

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUE

Université Abderrahmane Mira – Bejaia



Faculté de Technologie

Département de Génie électrique

## ***Mémoire***

*Présenté en vue de l'obtention du diplôme de Master en  
Automatique*

### ***THEME***

**Optimisation d'une commande LQR par PSO  
-Application sur un pendule inversé**

Réalisé par :

MAKDOUD Lyes

ZIANE Rafik

Encadré par :

Mr. GUENOUNOU. O

Mr. KACIMI. Md A

Devant le jury :

Mr. LEHOUCHE

Mr. NAIT MOHAND

*Promotion 2019*

## Remerciements

---

*Nous tenons tout d'abord à remercier le dieu le tout puissant et miséricordieux, qui nous a donné la force et la patience d'accomplir ce Modeste travail.*

*En second lieu, nous tenons à remercier notre encadreur **Mr : GUENOUNOU. O** et notre Co-encadreur **Mr : KACIMI. Md A**, à leurs précieux conseil et leur aide durant toute la période du travail.*

*Nos vifs remerciements vont également aux membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre recherche en acceptant d'examiner notre travail Et l'enrichir par leurs propositions.*

*Nous tenons également à remercier **Mr : BENAMIROUCHE. N** et toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.*

*Enfin, nous adressons nos plus sincères remerciements à tous nos proches et amis, qui nous ont toujours soutenue et encouragée au cours de la réalisation de ce mémoire.*

*Merci à tous et à toutes.*

---

## *Dédicaces*

*Je dédie ce modeste travail à :*

- ✚ A l'homme de ma vie, mon exemple éternel, mon soutien moral et source de joie et de bonheur, celui qui s'est toujours sacrifié pour me voir réussir, à toi mon père.*
  
- ✚ A la lumière de mes jours, la source de mes efforts, la flamme de mon cœur, ma vie et mon bonheur ; maman que j'adore.*
  
- ✚ Aux personnes dont j'ai bien aimé la présence dans ce jour à mon grand père et ma grande mère et à qui je souhaite une longue vie pleine de bonheur, joie et santé.*
  
- ✚ A celui que j'aime beaucoup et qui m'a soutenue tout au long de ce projet : A ma femme **KAHINA** et mes frères **RABAH, YIDIR** et mes sœurs **SOUAD, SALIMA** qui m'ont toujours aidé et encouragé.*
  
- ✚ A toute mes amis, amies **KOUSSAILA, KARIME, ZOUBIR, MOUHEND, RACHID, MAZIGH, SANIA, ABED ALEHAK, ZAHWA, SISA.***

✚ A mon binôme **RAFIK** et tout la famille **MAKDOUD**.

✚ ET à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin pour que ce travail soit possible, je vous dis merci.

*LYES*

*Je dédie ce mémoire*

*A mes chers parent ma mère que dieu ait pitié d'elle,*

*A mon père et belle-mère Zina*

*Pour leur patience, leur amour, soutien et encouragement*

*A mes sœurs Ania, Imane, Nassima et Drifa*

*A mes amies et mes camarades.*

*Rafik*

# Sommaire

---

## Sommaire :

Introduction générale : ..... 1

### Chapitre I : Description et modélisation du pendule inversé.

I.1 Introduction : ..... 3

I.2 Présentation du pendule inversé : ..... 3

I.3 Description du Banc d'Essais Feedback du laboratoire LTII : ..... 4

I.3.1 Principe de fonctionnement : ..... 4

I.3.2 Particularités du pendule inversé : ..... 5

I.4 Intérêt de l'étude du pendule inversé : ..... 5

I.5 Modélisation du pendule inversé : ..... 6

I.5.1 Energie cinétique du système : ..... 8

I.5.2 Energie potentielle du système : ..... 10

I.5.3 Modèle de connaissance de l'ensemble chariot-pendule : ..... 10

I.6 Modèle d'état de l'ensemble chariot-pendule : ..... 12

I.7 Simulation en boucle ouverte du système pendule-chariot : ..... 13

I.8 Conclusion : ..... 17

### Chapitre II : Commande linéaire quadratique LQR.

II.1 Introduction : ..... 18

II.2 Commande linéaire quadratique (LQR) : ..... 18

II.2.1 Formulation du problème de la commande LQR et sa résolution : ..... 19

II.2.2 Résolution de l'équation de Riccati : ..... 22

II.3 Linéarisation du modèle du pendule : ..... 22

II.4 Teste de commandabilité : ..... 24

---

# Sommaire

---

II.5 Application de la commande LQR sur le système chariot-pendule : .....	25
II.5.1 Choix des matrices de pondération : .....	25
II.5.2 La règle de Bryson : .....	25
II.5.3 Résultat de simulation de la commande LQR : .....	26
II.5.3.1 Interprétation des résultats de simulation : .....	29
II.5.3.2 Interprétation des résultats de simulation (perturbation) : .....	31
II.5 conclusion : .....	31
<b>Chapitre III : Optimisation par Essaim Particulaire.</b>	
III.1 Introduction : .....	32
III.2 Définition de l'optimisation : .....	32
III.3 L'optimisation par essaim de particules (PSO) : .....	32
III.3.1 Principe général : .....	32
III.3.2 Formalisation mathématique du PSO : .....	34
III.3.3 Algorithme de PSO d'optimisation par essaim particulaire : .....	36
III.4 Configuration de la méthode : .....	37
1) Nombre de particules : .....	37
2) Topologie du voisinage : .....	37
3) Les coefficients de confiance : .....	38
4) Vitesse maximale et coefficient de constriction : .....	38
5) Le facteur d'inertie : .....	39
6) Initialisation de l'essaim : .....	39
7) Le critère d'arrêt : .....	40
III.5 Illustration à travers des exemples : .....	40
1) Fonction de Rosenbrock : .....	40
2) Fonction de Ackley : .....	42

---

# Sommaire

---

3) La fonction Matyas : .....	43
4) La fonction de himmelblau : .....	44
III.6 conclusion : .....	46
<b>Chapitre IV</b> : Application de la commande LQR optimisé par PSO sur le pendule inversé.	
IV.1 Introduction : .....	47
IV.2 Optimisation de la commande LQR par PSO : .....	47
IV.2.1 Fonction objectif : .....	48
IV.2.2 Paramètres du PSO : ... ..	49
IV.3 Applications : .....	49
IV.4 Conclusion : .....	55
Conclusion générale : .....	56

---

## *Liste des figures et des tableaux*

---

### *Liste des figures :*

<b>Figure (I.1) :</b> Pendule inversé en coordonnées généralisées $x$ et $\theta$ : .....	3
<b>Figure (I.2) :</b> Maquette du pendule inversé : .....	4
<b>Figure (I.3) :</b> Principe du pendule inversé : .....	5
<b>Figure (I.4) :</b> L'homme est un double pendule inversé : .....	6
<b>Figure (I.5) :</b> Segway à deux roues : .....	6
<b>Figure (I.6) :</b> Schéma de l'ensemble chariot-pendule : .....	7
<b>Figure (I.7) :</b> Schémas du plan de calcul : .....	8
<b>Figure (I.10) :</b> Schéma simulation de l'ensemble chariot-pendule : .....	14
<b>Figure (I.9) :</b> Position du chariot pour : $[x \ \dot{x} \ \theta \ \dot{\theta}]^T = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ : .....	15
<b>Figure (I.10) :</b> Position du pendule pour : $[x \ \dot{x} \ \theta \ \dot{\theta}]^T = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ : .....	15
<b>Figure (I.11) :</b> Position du chariot pour : $[x \ \dot{x} \ \theta \ \dot{\theta}]^T = [0 \ 0 \ \pi \ 0]^T$ : .....	16
<b>Figure (I.12) :</b> Position du pendule pour : $[x \ \dot{x} \ \theta \ \dot{\theta}]^T = [0 \ 0 \ \pi \ 0]^T$ : .....	16
<b>Figure (II.1) :</b> principe d'une commande par retour d'état : .....	18
<b>Figure (II.2) :</b> Commande LQR appliquée sur les deux modèles : .....	27
<b>Figure (II.3) :</b> Position du pendule : .....	28
<b>Figure (II.4) :</b> Position du chariot : .....	28
<b>Figure (II.5) :</b> Signal de commande (Force) : .....	29

---

## *Liste des figures et des tableaux*

---

<b>Figure (II. 6) :</b> Résultat expérimentaux de la commande du système par LQR en présence de perturbations appliquée sur le pendule : .....	30
<b>Figure (II.7) :</b> Résultat expérimentaux de la commande du système par LQR en présence de perturbations appliquée sur le (chariot) : .....	30
<b>Figure (II.8) :</b> Résultat expérimentaux de la commande du système par LQR en présence de perturbations appliquée sur la (Force) : .....	31
<b>Figure (III.1) :</b> Déplacement d'une particule : .....	34
<b>Figure (III.2) :</b> Algorithme d'optimisation par essaim particulaire : .....	36
<b>Figure (III.3) :</b> Organigramme « méthode des essaims particuliers » : .....	36
<b>Figure (III.4) :</b> (a) Topologie en anneau (b) en rayon, (c) en étoile : .....	38
<b>Figure (III.5):</b> Représentation graphique de la fonction «Rosenbrock» : .....	41
<b>Figure (III.6) :</b> Convergence de la fonction objectif Rosenbrock : .....	41
<b>Figure (III.7) :</b> Représentation graphique de la fonction d'Ackley : .....	42
<b>Figure (III.8) :</b> Convergence de la fonction Ackley : .....	43
<b>Figure (III.9) :</b> Représentation graphique de la fonction Matyas : .....	43
<b>Figure (III.10) :</b> Convergence de la fonction objectif Matyas : .....	44
<b>Figure (III.11) :</b> Représentation graphique de la fonction de himmelblau : .....	45
<b>Figure (III.12) :</b> Convergence de la fonction objectif himmelblau : .....	45
<b>Figure (IV.1) :</b> Schéma bloc du régulateur LQR optimisé par PSO : .....	48

---

## *Liste des figures et des tableaux*

---

<b>Figure (IV. 2)</b> : Evolution de la fonction objectif à travers les générations : .....	50
<b>Figure (IV. 3)</b> : Position du chariot pour la première et la dernière génération : .....	51
<b>Figure (IV. 4)</b> : Position du pendule pour la première et la dernière génération : .....	51
<b>Figure (IV.5)</b> : Signal de commande pour la première et la dernière génération : .....	52
<b>Figure (IV.6)</b> : Evolution de la fonction objectif à travers les générations ( $\alpha_1 = 1$ , $\alpha_2 = 5$ , $\alpha_3 = 5$ ) : .....	53
<b>Figure (IV.7)</b> : Position du chariot pour la première et la dernière génération ( $\alpha_1 = 1$ , $\alpha_2 = 5$ , $\alpha_3 = 5$ ) : .....	53
<b>Figure (IV.8)</b> : Position du pendule pour la première et la dernière génération ( $\alpha_1 = 1$ , $\alpha_2 = 5$ , $\alpha_3 = 5$ ) : .....	54
<b>Figure (IV.9)</b> : Signal de commande pour la première et la dernière génération ( $\alpha_1 = 1$ , $\alpha_2 = 5$ , $\alpha_3 = 5$ ) : .....	54

### *Liste des tableaux :*

<b>Tableau (I.1)</b> : Paramètres de l'ensemble chariot-pendule : .....	7
<b>Tableau (III.1)</b> : Valeurs des paramètres du PSO : .....	40
<b>Tableau (IV.1)</b> : Paramètres du PSO : .....	49
<b>Tableau (IV.2)</b> : Etude comparative : .....	52
<b>Tableau (IV.3)</b> : Etude comparative ( $\alpha_1 = 1$ , $\alpha_2 = 5$ , $\alpha_3 = 5$ ) : .....	55

# *Notations*

---

## *Notations :*

**M** : Masse du chariot

**b** : Coefficient de frottement des roues du chariot

**m** : Masse du pendule

**x (t)** : Position du chariot

**J** : Inertie du pendule en son centre de masse

**l** : Demi-longueur de pendule

**$\theta$  (t)** : Angle de rotation du pendule

**F(t)** : Force exercé sure le chariot

**g** : Intensité de la pesanteur

**d** : Coefficient de frottement de rotation du pendule

**$E_c$**  : L'énergie cinétique du système

**$E_p$**  : L'énergie potentielle du système

**L** : Lagrangien du système

**$E_{cc}$**  : L'énergie cinétique du chariot

**$E_{cp}$**  : L'énergie cinétique du pendule

**$v_c$**  : Vitesse de centre de gravité du pendule

**$\dot{x}$**  : Vitesse du chariot

**$\dot{\theta}$**  : Vitesse angulaire du pendule

**$\epsilon(t)$**  : Désigne les degrés de liberté du pendule

**$D_f$**  : Désigne l'énergie dissipée par frottement

**$r_c$**  : Position du centre de gravité du pendule

**$\vec{i}, \vec{j}$**  : Vecteur unitaire du repère x, y

## *Notations*

---

$\ddot{x}$  : l'accélération du chariot

$\ddot{\theta}$  : l'accélération angulaire du pendule

$T$  : durée d'une impulsion

$U$  : L'entrée du système (la commande)

**LQR** : La commande Linéaire Quadratique Régulateur

$A$  : matrice d'état ou d'évolution de dimension  $n \times n$ .

$B$  : matrice d'état ou de commande de dimension  $n \times m$ .

$C$  : matrice de sortie de dimension  $q \times n$ .

$Q_C$  : La matrice de commandabilité

$J$  : Le critère quadratique qui est minimisé par la commande LQR

$\rho_0$  : La solution optimale de l'équation de Riccati

$Q$  et  $R$  : Les matrices de pondérations

$K$  : Le gain de retour d'état utilisé dans la commande LQR

$\lambda$  : Les valeurs propres de  $A$

**OEP** : L'optimisation par essaim particulière

$v_i(t)$  : est la vitesse de la particule

$x_i(t)$  : est la position de la particule

$\vec{Pbest}_i$  : la meilleure position par laquelle elle est déjà

$\vec{Gbest}_i$  : la meilleure position atteinte par toutes les particules de l'essaim

$w$  : est une constante, appelée coefficient d'inertie

$c_1$  et  $c_2$  : sont deux constantes, appelées coefficients d'accélération

$r_1$  et  $r_2$  : sont deux nombres aléatoires tirés uniformément dans  $[0, 1]$

# *Introduction générale*

# *Introduction générale*

---

## *Introduction générale :*

L'automatique a connu un véritable essor. L'élaboration de lois de commande de systèmes a fait l'objet de nombreux travaux de recherche. Les systèmes à commander devenant de plus en plus complexes, rendant ainsi l'obtention d'un modèle du procédé pratiquement impossible, et par conséquent la mise en œuvre des lois de commande correspondantes devient une tâche très difficile.

L'un des enjeux de l'automatique est de proposer un contrôleur adapté au système à piloter garantissant la réalisation de la tâche souhaitée. De nombreuses approches, pour les systèmes continus, ont été proposées pour la synthèse de lois de commande et peuvent être classées en deux catégories dites « linéaires » où « non linéaires ».

La commande des systèmes non linéaires reposait sur la théorie de l'automatique linéaire qui consiste à linéariser la dynamique non linéaire du système autour d'un point de fonctionnement de telle sorte que les outils de la commande linéaire puissent être exploités pour la synthèse d'une loi de commande assurant les performances recherchées [1]. Grâce à sa facilité d'implémentation et de mise en œuvre, cette approche a remporté un grand succès dans les domaines industriels. La commande optimale représente la technique de contrôle classique la plus utilisée dans cette approche. Cette commande traduite par le contrôle linéaire quadratique (LQ) est étudiée et détaillée dans [2], [3], [4]. En fait, pour un système dynamique donné et dont les équations sont connues, le problème de commande optimale consiste à trouver une loi minimisant un critère de performance donné. L'obtention d'un bon compromis entre l'énergie du signal d'entrée et l'énergie de sortie nécessite un choix convenable des matrices de pondération (Q, R) du régulateur LQR. Actuellement, dans la majorité des travaux, ce choix est réalisé par l'utilisation des techniques d'optimisation.

Un problème d'optimisation est défini par un ensemble de variables, une fonction "objectif" et un ensemble de contraintes. L'espace de recherche est l'ensemble des solutions possibles du problème. Résoudre un problème d'optimisation consiste à trouver la ou les meilleures solutions (en minimisant et/ou maximisant la/les fonctions objectifs du problème posé), tout en satisfaisant un ensemble de contraintes définies par l'utilisateur. Certains problèmes d'optimisation sont qualifiés de difficiles, et leur résolution, dans un temps raisonnable, nécessite l'utilisation d'algorithmes sophistiqués, comme les méthodes approchées (Les heuristiques et les métaheuristiques). Parmi les métaheuristiques destinées à

# *Introduction générale*

---

résoudre ces problèmes, plus précisément l'optimisation par essaim particulaire (OEP, ou PSO en anglais) qui est apparue en 1995 [5].

L'optimisation par essaim particulaire est une méthode d'optimisation stochastique qui est inspirée d'un comportement social des animaux évoluant en essaim. Ce comportement social est modélisé par une équation mathématique permettant de guider les « particules » durant le processus de déplacement. Le déplacement d'une particule est influencé par trois composantes : la composante d'inertie, la composante cognitive et la composante sociale. Chacune de ces composantes reflète une partie de l'équation. L'OEP présente l'avantage d'être efficace sur une grande variété de problèmes, sans pour autant que l'utilisateur ait à modifier la structure de base de l'algorithme [5], [6].

Le thème principal de ce travail est le développement d'une commande optimale LQR pour la stabilisation du pendule inversé. La mise au point de cette stratégie de commande nécessite la combinaison de méthode L'OEP et de la commande linéaire quadratique.

Ce mémoire est organisé en quatre chapitres répartis comme suit :

- Le premier chapitre est consacré à la modélisation mathématique du pendule inversé. Pour ne pas rester dans un cadre descriptif, des simulations sous Matlab-Simulink du modèle établi du pendule sont présentées à la fin du chapitre.
- Dans le deuxième chapitre, on introduit le principe de la commande (LQR). Un problème majeur pour la synthèse de la commande LQR réside dans le choix des matrices de pondération permettant d'atteindre les spécifications désirées (pour obtenir le régulateur LQR de gains  $K$ ).
- Dans le troisième chapitre, nous présentons le principe de la méthode d'optimisation par essaim de particules (PSO), ainsi son algorithme général.
- Le quatrième chapitre, il s'agit d'appliquer notre commande LQR optimisée par PSO à la stabilisation du pendule inversé à deux degrés de liberté. Les résultats des travaux de simulation sont présentés à la fin de chapitre.

On termine notre travail par une conclusion générale.

*Chapitre I :*  
*Modélisation du pendule*  
*inversé.*

## I.1 Introduction :

Nous allons nous intéresser, dans ce chapitre, à l'étude du pendule inversé qui le sujet de notre application. Après une brève description du pendule inversé, nous présenterons la banc d'essais du pendule inversé disponible au laboratoire de technologie industrielle et de l'information (LTII) de l'université de Bejaïa. Par la suite, nous développerons son modèle dynamique qui sera présenté sous forme d'équations différentielles, déduites à partir du formalisme d'Euler-Lagrange. Après, nous présenterons le système d'équations ainsi obtenu dans l'espace d'état.

Pour ne pas rester dans un cadre descriptif, la dernière partie du chapitre est consacrée à des simulations en boucle ouverte du modèle du pendule inversé.

## I.2 Présentation du pendule inversé :

Le pendule inversé (Figure I.1) est un système instable, SIMO (Single Input Multiple Output) et non linéaire. C'est un outil didactique et un problème classique utilisé en automatique. C'est pourquoi il est souvent utilisé pour tester les performances des nouvelles lois de commande.

On peut trouver dans la littérature plusieurs travaux sur la commande du pendule inversé et on peut citer les travaux suivants :

- Problème de contrôle de l'énergie [Astroim et Futurai 1996] associées à une séquence de balancement qui permet de relever le pendule de sa position d'équilibre stable [Wei et Al 1995], [Vermeiren 1998].
- L'application de réseaux neuronaux [Anderson 1989].
- La méthode des moments [Jacobi 1995].
- La commande non linéaire [Wei et Al 1995].

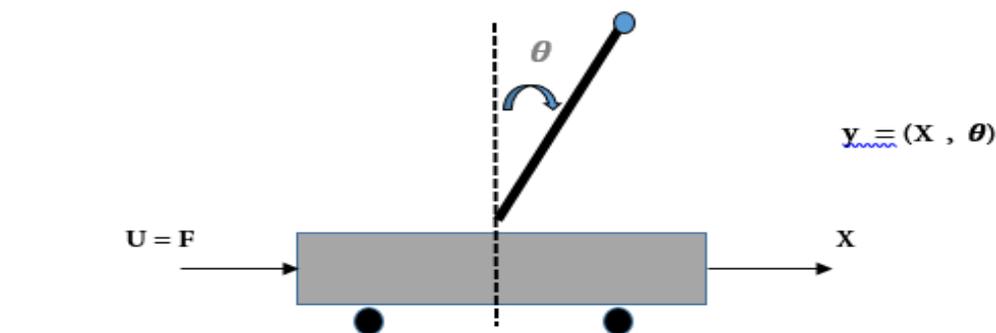


Figure I.1 : Pendule inversé en coordonnées généralisées  $x$  et  $\theta$ .

### I.3 Description du Banc d'Essais Feedback du laboratoire LTII :

Le banc d'essais utilisé au laboratoire LTII est de la firme Feedback, sa structure mécanique est représenté par la figure I.2. Il est composé d'un pendule inversé qui est lié à chariot par une barre transversale. Le chariot est entraîné par deux poulies et se déplace sur un rail horizontal sous l'effet d'une force  $F$  qui est générée par un moteur à courant continu (MCC).

L'environnement de travail comprend des éléments permettant de visualiser en temps réelles les grandeurs de notre plateforme ( $x$  et  $\theta$ ) et d'envoyer des signaux de commande dans le but de réaliser un asservissement du système.

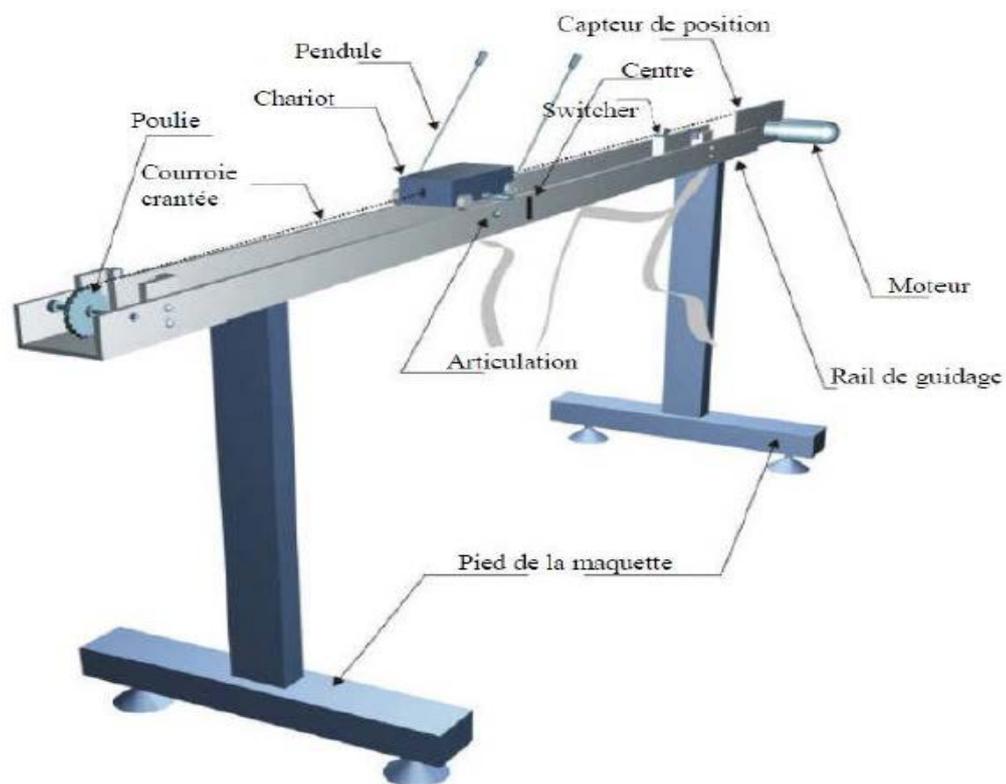
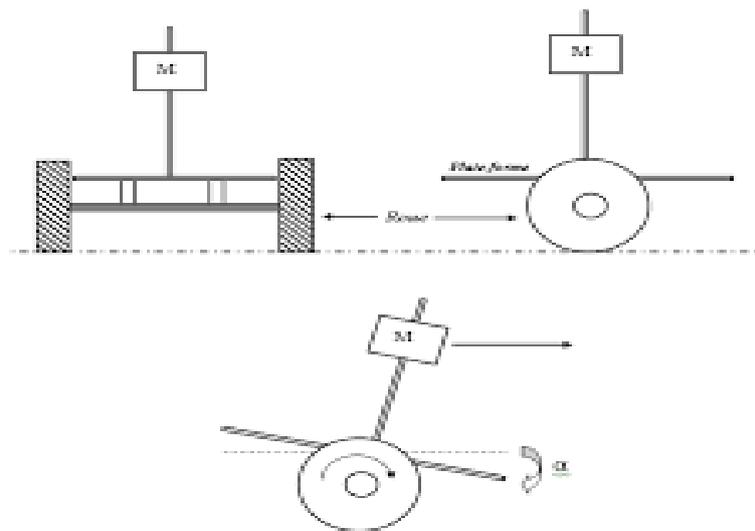


Figure I.2 : Maquette du pendule inversé.

#### I.3.1 Principe de fonctionnement :

Le principe de fonctionnement du système est très simple en théorie : quand le pendule penche vers la droite, le chariot doit le rattraper en effectuant un mouvement vers la droite et inversement, voir la Figure I.3. La difficulté c'est de régler l'intensité et la forme de la réaction du chariot en fonction de l'angle que le pendule fait avec la verticale.



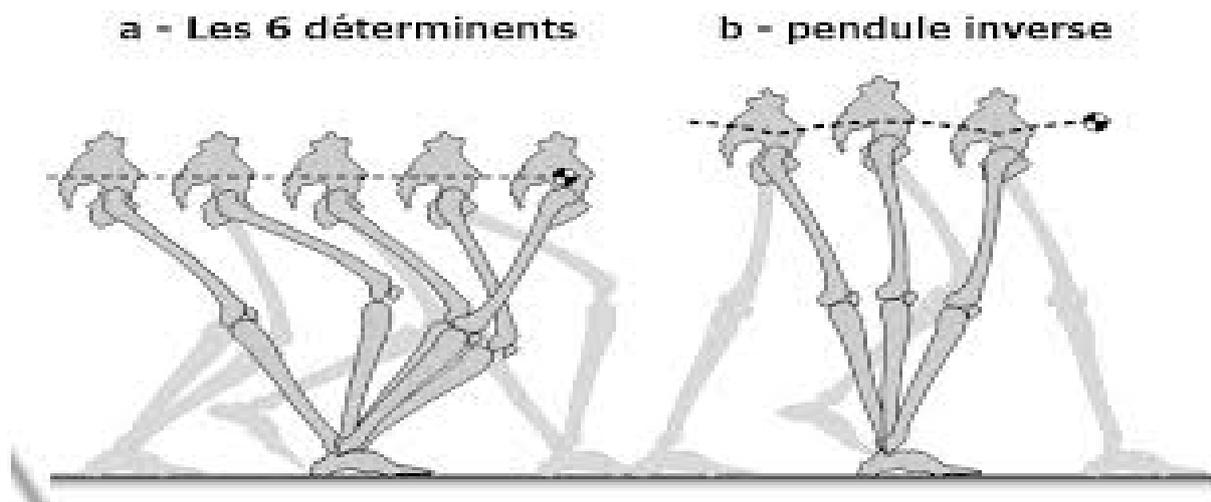
**Figure I.3 :** Principe du pendule inversé.

### I.3.2 Particularités du pendule inversé :

- L'instabilité du système.
- La non linéarité.
- Deux grandeurs à asservir (Multi variable).
- Un seul actionneur.

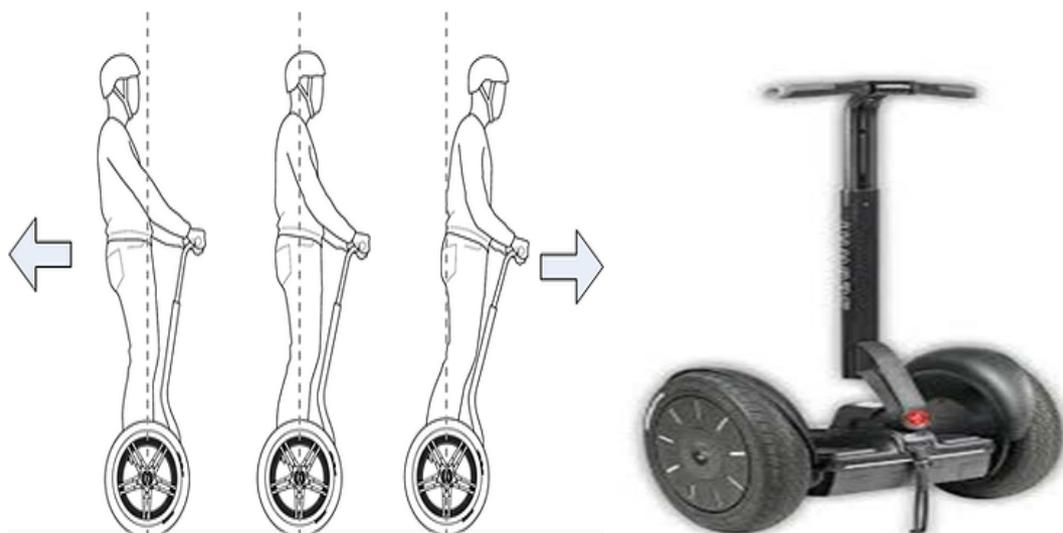
### I.4 Intérêt de l'étude du pendule inversé :

L'étude du pendule inversé suscite de plus en plus un intérêt considérable dans plusieurs domaines comme l'industrie robotique, la médecine, ...etc. La Figure I.4 donne un exemple qui illustre l'importance du pendule inversé sur l'homme qui y est considéré comme un pendule double dont les deux axes de rotation principaux sont les chevilles et les hanches. Quand nous sommes en position debout, nos articulations travaillent sans arrêt pour nous en maintenir. Les spécialistes qui travaillent à la réalisation de prothèses pour les hanches sont amenés à utiliser le modèle du pendule double inversé pour calculer l'ensemble des contraintes que ce dernier doit supporter.



**Figure I.4 :** L'homme est un double pendule inversé.

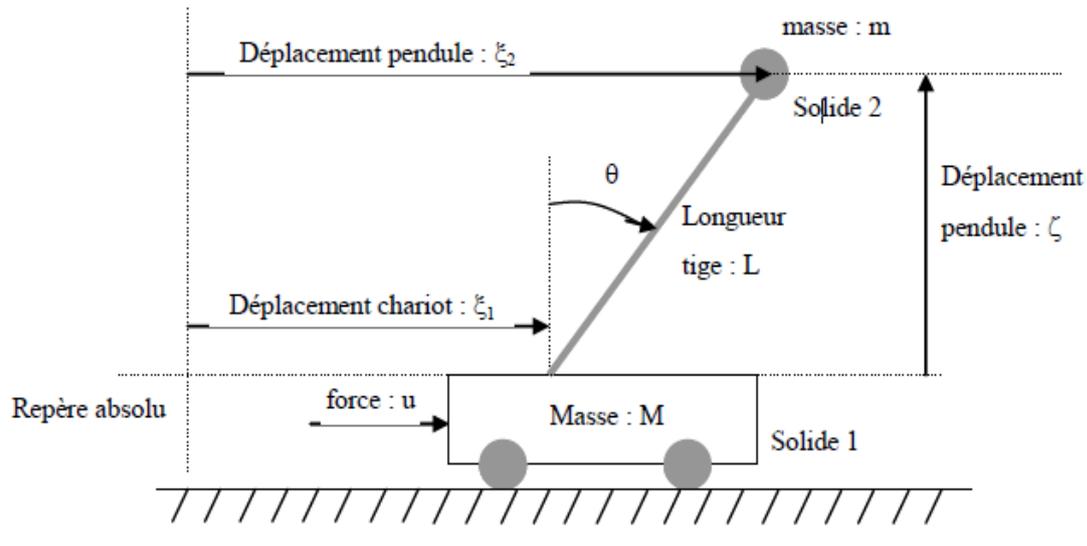
Dans le même ordre d'idée, la robotique utilise ce genre de concept [11] à travers la chaise sur deux roues (Le Segway, voir Figure I.5). Cette chaise est considérée comme un pendule inversé simple (une seule tige) se déplaçant à l'aide de deux roues.



**Figure (I.5) :** Segway à deux roues [07].

### I.5 Modélisation du pendule inversé :

La Figure (I.6) donne le schéma synoptique de l'ensemble du chariot-pendule à deux degrés de liberté. Les pendule est complètement repéré par deux coordonnées généralisées : le déplacement horizontal du chariot  $x$  dont la direction positive est le sens à droite (en mètre), et l'angle  $\theta$  que fait le pendule axe l'axe vertical pour caractériser la rotation du pendule en radians comptés positivement dans le sens des aiguilles d'une montre.



**Figure 1.6 :** Schéma de l'ensemble chariot-pendule

Pour toutes les simulations, envisagées dans les différents chapitres de ce mémoire, nous utilisons les paramètres suivants [08] :

Paramètre	Valeur	Description
$F(t)$	/	force exercée sur le chariot
$x(t)$	/	position du chariot
$\theta(t)$	/	angle du pendule
$M$	2.3 Kg	masse du chariot
$m$	0.2 Kg	masse du pendule
$d$	0.005 (N.ms/rad)	frottements du pendule
$b$	0.00005 Ns/m	frottements de déplacement du chariot
$l$	0.3 m	demi-longueur du pendule
$g$	9.81m. s <sup>2</sup>	intensité de la pesanteur
$J$	0.0099 Kg . m <sup>2</sup>	inertie du pendule en son centre de masse

**Tableau I.1 :** Paramètres de l'ensemble chariot-pendule.

Il y a principalement deux méthodes connues pour la détermination des équations de mouvement d'un pendule inversé : celle de la loi fondamentale de la dynamique (**LFD**) de Newton qui est basée sur le concept de force, et celle de d'Euler-Lagrange [09], [10] qui est basée sur le principe de la conservation d'énergie mécanique.

Dans ce travail, la modélisation du pendule sera effectuée par la deuxième méthode qui est basée sur le concept de Lagrangien  $L$ . Le Lagrangien ( $L$ ) est défini comme une différence entre l'énergie cinétique ( $E_c$ ) et l'énergie potentielle ( $E_p$ ) du système :

$$L = E_c - E_p \quad (\text{I.1})$$

### I.5.1 Energie cinétique du système :

Le système en mouvement comporte le chariot qui se déplace horizontalement sur les rails et le pendule qui se balance sur son axe de rotation, le schéma de la figure I.7, illustre le plan de calcul.

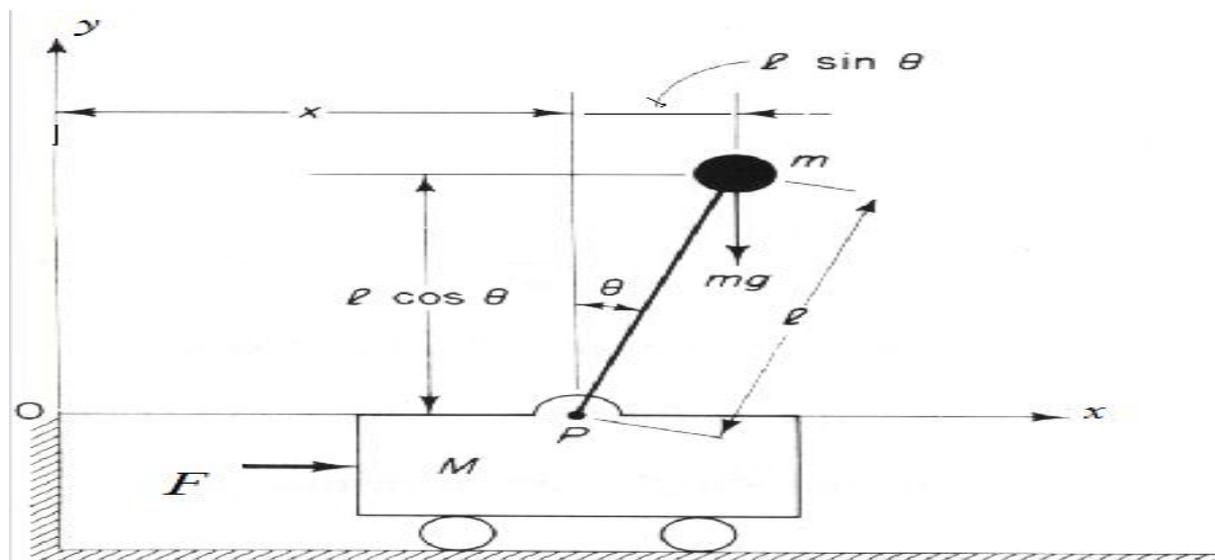


Figure 1.7: Schémas du plan de calcul.

L'énergie cinétique du chariot est donnée par :

$$E_{cc} = \frac{1}{2} M \cdot \dot{x}^2 \quad (\text{I.2})$$

L'énergie cinétique du pendule est exprimée par l'équation :

$$E_{cp} = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \quad (\text{I.3})$$

Avec :

$v_c$ : représente la vitesse du centre de gravité du pendule.

$\dot{\theta}$  : est la vitesse angulaire du pendule.

$J$  : est le moment d'inertie du pendule.

La position du centre de gravité du pendule, notée  $\vec{r}_c$ , est exprimée à partir de coordonnées  $x$  et  $\theta$  :

$$\vec{r}_c = (x + l \sin \theta) \vec{i} + l \cos \theta \vec{j} \quad (\text{I.4})$$

$\vec{i}$  et  $\vec{j}$ : sont respectivement les vecteur unitaire du repère  $x$  et  $y$ .

La vitesse du centre de gravité du pendule est :

$$\vec{v}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt} = (\dot{x} + l\dot{\theta} \cos \theta) \vec{i} - l\dot{\theta} \sin \theta \vec{j} \quad (\text{I.5})$$

En substituant les équations (I.4) et (I.5) dans l'équation (I.3) on trouve :

$$E_{cp} = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + 2\dot{x}l\dot{\theta} \cos \theta + l^2\dot{\theta}^2 \cos^2 \theta + l^2\dot{\theta}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \quad (\text{I.6})$$

Après simplification du terme  $l^2\dot{\theta}^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = l^2\dot{\theta}^2$ , l'expression de l'énergie cinétique du pendule s'écrit :

$$E_{cp} = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + 2\dot{x}l\dot{\theta} \cos \theta + l^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \quad (\text{I.7})$$

L'énergie cinétique de l'ensemble chariot (I.2) et pendule (I.7) est exprimée par :

$$E_c = E_{cc} + E_{cp} = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + 2\dot{x}l\dot{\theta} \cos \theta + l^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \quad (\text{I.8})$$

### I.5.2 Energie potentielle du système :

Le chariot étant en mouvement sur un rail horizontal, seul le pendule en mouvement possède une énergie potentielle, l'énergie potentielle du centre de gravité du pendule est donnée par :

$$E_p = m g l \cos \theta \quad (\text{I.9})$$

### I.5.3 Modèle de connaissance de l'ensemble chariot-pendule :

Une fois que les expressions de l'énergie cinétique  $E_c$  de l'ensemble chariot-pendule (Equation I.8) et l'énergie potentiel du système  $E_p$  (Equation I.9) sont établies, on utilise la relation générale d'Euler-Lagrange pour déterminer les équations du mouvement de l'ensemble chariot-pendule.

En substituant les équations (I.8) et (I.9) dans l'équation (I.1) on trouve :

$$L = E_c - E_p = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + 2\dot{x}l\dot{\theta} \cos \theta + l^2 \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 - m g l \cos \theta \quad (\text{I.10})$$

L'équation générale d'Euler-Lagrange est donnée par :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varepsilon}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varepsilon} + \left( \frac{\partial D_f}{\partial \dot{\varepsilon}} \right) = F \quad (\text{I.11})$$

Où :

$\varepsilon(\mathbf{t})$  : désigne les degrés de liberté du pendule ( $x$  ou  $\theta$ ).

$D_f$  : désigne l'énergie dissipée par frottement.

$F$  : représente la force généralisée.

$L$  : représente le lagrangien.

En considérant que le système ait deux degrés de liberté,  $x$  pour le déplacement horizontal du chariot et  $\theta$  pour la rotation du pendule, la modélisation du système selon la loi générale l'Euler-Lagrange est donnée par :

$$F - \left( \frac{\partial D_f}{\partial \dot{\varepsilon}} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varepsilon}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varepsilon} \quad (\text{I.12})$$

En fonction du degré de liberté considéré, on calcule les équations du modèle :

- *L'équation de Lagrange pour le degré de liberté  $\varepsilon_1(t) = x(t)$ .*

Dans ce cas, nous avons :

$$D_{f1} = \frac{1}{2} b \dot{x}^2$$

$$F - b \dot{x} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} \quad (\text{I.13})$$

Où :

$F$  : représente la force exercée sur le chariot.

La dérivée partielle du Lagrangien par rapport à  $x$  s'écrit :

$$\frac{d}{dt} (M \dot{x} + m \dot{x} + ml \dot{\theta} \cdot \cos \theta) - 0 = F - b \dot{x} \quad (\text{I.14})$$

Ainsi on obtient, la première équation du modèle :

$$(M + m) \ddot{x} + ml \cdot \ddot{\theta} \cdot \cos \theta - \dot{\theta}^2 ml \sin \theta = F - b \dot{x} \quad (\text{I.15})$$

- *L'équation de Lagrange pour le degré de liberté  $\varepsilon_2(t) = \theta(t)$  :*

De même, il est possible d'établir la deuxième équation du modèle en considérant l'angle  $\theta(t)$ . Dans ce cas, nous avons :

$$D_{f2} = \frac{1}{2} d \cdot \dot{\theta}^2$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = -d \cdot \dot{\theta} \quad (\text{I.16})$$

Après le calcul du lagrangien  $L$  par rapport à  $\dot{\theta}$ , l'équation (I.16) devient :

$$\frac{d}{dt} (ml \cdot \dot{x} \cdot \cos \theta + ml^2 \dot{\theta} + J \dot{\theta}) - (-ml \dot{x} \sin \theta \cdot \dot{\theta} + mgl \sin \theta) = -d \dot{\theta} \quad (\text{I.17})$$

La deuxième équation de Lagrange s'écrit alors :

$$(ml^2 + J)\ddot{\theta} + ml\ddot{x}\cos\theta + ml\dot{x}\sin\theta.\dot{\theta} - ml\dot{x}.\dot{\theta}.\sin\theta - mgl\sin\theta = -d\dot{\theta} \quad (\text{I.18})$$

Le modèle de connaissance du système chariot pendule est donné par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} P\ddot{x} + b\dot{x} + ml.\ddot{\theta}.\cos\theta - ml\dot{\theta}^2.\sin\theta = F \\ ml\dot{x}.\cos\theta + W\ddot{\theta} + d\dot{\theta} - mgl.\sin\theta = 0 \end{cases} \quad (\text{I.19})$$

Avec :

$$\begin{cases} P = (M + m) \\ W = (ml^2 + J) \end{cases}$$

Le système d'équations (I.19) montre la dépendance qui existe entre l'accélération du chariot  $\ddot{x}$  et l'accélération angulaire du pendule  $\ddot{\theta}$ . Ainsi, lorsque  $F = 0$  (pas de force extérieure), si on déplace le pendule de sa position d'équilibre, il ne sera soumis qu'à sa propre inertie.

### I.6 Modèle d'état de l'ensemble chariot-pendule :

Afin d'obtenir le modèle d'état de l'ensemble chariot-pendule, on utilise le modèle (I.19) et on considère le vecteur d'état suivant :

$$X = [x_1 x_2 x_3 x_4]^T = [x \dot{x} \theta \dot{\theta}]^T \quad (\text{I.20})$$

Le modèle non linéaire (I.21) ainsi résultant est donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \dot{x}_1 = x_2 \\
 \dot{x}_2 = \frac{-bW}{PW - m^2 l^2 \cos^2 x_3} x_2 - \frac{m^2 l^2 g}{PW - m^2 l^2 \cos^2 x_3} \cos x_3 \sin x_3 + \frac{m l d \cos x_3}{PW - m^2 l^2 \cos^2 x_3} x_4 + \\
 \quad \frac{m l W \sin x_3}{PW - m^2 l^2 \cos^2 x_3} x_4^2 + \frac{FW}{PW - m^2 l^2 \cos^2 x_3} \\
 \dot{x}_3 = x_4 \\
 \dot{x}_4 = \frac{m g l}{(m l^2 + J)} \sin x_3 - \frac{d}{(m l^2 + J)} x_4 + \frac{m l b \cos x_3}{PW - m^2 l^2 \cos^2 x_3} x_2 + \frac{m^3 l^3 g \cos^2 x_3 \sin^2 x_3}{(m l^2 + J)(PW - m^2 l^2 \cos^2 x_3)} - \\
 \quad \frac{m^2 l^2 d \cos^2 x_3}{(m l^2 + J)(PW - m^2 l^2 \cos^2 x_3)} x_4 - \frac{m^2 l^2 \cos x_3 \sin x_3}{PW - m^2 l^2 \cos^2 x_3} x_4^2 - \frac{m l F}{PW - m^2 l^2 \cos^2 x_3} \cos x_3 \\
 y_1 = x_1 \\
 y_2 = x_3
 \end{array} \right. \quad (I.21)$$

### I.7 Simulation en boucle ouverte du système pendule-chariot :

Le système d'équation (I.21) a été implémenté sous Matlab-Simulink, et le schéma bloc ainsi obtenu est donné par la Figure I.8. Sur cette figure, la force  $\mathbf{F}$  est considérée comme signal d'entrée alors que la position du chariot  $x$  et l'angle  $\theta$  du pendule sont les variables de sortie. Les valeurs de ces variables ainsi que leurs dérivées peuvent être initialisées grâce aux blocs intégrateurs.

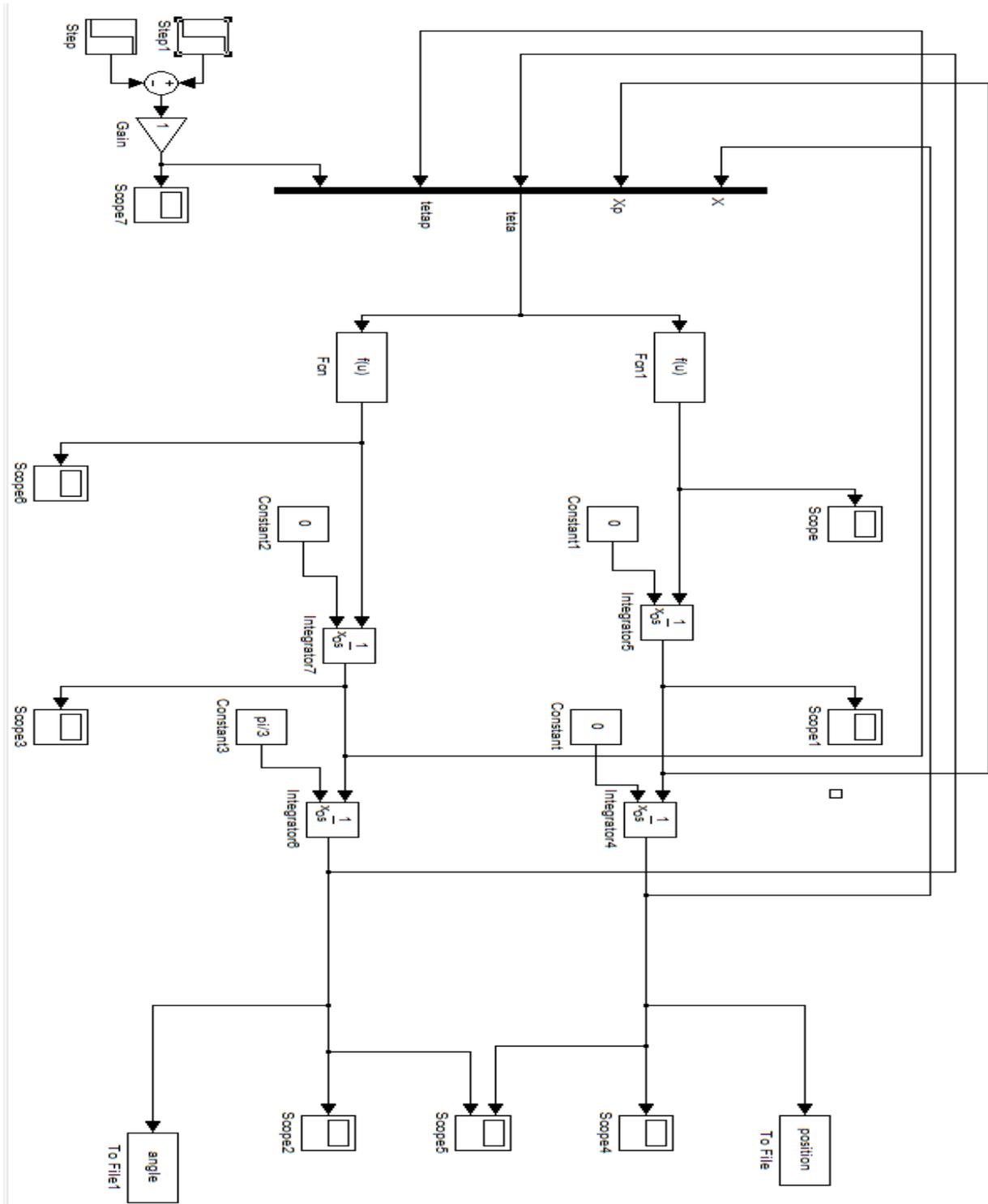


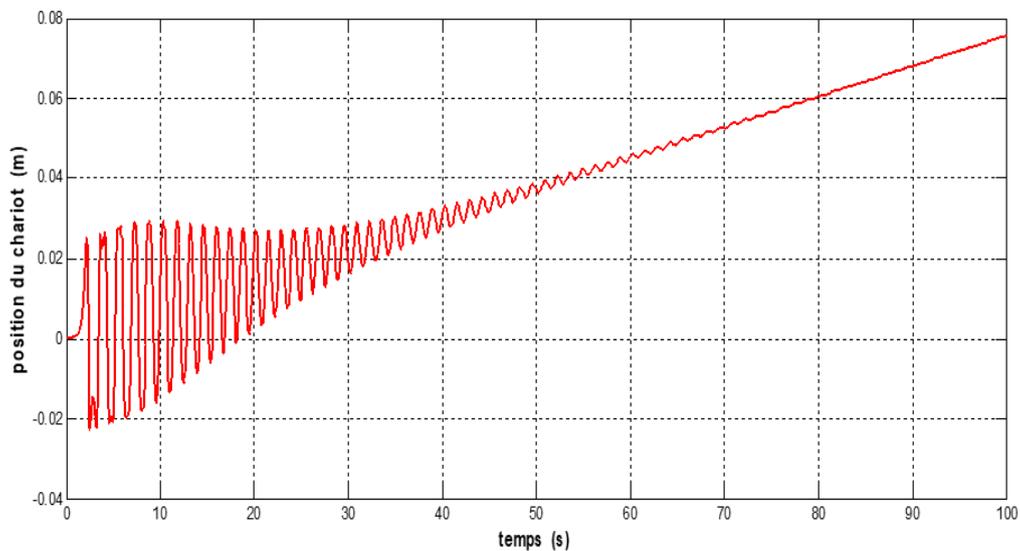
Figure (I.10) : Schéma simulation de l'ensemble chariot-pendule.

Les résultats de simulation du modèle du pendule pour différents cas de la position du pendule sont donnés ci-dessous :

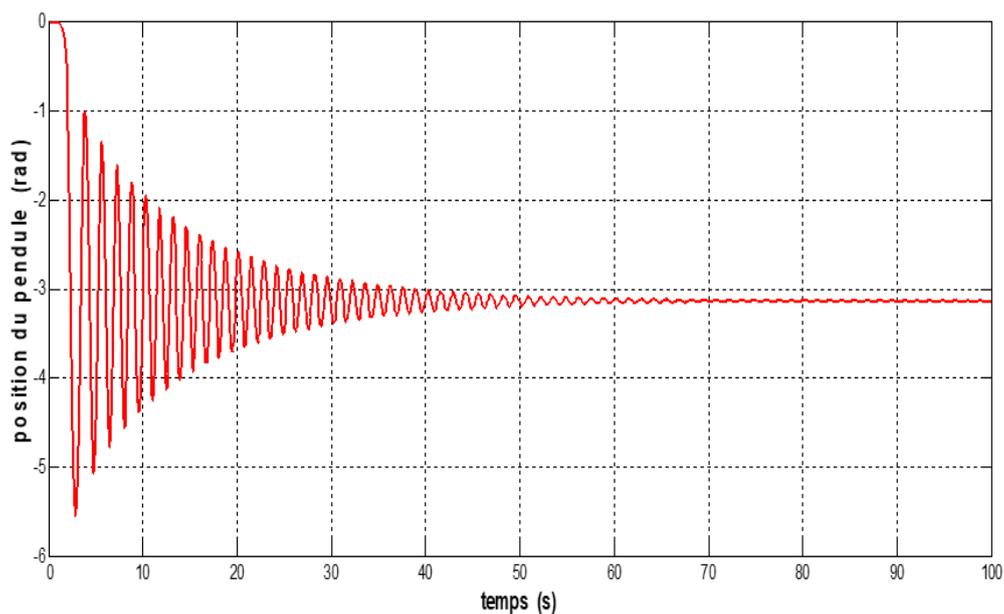
- **Premier cas :**

Position du chariot-pendule :  $[x \ \dot{x} \ \theta \ \dot{\theta}]^T = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$

On utilise une force sous forme d'une impulsion de durée  $T=0.01\text{sec}$  et d'amplitude de  $0.1\text{N}$  :



**Figure I.9 :** Position du chariot pour :  $[x \ \dot{x} \ \theta \ \dot{\theta}]^T = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ .



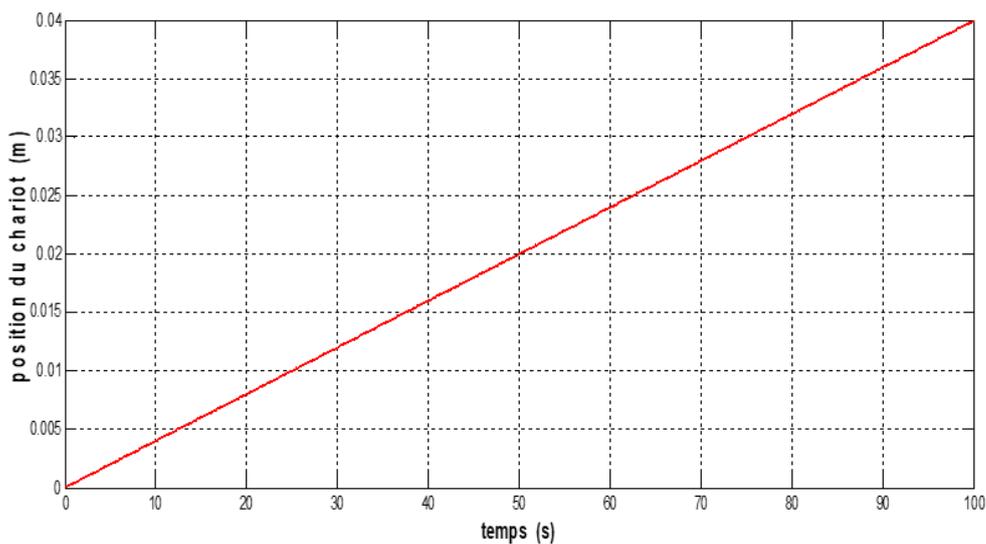
**Figure I.10 :** Position du pendule pour :  $[x \ \dot{x} \ \theta \ \dot{\theta}]^T = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ .

Les résultats des figures I.9 et I.10 montrent que lorsque le pendule est initialement en position instable ( $\theta=0$ ) et qu'on applique une faible force, le pendule tombe et se stabilise, après un régime transitoire, dans sa position d'équilibre stable ( $\theta = \pi$ ) tandis que le chariot continue à évoluer pour stabiliser le pendule à cause du balancement de ce dernier.

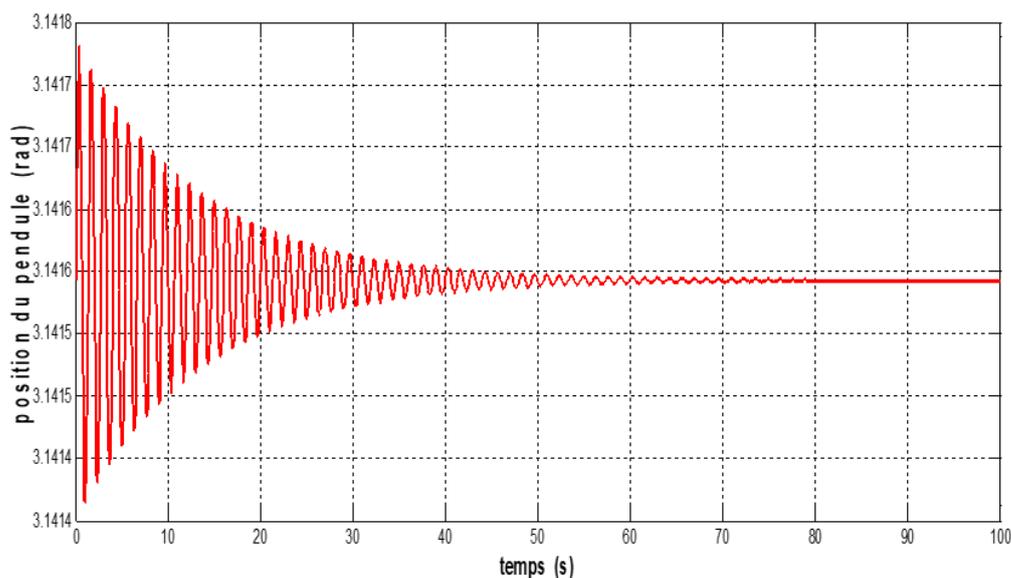
- *Deuxième cas :*

Position du chariot-pendule :  $[x \dot{x} \theta \dot{\theta}]^T = [0 \ 0 \ \pi \ 0]^T$

On utilise une force sous forme d'une impulsion de durée  $T=0.01\text{sec}$  et d'amplitude de  $0.1\text{N}$  :



**Figure I.11 :** Position du chariot pour :  $[x \dot{x} \theta \dot{\theta}]^T = [0 \ 0 \ \pi \ 0]^T$ .



**Figure I.12 :** Position du pendule pour :  $[x \dot{x} \theta \dot{\theta}]^T = [0 \ 0 \ \pi \ 0]^T$ .

Les figure (I.11) et (I.12) montrent que lorsque le pendule est initialement dans sa position d'équilibre stable ( $\theta=\pi$ ), et qu'on applique une force  $F$  pour l'écartier de sa position, ce dernier revient à sa position stable ( $\theta=\pi$ ) après un régime transitoire de durée inférieure à 80 s.

### **I.9 Conclusion :**

Ce chapitre a été consacré à la modélisation du pendule inversé qui y disponible au laboratoire de technologie industrielle et de l'information (LTII) de l'université de Bejaia. Les simulations effectuées en boucle ouverte nous ont permis d'une part de mettre en évidence les fortes non linéarités existantes dans le système et d'autre part de valider le modèle construit sous Matlab-Simulink.

Pour stabiliser notre système autour de point d'équilibre instable ( $\theta= 0$ ), nous utilisons une commande (LQR) qui fera l'objet du deuxième chapitre.

*Chapitre II :*  
*Commande linéaire*  
*quadratique LQR.*

## II.1 Introduction :

Dans ce chapitre, on s'intéressera à la commande des systèmes linéaires en utilisant une approche basée sur un critère quadratique. Cette approche est connue sous le nom de commande linéaire quadratique (LQ) qui s'exprime sous la forme d'un retour statique d'état.

Le chapitre est composé de trois parties :

La première partie présente le principe de la commande linéaire quadratique LQR. La deuxième partie est consacrée à la linéarisation du modèle non linéaire du pendule inversé autour du point d'équilibre instable ( $\theta = 0$ ). Enfin, dans la troisième partie, la commande LQR est appliquée sur le modèle du pendule inversé. Des résultats de simulations seront présentés et commentés.

## II.2 Commande linéaire quadratique (LQR) :

On parle de commande linéaire quadratique : LQ ou LQR pour linear quadratic regulator [11]. Dans ce cas, le système considéré est linéaire et la commande est quadratique. Le principe de la commande LQR est présenté par la Figure (II.1).

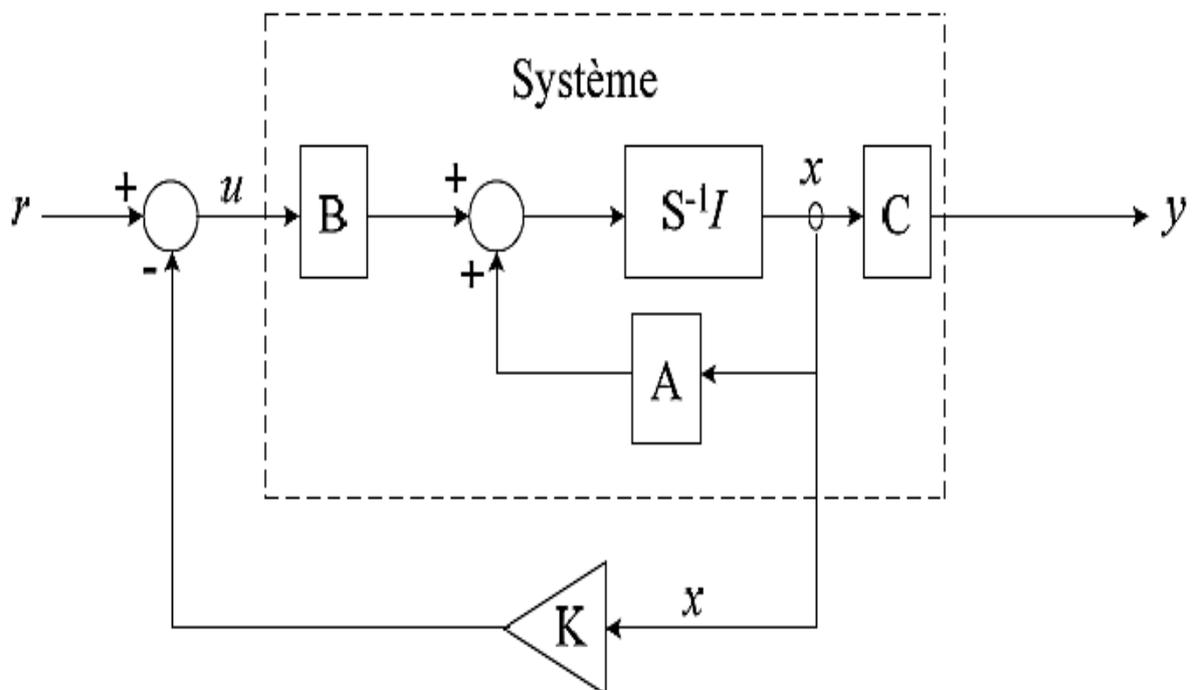


Figure (II.1) : Principe d'une commande par retour d'état.

### II.2.1 Formulation du problème de la commande LQR et sa résolution :

Soit le système linéaire décrit par le modèle d'état suivant [12] :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad \begin{matrix} x \in R^n; u \in R^m \\ y \in R^q \end{matrix} \quad (\text{II.1})$$

Où :

$x(t)$  : vecteur d'état de dimension  $n \times 1$ .

$u(t)$  : vecteur de commande de dimension  $m \times 1$ .

$y(t)$  : vecteur sortie de dimension  $q \times 1$ .

$A$  : matrice d'état ou d'évolution de dimension  $n \times n$ .

$B$  : matrice d'état ou de commande de dimension  $n \times m$ .

$C$  : matrice de sortie ou observation de dimension  $q \times n$ .

Le problème est de trouver un retour d'état stabilisant, optimal au sens du compromis rapidité énergie de commande. Il s'agit donc de trouver la matrice de gain du retour d'état  $K$  :

La commande par retour d'état qui stabilise le système et minimise le critère LQ :

$$J = \int_0^{\infty} [y^T Q y(t) + u^T R u(t)] dt$$

$$J = \int_0^{\infty} [x^T Q x(t) + u^T R u(t)] dt \quad (\text{II.2})$$

avec  $R > 0$ ,  $Q \geq 0$  et  $Q_x = C^T Q C$  s'écrit :

$$u(t) = -Kx(t)$$

Avec :

$$K = R^{-1} B^T \rho_0 \quad (\text{II.3})$$

Où  $\rho_0$  est la solution positive de l'équation de Riccati donnée par :

$$\rho_0 A + A^T \rho_0 - \rho_0 B R^{-1} B^T \rho_0 + Q = 0 \quad (\text{II.4})$$

On a alors :

$$J_{min} = x_0^T \rho_0 x_0 \quad (x_0: \text{état initial à } t=0).$$

### Démonstration [13] :

La dynamique du système en boucle fermée sur la loi de commande  $u(t) = -Kx(t)$  obéit à l'équation :

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) \quad (\text{II.5})$$

La réponse autonome de  $x(t)$  s'écrit alors :  $x(t) = e^{A_f t} x_0$  avec  $A_f = A - BK$  et  $x_0 = x(t = 0)$  Le critère J devient :

$$J = \int_0^\infty (x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t))dt \quad (\text{II.6})$$

$$= \int_0^\infty (x^T(t)(Qx + K^T RK)x(t))dt \quad (\text{II.7})$$

$$= x_0^T \left( \int_0^\infty e^{A_f^T t} (Qx + K^T BK) e^{A_f t} dt \right) x_0 \quad (\text{II.8})$$

$$J = x_0^T \rho x_0 \quad (\text{II.9})$$

Avec :

$$\rho = \int_0^\infty e^{A_f^T t} (Qx + K^T BK) e^{A_f t} dt.$$

La contrainte  $A_f$  stable entraîne que  $\rho$  vérifie l'équation de Lyapunov ( $A^T \rho + \rho A + Q = 0$ ) :

$$A_f^T \rho + \rho A_f + Qx + K^T RK = 0 \quad (\text{II.10})$$

Par ailleurs  $\rho \geq 0$  car  $J = x_0^T \rho x_0$  et  $J \geq 0 \forall x_0$  (critère quadratique).

Soit  $K$  la valeur optimale qui minimise J et  $\rho_0$  la solution correspondante de l'équation de Lyapunov (II.10), soit :

$$(A - BK)^T \rho_0 + \rho_0 (A - BK) + Qx + K^T RK = 0 \quad (\text{II.11})$$

Considérons une variation  $\Delta_\rho$  autour de  $\rho_0$ ; soit  $\rho = \rho_0 + \Delta_\rho$  qui vérifie :

$$(A - BK)^T(\rho_0 + \Delta_\rho) + (\rho_0 + \Delta_\rho)(A - BK) + \dots$$

$$\dots Qx + K^T RK = 0 \quad (\text{II.12})$$

$K$  est la valeur optimale au sens du critère  $J$ , si le critère augmente pour toute variation  $\Delta_K$  autour de  $K$  ; soit :

$$\Delta_\rho > 0 \quad \forall \quad \Delta_K = A - BK \text{ Stable.}$$

(Si  $\Delta_K$  est telle que  $A - BK$  est instable, alors le critère devient infini).

Si on retranche l'équation (II.11) de l'équation (II.12), nous obtenons :

$$(A - BK)^T \Delta_\rho - \Delta_K^T B^T \rho_0 + \rho_0 (A - BK) - \rho_0 B \Delta_K + \dots$$

$$\dots \Delta_K^T R \Delta_K + \Delta_K^T RK + K_C^T R \Delta_K = 0$$

$$(A - BK)^T \Delta_\rho + \Delta_\rho (A - BK) + \dots$$

$$\dots \Delta_K^T (RK - B^T \rho_0) + \Delta_K (RK - B^T \rho_0)^T + \Delta_K^T R \Delta_K = 0$$

C'est une équation de Lyapunov.  $A - BK$  étant stable,  $\Delta_\rho$  est positif si (théorème de Lyapunov):

$$\Delta_K^T (RK - B^T \rho_0) + \Delta_K (RK - B^T \rho_0)^T + \Delta_K^T R \Delta_K > 0 \quad \forall \quad \Delta_K$$

Or  $\Delta_K^T R \Delta_K > 0 \quad \forall \quad \Delta_K$  car  $R > 0$ , il faut donc que  $K - B^T \rho_0 = 0$ , soit :

$$K = R^{-1} B^T \rho_0 \quad (\text{II.13})$$

Si on rapporte cette équation dans l'équation (II.23) nous obtenons l'équation de **Riccati** de commande :

$$\rho_0 A + A^T \rho_0 - \rho_0 B R^{-1} B^T \rho_0 + Q = 0 \quad (\text{II.14})$$

L'obtention du gain  $K$  passe donc par la recherche de la solution  $\rho_0$  symétrique définie positive.

### II.2.2 Résolution de l'équation de Riccati :

On peut résoudre l'équation matricielle de Riccati, soit analytiquement dans les cas les plus simples, soit par intégration numérique (**Runge-Kutta**).

Comme le système chariot – pendule est non linéaire, une linéarisation du modèle du système s'impose et ce pour pouvoir appliquer la commande LQR.

### II.3 Linéarisation du modèle du pendule :

Le modèle du pendule inversé et non linéaire, et comme l'objectif de la commande de système est d'avoir la position du chariot  $x$  et l'angle  $\theta$  à zéro (position d'équilibre instable), alors une linéarisation autour de cette dernière s'impose.

Pour des petites variations de  $\theta$  autour du point d'équilibre  $\theta = 0$  on a :

$$\begin{cases} \theta = \theta_0 + \varepsilon \\ \dot{\theta} = \dot{\varepsilon} \end{cases} \quad (\text{II.15})$$

Le développement en série de Taylor du premier ordre d'une fonction de  $\theta$  au voisinage du point d'équilibre instable  $[\theta = 0]$  est donné par [11-14] :

$$\left\{ f(\theta) \approx f(\theta_0) + \varepsilon \left. \frac{df}{d\theta} \right|_{\theta_0} \right. \quad (\text{II.16})$$

On considère les termes d'ordre supérieur sont négligés :

$$\dot{\varepsilon}^2 \approx 0 \quad (\text{II.17})$$

On se limite aux petites variations de  $\theta_0$  autour du point de fonctionnement  $\theta_0 = 0$  correspondant à la position haute du pendule et en utilisant le développement limité du première ordre (équation (II.15) et (II.16)), on obtient les approximations suivantes [15].

$$\begin{cases} \cos \theta \approx \cos(0) + \theta[-\sin(0)] = 1 \\ \sin \theta \approx \sin(0) + \theta[\cos(0)] = \theta \\ \dot{\theta}^2 \approx 0 \end{cases} \quad (\text{II.18})$$

En substituant les linéarisations (équation II.18) dans l'équations (I.21), et après quelques manipulations mathématiques, on trouve le système d'équations linéarisé de l'ensemble pendule –chariot (II.19) suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{-bW}{PW - m^2l^2}x_2 - \frac{m^2l^2g}{PW - m^2l^2}x_3 + \frac{mld}{PW - m^2l^2}x_4 + \frac{FW}{PW - m^2l^2} \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \frac{mgl}{W}x_3 - \frac{d}{W}x_4 + \frac{mlb}{PW - m^2l^2}x_2 + \frac{m^3l^3g}{W(PW - m^2l^2)}x_3 - \frac{m^2l^2d}{W(PW - m^2l^2)}x_4 - \frac{mlF}{PW - m^2l^2} \\ y_1 = x_1 \\ y_2 = x_3 \end{array} \right. \quad (II.19)$$

A partir du modèle (II.19), on obtient le système matriciel suivant :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-bW}{PW - m^2l^2} & -\frac{m^2l^2g}{PW - m^2l^2} & \frac{mld}{PW - m^2l^2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{mlb}{PW - m^2l^2} & \frac{mgl}{W} + \frac{m^3l^3g}{W(PW - m^2l^2)} & -\frac{d}{W} - \frac{m^2l^2d}{W(PW - m^2l^2)} \end{bmatrix} \quad (II.20)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{W}{PW - m^2l^2} & 0 & \frac{ml}{PW - m^2l^2} \end{bmatrix}^T ; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} ; \quad D = [0 \quad 0]^T .$$

Où :

$$\begin{cases} P = (M + m) \\ W = (ml^2 + J) \end{cases}$$

**Application numérique :**

Les matrices A, B, C et D sont obtenues grâce aux valeurs numériques des paramètres du pendule inversé (Tableau I.1).

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.00002 & -0.53387 & 0.00453 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.00004 & 22.24489 & -0.18896 \end{bmatrix} \quad (\text{II.21})$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.42177 \\ 0 \\ -0.90703 \end{bmatrix} ; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} ; D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres de A sont :

$$\lambda_1=0 ; \lambda_2=-0.00002 ; \lambda_3=-4.8118 ; \lambda_4=4.6229$$

D'après ces valeurs propres, le modèle résultant est instable. L'utilisation d'une commande permettant la stabilisation du système au point d'équilibre instable ( $\theta = 0$ ), est alors bien justifiée.

Par conséquent, nous allons vérifier que notre système est commandable.

**II.4 Teste de commandabilité :**

La matrice de commandabilité est de ( $n = 4$ ) :

$$Q_c = [B \ AB \ A^2B \ A^3B] \quad (\text{II.22})$$

$$Q_c = \begin{bmatrix} 0 & 0.4218 & -0.0041 & 0.4850 \\ 0.4218 & -0.0041 & 0.4850 & -0.1832 \\ 0 & -0.9070 & 0.1714 & -20.2092 \\ -0.9071 & 0.1715 & -20.2092 & 7.6319 \end{bmatrix} \quad (\text{II.23})$$

D'après le critère de **KALMAN** le système est commandable si et seulement si la matrice de commandabilité  $Qc$  est de **rang  $n$** .

En déduire que le rang de  $Qc$  est 4, alors le système est commandable.

## II.5 Application de la commande LQR sur le système chariot-pendule :

### II.5.1 Choix des matrices de pondération :

Les matrices de pondération sont, généralement, choisies diagonales où :

$$Q = \text{diag}(q_1, q_2, \dots, q_q) = \begin{pmatrix} q_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & q_2 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & q_q \end{pmatrix} \quad (\text{II.24})$$

$$R = \text{diag}(r_1, r_2, \dots, r_m) = \begin{pmatrix} r_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & r_2 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & r_m \end{pmatrix} \quad (\text{II.25})$$

Pour faire une évaluation initiale de  $Q$  et  $R$ , on se basera sur le calibrage physique des entrées-sorties correspondantes, en prenant :

### II.5.2 La règle de Bryson [16] :

$$r_i = \left[ \frac{1}{\text{sup}(u_i)} \right]^2, i = 1, 2, \dots, m \quad (\text{II.26})$$

$$q_i = \left[ \frac{1}{\text{sup}(y_i)} \right]^2, i = 1, 2, \dots, q \quad (\text{II.27})$$

On pourra ensuite raffiner le choix des pondérations par essais et erreurs en simulation.

Si on augmente  $Q$  par rapport à  $R$ , on aura globalement des réponses rapides au prix d'une commande plus énergétique.

Après l'utilisation de cette règle, on trouve les matrices de pondération  $Q$  et  $R$  suivantes :

$$Q = \begin{bmatrix} 6.25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.5 \end{bmatrix}; R = [0.05]$$

Après le calcul des matrices de pondérations, on obtient le vecteur des gains  $K$  de contre réaction calculé avec la fonction '**lqr**' de Matlab :

$$K = [-0.1118 \quad -0.1364 \quad -1.0174 \quad -0.2234]$$

### II.5.3 Résultats de simulation de la commande LQR :

La figure (II.1) nous montre le schéma de la commande LQR intégrant le vecteur de gains  $K$  que nous avons calculé précédemment. Pour vérifier l'exactitude du modèle linéaire, ce dernier est placé en parallèle avec le modèle non linéaire. Les deux modèles sont alors commandés par deux régulateurs LQR de même matrice de gains  $K$ .

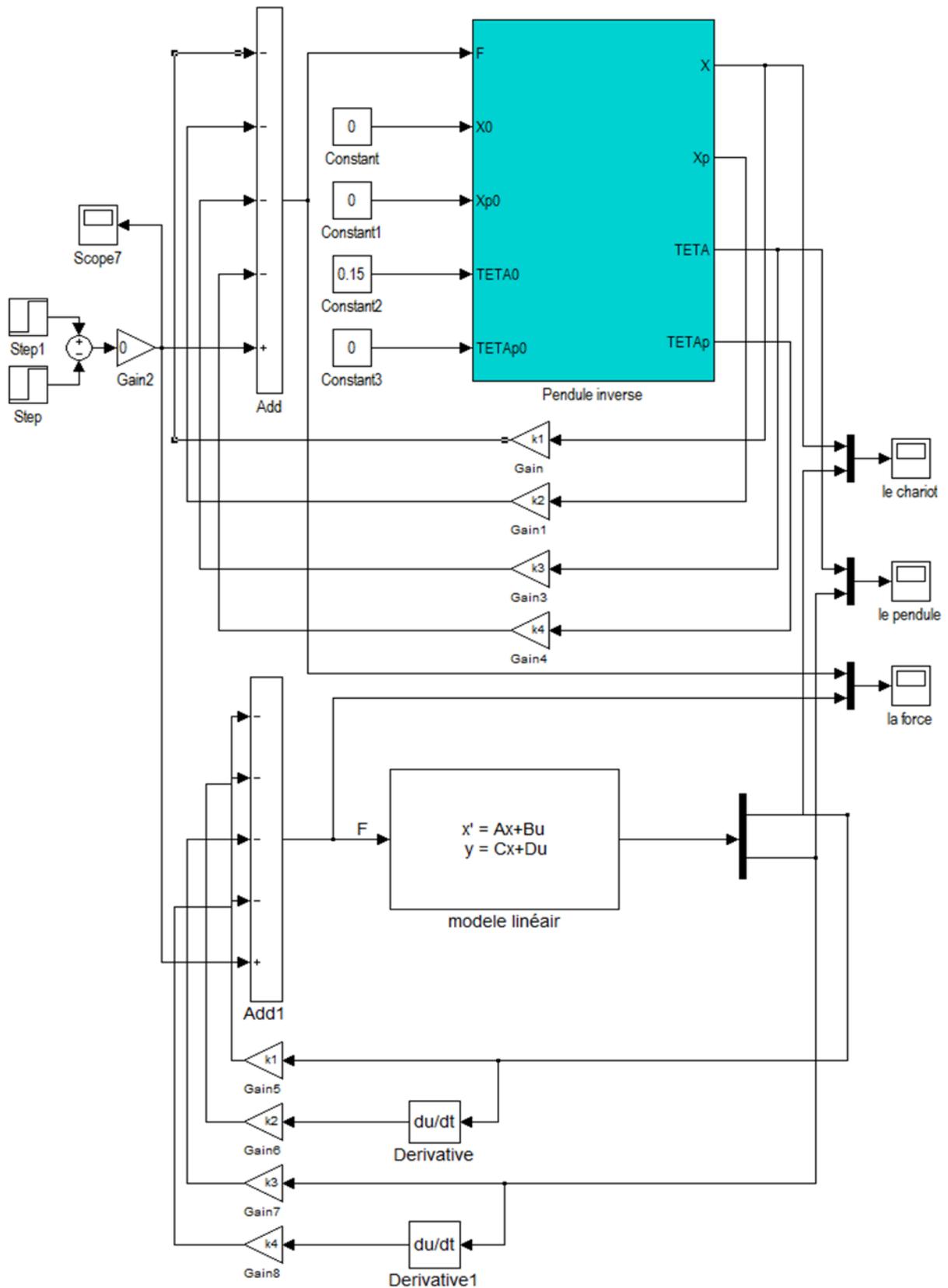
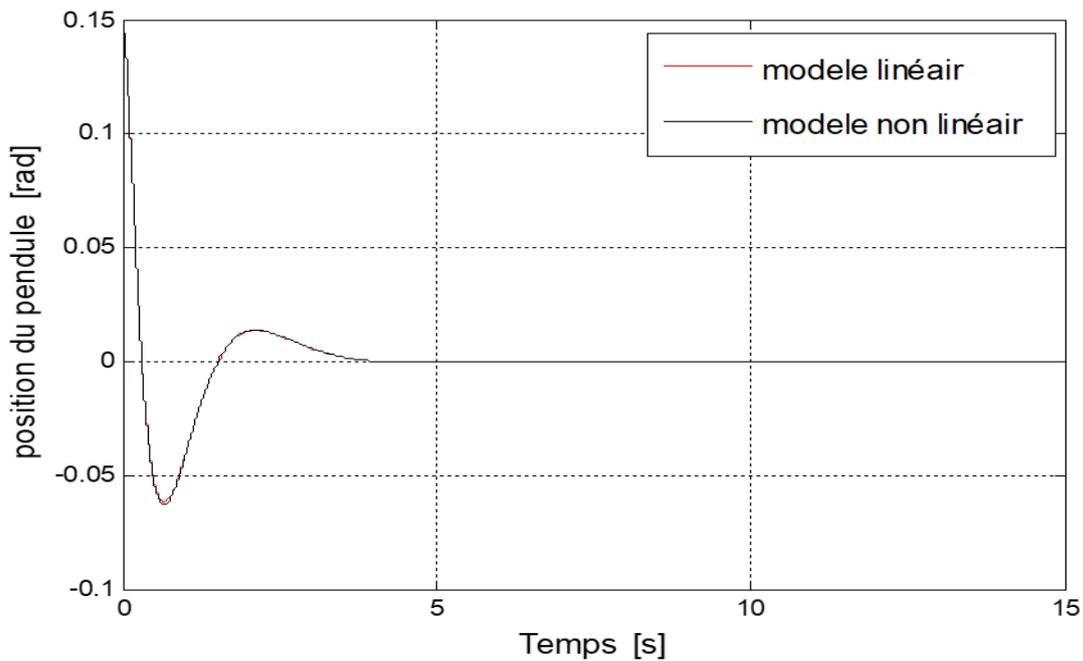


Figure (II.2) : Commande LQR appliquée sur les deux modèles.

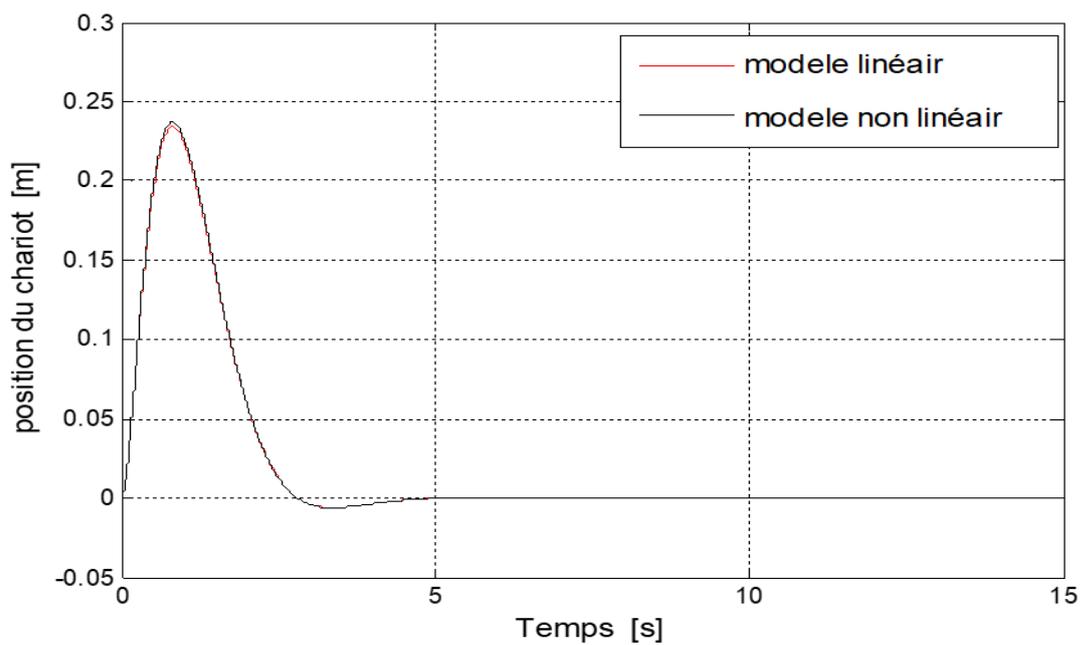
- *Simulation en absence des perturbations*

Les figures (II.3, II.4 et II.5) illustrent les résultats obtenus en considérant les conditions initiales suivantes :

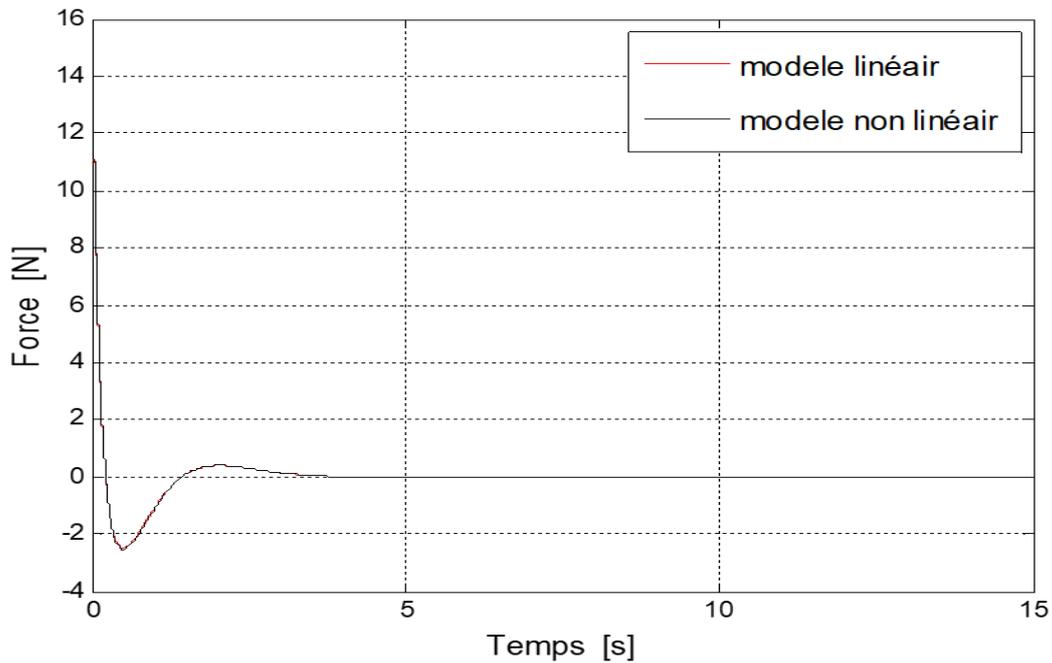
Après avoir donné les conditions suivantes :  $[x \ \dot{x} \ \theta \ \dot{\theta}] = [0 \ 0 \ 0.15 \ 0]$ .



**Figure (II. 3) :** Position du pendule.



**Figure (II. 4) :** Position du chariot.



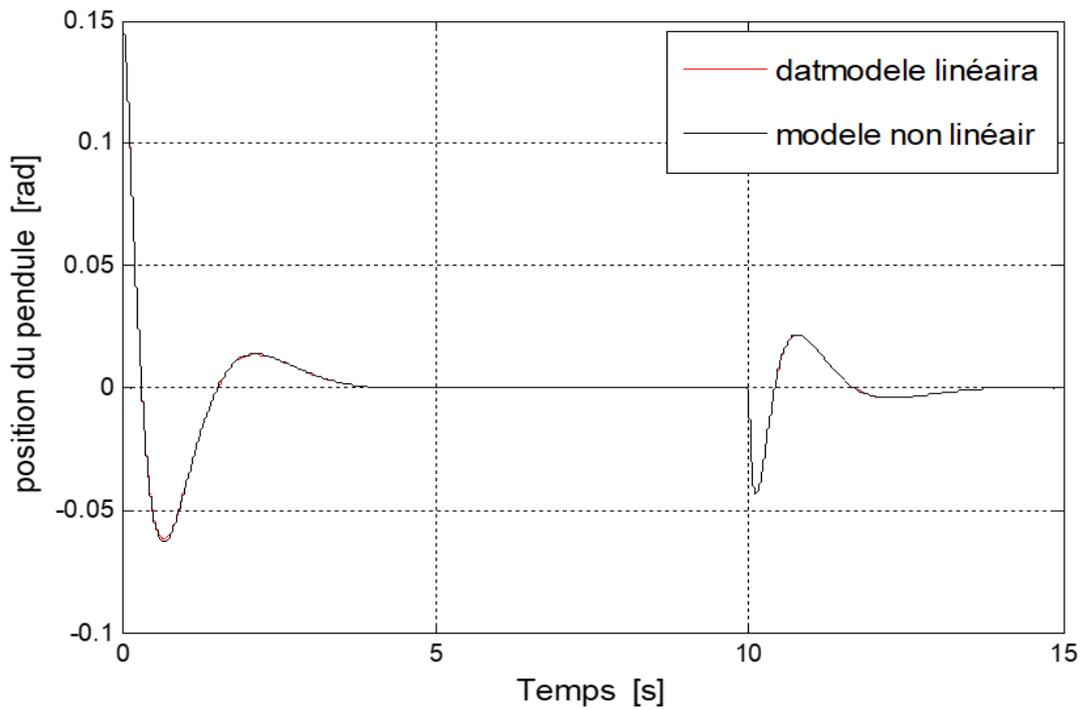
**Figure (II. 5) :** Signal de commande (Force).

### II.5.3.1 Interprétation des résultats de simulation :

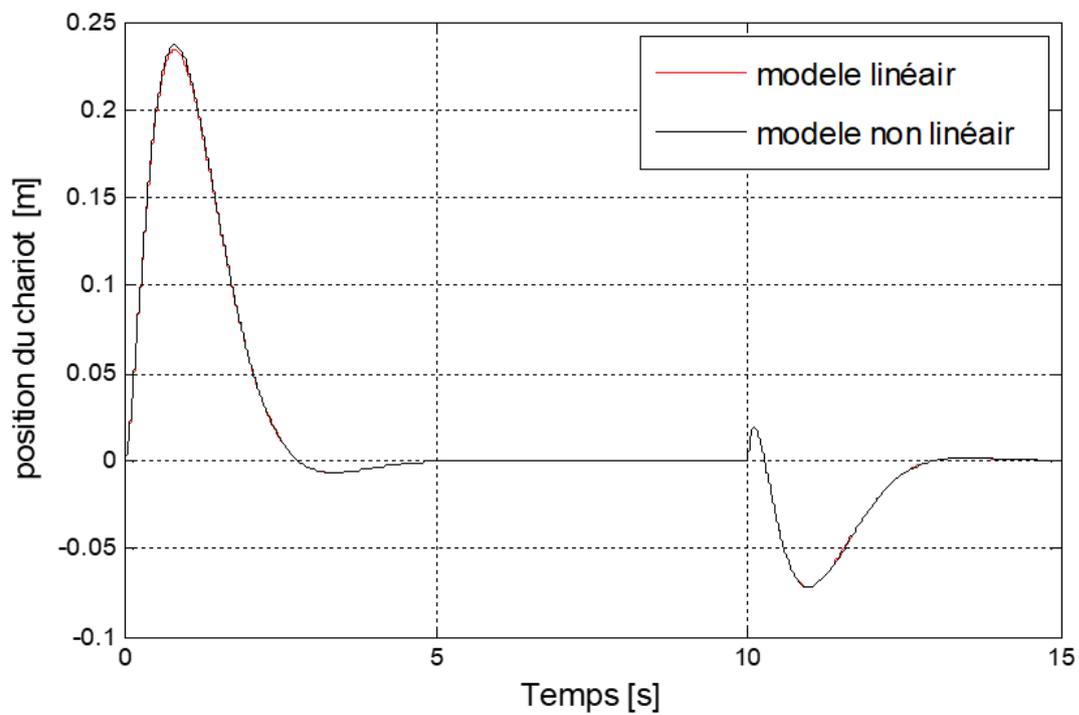
On constate que la commande LQR permet de maintenir le chariot à sa position ( $x = 0$ ) et de stabiliser le pendule sur sa position instable ( $\theta = 0$ ). On constate aussi que : Le système se stabilise après une période très courte inférieure à 5 sec.

- *Simulation en présence des perturbations*

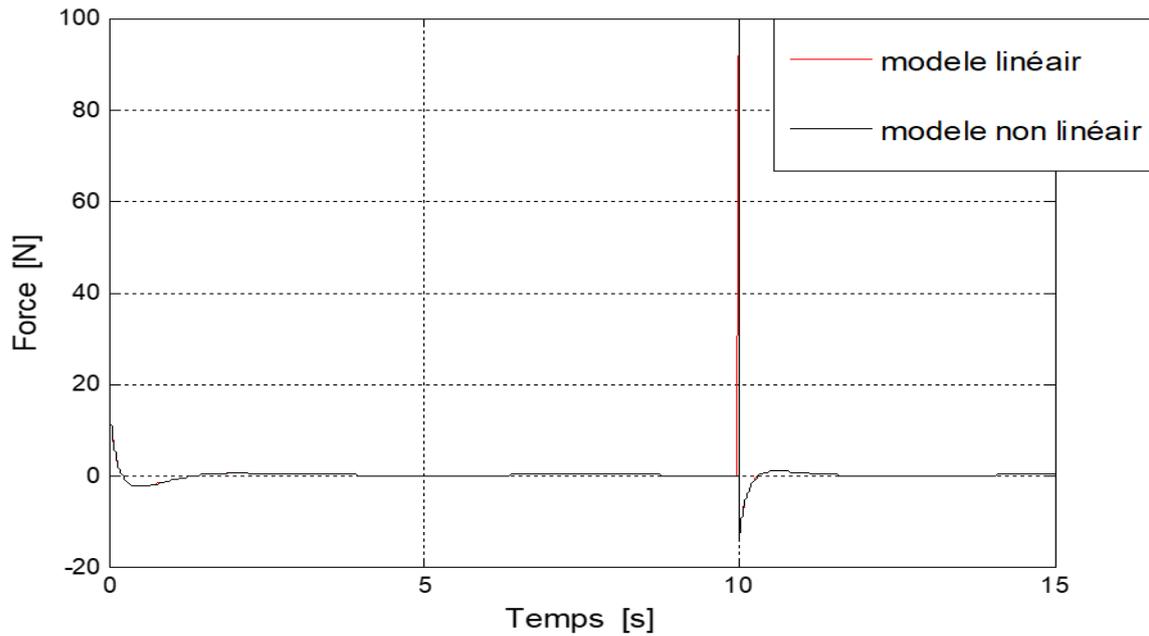
Nous utilisons les mêmes conditions initiales que précédemment et on perturbe le pendule à l'instant  $t=10$  sec.



**Figure (II. 6) :** Résultat expérimentaux de la commande du système par LQR en présence de perturbations appliquée sur le pendule.



**Figure (II.7) :** Résultat expérimentaux de la commande du système par LQR en présence de perturbations appliquée sur le (chariot).



**Figure (II.8) :** Résultat expérimentaux de la commande du système par LQR en présence de perturbations appliquée sur la (Force).

### II.5.3.2 Interprétation des résultats de simulation (perturbation) :

Nous avons les mêmes résultats que précédemment avant l'application de la perturbation (pour  $t < 10$ ). Dès que la perturbation est appliquée à l'instant  $t = 10$  s, le régulateur réagit aussitôt pour stabiliser à nouveau le pendule sur sa position d'équilibre instable. Le chariot retourne également à sa position désirée après quelques seconds comme le montre la figure (II.8). Ces résultats confirment ainsi la robustesse de la commande face aux perturbations.

## II.6 Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons pu appliquer la commande linéaire quadratique LQR pour la stabilisation du système pendule inversé. Enfin cette commande a montré son efficacité dans la stabilisation du système.

Les deux paramètres de pondération  $Q$  et  $R$  sont les seuls à définir par l'utilisateur pour obtenir un compromis entre les performances souhaitées et l'effort de commande admis. Cependant le réglage est souvent réalisé manuellement, un travail peu efficace et nécessite plusieurs tests. Un réglage automatique de ces paramètres peut être une alternative très intéressante pour éviter un travail par tâtonnement peu efficace.

*Chapitre III :*  
*Optimisation par Essaim*  
*Particulaire*

### III.1 Introduction :

L'optimisation par Essaim de particules (OEP) est relativement récente par apport aux autres algorithmes évolutionnaires tels que les algorithmes génétiques, la programmation génétique, ...etc. Cette méthode a été introduite par Russel Eberhart (ingénieur en électricité) et James Kennedy (socio-psychologue) en 1995 [5].

L'origine de cette méthode vient des observations faites lors des simulations informatiques de vols groupés d'oiseaux et de bancs de poissons [17]. Ces simulations ont mis en valeur la capacité des individus d'un groupe en mouvement à conserver une distance optimale entre eux et à suivre un mouvement global par rapport aux mouvements locaux de leur voisinage.

Au départ J. Kennedy et R. Eberhart cherchaient à simuler la capacité des oiseaux à voler de façon synchrone et leur aptitude à changer brusquement de direction tout en restant en une formation optimale [20].

Dans ce chapitre, nous présentons le principe de fonctionnement de la technique PSO, ensuite son algorithme général. Des exemples d'optimisation de quelques fonctions tests dans ce domaine sont donnés à la fin du chapitre.

### III.2 Définition de l'optimisation :

L'optimisation est le fait d'obtenir le meilleur résultat dans des circonstances données. Dans tout domaine, les ingénieurs doivent prendre beaucoup de décisions technologiques et de gestion. Le but ultime de toutes ces décisions est soit minimiser l'effort requis ou maximiser le bénéfice souhaité. Cependant, l'effort et le bénéfice dans toute situation concrète peut se modéliser en une fonction coût de certaines variables de décision. L'optimisation peut être définie comme le processus de trouver les variables qui donnent le minimum ou le maximum de cette fonction.

### III.3 L'optimisation par essaim de particules (PSO) :

#### III.3.1 Principe général :

L'optimisation par essaim particulaire (OEP), ou Particle Swarm Optimization (PSO) en anglais, est un algorithme évolutionnaire qui utilise une population de solutions candidates

pour développer une solution optimale au problème. Cet algorithme a été proposé par Russel Eberhart (ingénieur en électricité) et James Kennedy (socio-psychologue) en 1995 [5]. Il s'inspire à l'origine du monde du vivant, plus précisément du comportement social des animaux évoluant en essaim, tels que les bancs de poissons et les vols groupés d'oiseaux.

En effet, on peut observer chez ces animaux des dynamiques de déplacement relativement complexes, alors qu'individuellement chaque individu a une « intelligence » limitée, et ne dispose que d'une connaissance locale de sa situation dans l'essaim. L'information locale et la mémoire de chaque individu sont utilisées pour décider de son déplacement. Des règles simples, telles que « rester proche des autres individus », « aller dans une même direction » ou « aller à la même vitesse », suffisent pour maintenir la cohésion de l'essaim, et permettent la mise en œuvre de comportements collectifs complexes et adaptatifs.

L'essaim de particules correspond à une population d'agents simples, appelés particules. Chaque particule est considérée comme une solution du problème, où elle possède une position (Le vecteur solution) et une vitesse. De plus, chaque particule possède une mémoire lui permettant de se souvenir de sa meilleure performance (en position et en valeur) et de la meilleure performance atteinte par les particules « voisines » (informatrices) : chaque particule dispose en effet d'un groupe d'informatrices, historiquement appelé son voisinage.

Un essaim de particules, qui est un ensemble de solutions potentielles au problème d'optimisation, « survolent » l'espace de recherche, à la recherche de l'optimum global. Le déplacement d'une particule est influencé par les trois composantes suivantes :

- **Une composante d'inertie** : la particule tend à suivre sa direction de déplacement courante.
- **Une composante cognitive** : la particule tend à se diriger vers le meilleur site par lequel elle est déjà passée.
- **Une composante sociale** : la particule tend à se diriger vers le meilleur site déjà atteint par ses voisines.

La stratégie de déplacement d'une particule est illustrée par la figure (III.1).

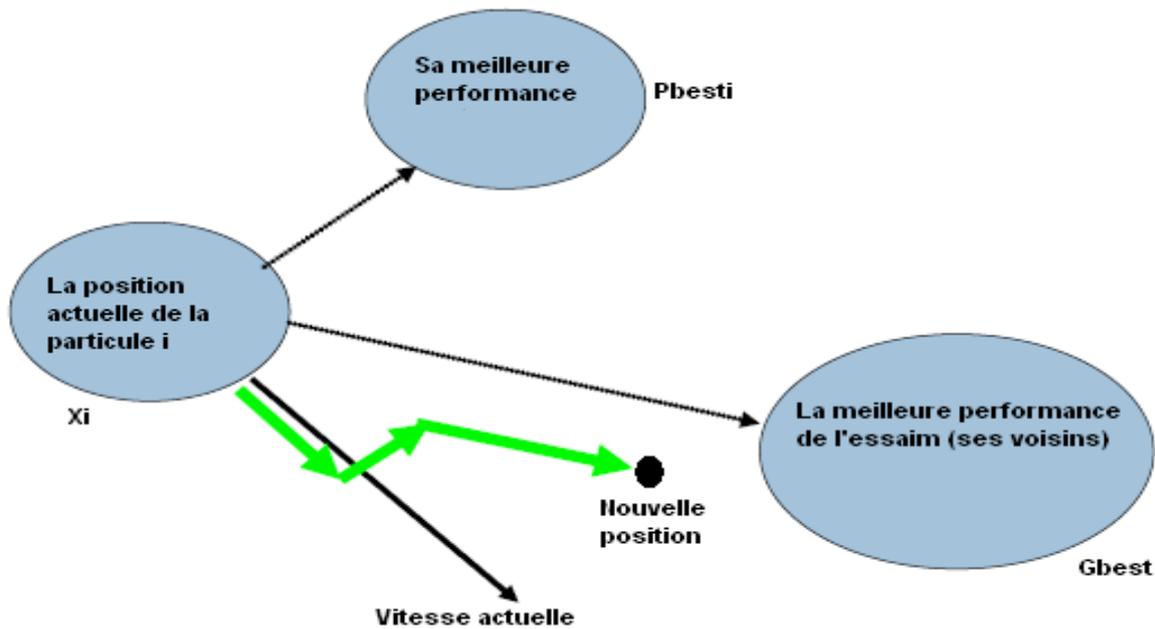


Figure III.1: Déplacement d'une particule [18].

### III.3.2 Formalisation mathématique du PSO :

Dans un espace de recherche de dimension  $D$ , la particule  $i$  de l'essaim est modélisée par son vecteur position  $\vec{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{iD})$  et par son vecteur vitesse  $\vec{v}_i = (v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{iD})$ . La qualité de sa position est déterminée par la valeur de la fonction objectif en ce point. Cette particule garde en mémoire la meilleure position par laquelle elle est déjà passée, et la meilleure position atteinte par toutes les particules de l'essaim, notées respectivement :

$$\vec{P}best_i = (pbest_{i1}, pbest_{i1}, \dots, pbest_{iD})$$

et

$$\vec{G}best_i = (gbest_{i1}, gbest_{i2}, \dots, gbest_{iD})$$

Au départ de l'algorithme, les particules de l'essaim sont initialisées de manière aléatoire et régulière dans l'espace de recherche du problème. Ensuite, à chaque itération  $t$ , chaque particule  $i$  se déplace, en combinant linéairement les trois composantes citées ci-dessus. En effet, à l'itération  $t + 1$ , le vecteur vitesse et le vecteur position sont calculés à partir de l'équation (III.1) et de l'équation (III.2), respectivement :

$$v_{i,j}^{t+1} = wv_{i,j}^t + c_1r_{1,i,j}^t[Pbest_{i,j}^t - x_{i,j}^t] + c_2r_{2,i,j}^t[Gbest_j^t - x_{i,j}^t] \quad (III.1)$$

$$x_{i,j}^{t+1} = x_{i,j}^t + v_{i,j}^{t+1} \quad (III.2)$$

Pour :  $j \in \{1,2, \dots, D\}$ .

où  $v_i(\mathbf{t})$  est la vitesse de la particule  $i$  à l'itération  $t$ ,  $x_i(\mathbf{t})$  : est la position de la particule  $i$  à l'itération  $t$ ,  $w$  est une constante, appelée coefficient d'inertie ;  $c_1$  et  $c_2$  sont deux constantes, appelées coefficients d'accélération ;  $r_1$  et  $r_2$  sont deux nombres aléatoires tirés uniformément dans  $[0, 1]$ , à chaque itération  $t$  et pour chaque dimension  $j$ .

Les trois composantes mentionnées ci-dessus (i.e. d'inertie, cognitive et sociale) sont représentées dans l'équation (III.1) par les termes suivants :

$wv_{i,j}^t$  : correspond à la composante d'inertie du déplacement, où le paramètre  $w$  contrôle l'influence de la direction de déplacement sur le déplacement futur.

$c_1r_1(Pbest_i(\mathbf{t}) - x_i(\mathbf{t}))$  : correspond à la composante cognitive de la vitesse.  $c_1$  est un paramètre de contrôle et  $r_1$  donne l'aspect aléatoire au comportement cognitif de la particule.

$c_2r_2(Gbest_j(\mathbf{t}) - x_i(\mathbf{t}))$  : correspond à la composante sociale de la vitesse.  $c_2$  est un paramètre de contrôle et  $r_2$  donne l'aspect aléatoire au comportement social de la particule.

Une fois le déplacement des particules effectué, les nouvelles positions sont évaluées et les deux vecteurs  $\vec{P}best_i$  et  $\vec{G}best$  sont mis à jour, à l'itération  $t + 1$ , suivant les deux équations (III.3) et (III.4), respectivement :

$$\vec{P}best_i(t+1) = \begin{cases} \vec{P}best_i(t) & \text{si } f(\vec{x}_i(t+1)) \geq \vec{P}best_i(t) \\ \vec{x}_i(t+1) & \text{sinon} \end{cases} \quad (III.3)$$

$$\vec{G}best(t+1) = \arg \min_{\vec{P}best_i} f(\vec{P}best_i(t+1)) \quad ; \quad 1 \leq i \leq N \quad (III.4)$$

Cette procédure est présentée par l'algorithme de la figure III.2, où  $N$  désigne le nombre de particules de l'essaim.

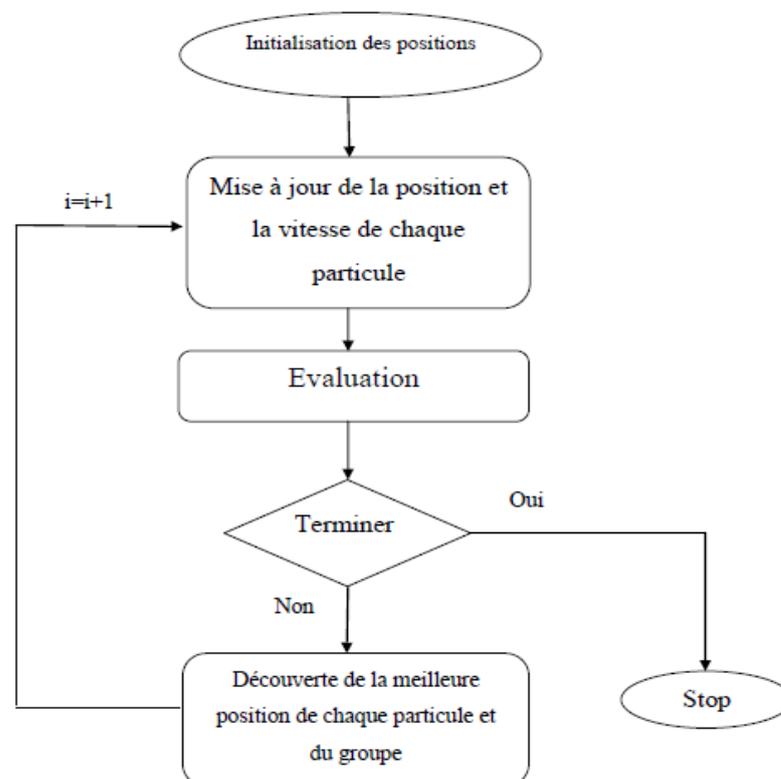
### III.3.3 Algorithme de PSO d'optimisation par essaim particulaire :

1. **Initialiser** aléatoirement  $N$  particules : positions et vitesses.
2. **Evaluer** les positions des particules.
3. **Pour** chaque particule  $i$ ,  $\vec{P}best_i = \vec{x}_i$
4. **Calculer**  $\vec{G}best$  selon (III.4).
5. **Tan que** le critère d'arrêt n'est pas satisfait **faire**
6. | **Déplacer** les particules selon (III.1) et (III.2).
7. | **Evaluer** les positions des particules.
8. | **Mettre à jours**  $\vec{P}best_i$  et  $\vec{G}best$  selon (III.3) et (III.4).
9. **fin**

**Figure III.2 :** Algorithme d'optimisation par essaim particulaire [19].

L'algorithme, va servir comme référence pour l'implémentation de notre application dans le prochain chapitre.

Pour bien comprendre le déroulement de cet algorithme, nous schématisons ce dernier à l'aide de l'organigramme ci-dessous (Figure III.3).



**Figure III.3 :** Organigramme « méthode des essaims particulaires ».

### III.4 Configuration de la méthode :

Il existe plusieurs paramètres qui interviennent et influencent la performance de la méthode PSO. Le choix de ces paramètres reste critique et dépend généralement du problème posé [21], [22], mais a une grande influence sur la convergence de l'algorithme. Parmi les paramètres qui rentrent en ligne de compte citons :

- Le nombre des particules.
- La topologie du voisinage.
- Les coefficients de confiance.
- La vitesse maximale et le coefficient de constriction.
- Le facteur d'inertie.
- Initialisation de l'essaim.
- Le critère d'arrêt.

#### 1) *Nombre de particules* :

La quantité de particules allouées à la résolution du problème dépend essentiellement de deux paramètres :

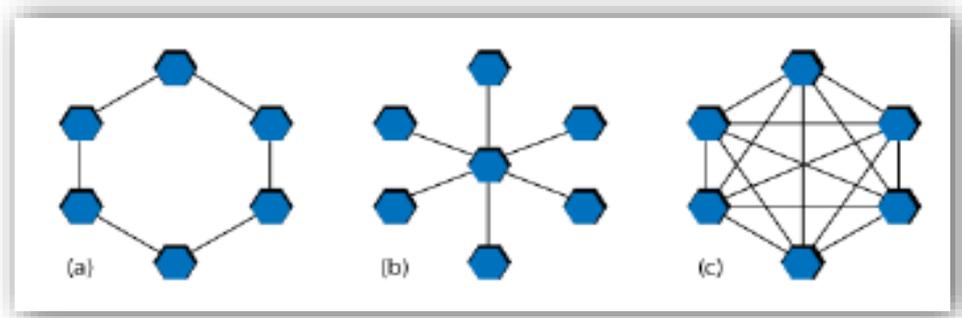
La taille de l'espace de recherche et le rapport entre les capacités de calcul de la machine et le temps maximum de recherche. Il n'y a pas de règle pour déterminer ce paramètre, faire de nombreux essais permet de se doter de l'expérience nécessaire à l'appréhension de ce paramètre

#### 2) *Topologie du voisinage* :

La topologie du voisinage défini avec chacune des particules va pouvoir communiquer Il existe de nombreuses combinaisons dont les suivantes sont les plus utilisées [25] (voir Figure III-4) :

- a) **Topologie en anneau** : chaque particule est reliée à  $n$  particules (en général,  $n=2$ ) c'est la topologie la plus utilisée.
- b) **Topologie en rayon** : Les particules ne communiquent qu'avec une seule particule centrale.

- c) **Topologie en étoile** : chaque particule est reliée à toutes les autres. L'optimum du voisinage est l'optimum global.



**Figure III.4** : (a) Topologie en anneau (b) en rayon, (c) en étoile.

### 3) Les coefficients de confiance :

Les variables de confiance pondèrent les tendances de la particule à vouloir suivre son instinct de conservation ou son panurgisme. Les variables aléatoires  $P_1$  et  $P_2$  peuvent être définis de la façon suivante :

$$\begin{cases} P_1 = r_1 c_1 \\ P_2 = r_2 c_2 \end{cases} \quad (\text{III.5})$$

Où  $r_1$  et  $r_2$  suivent une loi uniforme sur  $[0,1]$  et  $c_1$  et  $c_2$  sont des constantes positives déterminées de façon empirique et suivant la relation  $c_1 + c_2 \leq 4$  [27],[28].

### 4) Vitesse maximale et coefficient de constriction :

Afin d'éviter que les particules ne se déplacent trop rapidement dans l'espace de recherche, passant éventuellement à côté de l'optimum, il peut être nécessaire de fixer une vitesse maximale (notée  $\vec{v}_{max}$ ) pour améliorer la convergence de l'algorithme. Cependant, on peut s'en passer si on utilise un coefficient de constriction  $\chi$  et qui permet de resserrer l'hyper-espace de recherche.

L'équation de la vitesse devient alors :

$$\vec{v}_i(t+1) = \chi \cdot \vec{v}_i(t) + \rho_1 (\vec{P}_{besti}(t) - \vec{x}_i(t)) + \rho_2 \cdot (G_{besti}(t) - \vec{x}_i(t)) \quad (\text{III.6})$$

Avec :

$$\chi = 1 - \frac{1}{\rho} + \frac{\sqrt{|\rho^2 - 4\rho|}}{2}$$

$$\rho = \rho_1 + \rho_2 > 4 \quad (\text{III.7})$$

Les études dans [17] indiquent que l'utilisation d'un coefficient de constriction donne généralement un meilleur taux de convergence sans avoir à fixer de vitesse maximale. Cependant, dans certains cas, le coefficient de constriction seul ne permet pas la convergence vers la solution optimale pour un nombre d'itérations donné. Pour résoudre ce problème, il peut être intéressant de fixer  $\vec{v}_{max} = \vec{x}_{max}$  en plus du coefficient de constriction, ce qui, selon les études de SHI et EBERHART, permet d'améliorer les performances globales de l'algorithme.

#### 5) Le facteur d'inertie :

Le facteur d'inertie  $w$  introduit par SHI et EBERHART [23], permet de définir la capacité d'exploration de chaque particule en vue d'améliorer la convergence de la méthode.

Une grande valeur de ( $w > 1$ ) est synonyme d'une grande amplitude de mouvement et donc, infinie, d'exploration globale. A contrario, une faible valeur de ( $w < 1$ ) est synonyme de faible amplitude de mouvement et donc, d'exploration locale. Fixer ce facteur, revient donc à trouver un compromis entre l'exploration locale et l'exploration globale.

Le calcul de la vitesse est alors défini par :

$$\vec{v}_i(t+1) = w \cdot \vec{v}_i(t) + \rho_1(\vec{P}_{besti}(t) - \vec{x}_i(t)) + \rho_2 \cdot (\vec{G}_{besti} - \vec{x}_i(t)) \quad (\text{III.8})$$

La taille du facteur d'inertie influence directement la taille de l'hyper-espace exploré et aucune valeur de  $w$  ne peut garantir la convergence vers la solution optimale.

Les études menées par SHI et EBERHART [24], indiquent une meilleure convergence pour  $w \in [0.8, 1.2]$ .

#### 6) Initialisation de l'essaim :

La position des particules ainsi que leur vitesse initiale doivent être initialisés aléatoirement selon une loi uniforme, généralement sur un intervalle normalisé  $[0,1]$ .

### 7) Le critère d'arrêt :

La convergence vers la solution optimale globale n'est pas garantie dans tous les cas de figure même si les expériences dénotent la grande performance de la méthode.

De ce fait, il est fortement conseillé de doter l'algorithme d'une porte de sortie en définissant un nombre maximum d'itération.

L'algorithme doit alors s'exécuter tant que l'un des critères de convergence suivant n'a pas été atteint :

- Un nombre maximum d'itération a été atteint.
- La variation de la vitesse est proche de 0.
- Le fitness de la solution est suffisant.

### III.5 Illustration à travers des exemples :

Cette section est consacrée aux différentes fonctions tests les plus utilisées pour étudier les performances et l'efficacité d'un algorithme d'optimisation. Nous allons donc tester la méthode PSO sur quelques-unes de ces fonctions.

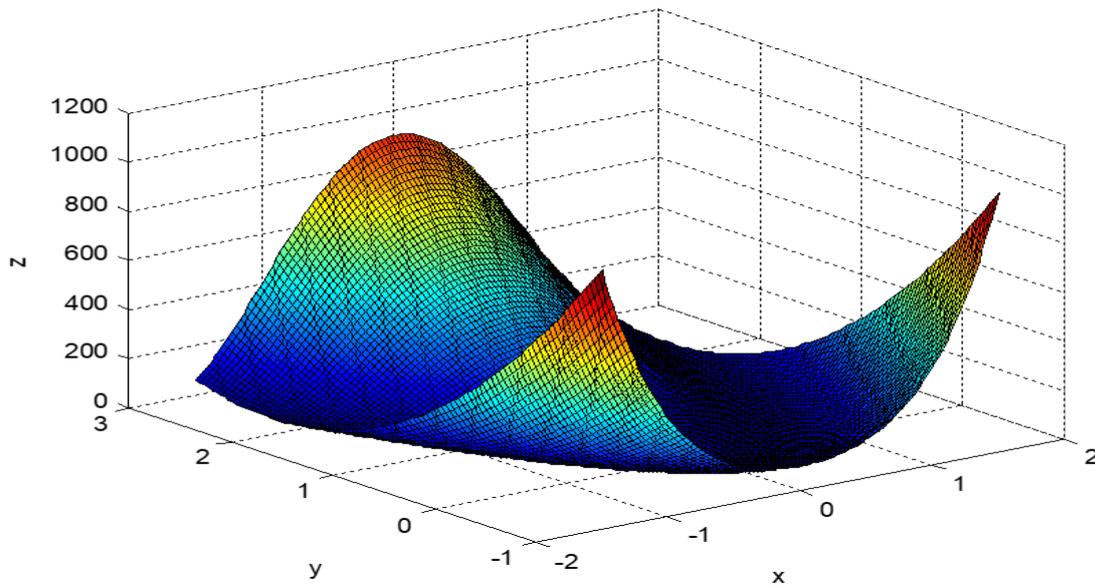
Le tableau III.1 donne les valeurs des paramètres du PSO utilisés durant les différentes simulations :

Paramètre	Nombre de particules	Nombre d'itération	$c_1$	$c_2$	$w_{min}$	$w_{max}$
Valeur	100	5000	1	3	0,99	1

**Tableau III.1:** Valeurs des paramètres du PSO.

#### 1) Fonction de Rosenbrock :

La fonction de Rosenbrock (Fonction banane), illustrée par la Figure III.5, est une fonction non convexe de deux variables ( $x$ ,  $y$ ) utilisée comme test pour des problèmes d'optimisation mathématique. La fonction présente un minimum global à l'intérieur d'une longue vallée étroite de forme parabolique.



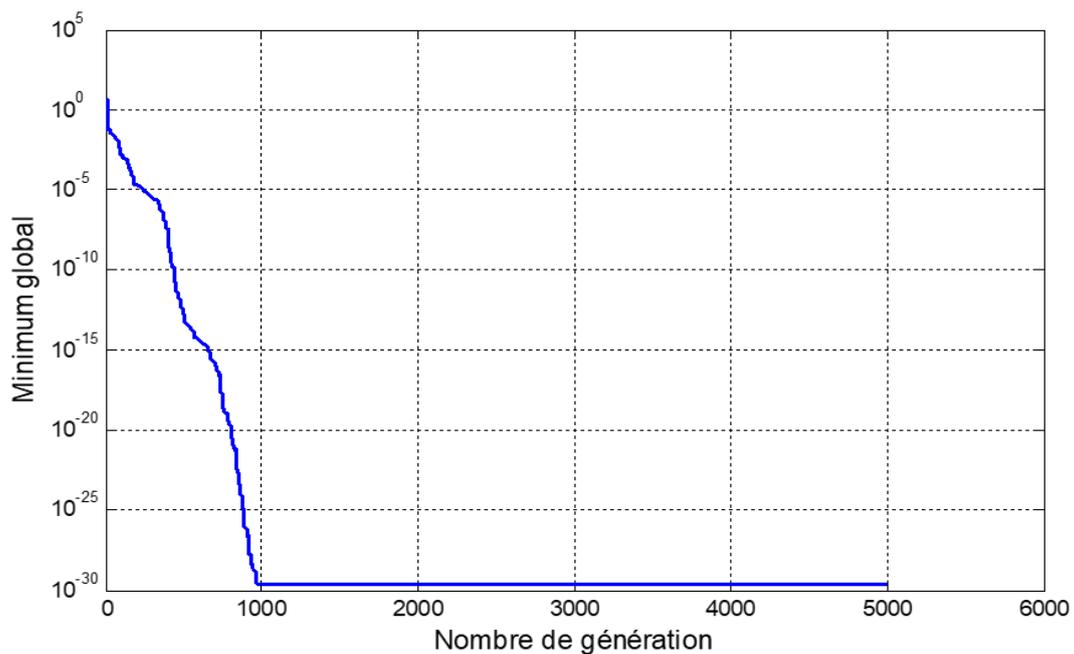
**Figure III.5 :** Représentation graphique de la fonction «Rosenbrock».

Cette fonction est définie par :

$$f(x) = [100(y - x^2)^2 + (1 - x)^2] \quad (\text{III.9})$$

La fonction évaluée sur  $-1,5 \leq x \leq 1,5$  et  $-1 \leq y \leq 3$ , pour tout  $i = 1, \dots, d$

La convergence de la fonction Rosenbrock vers l'optimum global, d'après les résultats du 1<sup>er</sup> test, est représentée sur la figure (III.6).

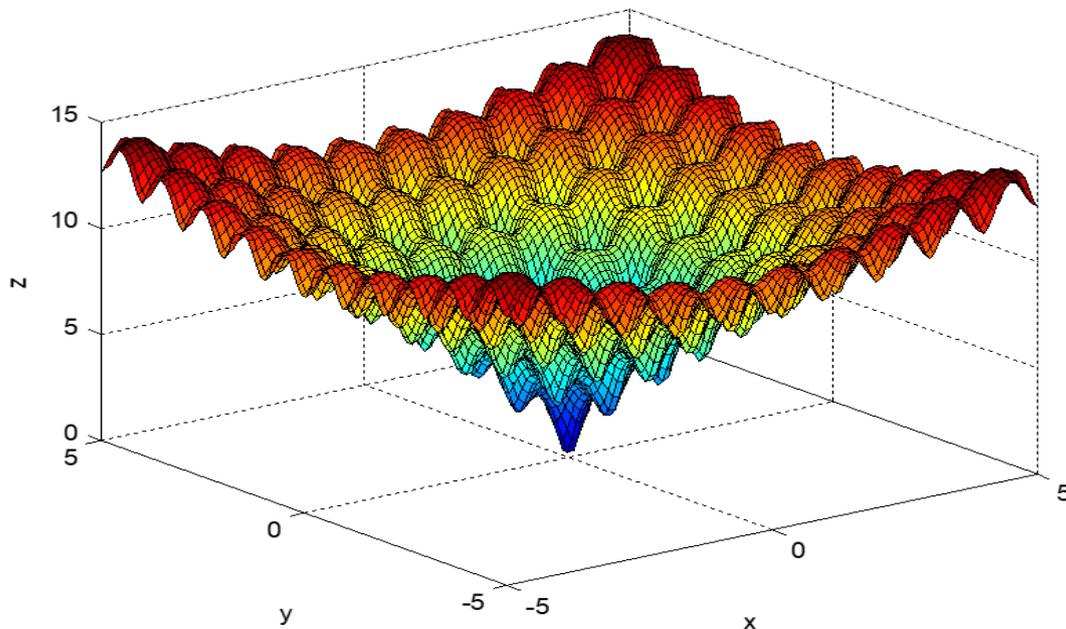


**Figure III.6 :** Convergence de la fonction objectif Rosenbrock.

D'après ce test, le minimum global est obtenu à partir de là 2043<sup>ème</sup> itérations. La différence entre la valeur optimale connue de la fonction de Rosenbrock et celle obtenue est d'ordre  $10^{-25}$ .

## 2) Fonction de Ackley :

La fonction Ackley est largement utilisée pour tester des algorithmes d'optimisation. Comme indiqué dans le graphique figure (III.7), il se caractérise par une région externe presque plate et un grand trou au centre. La fonction présente le risque que les algorithmes d'optimisation, en particulier les algorithmes d'escalade, soient piégés dans l'un de ses nombreux minimas locaux.



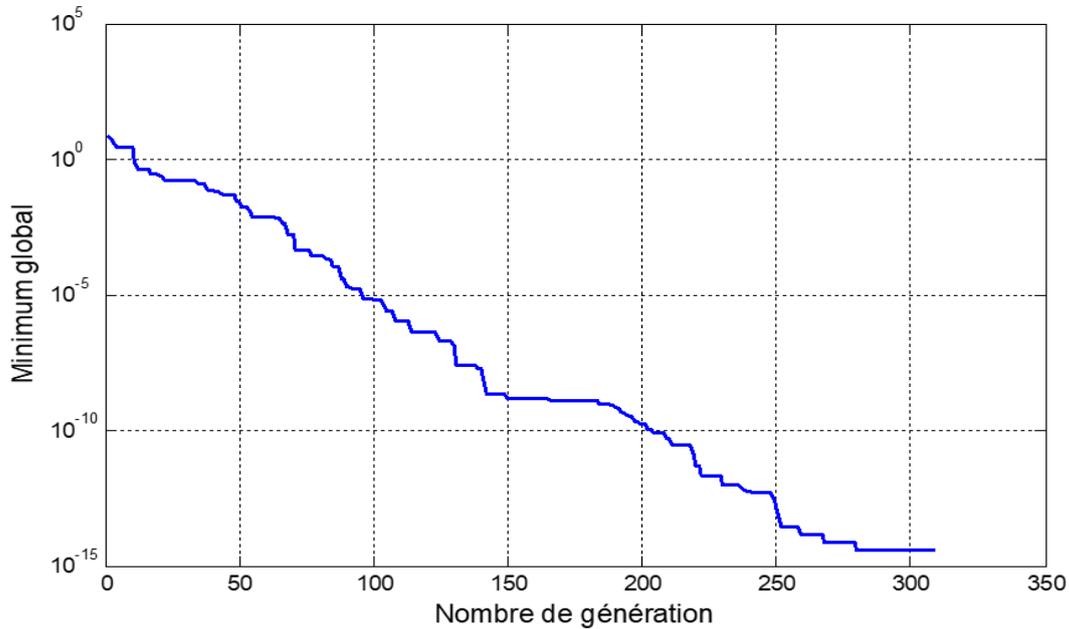
**Figure III.7 :** Représentation graphique de la fonction d'Ackley.

Cette fonction est définie par :

$$f(x, y) = -a \exp \left[ -b \sqrt{\frac{1}{d} (x^2 + y^2)} \right] - \exp \left[ \frac{1}{d} (\cos cx + \cos cy) \right] + \exp(1) + 20 \quad (\text{III.10})$$

La fonction est évaluée sur l'hypercube  $-5 \leq x, y \leq 5$ , pour tout  $i = 1, \dots, d$ , bien qu'elle puisse également être restreinte à un domaine plus petit.

La convergence de la fonction objectif Ackley vers l'optimum global, d'après les résultats du 2<sup>ème</sup> test, est représentée sur la figure (III.8).

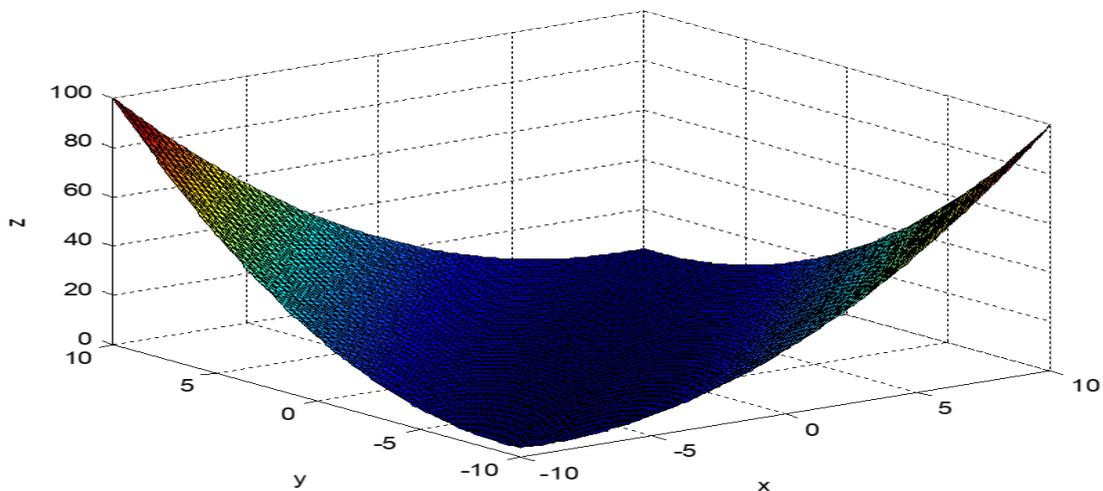


**Figure III.8 :** Convergence de la fonction Ackley.

Dans ce teste on a obtenu le minimum global à partir de là 263<sup>ème</sup> itération.et la différence entre la valeur optimale connue de la fonction de Ackley et celle obtenue est d'ordre  $10^{-16}$ .

### 3) Fonction Matyas :

La fonction Matyas sa dimensions ( $d=2$ ), n'a pas de minimum local sauf le global.



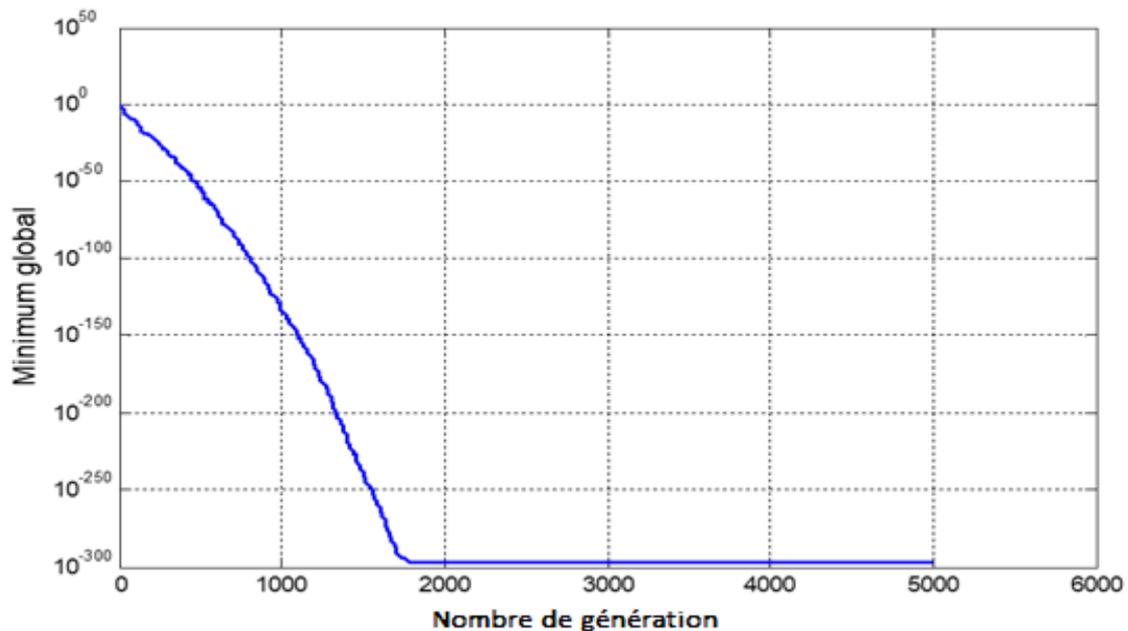
**Figure (III.9) :** Représentation graphique de la fonction Matyas.

Cette fonction est définie par :

$$f(x, y) = 0.26(x^2 + y^2) - 0.48x \cdot y \quad (\text{III.11})$$

La fonction est généralement évaluée sur le carré  $-10 \leq x, y \leq 10$ , pour tout  $i = 1, 2, \dots$

La convergence de la fonction objectif Matyas vers l'optimum global, d'après les résultats du 3<sup>ème</sup> test, est représentée sur la figure (III.10).



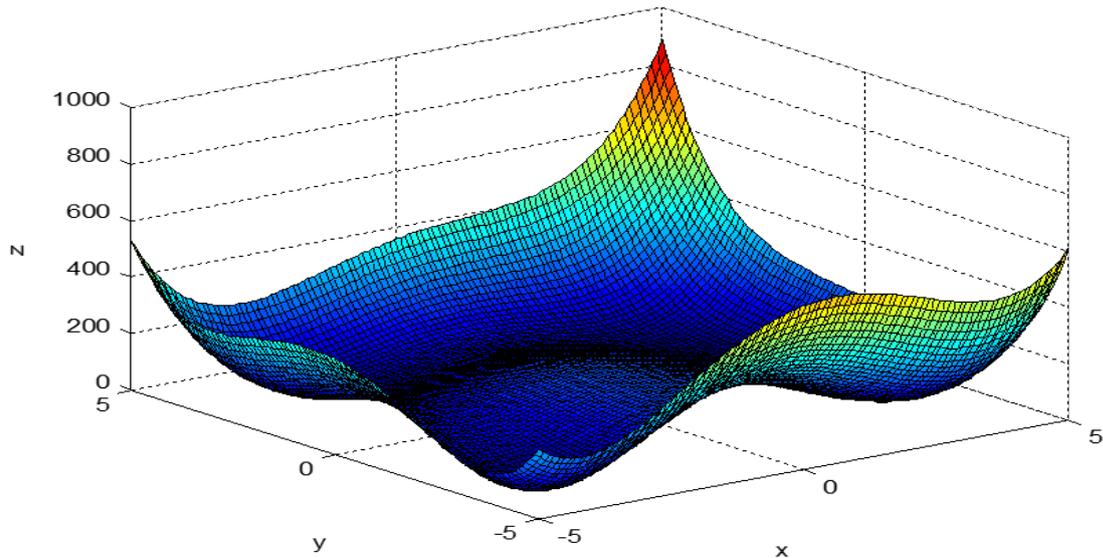
**Figure III.10 :** Convergence de la fonction objectif Matyas.

Dans ce teste on a obtenu le minimum global à partir de la 2008<sup>ème</sup> itérations et la différence entre la valeur optimale connue de la fonction de Matyas et celle obtenue est d'ordre  $10^{-161}$ .

#### 4) Fonction de himmelblau :

Dimensions :  $d=4$

La fonction de himmelblau sa dimensions ( $d=4$ ), comporte de nombreux minima locaux, avec quatre minima globaux.



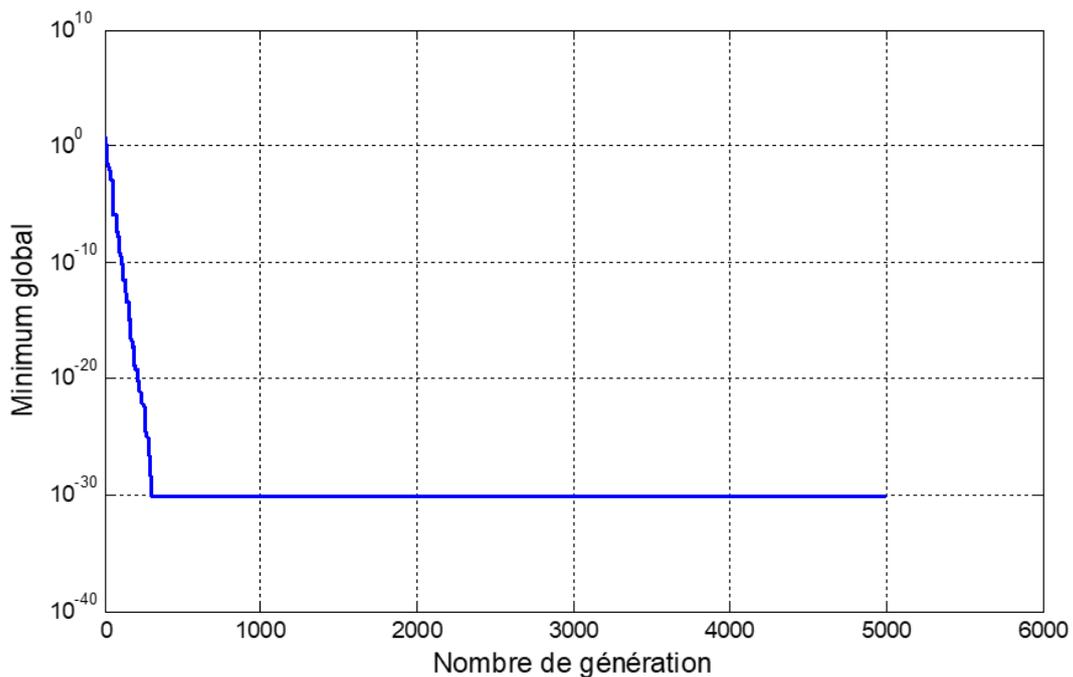
**Figure III.11 :** Représentation graphique de la fonction de himmelblau.

Cette fonction est définie par :

$$f(x, y) = (x^2 + y - 11)^2 + (x + y^2 - 7)^2 \quad (\text{III.12})$$

La fonction est évaluée sur le carré  $-5 \leq x, y \leq 5$ , pour tout  $i=1,2,\dots,4$ .

La convergence de la fonction objectif de himmelblau vers l'optimum global, d'après les résultats du 4<sup>ème</sup> test, est représentée sur la figure (III.14).



**Figure III.12:** Convergence de la fonction objectif himmelblau.

Dans ce teste on a obtenu le minimum global à partir de la 328<sup>ème</sup> itérations. et la différence entre la valeur optimale connue de la fonction de himmelblau et celle obtenue est d'ordre  $10^{-31}$ .

D'après les différents résultats obtenu dans les différentes testes nous constatons que la méthode d'optimisation par essaim particulaire (PSO) est efficace pour produire des solutions satisfaisantes pour un problème d'optimisation.

### **III.6 conclusion :**

Nous avons présenté dans ce chapitre un algorithmes d'optimisation à base des essaimes particulaire. Par la suite, on a proposé quelques exemples d'application pour illustré notre travail, et présenté les résultats de la validation de notre approche, afin d'évaluer l'efficacité de cette dernière.

D'après les résultats qu'on a obtenus, on a confirmé les performances et l'efficacité d'un algorithme d'optimisation.

*Chapitre IV :*  
*Application de la commande*  
*LQR optimisé par PSO sur le*  
*pendule inversé.*

## **IV.1 Introduction :**

Ce chapitre est consacré à l'optimisation de la commande LQR par l'algorithme d'optimisation par essaim de particule (PSO).

Le chapitre est organisé en deux parties.

La première partie décrit la combinaison entre la commande LQR et le PSO, tandis que la deuxième partie rapporte l'ensemble des résultats de simulations et leurs interprétations

## **IV.2 Optimisation de la commande LQR par PSO :**

Le problème majeur dans la synthèse de la commande LQR réside dans le choix des matrices de pondération (Q, R) permettant d'atteindre les spécifications désirées. On trouve dans littérature deux méthodes pour réaliser ce choix.

La première méthode est la règle de Bryson [26] qui suggère de choisir des matrices de pondérations diagonales. Bryson indique également que cette règle ne fournit que des valeurs initiales, que l'on peut ensuite améliorer par simulations successives.

La deuxième méthode [4], consiste à choisir des matrices de pondérations symétriques et diagonales. Au départ, on choisit généralement des pondérations égales aux matrices identité que l'on peut ensuite améliorer par simulation successives.

D'après les deux méthodes précédentes le choix des matrices de pondérations sera raffiné par essais et erreurs en simulation. Cependant, les deux méthodes peuvent conduire à des grandes valeurs de gain et une commande plus énergique.

Dans notre travail, pour surmonter ces problèmes, nous avons utilisé l'optimisation par essaim particulaire (PSO). La procédure de mise en œuvre de notre méthode peut être décrite comme suit :

- Sélectionner les matrices de pondérations diagonales définies positives :

$$Q = \text{diag}(q_1, q_2, \dots, q_q) ; i = 1, 2, 3, \dots, q$$

et

$$R = \text{diag}(r_1, r_2, \dots, r_m) ; i = 1, 2, 3, \dots, m$$

- Mettre les éléments de la diagonale de Q et R dans un seul vecteur comme suite :

$$V = (q_1, q_2, \dots, q_q, r_1, r_2, \dots, r_m).$$

- Spécifier la taille de la population ou de l'essaim.
- Choisir le nombre maximal d'itérations.
- Spécifier la fonction objectif (fitness) qui peut être égale à la fonction coût (II.19).
- Suivre les étapes de l'algorithme (III.3).

Nous pouvons représenter la structure de la commande LQR optimisée par PSO par le schéma bloc illustré par la Figure IV.1:

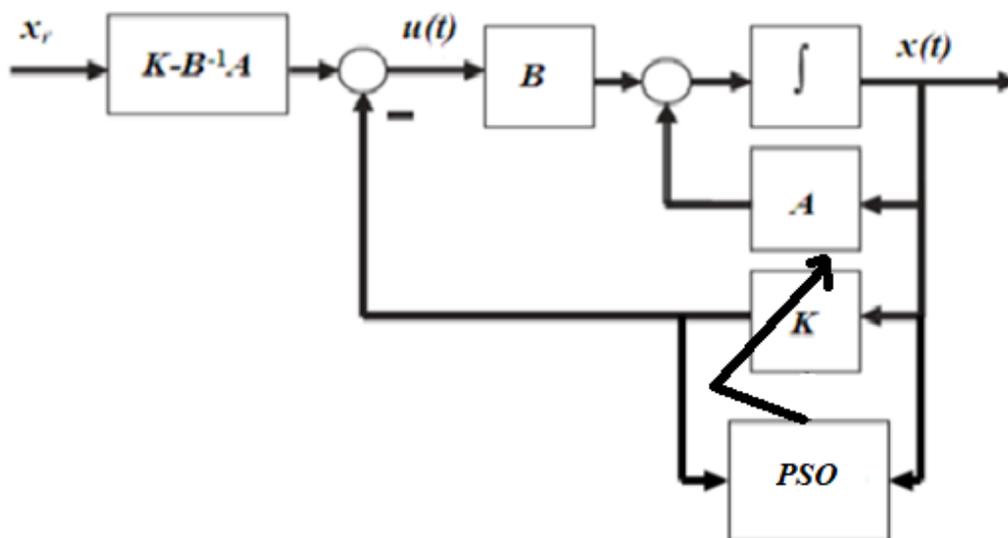


Figure IV.1: Schéma bloc du régulateur LQR optimisé par PSO.

#### IV.2.1 Fonction objectif :

Pour trouver les matrices Q et R optimales, considérons les indices de performance suivants :

**Indice d'effort maximal de commande** : en raison des limitations des actionneurs, les objectifs doivent satisfaire généralement un effort minimal de commande. En effet, l'utilisation d'actionneurs avec un niveau de saturation supérieur nécessite davantage de dépenses énergétiques. L'effort maximal de commande peut être défini comme suit :

$$u_{max} = \max|u(t)| \quad (IV.1)$$

**Intégrale de la valeur absolue de l'erreur pondérée par le temps (ITAE) :**

L'intégrale de la valeur absolue de l'erreur pondérée par le temps est donnée par :

$$ITAE = \int_0^{t_f} t |e(t)| dt \quad (IV.2)$$

Où  $e(t)$  représente l'erreur soit sur la position du pendule, soit sur la position du chariot par rapport à la référence ( $\theta_{ref} = 0$  rad et  $x_{ref} = 0$  m).  $t_f$  est le temps de simulation. L'introduction du paramètre temps, va corriger les systèmes à réponse très oscillatoire.

Alors la recherche des valeurs optimales des matrices Q et R est un problème d'optimisation multi-objectif. Ainsi, pour éviter toute complication, nous définissons la fonction objectif suivante :

$$Obj = \alpha_1 u_{max} + \alpha_2 ITAE_{\theta} + \alpha_3 ITAE_x \quad (IV.3)$$

avec  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  et  $\alpha_3$  devraient être sélectionnés par le concepteur.

**IV.2.2 Paramètres du PSO :**

Comme pour tous algorithmes évolutionnaires, les paramètres du PSO doivent être soigneusement choisis afin d'obtenir de meilleurs résultats. Dans notre cas, nous avons utilisé les paramètres ci-dessous (tableau IV.1) :

**Tableau IV.1 : Paramètres du PSO**

Paramètre	Valeur Numérique
Représentation	Réelle de taille 5
Nombre de génération	200
Taille de population	10
$c_1$	1
$c_2$	3
$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$	1

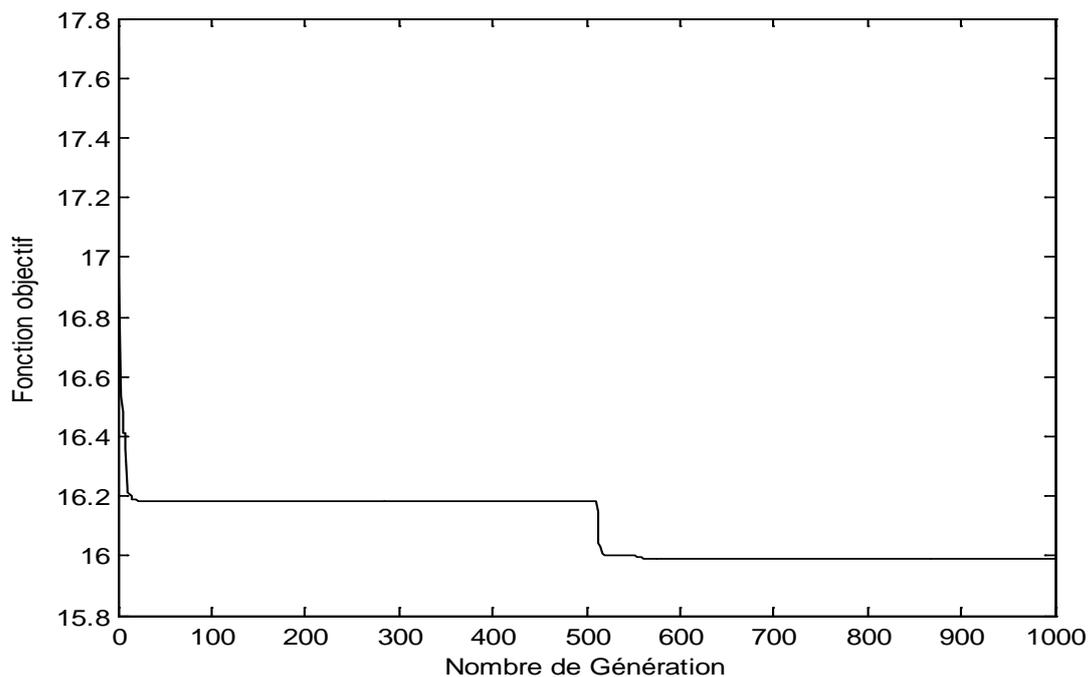
**IV.3 Applications :**

Dans cette partie, il s'agit d'appliquer la commande LQR optimisée par PSO à la stabilisation du pendule inversé. Nous utilisons le modèle linéaire que pendule inversé que

nous avons établi au premier chapitre. On rappelle que le modèle d'état du système est défini par les A, B, C et D suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.00002 & -0.53387 & 0.00453 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.00004 & 22.24489 & -0.18896 \end{bmatrix}$$
$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.42177 \\ 0 \\ -0.90703 \end{bmatrix} ; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} ; D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La Figure IV.2 montre l'évolution de la meilleure particule (valeur minimale de la fonction objectif) à chaque génération. Il ressort de cette figure que le PSO est capable de trouver la solution optimale avec un nombre d'itération inférieur à 1000.



**Figure IV.2:** Evolution de la fonction objectif à travers les générations.

Afin d'avoir une idée plus claire sur l'évolution des performances, nous avons comparé les réponses, du système, relatives à la première et à la dernière génération. Cela est bien indiqué sur les Figures IV.3 à IV.5.

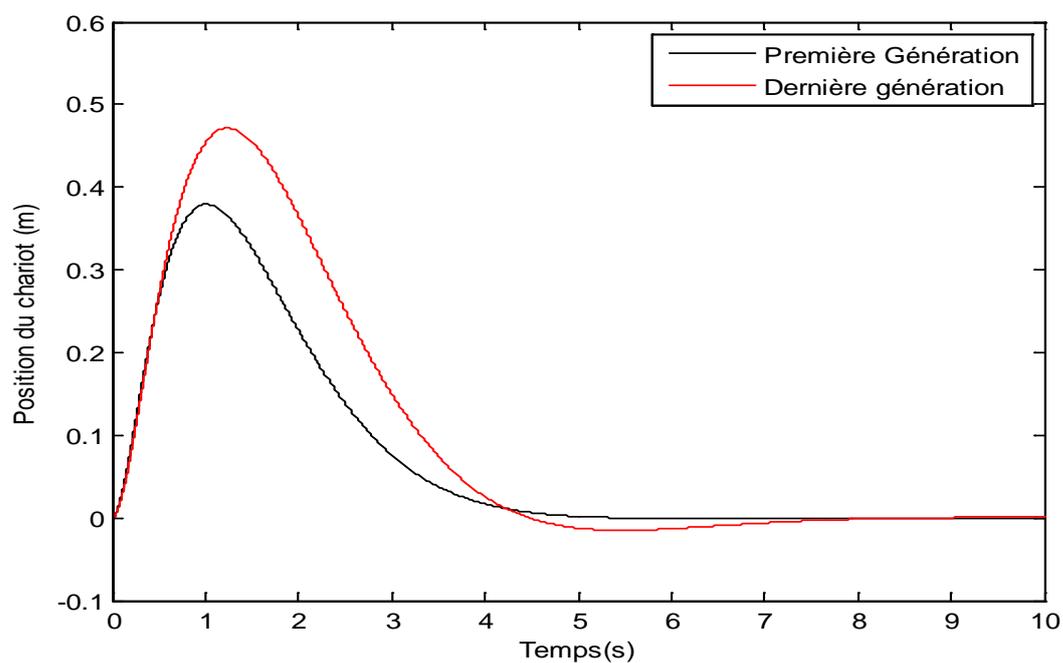


Figure IV.3: Position du chariot pour la première et la dernière génération.

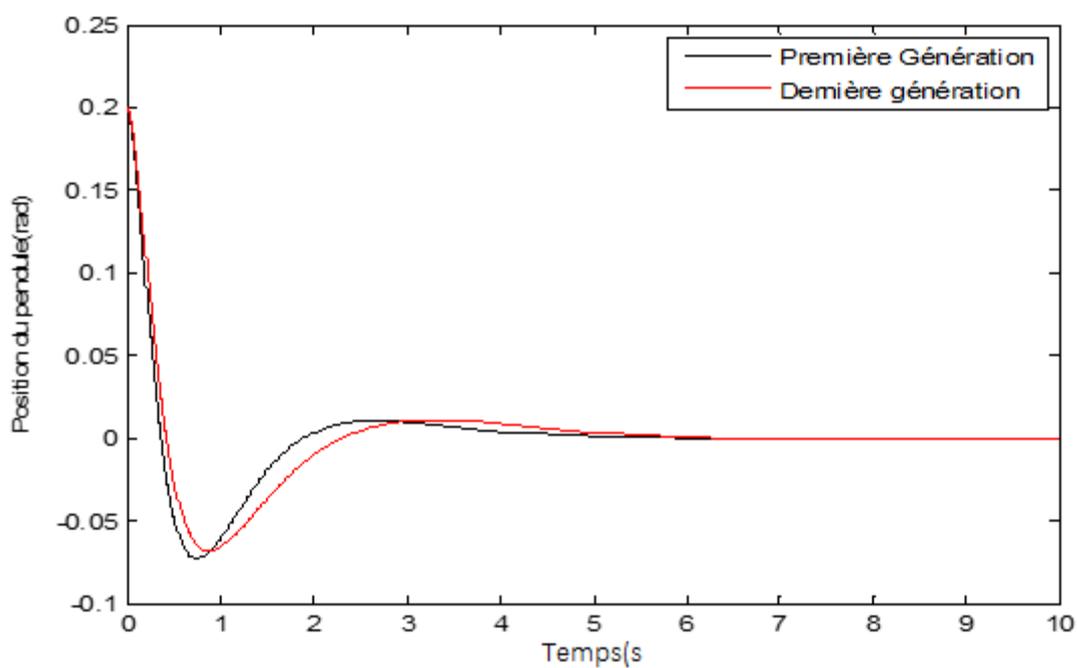


Figure IV.4: Position du pendule pour la première et la dernière génération.

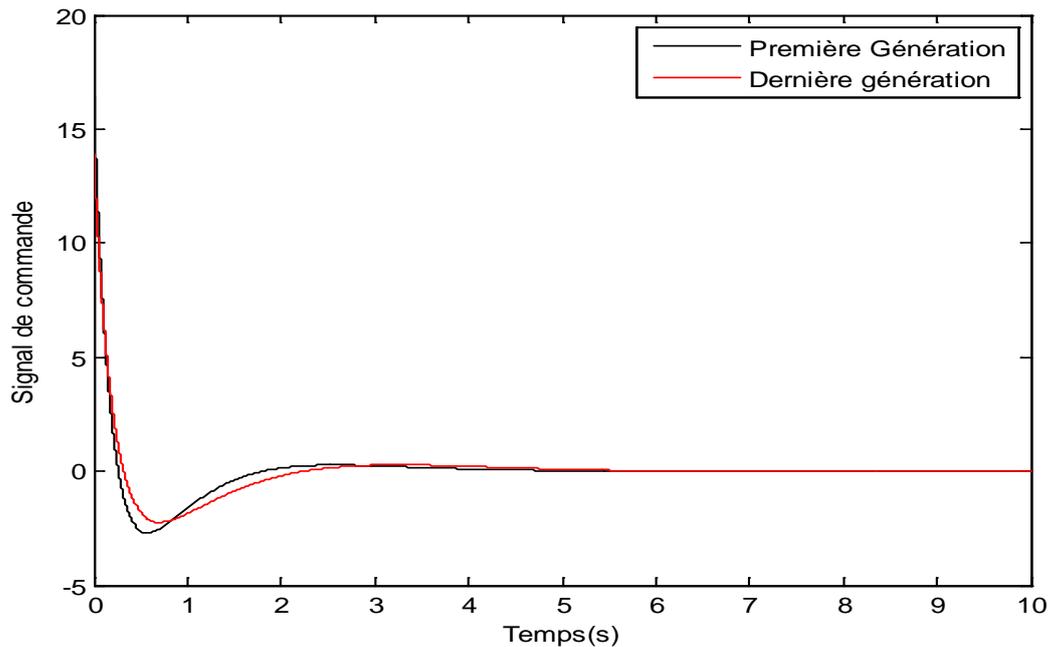


Figure IV.5: Signal de commande pour la première et la dernière génération.

On constate que dans les deux cas le pendule se stabilise à sa position d'équilibre instable ( $\theta = 0$ ) et le chariot est ramené à l'origine ( $x=0$ ).

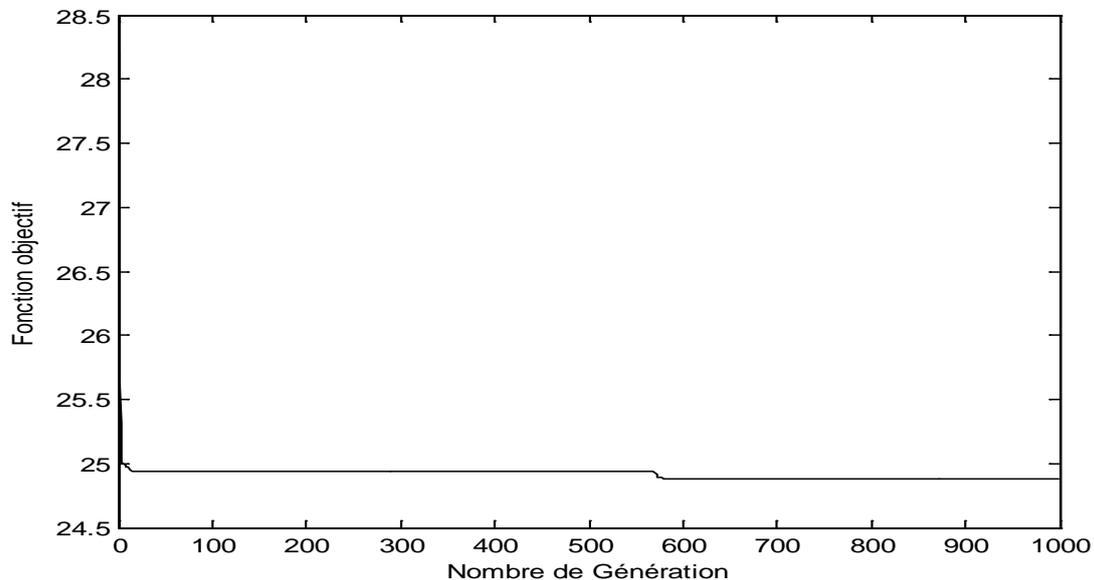
Le tableau IV. 2 ci-dessous permet de chiffrer les indices de performance pour les deux cas précédents :

Tableau IV.2 : Etude comparative :

	Première génération	Dernière génération
Obj	17.7014	15.9901
$u_{\max}$	16.4360	13.8952
$ITAE_x$	1.1427	1.9186
$ITAE_\theta$	0.1227	0.1764
K	$\begin{bmatrix} -4.9206 \\ -8.5634 \\ -82.1802 \\ -17.5174 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3.0509 \\ -5.4139 \\ -69.4758 \\ -14.5881 \end{bmatrix}$
R	[1.8297]	[2.0500]
Q	$\begin{bmatrix} 44.3015 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 28.3617 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 85.8337 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 19.9294 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 19.0812 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.7778 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16.0012 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.7778 \end{bmatrix}$

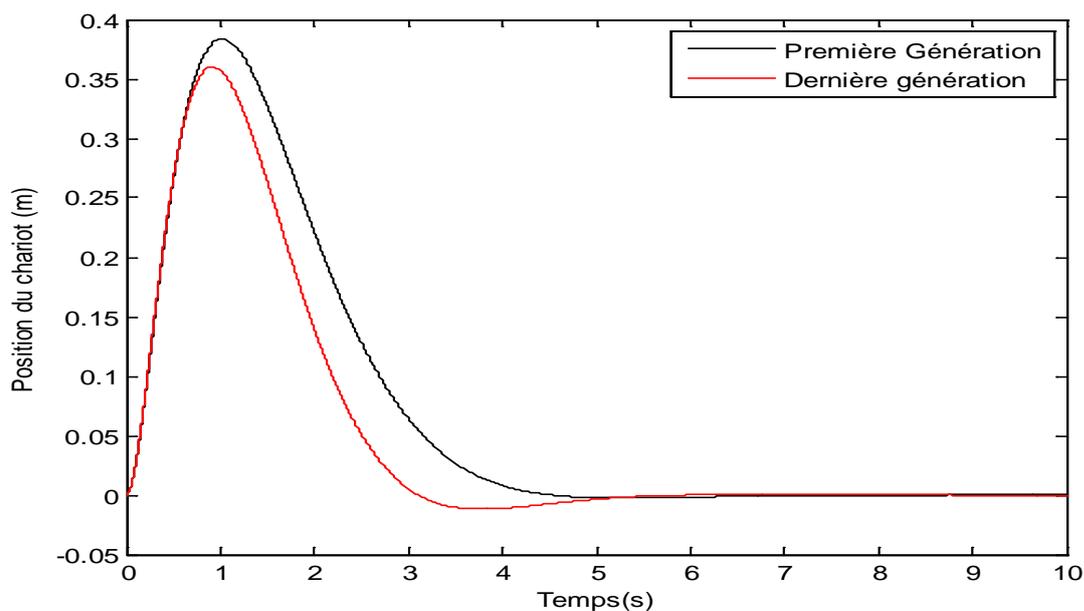
Pour étudier l'effet du choix des coefficients de pondération  $\alpha_1$   $\alpha_2$   $\alpha_3$  sur les performances du système, nous avons effectué une deuxième simulation avec les pondérations suivantes :  $\alpha_1 = 1$  ,  $\alpha_2 = 5$  ,  $\alpha_3 = 5$ .

La Figure IV.6 montre l'évolution de la meilleure particule à chaque génération.



**Figure IV.6:** Evolution de la fonction objectif à travers les générations ( $\alpha_1 = 1$  ,  $\alpha_2 = 5$  ,  $\alpha_3 = 5$ ).

On compare également les réponses, du système, relatives à la première et à la dernière génération (voir Figures IV.7 a IV.9).



**Figure IV.7:** Position du chariot pour la première et la dernière génération ( $\alpha_1 = 1$  ,  $\alpha_2 = 5$  ,  $\alpha_3 = 5$ ).

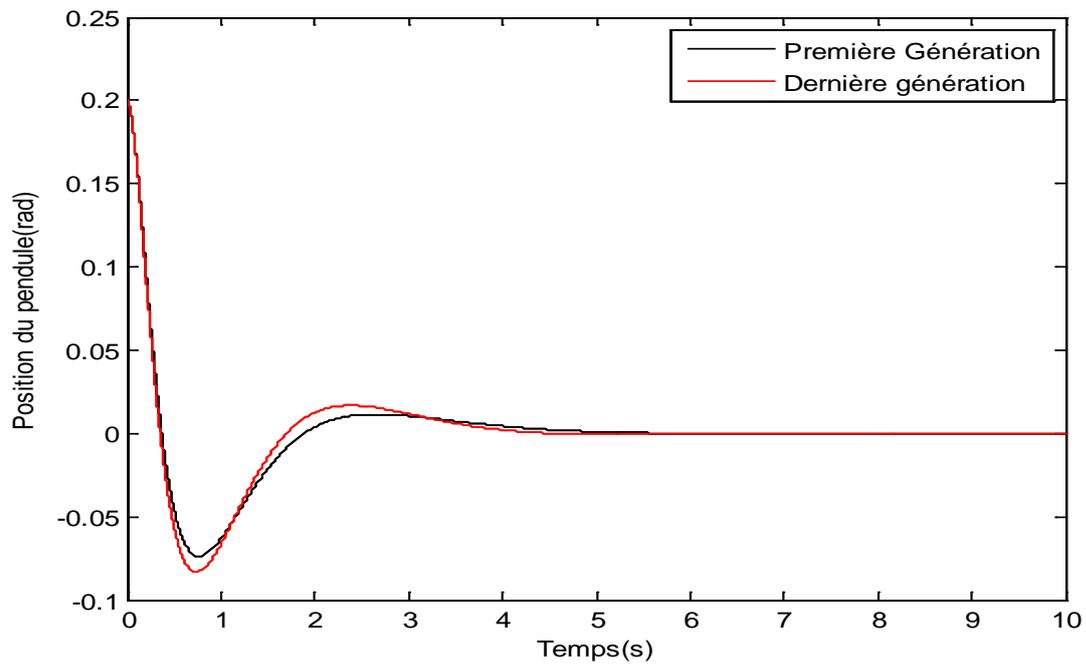


Figure IV.8: Position du pendule pour la première et la dernière génération ( $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 5$ ,  $\alpha_3 = 5$ ).

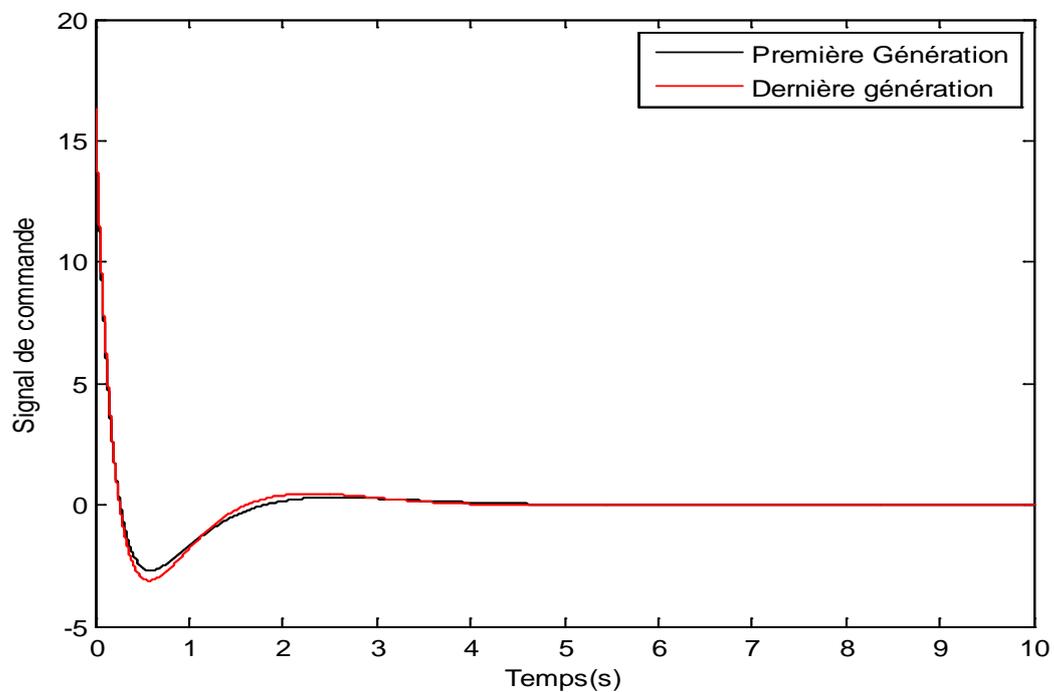


Figure IV.9: Signal de commande pour la première et la dernière génération ( $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 5$ ,  $\alpha_3 = 5$ ).

Le tableau IV.3 ci-dessous permet de chiffrer les indices de performance pour les deux cas précédents.

**Tableau IV.3 :** Etude comparative ( $\alpha_1 = 1$  ,  $\alpha_2 = 5$   $\alpha_3 = 5$ ).

	Première génération	Dernière génération
Obj	28.2142	24.8754
$u_{\max}$	16.2282	16.2961
$ITAE_x$	1.0706	0.7272
$ITAE_\theta$	0.1280	0.1307
K	$\begin{bmatrix} 5.0671 \\ -8.3742 \\ -81.1411 \\ -17.3697 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -6.7420 \\ -8.9889 \\ -81.4804 \\ -17.1711 \end{bmatrix}$
R	[1.2848]	[ 1.1000]
Q	$\begin{bmatrix} 32.9881 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 14.9642 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 35.9318 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16.0538 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 49.9993 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.7778 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16.0353 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.7778 \end{bmatrix}$

On constate que plus les facteurs de pondérations relatifs aux variables de sorties sont importants plus au moins l'un des éléments de la matrice Q devient plus grand. Nous avons également pour les deux cas (première et dernière génération), la commande aboutit toujours à stabiliser le pendule sur sa position d'équilibre instable.

#### IV.4. Conclusion :

Ce chapitre a été consacré à l'optimisation de la commande LQR par La méthode PSO. Les résultats obtenus ont permis de montrer l'intérêt d'une telle approche pour améliorer les performances de commande d'un pendule inversé. Cette approche d'optimisation est une solution acceptable pour le choix automatique des matrices de pondérations et permet d'éviter un travail par tâtonnement peu efficace.

# *Conclusion générale*

## *Conclusion générale*

---

### *Conclusion générale*

Dans ce mémoire, nous avons abordé le problème de stabilisation du pendule inversé qui est un système non linéaire et multi-variables. Pour traiter ce problème nous avons élaboré une approche de commande, cette approche est la commande optimale linéaire quadratique, où on a introduit l'optimisation par essaim particulaire pour choisir les matrices de pondérations.

Le premier chapitre a été alloué à la modélisation de notre système, en utilisant le formalisme d'Euler-Lagrange. Le modèle obtenu est d'une complexité importante. En effet, c'est un système non linéaire et multi-variable. Les essais en boucle ouverte démontrent que le système est bien modélisé. Ceci qualifie ce modèle comme un très bon exemple pour valider les lois de commande.

Le deuxième chapitre a été consacré à la commande linéaire quadratique où nous avons mené une étude détaillée de la commande optimale linéaire quadratique. Ensuite une linéarisation du modèle du pendule inversé a été réalisée. En utilisant le modèle d'état linéaire ainsi obtenu, nous avons testé, par simulation, notre commande pour la stabilité du pendule inversé. Les résultats obtenus montrent bien l'intérêt de la commande LQR pour la stabilisation du pendule inversé.

Le troisième chapitre a été consacré à la compréhension du principe de l'optimisation par essaim particulaire. Ainsi, nous avons implémenté l'algorithme de PSO sous MATLAB. Enfin, nous avons testé le fonctionnement et les performances du PSO en utilisant des fonctions benchmark bien connues dans ce domaine. Les résultats obtenus nous montrent l'efficacité de notre technique d'optimisation et la convergence rapide des particules de l'essaim vers l'optimum global.

Le dernier chapitre a été consacré pour la stabilisation du pendule inversé par la commande linéaire quadratique et l'optimisation par essaim particulaire. Nous avons utilisé l'algorithme de PSO pour réaliser un bon choix de matrices de pondération durant la synthèse du régulateur LQR. Les résultats de simulation obtenus montrent l'intérêt de l'approche d'hybridation entre la commande LQR et le PSO.

Comme perspective, il serait très intéressant d'investir sur les points suivants :

- Implémentation pratique de l'approche d'hybridation.
- Optimisation de la commande LQR par d'autres algorithmes évolutionnaires.

## ***Bibliographie***

---

### ***Bibliographie :***

- [1] : Thomas Kailath. « linear systems ». Englewood Cliffs, NJ, Prentice-Hall, 1980.
- [2] : Anderson, Moore. « Optimal Control : Linear Quadratic Methods ». Englewood Cliffs, NJ, Prentice-Hall, 1989.
- [3] : Ragnar Eide, Per Magne Egelid, Alexander Stams, Hamid Reza Karimi. « LQR Control Design for Balancing an Inverted Pendulum Mobile Robot ». Intelligent Control and Automation, vol. 2, pp. 160-166, May 2011.
- [4] : Laroche E. « Notes de cours de master Automatique et Robotique : Commande Optimale ». Ecole Nationale supérieure de physique Strasbourg, 2010.
- [5] : J. Kennedy and R. C. Eberhart. « Particle Swarm Optimization ». In Proceedings of the IEEE International Conference on Neural Networks, vol. IV, pp. 1942–1948, Perth, Australia, November 1995.
- [6] : J. Kennedy, R. Eberhart. « A New Optimizer Using Particles Swarm Theory ». Proc. Sixth International Symposium on Micro Machine and Human Science, IEEE Service Center, Piscataway, NJ, pp. 39-43, Nagoya, Japan, 1995.
- [07] : <https://www.google.dz/search=robot+mip+one>
- [08] : kacimi M.A. « Utilisation des algorithmes génétiques multi-objectif pour la conception d'un contrôleur flou appliqué à un système non linéaire et complexe ». Mémoire de magister, Universités A. MIRA de Bejaïa, 2014.
- [09] : Bugeja M. « Non linear swing-up and stabilizing control of an inverted pendulum system ». EUROCON, Computer as a Tool, The IEEE Region 8. Vol. 2, IEEE, Slovenia, 2003.
- [10] : Lam J. « Control of an inverted pendulum ». Dept of Electrical & computer Engineering, University of California. U.S.A, 2004.
-

## ***Bibliographie***

---

[11] : Lahouazi Ferhat. « Mise en œuvre d'une stratégie de commande neuro floue : Application à un pendule inversé ». Mémoire de Magister, Université Mouloud Mammeri Tizi-Ouzou, 2011.

[12] : Alazard D. « notes de cours, Régulation LQ/LQG ». SUPAERO.

[13] : M. Llibre. « Commande optimale des processus déterministe ». Polycopie de cours supaéro.

[14] : Boussalem Chahira. « Implémentation de régulateurs fractionnaires pour la stabilisation d'un pendule inversé ». Mémoire de Magister, Université Mouloud Mammeri Tizi-Ouzou, 2012.

[15] : Andrew K. Stamac. « Standup and Stabilization of the Inverted Pendulum ». Bachelor of Science at the M.I.T, 1999.

[16] : Olivier M.P. « Equipement pour l'eau et l'environnement : Modélisation, analyse et commande optimale LQR d'un canal d'irrigation ». Thèse de Doctorat, Ecole Nationale du génie Rural et des Forêts, Janvier 1994.

[17] : L. KARTOBI. « Optimisation de la synthèse des Facs par les algorithmes génétiques et les essaims particulaires pour le contrôle des réseaux électriques ». Mémoire de Magister, Ecole Nationale Polytechnique de l'ENP, 29 Novembre 2006.

[18] : Cooren Y. « Perfectionnement d'un algorithme adaptatif d'Optimisation par Essaim Particulaire. Applications en génie médical et en électronique ». Thèse de Doctorat, Université de Paris 12 Val de Marne, France, 2008.

[19] : Abbas EL DOR. « Perfectionnement des algorithmes d'Optimisation par Essaim Particulaire. Applications en segmentation d'images et en électronique ». Thèse de doctorat, Université Paris-Est, 5 décembre 2012.

---

## ***Bibliographie***

---

[20] : Arnaud et Alexandre Eudes. « Optimisation par essaim particulière pour un problème d'ordonnancement et d'affectation de ressources ». Rapport de Projet 3ème année, 2007.

[21] : Parsopoulos K.E, Vrahatis M.N. « Recent approaches to global optimization problems through particle swarm optimization ». In *Natural Computing : an international journal*, vol. 1, n° 2-3, pp.235-306, 2002.

[22] : Hyass M.E, Hyass P. « Good Parameters for Particle Swarm Optimization ». In *Laboratories Technical Report no. HL1001*, 2010.

[23] : Shi Y, Eberhart R.C. « Parameter selection in particle swarm optimization ». In *Proceedings of the Seventh Annual Conference on Evolutionary Programming*, pp. 591-600, 1998.

[24] : Shi Y, Eberhart R.C. « Empirical study of particle swarm optimization ». In *Proceedings of the IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC)*, pp.1945-1950, 1999.

[25] : Elhami N. « Contribution aux méthodes hybrides d'optimisation heuristiques : Distribution et application à l'interopérabilité des systèmes d'information ». Thèse de Doctorat, Université Mohammed V Rabat, Maroc & Université de Rouen, France, 2013.

[26] : Tansel Yucelen. « A study on PDC of nonlinear systems by T-S Fuzzy Model with comparing pole placement method and linear quadratic regulator ». *9th International Conference on Automatic Control, Modeling & Simulation*, May 27-29, 2007.

[27] : Kennedy. J, Eberhart. R. C, with Yuhui Shi. « *Swarm Intelligence* ». The Morgan Kaufmann Series in Evolutionary Computation, 2001.

[28] : Clerc. M, Kennedy. J. « The particle swarm - explosion, stability, and convergence in a multidimensional complex space ». *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, Vol. 6, No.1, pp.58-73, February 2002.

---

## ***Résumé :***

Mise au point des nouvelles méthodes d'optimisation et amélioration des systèmes existants les techniques de contrôle intéressent les chercheurs depuis de nombreuses années.

Des systèmes pendulaires inversés ont été utilisés pour tester les performances de diverses méthodes de contrôle dans de nombreuses études en raison de leur instable et structures non linéaires. Dans ce travail, l'utilisation de l'optimisation des essaims de particules algorithm (PSO) est présenté pour l'optimisation des paramètres d'un linéaire.

Régulateur linéaire quadratique (LQR) conçu pour la stabilisation et la position contrôle d'un pendule inversé. Équations de mouvement du pendule de la charrette dérivée de la formulation de Lagrange ont été linéarisés et présentés comme modèle d'espace d'états. Un régulateur linéaire quadratique a été conçu pour le contrôle de la position et la stabilisation du système pendulaire.

Les paramètres du contrôleur ont été optimisés par Particle Swarm Algorithm d'optimisation pour obtenir les meilleurs résultats optimaux. Études de simulation ont été réalisés dans l'environnement MATLAB / Simulink et les performances du contrôleur conçu a été évalué à travers les résultats de la simulation.

---

## ***Abstract:***

Development of new methods of optimization and improvement of existing systems Control techniques have been of interest to researchers for many years.

Inverted pendulum systems have been used to test the performance of various control methods in many studies because of their unstable and nonlinear structures. In this work, the use of particle swarm optimization algorithm (PSO) is presented for optimizing the parameters of a linear.

Quadratic linear regulator (LQR) designed for the stabilization and control position of an inverted pendulum. Equations of movement of the pendulum of the cart derived from the Lagrange formulation were linearized and presented as a model of state space. A quadratic linear regulator has been designed for position control and stabilization of the pendulum system.

The controller parameters have been optimized by Particle Swarm Optimization Algorithm for best results. Simulation studies were conducted in the MATLAB / Simulink environment and the performance of the designed controller was evaluated through the results of the simulation.