérieure. Le fluide est newtonien et incompressible est en écoulement laminaire établi dont les propriétés thermophysiques sont constantes à l'exception de la densité qui dépend de la température pour tenir compte de l'effet de la flottabilité. La conduction axiale et la dissipation visqueuse dans le fluide sont supposées négligeables. Les résultats obtenus correspondant à un nombre d'ailettes  $M = 4$ , une hauteur  $H = 0.2, 0.5$  et  $0.8$   $Pr = 7$  et différents nombres de Grashof modifié  $0 \leq Gr^+ \leq 2 \times 10^6$ . Les résultats montrent que la présence d'ailettes internes retarde l'apparition de la convection naturelle et atténue l'amélioration du coefficient de frottement et le nombre de Nusselt. Ces résultats sont comparés avec le cas des tubes lisses existant dans la littérature et un accord satisfaisant est obtenu.

**M.I. Farinas, A. Garon et K. Saint-Louis [22]** ont conduit une simulation numérique par la méthode des éléments finis sur la convection naturelle dans un espace annulaire délimité par deux cylindres coaxiaux, le cylindre intérieur étant muni d'ailettes. Le but recherché été de voir l'influence de la géométrie des ailettes (bout pointu, rond et divergent), leur longueur ainsi que leur orientation pour un nombre de Rayleigh variant de  $10^3$  -  $10^6$ . Ils ont constaté une amélioration de 10 % des échanges thermiques en utilisant une configuration à deux ailettes (décalées de  $30^\circ$  par rapport à la verticale) par rapport à la configuration de deux ailettes (verticales). En comparant l'efficacité des ailettes, ils constatent aussi qu'elle diminue en augmentant le nombre de Rayleigh pour les trois géométries et elle est plus grande pour les ailettes avec bout rond. Le nombre de Nusselt moyen sur le cylindre extérieur est proportionnel au nombre de Rayleigh et la longueur des ailettes, néanmoins l'augmentation du nombre de Nusselt avec Ra est accentuée pour des ailettes longues (elles génèrent des flux non stagnants dans le bas de la géométrie et un flux convectif beaucoup plus important). Ainsi les ailettes longues utilisent la surface d'échange plus efficacement que les ailettes courtes.

**B.A. Abu-Hijleh [23]** s'est intéressé au cas d'un cylindre muni des barres (ailettes) de faibles conductivités thermiques pour réduire le transfert de chaleur par convection naturelle sur ce dernier. Le but été d'optimiser le nombre, la longueur, et la position de ces ailettes sur le cylindre intérieur en calculant la génération de l'entropie de ces barres sur leur voisinage. Il a montré qu'un positionnement approprié d'un ou deux barres peut réduire le transfert de chaleur 70% de la valeur trouvée lorsqu'on utilise onze barres.

**M. Rahnama et M. Farhadi [24]**, ont considéré la convection naturelle turbulente dans une cavité cylindrique limitée par deux cylindres coaxiaux, dont le cylindre intérieur est

muni d'ailettes, figure (I.10). Leur étude s'est portée sur l'influence de la position, la forme, le nombre et les dimensions des ailettes sur les lignes de courant et les lignes d'isothermes ainsi que les variations du nombre de Nusselt. Ils ont montré que le nombre de Nusselt locale diminue en augmentant, le nombre et la longueur des ailettes, à cause de l'effet de blocage qu'elles ont sur le flux (le transfert de chaleur). La position des ailettes n'a pas un effet notable sur le nombre de Nusselt moyen, mais influe considérablement le flux et le champ de température.

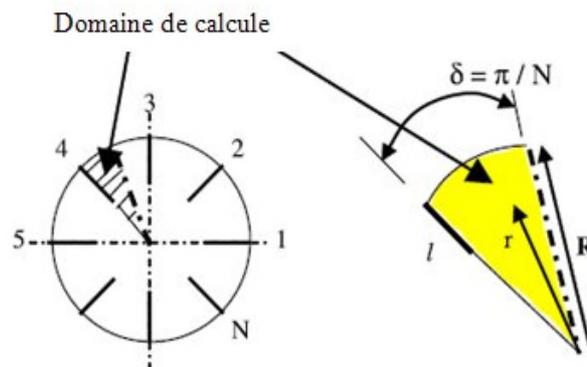


**Figure (I.10)** : Différents arrangements d'ailettes (a) : 2 ailettes horizontales, (b) : 2 ailettes verticales, (c) : 4 ailettes (2 horizontales et 2 verticales), (d) : 4 ailettes décalées de  $45^\circ$  par rapport à l'horizontale et à la verticale, (e) : 12 ailettes.

**Mir et al. [25]** ont simulé numériquement l'écoulement laminaire en convection forcée dans un espace annulaire autour d'ailettes attachées sur le cylindre intérieur. Ils ont considéré l'influence des ailettes sur le taux de transfert de chaleur. L'écoulement entre les deux cylindres est en régime établi et la dissipation visqueuse est négligeable. Comme condition aux limites, ils ont choisi un flux de chaleur constant imposé sur le cylindre intérieur tandis que la paroi extérieure est adiabatique. Les équations de quantité de mouvement et de l'énergie sont discrétisées par la méthode des différences centrées et le système algébrique linéaire est résolu par la méthode de sous-relaxation (SOR). Les résultats ont été obtenus pour les paramètres suivants : rapport des rayons 0.5, demi-angle d'ailette  $\beta = 5^\circ$ , différentes longueurs d'ailette  $H^* = 0.2 ; 0.4 ; 0.6 ; 0.8 ; 1.0$  et différents nombres d'ailettes  $N = 6, 12, 18, 24, 30$ . Le modèle est validé dans le cas d'une ailette de longueur nulle avec des résultats existant (cylindres concentriques) pour des rapports de rayon de 0.05 ; 0.1 ; 0.25 et 0.5 et un accord excellent est constaté.

**Al-Sarkhi et Abu-Nada [26]** ont abordé le cas bidimensionnel d'un transfert de chaleur en convection forcée laminaire pleinement développée à l'intérieur d'un cylindre

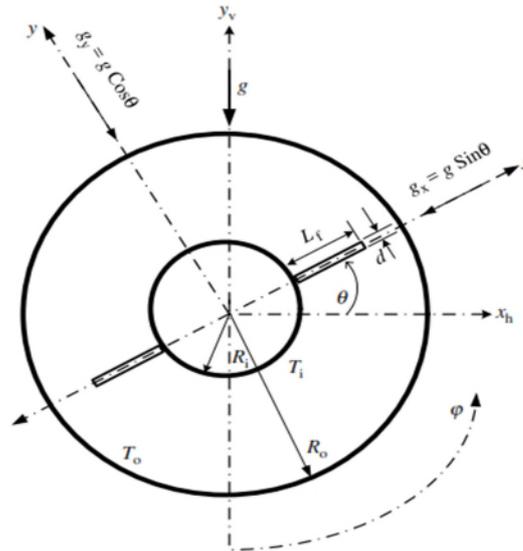
circulaire avec des ailettes radiales, droites et distribuées régulièrement sur la circonférence du cylindre. L'épaisseur de l'ailette étant négligeable, le fluide est soumis à un flux de chaleur constant sur sa longueur axiale. À cause de la symétrie du problème, le domaine du calcul est exécuté sur un demi-secteur, figure (I.11) (le secteur complet est la région entre les deux ailettes consécutives). Les équations gouvernantes sont résolues par la méthode des volumes finis avec un maillage de (24x50) (direction azimutale et radiale). La hauteur dimensionnelle de l'ailette  $H = l/R$  (longueur de l'ailette sur le rayon du tube) varie de 0.1 à 0.9 et le nombre d'ailettes varie de 5 à 80. Le nombre de Nusselt maximal ne peut pas être réalisé à la hauteur maximale et le nombre d'ailettes maximales. Il y a un certain nombre d'ailettes et une certaine hauteur d'ailettes qui permettent d'arriver à un nombre de Nu maximal. En général l'augmentation du nombre de Nusselt est obtenue en augmentant la hauteur de l'ailette. Le paramètre  $f.Re$  diminue avec l'augmentation du nombre d'ailettes « N ». La distribution de la vitesse et de la température à l'intérieur du cylindre est fortement liée à la hauteur de l'ailette et le nombre d'ailettes N.



**Figure (I.11) :** Cylindre avec des ailettes internes

**Kiwan et Zeitoun [27]** ont étudié numériquement la convection naturelle laminaire entre deux cylindres concentriques munis d'ailettes poreuses attachées au cylindre intérieur, figure (I.12). Les équations gouvernantes sont discrétisées par la technique des volumes finis et l'équation de Darcy-Brinkman a été utilisée pour résoudre l'écoulement de fluide à l'intérieur des milieux poreux. Les effets du rapport de conductivité des ailettes, des nombres de Darcy (Da) et de Rayleigh (Ra) sur le nombre de Nusselt moyen ont été étudiés. Les nombres de Nusselt moyens obtenus pour les ailettes poreuses sont comparés avec ceux trouvés avec des ailettes non poreuses pour une large gamme du nombre de Rayleigh. Cette amélioration du transfert de chaleur atteint 75% avec  $Ra = 5.10^4$  et  $Da = 2.5.10^{-2}$ . Ils ont

remarqué que les différents taux de transfert de chaleur obtenus avec les ailettes solides décroissent dans le cas des cylindres équipés d'ailettes poreuses avec l'augmentation d'angle d'inclinaison des ailettes.



**Figure (I.12) :** la géométrie d'étude [27]

**A. Cheddadi, M.T. Ouazzani et Y. Taher. [28]** ont étudié numériquement les effets thermoconvectifs induits par la disposition de deux ailettes chauffantes au sein d'une cavité annulaire cylindrique remplie d'air supposé visqueux, incompressible et obéissant à l'approximation de Boussinesq. Le cylindre intérieur est supposé chaud alors que le cylindre extérieur et les ailettes sont considérés froids. L'intégration des équations de conservation est basée sur la discrétisation par la méthode des différences finies avec un schéma centré, les deux ailettes sont présentées avec une largeur  $l$  et une hauteur  $H$  égales à 0.140 et 0.109 respectivement et pour des nombres de Rayleigh ( $1000 \leq Ra \leq 10000$ ). Les résultats obtenus portent principalement sur l'influence de la position angulaire des blocs chauffants montre que les échanges de chaleur engendrés sont favorisés par un placement des blocs dans la partie supérieure de l'espace annulaire.

**SC Haldar, GS Kochhar, K. Manohar et R.K Sahoo [29]** ont exploré numériquement l'influence de différents paramètres (épaisseur, nombre et longueur des ailettes) sur les régimes de la convection naturelle autour d'un cylindre muni de 18 ailettes longitudinales de forme rectangulaire uniformément espacées. La surface du cylindre a été considérée isotherme pour  $Pr=0.7$  et  $Gr=10^5$ . Ils ont montré que les ailettes elles-mêmes contribuent très peu au transfert de chaleur totale, mais leur présence modifie considérablement la température du fluide adjacent à la surface du cylindre et par conséquent

le transfert de chaleur dans la zone sans ailettes. Le nombre optimal d'ailettes est de 6 (lorsque le coût des ailettes est pris en considération). Le taux de transfert de chaleur diminue avec l'augmentation de l'épaisseur au-delà d'une valeur réduite d'environ 0,02.

## **Conclusion**

Dans ce chapitre nous avons mis l'accent sur la convection dans les anneaux cylindriques horizontaux munis d'ailettes (poreuse). À cet effet, une représentation des outils, que nous jugeons nécessaires afin de caractériser ces systèmes, ont été mise en évidence. Une étude bibliographique nous a montré que le transfert de chaleur par convection induit dans un anneau cylindrique horizontal a fait l'objet de nombreuses études en raison de l'importance du phénomène dans de nombreux domaines d'applications. Tous les travaux cités dans ce travail, clarifient un ensemble de phénomènes physiques observés dans les cavités. Cependant, le cas de la convection mixte entre deux cylindres concentriques horizontaux munie d'ailettes poreuses n'a jamais été traité.

Dans ce travail, nous présentons une étude numérique de la convection mixte dans un anneau horizontal munie de deux ailettes poreuses.

## Introduction

Les systèmes dynamiques traités dans ce travail d'écrivent des phénomènes physiques résultants des modes de transfert de chaleur. En effet, ces systèmes sont de nature complexe en raison du caractère non linéaire. Or, pour la mise en évidence de ces problèmes, plusieurs voies et approches sont possibles à savoir, l'approche expérimentale, analytique et numérique. Dans certaines situations, l'approche expérimentale s'avère impossible à réaliser vu qu'elle présente des difficultés majeures notamment en termes de temps et moyens techniques donc de coût. Aussi, l'approche analytique des équations n'est possible que pour des cas simples. C'est pour cette raison qu'on a souvent recours à l'approche numérique telle que les différences finies, les éléments finis, les volumes finis, les méthodes spectrales ou l'approche de Lattice Boltzmann, etc... afin d'avoir des solutions les plus proches des cas réels. Dans ce manuscrit, nous avons fait appel à la méthode des volumes finis. En effet, cette méthode est conservative, donc parfaitement adaptée à la résolution de loi de conservation. Son avantage est qu'elle est facilement utilisable avec des maillages non structurés, car, en matière de discrétisation des lois de conservation, sa formulation ne tient pas compte de la complexité du maillage. En revanche, les caractéristiques géométriques du maillage peuvent jouer un rôle prépondérant lorsque des flux diffusifs entrent en jeu.

L'étude du transfert de chaleur par convection mixte dans un espace annulaire en présence des ailettes poreuses fixées sur le cylindre intérieur repose sur les équations couplées de conservation de masse, quantité de mouvement et de l'énergie.

Dans ce chapitre, il sera question de la description du problème physique considéré à savoir la définition de la géométrie et des conditions aux limites associées aux équations de conservation nécessaires.

### II.1. Géométrie étudiée :

La géométrie montrée sur la figure (II.1), présente le modèle physique considéré ainsi que le système de coordonnées choisi. Deux longs cylindres concentriques sont considérés, ils sont maintenus à des températures uniformes et constantes. Le cylindre extérieur de rayon ( $r_e$ ) et à la température  $T_c$  tourne dans le sens inverse des aiguilles d'une montre avec une vitesse angulaire constante ( $\omega$ ), tandis que le cylindre intérieur de rayon ( $r_i$ ) et à la température  $T_h$  est fixe ( $T_h > T_c$ ). Deux ailettes poreuses de section rectangulaire et de longueur ( $l_a$ ) sont montées

longitudinalement sur le cylindre intérieur. Les ailettes sont supposées être très conductrices de sorte que leur température reste uniforme et égale à la température de leurs bases qui sont en contact avec le cylindre interne  $T_h$ . Les cylindres sont supposés être assez longs pour qu'une analyse bidimensionnelle puisse être envisagée ( $x$  et  $y$ ). Le gradient de température existant entre les deux cylindres génère la convection naturelle tandis que le cylindre extérieur rotatif crée la convection forcée. On s'intéressera à l'écoulement du fluide dans l'espace annulaire ( $r_0 = r_e - r_i$ ).

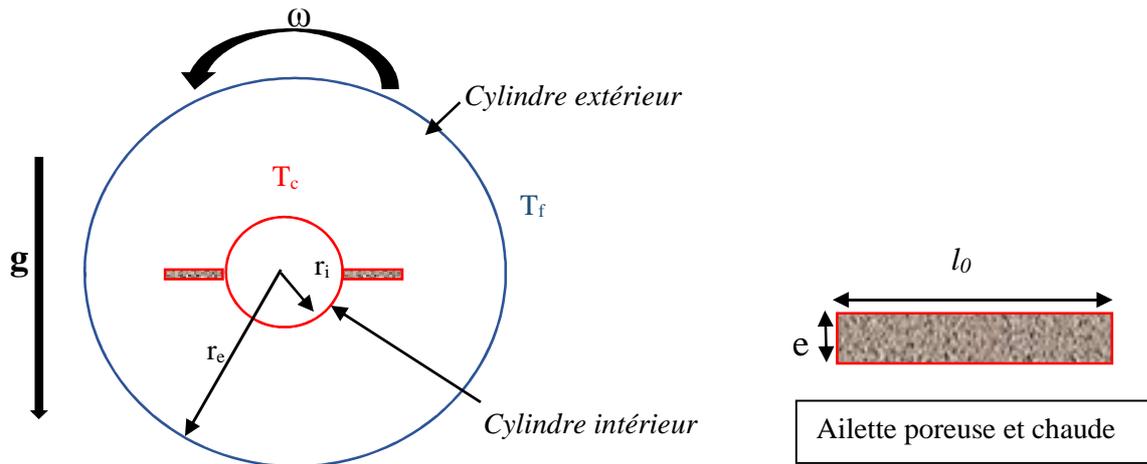


Figure (II.1) : géométrie du problème

## II.2. Hypothèses simplificatrices

Pour la modélisation du problème, nous adoptons les hypothèses suivantes :

- ❖ Les transferts de chaleur par rayonnement et de masse sont négligeables.
- ❖ Le fluide étudié est un fluide newtonien incompressible.
- ❖ L'écoulement et le transfert de chaleur sont bidimensionnels.
- ❖ L'écoulement est laminaire et permanent.
- ❖ La dissipation visqueuse est négligée dans l'équation de l'énergie.
- ❖ Les propriétés thermo-physiques du fluide ( $\rho$ ,  $\mu$ ,  $k$ ,  $\beta$ ,  $C_p$ ) sont supposées constantes. Cependant la densité du fluide dans le terme de la force de gravité varie linéairement avec la température elle est donnée par l'approximation de Boussinesq.

- ❖ En ce qui concerne la matrice poreuse solide, elle est perméable, isotrope, indéformable, et complètement saturée par le fluide.
- ❖ A l'interface on a un équilibre thermique et dynamique.

### II.3. Équations gouvernantes

Le mouvement du fluide est complexe, il est induit à la fois par la rotation de la paroi intérieure et la poussée d'Archimède (gradient thermique entre les deux parois). De ce fait, les équations de conservation de la dynamique des fluides sont couplées à l'équation de l'énergie.

#### II.3.1. Forme dimensionnelle des équations

##### II.3.1.1 Domaine fluide libre

Les équations de conservation (équation de continuité, équations de quantités de mouvement : Navier-Stokes et équation de l'énergie) sous forme vectorielle et projetée s'écrivent comme suite :

#### Équations vectorielles :

- **Équation de continuité :**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}) \quad (\text{II.3})$$

Pour un écoulement incompressible ( $\rho$  constant), l'équation (II.3) devient :

$$\text{div}(\vec{V}) = 0 \quad (\text{II.4})$$

- **Équation de quantité de mouvement :**

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} - \overrightarrow{\text{grad}} p + \mu \Delta \vec{V} \quad (\text{II.5})$$

Où :

$\rho \frac{d\vec{v}}{dt}$  : est le taux de variation de la quantité de mouvement,

$\overrightarrow{\text{grad}} p$  : les forces dues à la pression,

$\mu \Delta \vec{V}$  : les forces de viscosité,

$\vec{F}$  : les forces de volume qui admettent comme composantes :

- **Équation de l'énergie :**

$$\rho C_p \left( \frac{dT}{dt} \right) = \lambda \nabla^2 T \quad (\text{II.6})$$

avec :  $d(\cdot)/dt$  est la dérivée particulaire et  $\nabla^2 = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$

### Équations projetées

- **Équation de continuité :**

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{II.7})$$

- **Équation de quantité de mouvement :**

Projection sur l'axe x :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (\text{II.8})$$

Projection sur l'axe y :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \rho g \beta (T - T_0) \quad (\text{II.9})$$

- **Équation de l'énergie :**

$$\rho C_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (\text{II.10})$$

Où  $\lambda$  est la conductivité thermique du fluide et  $C_p$  la chaleur spécifique à pression constante.

#### II.3.1.2 Domaine poreux

Dans le cas général, les équations de la dynamique des fluides dans les milieux poreux saturés sont régies par le modèle dit de Darcy-Brinkman- Forchheimer. Dans notre cas, on s'est limité au modèle dit de Darcy-Brinkman. Ainsi, les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement ainsi que l'équation de l'énergie s'écrivent :

$$\text{div}(\vec{V}) = 0$$

$$\frac{\rho_f}{\varepsilon^2} \left( \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \nabla \vec{V} \right) = -\nabla P + \rho_f \vec{g} + \mu_{eff} \nabla^2 \vec{V} - \frac{\mu_f}{K} \vec{V} \quad (\text{II.11})$$

$$(\rho C_p)_f \left( \frac{dT}{dt} \right) = \lambda_{eff} \nabla^2 T \quad (\text{II.12})$$

**Équations projetées**

- **Équation de continuité :**

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

- **Équation de quantité de mouvement :**

Projection sur l'axe x :

$$\rho_f \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\varepsilon^2 \frac{\partial p}{\partial x} + \varepsilon^2 \mu_{eff} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \varepsilon^2 \frac{\mu_f}{K} u \quad (\text{II.13})$$

Projection sur l'axe y :

$$\rho_f \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\varepsilon^2 \frac{\partial p}{\partial y} + \varepsilon^2 \mu_{eff} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \varepsilon^2 \frac{\mu_f}{K} v + g\beta(T - T_0) \quad (\text{II.14})$$

- **Équation de l'énergie :**

$$(\rho C_p)_f \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \lambda_{eff} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (\text{II.15})$$

$\varepsilon$ ,  $K$ ,  $\mu_{eff}$  et  $\lambda_{eff}$  représentent respectivement la porosité, la perméabilité, la viscosité dynamique effective et la conductivité effective du milieu poreux considérés.

**II.3.2 Conditions aux limites**

Les conditions aux limites associées à ces équations sont les suivantes :

Cylindre extérieur $r_e = \sqrt{x^2 + y^2}$	$u = \omega r_i \sin(\varphi)$	$v = \omega r_i \cos(\varphi)$	$T = T_f$
Cylindre intérieur $r_i = \sqrt{x^2 + y^2}$	$u = 0$	$v = 0$	$T = T_c$
Ailettes	$u = 0$	$v = 0$	$T = T_c$

**Tableau II.1** : les conditions aux limites.

### II.3.3 Forme adimensionnelle des équations

- **Grandeurs de référence :**

L'adimensionnement des équations nous permet de généraliser l'analyse du problème physique considéré. Pour définir des variables réduites nécessaires à cet adimensionnement il est impératif de choisir des grandeurs de références liées au problème traité :

Dimension linéaire caractéristique	$l_{ref} = r_e - r_i = r_0$
Vitesse de référence	$u_0 = \omega r_i$
Pression de référence	$P_{ref} = \rho(u_0)^2$
Température de référence	$T_{ref} = T_h - T_c$

**Tableau II.2 :** les grandeurs de références.

- **Variables adimensionnelles :**

En tenant compte de ces grandeurs de références ci-dessus, on définit les variables sans dimension suivantes :

$$\begin{aligned}
 X &= x / l & Y &= y / l & (Y=y/H) \\
 U &= u / u_0 & V &= v / u_0 & P = \frac{p}{p_{ref}} \\
 \theta &= \frac{(T - T_c)}{(T_h - T_c)} & \tau &= \frac{t}{l/u_0}
 \end{aligned}$$

#### II.3.3.1 Domaine fluide

- **Équation de continuité :**

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (\text{II.16})$$

- **Équation de quantité de mouvement :**

L'axe des X :

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + \left[ U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} \right] = - \frac{\partial P}{\partial X} + \frac{1}{Re} \left[ \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right] \quad (\text{II.17})$$

L'axe des Y :

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + \left[ U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} \right] = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{1}{Re} \left[ \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right] + Ri\theta \quad (\text{II.18})$$

- **Équation de l'énergie :**

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \left[ U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right] = \frac{1}{Re.Pr} \left[ \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right] \quad (\text{II.19})$$

### II.3.3.2 Domaine poreux

Dans le milieu poreux on ajoute deux autres variables adimensionnelles qui sont le rapport de la conductivité thermique effective  $\lambda_{\text{eff}}$  du milieu poreux sur celle du fluide  $\lambda_f$  et le rapport de la viscosité dynamique  $\mu_{\text{eff}}$  du milieu poreux sur celle du fluide  $\mu_f$  qui s'écrivent :

$$\lambda^* = \frac{\lambda_{\text{eff}}}{\lambda_f} \quad ; \quad \mu^* = \frac{\mu_{\text{eff}}}{\mu_f}$$

- **Équation de quantité de mouvement :**

L'axe des X :

$$\left( U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} \right) = -\varepsilon^2 \frac{\partial P}{\partial X} + \frac{\varepsilon^2}{Re} \left[ \mu^* \left( \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) \right] - \varepsilon^2 \frac{1}{Re.Da} U \quad (\text{II.20})$$

L'axe des Y :

$$\left( U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} \right) = -\varepsilon^2 \frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{\varepsilon^2}{Re} \left[ \mu^* \left( \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) \right] - \varepsilon^2 \frac{1}{Re.Da} V + \frac{Gr}{Re^2} \theta \quad (\text{II.21})$$

- **L'équation de l'énergie :**

$$\left[ U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right] = \frac{\lambda^*}{Re.Pr} \left[ \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right] \quad (\text{II.22})$$

### II.3.4 Conditions aux limites adimensionnelles :

$\tau = 0$	$U = V = 0$	/	/
Cylindre intérieur $R_e = \sqrt{X^2 + Y^2}$	$U = 0$	$V = 0$	$\theta = 1$
Cylindre extérieur $R_i = \sqrt{X^2 + Y^2}$	$U = \omega R_i \sin(\varphi)$	$V = \omega R_i \cos(\varphi)$	$\theta = 0$

**Tableau II.3** : conditions aux limites adimensionnelles

Sachant que  $Re$  est le nombre de Reynolds,  $Gr$  est le nombre de Grashof,  $Pr$  est le nombre de Prandtl,  $Ri = Gr/Re^2$  est le nombre de Richardson et  $Da$  le nombre de Darcy, comme résumé dans le tableau ci-dessous :

Nombre	Définition	Fonction
Nombre de Darcy	Rapport entre la perméabilité du milieu et l'air de section transversal.	$Da = \frac{K}{H^2}$
Nombre de Prandtl	Rapport entre la diffusivité de quantité de mouvement (viscosité cinématique) et la diffusivité thermique.	$Pr = \mu \frac{C_p}{\lambda} = \frac{\nu}{\alpha}$
Nombre de Grashof	Rapport entre les forces de gravité et les forces visqueuses.	$Gr = \frac{g\beta\Delta TL^3}{\nu^2}$
Nombre de Rayleigh	Rapport entre les forces de flottabilité et les forces visqueuses	$Ra = \frac{g\beta\Delta TL^3}{\nu\alpha}$ $= Gr.Pr$
Nombre de Reynolds	Rapport entre les forces d'inertie et les forces visqueuses.	$Re = \frac{u_0 l_{ref}}{\nu}$

**Tableau II.4** : expression des nombres sans dimensions

## II.5 coefficients de transfert de chaleur :

### II.5.1 Nombre de Nusselt local :

Le transfert de chaleur est généralement représenté par un nombre dit de Nusselt qui met en évidence l'importance de transfert de chaleur par convection par rapport au transfert de chaleur par conduction. Il s'écrit comme suit :

$$Nu = h \frac{l}{\lambda_f} \quad \text{avec : } h = \frac{q}{\Delta T} \quad \text{et : } q = -\lambda_f \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r_e = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

ou encore sous forme adimensionnelle 
$$Nu = - \left. \frac{\partial \theta}{\partial R} \right|_{R_e = l\sqrt{X^2 + Y^2}} \quad (\text{II.23})$$

### II.5.2 Nombre de Nusselt moyen :

Le nombre de Nusselt moyen est la valeur moyenne obtenue par intégration de la valeur locale sur une paroi donnée :

$$\overline{Nu} = - \int Nu \quad (\text{II.24})$$

## II.6 Conclusion :

Dans ce chapitre nous avons exposé les équations régissant le problème à étudier, ainsi que les conditions aux limites associées. Étant donné la complexité de ses équations aux dérivées partielles, elles ne peuvent prétendre à une résolution analytique directe. Nous avons donc opté pour une résolution numérique, en utilisant le code de calcul Fluent.

Les deux chapitres qui suivent seront consacrés, respectivement, à la représentation de la méthode numérique utilisée pour modéliser le problème et à l'interprétation des différents résultats de simulation dans le cas de la convection mixte dans l'anneau horizontal avec deux ailettes poreuses.



**Introduction :**

Pour résoudre numériquement les équations aux dérivées partielles régissant le phénomène physique abordé dans le chapitre précédent, il est nécessaire de procéder à leurs discrétisations dans le but d'obtenir un système d'équations algébriques dont la résolution permettra la détermination des variables mise en jeu par le phénomène physique considéré. Il existe plusieurs méthodes pour arriver à cette fin, parmi lesquelles on citera : La méthode des différences finies, la méthode des éléments finis et la méthode des volumes finis.

**Méthode des différences finies :** est la plus ancienne des méthodes numériques, elle a été introduite en 18<sup>ème</sup> siècle par Euler. Elle est de loin la plus adaptée et la plus facile d'utilisation pour les problèmes à géométrie simple (Kalla) [5]. Cette méthode est basée sur la technique du développement en séries de Taylor qui permet l'approximation des dérivées partielles de différents ordres. L'application de la méthode des différences finies permet de transformer un système d'équations aux dérivées partielles en un système d'équations algébriques. Qui par la suite peut être résolu en le mettant sous la forme d'un système linéaire  $AX=b$ .

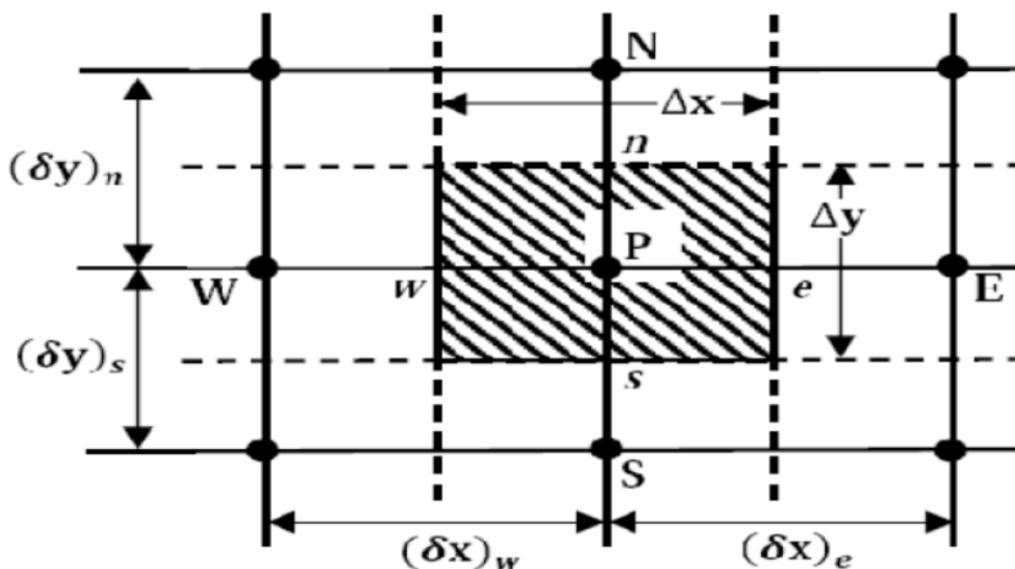
**Méthode des éléments finis :** est une méthode intégrale, et consiste à minimiser un résidu chaque élément d'un domaine d'étude. L'ensemble de ses éléments constitue une grille dit encore maillage. La méthode des éléments finis permet donc de résoudre de manière discrète une EDP dont on cherche une solution approchée.

**Méthode des volumes finis :** Cette méthode est utilisée pour résoudre numériquement des équations aux dérivées partielles. Mais, contrairement à la méthode de différence finies qui utilise des approximations de dérivées, la méthode de volume fini comme d'ailleurs la méthode d'éléments finis est une méthode intégrale. Donc on traite l'intégrale des équations aux dérivées partielles sur des sous volumes appelés volumes de contrôle. La clé de cette méthode réside dans l'application du théorème de la divergence ou théorème d'Ostrogradski, qui permet de changer une intégrale de volume en intégrale de surface. L'un des principaux avantages de la méthode des volumes finis est d'assurer une conservation intégrale exacte des grandeurs quelle que soit la taille du maillage et c'est pour raison qu'elle est très largement utilisée pour la résolution des phénomènes gouvernés par des équations à dérivées partielles.

Dans notre cas, on a utilisé le logiciel de CFD basé sur la méthode des volumes finis pour accomplir cette discrétisation avec l'utilisation de l'algorithme SIMPLE pour la correction de pression sur un maillage non uniforme.

### III.1 Principe de la méthode des volumes finis :

La méthode des volumes finis a été décrite pour la première fois en 1972 par Patankar et Spalding et publiée en 1980 par Patankar [30]. Le principe de cette méthode est fondé sur une technique de discrétisation qui convertit les équations de conservation aux dérivées partielles en équations algébriques qui peuvent être résolues numériquement. Le domaine de calcul est divisé en un nombre fini de sous-domaines élémentaires, appelés volumes de contrôle, chacun de ces volumes de contrôle englobe un nœud dit nœud principal, comme indiqué dans la figure (III.1). La technique des volumes finis consiste à intégrer les équations aux dérivées partielles sur chaque volume de contrôle pour obtenir des équations discrétisées qui conservent toutes les grandeurs physiques.



**Figure III. 1 :** Volume de contrôle bidimensionnel.

On peut résumer les étapes de la méthode des volumes finis comme suite :

- Discrétisation du domaine considéré en volume de contrôle ;
- Formulation intégrale des équations différentielles aux dérivées partielles ;
- Écriture des équations algébriques aux nœuds du maillage ;
- Résolution du système algébrique linéaire obtenu.

Le volume de contrôle illustré sur la figure (III.1), montre un nœud principal P, les points E et W (Est et Ouest) sont ces voisins dans la direction x, tandis que N et S (Nord et Sud) sont ceux dans la direction y. Les faces du volume de contrôle sont localisées aux points  $e$  et  $w$  dans la direction x,  $n$  et  $s$  dans la direction y.

### III.2 Discrétisation :

Les équations de conservation présentées précédemment dans le chapitre II peuvent être décrites par une équation globale. Cette formulation permet de ne pas répéter le travail de discrétisation pour chaque équation. Si on note  $\Phi$  la variable étudiée, toutes les équations précédentes peuvent être réduites en une seule équation générale, de la forme :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\Phi) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u\Phi) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v\Phi) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma_{\Phi} \frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma_{\Phi} \frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) + S_{\Phi} \quad (\text{III.1})$$

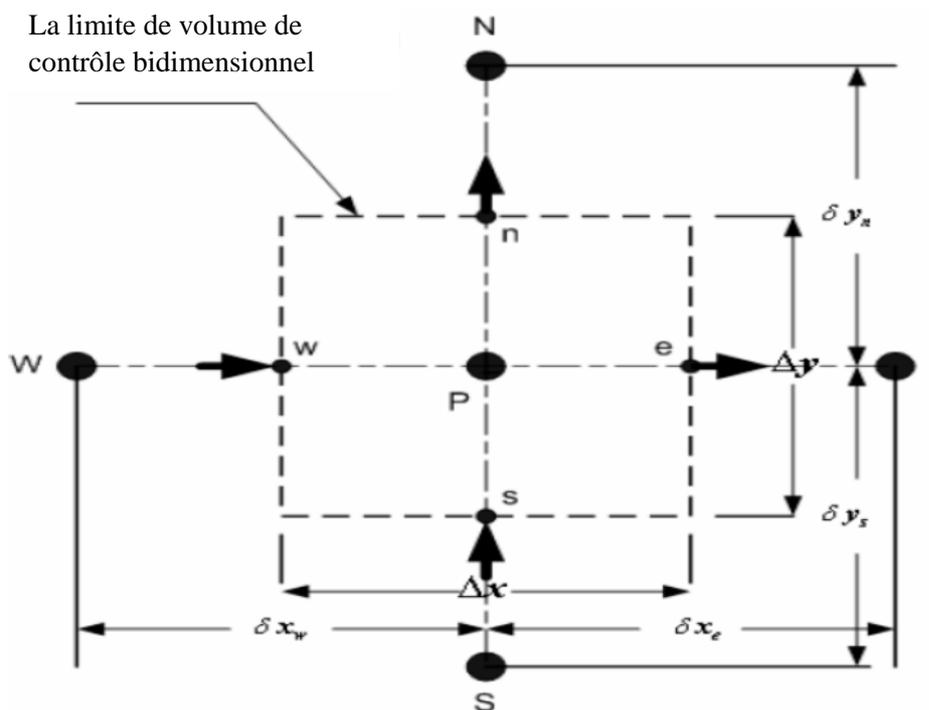
Les tableaux ci-dessous, résument la définition des grandeurs  $\Phi$ ,  $\Gamma_{\Phi}$  et  $S_{\Phi}$  pour chaque problème traité (chapitre II):

Grandeurs	$\Phi$	$\Gamma_{\Phi}$	$S_{\Phi}$
Continuité	1	0	0
Quantité de mouvement selon X	U	$\frac{1}{Re}$	$-\frac{\partial P}{\partial X}$
Quantité de mouvement selon Y	V	$\frac{1}{Re}$	$-\frac{\partial P}{\partial Y} + Ri \theta$
Energie	$\theta$	$\frac{1}{Re Pr}$	0

**Tableau III.1 :** Cas des Equations de transport dans le milieu fluide.

Grandeurs	$\phi$	$\Gamma_\phi$	$S_\phi = S_P\phi_P + S_c$	
			$S_P$	$S_c$
Continuité	1	0	0	0
Quantité de mouvement selon X	U	$\frac{\varepsilon^2 \mu^*}{Re}$	$\varepsilon^2 \left[ \frac{1}{Re \cdot Da} \right]$	$-\varepsilon^2 \frac{\partial P}{\partial X}$
Quantité de mouvement selon Y	V	$\frac{\varepsilon^2 \mu^*}{Re}$	$\varepsilon^2 \left[ \frac{1}{Re \cdot Da} \right]$	$-\varepsilon^2 \frac{\partial P}{\partial Y} + \varepsilon^2 \frac{Gr}{Re^2} \theta$
Energie	$\Theta$	$\frac{\lambda^*}{RePr}$	0	0

**Tableau (III.2) :** Cas des équations de transport dans le milieu poreux.



**Figure III. 2 :** Volume de contrôle à travers lequel se fait l'intégration.

$$\int \frac{\partial}{\partial t} (\rho\phi) d\Omega + \int \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\rho u\phi) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v\phi) \right] d\Omega = \int \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \right] d\Omega + \int S_\phi d\Omega \tag{III.2}$$

Tel que le volume :  $\Delta\Omega = 1 \Delta x_p \Delta y_p$

$$\begin{aligned}
& \int_s^n \int_w^e \left[ \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} dt \right] dx dy \\
&= \int_t^{t+\Delta t} \left[ \int_p^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial x} \left( \Gamma_\phi \frac{\partial\phi}{\partial x} \right) dx dy \right] dt \\
&+ \int_t^{t+\Delta t} \left[ \int_w^e \int_s^n \frac{\partial}{\partial y} \left( \Gamma_\phi \frac{\partial\phi}{\partial y} \right) dy dx \right] dt \\
&- \int_t^{t+\Delta t} \left[ \int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial x} (\rho u \phi) dx dy \right] dt + \int_t^{t+\Delta t} \left[ \int_w^e \int_s^n \frac{\partial}{\partial x} (\rho v \phi) dy dx \right] dt \\
&+ \int_t^{t+\Delta t} \left[ \int_s^n \int_w^e S_\phi dy dx \right] dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\rho_p^1 \phi_p^1 - \rho_p^0 \phi_p^0) \Delta V &= \int_t^{t+\Delta t} \left[ \left( \Gamma_\phi A \frac{\partial\phi}{\partial x} \right)_e - \left( \Gamma_\phi A \frac{\partial\phi}{\partial x} \right)_w \right] dt + \int_t^{t+\Delta t} \left[ \left( \Gamma_\phi A \frac{\partial\phi}{\partial y} \right)_n - \right. \\
&\left. \left( \Gamma_\phi A \frac{\partial\phi}{\partial y} \right)_s \right] dt - \int_t^{t+\Delta t} [(\rho u A \phi)_e - (\rho u A \phi)_w] dt + \int_t^{t+\Delta t} [(\rho v A \phi)_n - \\
&(\rho v A \phi)_s] dt + \int_t^{t+\Delta t} [\overline{S_\phi} \Delta\Omega] dt
\end{aligned} \tag{III.3}$$

Les exposants 0 et 1 indiquent les temps  $t$  et  $t+dt$  dans le premier membre de l'équation (III.3). Les termes du second membre de l'équation précédente sont donnés aux faces du volume de contrôle. Pour former le système d'équations linéaires liant entre elle les valeurs de  $\phi$  aux nœuds P, E, W, S, N, il faut faire le choix d'un schéma d'approximation de la quantité  $\phi$  entres ces nœuds.

### III.2.1 Schéma de la discrétisation spatiale :

Pour illustrer les différents schémas de discrétisation utilisés pour l'approximation des valeurs des flux aux centres des faces du volume de contrôle, on considère le cas à une dimension.

### III.2.1.1 Schéma aux différences centrées (CDS) :

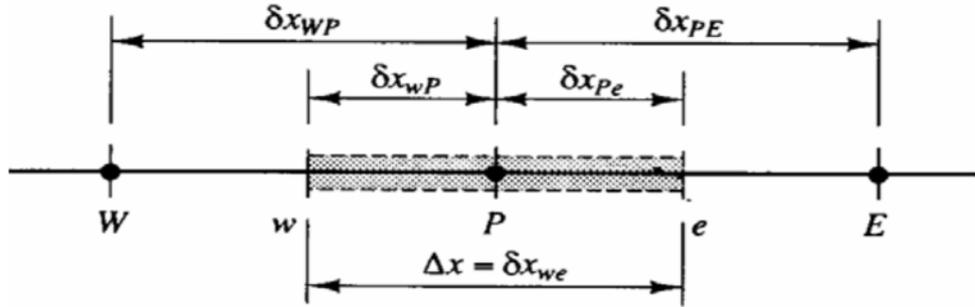


Figure III.3 : Volume de contrôle dans le cas à une dimension.

Pour évaluer le flux convectif à l'interface du volume de contrôle, la variation de la variable  $\Phi$  entre deux nœuds adjacents doit être exprimée par un profil linéaire. On suppose que les faces ( $e$ ,  $w$ ,  $n$ ,  $s$ ) se trouvent au milieu de la distance entre le nœud principal ( $P$ ) et les nœuds ( $E$ ,  $W$ ,  $N$ ,  $S$ ) respectivement.

Les termes convectifs des variables généralisées  $\Phi$  sont interpolés comme suite :

$$\begin{cases} \Phi_e = \frac{1}{2}(\Phi_E + \Phi_P) & ; & \Phi_w = \frac{1}{2}(\Phi_P + \Phi_W) \\ \Phi_n = \frac{1}{2}(\Phi_N + \Phi_P) & ; & \Phi_s = \frac{1}{2}(\Phi_P + \Phi_S) \end{cases} \quad (\text{III.4})$$

Les parties diffusives sont évaluées en approximant les dérivées par des différences, comme suit :

$$\begin{cases} \Gamma_{\Phi,e} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_e = \Gamma_{\Phi,e} \frac{\Phi_E - \Phi_P}{(\delta x)_e} & ; & \Gamma_{\Phi,w} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_w = \Gamma_{\Phi,w} \frac{\Phi_P - \Phi_W}{(\delta x)_w} \\ \Gamma_{\Phi,n} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_n = \Gamma_{\Phi,n} \frac{\Phi_N - \Phi_P}{(\delta y)_n} & ; & \Gamma_{\Phi,s} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_s = \Gamma_{\Phi,s} \frac{\Phi_P - \Phi_S}{(\delta y)_s} \end{cases} \quad (\text{III.5})$$

### III.2.1.2 Schéma Upwind (UPS):

Ce schéma est appliqué pour les écoulements convectifs quand la valeur de la variable  $\Phi$  à l'interface n'est pas interpolée, mais plutôt directement assignée au nœud adjacent, de sorte que :

$$\left\{ \begin{array}{llll} \Phi_e = \Phi_P & \text{si} & F_e > 0 & ; \quad \Phi_e = \Phi_E & \text{si} & F_e < 0 \\ \Phi_w = \Phi_W & \text{si} & F_w > 0 & ; \quad \Phi_w = \Phi_P & \text{si} & F_w < 0 \\ \Phi_n = \Phi_P & \text{si} & F_n > 0 & ; \quad \Phi_n = \Phi_N & \text{si} & F_n < 0 \\ \Phi_s = \Phi_S & \text{si} & F_s > 0 & ; \quad \Phi_s = \Phi_P & \text{si} & F_s < 0 \end{array} \right. \quad (\text{III.6})$$

Cette condition peut être exprimée par l'opérateur :  $\|A, B\| = \max(A, B)$  . Le schéma Upwind s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} F_e \Phi_e = \Phi_P \|F_e, 0\| - \Phi_E \|-F_e, 0\| \\ F_w \Phi_w = \Phi_W \|F_w, 0\| - \Phi_P \|-F_w, 0\| \\ F_n \Phi_n = \Phi_P \|F_n, 0\| - \Phi_N \|-F_n, 0\| \\ F_s \Phi_s = \Phi_S \|F_s, 0\| - \Phi_P \|-F_s, 0\| \end{array} \right. \quad (\text{III.6})$$

Ce schéma hybride a été développé par Spalding, il apparaît également dans le livre de Patankar et Spalding sous le nom de "High-lateral-flux modification". Il est fondé sur la combinaison des deux schémas de discrétisation précédents (Centré et -Upwind). L'approximation de la variable généralisée  $\Phi$  aux différentes interfaces du volume de contrôle est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_e = c_e \Phi_P + (1-c_e) \Phi_E \quad ; \quad \Phi_w = c_w \Phi_W + (1-c_w) \Phi_P \\ \Phi_n = c_n \Phi_P + (1-c_n) \Phi_N \quad ; \quad \Phi_s = c_s \Phi_S + (1-c_s) \Phi_P \end{array} \right. \quad (\text{III.7})$$

Où les coefficients  $c_i$  ( $i=e, w, n, s$ ) sont donnés par :

$$c_i = \left\{ \begin{array}{lll} 0 & \text{si} & P_e < -2 \quad \rightarrow \text{Schéma upwind} \\ \frac{1}{2} & \text{si} & |P_e| \leq -2 \quad \rightarrow \text{Schéma centré} \\ 1 & \text{si} & P_e > 2 \quad \rightarrow \text{Schéma upwind} \end{array} \right. \quad (\text{III.8})$$

### III.2.1.3 Schéma à la loi de puissance (PLDS) :

Dans ce schéma lorsque le nombre de Peclet dépasse 10, la diffusion est prise égale à zéro. Lorsque  $Pe < 10$ , le flux est évalué par une expression polynomiale, comme suit :

$$\begin{cases} A_i = -Pe_i & si & Pe_i \leq 10 \\ A_i = \left( (1 + 0.1Pe_i)^5 - Pe_i \right) & si & -10 \leq Pe_i < 0 \\ A_i = (1 - 0.1Pe_i)^5 & si & 0 \leq Pe_i < 10 \\ A_i = 0 & si & Pe_i > 10 \end{cases} \quad (III.9)$$

Avec:  $i = e, w, n, s$ .

L'équation de discrétisation de ce schéma s'écrit alors :

$$a_P \Phi_P = a_E \Phi_E + a_W \Phi_W + a_N \Phi_N + a_S \Phi_S + b$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S - S_P \Delta x \Delta y \quad et \quad b = S_c \Delta x \Delta y$$

Avec :

$$\begin{cases} a_E = D_e (\|0, A_e\| + \|0, -F_e\|) \\ a_W = D_w (\|0, A_w\| + \|0, F_w\|) \\ a_N = D_n (\|0, A_n\| + \|0, -F_n\|) \\ a_S = D_s (\|0, A_s\| + \|0, F_s\|) \end{cases} \quad (III.10)$$

- **Discrétisation de l'équation (III.3) :**

Pour la discrétisation des termes sous l'intégrale dans le second membre de cette équation, on applique le schéma aux différences centrées. Soit les deux termes de convection et diffusion de l'équation (III.3), suivant :

$$\begin{aligned} I &= \int_t^{t+\Delta t} \left[ \left( \Gamma_\phi A \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e - \left( \Gamma_\phi A \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w \right] dt - \int_t^{t+\Delta t} [(\rho v A \phi)_n - (\rho v A \phi)_s] dt \\ I &= \int_t^{t+\Delta t} \left[ \Gamma_e A_e \frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x_e} - \Gamma_w A_w \frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta x_w} \right] dt \\ &\quad - \int_t^{t+\Delta t} \left[ (\rho v)_n A_n \frac{\phi_N + \phi_P}{2} - (\rho v)_s A_s \frac{\phi_s + \phi_P}{2} \right] dt \end{aligned}$$

On pose :  $F = \rho \cdot u$  et  $D = \Gamma / \delta x$

$$I = \int_t^{t+\Delta t} [A_e D_e (\phi_E - \phi_p) - A_w D_w (\phi_p - \phi_w)] dt$$

$$- \int_t^{t+\Delta t} \left[ \frac{F_n A_n}{2} (\phi_N + \phi_p) - \frac{F_s A_s}{2} (\phi_s + \phi_p) \right] dt$$

$$I = \int_t^{t+\Delta t} \left[ - \left( A_e D_e + A_w D_w + \frac{F_n A_n}{2} + \frac{F_s A_s}{2} \right) \phi_p + A_e D_e \phi_E - A_w D_w \phi_w - \frac{F_n A_n}{2} \phi_N + \frac{F_s A_s}{2} \phi_s \right] dt \quad (\text{III.11})$$

### III.2.2 Schéma de discrétisation temporelle :

Pour évaluer l'équation (III.13), on doit formuler des hypothèses sur la variation des quantités ( $\phi_p, \phi_E, \phi_w, \phi_N, \phi_s$ ) dans le temps. Nous devons utiliser, la valeur de «  $\phi$  » aux nœuds, à l'instant  $t$  ou à l'instant  $t+dt$ , ou alternativement, une combinaison de sa valeur aux deux instants. Soit à calculer l'intégrale par rapport au temps suivante :  $\int_t^{t+dt} \phi dt$

$$I_t = \int_t^{t+dt} \phi_p dt = [\theta \phi_p^1 + (1 - \theta) \phi_p^0] \Delta t \quad (\text{III.12})$$

En fonction de la valeur de  $\theta$ , on divers schémas :  $\theta=0$ ,  $\theta=1$  et  $\theta=1/2$ .

#### III.2.2.1 Schéma explicite ( $\theta=0$ ) :

Pour ce schéma, dit explicite du fait que les valeurs de  $\phi_p, \phi_E, \phi_w, \phi_N$  dans le second membre de l'équation intégrale (III.3) sont pris à l'instant  $t$ , qui permet le calcul direct de la valeur de  $\phi_p^1$  à l'instant  $(t+dt)$  dans le premier membre de l'équation (III.3). Ce que donne l'équation (III.12) lorsque :

$$\theta = 0 ; \quad I_t = \int_t^{t+dt} \phi_p dt = \phi_p^0 \Delta t$$

#### III.2.2.2 Schéma implicite ( $\theta=1$ ) :

Pour ce schéma, le coefficient  $\theta$  prend une valeur égale à l'unité. La valeur de  $\phi_p^1$  ne peut plus être calculée directement dans l'équation (III.3), du fait le schéma est dit alors, implicite. Ce schéma est toujours stable :

$$\theta=1 ; \quad I_t = \int_t^{t+dt} \phi_P dt = \phi_P^l \Delta t$$

### III.2.2.3 Schéma de cranck-nicolson ( $\theta = 1/2$ ) :

Dans ce schéma, les valeurs de  $\phi_P$ ,  $\phi_E$ ,  $\phi_W$ ,  $\phi_N$  dans le second membre de l'équation intégrale (III.3) sont prises à l'instant (t) et (dt), et sont calculées comme suite :

$$\theta=1/2 ; \quad I_t = \frac{1}{2}(\phi_P^1 + \phi_P^0)\Delta t$$

Après discrétisation de l'équation (III.3), nous obtenons l'équation suivante :

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + b \quad (\text{III.13})$$

$$\text{Ou :} \quad a_P \phi_P = \sum_{nb} (a_{nb} \phi_{nb}) + b \quad (\text{III.14})$$

### III.2.3 Discrétisation des équations de quantité de mouvement :

Le traitement des équations de quantité de mouvement est similaire à celui de l'équation (III.1), la seule différence réside dans le choix de la grille. On montre que si on calcule les variables « U » et « V » sur la même grille utilisée pour le calcul des variables « T », « P » ... ext on aboutira à une solution non réaliste. Pour remédier à ce problème, on adopte un maillage « décalé » afin d'évaluer le champ de vitesse dont les nœuds sont localisés sur les faces des volumes de contrôle de la grille principale figure (III.4). Chaque composante de la vitesse est décalée suivant sa propre direction figures (III.5) et (III.6).

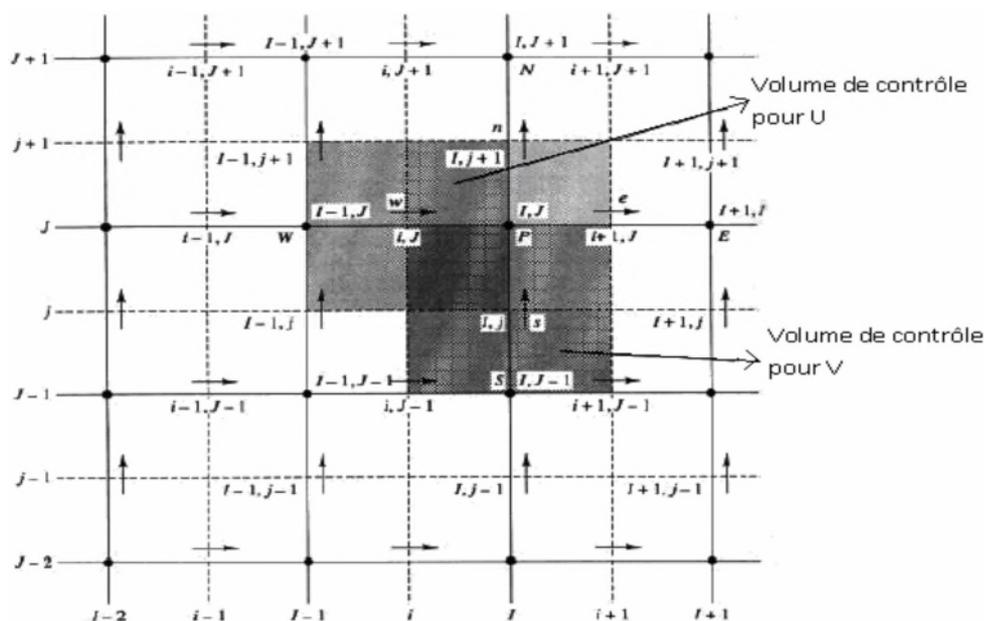


Figure III.4 : Illustration d'une grille décalée pour « u » et « v »

L'intégration des deux équations de quantité de mouvement dans le nouveau système d'axes pour u et v entraîne le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} a_{i,j}U_{i,j} = \sum a_{nb}U_{nb} + (P_{I-1,J} - P_{I,J})A_{i,j}b_{i,j} \\ a_{I,j}V_{I,j} = \sum a_{nb}V_{nb} + (P_{I,J-1} - P_{I,j})A_{I,j}b_{I,j} \end{cases} \quad (\text{III.15})$$

Si le champ de pression est connu, les équations de quantité de mouvement discrétisées, sont écrites pour chaque volume de contrôle de U et V et sont résolues pour obtenir le champ de vitesse.

Si le champ de pression est correct, le champ de vitesse doit vérifier l'équation de continuité. Dans le cas où ce champ est inconnu, l'établissement d'une équation de pression est nécessaire.

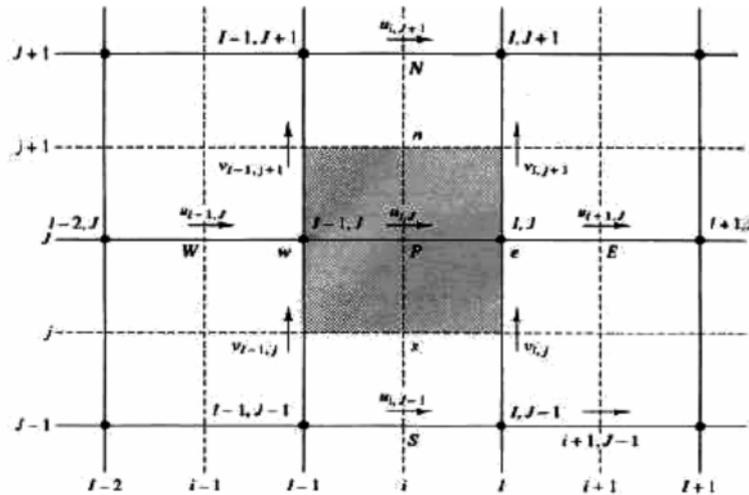


Figure III.5 : Volume de contrôle correspondant à la vitesse « U »

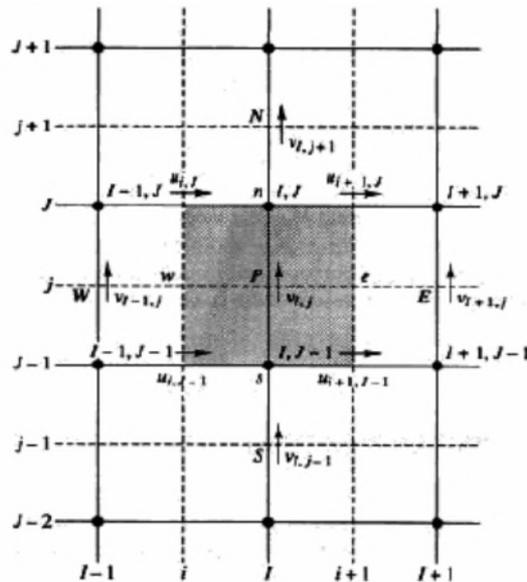


Figure III.6 : Volume de contrôle correspondant à la vitesse « V »

### III.2.3.1 Algorithme SIMPLE (Semi - Implicit - Method for Pressure - Linked - Equation)

Si le champ de pression est connu, la résolution de l'équation de quantité de mouvement donne un champ de vitesse qui vérifie automatiquement l'équation de continuité. Mais comme aucune information sur la pression ne peut être obtenue des équations de conservations, on est amené à résoudre ce problème par un algorithme itératif, pour cela en premier lieu on utilise une distribution quelconque de la pression pour résoudre l'équation de mouvement, le champ de vitesse obtenu ne vérifie pas l'équation de continuité, puisqu'il a été déduit d'un champ de pression quelconque. L'idée est de déduire de l'équation de continuité

une équation pour corriger la pression. Cette nouvelle pression est réutilisée pour calculer un nouveau champ de vitesse et ainsi de suite jusqu'à convergence de toutes les variables du problème. Patankar et Spalding (1972) désignèrent cet algorithme "SIMPLE" (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations).

Récapitulatif des étapes que suit l'algorithme SIMPLE :

- 1) Estimer le champ de pression  $p^+$  ( $p^+$  ou  $P^+$ ) remplacer  $p^+$  par  $P^+$
- 2) Résoudre les équations de quantité de mouvement pour ce champ de pression  $P^+$  et déduire le champ de vitesse correspondant ( $U^+$ ,  $V^+$ ) :

$$\begin{cases} a_{i,j}U_{i,j}^+ = \sum a_{voisins}U_{voisins}^+ + (p_{i-1,j}^+ - p_{i,j}^+)A_{i,j} + b_U \\ a_{I,j}V_{I,j}^+ = \sum a_{voisins}V_{voisins}^+ + (p_{I,j-1}^+ - p_{I,j}^+)A_{I,j} + b_V \end{cases} \quad (\text{III .16})$$

avec :  $\begin{cases} i = e, w & \text{et} & j = n, s & : \text{Pour les valeurs vectorielles (vitesses } U \text{ et } V) \\ i = E, W & \text{et} & j = N, S & : \text{Pour les valeurs scalaires (pression)} \end{cases}$

$(p_{i-1,j}^+ - p_{i,j}^+)A_{i,j}$  ( $(p_{I,j-1}^+ - p_{I,j}^+)A_{I,j}$ ) : Représente la force de pression agissant sur la face horizontale (verticale) du volume de contrôle de la composante vitesse  $U^+$  ( $V^+$ ).

$A_{i,j}$  ( $A_{I,j}$ ) : Surface sur lesquelles agissent les forces ( $A_e = A_w = \Delta y$  et  $A_n = A_s = \Delta x$ ).

- 3) Corriger la pression  $p^+$  et les vitesses  $U^+$  et  $V^+$  d'une quantité  $p'$  pour la pression et  $U'$ ,  $V'$  pour les vitesses, ainsi les nouveaux champs s'écrivent :

$$\begin{cases} p = p^+ + p' \\ U = U^+ + U' \\ V = V^+ + V' \end{cases} \quad (\text{III .17})$$

- 4) Déduire une équation de correction de la pression, pour cela :

- ✓ Soustraire les équations de quantité de mouvement écrites en valeurs corrigées de celle en valeurs estimées, on aura :

$$\begin{cases} a_{i,J} (U_{i,J} - U_{i,J}^+) = \sum a_{voisins} (U_{voisins} - U_{voisins}^+) + \left( (p_{i-1,J} - p_{i-1,J}^+) - (p_{i,J} - p_{i,J}^+) \right) A_{i,J} \\ a_{I,j} (V_{I,j} - V_{I,j}^+) = \sum a_{voisins} (V_{voisins} - V_{voisins}^+) + \left( (p_{I,j-1} - p_{I,j-1}^+) - (p_{I,j-1} - p_{I,j}^+) \right) A_{I,j} \end{cases}$$

D'après (III.16) nous aurons alors

$$\begin{cases} a_{i,J} U'_{i,J} = \sum a_{voisins} U'_{voisins} + (p'_{i-1,J} - p'_{i,J}) A_{i,J} \\ a_{I,j} V'_{I,j} = \sum a_{voisins} V'_{voisins} + (p'_{I,j-1} - p'_{I,j}) A_{I,j} \end{cases} \quad (III.18)$$

L'algorithme SIMPLE suppose que les termes  $(\sum a_{voisins} U'_{voisins})$  et  $(\sum a_{voisins} V'_{voisins})$  peuvent être négligés

$$\begin{cases} a_{i,J} U'_{i,J} = (p'_{i-1,J} - p'_{i,J}) A_{i,J} \\ a_{I,j} V'_{I,j} = (p'_{I,j-1} - p'_{I,j}) A_{I,j} \end{cases} \quad \text{Ou bien} \quad \begin{cases} U'_{i,j} = (p'_{i-1,j} - p'_{i,j}) d_{i,j} \\ V'_{i,j} = (p'_{i,j-1} - p'_{i,j}) d_{i,j} \end{cases} \quad (III.19)$$

$$\text{Avec} \quad d_{i,J} = \frac{A_{i,J}}{a_{i,J}} \quad \text{et} \quad d_{I,j} = \frac{A_{I,j}}{a_{I,j}}$$

D'après (III.17) et (III.19) le champ de vitesse exact s'écrira :

$$\begin{cases} U_{i,J} = U_{i,J}^+ + (p'_{i-1,J} - p'_{i,J}) d_{i,J} \\ V_{I,j} = V_{I,j}^+ + (p'_{I,j-1} - p'_{I,j}) d_{I,j} \end{cases} \quad (III.20)$$

De façon similaire

$$\begin{cases} U_{i+1,J} = U_{i+1,J}^+ + (p'_{i-1,J} - p'_{i,J}) d_{i+1,J} \\ V_{I,j+1} = V_{I,j+1}^+ + (p'_{I,j-1} - p'_{I,j}) d_{I,j+1} \end{cases} \quad (III.21)$$

$$\checkmark \text{ Avec } d_{i+1,J} = \frac{A_{i+1,J}}{a_{i+1,J}} \quad \text{et} \quad d_{I,j+1} = \frac{A_{I,j+1}}{a_{I,j+1}}$$

✓ Introduire les expressions (III.20) et (III.21) dans l'équation de continuité suivante :

$$\left[ (\rho UA)_{i+1,J} - (\rho UA)_{i,J} \right] + \left[ (\rho VA)_{I,j+1} - (\rho VA)_{I,j} \right] = 0 \quad (III.22)$$

Nous aurons l'équation de correction de la pression qui s'écrit comme suit :

$$a'_P p'_P = a'_E p'_E + a'_W p'_W + a'_N p'_N + a'_S p'_S + b \quad (III.23)$$

$$\text{Avec : } \begin{cases} a'_E = (\rho A d)_e \\ a'_N = (\rho A d)_n \\ a'_W = (\rho A d)_w \\ a'_S = (\rho A d)_s \\ a'_P = a'_E + a'_W + a'_N + a'_S \\ b = (\rho U^+ A)_w - (\rho U^+ A)_e + (\rho V^+ A)_s - (\rho V^+ A)_n \end{cases} \quad (\text{III.24})$$

5) Résoudre les autres équations de transport relatives aux autres variables scalaires du problème, tel que la Température.

6) Si les critères de convergences sont vérifiés, les champs ainsi déterminés sont les solutions du problème considéré. Si ce n'est pas le cas, le processus est réitéré à partir de la deuxième étape.

Toutefois, il se peut que la correction  $p'$  soit surestimée par cet algorithme et les calculs en tendances à diverger. Pour y remédier l'utilisation d'un coefficient de sous relaxation s'avère nécessaire aussi bien pour les équations de quantité de mouvement que celle de la pression cela afin de stabiliser les calculs. L'expression (III.17) devient alors :

$$\begin{cases} p = p^+ + \alpha_p p' \\ U = U^+ + \alpha_U U' \\ V = V^+ + \alpha_V V' \end{cases} \quad (\text{III.25})$$

On note que pour stabiliser l'algorithme, il est nécessaire que le coefficient de sous relaxation  $\alpha_p$  ait une valeur inférieure à  $\alpha_U$  et  $\alpha_V$ .

## III.2. 4. Organigramme du code de calcul

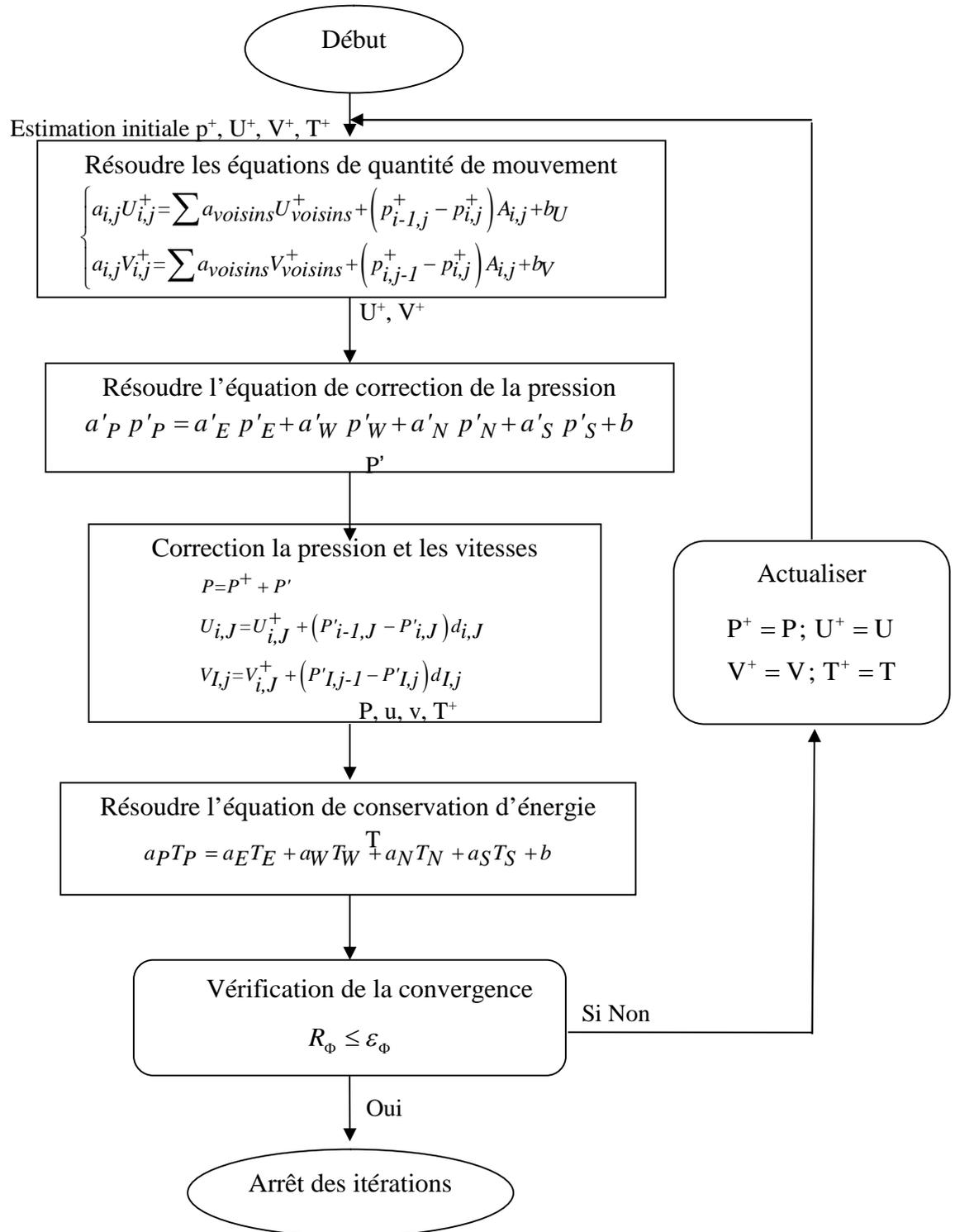


Figure III.7 : Représentation de l'organigramme de calcul.

### III.3. Résolution des systèmes d'équations :

Dans les chapitres précédents, nous avons discuté des méthodes de discrétisation des équations régissant le flux de fluide et le transfert thermique. Ce processus engendre un système d'équations algébriques linéaires qui a besoin d'être résolu. La complexité et la taille de l'ensemble des équations dépendent de la dimensionnalité du problème, du nombre de nœuds de grille et de la pratique en matière de discrétisation. Bien que n'importe quel procédé valide puisse être employé pour résoudre ces équations algébriques, les ressources d'informatique disponibles placent une contrainte puissante.

Il y a deux familles de techniques de solution pour des équations algébriques linéaires, les méthodes directes et les méthodes indirectes ou itératives. Parmi les méthodes directes on citera l'inversion, diagonalisation et triangularisation de matrice.

Les méthodes itératives sont basées sur l'application répétée d'un algorithme relativement simple menant à la convergence certaine après un grand nombre de répétitions (itérations). Les exemples bien connus sont les méthodes d'itératives de Jacobi et de Gauss Seidel.

La méthode des volumes finis rapporte habituellement des systèmes d'équations tridiagonales (un système avec seulement trois coefficients différents de zéro par équation). Pour la résolution de tels systèmes, on utilise un algorithme dit de Thomas ou l'algorithme (TDMA). Le TDMA est réellement une méthode directe pour des situations unidimensionnelles, mais il peut être appliqué itérativement, pour résoudre des problèmes multidimensionnels, ce qui est largement répandu dans les programmes de CFD.

#### Algorithme (TDMA) :

Nous considérons le système d'équations suivantes :

$$\begin{aligned}
 \varphi_1 &= C_1 \\
 -\varphi_1\beta_2 + \varphi_2D_2 - \varphi_3\alpha_2 &= C_2 \\
 -\varphi_2\beta_3 + \varphi_3D_3 - \varphi_4\alpha_3 &= C_3 \\
 -\varphi_3\beta_4 + \varphi_4D_4 - \varphi_5\alpha_4 &= C_4 \\
 &\dots \\
 -\varphi_{n-1}\beta_n + \varphi_nD_n - \varphi_{n+1}\alpha_n &= C_n \\
 \varphi_{n+1} &= C_{n+1}
 \end{aligned}
 \tag{III.26}$$

Où :  $\varphi_1$  et  $\varphi_{n+1}$  sont les valeurs connues aux limites du domaine.

Chaque équation peut s'écrire sous la forme générale suivante :

$$-\phi_{j-1}\beta_j + \phi_j D_j - \phi_{j+1}\alpha_j = C_j \quad (\text{III.27})$$

Le système d'équation (III.26) peut être réécrit :

$$\phi_2 = \phi_1 \frac{\beta_2}{D_2} + \phi_3 \frac{\alpha_2}{D_2} + \frac{C_2}{D_2} \quad (\text{III.28a})$$

$$\phi_3 = \phi_2 \frac{\beta_3}{D_3} + \phi_4 \frac{\alpha_3}{D_3} + \frac{C_3}{D_3} \quad (\text{III.28b})$$

$$\phi_4 = \phi_3 \frac{\beta_4}{D_4} + \phi_5 \frac{\alpha_4}{D_4} + \frac{C_4}{D_4} \quad (\text{III.28c})$$

$$\phi_n = \phi_{n-1} \frac{\beta_n}{D_n} + \phi_{n+1} \frac{\alpha_n}{D_n} + \frac{C_n}{D_n}$$

Ces équations peuvent être résolues en remplaçant  $\phi_2$  de l'équation (III.28a) dans l'équation (III.28b) pour obtenir :

$$\phi_3 = \left( \frac{\beta_3 \left( \phi_1 \frac{\beta_2 + C_2}{D_2} \right) + C_3}{D_3 - \beta_3 \frac{\alpha_2}{D_2}} \right) + \phi_4 \left( \frac{\alpha_3}{D_3 - \beta_3 \frac{\alpha_2}{D_2}} \right) \quad (\text{III.29a})$$

$$\text{On pose : } A_2 = \frac{\alpha_2}{D_2} \quad \text{et} \quad C'_2 = \phi_1 \frac{\beta_2}{D_2} + \frac{C_2}{D_2}$$

L'équation (III.29) peut être réécrite sous la forme :

$$\phi_3 = \left( \frac{\beta_3 (C'_2) + C_3}{D_3 - \beta_3 A_2} \right) + \phi_4 \left( \frac{\alpha_3}{D_3 - \beta_3 A_2} \right) \quad (\text{III.29b})$$

$$\text{Où :} \quad \phi_3 = \phi_4 A_3 + C'_3 \quad (\text{III.30})$$

$$\text{Avec :} \quad A_3 = \left( \frac{\alpha_3}{D_3 - \beta_3 A_2} \right) \quad \text{et} \quad C'_3 = \left( \frac{\beta_3 (C'_2) + C_3}{D_3 - \beta_3 A_2} \right)$$

La formule (III.30) peut être utilisée pour éliminer  $\phi_3$  de l'équation (III.28c). La procédure peut être répétée jusqu'à la fin des équations. La dernière équation aura alors uniquement une seule inconnue  $\phi_{n-1}$ . Les autres inconnues  $\phi_{n-1}, \phi_{n-2}, \dots, \phi_2, \phi_1$ , sont donc calculées par substitution successive en faisant le chemin inverse.

## Conclusion

A travers ce chapitre, nous avons présenté la méthode des volumes finis et les étapes de la discrétisation du modèle mathématique.

Une résolution numérique bidimensionnelle des équations de continuité, quantité de mouvement et d'énergie a été mis en œuvre pour simuler les différents phénomènes.

## Introduction

Dans ce chapitre on s'est intéressé à l'étude numérique de la convection mixte en régime laminaire dans un espace annulaire comme décrit au chapitre II. Les principaux résultats obtenus, reflétant le comportement dynamique et thermique de l'écoulement pour les différents paramètres considérés y est exposé également.

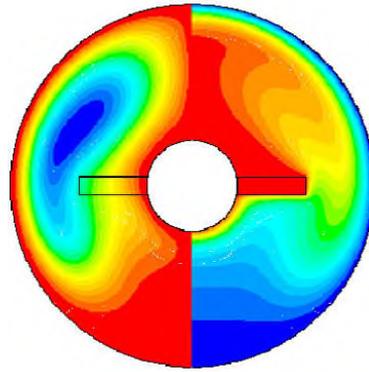
La validation préalable du modèle adopté sur des résultats existant dans la littérature est nécessaire, car elle permet de lui donner plus de crédibilité, afin qu'on puisse faire des comparaisons justes et objectives des résultats obtenus par nos simulations. L'étude est basée sur les effets de la rotation du cylindre extérieur sur la structure de l'écoulement et sur le transfert de chaleur globale dans la cavité.

### IV.1 Validation des résultats

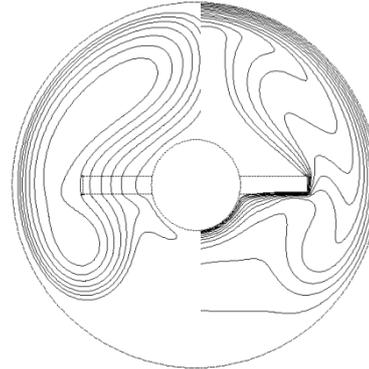
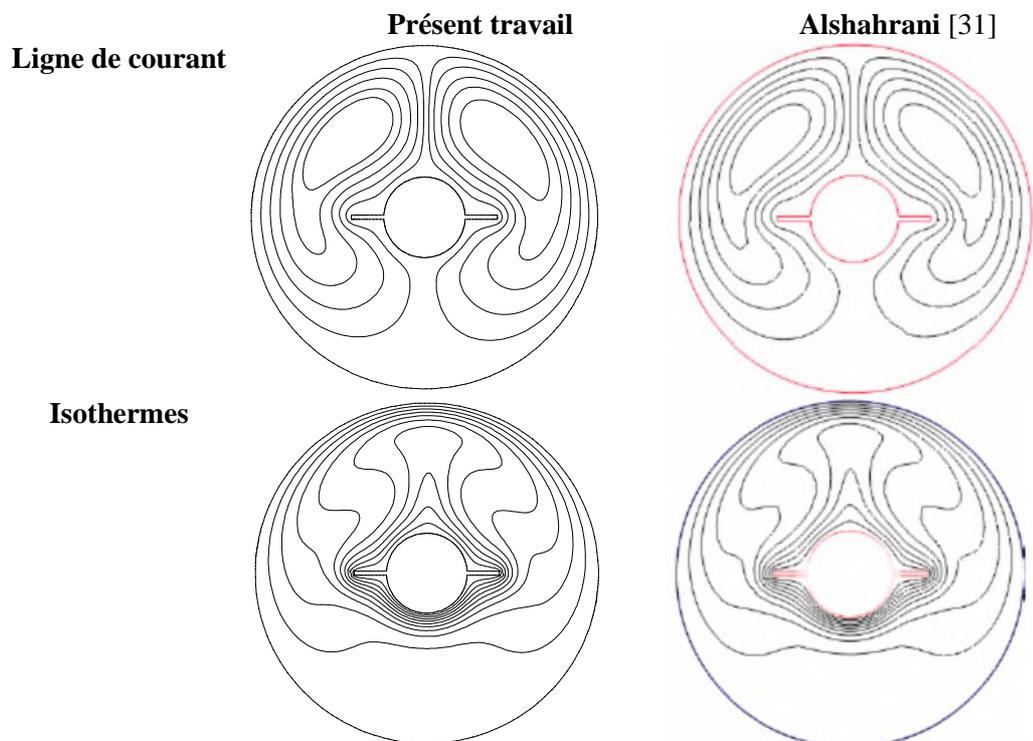
Avant de passer à l'étude de notre cas, une validation de notre code de calcul est indispensable pour donner une crédibilité au schéma numérique proposé. Puisque d'après notre revue bibliographique existante, il n'y'a aucune étude qui a traité au même temps le cas de la convection mixte dans un anneau cylindrique horizontal et qui contient des ailettes poreuses. De ce fait, les résultats sont comparés aux résultats de kiwan et Zeitoun [27] dans le cas de la convection naturelle dans un anneau cylindrique horizontal avec des ailettes poreuses. La figure (IV.3) montre une comparaison en termes du coefficient de transfert de chaleur le long de la surface du cylindre extérieur avec la référence [27], pour  $Da=2.5 \cdot 10^{-3}$ ,  $k_r=4 \cdot 10^3$  et  $Ra=2.78 \cdot 10^4$ . Les résultats obtenus par la présente simulation sont en bonne concordance avec ceux de la référence.

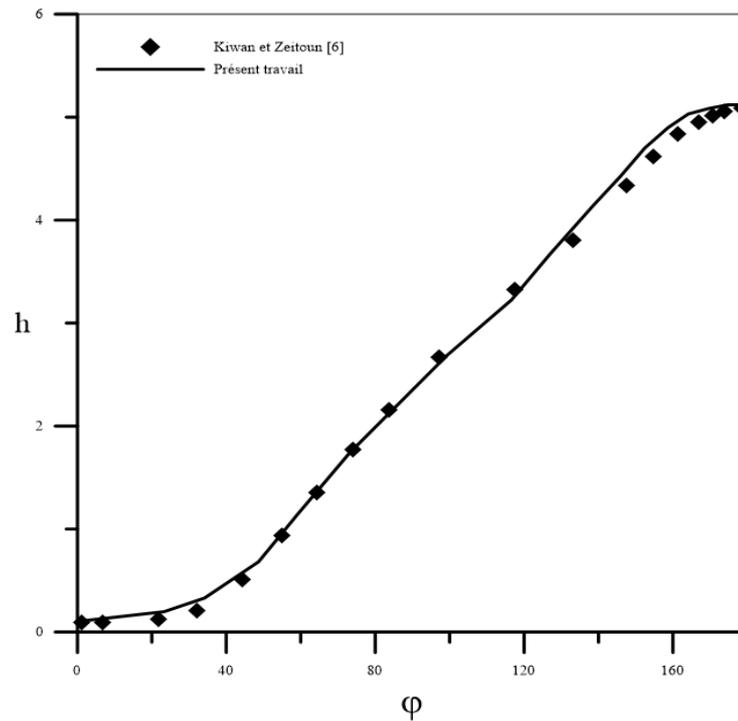
Une autre validation en termes de lignes de courant et d'isothermes est faite par rapport aux travaux numériques menés par kiwan [31], concernant la convection naturelle dans un anneau cylindrique horizontal avec des ailettes poreuses et solides respectivement, figures (IV.1) et (IV.2). Les comparaisons montrent une bonne concordance, donnant plus de crédibilité aux résultats numériques qui vont suivre.

Kiwan et Zeitoun [27]



Présent travail

**Figure IV.1** : Comparaison des isothermes et des lignes de courants avec la référence [27] $(Da=2.5 \cdot 10^{-3} ; k_r=4 \cdot 10^3 ; Ra=2.78 \cdot 10^4)$ .**Figure IV.2** : Comparaison des isothermes et des lignes de courants avec la référence [31] $(d_0/d_i=4 \text{ et } \Delta T=10)$ .



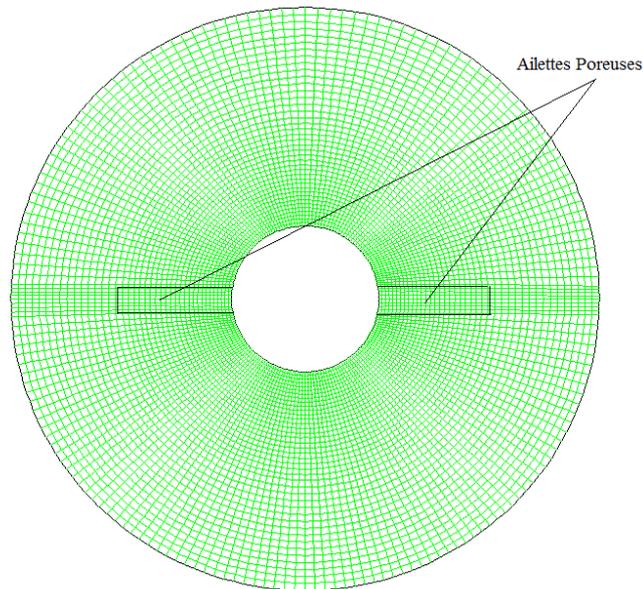
**Figure IV.3** : Coefficient de transfert de chaleur le long de la surface du cylindre extérieur comparaison avec la référence [27].

## IV.2 Choix du maillage

Afin de déterminer une grille appropriée pour la géométrie considérée de telle sorte que la solution numérique demeure invariante avec la précision du maillage. Nous avons choisi une cavité cylindrique remplie d'air dont les nombres de Prandtl, Grashof, Richardson et Darcy ainsi que la porosité sont fixes et valent respectivement à,  $Pr = 0,71$  ;  $Gr = 10^5$   $Ri=1$  ;  $Da=10^{-2}$  et  $\varepsilon=0,9$ . Pour cela, sept grilles de maillage différentes sont testées en occurrence  $60*60$ ,  $80*80$ ,  $100*100$ ,  $120*120$ ,  $140*140$  et  $160*160$  points sont utilisés. Le nombre de Nusselt moyen total sur les parois chaudes pour ces grilles est calculé pour chaque cas. Les résultats sont illustrés dans la Tableau (IV.1). Comme l'indique sur le tableau, une grille uniforme de  $100*100$  est suffisante pour bien capturer le transfert de chaleur près des parois de la cavité. Cette grille donne le meilleur compromis entre le coût des calculs et de précision. En effet, nous avons opté pour ce maillage pour toutes les simulations de notre étude, figure (IV.4).

Nœuds	60x60	80x80	100x100	120x120	140x140	160x160
Nu	3.862	4.242	4.328	4.3345	4.3411	4.3413

**Tableau IV.1 :** Nusselt moyen pour différents maillages considérés



**Figure IV.4 :** Domaine numérique pour un maillage de 100\*100 nœuds.

### IV.3 Interprétation des résultats

Les résultats portent sur l'effet de la rotation du cylindre extérieur sur l'écoulement du fluide et le transfert de chaleur dans la cavité en présence d'ailettes poreuses. Différents cas de convection mixte induite ont été explorés tels que Gr, Ri et Da variant de ( $10^3$ ,  $10^4$ ,  $10^5$ ,  $10^6$ ), (0.1, 1, 10) et ( $10^{-6}$ ,  $10^{-4}$ ,  $10^{-2}$ ), respectivement. Le tableau (IV.2) résume les valeurs d'autres paramètres utilisés.

$d_e$ (m)	$d_i$ (m)	$T_c$ (K)	$T_f$ (K)	$L_0$ (m)	$g$ ( $m^2/s$ )	$\rho$ ( $kg/m^3$ )	$\varepsilon$
0.08	0.02	308.15	298.15	0.015	9.81	1.225	0.9
$\alpha$ ( $m^2/s$ )	$\beta$ (1/K)	$\nu$ ( $m^2/s$ )	$\lambda$ (W/m K)	$C_p$ (J/kg K)	$\mu$ (kg/m s)	Pr	
$2.99 \cdot 10^{-5}$	0.0028	$2.092 \cdot 10^{-5}$	0.03	1006.43	$2.5627 \cdot 10^{-5}$	0.71	

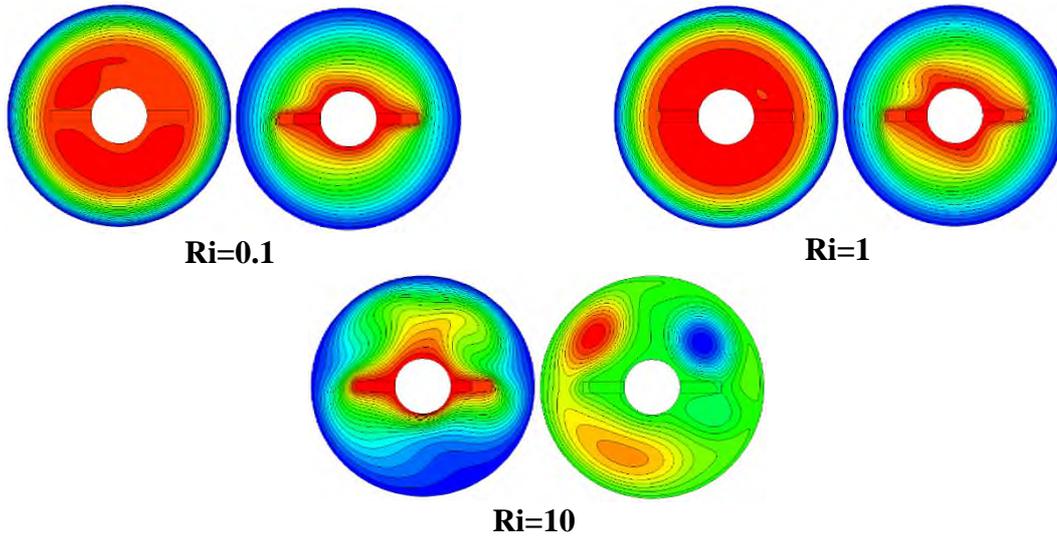
**Tableau IV.2 :** Données générales pour les simulations

## IV.3.1 Effet du nombre de Richardson sur les lignes de courantes et les isothermes

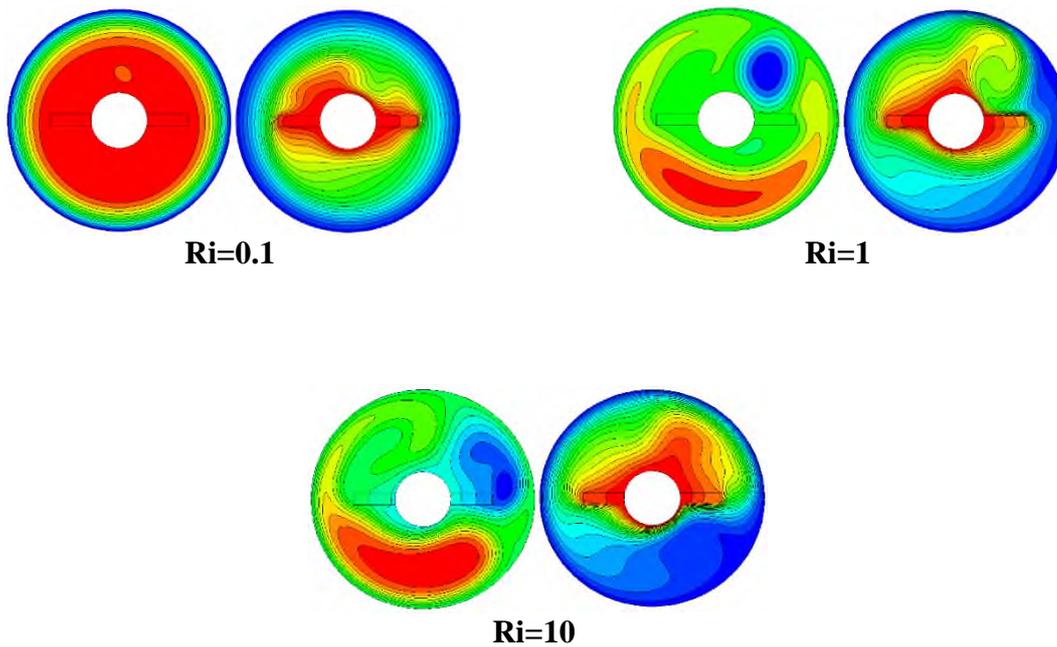
Dans cette partie, on a fixé le nombre de Grashof et on a fait varier les nombres de Richardson et de Darcy.

a)

$Gr=10^4$

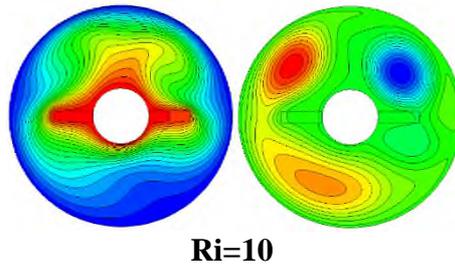
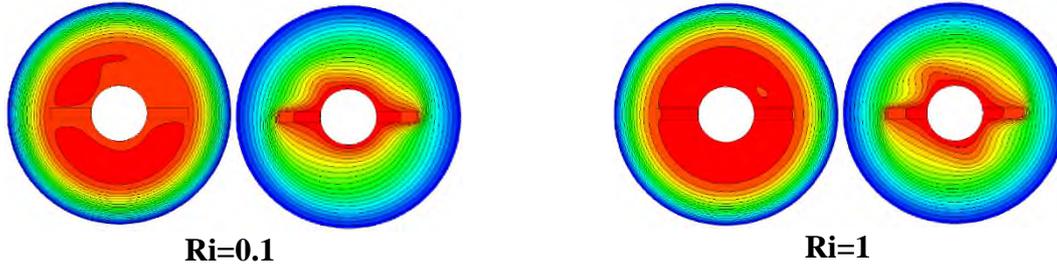


$Gr=10^5$

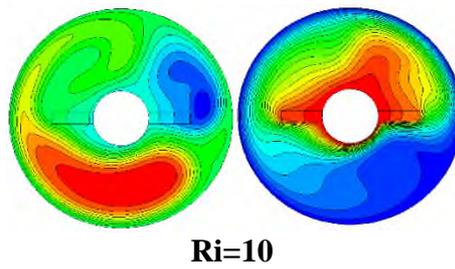
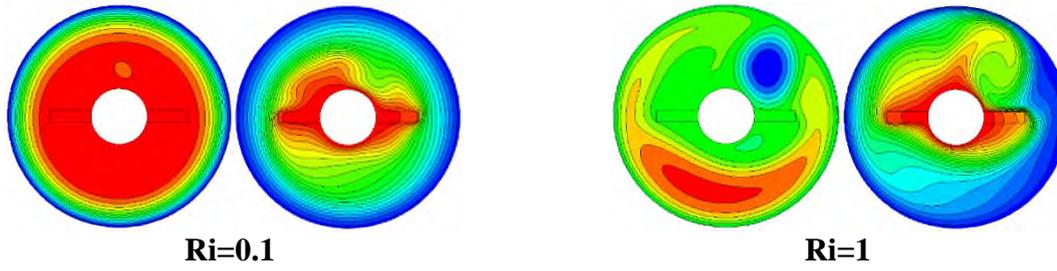


b)

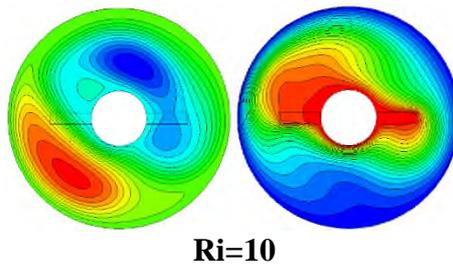
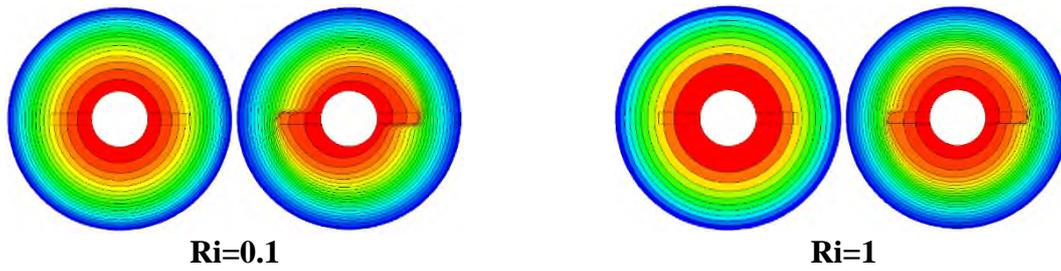
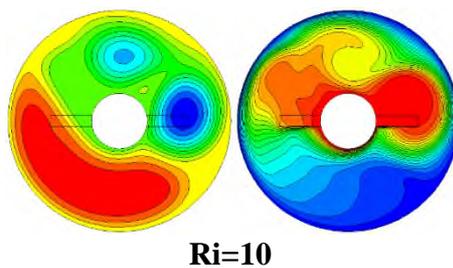
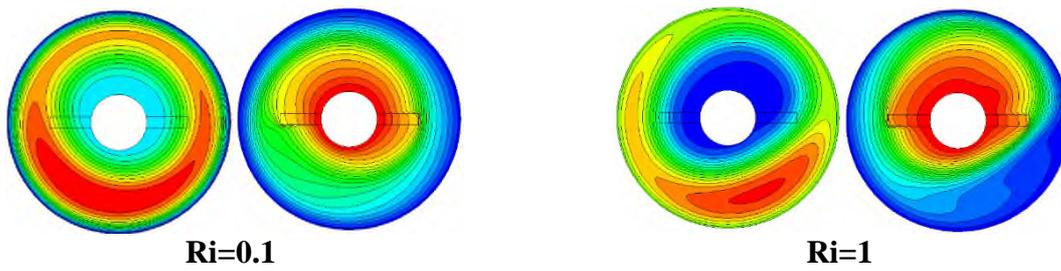
$Gr=10^4$



$Gr=10^5$



c)

 $Gr=10^4$  $Gr=10^5$ 

**Figure IV.5 :** Influence du nombre de Richardson sur les lignes de courant et les isothermes pour  $Gr=10^4$  et  $10^5$  : a)  $Da=10^{-2}$  b)  $Da=10^{-4}$  c)  $Da=10^{-6}$

La figure (IV.5) montre l'effet du nombre de Richardson ( $Ri=0.1 ; 1 ; 10$ ) sur la structure de l'écoulement et le transfert de chaleur dans l'espace annulaire pour deux nombres de Grashof ( $Gr=10^4 ; Gr=10^5$ ) et trois nombres de Darcy  $Da=10^{-2} ; 10^{-4}$  et  $10^{-6}$ .

Comme indiqué sur la figure (IV.5a), pour un écoulement faiblement convectif  $Gr=10^4$  avec  $Ri= 0.1$  et  $1$  on observe une structure stratifiée (lignes d'isocontours concentriques) caractéristique des écoulements où le transfert de chaleur par conduction est dominant. Ceci étant d'une part à la faible vitesse de filtration donc d'un milieu poreux moins perméable, d'autre part à la faible vitesse de rotation du cylindre extérieur ( $Re<300$ ). En passant à  $Ri=10$  les courants de convection apparaissent, ce qui se traduit par des zones de recirculations dans les lignes de courants et une déformation des isothermes. Le transfert de chaleur est alors dominé par la convection. En augmentant le nombre de Grashof  $Gr=10^5$ , les courants de convection donc la convection apparaît bien avant ( $Ri=1$  et  $10$ ). La symétrie de la structure de l'écoulement est rompue, avec un fluide de plus en plus froid dans la zone inférieure et de plus en plus chaud dans la moitié supérieure.

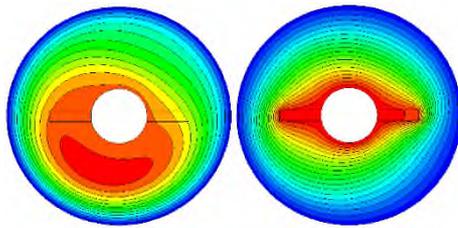
Pour un milieu moins perméable  $Da=10^{-4}$  comme indiqué sur la figure (IV.5b) l'écoulement est plus stratifié et observe un retard dans l'apparition des courants de convection, le transfert thermique par conduction est dominant. Le panache thermique n'est visible que pour  $Ri=10$  signe du développement de la convection et de sa dominance.

Pour  $Da=10^{-6}$ , la structure de l'écoulement est similaire au cas précédent avec des courants de convections donc des panaches thermiques un peu plus prononcés pour des écoulements à  $Gr=10^5$ .

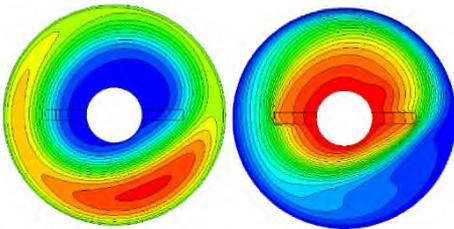
### IV.3.2 Effet du nombre de Grashof sur les lignes de courantes et les isothermes

Afin de voir l'effet du nombre de Grashof sur la structure de l'écoulement et le transfert de chaleur induit, nous avons fixé le nombre de Richardson ( $Ri=1$ ) et nous avons fait varier le nombre de Grashof ( $Gr=10^3-10^6$ ) pour trois nombres de Darcy ( $10^{-2} - 10^{-4} - 10^{-6}$ ).

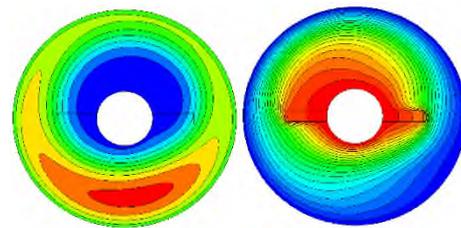
a)



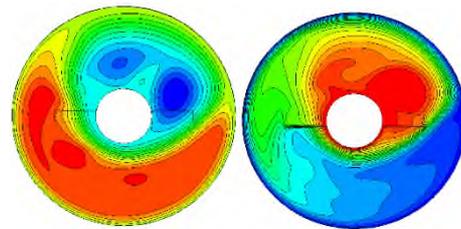
$Gr=10^3$



$Gr=10^5$

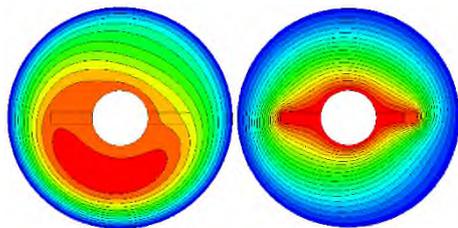


$Gr=10^4$

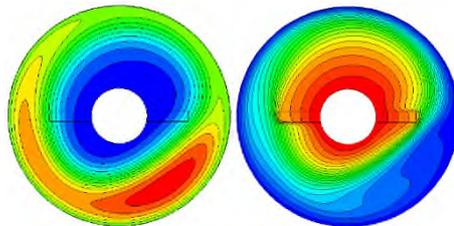


$Gr=10^6$

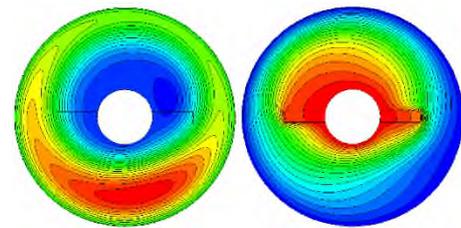
b)



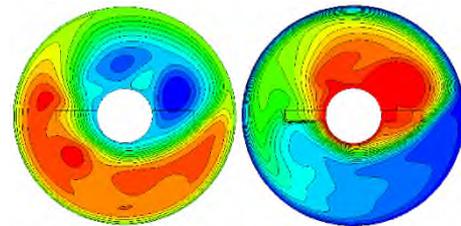
$Gr=10^3$



$Gr=10^5$

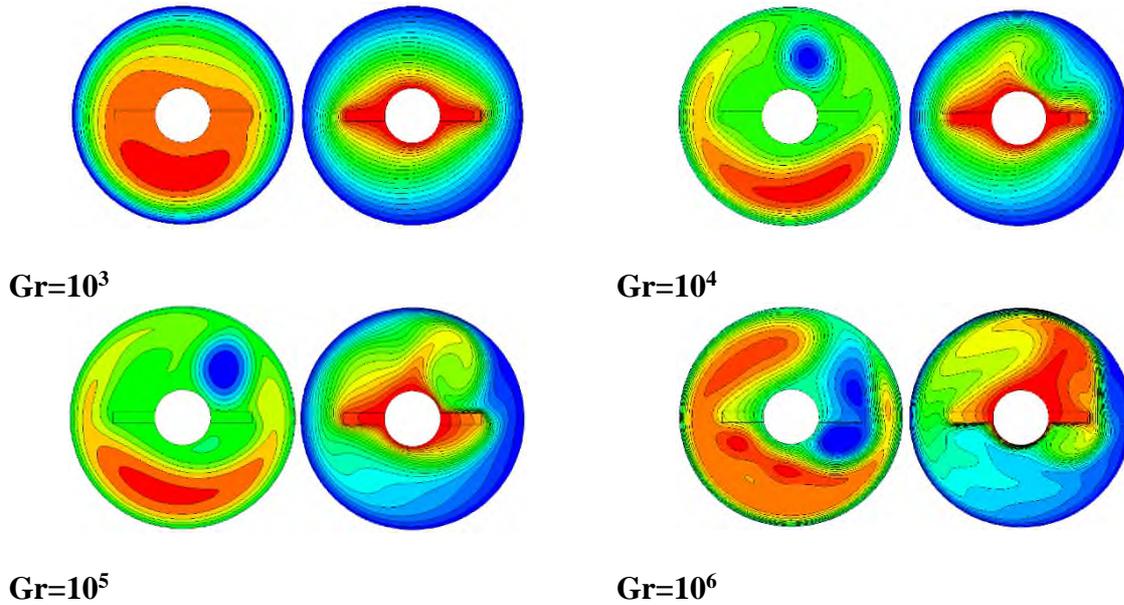


$Gr=10^4$



$Gr=10^6$

c)



**Figure IV.6 :** Influence du nombre de Grashof sur les isothermes et les lignes de courants pour  $Ri=1$ ,  $Gr=10^3-10^6$  : **a)**  $Da=10^{-2}$  **b)**  $Da=10^{-4}$  et **c)**  $Da=10^{-6}$ .

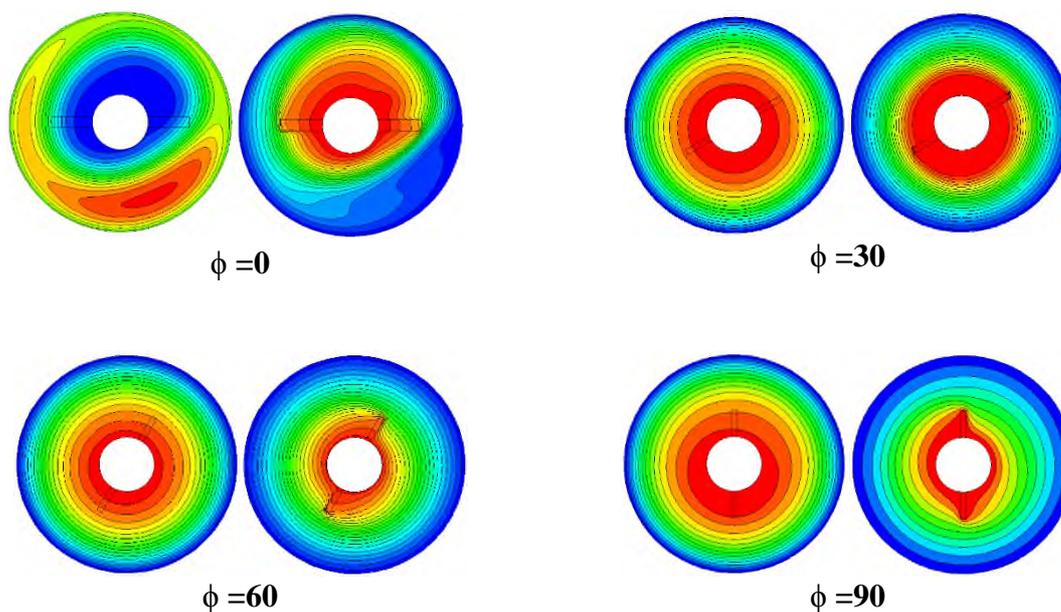
L'analyse des résultats a mis en évidence que l'effet important de la structure du milieu poreux à travers le nombre de Darcy. Pour des faibles valeurs du nombre de Darcy  $Da=10^{-2}$  et  $10^{-4}$  les lignes de courant et les isothermes sont pratiquement identiques, figure (IV.6.a) et b. On distingue notamment, un écoulement stratifié pour des nombres de Grashof faibles  $Gr=10^3$  et  $10^4$ , le transfert de chaleur est dominé par la conduction. Au-delà, pour des valeurs modérées  $Gr=10^6$ , la convection prend le dessus, ce qui est caractérisé par une perte de symétrie et une déformation des isothermes.

Pour des ailettes moins poreuses,  $Da=10^{-6}$ , des courants de convection et des panaches thermiques apparaissent prématurément pour des valeurs de  $Gr$  faibles ( $Gr=10^4$ ), figure (IV.6c). L'intensité de l'écoulement augmente, et on observe La zone d'écoulement chaud se déplace vers la partie supérieure gauche de la structure au même titre que la zone de fluide froid se localise dans une mince couche limite plaquée sur la partie gauche du cylindre extérieur.

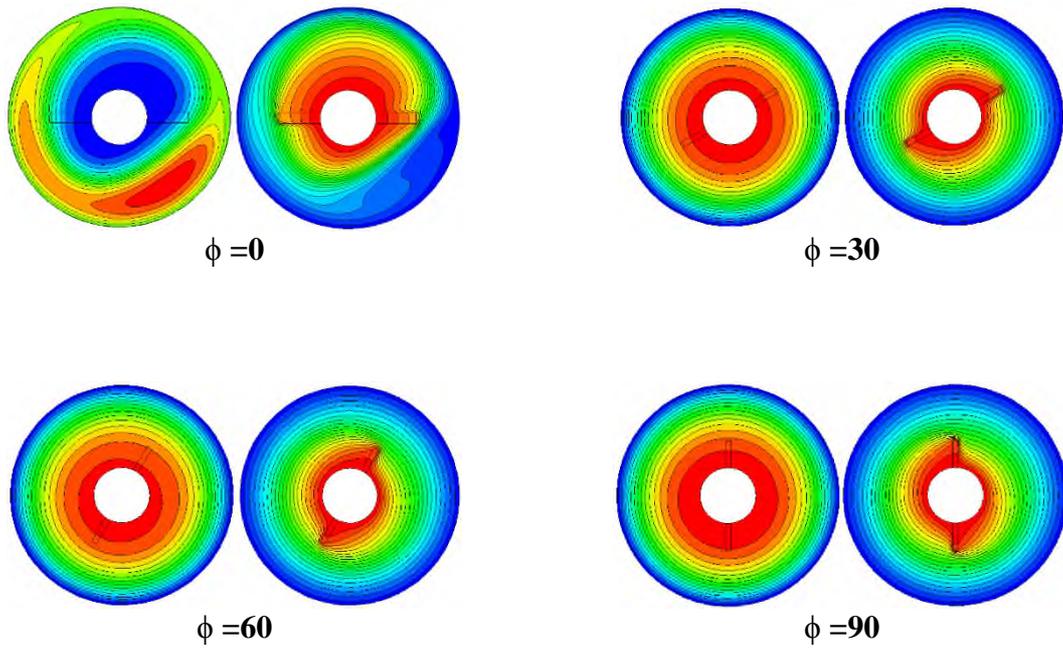
### IV.3.3 Effet de la position de l'ailette

L'effet de la rotation du cylindre interne sur la structure de l'écoulement et le transfert de chaleur est illustré sur la figure (IV.7) en termes de lignes de courant et d'isothermes pour différentes positions des ailettes  $\phi = 0^\circ, 30^\circ, 60^\circ$  et  $90^\circ$ . Les figures (IV.7 a. b. c) montrent que la zone de fluide chaud reste autour du cylindre muni d'ailettes alors que le fluide froid se trouve tout autour près du cylindre extérieur. L'écoulement est globalement stratifié pour les positions  $\phi = 60^\circ$  et  $90^\circ$ . Pour  $Da=10^{-2}$  un panache thermique se forme pour une position de  $\phi=30^\circ$  et  $Gr=10^4$  puis disparaît. Pour  $Da=10^{-4}$ , l'écoulement est globalement conductif, quel que soit le nombre de Grashof et la position des ailettes. Pour des milieux moins perméables  $Da=10^{-6}$  et  $Gr=10^4$ , le panache thermique se forme à partir d'une position des ailettes  $\phi=0^\circ$  et se développe jusqu'à une position  $\phi = 30^\circ$  puis disparaît à mesure que l'ailette change de position. Pour  $Gr=10^5$ , le panache thermique, donc les courants de convections sont visibles pour la position horizontale des ailettes  $\phi = 0^\circ$ , par la suite à mesure que l'ailette change de position le transfert de chaleur est principalement conductif.

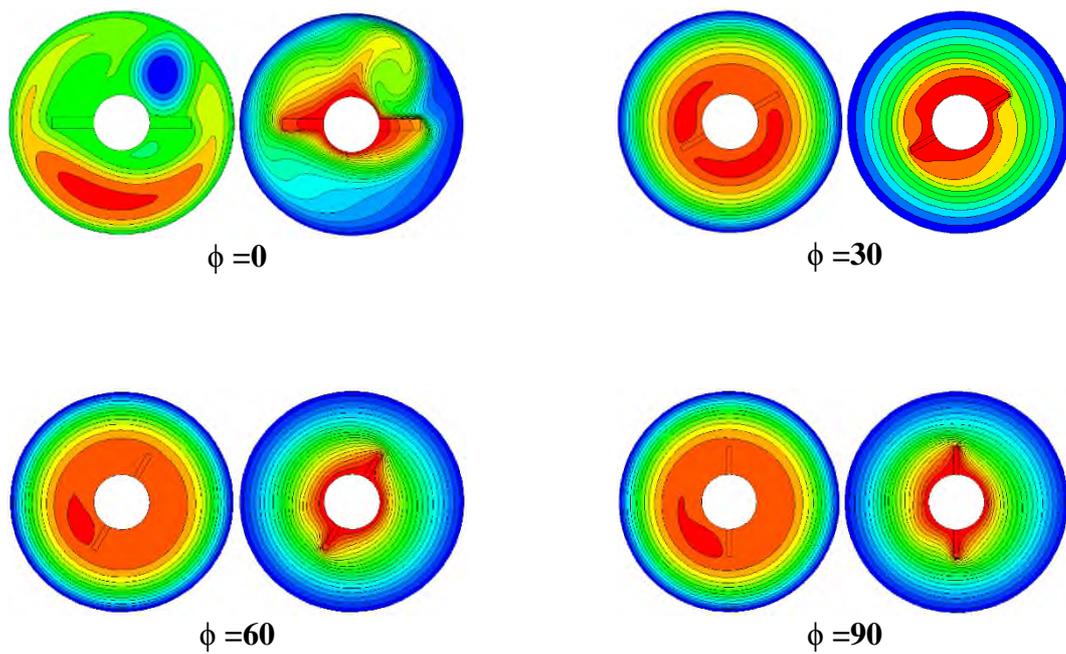
a)



b)



c)



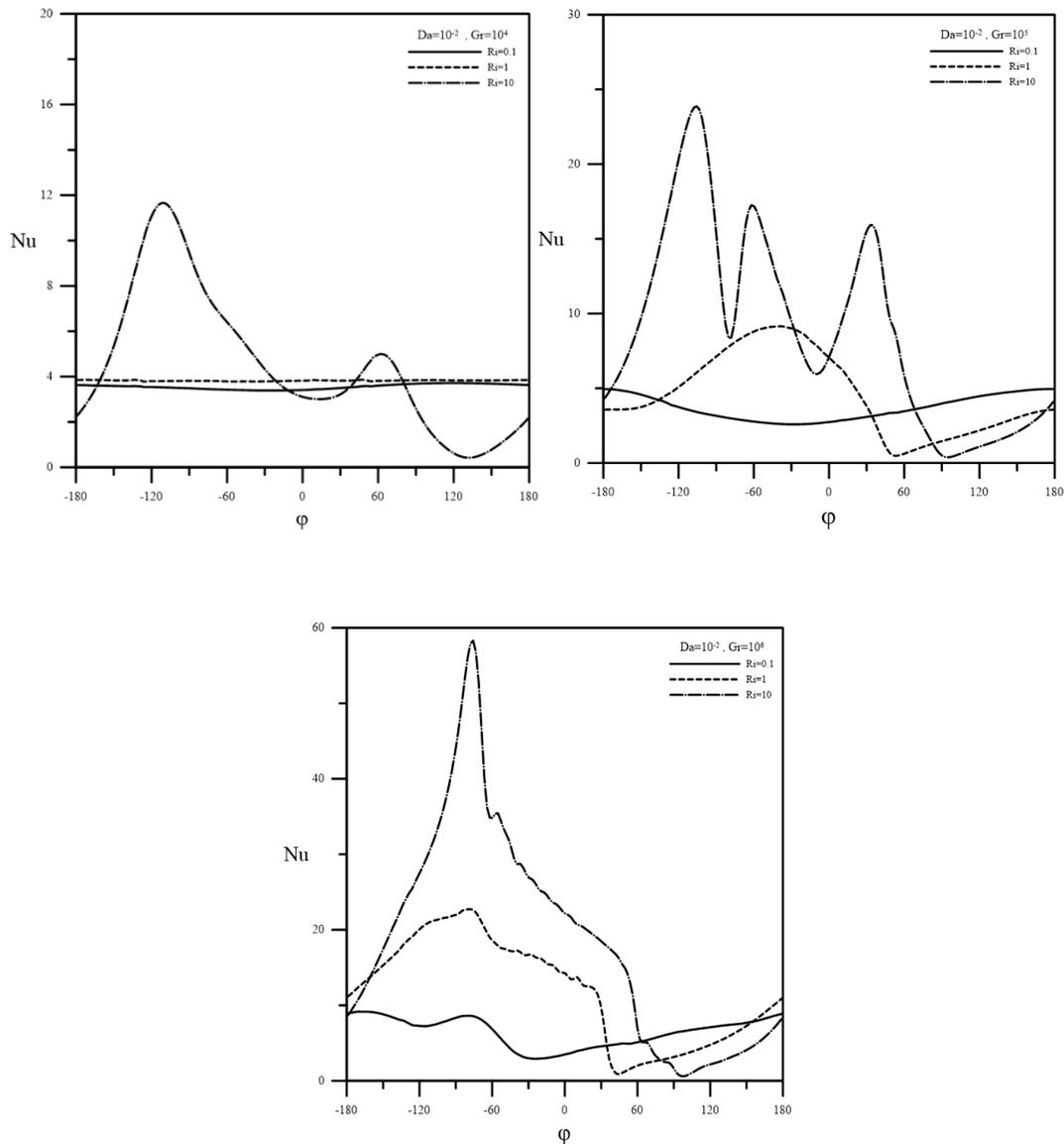
**Figure IV.7 :** Lignes de courants et isothermes pour différentes positions des ailettes  
 $Ri=1$  et  $Gr=10^5$ : a)  $Da=10^{-2}$  b)  $Da=10^{-4}$  c)  $Da=10^{-6}$

#### IV.4 analyse du transfert de chaleur

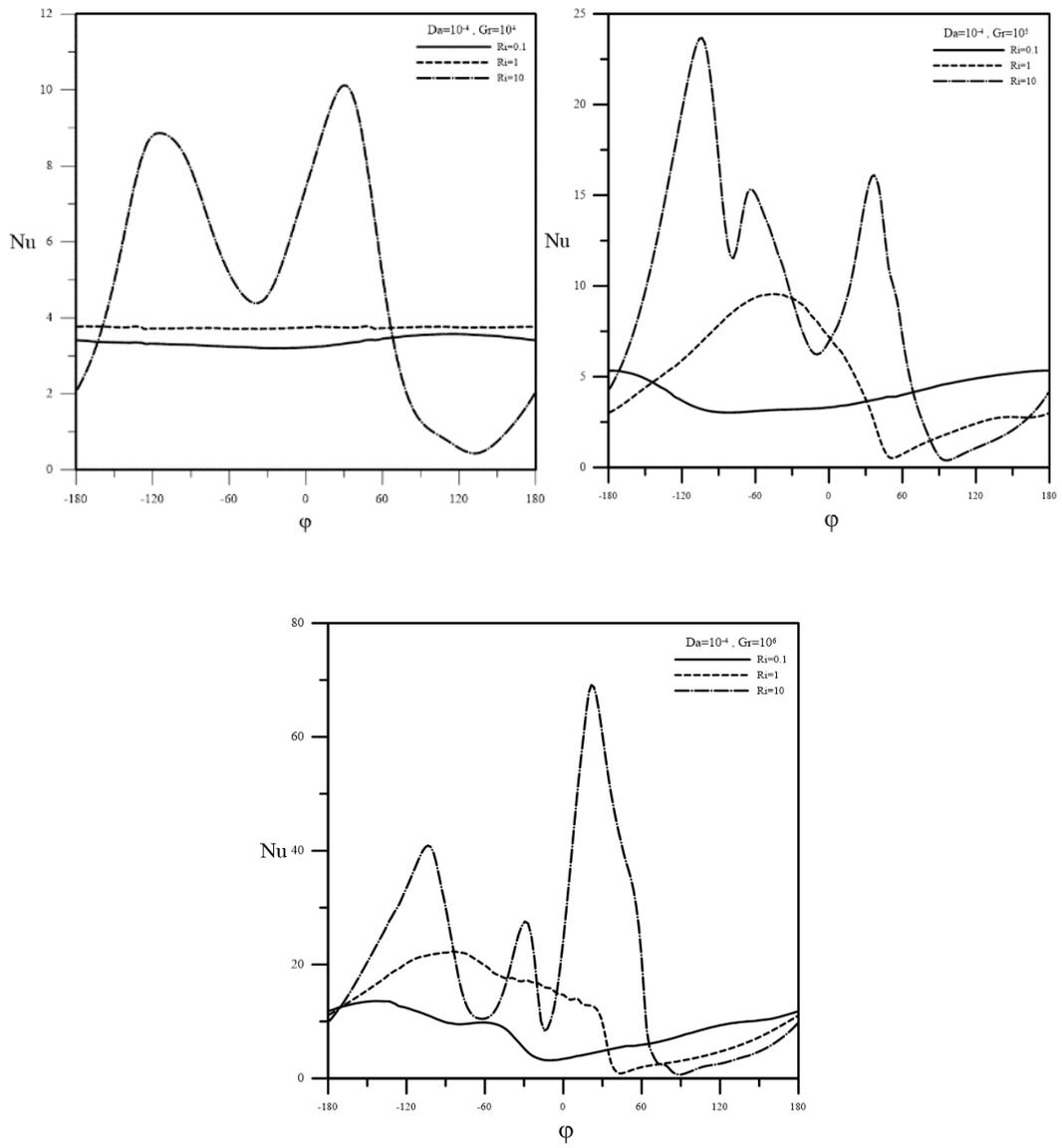
Le transfert de chaleur est habituellement représenté par un nombre sans dimension dite nombre de Nusselt qui représente le rapport entre le flux de chaleur par convection et le flux par conduction. Le nombre de Nusselt local est évalué localement tout autour du cylindre extérieur, le nombre de Nusselt moyen est calculé par intégration de ces valeurs locales.

##### IV.4.1 Effet de nombre de Richardson sur le nombre de Nusselt local

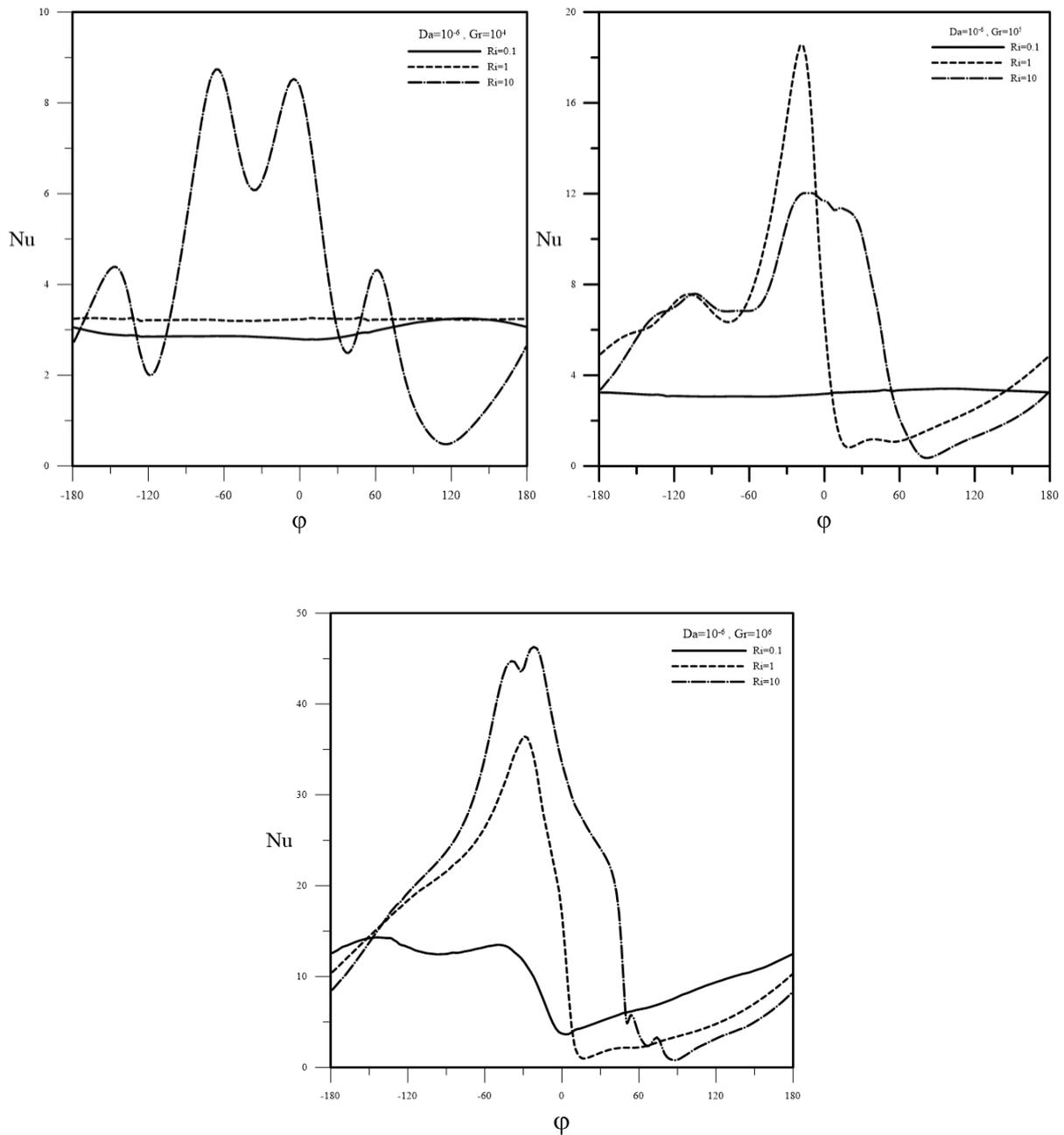
a)



b)



c)



**Figure IV.8 :** Nombre de Nusselt local sur le cylindre extérieur pour différentes valeurs des nombres de Darcy, Grashof et Richardson.

L'effet de la rotation du cylindre extérieur sur le nombre de Nusselt local est illustré à la figure (IV.8) montre l'évolution du nombre local de Nusselt sur le cylindre extérieur. En effet, en fixant le nombre de Grashof, c'est le nombre de Reynolds qui varie ce qui induit une variation du nombre de Richardson (0.1 ; 1 ; 10).

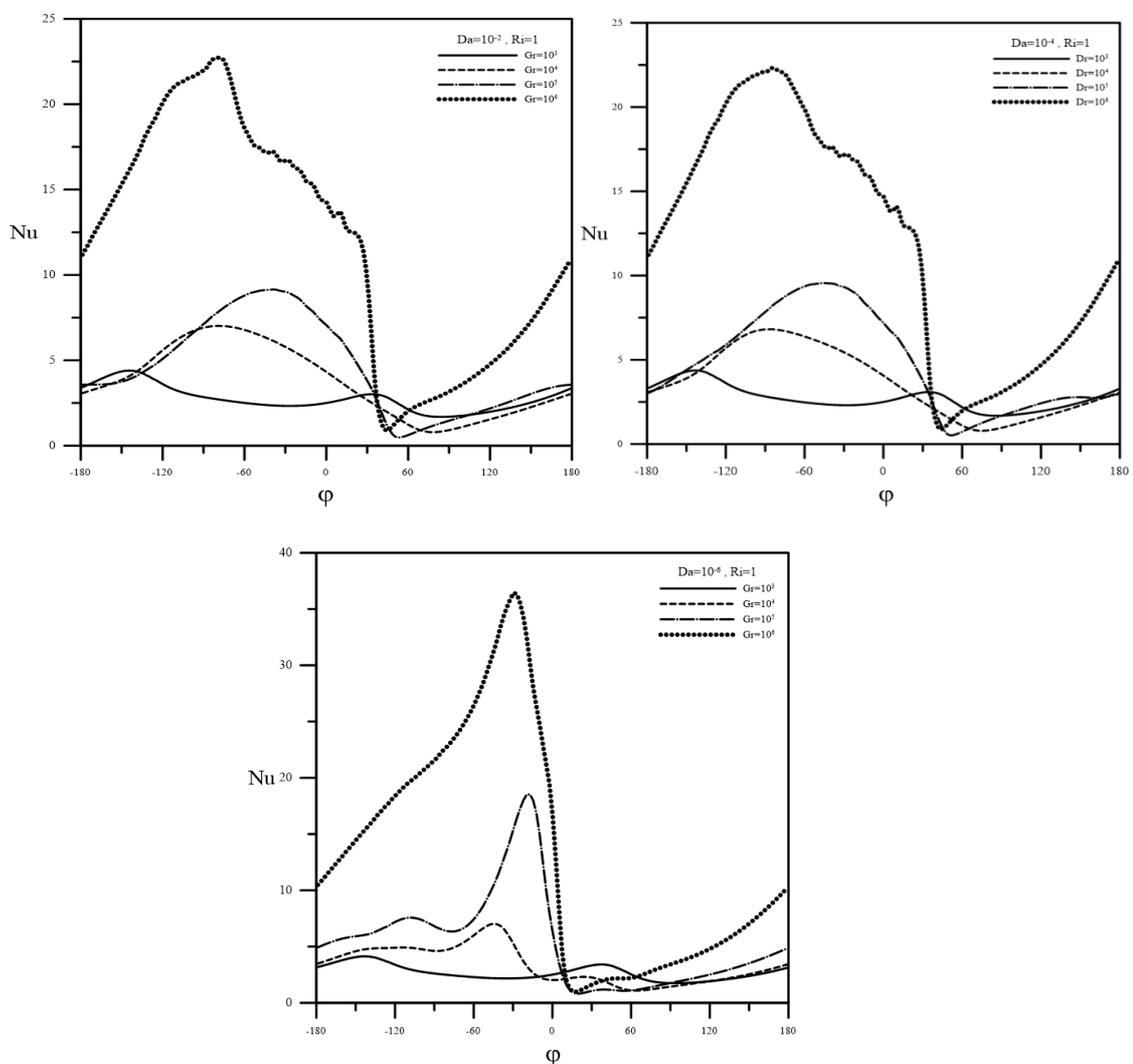
Pour la plage des nombres de Darcy considérés ( $Da=10^{-2}$  à  $10^{-6}$ ), une augmentation du nombre de Richardson conduit à une amélioration des échanges thermiques. Ces derniers sont

plus intenses en régime de convection forcée ( $Ri=10$ ) qu'en régime de convection mixte, puis naturelle ( $Ri=0.1$ ), respectivement.

Pour  $Ri=10$ , les courbes présentent plusieurs extremums. La partie du cylindre concernée par une intensification des transferts est située sur sa moitié inférieure ( $\varphi < 0$ ). Cette zone s'étend sur une partie de la moitié supérieure ( $\varphi < 50$ ) quand on augmente le nombre de Grashof.

D'autre part, les effets de la flottabilité à travers le nombre de Grashof sur les échanges de chaleur sont notables. À mesure qu'on augmente le nombre  $Gr$  les échanges sont améliorés, ceci étant dû à l'apparition des courants de convection dans l'écoulement.

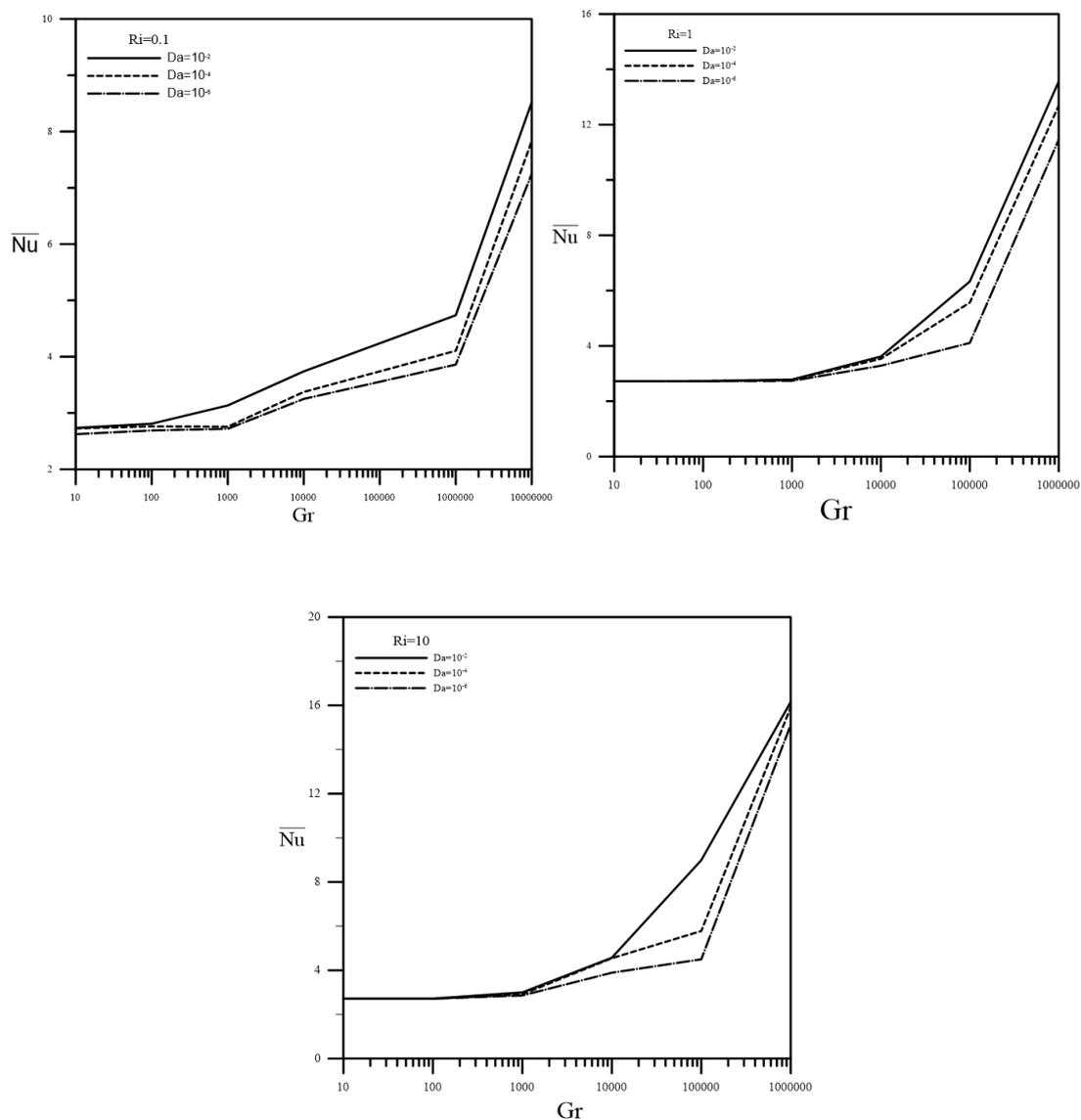
#### IV.4.2 Effet de nombre de Grashof sur le nombre de Nusselt local :



**Figure IV.9 :** Nombre de Nusselt local sur le cylindre extérieur pour différents nombres de Darcy, Richardson et Grashof.

Dans cette partie, on a fixé le nombre de Reynolds et fait varier le nombre de Grashof de  $10^3$  à  $10^6$  pour mettre en évidence les effets de la flottabilité, figure (IV.9). Il ressort de ses différentes représentations que dans tous les cas considérés, une augmentation du nombre de Grashof favoriserait les échanges de chaleur sur le cylindre extérieur. L'effet d'associer à la flottabilité la rotation du cylindre en augmentant le nombre de Richardson induit une intensification des transferts de chaleur. Comme signalé précédemment, la zone la plus concernée par cette intensification est située sur la moitié inférieure du cylindre.

#### IV.4.3 Effet de nombre de Darcy sur le nombre de Nusselt moyen pour différents Ri



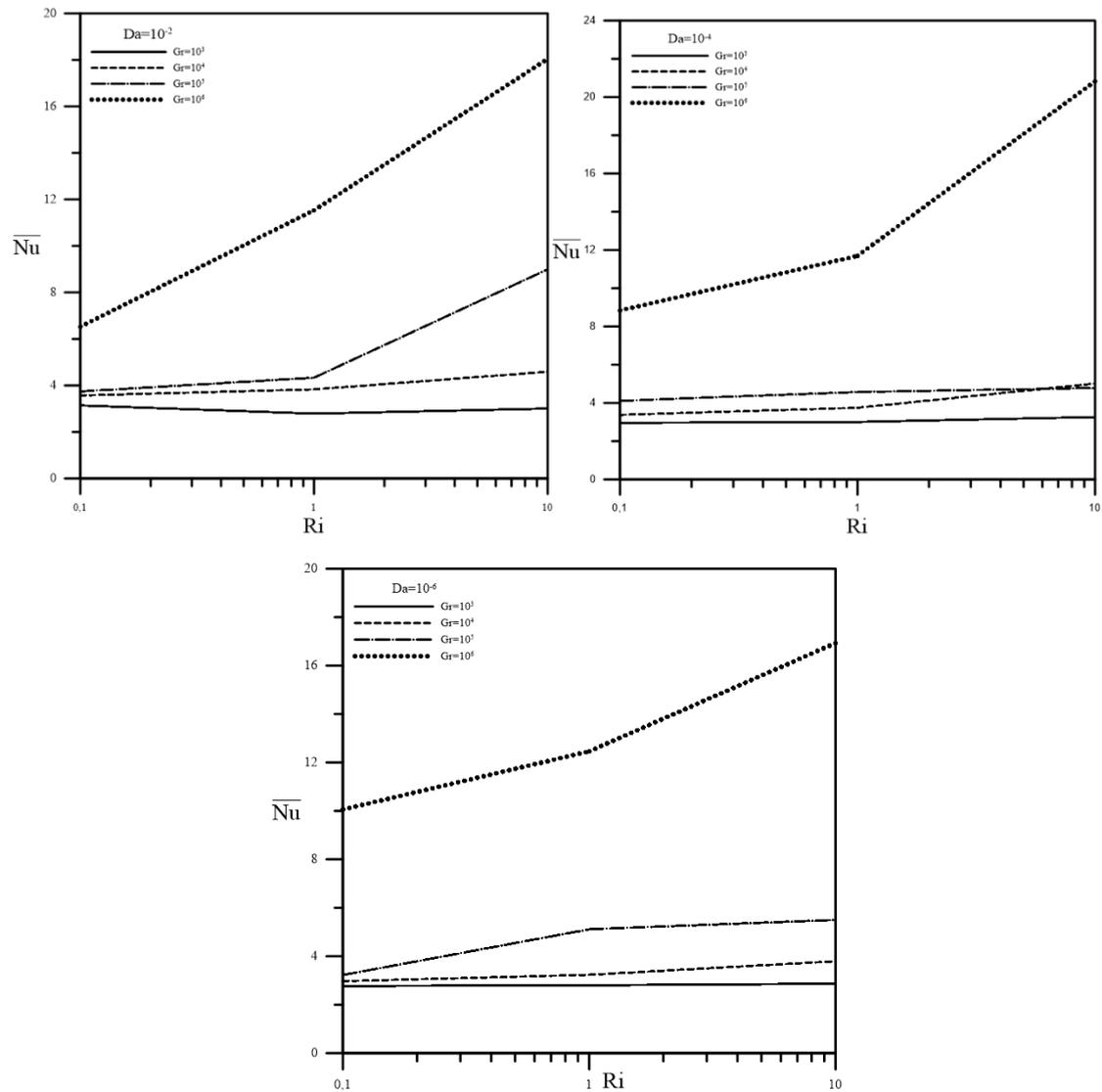
**Figure IV.10** : Effet du nombre de Darcy sur le nombre de Nusselt moyen pour trois régimes d'écoulement :  $Ri=0.1$  ; 1 et 10

L'effet du nombre de Darcy sur le nombre de Nusselt moyen calculé sur le cylindre extérieur est montré sur la figure (IV.10) pour différents régimes d'écoulement :  $Ri=0.1$  à  $10$  et  $Gr=10$  à  $10^6$ . On remarque que pour des nombres de  $Gr < 10^3$  le transfert de chaleur est constant et insensible à la variation de ce dernier ( $Gr$ ) comme de  $Da$ . Le mode de transfert par conduction est dominant (stratification thermique observée sur les isothermes). À mesure qu'on augmente le nombre Grashof, les courants de convection apparaissent en favorisant les transferts de chaleur.

D'autre part, en augmentant la perméabilité de l'ailette donc du nombre de Darcy, les échanges sont également améliorés surtout pour des milieux plus perméables ( $Da=10^{-2}$ ). Ceci s'explique par le fait que l'accroissement de la perméabilité favorise la contribution des forces visqueuses.

#### **IV.4.4 Effet de nombre de Grashof sur le nombre de Nusselt moyen**

Les représentations de la figure (IV.11), mettant en évidence l'effet du nombre de Grashof sur le nombre de Nusselt moyen pour différents milieux poreux ( $Da$ ) et différents régimes d'écoulement  $Ri$ . Quel que soit le nombre de Richardson ( $Ri$ ) ; lorsque le transfert de chaleur est purement conductif ( $Gr < 10^4$ ), le nombre de Grashof n'entraîne aucun changement significatif sur le nombre de Nusselt. L'augmentation des forces de flottabilités ( $Gr > 10^5$ ) génèrent des courants de convection favorisant ainsi les transferts de chaleur. Dans ces régimes dominés par la convection, la perméabilité du milieu poreux joue un grand rôle, en effet pour des nombres de Darcy modéré  $Da=10^{-4}$  les échanges de chaleur sont plus intenses.



**Figure IV.11** : Nombre du Nusselt moyen sur le cylindre extérieur en fonction du nombre de Grashof et Ri

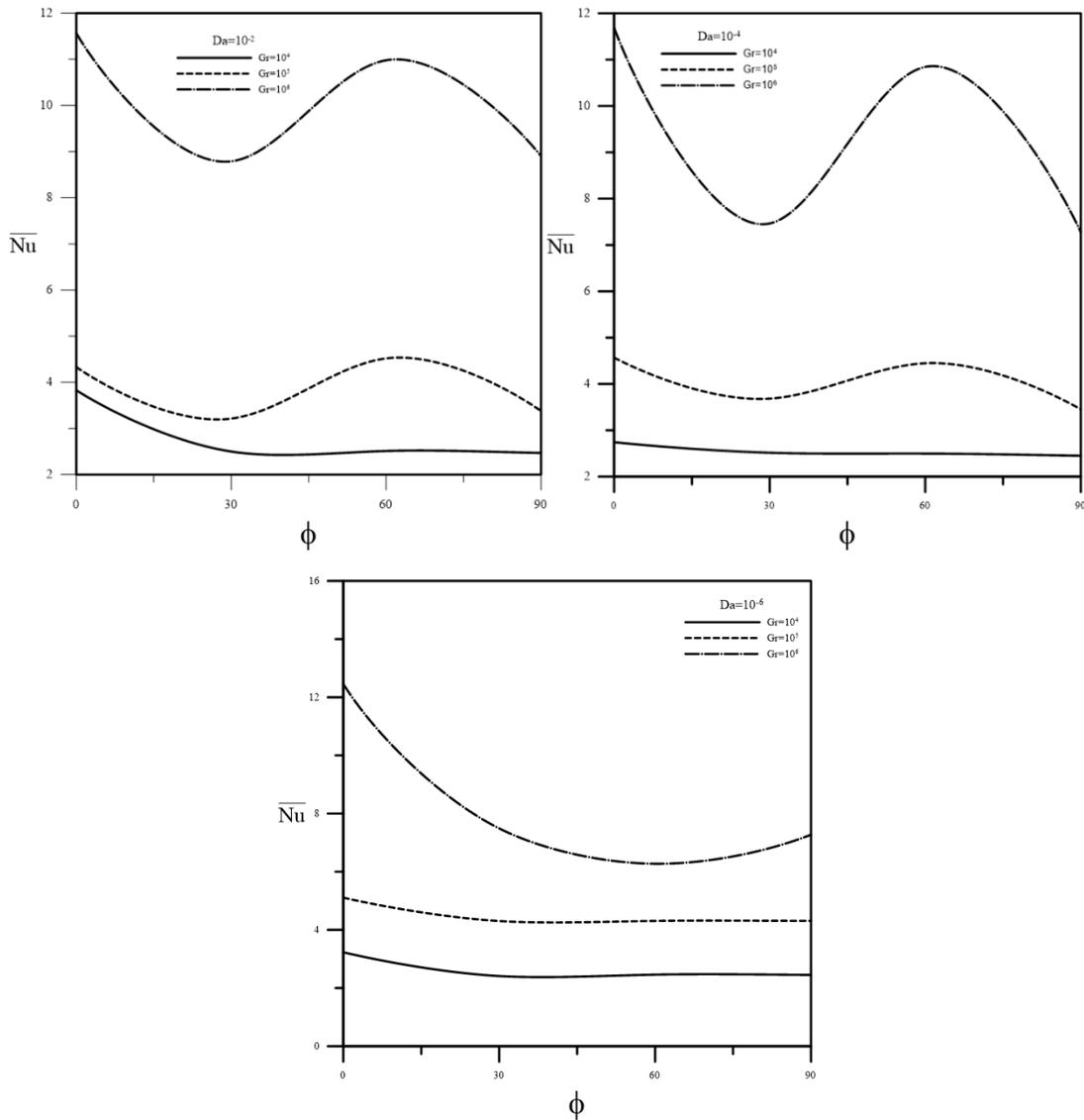
#### IV.4.5 Effet de l'orientation des ailettes sur le nombre de Nusselt moyen :

La figure (IV.12) représente, le nombre de Nusselt moyen sur le cylindre intérieur en fonction du nombre de Grashof pour différentes positions des ailettes et différents nombres de Darcy.

On constate que pour de faibles nombres de Grashof, le mode de transfert par conduction est dominant dans le fluide, ce qui explique la faible influence de l'orientation des deux ailettes sur l'échange thermique paroi/fluide.

Mais pour des nombres de Grashof supérieurs à  $10^3$ , la convection devient de plus en plus dominante et le nombre de Nusselt augmente en conséquence. Pour des milieux poreux à

perméabilité modérée ( $Da=10^{-2}$  et  $10^{-4}$ ) l'évolution du nombre de Nusselt moyen instantané (pour chaque position  $\phi$ ) prend une allure périodique. Le maximum d'échange a lieu pour une position horizontale et une autre à  $\phi=60^\circ$ . Pour un milieu peu perméable,  $Da=10^{-6}$  la périodicité disparaît, le nombre de Nusselt décroît alors de la position horizontale  $\phi=0^\circ$  jusqu'à un minimum pour  $\phi=60^\circ$ , puis repart en augmentant.



**Figure IV.12 :** Nombre du Nusselt moyen sur le cylindre extérieur en fonction de la position de l'ailette pour différents nombres de Darcy et Grashof

## Conclusion

Le transfert de chaleur par convection mixte entre deux cylindres concentriques horizontaux avec deux ailettes poreuses fixées au cylindre intérieur a été étudié numériquement en utilisant la méthode des volumes finis. Les effets des nombres de Richardson, Grashof, Darcy et différents angles d'inclinaison des ailettes sur le transfert de chaleur ont été étudiés. En ce qui concerne la position des ailettes, l'évolution du transfert de chaleur atteint sa valeur maximale à la position horizontale. Nous avons constaté que l'augmentation du nombre de Richardson et Grashof augmente le transfert de chaleur dans l'espace annulaire et nous avons également constaté que l'augmentation du nombre de Darcy augmente aussi le transfert de chaleur. Ces résultats indiquent qu'il est possible d'obtenir un transfert de chaleur élevé tout en économisant le matériau des ailettes.

## **Conclusion générale**

Après avoir fait une recherche bibliographique sur les travaux antérieurs, on s'est intéressé à la modélisation numérique des transferts de chaleur par convection mixte dans deux milieux défèrent (fluide et poreux) dont nous avons mis en place les équations régissent le phénomène ainsi que les conditions aux limites associe dans les deux milieux cités.

Dans ce mémoire, nous avons analysé le phénomène de convection mixte dans un espace annulaire. Le cylindre intérieur étant à une température chaude muni d'ailettes poreuses tandis que le cylindre extérieur rotatif est à une température froide. Cette investigation est dictée par le besoin de comprendre les mécanismes des transferts de chaleurs induits par un tel écoulement. Ce problème a été résolu selon une approche numérique basée sur la méthode des volumes finis en utilisant le code de calcul pour la discrétisation des équations gouvernantes, ces dernières sont résolues à l'aide de l'algorithme SIMPLE.

Une étude paramétrique a été menée en se basant sur l'influence de certains paramètres tels que, le nombre de Richardson ( $Ri$ ), le nombre de Grashof ( $Gr$ ) et la variation de l'angle d'inclinassent des ailettes ( $\phi$ ). Les différents résultats ont montré qu'une augmentation du nombre de Grashof favorise considérablement l'écoulement et les échanges thermiques. La variation de la perméabilité des ailettes poreuses ; à travers le nombre de Darcy ( $Da$ ), et ses influences sur les transferts thermiques ont été mises en évidence et cela nous donne un meilleur échange pour les grande de ce paramètre.

Comme notre étude s'est focalisé sur la problématique d'un écoulement laminaire, il serait intéressant pour un travail futur d'explorer le régime turbulent afin de compléter cette investigation. D'autre perspective sont aussi envisageables comme, remplacer le fluide utilisé qui est l'air par un fluide complexe voir un nanofluide ou même un écoulement multiphasique.

- [1] **Lefebvre B.**, "Ecoulement multi phase en milieux poreux", (2003).
- [2] **Kim S., Jang S.**, "Effects of the Darcy number, the Prandtl number, and the Reynolds number on local thermal non-equilibrium", *Int. J. of heat and masse transfer*, 45, pp, 3885-3896 (2002).
- [3] **Delache A.**, "Etude analytique et numérique des instabilités spation temperelles des écoulements de convection mixte en milieux poreux : comparaison avec l'expérience", Thèse de doctorat, Mention Mécanique (2005).
- [4] **K.Bencheikh, A.azzi.**, « Etude du transfert de chaleur dans une conduite courbée annulaire partiellement poreuse ». Mémoire de magister, USTHB-FGMGP (2006).
- [5] **Kalla, M.Mamou, P. Vasseur, L. Robillard**, Multiple steady states for Natural convection in a shallow porous cavity subject to Uniform Heat fluxes, *International Communications in Heal and Mass Transfer*, vol 26, Issue 6, pp. 461-770. (1999).
- [6] **T. H. Kuehn And R. J. Goldstein**, « An experimental and theoretical study of natural convection in the annulus between horizontal concentric cylinders », *J. Fluid Mech.* vol. 74, part 4, pp. 695-719 (1976).
- [7] **Tolpadi A. K. et Kuehn T. H.**, "Experimental investigation of conjugate natural convection heat transfer from a horizontal isothermal cylinder with a non-isothermal longitudinal plate fin at various angles". *Journal of Heat Mass Transfer*. Vol. 28, No. I, 155-163. (1985).
- [8] **Toru Fusegi, Bakhtier Farouk Et Kenneth S. Ball** "Mixed-Convection Flows Within A Horizontal Concentric Annulus With A Heated Rotating Inner Cylinder" *Numerical Heat Transfer*, vol. 9, pp. 591-604, (1986).
- [9] **Ashley M. Thornhill, E. kobla Glakpe**, "Prediction of natural convection enclosures at high Rayleigh numbers" *INT. COMM. HEAT MASS TRANSFER* Vol. 15, pp. 785-797, (1988).
- [10] **I. M. Rustum et H. M. Soliman**, Numerical analysis of laminar mixed convection in horizontal internally finned tubes, *Int. J. Heat Mass Transfer*. Vol. 33. No. 7, pp. 1485- 1496, (1990).
- [11] **T. S. Lee**, « numerical computation of fluid convection with air enclosed between the annuli of eccentric heated horizontal rotating cylinders », *Computers & Fluids* Vol. 21, No. 3, pp. 355-368, (1992).
- [12] **Farinas M. I., Garon A. et Saint-Louis K.**, "Study of heat transfer in a horizontal cylinder with fins". *Revue Générale de Thermique*, Vol. 36, 398-410, (1997).
- [13] **J S Yoo**, "Mixed convection of air between two horizontal concentric cylinders with a

- cooled rotating outer cylinder'' Inf. J. Heat Mass Transfer. Vol. 41, No. 2, pp. 293-302, 1998
- [14]. **C. NOUR**, "Numerical solution for laminar mixed convection in horizontal annular duct: Temperature dependent viscosity effect", Int. J. Numer. Meth. Fluids, vol. 29, pp. 849 – 864, 1999.
- [15]. **N. Islam, U. N. Gaitonde et G. K. Sharma**, "Mixed convection heat transfer in the entrance region of horizontal annuli", Int. Journal of Heat and Mass Transfer, vol. 44, pp. 2107 – 2120, 2001.
- [16] **Abu-Hijleh B. A.**, "Optimized use of baffles for reduced natural convection heat transfer from a horizontal cylinder". International Journal of Thermal Sciences, Vol. 42, 1061–1071, (2003).
- [17] **M. Rahnama et M. Farhadi**, Effect of radial fins on two-dimensional turbulent natural convection in horizontal annulus, International journal of Thermal Sciences 43 255-264, (2004).
- [18] **N. A. Mir, K. S. Syed et M. Iqbal**, Numerical solution of fluid flow and heat transfer in the finned double pipe, Journal of Research (Science) Vol. 15, No. 3, pp. 253-262 (2004).
- [19] **A. Al-Sarkhi et E. Abu-Nada**, Characteristics of forced convection heat transfer in vertical internally finned tube, International Communication in Heat and Mass Transfer 32, 557-564, (2005).
- [20] **P. Teertstra, M. M. Yovanovich and J. R. Culham**, "analytical modeling of natural convection in horizontal annuli".
- [21] **S. Kiwan et Zeitoun**, Natural convection in a Horizontal Cylindrical Annulus Using Porous fins, P.O. Box 800, Riyadh, 11425, SA. (2006).
- [22] **N. Yucel et N. Dinler**, Numerical study of laminar and turbulent flow through a pipe with fins attached, Numerical Heat Transfer, Part a, 49: 195-214, (2006).
- [23]. **B. Premachandran et C. Balaji**, "Conjugate mixed convection with surface radiation from a horizontal channel with protruding heat sources", Int. J. Heat and Mass Transfer, vol. 49, pp. 3568 – 3582, 2006.
- [24] **A. Cheddadi, M.T. Ouazzani et Y. Taher**, optimisation du transfert de chaleur géométrie annulaire cylindrique par placement de bloc chauffante symétriques, Modélisation et Informatique Scientifique, Ecole Mohammadia d'Ingénieurs, B.P. 765, Rabat (Maroc), (2007)

- [25] **M. A. Teamah**, « Numerical simulation of double diffusive laminar mixed convection in a horizontal annulus with hot, solutal and rotating inner cylinder », *Int. J. of Thermal Sciences* 46, 637–648, (2007).
- [26] **SC Haldar, GS Kochhar, K. Manohar, RK Sahoo**, "Numerical study of laminar free convection about a horizontal cylinder with longitudinal fins of finite thickness", *International Journal of Thermal Sciences* 46, 692–698, (2007).
- [27] **Mo Yang, Ling Li, Yuwen Zhang (2008)** "Numerical study of periodically fully developed convection in channels with periodically grooved parts", *International Journal Heat and Mass Transfer*, 51, 3057 – 3065.
- [28] **K. Kahveci**, "Stability of unsteady mixed convection in a horizontal concentric annulus." *Journal of Applied Fluid Mechanics* 9.5 (2016): 2141-2147.
- [29] **M. A. Hazar, A. Akbar Abbasian**, « Numerical analysis of the natural convection in horizontal cylindrical annuli », *Int. Academic J. of Science and Engineering* Vol. 3, No. 5, pp. 68-76, (2016).
- [30] **S. Patankar (1980)** "Numerical heat transfer and fluid flow" Mc Graw Hill, New York.
- [31] **Alshahrani, D. and Zeitoun, O. (2006)**, "Natural convection in horizontal annulus with fins attached to inner cylinder", *Int. J. Heat and Technology*, Vol. 24 No. 2.

## ***Résumé***

Dans ce travail, nous avons présenté une étude numérique de la convection mixe dans un anneau cylindrique horizontal a la présence des ailettes poreuses. Le cylindre intérieur chaud et le cylindre extérieur froid. Les équations qui régissent l'écoulement et le transfert de chaleur sont : l'équation de continuité, de quantité de mouvements et l'équation d'énergie. L'étude a été effectuée en fonction des paramètres de contrôles avec des conditions aux limites variables. Les résultats indiquent que pour  $Da=10^{-2}$ ,  $Gr=10^6$  et  $Ri=10$  la perméabilité du milieu croit, ceci dit un meilleur refroidissement du cylindre intérieur (meilleur taux du transfert de chaleur), par contre, pour  $Da=10^{-6}$ ,  $Gr=10^3$  et  $Ri=0.1$  c'est totalement le contrer la ou les milieux sont moins perméables c'est le transfert de chaleur par conduction qui domine (mauvais taux du transfert de chaleur).

## ***Abstract***

In this work, we presented a numerical study of mixed convection in a horizontal cylindrical ring of porous fins. The hot inner cylinder and the cold outer cylinder. The equations that govern the flow and transfer of heat are: the continuity equation, the quantity of motion equation and the energy equation. The study was carried out according to the control parameters with variable boundary conditions. The results indicate that for  $Da=10^{-2}$ ,  $Gr=10^6$  and  $Ri=10$  the permeability of the medium increases, however, a better cooling of the inner cylinder (better heat transfer rate), on the other hand, for  $Da=10^{-6}$ ,  $Gr=10^3$  and  $Ri=0.1$  it is totally the counterpart of the less permeable medium(s) it is the heat transfer by conduction that dominates (poor heat transfer rate).