

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur  
et de la recherche scientifique

UNIVERSITE Abderrahmane MIRA BEJAIA  
Faculté de Technologie  
Département de Génie Mécanique

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de

**MASTER**

Filière : Génie Mécanique

Spécialité : Construction Mécanique

Par :

**BELKACEMI Ghiwan**

**DAHDAH Lounis**

Thème

---

**Etude du comportement statique et dynamique des matériaux  
élastomères**

---

Soutenu le 30/09/2021 devant le jury composé de :

Pr. H. BECHIR	Président
Dr. S. BOUZIDI	Encadrant
Dr. K. YAYA	Examineur

**Année Universitaire 2020-2021**

## Remerciements

*Nous tenons à exprimer toute notre reconnaissance à notre directrice de mémoire, M<sup>elle</sup> BOUZIDI. On la remercie de nous avoir encadré, orienter, aider et conseiller.*

*On adresse nos sincères remerciements à tous les professeurs, intervenants et toutes les personnes qui par leurs paroles, leurs écrits, leurs conseils et leurs critiques ont guidé nos réflexions et ont accepté de nous rencontrer et de répondre à nos questions durant nos recherches.*

*On remercie nos très chers parents, qui ont toujours été là pour nous, Ainsi que nos sœurs, et nos frères, pour leurs encouragements.*

*À tous ces intervenants, On présente nos remerciements, notre respect et notre gratitude.*

# Sommaire

<b>Remerciements .....</b>	<b>i</b>
<b>Sommaire .....</b>	<b>ii</b>
<b>Liste des figures .....</b>	<b>iii</b>
<b>Liste des tableaux .....</b>	<b>ix</b>
<b>NOMENCLATURE .....</b>	<b>viii</b>
<b>Introduction Générale.....</b>	<b>1</b>
<b>Généralité sur les élastomères .....</b>	<b>2</b>
I.1. Introduction .....	2
I.2. Généralités sur les Elastomères .....	2
I.2.1.Caractérisation des Elastomères .....	3
I.3.1. Structure .....	3
I.3. Propriétés mécaniques.....	4
I.3.1 Incompressibilité.....	4
I.3.2. Viscoélasticité .....	5
I.3.3. Hyperélasticité.....	5
I.3.4 Effet Mullins .....	6
I.3.5 Effet Payne.....	8
I.4. Conclusion.....	8
<b>Modélisation du comportement mécanique.....</b>	<b>9</b>
II.1. Introduction .....	9
II.2. Rappels de mécanique des milieux continus .....	9
II.2.1 Description du mouvement.....	9

II.2.2 Description des déformations et des contraintes .....	11
II.2.2.1 Tenseur des déformations .....	11
a. Tenseur des déformations dans la configuration initiale ( $C_0$ ) .....	11
b. Tenseur des déformations dans la configuration actuelle ( $C_t$ ) .....	12
II.2.3 Tenseur des contraintes .....	12
a. Tenseur des contraintes de Cauchy $\sigma$ .....	13
b. Premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff $\pi$ .....	13
c. Second tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff $S$ .....	14
II.3 Modélisation du comportement .....	14
II.3.1. comportement hyperélastique .....	15
II.3.1.1 Modèles hyperélastiques .....	16
a. Modèle de Mooney-Rivlin .....	16
b. Modèle de Yeoh .....	17
c. Modèle d'Ogden (1972) .....	17
d. Modèle néo-Hookéen (1943) .....	17
II.3.2. Comportement Viscoélastique .....	18
II.3.2.1 Modèles rhéologiques .....	18
II.3.2.2 Modèles constitutifs .....	19
II.3.2.3 Modèle intégrale .....	20
a. Modèle de K-KBZ .....	20
II.4 Conclusion .....	22
<b>Etude du comportement statique et dynamique.....</b>	<b>23</b>
III. 1. Introduction .....	23
III.2. Caractérisation expérimentale du comportement statique et dynamique .....	23
II.2.1 Etat de l'art .....	23
III.2.2 Essai de traction classique .....	24
III.2.3 Essai sur barres d'Hopkinson .....	25
III.2.4 Essai pour les moyennes vitesses de déformation .....	26
III.2.5 Hyperélasticité .....	27
III.2.5.1 Modèle de Mooney-Rivlin .....	28
a. Identification des paramètres du matériau pour le modèle Mooney-Rivlin .....	29
b. Discussion du modèle .....	31
III.2.5.2 Modèle de Yeoh .....	32

a. Identification des paramètres du matériau pour le modèle de Yeoh .....	33
III.2.5.3 Choix du modèle de comportement .....	35
III.2.6 Comportement Viscoélastique .....	35
III.2.6.1 modèle à N unité de Maxwell.....	35
III.2.6.2 Modèle de K-BKZ.....	39
III.2.6.3 Choix du modèle de comportement .....	41
III.3. Modèle visco-hyperélastique.....	42
III.3.1 Identification paramétrique pour les modèles combinés.....	43
a. Modèle combiné : Mooney-Rivlin+ N unités de Maxwell .....	43
b. Modèle combiné : Mooney-Rivlin+ K-BKZ.....	44
III.4. Simulation de l'essai de compression .....	45
III.4.1 Identification à partir du logiciel de simulation .....	45
a. Identification des paramètres Mooney-Rivlin pour les 3 vitesses de déformation	45
45	
III.4.2 Présentation de la géométrie .....	51
a. Le maillage.....	51
b. Chargement et conditions aux limites .....	52
III.4.3 Résultats de la simulation numérique.....	53
III.4.4 Discussion des résultats.....	58
III.4.5 Comparaison des valeurs Expérimentales et numériques .....	59
III.5 Conclusion.....	61
<b>Conclusion Générale .....</b>	<b>62</b>
<b>Références Bibliographiques.....</b>	<b>63</b>
<b>ANNEXE.....</b>	<b>64</b>
Annexe A : [Valeurs des contraintes expérimentales et déformation regroupé à partir de l'essai de compression uni-axial pour de différentes vitesses de déformation.] .....	64
Annexe B : [contraintes de l'ingénieur $\pi$ calculé pour de différentes vitesses de déformations]	
.....	65
Annexe C : [Contraintes Mooney-Rivlin( $\pi_{MR}$ ) pour les différents essais de compression uni-axiale (quasi-Statiques)] .....	66
Annexe D : [Contraintes nominales $\pi_{YEOH}$ du modèle YEOH calculée pour les différents essais de compression uni-axiale (quasi-Statiques)] .....	67

Annexe E : [Valeurs des contraintes et déformation regroupé à partir de l'essai numérique pour de différentes vitesses de déformation.]..... 68

## Liste des figures

Figure I-1: L'influence de la vitesse de compression sur la réponse d'élastomère.....	4
Figure I-2: Grandes déformation élastique des élastomères .....	6
Figure II-1: Système de configuration.....	9
Figure II-2: Vecteur contrainte dans la configuration initiale et déformée .....	13
Figure II-3: Domaine d'application de chaque domaine.....	15
Figure II-4: Modèle viscoélastique.....	18
Figure II-5: schéma de principe du modèle parallèle de l'unité N maxwell .....	20
Figure III-1: Utilisation des moyens d'essais en fonction de la vitesse de déformation souhaitée.....	24
Figure III-2: Schéma du dispositif des barres d'Hapkinson.....	25
Figure III-3: Matériau utilisé (éprouvette ISO 7743).....	26
Figure III-4: Courbe expérimentale contraintes-déformation de l'essai de compression uni- axiale(Quasi-Statique) Pour les trois vitesses de déformation .....	27
Figure III-5: Identification paramétrique MR de l'essai quasi-statique ( $\lambda = 0.001s - 1$ ) .....	30
Figure III-6: Courbes des contraintes déformation du modèle Mooney-Rivlin comparé avec la courbe expérimentale contraintes-déformation pour les trois essais quasi-statiques .....	31
Figure III-7: Identification paramétrique Yeoh de l'essai quasi-statique ( $\lambda = 0.001 s - 1$ ) .	34
Figure III-8: Courbes des contraintes déformation du modèle YEOH comparé avec la courbe expérimentale contraintes déformation pour les trois essais quasi-statiques .....	35
Figure III-9: Courbe du modèle constitué de N unité de Maxwell en fonction déformations pour les trois essais dynamique en traction uni-axial.....	38
Figure III-10: Courbe des contraintes-déformations du modèle constitué de N unité de Maxwell pour les essais dynamique en compression.....	39
Figure III-11: Courbe des contraintes-déformations du modèle de K-BKZ pour les essais dynamique en traction uni-axial.....	40

---

Figure III-12: Courbe des contraintes-déformations du modèle de K-BKZ pour les essais dynamique en compression .....	41
Figure III-13.a : Courbe des contraintes-déformations du modèle combiné visco-hyperélastique (Mooney-Rivlin + N unités de Maxwell).....	43
Figure III-13.b : Courbe des contraintes-déformations du modèle combiné visco hyperélastique (Mooney-Rivlin + K-BKZ) .....	44
Figure III-15: ajustement de la courbe contraintes-déformations .....	46
Figure III-16: courbe chargements des contraintes-déformations.....	47
Figure III-17: ajustement de la courbe contraintes-déformations .....	48
Figure III-18: courbe chargements des contraintes-déformations.....	49
Figure III-19: ajustement de la courbe contraintes-déformations .....	50
Figure III-20: Modèle étudié .....	51
Figure III-21: Modèle maillé.....	52
Figure III-22: Chargements et conditions aux limites.....	53
Figure III-23: Distribution des contraintes pour $\lambda = 0.1 s - 1$ .....	54
Figure III-24: déplacement total de l'éprouvette pour $\lambda = 0.1 s - 1$ .....	54
Figure III-25: déformation élastique équivalente de l'éprouvette pour $\lambda = 0.1 s - 1$ .....	55
Figure III-26: Distribution des contraintes pour $\lambda=0.01 s-1$ .....	55
Figure III-27: déplacement total de l'éprouvette pour $\lambda = 0.01 s - 1$ .....	56
Figure III-28: déformation élastique équivalente de l'éprouvette pour $\lambda = 0.01 s - 1$ .....	56
Figure III-29: Distribution des contraintes pour $\lambda = 0.001 s - 1$ .....	57
Figure III-30: déplacement total de l'éprouvette pour $\lambda = 0.001 s - 1$ .....	57
Figure III-31: déformation élastique équivalente de l'éprouvette pour $\lambda = 0.001 s - 1$ .....	58
Figure III-32: Comparaison de la courbe des contraintes expérimentales avec les contraintes calculées numériquement pour $\lambda = 0.1 s - 1$ .....	59
Figure III-33: Comparaison de la courbe des contraintes expérimentales avec les contraintes calculées numériquement pour $\lambda = 0.01 s - 1$ .....	60
Figure III-34: Comparaison de la courbe des contraintes expérimentales avec les contraintes calculées numériquement pour $\lambda = 0.001 s - 1$ .....	61

# Liste des tableaux

Tableau 1: Identification du modèle Mooney-Rivlin en traction uni-axiale à l'aide de la méthode de Monte Carlo.....	30
Tableau 2: Identification du modèle de Yeoh en traction uni-axiale à l'aide de la méthode de Monte Carlo.....	33
Tableau 3.a: Valeurs des paramètres choisis du modèle.....	38
Tableau 3.b: Valeurs des paramètres choisis du modèle.....	40
Tableau 4.a : Identification paramétrique du modèle visco-hyperélastique (Mooney-Rivlin +N unités de Maxwell).....	43
Tableau 4.b : Identification paramétrique du modèle visco-hyperélastique (Mooney-Rivlin + K-BKZ).....	44
Tableau 5 : Erreur relative du calcul des contraintes maximales.....	59

# NOMENCLATURE

Symboles	Définition	Unité (SI)
$C_0$	: Configuration initial	-
$C_t$	: Configuration actuelle	-
$\omega$	: Volume occupé par le solide dans la configuration actuelle	-
$\vec{u}$	: Vecteur déplacement	-
$\vec{dX}$	: Vecteur élémentaire dans la configuration initiale	-
$\vec{dx}$	: Transformation de $\vec{dX}$ dans la configuration actuelle	-
$dv$	: Élément de volume	-
$F$	: Opérateur gradient de la transformation	-
$F^{-T}$	: Transposé opérateur gradient de la transformation	-
$B$	: Tenseur des déformations de Green Cauchy droit	-
$E$	: Tenseur des déformations de Green-Lagrange	-
$\epsilon_{ing}$	: Déformation de l'ingénieur	-
$I$	: Tenseur identité	-
$\sigma$	: Tenseur des contraintes de Cauchy	MPa
$\pi$	: Premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff	MPa
$S$	: Deuxième tenseur des contraintes Piola-Kirchoff	MPa
$I_1$	: Premier invariant du tenseur de déformation de Green-Lagrange droit	-
$I_2$	: Deuxième invariant du tenseur de déformation de Green-Lagrange droit	-
$I_3$	: Troisième invariant du tenseur de déformation de Green-Lagrange droit	-
$p^h$	: Pression hydrostatique	MPa
$W$	: Energie de déformation	J
$\dot{E}$	: tenseur vitesse de déformation	-
$m$	: Fonction de relaxation	-
$\phi$	: fonction liées à la déformation et à la vitesse de déformation	-
$\pi$	: Engineering stress	MPa

$\lambda$	: L'élongation principale	
$\dot{\lambda}$	: vitesse de déformation	-
$\lambda_1$	: Elongation dans le plan (XX)	
$\lambda_2$	: Elongation dans le plan (YY)	
$\lambda_3$	: Elongation dans le plan (ZZ)	

### Indices

$i, j$  :  $i^{\text{ème}}$  et  $j^{\text{ème}}$  composantes.

### Abréviations

MR : Mooney-Rivlin  
EF : Eléments finis

# **Introduction Générale**

# Introduction Générale

Les élastomères sont des matériaux très répondeu dans l'industrie. La capacité à se déformer fortement sans se rompre, leur vaut d'être très largement utilisés dans l'industrie. En effet ces matériaux supportent de grandes déformations réversibles, et sont dits hyper-élastiques.

L'objectif de ce modeste travail consiste à choisir un modèle de comportement qui décrit le matériau étudié dans le cadre des sollicitations quasi-statique et dynamique. Le choix d'un modèle théorique nécessite une base de données expérimentale, le mémoire est composé de trois chapitres :

Le premier chapitre est consacré à des généralités sur les élastomères (définition, propriétés mécaniques et propriétés dissipatives).

Le second chapitre donne un bref rappel de la mécanique des milieux continus en grandes déformations, ainsi qu'une présentation des modèles de comportement hyper-élastique et viscoélastique les plus utilisés.

Le troisième chapitre s'articule autour de trois points principaux :

- Dans la première partie, nous allons déterminer analytiquement les composantes du tenseur des contraintes des modèles hyper-élastiques et viscoélastiques et nous allons montrer que modèles hyper-élastiques conviennent pour décrire les sollicitations quasi-statiques tandis que les et les modèles viscoélastiques sont utilisés pour décrire le comportement dynamique.
- la deuxième partie, s'inscrit dans le cadre de l'identification des paramètres des lois de comportement pour la partie viscoélastique et hyper-élastique.
- La partie trois, est consacré à une simulation numérique de la distribution des contraintes dans l'éprouvette dans le cas quasi-statique. Une comparaison entre les résultats analytiques et numériques du modèle sera développée.

Enfin, nous terminerons ce travail par une conclusion générale.

**Chapitre I**

**Généralités sur les**

**Elastomères**

# Généralité sur les élastomères

## I.1. Introduction

On présente dans ce chapitre une étude bibliographique qui englobe les notions nécessaires à la compréhension du comportement des matériaux élastomères. Ce comportement est défini par le mécanisme de déformation des matériaux hyperé-lastique. Par conséquent, le comportement mécanique des élastomères et sa modélisation sera nécessaire à exposer. Pour synthétiser la relation microstructure/comportement mécanique, on présentera tout d'abord la microstructure des élastomères.

## I.2. Généralités sur les Elastomères [1]

Un élastomère est un polymère constitué de chaînes longues et flexibles qui possède l'impressionnante faculté de pouvoir supporter de très grandes déformations. Il se caractérise aussi par la quasi-recouvrance de ses propriétés initiales quand la sollicitation cesse. La recouvrance est rendue possible par la vulcanisation qui est un processus de création de liaisons chimiques entre les chaînes macromoléculaires, celles-ci formant alors un réseau tridimensionnel stable. Toutefois, l'amélioration des performances d'un élastomère requiert, dans la plupart des applications, l'incorporation de charges renforçantes. Leur présence a pour but, principalement, d'accroître les propriétés mécaniques de l'élastomère (module élastique, résistance à la déchirure, et propriétés à la rupture), et d'augmenter sa capacité à dissiper en partie l'énergie fournie. L'influence de la charge est observée dans tous les domaines de déformations. Aux petites déformations, la quasi-linéarité du module élastique du polymère disparaît avec l'introduction de la charge. Aux grandes déformations, la consolidation augmente considérablement.

### I.2.1. Caractérisation des Elastomères [1]

Les élastomères ont des propriétés mécaniques d'élasticité, de plus, les nombreuses formulations possibles font élargir la gamme de ces matériaux. Dans ces formulations interviennent des charges qui, pour leur majorité, améliorent considérablement les propriétés d'usages et plus particulièrement les propriétés mécaniques (rigidité, résistance à la rupture, dissipation d'énergie, endommagement par effet Mullins et effet Payne). Ce qui paraît que l'amélioration de ces caractéristiques est en liaison directe avec la modification dans la microstructure du matériau.

### I.3.1. Structure [2]

Le choix de la matrice élastomérique, appelée gomme, impose au final une grande part des propriétés de matériau. Les élastomères font partie de la famille des polymères qui se divisent en trois types : naturel, semi-synthétique et synthétique.

Les élastomères « naturels » (NR : Naturel Rubber ou latex) sont synthétisés sous l'appellation de polyisoprène afin d'améliorer leur comportements et notamment leur Comportement thermomécanique.

Il existe un grand nombre d'élastomères synthétiques « compound » :

Les élastomères de type SBR « Styrene Butadiene Rubber » : un copolymère statistique de Styène et de Butadiène.

Les élastomères de type NBR « Nitrale Butadiene Rubber » : ils sont composés de butadiène et d'acrylonitrile (ACN de 50-80% en poids). Le taux d'ACN conditionne les propriétés des élastomères.

Le caoutchouc naturel est formé de très longues chaînes macromoléculaires composées d'un nombre de monomères compris entre 3000 et 5000. Dans certains polymères, d'autres atomes peuvent être présents (chlore, azote, oxygène, fluor) et conditionnent la forte cohésion atomique.

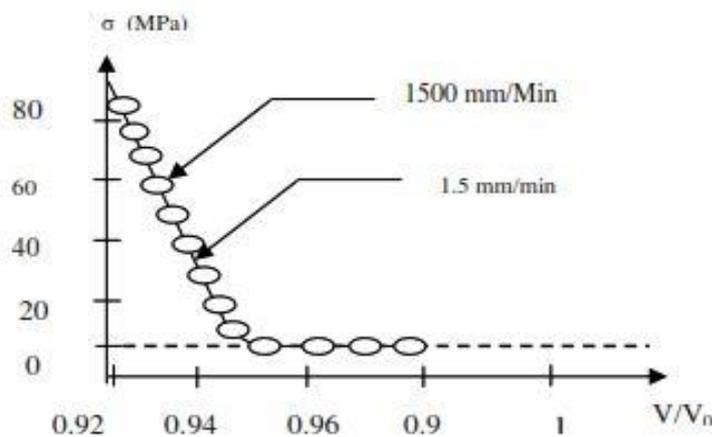
### I.3. Propriétés mécaniques

#### I.3.1 Incompressibilité [3]

L'incompressibilité représente l'un des caractéristiques connues du comportement des élastomères, elle est illustrée par une déformation sans variation de volume lors des sollicitations ne faisant pas intervenir les efforts hydrostatiques importants.

En effet, cette caractéristique est considérée comme idéale, car les essais expérimentaux prouvent que les élastomères sont compressibles. La figure ci-dessous présente l'allure obtenue lors d'un essai de compression hydrostatique.

Cette essai nous montre que la vitesse de compression n'a aucun effet sur la réponse d'élastomère, puisque les deux courbes sans étroitement coïncidées.



**Figure I-1:** L'influence de la vitesse de compression sur la réponse d'élastomère[3].

La courbe se compose de deux parties, une première partie horizontale non significative qui correspond à la mise en place de l'échantillon. Une deuxième partie droite qui nous permet d'établir une relation entre la variation de volume et l'effort de compression hydrostatique exercé.

### I.3.2. Viscoélasticité [4]

Les matériaux présentant un comportement amortissant sont définis comme matériaux viscoélastiques (VE). Vu le nombre important des domaines d'applications de ce type de matériaux.

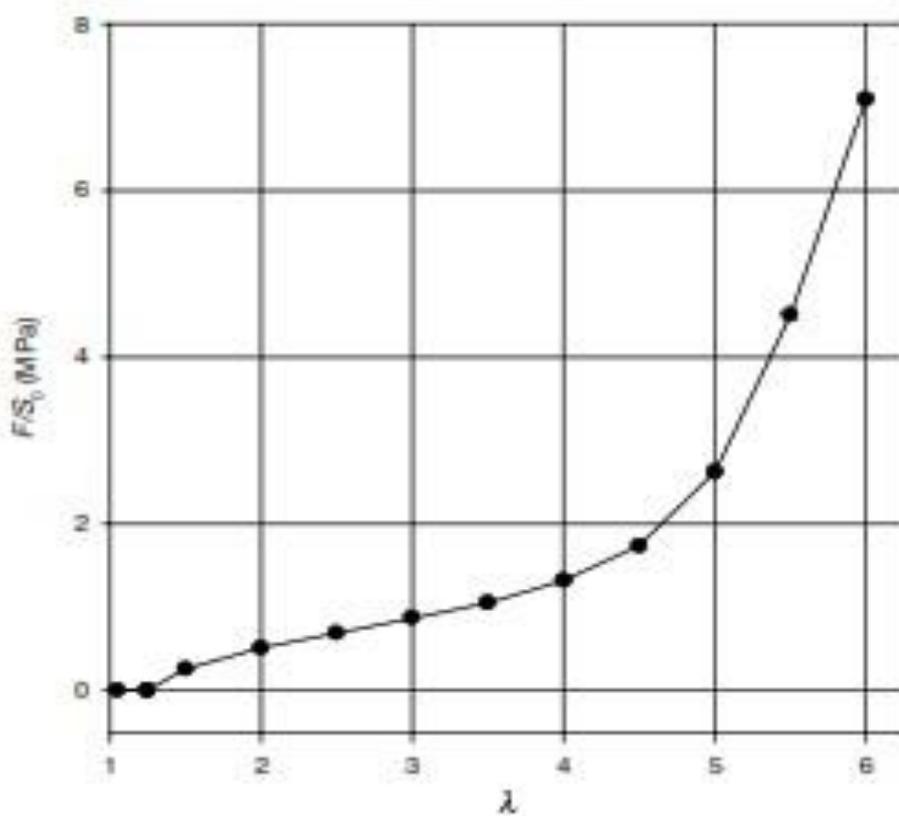
Un matériau est dit viscoélastique lorsqu'il présente un comportement mécanique particulier intermédiaire entre le comportement d'un solide idéal dit "Hookéen" et celui d'un liquide idéal dit "Newtonien". La réponse VE à une déformation est alors un compromis entre celle d'un solide élastique (contrainte proportionnelle à la déformation) et d'un fluide visqueux (contrainte proportionnelle à la vitesse de déformation). La caractéristique principale de ce type de matériau est le retard de la réponse visqueuse par rapport à la réponse élastique, observée aussi bien dans la phase de déformation que dans la phase de relaxation. Ce retard est dû à la dépendance des propriétés mécaniques d'un matériau viscoélastique à l'histoire de sollicitation. Pour mettre en évidence le comportement viscoélastique de ce type de matériau, on dispose de quatre essais fondamentaux : essai de relaxation, de fluage, de recouvrance et d'effacement.

### I.3.3. Hyperélasticité [5]

Une des propriétés les plus connues des élastomères est leur capacité à supporter de grandes déformations élastiques. C'est une des propriétés qui justifie l'utilisation de ces matériaux dans l'industrie. Celle-ci est illustrée par la figure I.2 qui présente la courbe de charge du deuxième cycle à 500%.

Cette propriété est une conséquence directe de la structure microscopique des matériaux. La réponse élastique peut être grossièrement expliquée par trois phénomènes qui prennent place lors de l'extension. Tout d'abord, sous un faible allongement, les chaînes commencent à se déplier (de 0 à 50%). Une barrière énergétique est franchie, elle permet de rompre les quelques liaisons secondaires qui existent entre les chaînes. Ensuite, les chaînes se déplient complètement et s'alignent dans la direction de sollicitation (de 50 à 350%). Cet alignement a lieu sous faible contrainte même si les déformations sont importantes. Finalement, une fois les chaînes alignées et tendues, la contrainte augmente très sensiblement alors que la déformation approche une valeur limite (de 350 à 500%). Dans cette zone de raidissement (strain-hardening), la pente de la courbe correspond à la raideur des chaînes tendues. Il convient de noter que ce raidissement est plus ou moins prononcé suivant que l'élastomère est ou non cristallisable sous contrainte. En effet, la cristallisation sous contrainte se traduit par une réorganisation du réseau

lorsque les chaînes sont étirées : le réseau a tendance à s'ordonner jusqu'à induire un changement local de phase du matériau, passant de la phase amorphe classique à une phase cristallisée. Ce changement de phase (réversible) renforce significativement le matériau lors du raidissement et s'efface lorsque la sollicitation mécanique n'est plus appliquée. Remarquons que le matériau considère ici cristallise sous contrainte.



**Figure I-2:** Grandes déformation élastique des élastomères

### I.3.4 Effet Mullins [6] [7]

L'effet Mullin consiste en un adoucissement de la loi de comportement après une première sollicitation. L'effet Mullin se traduit expérimentalement sur une courbe de chargement cyclique (figure I.3) par :

- Une diminution successive de la contrainte lors des premiers cycles
- Apparition de phénomène hystérésis dans un cycle charge/décharge
- Apparition d'une déformation résiduelle

Mullins et Tobin proposent une explication de ce phénomène en considérant le matériau comme un milieu hétérogène biphasée constitué d'une phase molle (la matrice) et de phases dures (les charges). L'accommodation de la déformation est alors principalement assurée par la phase

molle. La phase dure peut cependant être rompue sous l'action de la contrainte. On assiste alors à la transformation d'une phase dure en phase endommagée, plus souple, expliquant ainsi l'adoucissement observé. Les travaux de modalisation de l'effet Mullins proposent des mécanismes microphysiques de déformation des chaînes.

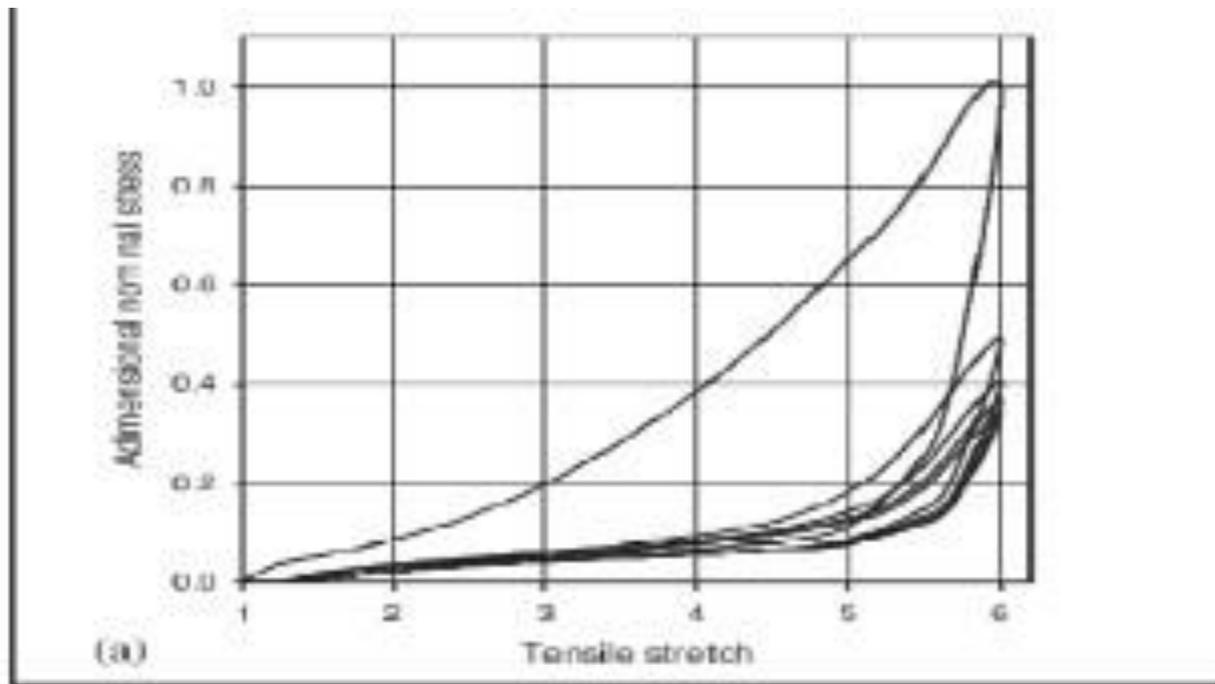


Figure I-3 : Courbe de chargements cycliques [8]

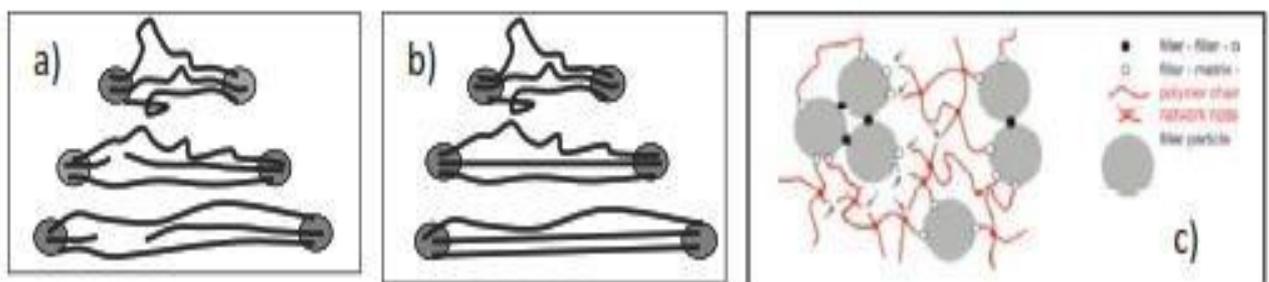


Figure I-4 : Mécanisme de déformation selon a)- BUECHE b)- DANNENBERG  
c)- KALISKE

### I.3.5 Effet Payne [9]

L'évolution Payne est définie par une évolution non linéaire du module d'élasticité en fonction de déformation (Figure I.4). Aux faibles déformations, on observe un plateau (Module initial  $G_0$ ) correspondant à un plateau caoutchoutique. La valeur du module d'élasticité diminue avec la déformation imposée et se stabilise à une valeur de saturation  $G_\infty$ .

La chute du module élastique est associée à un maximum du module de perte traduisant une dissipation d'énergie, d'autant plus élevée que la chute de  $G$  est importante.

Le phénomène est sensible à différents paramètres : taux de charge, surface spécifique, structure et dispersion.

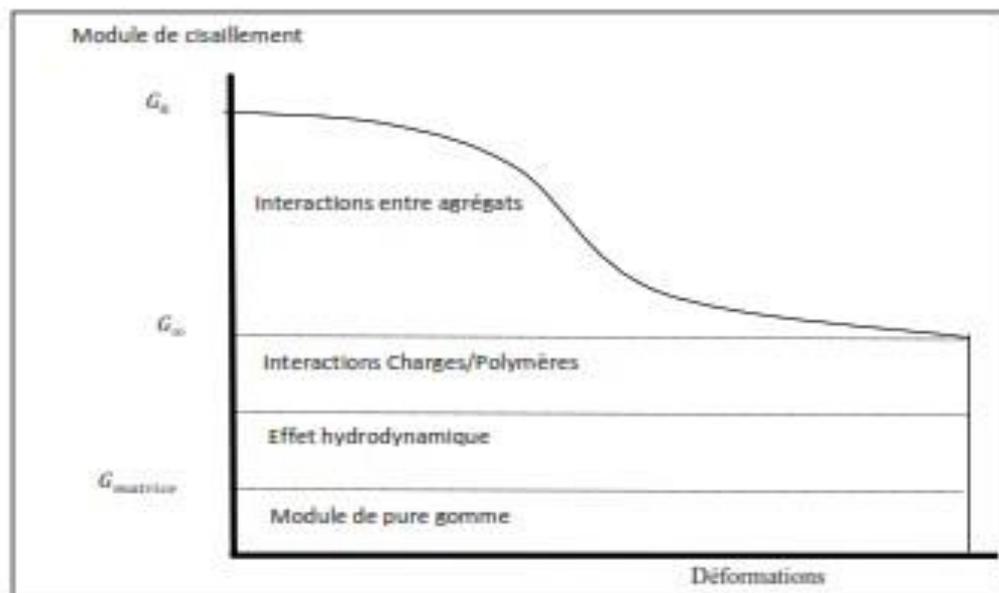


Figure I-5 : diagramme Effet Payne des charges sur le module d'élasticité

## I.4. Conclusion

Ce chapitre, d'une manière brève nous a permis d'acquérir les notions générales sur les matériaux élastomères. Leurs caractéristiques multiples et leurs structures chimiques et physique et leurs principales propriétés mécaniques.

**Chapitre II**

**Modélisation du**

**comportement mécanique**

# Modélisation du comportement mécanique

## II.1. Introduction

Le but de ce chapitre est de présenter, quelques modèles théoriques proposés dans la littérature pour décrire le comportement viscoélastique et hyperélastique des élastomères. Nous rappellerons de manière brève les principes fondamentaux de la mécanique des milieux continus.

## II.2. Rappels de mécanique des milieux continus

### II.2.1 Description du mouvement [10]

Soit un solide (S) évoluant dans un référentiel R. Il occupe le domaine  $\Omega$  dans la configuration ( $C_0$ ) que nous considérons comme la configuration initiale. Il occupera à l'instant  $t$  le domaine ( $\omega$ ) dans la configuration ( $C_t$ ) (Figure II.1).

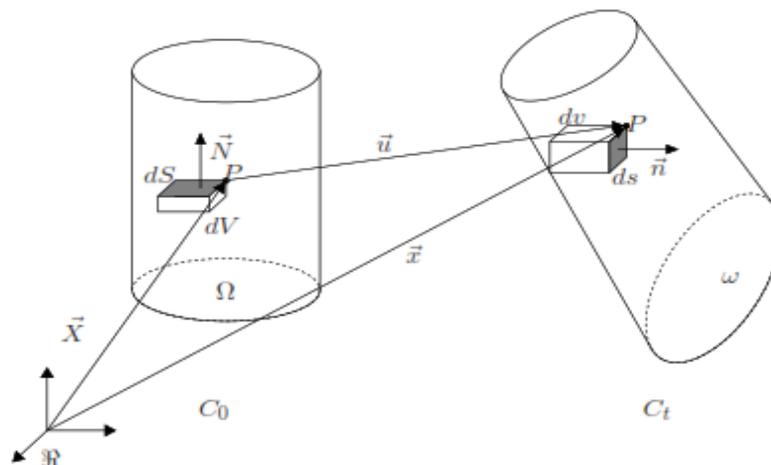


Figure II-1: Système de configuration

Le mouvement du milieu continu est alors défini par la donnée de la fonction  $\phi$ .

$$\phi : \begin{cases} C_0 \rightarrow & C_t \\ \vec{X} \mapsto & \vec{x} = \phi(\vec{X}, t) \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

C'est cette équation(II.1), qui définit la transformation faisant passer la configuration de référence ( $C_0$ ) à la configuration ( $C_t$ ).

En introduisant  $\vec{u}$ , le vecteur déplacement, l'équation (II.1) peut se mettre sous une forme équivalente.

$$\vec{x} = \vec{X} + \vec{u}(\vec{X}, t) \quad (\text{II.2})$$

En vue de définir la transformation locale au voisinage de la particule P, on introduit classiquement l'application linéaire tangente  $\mathbf{F}$  associée à la fonction  $\phi$ . Considérant un vecteur  $\vec{dX}$  dans la configuration initiale, son image  $\vec{dx}$  dans la configuration actuelle s'obtient par la relation :

$$\vec{dx} = \mathbf{F} \cdot \vec{dX} \quad (\text{II.3})$$

Et de manière indicielle, on peut écrire :

$$\mathbf{F}_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \delta_{ij} \quad (\text{II.4})$$

$\mathbf{F}$  (Appelé aussi gradient de la transformation) représente la cinématique de mouvement de la configuration initiale  $C_0$  vers la configuration actuelle  $C_t$ . Au niveau local, les lois de transformation, liant un élément de volume  $dv$ , ou de surface  $\vec{N} ds$  de  $C_0$  a leurs images respectives  $dv$  et  $\vec{n} ds$  dans  $C_t$ , se déclinent comme suit :

Pour un élément de volume :

$$dv = J dV \quad (\text{II.5})$$

Ou

$$J = \det(\mathbf{F}) \quad (\text{II.6})$$

Pour un élément de surface :

$$\vec{n} ds = J \mathbf{F}^{-T} \cdot \vec{N} dS \quad (\text{II.7})$$

La condition d'incompressibilité, c'est-à-dire  $J=1$  est couramment utilisé dans la modélisation des élastomères.

## II.2.2 Description des déformations et des contraintes

### II.2.2.1 Tenseur des déformations [10]

Ces tenseurs permettent de caractériser complètement la variation du solide entre la configuration initiale  $C_0$  et la configuration déformée  $C_t$ , (les variations de longueurs, d'angles et de dilatations volumiques). Selon la configuration privilégiée, plusieurs mesures des déformations sont possibles.

#### a. Tenseur des déformations dans la configuration initiale ( $C_0$ ) [10]

Si on considère deux vecteurs  $d\vec{X}_1$  et  $d\vec{X}_2$  dans la configuration initiale qui devient respectivement  $d\vec{x}_1$  et  $d\vec{x}_2$  après déformation, nous pouvons écrire :

$$d\vec{x}_1 \cdot d\vec{x}_2 = (d\vec{X}_1 \mathbf{F})(\mathbf{F} \cdot d\vec{X}_2) = (d\vec{X}_1 \cdot \mathbf{F}^T)(\mathbf{F} \cdot d\vec{X}_2) \quad (\text{III.8})$$

Le terme T placé en exposant désigne la transposition.

On introduit alors le tenseur des déformations symétrique de **Cauchy-Green droit B**, appelé également tenseur des dilatations défini par :

$$\mathbf{B} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} \quad (\text{II.9})$$

La relation (II.8) devient alors :

$$d\vec{x}_1 \cdot d\vec{x}_2 = d\vec{X}_1 \cdot \mathbf{B} \cdot d\vec{X}_2 \quad (\text{II.10})$$

On peut également définir le tenseur des déformations de **Green-Lagrange E** dans la configuration matérielle (non déformée) par :

$$d\vec{x}_1 \cdot d\vec{x}_1 - d\vec{X}_1 \cdot d\vec{X}_1 = d\vec{X}_1 \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \cdot d\vec{X}_1 - d\vec{X}_1 \cdot d\vec{X}_1 = 2(d\vec{X}_1 \cdot \mathbf{E} \cdot d\vec{X}_1) \quad (\text{II.11})$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I})$$

Avec :

$\mathbf{I}$  Étant le tenseur identité.

### b. Tenseur des déformations dans la configuration actuelle( $\mathbf{C}_t$ ) [10]

Inversement à l'analyse faite précédemment, il est possible d'exprimer la déformation dans le repère actuel en écrivant :

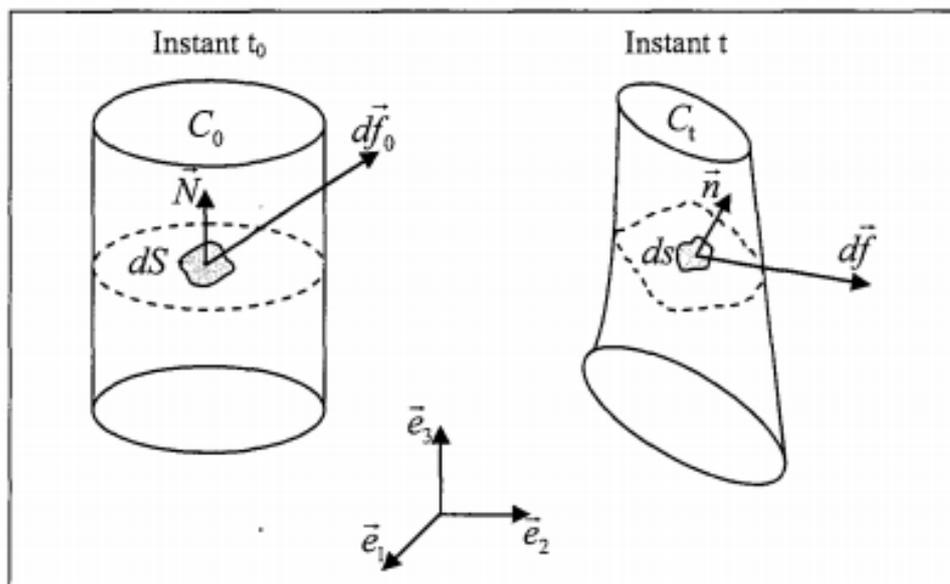
$$d\vec{X}_1 \cdot d\vec{X}_2 = (\mathbf{F}^{-1} \cdot d\vec{x}_1)(\mathbf{F}^{-1} \cdot d\vec{x}_2) \quad (\text{II.12})$$

$$d\vec{X}_1 \cdot d\vec{X}_2 = d\vec{x}_1((\mathbf{F}^{-1})^T \cdot \mathbf{F}^{-1}) \cdot d\vec{x}_2 = d\vec{x}_1 \cdot (\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T)^{-1} \cdot d\vec{x}_2 = d\vec{x}_1 \cdot \mathbf{B}^{-1} \cdot d\vec{x}_2$$

Où  $\mathbf{B} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1}$  est le tenseur des déformations de Cauchy-Green droit ou encore le tenseur de dilatation en configuration eulérienne.

### II.2.3 Tenseur des contraintes [10]

Les contraintes sont caractérisées à partir des efforts intérieurs à travers un élément de surface relatif à une configuration donnée (Figure II-2). Comme pour le cas des déformations, on peut utiliser soit la description lagrangienne ou bien eulérienne ou même une formulation mixte. Rappelons que les trois configurations sont identiques dans le cas des petites déformations.



**Figure II-2:** Vecteur contrainte dans la configuration initiale et déformée.

**a. Tenseur des contraintes de Cauchy  $\sigma$  [10]**

De la même manière qu'en petites déformations, le vecteur contrainte  $\vec{t} = \frac{d\vec{f}}{ds}$  est défini dans la configuration actuelle comme caractérisant les efforts intérieurs de cohésion  $d\vec{f}$  exercés sur une partie du solide à travers un élément de surface  $ds$  de normale extérieure  $\vec{n}$ . On définit ainsi un tenseur des contraintes symétrique et eulérien appelé tenseur de Cauchy ou bien tenseur des contraintes vraies tel que :

$$d\vec{f} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n} \cdot ds \quad (\text{II.13})$$

**b. Premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff  $\boldsymbol{\pi}$  [10]**

Si on choisit de décrire l'élément de surface  $ds$  par rapport à la configuration lagrangienne, on peut définir un nouveau tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\pi}$  tel que :

$$d\vec{f} = \boldsymbol{\pi} \cdot \vec{N} \cdot dS \quad (\text{II.14})$$

Où  $\vec{N}$  est la normale unitaire à l'élément de surface  $dS$  dans la configuration initiale.

Le tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\pi}$  est appelé premier tenseur de Piola-Kirchoff ou tenseur de Boussinesq ou même tenseur des contraintes nominales. Comme le tenseur gradient de déformation  $\boldsymbol{F}$ ,  $\boldsymbol{\pi}$  n'est ni lagrangien ni eulérien. En outre, contrairement au tenseur de Cauchy, ce tenseur n'est pas symétrique.

### c. Second tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff $\boldsymbol{S}$

Il est possible de définir un tenseur purement lagrangien par simple transposition de la surface  $ds$  et des efforts de cohésion  $d\vec{f}$  dans la configuration initiale. On obtient ainsi le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff  $\boldsymbol{S}$  ou tenseur des contraintes matérielles.

En effet, il est également intéressant de signaler que le tenseur  $\boldsymbol{S}$  est symétrique mais n'a aucun sens

$$d\vec{f}_0 = \boldsymbol{F}^{-1} \cdot d\vec{f} = \boldsymbol{S} \cdot \vec{N} \cdot dS_0 \quad (\text{II.15})$$

Physique. Néanmoins, son intérêt réside dans le fait qu'il soit la variable duale et conjuguée du tenseur des déformations de Green-Lagrange  $\boldsymbol{E}$ . Quant aux tenseurs  $\boldsymbol{\pi}$  et  $\boldsymbol{\sigma}$ , ils caractérisent directement les efforts appliqués et interviennent donc dans l'écriture des conditions aux limites.

## II.3 Modélisation du comportement [11]

Les élastomères étant des matériaux présentant de multiples non linéarités, la modélisation de leur comportement a fait l'objet de beaucoup d'études et est un problème toujours d'actualité. De nombreuses théories ont été développées pour permettre de modéliser ce comportement. Ainsi, les modèles hyper-élastiques conviennent parfaitement pour des sollicitations quasi statiques, mais aussi à de très grandes vitesses de déformation, afin de reproduire le comportement en grandes déformations de ces matériaux. La dépendance à la vitesse de déformation dans le cadre des petites déformations est elle aussi bien maîtrisée grâce à l'utilisation de modèles viscoélastiques linéaires. Cependant, dans le cadre de notre étude, il nous faut modéliser le comportement en grandes déformations et la dépendance à la vitesse de

déformation, ce qui est beaucoup plus compliqué. Les modèles utilisés doivent permettre de prendre en compte la dissipation d'énergie.

Pour cela nous utiliserons des modèles viscoélastiques en grandes déformations. La Figure II-3 reprend les différents cas de chargement possibles et les modèles associés.

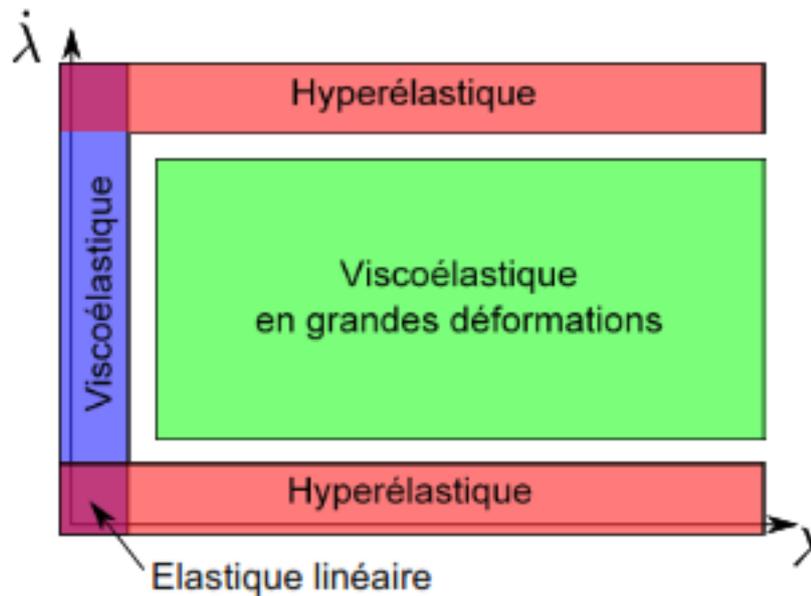


Figure II-3: Domaine d'application de chaque domaine

### II.3.1. comportement hyper-élastique [12]

Le comportement mécanique de l'élastomère dans des conditions quasi-statiques peut être décrit par des modèles hyper-élastiques. L'Hyper-élasticité suppose l'existence d'une énergie de déformation  $W$  permettant de lier l'état de déformation à l'état de contraintes. Le principe d'objectivité permet d'exprimer cette énergie en fonction du tenseur de Cauchy Green droit :

$$\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T \quad (\text{II.16})$$

Où  $\mathbf{F}$  est le gradient de transformation qui peut être exprimé par les élongations principales.

Selon l'analyse de Rivlin, la relation entre la fonction énergie de déformation et le tenseur des contraintes est :

$$\boldsymbol{\sigma}^{hyp} = -P^h \mathbf{I} + 2 \left( \frac{\partial W}{\partial I_1} \cdot \mathbf{B} - \frac{\partial W}{\partial I_2} \cdot \mathbf{B}^{-1} \right) \quad (\text{II.19})$$

Où  $P^h$  est la pression hydrostatique qui permet d'assurer l'incompressibilité de la réponse mécanique, et  $\mathbf{I}$  le tenseur identité.

La difficulté majeure reste donc d'exprimer l'expression de l'énergie libre de déformation  $W$ .

### II.3.1.1 Modèles hyper-élastiques

La fonction d'énergie de déformation pour les matériaux est exprimée comme une forme des invariants de déformation ou des étirements principaux.

$$W = W(I_1, I_2, I_3) \text{ ou } W = W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \quad (\text{II.20})$$

Les trois Invariants de déformation de  $\mathbf{B}$  s'expriment :

$$\begin{aligned} I_1 &= \text{tr}(\mathbf{B}) \\ I_2 &= \frac{1}{2} [I_1^2 - \text{tr}(\mathbf{B}^2)] \\ I_3 &= \det(\mathbf{B}) \end{aligned}$$

#### a. Modèle de Mooney-Rivlin [13]

La loi de comportement du modèle Mooney-Rivlin est exprimée pour un milieu incompressible par :

$$W^{MR} = C_{10} (I_1 - 3) + C_{01} (I_2 - 3) \quad (\text{II.21})$$

Où  $I_1$  et  $I_2$  sont les invariants du tenseur dilatation de Cauchy Green droit et  $C_{10}$ ,  $C_{01}$  sont les constantes matérielles du modèle.

**b. Modèle de Yeoh [13]**

Lorsque la contrainte est relativement grande, l'influence de  $I_2$  sur l'énergie de déformation est plus faible que celle de  $I_1$ . Le modèle de Yeoh, qui utilise seulement  $I_1$  et il est indépendant de  $I_2$ , peut mieux décrire les propriétés mécaniques des matériaux hyperélastiques pour des déformations relativement importantes. La fonction énergie de déformation  $W$  du Modèle YEOH est :

$$W^{Yeoh} = C_{10}(I_1 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{30}(I_1 - 3)^3 \quad (\text{II.22})$$

où  $C_{10}$ ,  $C_{20}$  et  $C_{30}$  sont les paramètres de matériaux du modèle.

**c. Modèle d'Ogden (1972) [13]**

L'énergie de déformation  $\omega$  s'exprime en termes de déformation généralisées et introduit une forme mathématique en série de puissance réelle.

$$W = \sum_{n=1}^N \frac{\mu_n}{\alpha_n} (\lambda_1^{\alpha_n} + \lambda_2^{\alpha_n} + \lambda_3^{\alpha_n}) - 3 \quad (\text{II.23})$$

Les  $\mu_n$  désignent des coefficients de cisaillement et les  $\alpha_n$  sont des constantes sans dimension. Par linéarisation, on obtient la relation suivante

$$\sum_{n=1}^N \mu_n \alpha_n = 2\mu$$

**d. Modèle néo-Hookéen (1943) [14]**

C'est le modèle hyperélastique le plus simple à un seul terme, mais sa justification est plus moléculaire que phénoménologique. En utilisant les lois de la mécanique statique, peut être écrit sous la forme :

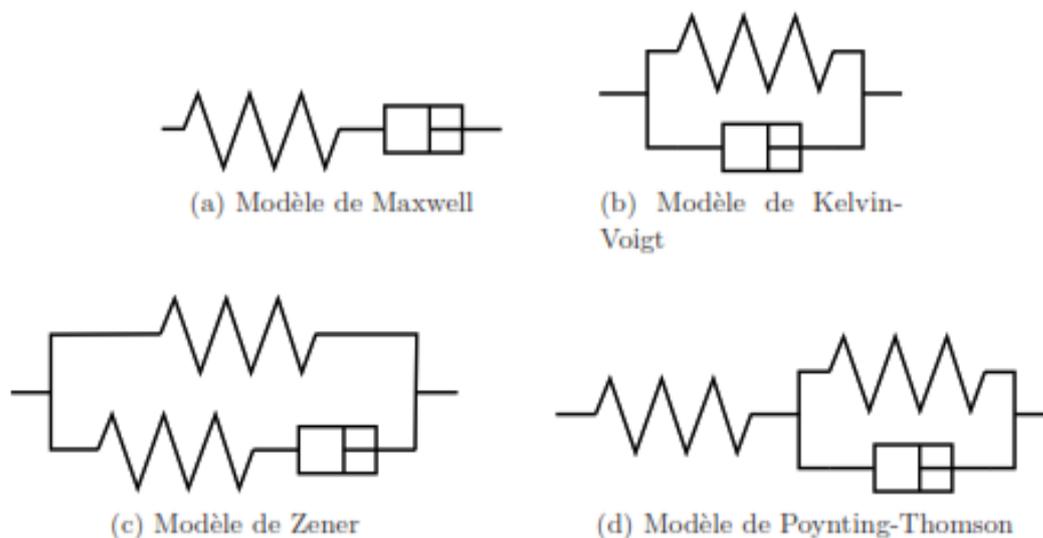
$$W = \frac{1}{2} nkT (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) \quad (\text{II.24})$$

## II.3.2. Comportement Viscoélastique

### II.3.2.1 Modèles rhéologiques [12]

Les modèles qui sont utilisés reposent sur des schémas rhéologiques composés de ressorts (solide élastique) et d'amortisseurs (fluide visqueux), pour décrire le comportement uni-axial. Ainsi, on utilise souvent deux modèles de base : le modèle de Maxwell et le modèle de Kelvin-Voigt dont les schémas rhéologiques sont représentés sur la figure II.4.a et II.4.b. Cependant ces deux modèles ne permettent pas de modéliser le comportement global d'un matériau viscoélastique. En effet, le premier ne permet pas de prendre en compte le phénomène de FLUAGE tandis que le second ne saurait représenter le phénomène de relaxation. Ils sont donc combinés afin de parfaire leur représentativité d'un matériau. On obtient par exemple les modèles de Zener et de Poynting-Thomson (voir Figure II.4.c et II.4.d). Cela conduit à des équations différentielles qui lient la contrainte et la déformation.

Ces modèles ont été étendus au cas tridimensionnel en utilisant la forme tensorielle.



**Figure II-4:** Modèles viscoélastiques

### II.3.2.2 Modèles constitutifs [12]

La principale caractéristique des matériaux viscoélastiques est que leur relation contrainte déformation dépend du temps. Sur la base des hypothèses que l'élastomère PVC est isotrope et incompressible, le modèle constitutive étendu aux grandes déformations a plus grandes vitesses est exprimée :

$$\sigma^V = -P_V \mathbf{I} + \mathbf{F}(t) \left\{ \int_{-\infty}^t \phi \cdot m(t-s) \dot{\mathbf{E}}(s) ds \right\} \mathbf{F}^T(t) \quad (\text{II.25})$$

Où  $P_V$  est la pression hydrostatique qui permet d'assurer l'incompressibilité de la réponse mécanique, et  $\mathbf{I}$  le tenseur identité

Où  $\dot{\mathbf{E}}$  est le tenseur vitesse de déformation

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^T + \mathbf{F}^T \dot{\mathbf{F}}) \quad (\text{II.26})$$

Et  $\mathbf{F}$  tenseur gradient de déformation

Pour la traction uni-axiale

$$\dot{\mathbf{F}} = \begin{pmatrix} \dot{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \lambda^{-\frac{3}{2}} \dot{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \lambda^{-\frac{3}{2}} \dot{\lambda} \end{pmatrix} \quad (\text{II.27})$$

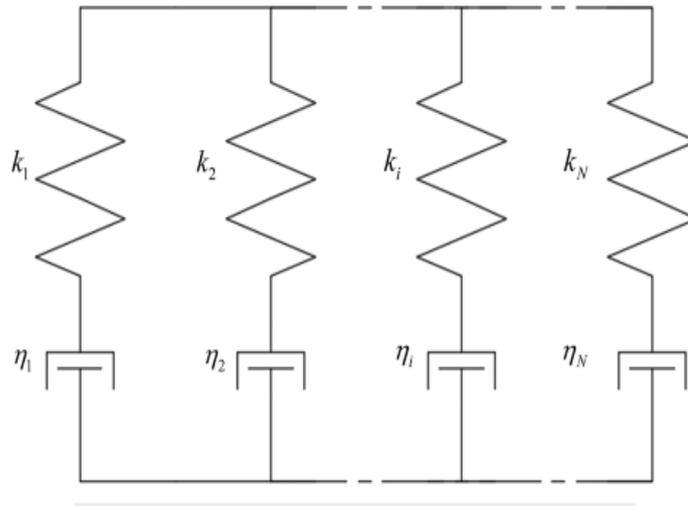
Et 
$$m(t-s) = \sum_{i=1}^n m_i e^{-\left(\frac{t-s}{\tau_{Ri}}\right)} \quad (\text{II.28})$$

est une fonction de relaxation décroissante dans le temps.

$$\phi = A_1 + (A_2 + A_3 \dot{\lambda}^{-0.6})(\lambda^2 + \lambda^{-1}) \quad (\text{II.29})$$

Et  $\phi$  une fonction liées à la déformation et à la vitesse de déformation.

L'équation II.28 peut être exprimée dans un modèle ou N unités de Maxwell sont connecté en parallèle. De grandes valeurs de l'ordre de N sont reliées à une haute précision du modèle. Ici,  $m_i$  est le coefficient du ressort du n<sup>ième</sup> modèle de Maxwell,  $\tau_{ri} = m_i / m_i$  est le temps de relaxation,  $n_i$  est le coefficient de viscosité de l'amortisseur dans le n<sup>ième</sup> modèle de maxwell ou N peut être déterminé de l'expérience de relaxation. La figure II-5 montre un schéma du modèle parallèle de l'unité N maxwell.



**Figure II-5:** Schéma de principe du modèle parallèle de l'unité N maxwell

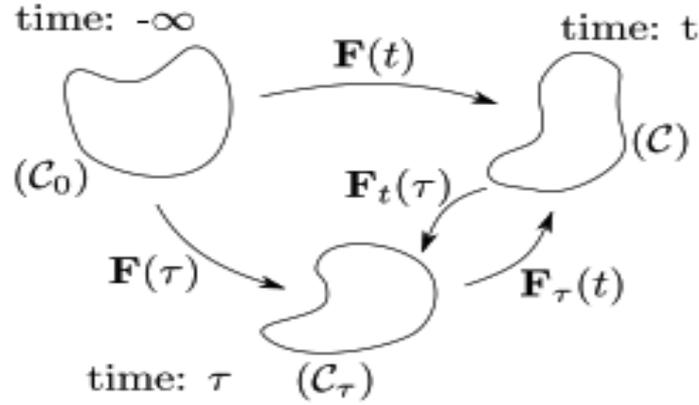
### II.3.2.3 Modèle intégrale

#### a. Modèle de K-KBZ [11]

Le modèle de K-BKZ est considéré comme somme de modèle hyper-élastique en grandes déformation pour la partie élastique et le modèle de K-BKZ pour la partie visqueuse. A noté que ce modèle est différent de la version de la formulation K-BKZ qui a été proposé.

La quantité clé mécanique de l'approche de convolution intégrale est le gradient de déformation relative  $\mathbf{F}_t(\tau)$ . Le gradient de déformation dans le temps actuel dans la configuration actuelle  $C_t$  à l'instant  $t$  est décrit dans la figure II.6.

$$\mathbf{F}_t(\tau) = \mathbf{F}(\tau) \mathbf{F}^{-1}(t) \quad (\text{II.30})$$



**Figure II-6 :** Gradient déformation par rapport à la configuration temporelle actuelle

On définit  $\mathbf{F}_t(\tau)$  comme le gradient de déformation en (C) et on respectant le gradient de déformation actuel en ( $\tau$ ) :

$$\mathbf{F}_t(\tau) = \mathbf{F}_t^{-1}(\tau) = \mathbf{F}(t) \mathbf{F}^{-1}(\tau) \tag{II.31}$$

En introduisant le tenseur des déformations de Green-Cauchy droit  $\mathbf{B}_\tau(t)$ , le tenseur de déformation de Green-Lagrange  $\mathbf{E}_\tau(t)$  :

$$\mathbf{E}_\tau(t) = \frac{1}{2} (\mathbf{B}_\tau(t) - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} (\mathbf{F}_t^T(\tau) \mathbf{F}_t(\tau) - \mathbf{I}) \tag{II.32}$$

où  $\mathbf{I}$  est le tenseur identité et  $\mathbf{F}^T$  est la transposé. Le modèle de K-BKZ conduit à l'expression suivante du tenseur des contraintes de Cauchy :

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = -P(t) \mathbf{I} + \int_{-\infty}^t \left[ \mathbf{F}_\tau(t) \frac{\partial W_1(\mathbf{B}_\tau(t), t-\tau)}{\partial \mathbf{E}_\tau(t)} \mathbf{F}_t^T(\tau) \right] d\tau \tag{II.33}$$

$U_1$  Représente la densité d'énergie de déformation par unité de volume dans la configuration actuelle ( $C_\tau$ ). En considérant l'objectivité et l'incompressibilité, cette énergie de déformation est une fonction des deux premiers invariants de déformation du tenseur Cauchy-Green droit  $\mathbf{B}_\tau(t)$ .

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = -p(t) \mathbf{I} + \int_{-\infty}^t 2\mathbf{F}_{\tau}(t) \left[ \left( \frac{\partial W_1}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial W_1}{\partial I_2} \right) \mathbf{I} - \frac{\partial W_1}{\partial I_2} \mathbf{B}_{\tau}(t) \right] \mathbf{F}_{\tau}^T(t) d\tau \quad (\text{II.34})$$

De plus, le matériau est isotrope, l'énergie de déformation  $W_1$  peut-être écrite comme une fonction du tenseur de déformation de Green-Cauchy gauche  $\mathbf{C}_{\tau}(t)$  qui égale a  $\mathbf{B}_{\tau}^{-1}(t)$  :

$$\mathbf{B}_{\tau}^{-1}(t) = I_{C_{\tau}} \mathbf{C}_{\tau}(t) - II_{C_{\tau}} \mathbf{I} + \mathbf{B}_{\tau}^{-1}(t) \quad (\text{II.35})$$

Et après quelques simples manipulations algébriques :

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = -p'(t) \mathbf{I} + \int_{-\infty}^t 2 \left[ \left( \frac{\partial W_1}{\partial I_{\mathbf{B}_{\tau}^{-1}}} \mathbf{B}_{\tau}^{-1}(\tau) + I_1 \frac{\partial W_1}{\partial II_{\mathbf{B}_{\tau}^{-1}}} \mathbf{C}_{\tau}(\tau) \right) \right] d\tau \quad (\text{II.36})$$

Ou  $p'(t)$  est la pression hydrostatique modifier, qui sera simplement noté  $p(t)$  dans ce qui suit. Cette équation présente l'équation constitutive du modèle classique de fluide de K-BKZ, pour considérer les solides on ajoute simplement une contribution hyper-élastique définie par une fonction d'énergie de déformation écrite en terme des deux premiers invariants du tenseur déformation Green-Cauchy gauche de toute la déformation, finalement le tenseur des contraintes de Cauchy est :

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = -p'(t) \mathbf{I} + 2 \left( \frac{\partial W_1}{\partial I_{\mathbf{B}_{\tau}^{-1}}} \mathbf{C}(t) - \frac{\partial W_1}{\partial II_{\mathbf{B}_{\tau}^{-1}}} \mathbf{C}^{-1}(t) \right) + 2 \int_{-\infty}^t \left[ \frac{\partial W_1}{\partial I_{\mathbf{B}_{\tau}^{-1}}} \mathbf{B}_{\tau}^{-1}(\tau) - \frac{\partial W_1}{\partial II_{\mathbf{B}_{\tau}^{-1}}} \mathbf{C}_{\tau}(\tau) \right] d\tau \quad (\text{II.37})$$

## II.4 Conclusion

- Les modèles cités ci-dessus décrivent relativement le comportement viscoélastique et hyper-élastique des élastomères.
- La fiabilité des modèles varie en fonction du niveau et du mode de déformation.
- Les paramètres des modèles phénoménologiques restent toujours délicats à mesurer, car ils ne sont pas relievés à des valeurs parfaitement physiques.
- Certains modèles sont promoteurs mais sont indisponibles dans le code de calcul.

# **Chapitre III**

## **Etude du comportement statique et dynamique**

# Etude du comportement statique et dynamique

## III. 1. Introduction

Dans ce chapitre nous allons modéliser le comportement d'un élastomère en traction uni-axiale en grandes déformations. Les modèles hyper-élastiques (Mooney-Rivlin, Yeoh..) conviennent parfaitement pour des sollicitations quasi-statiques, les sollicitations dynamiques dans le cadre de grandes vitesses de déformation, sont aussi bien maîtrisée grâce à l'utilisation de modèles viscoélastiques (Modèle de K-BKZ, Maxwell..).

## III.2. Caractérisation expérimentale du comportement statique et dynamique

Notre étude portant principalement sur la dépendance des élastomères à la vitesse de déformation en grandes déformations, nous proposons donc un état de l'art des techniques d'essais employées classiquement pour déterminer le comportement à différentes vitesses de déformation. Dans un second temps, les méthodes d'essais de traction ainsi que de compression, qui ont été développées et utilisées lors de cette étude seront présentées avant de faire un bilan des résultats obtenus pour notre matériau.

### III.2.1 Etat de l'art

La plage de vitesse de sollicitation qui nous intéresse étant assez étendue ( $0.01$  à  $100s^{-1}$ ), nous allons tout d'abord présenter les différents moyens d'essais qui peuvent être utilisés. La figure III.1 montre que divers moyens d'étude existent, associés à des différentes gammes de vitesses de déformation. Ainsi, on réalise les essais quasi-statiques sur les machines de traction classiques pour des vitesses de déformation inférieures à  $1 s^{-1}$ . D'autre part, des essais sur barres d'Hopkinson sont utilisés pour des vitesses supérieures à  $100 s^{-1}$ . Dans l'intervalle des vitesses moyennes (de  $1$  à  $100 s^{-1}$ ), aucun consensus sur la méthodologie à employer n'existe. On trouve ainsi des machines de traction rapide qui permettent d'atteindre des vitesses de quelques mètres par seconde et des montages spécifiques conçus chacun pour un type d'essai bien précis.



**Figure III-1** : Utilisation des moyens d'essais en fonction de la vitesse de déformation souhaitée

### III.2.2 Essai de traction classique

Pour les plus basses vitesses de déformation, on utilise des machines de traction classiques. Une éprouvette est placée entre les mors pour les essais de traction et entre des plateaux pour les essais de compression. Étant à de faibles vitesses de déformation, l'état d'équilibre dynamique est vérifié à chaque instant. Ceci permet de négliger tout effet d'inertie à l'intérieur du matériau. Une mesure de force est effectuée à l'une des extrémités de l'éprouvette, on peut donc en déduire la déformation de l'ingénieur  $\varepsilon_{ing}$  ou l'allongement  $\lambda$  plus classiquement utilisé pour les caoutchoucs :

$$\varepsilon_{ing} = \frac{l-l_0}{l_0} = \lambda - 1 \quad (\text{III.1})$$

La mesure de la force  $F$  à l'une des extrémités de l'éprouvette de volume  $V_0$  permet de calculer la contrainte nominale  $\pi$  en utilisant  $S_0$  la section de l'éprouvette au début de l'essai :

$$\pi = \frac{F}{S_0} \quad (\text{III.2})$$

On peut aussi déterminer la contrainte vraie ou contrainte de Cauchy  $\sigma$  en utilisant  $S$  la section de l'éprouvette dans l'état déformé :

$$\sigma = \frac{F}{S} \quad (\text{III.3})$$

Le matériau élastomère utilisé dans cette étude étant supposé incompressible (volume  $V = V_0$ ), on a :

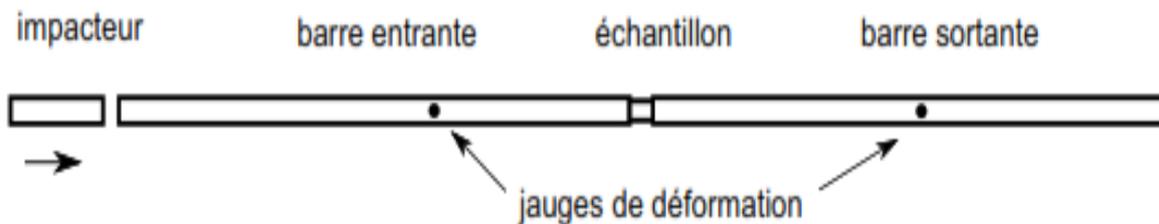
$$\lambda = \frac{l}{l_0} = \frac{S_0}{S} \quad (\text{III.4})$$

Et donc la relation entre la contrainte vraie et la contrainte nominale est :

$$\sigma = \frac{F}{S_0} = \frac{S_0}{S} = \pi \lambda \quad (\text{III.5})$$

(Voir annexe A)

### III.2.3 Essai sur barres d'Hopkinson



**Figure III-2** : Schéma du dispositif de la barre d'Hopkinson

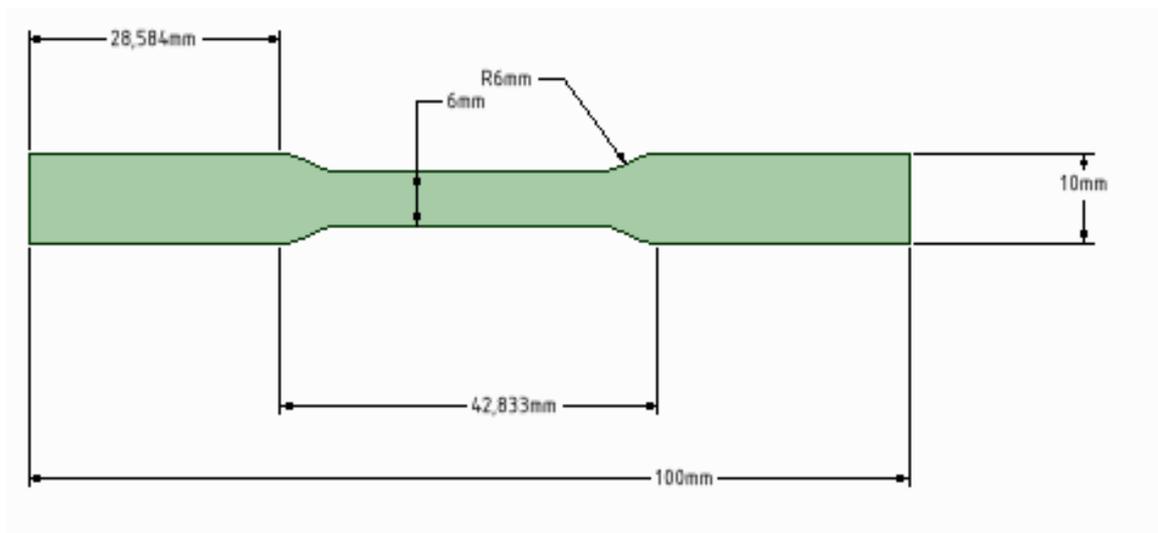
Les essais sur barres d'Hopkinson (ou de Kolsky (1963)) sont généralement des essais de compression. Pour cet essai, on place un échantillon entre deux barres de mesure et une barre plus petite, l'impacteur, est projetée sur la première barre comme le présente la figure III.3. Cela génère une onde de compression élastique qui se propage dans la première barre et vient en partie se réfléchir à l'extrémité de celle-ci tandis que l'autre partie est transmise à l'échantillon puis à la deuxième barre. Une jauge placée sur la première barre permet d'enregistrer à la fois l'onde incidente et l'onde réfléchie tandis qu'une autre jauge placée sur la deuxième barre permet d'enregistrer le signal correspondant à l'onde transmise. L'étude de ces signaux permet d'aboutir à une mesure de la contrainte moyenne et de la déformation moyenne dans l'échantillon. Ainsi, si on considère que l'éprouvette est uniformément chargée, on mesure la vitesse de déformation moyenne.

### III.2.4 Essai pour les moyennes vitesses de déformation

Dans la gamme des moyennes vitesses de déformation, il y a peu d'essais qui ont été effectués. Les machines de traction hydrauliques permettent d'atteindre environ  $100^{-1}$ . Cependant, pour des vitesses de déformations supérieures à une valeur critique de l'ordre de 10 à  $60 \text{ s}^{-1}$ , la fiabilité du dispositif est remise en cause car on atteint les fréquences propres des capteurs classiquement utilisés. Ainsi, une mesure du signal de force a été proposée en utilisant une barre sur laquelle sont collées trois jauges de déformations. Cette technique applique la méthodologie de mesure des barres d'Hopkinson aux machines de traction rapide. En utilisant une technique de séparation d'ondes, le signal de force est ainsi recueilli. On trouve aussi d'autres dispositifs spécifiquement conçus pour atteindre une certaine vitesse de déformation.

- **Matériau utilisées**

Les essais sont réalisés sur une éprouvette de dimensions décrite dans la figure pour de différentes sollicitations. L'objectif étant de définir le modèle le plus adapté et qui décrit au plus près l'expérience réaliser.

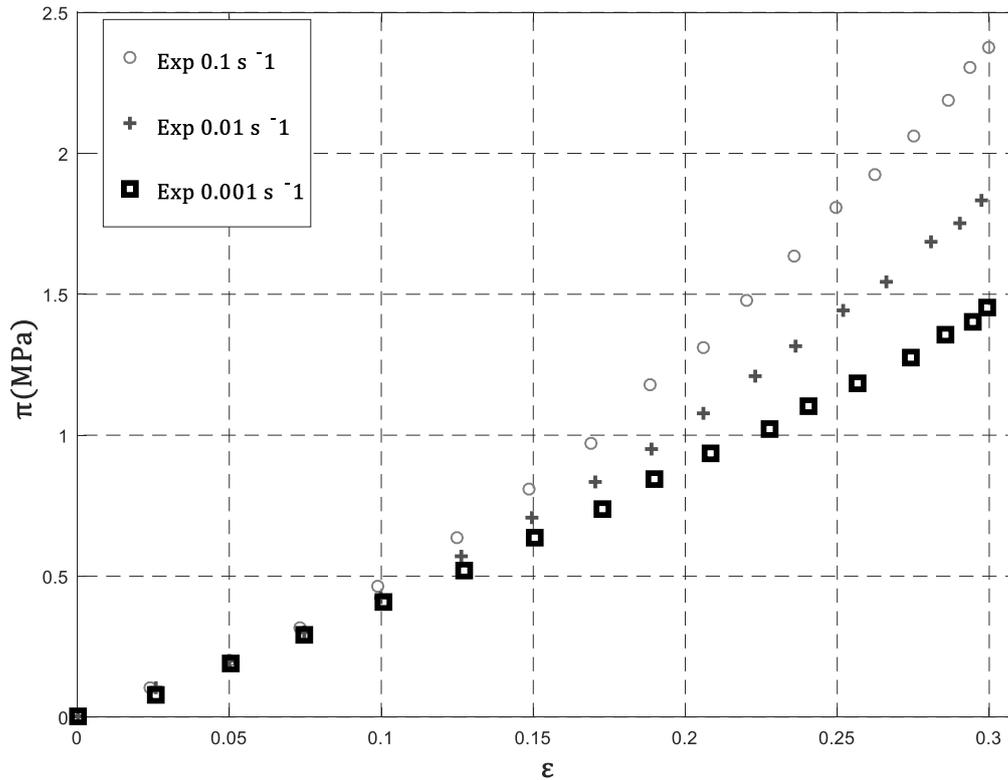


**Figure III-3** : Matériau utilisé (éprouvette ISO 7743)

L'essai quasi-statique est réalisé pour des vitesses :

$$\begin{cases} \dot{\lambda} = 0.1 \text{ s}^{-1} \\ \dot{\lambda} = 0.01 \text{ s}^{-1} \\ \dot{\lambda} = 0.001 \text{ s}^{-1} \end{cases}$$

Les valeurs des contraintes et déformations tiré à partir de l'essai de traction déjà réalisé, qui sont recensé dans le tableau qui suit **Tableau III.1** (voir **annexe B**)



**Figure III-4 :** Courbe expérimentale contraintes-déformation de l'essai de compression uni-axiale(Quasi-Statique) Pour les trois vitesses de déformation.

### III.2.5 Hyper-élasticité

Le comportement mécanique de l'élastomère dans des conditions quasi-statiques peut être décrit par des modèles hyper-élastiques. L'Hyper-élasticité suppose l'existence d'une énergie de déformation  $W$  permettant de lier l'état de déformation à l'état de contraintes. Le principe d'objectivité permet d'exprimer cette énergie en fonction du tenseur de Cauchy Green droit :

$$\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T \quad (\text{III.6})$$

Où  $\mathbf{F}$  est le gradient de transformation et peut être exprimé par les élongations principales

Comme suit :

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad (\text{III.7})$$

Où  $\lambda_1, \lambda_2$  et  $\lambda_3$  sont les principales élongations dans les trois directions. Pour la traction uniaxiale l'élongation dans le sens d'étirement est désigné par  $\lambda = \lambda_1$ , selon l'hypothèse d'incompressibilité les principales élongations dans les deux autres directions sont  $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda^{-\frac{1}{2}}$   
 Les trois Invariants de déformation de  $\mathbf{B}$  s'expriment :

$$\begin{aligned} I_1 &= \text{tr}(\mathbf{B}) = \lambda^2 + 2\lambda^{-1} \\ I_2 &= \frac{1}{2} [I_1^2 - \text{tr}(\mathbf{B}^2)] = \lambda^{-2} + 2\lambda \\ I_3 &= \det(\mathbf{B}) = 1 \end{aligned} \quad (\text{III.8})$$

Selon l'analyse de Rivlin, la relation entre la fonction énergie de déformation et le tenseur des contraintes est :

$$\boldsymbol{\sigma}^{hyp} = -P^h \mathbf{I} + 2 \left( \frac{\partial W}{\partial I_1} \cdot \mathbf{B} - \frac{\partial W}{\partial I_2} \cdot \mathbf{B}^{-1} \right) \quad (\text{III.9})$$

Où  $P^h$  est la pression hydrostatique qui permet d'assurer l'incompressibilité de la réponse mécanique, et  $\mathbf{I}$  le tenseur identité.

La fonction d'énergie de déformation pour les matériaux est exprimée comme une forme des invariants de déformation ou des étirements principaux.

$$W = W(I_1, I_2, I_3) \text{ ou } W = W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \quad (\text{III.10})$$

La difficulté majeure reste donc d'exprimer l'expression de l'énergie libre de déformation  $W$ .

### III.2.5.1 Modèle de Mooney-Rivlin

La loi de comportement du modèle Mooney-Rivlin est exprimée pour un milieu incompressible par :

$$W^{MR} = C_{10} (I_1 - 3) + C_{01} (I_2 - 3) \quad (\text{III.11})$$

Où  $I_1$  et  $I_2$  sont les invariants du tenseur de dilatation de Cauchy Green droit et  $C_{10}, C_{01}$  sont les constantes matérielles du modèle.

En insérant (III.11) dans (III.9), la relation contrainte-déformation est exprimée :

$$\boldsymbol{\sigma}_{MR}^{hyp} = -P^h \mathbf{I} + 2 (C_{10} \cdot \mathbf{B} - C_{01} \cdot \mathbf{B}^{-1}) \quad (\text{III.12})$$

Dans la cas de la traction (compression) uni-axiale, on a :

$$\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \quad (\text{III.13})$$

Les conditions aux limites de l'essai de traction uni-axiale sont :

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^h &= \sigma^h & \sigma_{22}^h &= \sigma_{33}^h = 0 \\ \sigma_{11}^v &= \sigma^v & \sigma_{22}^v &= \sigma_{33}^v = 0 \end{aligned}$$

De (III.12) on obtient :

$$\begin{cases} \sigma_{11} = -P + 2(C_{10} \cdot B_{11} - C_{01} \cdot B_{11}^{-1}) = \sigma^h \\ \sigma_{22} = -P + 2(C_{10} \cdot B_{22} - C_{01} \cdot B_{22}^{-1}) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_{11} = -P + 2(C_{10}\lambda^2 - C_{01}\lambda^{-2}) = \sigma^h \\ \sigma_{22} = -P + 2(C_{10}\lambda^{-1} - C_{01}\lambda) = 0 \end{cases}$$

$$\sigma_{11} - \sigma_{22} = 2(C_{10}\lambda^2 - C_{01}\lambda^{-2}) - 2(C_{10}\lambda^{-1} - C_{01}\lambda)$$

Par conséquent la contrainte de Cauchy dans l'état de traction uni-axiale peut s'écrire :

$$\sigma_{MR}^{TU} = 2(\lambda^2 - \lambda^{-1}) \left[ C_{10} + \frac{C_{01}}{\lambda} \right] \quad (\text{III.14})$$

Et la contrainte de l'ingénieur est calculée pour les différents essais :

$$\pi = \frac{\sigma_{MR}^{TU}}{\lambda} = \pi^{MR} = 2(\lambda - \lambda^{-2}) \left[ C_{10} + \frac{C_{01}}{\lambda} \right] \quad (\text{III.15})$$

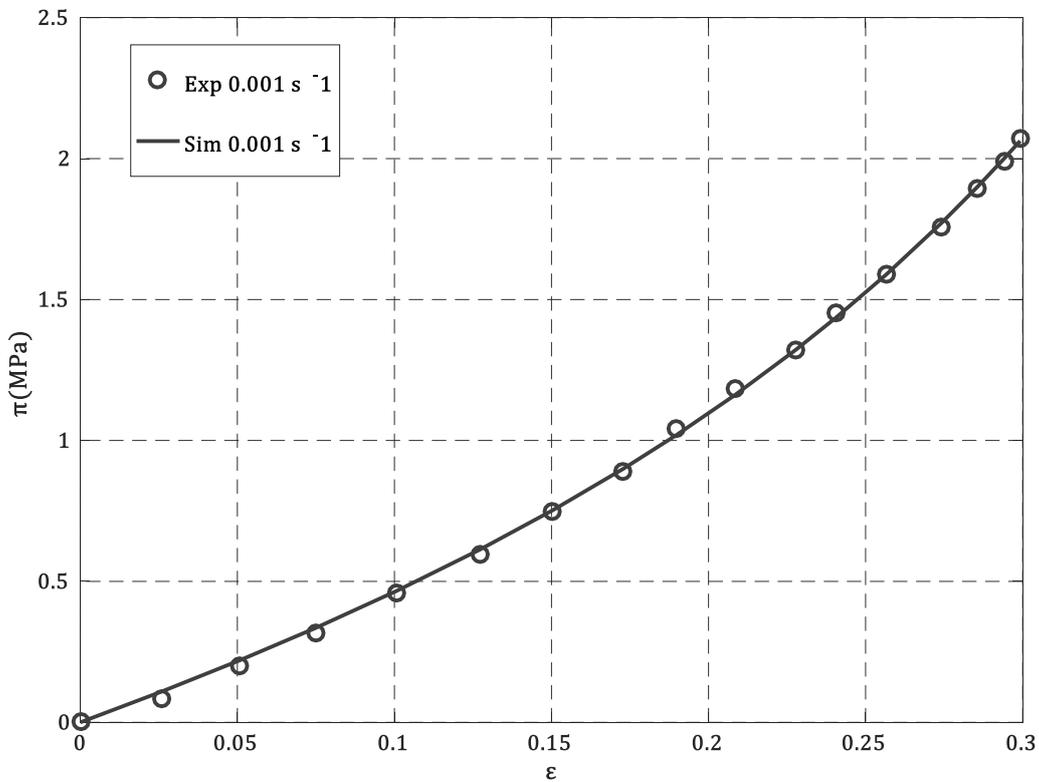
### **a. Identification des paramètres du matériau pour le modèle Mooney-Rivlin**

Dans cette étude nous allons présenter les résultats de l'identification des deux paramètres de Mooney-Rivlin avec la méthode de Monté Carlo.

Vitesse de déformation	$\dot{\lambda} = 0.1 s^{-1}$	$\dot{\lambda} = 0.01 s^{-1}$	$\dot{\lambda} = 0.001 s^{-1}$
Paramètres du modèle (C10, C01)	c10=0.01	c10=0.01	c10=0.36
	c01=0.86	c01=0.68	c01=0.29

**Tableau 1:** Identification du modèle Mooney-Rivlin en traction uni-axiale à l'aide de la méthode de Monte Carlo

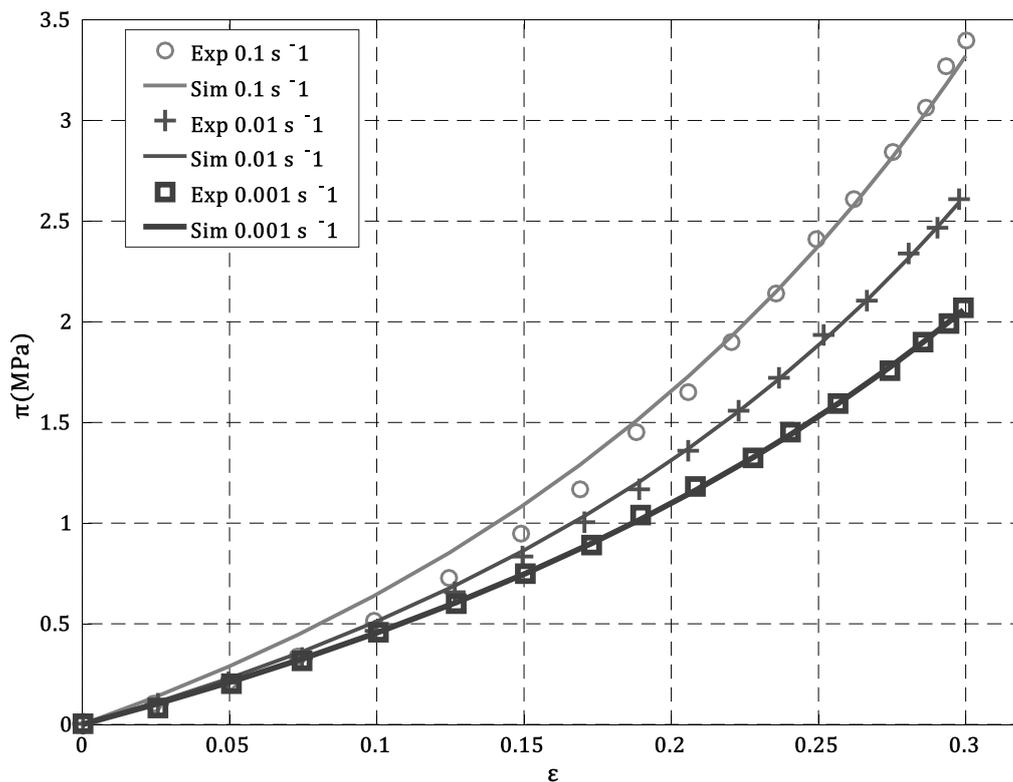
Les paramètres du modèle de Mooney-Rivlin obtenu sont donnés sur le tableau 1.



**Figure III-5 :** Identification paramétrique du modèle de MR de l'essai quasi-statique pour la plus faible vitesse de déformation ( $\dot{\lambda} = 0.001 s^{-1}$ )

La figure ci-dessus représente la contrainte de Piola-Kirchhoff en fonction de la déformation dans le domaine quasi-statique (**Annexe C**) pour la plus petite vitesse de déformation de  $\dot{\lambda} = 0.001 \text{ s}^{-1}$ .

### b. Discussion du modèle



**Figure III-6 :** Courbes des contraintes déformation du modèle Mooney-Rivlin comparé avec la courbe expérimentale contraintes-déformation pour les trois vitesses de déformations :  
« essais quasi-statiques »

De la (figure III.6), Ici  $\pi$  est la contrainte de l'ingénieur, dans la formule les paramètres  $c_{10}$   $c_{01}$  sont déterminés en ajustant la courbe contraintes-déformation, la vitesse de déformation  $0,001 \text{ s}^{-1}$  a été prise comme une vitesse de référence pour le cas quasi-statique. Les résultats trouvés montrent un excellent accord global, indiquant que le modèle de Mooney-Rivlin est capable de décrire le comportement hyper-élastique dans le cas des sollicitations quasi-statiques.

### III.2.5.2 Modèle de Yeoh

Lorsque la contrainte est relativement grande, l'influence de  $I_2$  sur l'énergie de déformation est plus faible que celle de  $I_1$ . Le modèle de YEOH, qui utilise seulement  $I_1$ , peut mieux décrire les propriétés mécaniques des matériaux hyperélastiques pour des déformations relativement importantes. La fonction énergie de déformation  $W$  du Modèle YEOH est :

$$W^{Yeoh} = C_{10}(I_1 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{30}(I_1 - 3)^3 \quad (\text{III.16})$$

Où  $C_{10}$ ,  $C_{20}$  et  $C_{30}$  sont les paramètres de matériaux du modèle.

En substituant (III.16) dans (III.9), le tenseur des contraintes de Cauchy s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma}_{Yeoh}^{hyp} = -P_e \mathbf{I} + 2 [ C_{10} + 2C_{20}(I_1 - 3) + 3C_{30}(I_1 - 3)^2 ] \mathbf{B} \quad (\text{III.17})$$

De (III.17) on obtient :

$$\begin{cases} \sigma_{11} = -P^h + 2 [ C_{10} + 2C_{20}(I_1 - 3) + 3C_{30}(I_1 - 3)^2 ] B_{11} \\ \sigma_{22} = -P^h + 2 [ C_{10} + 2C_{20}(I_1 - 3) + 3C_{30}(I_1 - 3)^2 ] B_{22} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_{11} = -P^h + 2 [ C_{10} + 2C_{20}(I_1 - 3) + 3C_{30}(I_1 - 3)^2 ] \lambda^2 = \sigma^h \\ \sigma_{22} = -P^h + 2 [ C_{10} + 2C_{20}(I_1 - 3) + 3C_{30}(I_1 - 3)^2 ] \lambda^{-1} = 0 \end{cases}$$

La contrainte de Cauchy s'écrit :

$$\sigma_{11} - \sigma_{22} \rightarrow \sigma_{YEOH}^{TU} = 2 [ C_{10} + 2C_{20}(I_1 - 3) + 3C_{30}(I_1 - 3)^2 ] (\lambda^2 - \lambda^{-1}) \quad (\text{III.18})$$

Et la contrainte de l'ingénieur est calculée pour les différents essais :

$$\pi = \frac{\sigma_{YEOH}^{TU}}{\lambda} = \pi^{YEOH} = 2 [ C_{10} + 2C_{20}(I_1 - 3) + 3C_{30}(I_1 - 3)^2 ] (\lambda - \lambda^{-2}) \quad (\text{III.19})$$

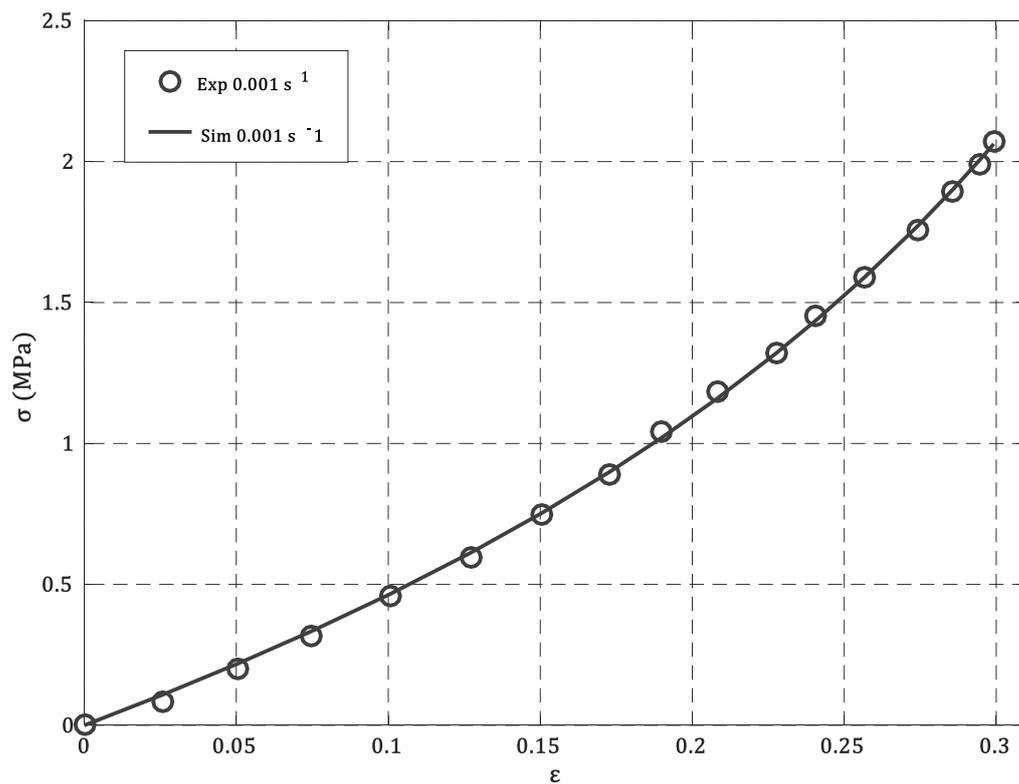
## a. Identification des paramètres du matériau pour le modèle de Yeoh

Vitesse de déformation	$\dot{\lambda} = 0.1 s^{-1}$	$\dot{\lambda} = 0.01 s^{-1}$	$\dot{\lambda} = 0.001 s^{-1}$
Paramètres du modèle (C10, C20, C30)	C10=0.85	C10=0.74	C10=0.68
	C20=0.63	C20=0.37	C20=0.12
	C30=0.01	C30=0.01	C30=0.01

**Tableau 2:** Identification du modèle de Yeoh en traction uni-axiale à l'aide de la méthode de Monte Carlo

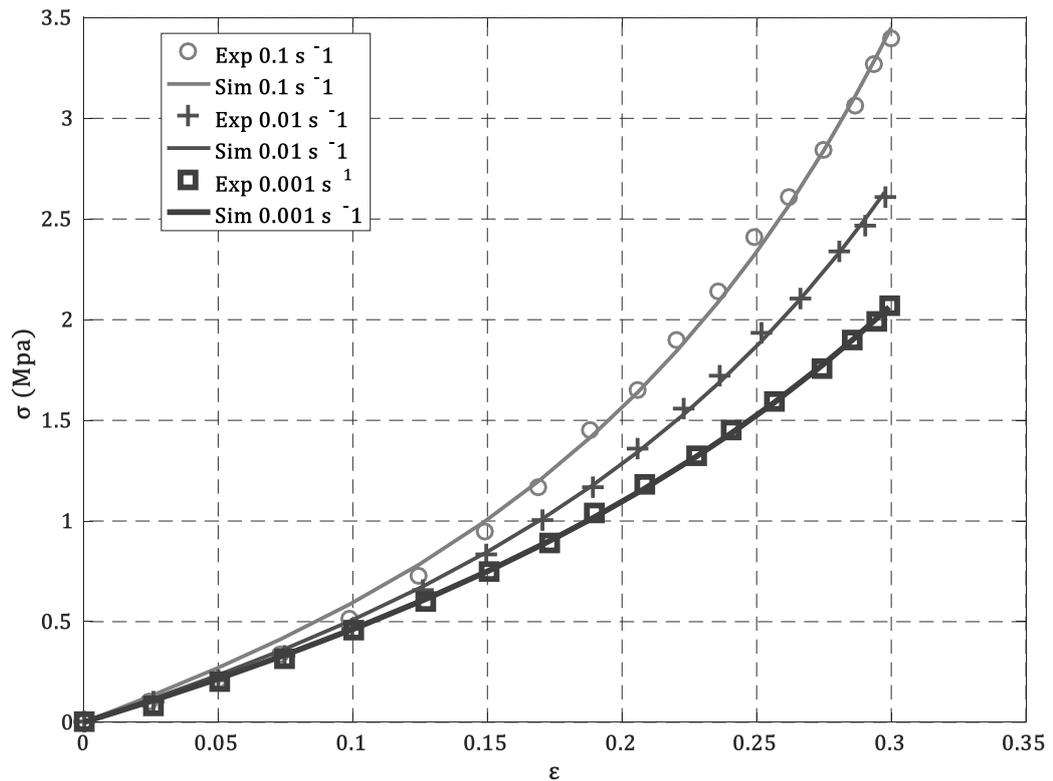
Les paramètres du modèle de Yeoh obtenu, sont indiqués dans le (tableau III.4) Comme on travaille dans le domaine quasi-statique.

La méthode de Monte Carlo nous a permis de déduire les paramètres du modèle de YEOH inscrit dans le tableau ci-dessus (tableau III.4). Comme notre étude est portée sur la partie quasi-statique.



**Figure III-7** : Identification paramétrique du modèle de Yeoh de l'essai quasi-statique pour la plus faible vitesse de déformation ( $\dot{\lambda} = 0.001 \text{ s}^{-1}$ )

La figure ci-dessus représente la contrainte de Piola-Kirchoff en fonction de la déformation dans le domaine quasi-statique pour une vitesse de déformation de  $\dot{\lambda} = 0.001 \text{ s}^{-1}$ . (Voir annexe D).



**Figure III-8 :** Courbes des contraintes déformation du modèle YEOH pour les trois vitesses de déformations « essais quasi-statiques »

### III.2.5.3 Choix du modèle de comportement

Dans notre étude, nous allons choisir le modèle de Mooney-Rivlin pour la partie hyper-élastique du modèle viscoélastique. Ce dernier possède moins de paramètres et il est capable de décrire le comportement mécanique en quasi-statique.

## III.2.6 Comportement Viscoélastique

### III.2.6.1 modèle à N unité de Maxwell

La principale caractéristique des matériaux viscoélastiques est que leur relation contrainte-déformation dépend du temps. Sur la base des hypothèses que l'élastomère est isotrope et incompressible, le modèle viscoélastique constitutive de Maxwell étendu aux grandes déformations à plus grandes vitesses est exprimé :

$$\boldsymbol{\sigma}^{V(1)} = -P_V \mathbf{I} + \mathbf{F}(t) \left\{ \int_{-\infty}^t \phi \cdot m(t-s) \dot{\mathbf{E}}(s) ds \right\} \mathbf{F}^T(t) \quad (\text{III.20})$$

Où  $\dot{\mathbf{E}}$  est le tenseur de vitesse de déformation

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^T + \mathbf{F}^T \dot{\mathbf{F}}) \quad (\text{III.21})$$

Et  $\mathbf{F}$  tenseur gradient de déformation

$$\dot{\mathbf{F}} = \begin{pmatrix} \dot{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \lambda^{-\frac{3}{2}} \dot{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \lambda^{-\frac{3}{2}} \dot{\lambda} \end{pmatrix} \quad (\text{III.22})$$

Avec 
$$m(t-s) = \sum_{i=1}^n k_i e^{-\left(\frac{t-s}{\tau_{Ri}}\right)} \quad (\text{III.23})$$

L'équation (III.23) représenté la fonction de relaxation qui peut être exprimé en termes de série de prony. Par un modèle où N unité de Maxwell sont connecté en parallèle. La plus grande valeur de l'ordre de N relate à une haute précision du modèle [12].

$$\phi = A_1 + (A_2 + A_3 \dot{\lambda}^{-0.6}) (\lambda^2 + \lambda^{-1}) \quad (\text{III.24})$$

Et  $\phi$  une fonction liée à la déformation et à la vitesse de déformation.

De (III.21) le tenseur de vitesse de déformation s'exprime :

$$\dot{\mathbf{E}} = \begin{pmatrix} \dot{\lambda} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \lambda^{-2} \dot{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \lambda^{-2} \dot{\lambda} \end{pmatrix} \quad (\text{III.25})$$

On a :

$$\boldsymbol{\sigma}^V = -P_V \mathbf{I} + \mathbf{F}(t) \left\{ \int_0^t \phi \cdot m(t-s) \dot{\mathbf{E}}(s) ds \right\} \mathbf{F}^T(t)$$

Où la contrainte de Cauchy pour un modèle viscoélastique s'exprime par :

En substituant (III.25) dans (III.20)

$$\begin{cases} \sigma_{11} = -P_V + \lambda^2 \int_0^t \phi \cdot \dot{E}_{11} m(t-s) ds = \sigma^v \\ \sigma_{22} = -P_V + \lambda^{-1} \int_0^t \phi \cdot \dot{E}_{22} m(t-s) ds = 0 \end{cases}$$

Les conditions aux limites de l'essai de traction uni-axiale sont :

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^v = \sigma^v \quad \sigma_{22}^v = \sigma_{33}^v = 0 \\ \begin{cases} \sigma_{11} = -P_V + \lambda^2 \int_0^t \phi \cdot \xi \dot{\lambda} \cdot m(t-s) ds = \sigma^v \\ \sigma_{22} = -P_V + \lambda^{-1} \int_0^t \phi \cdot m(t-s) \cdot \left\{ -\frac{1}{2} \xi^{-2} \dot{\lambda} \right\} ds = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\sigma_{11} - \sigma_{22} = \lambda^2 \int_0^t \phi \cdot m(t-s) \xi \dot{\lambda} ds + \frac{1}{2} \lambda^{-1} \int_0^t \phi \cdot m(t-s) \xi^{-2} \dot{\lambda} ds = \sigma^{V(1)} \quad (III.26)$$

Avec  $\xi \in [1, \lambda]$   
Et  $\dot{\lambda} = cste$

En substituant (III.23) et(III.24) dans(III.26) l'expression de la contrainte devient

$$\sigma^{V(1)} = \lambda^2 \int_1^\lambda \phi \cdot \sum_{i=1}^n k_i e^{-\left(\frac{\lambda-\xi}{\lambda\tau_{Ri}}\right)} \xi d\xi + \frac{1}{2} \lambda^{-1} \int_1^\lambda \phi \cdot \sum_{i=1}^n k_i e^{-\left(\frac{\lambda-\xi}{\lambda\tau_{Ri}}\right)} \xi^{-2} d\xi \quad (III.28)$$

La fonction de relaxation :

On prend n=1

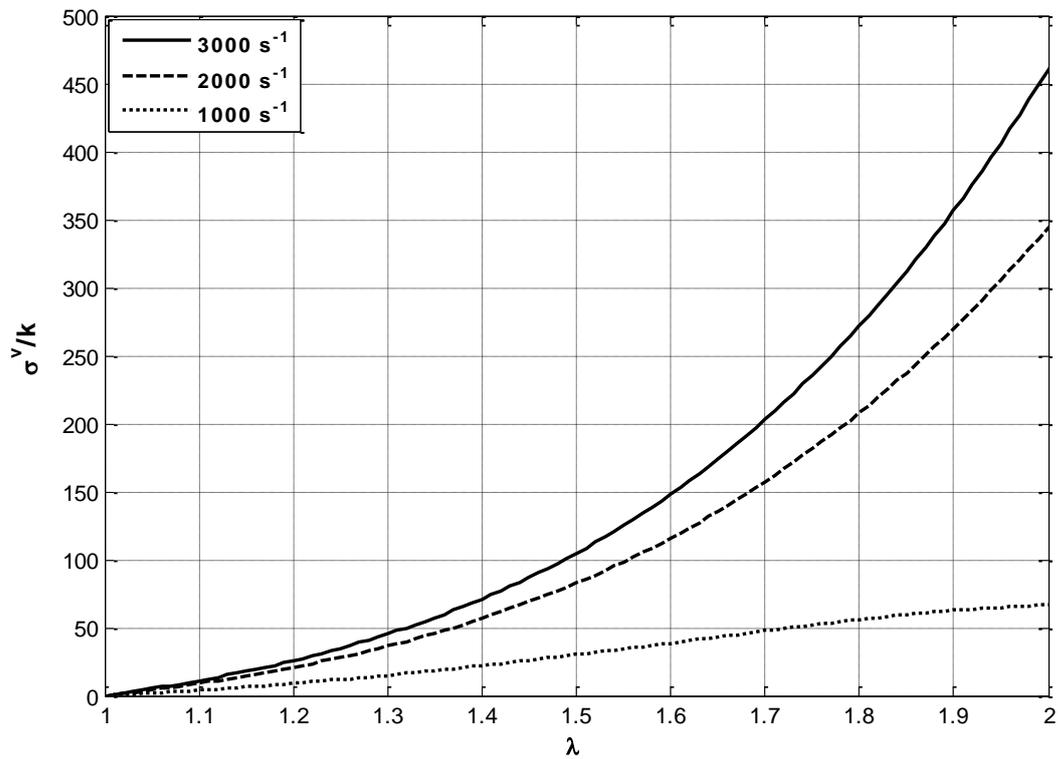
$$\frac{\sigma^{V(1)}}{k_1} = \lambda^2 \int_1^\lambda \phi \cdot e^{-\left(\frac{\lambda-\xi}{\lambda\tau_R}\right)} \xi d\xi + \frac{1}{2} \lambda^{-1} \int_1^\lambda \phi \cdot e^{-\left(\frac{\lambda-\xi}{\lambda\tau_R}\right)} \xi^{-2} d\xi \quad (III.29)$$

On va choisir les paramètres du modèle afin de tracer les courbes contraintes-déformations pour différentes vitesses de déformations :

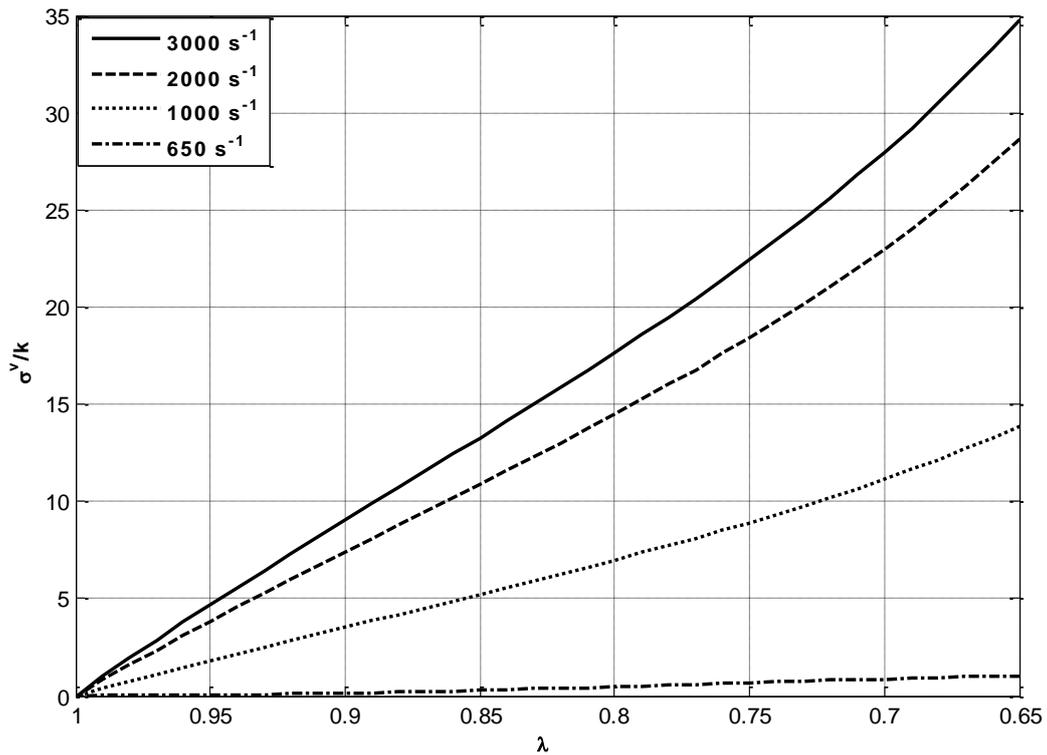
$$\left. \begin{aligned} \dot{\lambda} &= 3000 \text{ s}^{-1} \\ \dot{\lambda} &= 2000 \text{ s}^{-1} \\ \dot{\lambda} &= 1000 \text{ s}^{-1} \\ \dot{\lambda} &= 650 \text{ s}^{-1} \end{aligned} \right\}$$

Paramètre A1	20.02
Paramètre A2	-8.84
Paramètre A3	-83.16
Paramètre $\tau_R$	99.97

**Tableau 3.a:** Valeurs des paramètres choisis du modèle



**Figure III-9 :** Courbe du modèle constitué de N unités de Maxwell en fonction des élongations pour différentes vitesses de déformations en traction.



**Figure III-10 :** Courbe des contraintes-élongations du modèle constitué de N unité de Maxwell pour différentes vitesses de déformations en compression

Le modèle N unités de Maxwell est capable de décrire le comportement mécanique à très grande vitesse de déformations mais pour les moyennes vitesses, ce modèle donne des valeurs nulles voir négatives des contraintes. Ceci implique que ce modèle est bien adapté pour décrire le comportement viscoélastique pour des vitesses de déformations élevées.

### III.2.6.2 Modèle de K-BKZ

Dans le cas de la traction uni-axiale, on trouve que :

$$\sigma^{V(2)} = 2g_1 \left( \lambda^2 \int_1^\lambda \xi^{-3} e^{-\left(\frac{\lambda-\xi}{\lambda\tau_{Ri}}\right)} d\xi + \lambda^{-1} \int_1^\lambda e^{-\left(\frac{\lambda-\xi}{\lambda\tau_{Ri}}\right)} d\xi \right)$$

$$\frac{\sigma^{V(2)}}{g_1} = 2 \left( \lambda^2 \int_1^\lambda \xi^{-3} e^{-\left(\frac{\lambda-\xi}{\lambda\tau_{Ri}}\right)} d\xi + \lambda^{-1} \int_1^\lambda e^{-\left(\frac{\lambda-\xi}{\lambda\tau_{Ri}}\right)} d\xi \right) \tag{III.30}$$

On va choisir les paramètres du modèle afin de tracer les courbes contraintes-élongations pour différentes vitesses de déformations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\lambda} = 3000 \text{ s}^{-1} \\ \dot{\lambda} = 100 \text{ s}^{-1} \\ \dot{\lambda} = 20 \text{ s}^{-1} \\ \dot{\lambda} = 10 \text{ s}^{-1} \\ \dot{\lambda} = 5 \text{ s}^{-1} \\ \dot{\lambda} = 1 \text{ s}^{-1} \\ \dot{\lambda} = 0,1 \text{ s}^{-1} \end{array} \right.$$

Paramètre $\tau_R$	99.96
--------------------	-------

Tableau 4.b: Valeurs des paramètres choisis du modèle

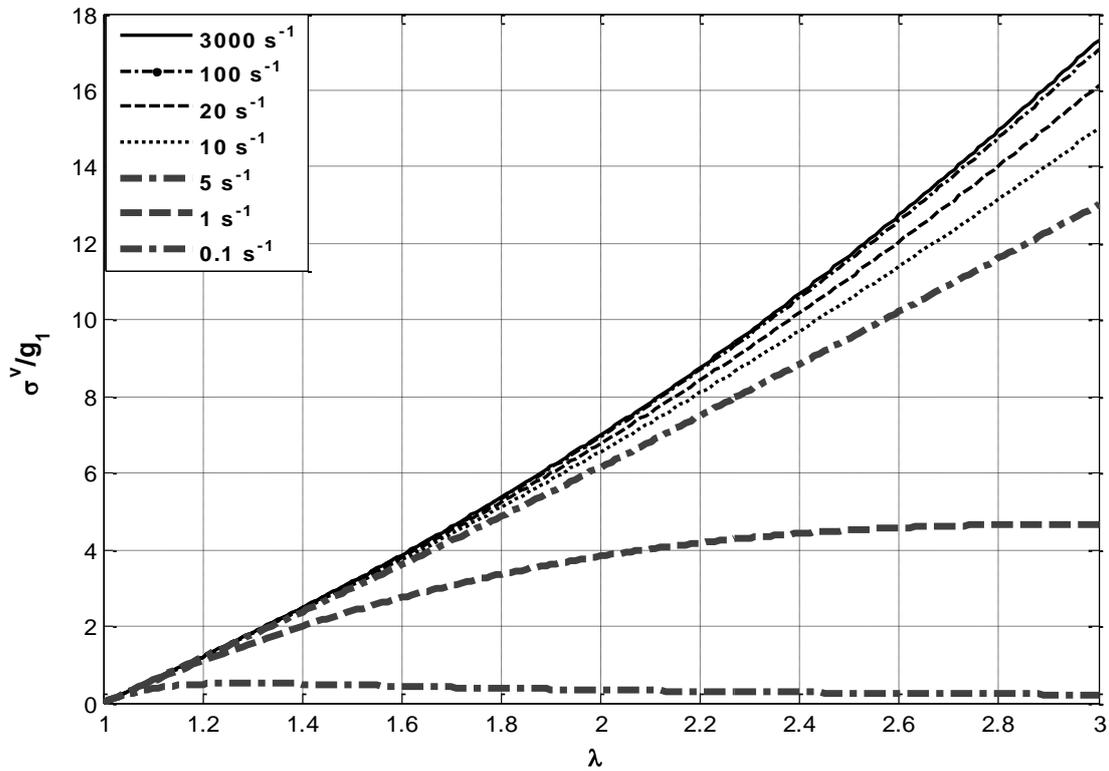
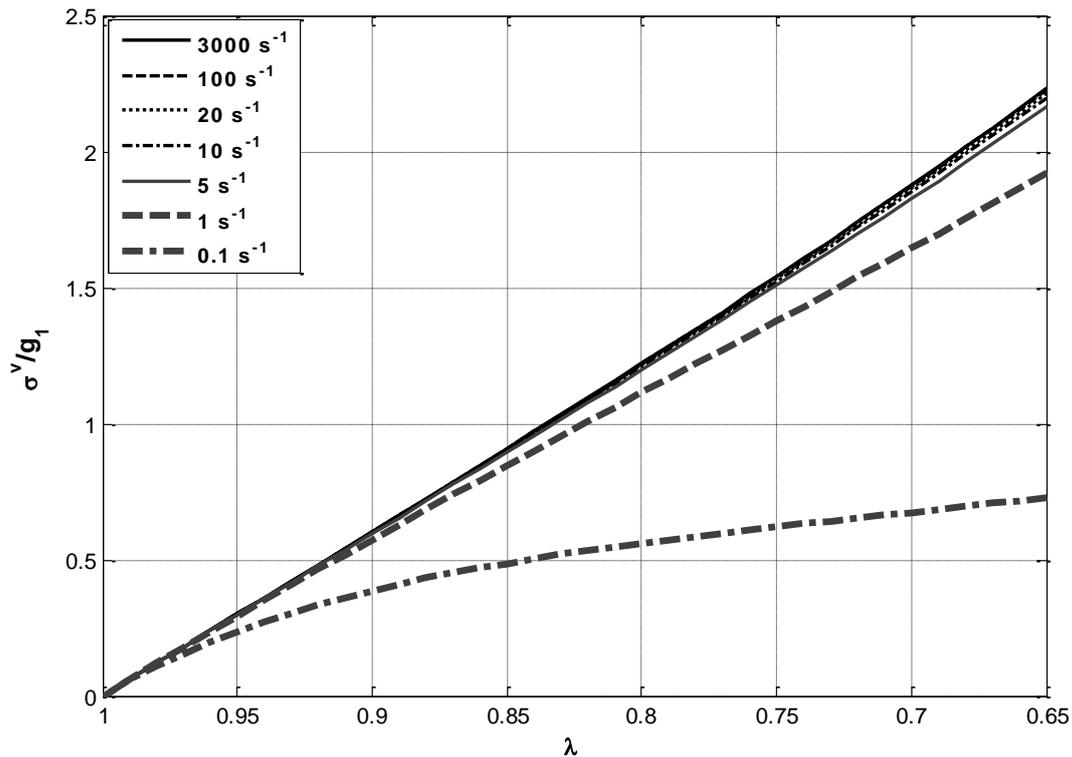


Figure III-11 : Courbe des contraintes-élongations du modèle de K-BKZ pour différentes vitesses de déformations en traction uni-axiale



**Figure III-12 :** Courbe des contraintes-élongations du modèle de K-BKZ pour différentes vitesses de déformations en compression

Le modèle K-BKZ est capable de décrire le comportement mécanique à des vitesses de déformations moyennes mais pour les grandes vitesses, les contraintes ne varient que très légèrement en fonction de la vitesse de déformation. Ceci implique que ce modèle est bien adapté pour décrire le comportement viscoélastique pour des moyennes vitesses de déformations.

### III.2.6.3 Choix du modèle de comportement

Les modèle de Maxwell est capable de décrire le comportement des élastomères pour les vitesses de déformation très élevées. Tandis que le modèle de K-KBZ peut simuler la réponse mécanique pour les moyennes vitesses de déformations.

### III.3. Modèle visco-hyper-élastique

Le comportement mécanique de l'élastomère dans les conditions quasi-statiques peut être décrit par un modèle hyper-élastique, Cependant, à des vitesses de déformation élevées, son comportement mécanique doit être décrit par un modèle visco-hyper-élastique :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{Hyp} + \boldsymbol{\sigma}^V \quad (\text{III.31})$$

Où  $\boldsymbol{\sigma}^{Hyp}$  est le tenseur des contraintes hyperélastiques,

Et  $\boldsymbol{\sigma}^V$  est le tenseur des contraintes viscoélastiques,

Les deux parties du modèle de contraintes sont indépendantes l'une de l'autre.

Pour la compression uni-axiale, le modèle constitutif visco-hyper-élastique s'exprime :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{Hyp} + \boldsymbol{\sigma}^V$$

Notons bien que la loi de comportement hyper-élastique choisie est Mooney-Rivlin.

En combinant l'analyse ci-dessus des modèles hyper-élastiques et viscoélastiques :

En substituant les équations (III.14) et (III.30) dans (III.31) :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{MR}^{hyp} + \boldsymbol{\sigma}^{V(2)}$$

Et les équations (III.14) et (III.29) dans (III.31) :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{MR}^{hyp} + \boldsymbol{\sigma}^{V(1)}$$

On obtient la contrainte de Cauchy pour les deux modèles viscoélastiques :

$$\sigma^{V(1)} = 2 \left[ (\lambda^2 - \lambda^{-1}) \left( C_{10} + \frac{C_{01}}{\lambda} \right) \right] + k_1 \left[ \lambda^2 \int_1^\lambda \phi \cdot e^{-\left(\frac{\lambda-\xi}{\lambda\tau_{Ri}}\right)} \xi \, d\xi + \frac{1}{2} \lambda^{-1} \int_1^\lambda \phi \cdot e^{-\left(\frac{\lambda-\xi}{\lambda\tau_{Ri}}\right)} \xi^{-2} d\xi \right] \quad (\text{III.32a})$$

$$\sigma^{V(2)} = 2 \left[ (\lambda^2 - \lambda^{-1}) \left( C_{10} + \frac{C_{01}}{\lambda} \right) \right] + 2g_1 \left( \lambda^2 \int_1^\lambda \xi^{-3} e^{-\left(\frac{\lambda-\xi}{\lambda\tau_{Ri}}\right)} d\xi + \lambda^{-1} \int_1^\lambda e^{-\left(\frac{\lambda-\xi}{\lambda\tau_{Ri}}\right)} d\xi \right) \quad (\text{III.32b})$$

III.3.1 Identification paramétrique pour les modèles combinés

a. Modèle combiné : Mooney-Rivlin+ N unités de Maxwell

Paramètre A1	20.019
Paramètre A2	-8.84
Paramètre A3	-83.16
Paramètre k1	62.21
Paramètre $\tau_R$	99.96
Paramètre C10	0.36
Paramètre C01	0.29

Tableau 5.a : Identification paramétrique du modèle visco-hyper-élastique (Mooney-Rivlin +N unités de Maxwell)

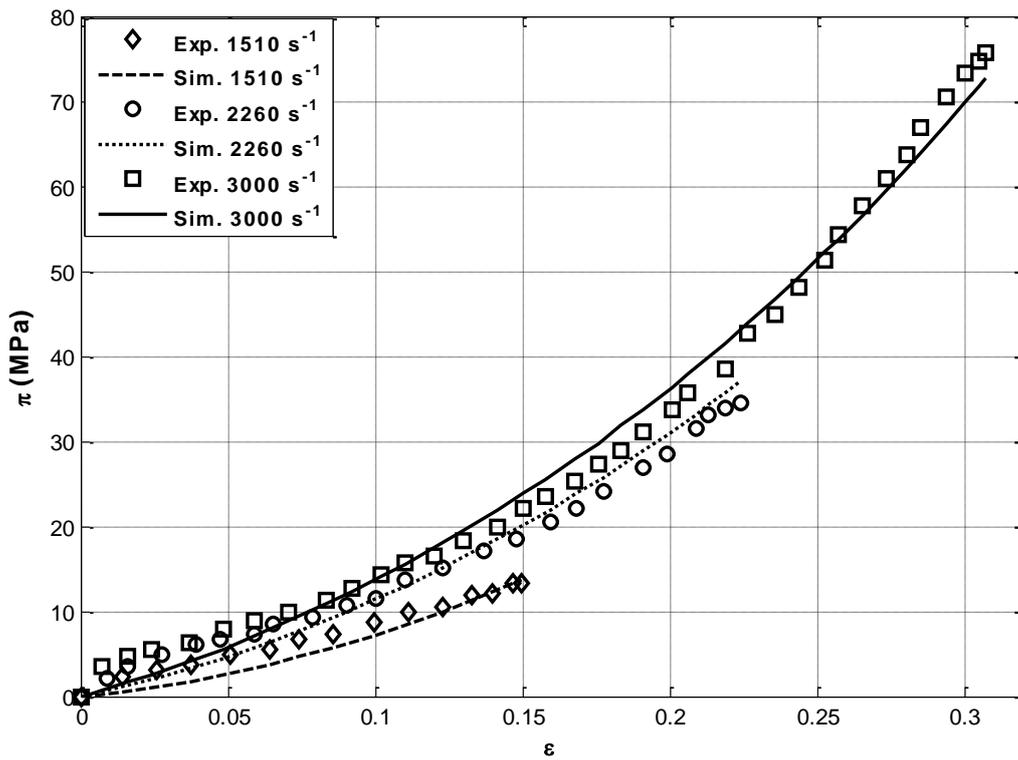


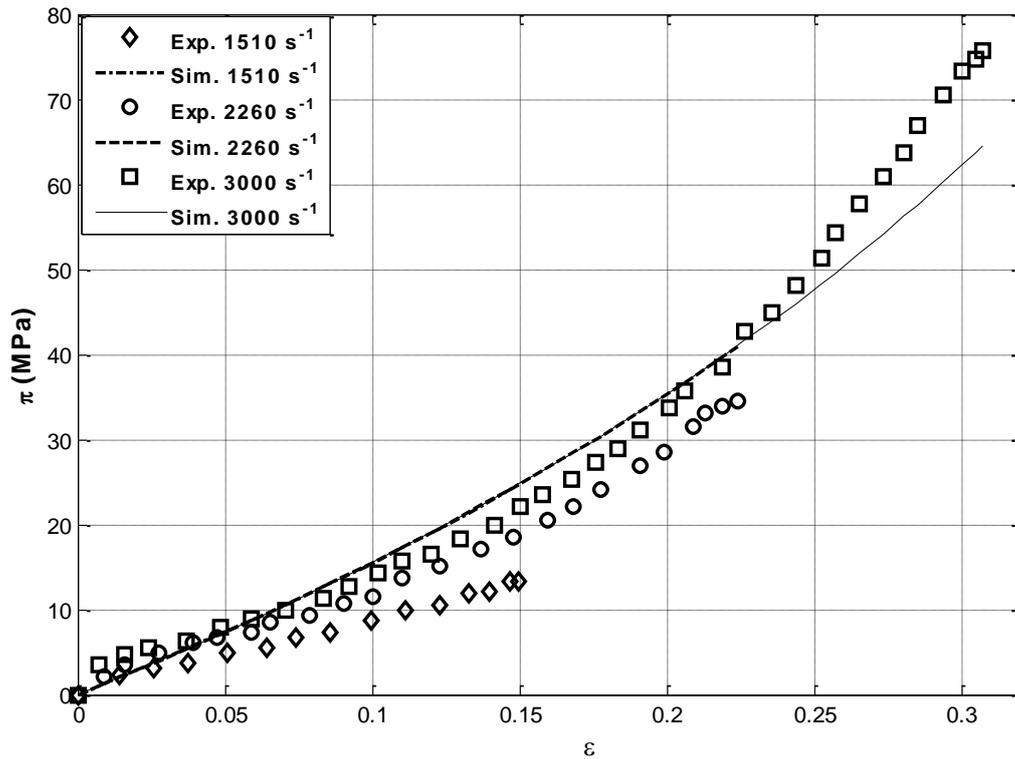
Figure III-13.a : Courbe des contraintes-déformations du modèle combiné visco-hyper-élastique (Mooney-Rivlin + N unités de Maxwell)

Le modèle « Mooney-Rivlin + N unités de Maxwell » décrit l'expérience, et la différence entre les contraintes théoriques et expérimentales est très faibles.

**b. Modèle combiné : Mooney-Rivlin+ K-BKZ**

Paramètre $g_1$	22.46
Paramètre $\tau_R$	906.66
Paramètre $C_{10}$	0.36
Paramètre $C_{01}$	0.29

**Tableau 6.b :** Identification paramétrique du modèle visco-hyper-élastique (Mooney-Rivlin + K-BKZ)



**Figure III-13.b :** Courbe des contraintes-déformations du modèle combiné visco-hyper-élastique (Mooney-Rivlin + K-BKZ)

Pour les trois vitesses de déformations, la courbe théorique est la même ce qui implique que ce modèle « Mooney-Rivlin + K-BKZ » ne simule pas la réponse mécanique pour les fortes vitesses de déformations.

### III.4. Simulation de l'essai de compression

Nous avons réalisé un calcul EF pour la partie hyper-élastique pour déterminer les contraintes et déformations en tout point de la structure, et ainsi les comparer aux données expérimentales avec lesquels nous avons réalisé l'étude. Les modèles viscoélastiques n'étant pas encore très utilisés, il est difficile de les trouver dans les logiciels de calcul éléments finis. Par conséquent on se limitera à la partie hyper-élastique étudié.

#### III.4.1 Identification à partir du logiciel de simulation

L'identification se fait pour les paramètres matériaux des modèles choisie avec le logiciel de simulation EF.

##### a. Identification des paramètres Mooney-Rivlin pour les 3 vitesses de déformation

Pour  $\dot{\lambda} = 0.1 \text{ s}^{-1}$

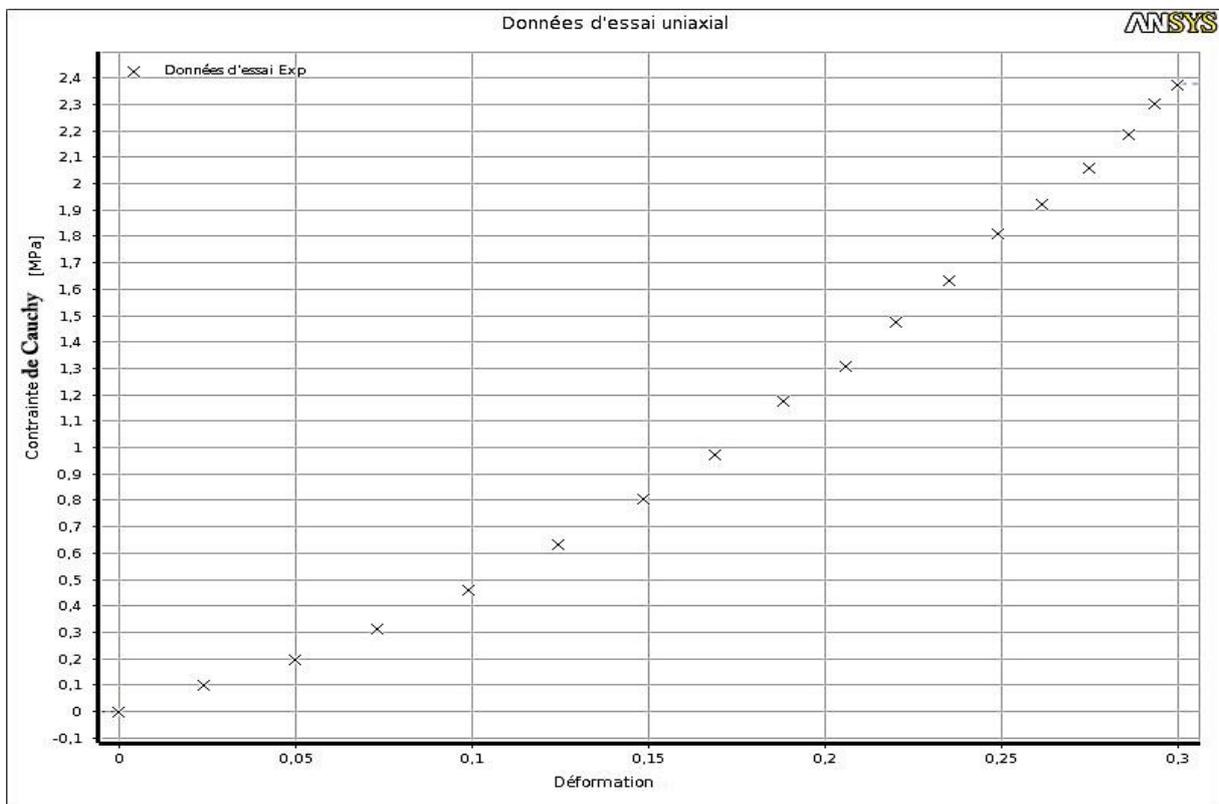


Figure III-14 : courbe chargements des contraintes-déformations

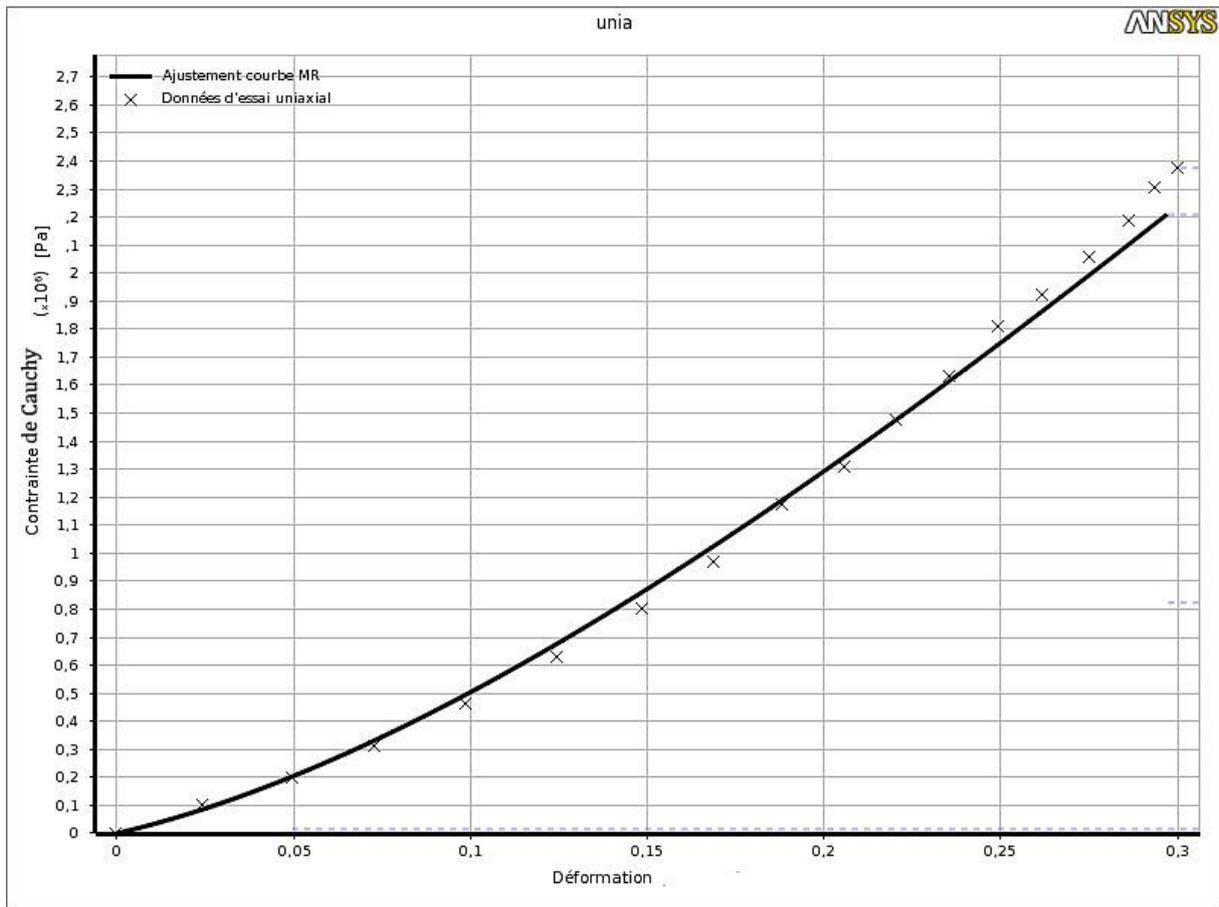
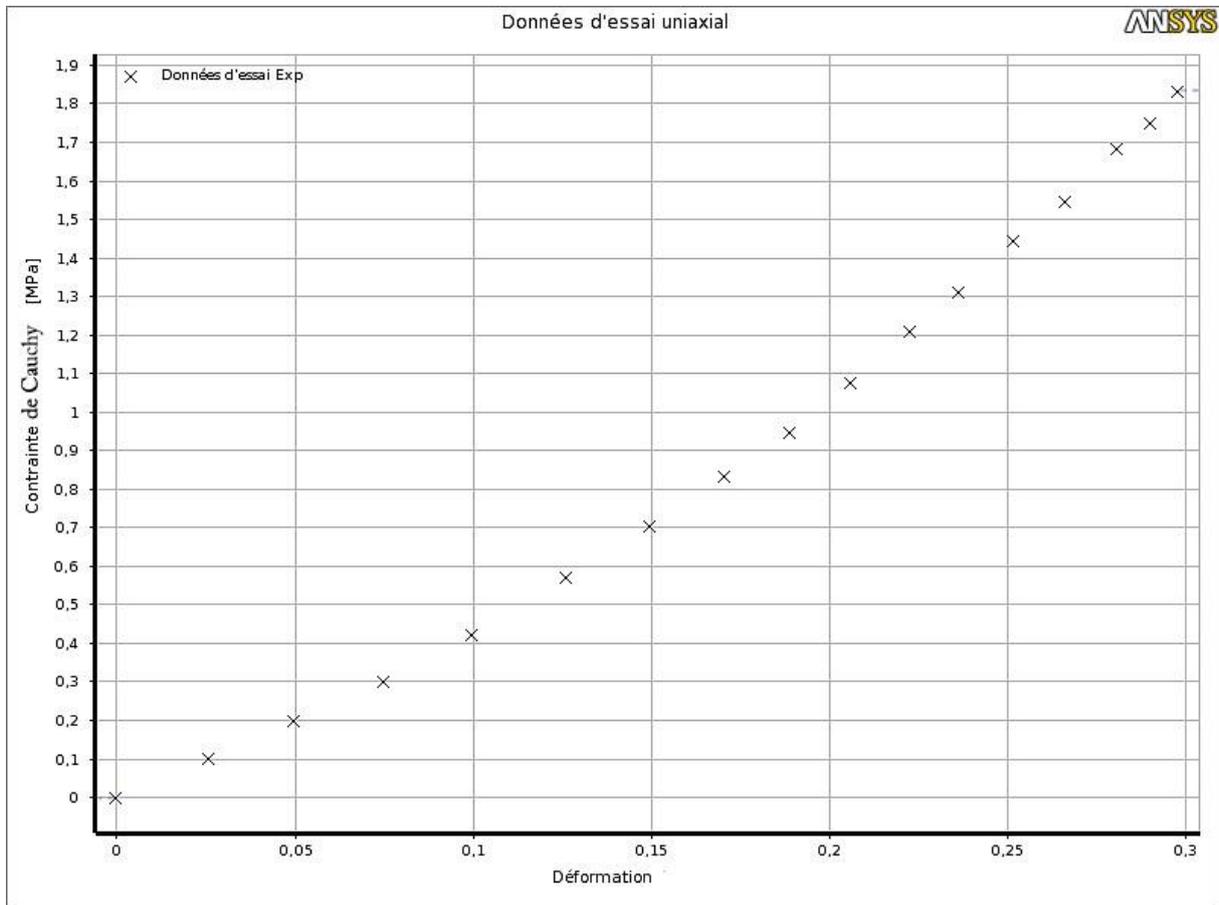


Figure III-15 : ajustement de la courbe contraintes-déformations

	$C_{10}$ [MPa]	$C_{01}$ [MPa]
$\dot{\lambda} = 0.1 \text{ s}^{-1}$	0,74	-0,07

Pour  $\dot{\lambda} = 0.01 \text{ s}^{-1}$



**Figure III-16 : courbe chargements des contraintes-déformations**

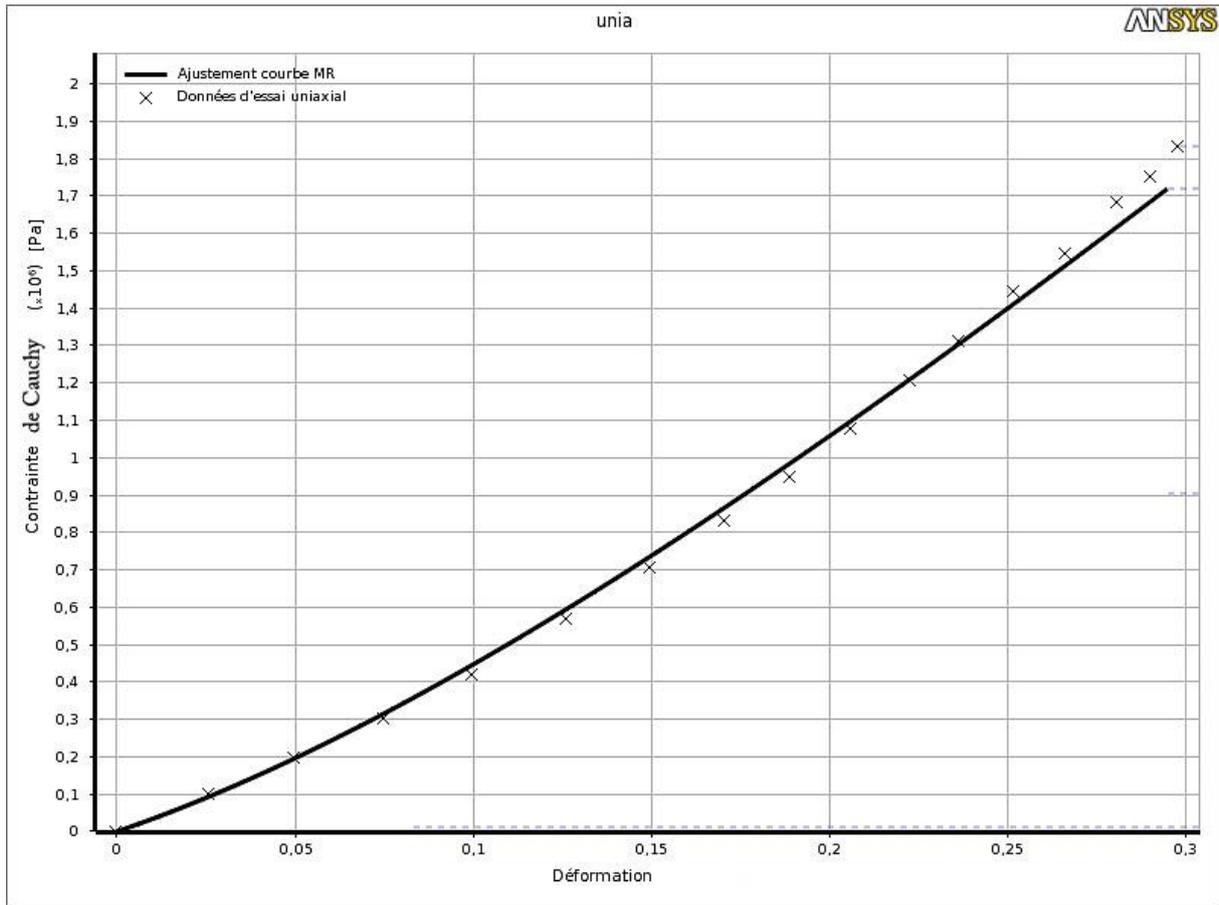


Figure III-17 : ajustement de la courbe contraintes-déformations

	$C_{10}$ [MPa]	$C_{01}$ [MPa]
$\dot{\lambda} = 0.01 \text{ s}^{-1}$	0,73	-0,06

Pour  $\dot{\lambda} = 0.001 \text{ s}^{-1}$

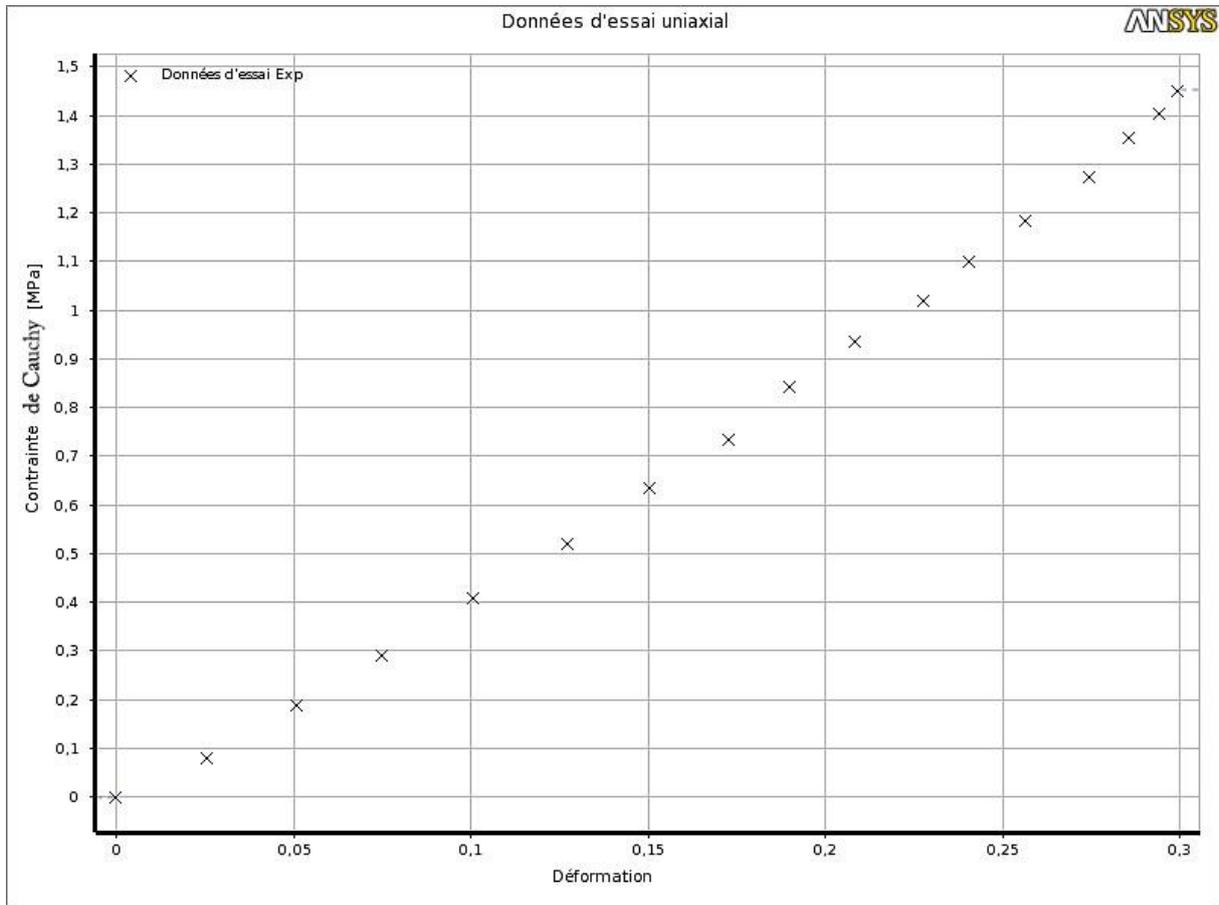


Figure III-18 : courbe chargements des contraintes-déformations

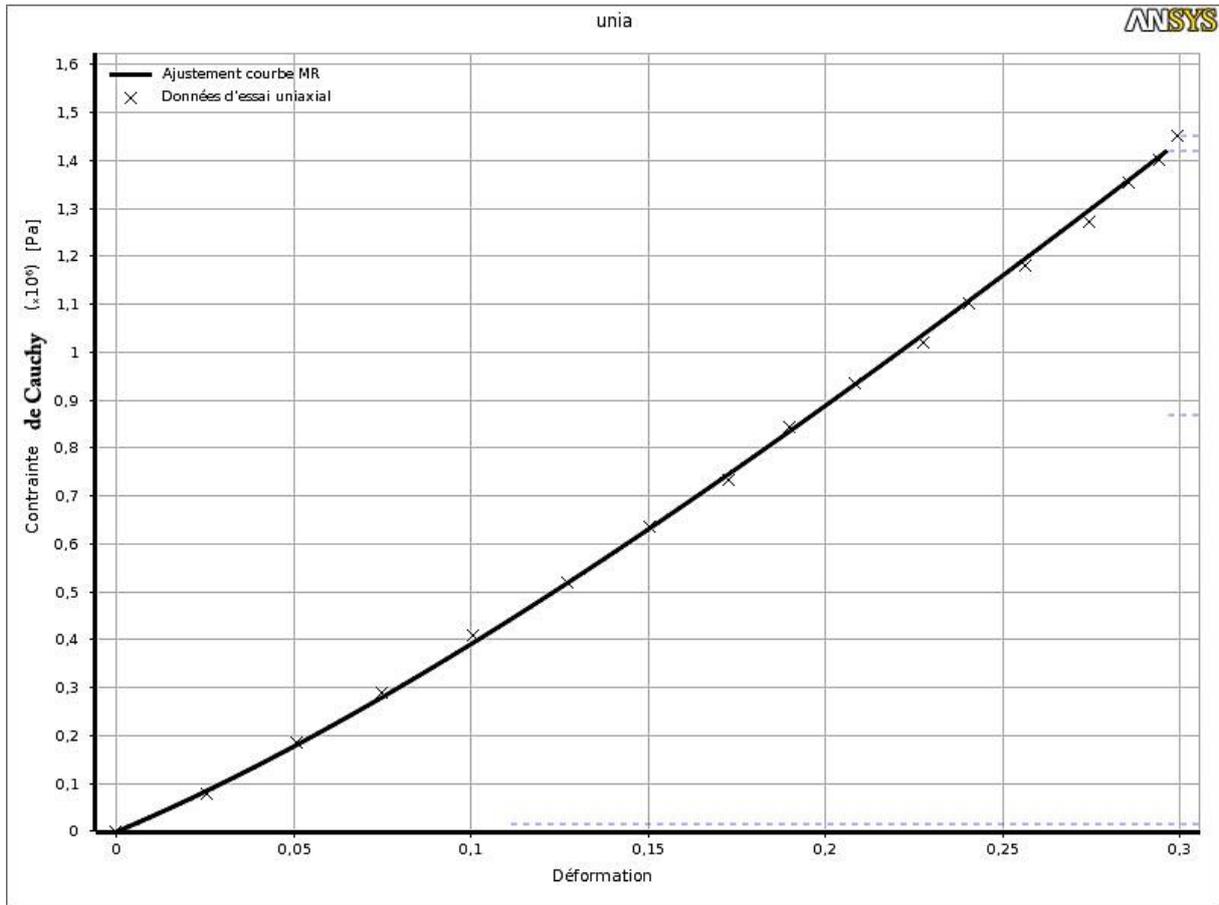


Figure III-19 : ajustement de la courbe contraintes-déformations

	$C_{10}$ [MPa]	$C_{01}$ [MPa]
$\dot{\lambda} = 0.001 \text{ s}^{-1}$	0,70	-0,04

### III.4.2 Présentation de la géométrie

Afin de construire un modèle éléments finis, nous allons nous servir de la solution analytique pour valider le modèle numérique, pour cela on doit définir la structure à étudier

Nous considérons une éprouvette normalisée dont les dimensions sont exprimées en millimètres dans la figure suivante :

$$L_0 = 100\text{mm}, B = 6\text{mm},$$

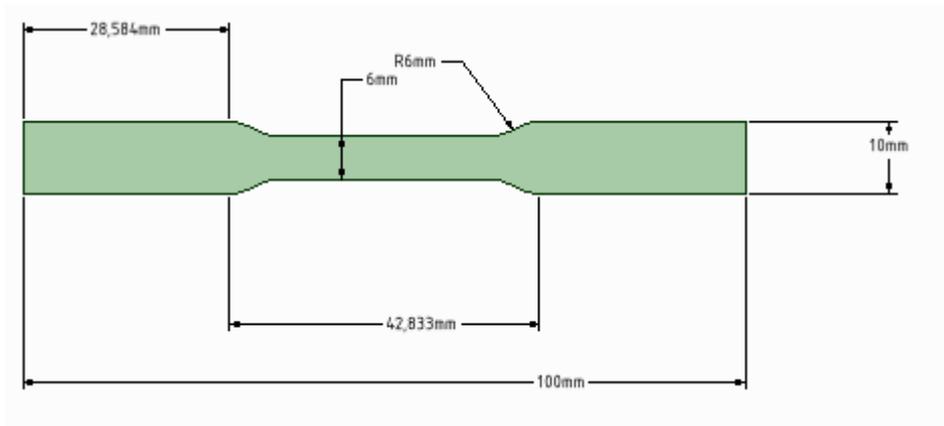


Figure III-20 : Modèle étudié

#### a. Le maillage

La résolution par la méthode des éléments finis d'un problème physique formulé en termes d'équation aux dérivées partielles s'appuie sur une discrétisation spatiale, ou maillage, du domaine étudié. Nous avons considéré une modélisation 3D avec un maillage de type linéaire quadratique et une taille d'éléments de 0,03 mm

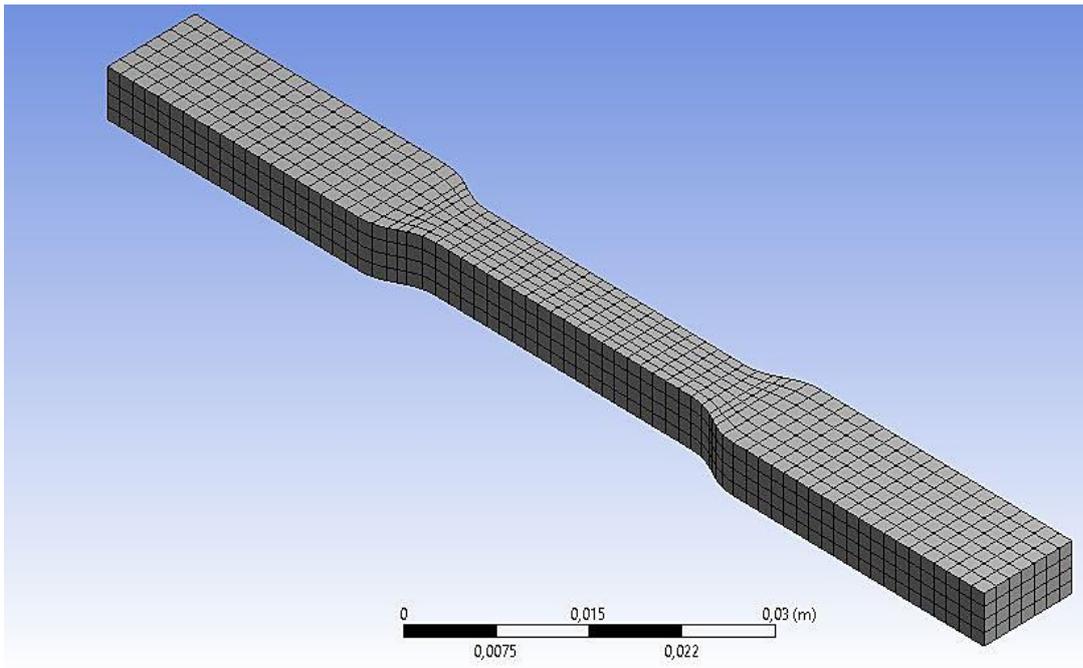


Figure III-21 : Modèle maillé

Nombre de nœuds	10691
Nombre d'éléments	2016

#### b. Chargement et conditions aux limites

Pour simuler l'essai de traction uni-axiale, nous avons bloqué tous les nœuds du modèle situés dans le plan  $x=-L/2$  par l'application d'un encastrement au niveau d'extrémité  $x=-L/2$ . puis nous avons appliqué un chargement imposé sous forme d'un déplacement suivant la direction de l'axe de l'éprouvette OX.

La figure ci-dessus représente les chargements appliqués et les conditions aux limites du problème.

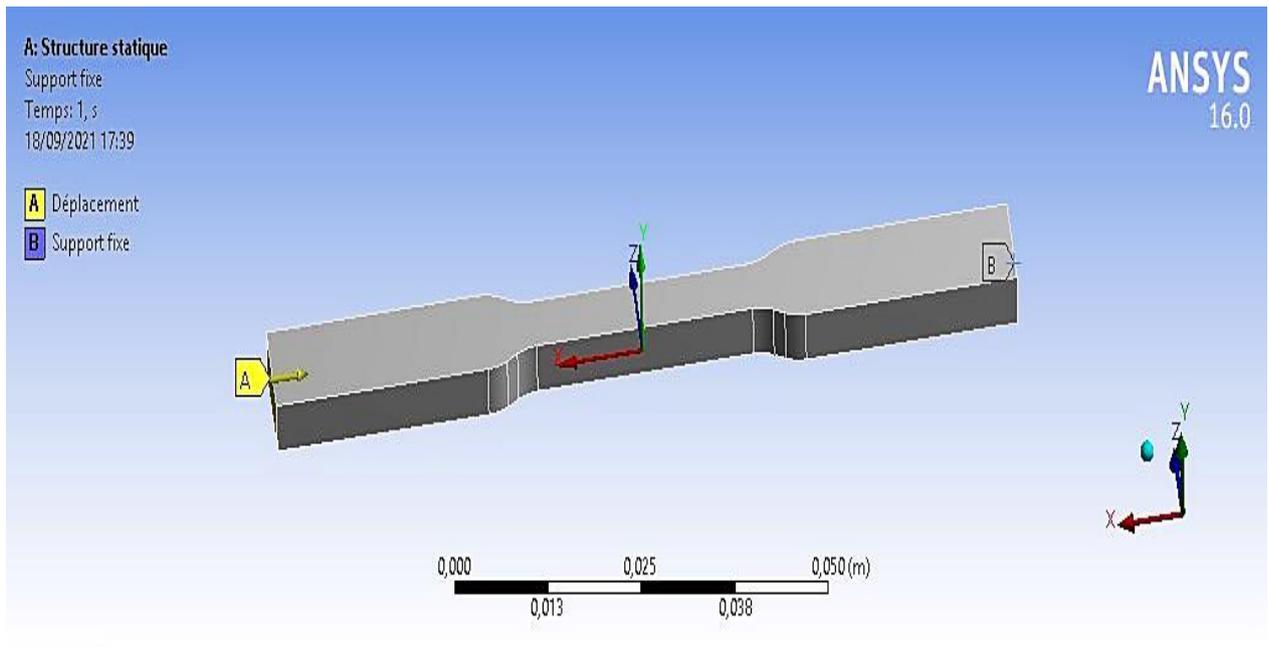


Figure III-22 : Chargements et conditions aux limites

### III.4.3 Résultats de la simulation numérique

Pour cette simulation, nous avons supposé le matériau de type Mooney-Rivlin, les paramètres du matériau utilisé ont été calculés à partir du logiciel EF. Nous allons déterminer numériquement la distribution des contraintes de Von Mises étant le milieu isotrope ( $\sigma_{xx} = \sigma^{VM}$ ), la déformation élastique équivalente et le déplacement total dans la zone utile de l'éprouvette pour les différents taux de déformation enregistrés expérimentalement.

Pour la première vitesse de déformation  $\dot{\lambda} = 0.1 \text{ s}^{-1}$

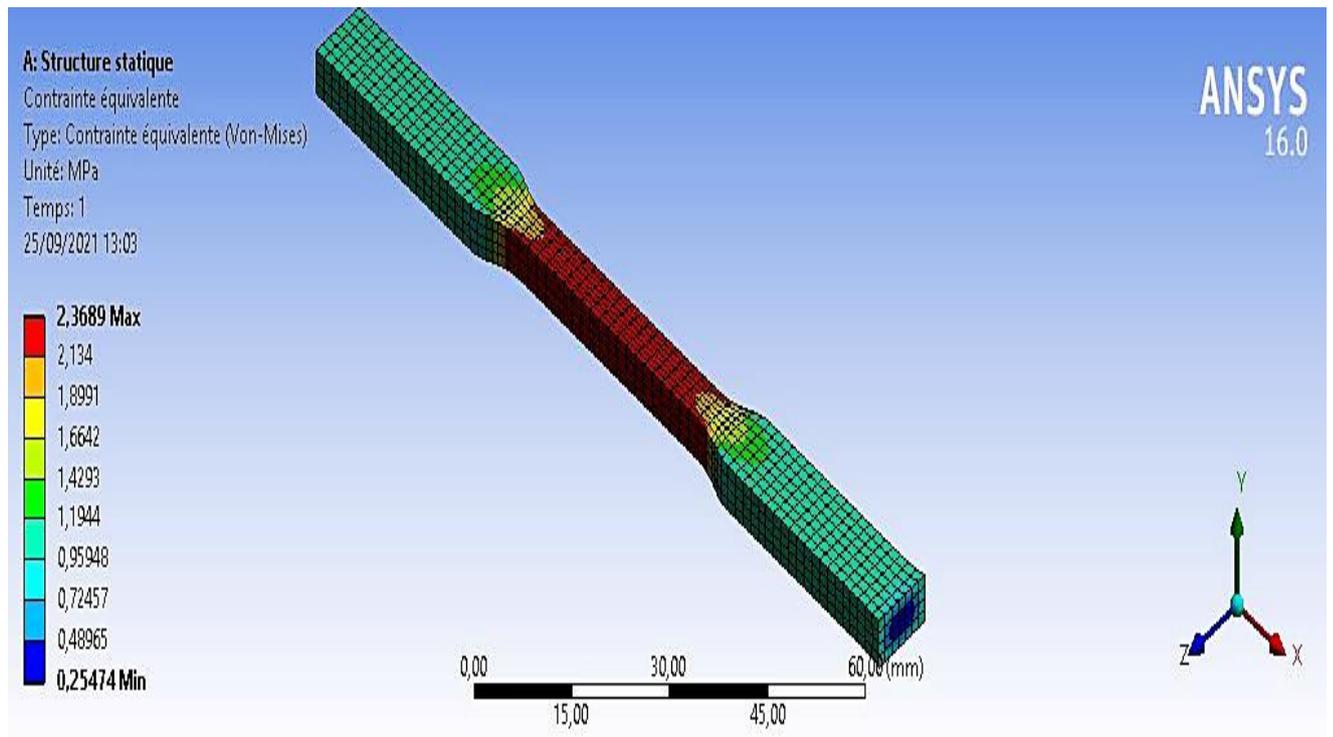


Figure III-23 : Distribution des contraintes pour  $\dot{\lambda} = 0.1 \text{ s}^{-1}$

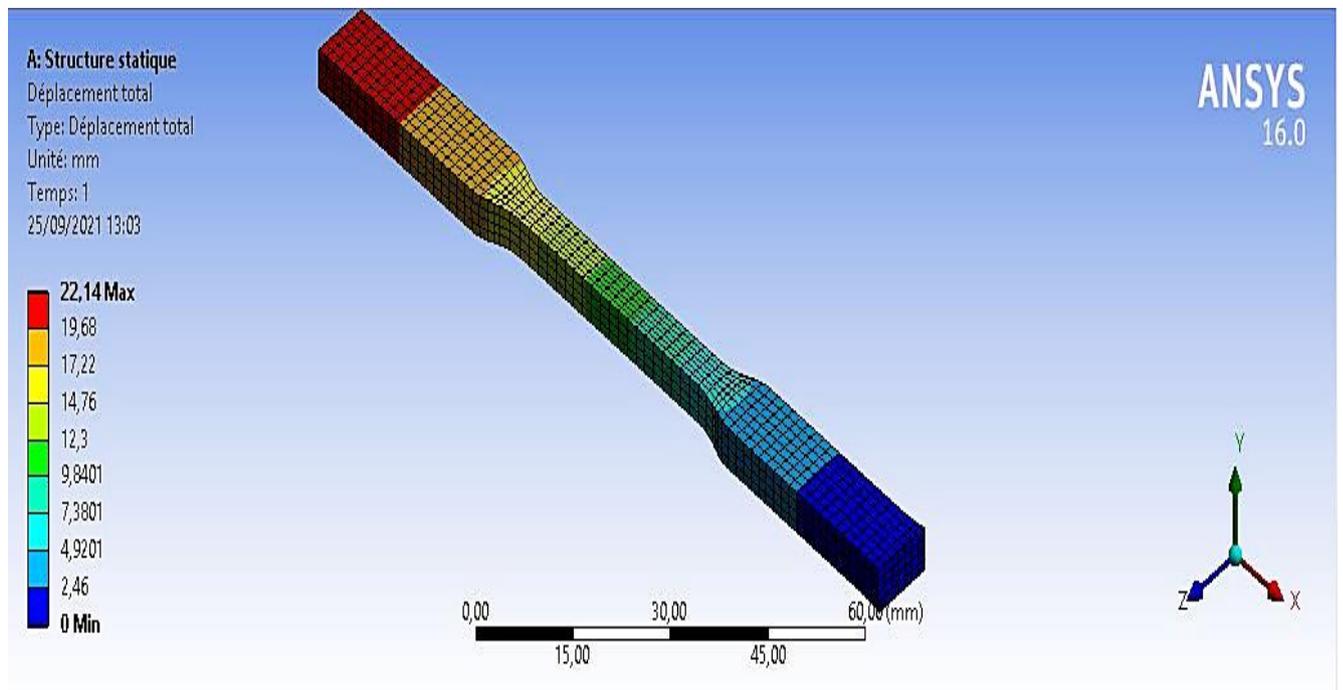


Figure III-24 : déplacement total de l'éprouvette pour  $\dot{\lambda} = 0.1 \text{ s}^{-1}$

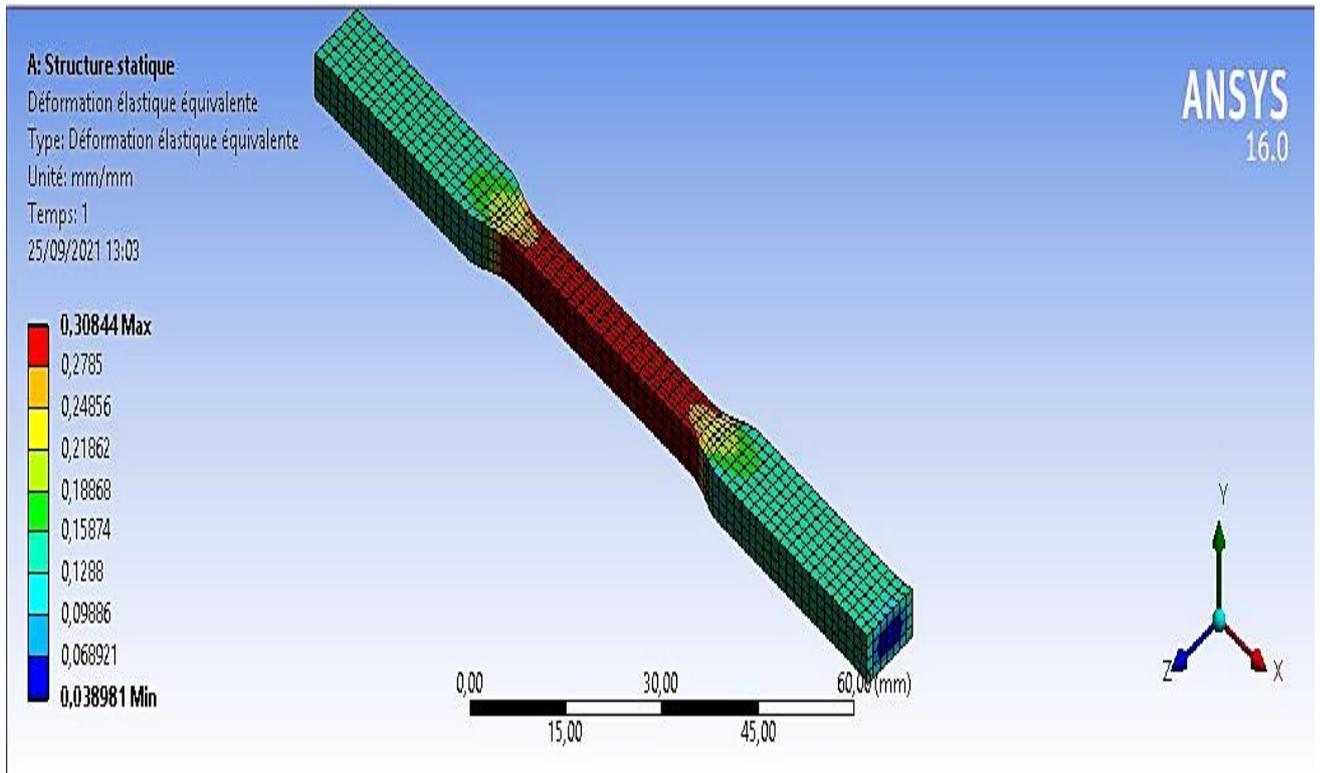


Figure III-25 : déformation élastique équivalente de l'éprouvette pour  $\dot{\lambda} = 0.1 \text{ s}^{-1}$

Pour la deuxième vitesse de déformation  $\dot{\lambda} = 0.01 \text{ s}^{-1}$  :

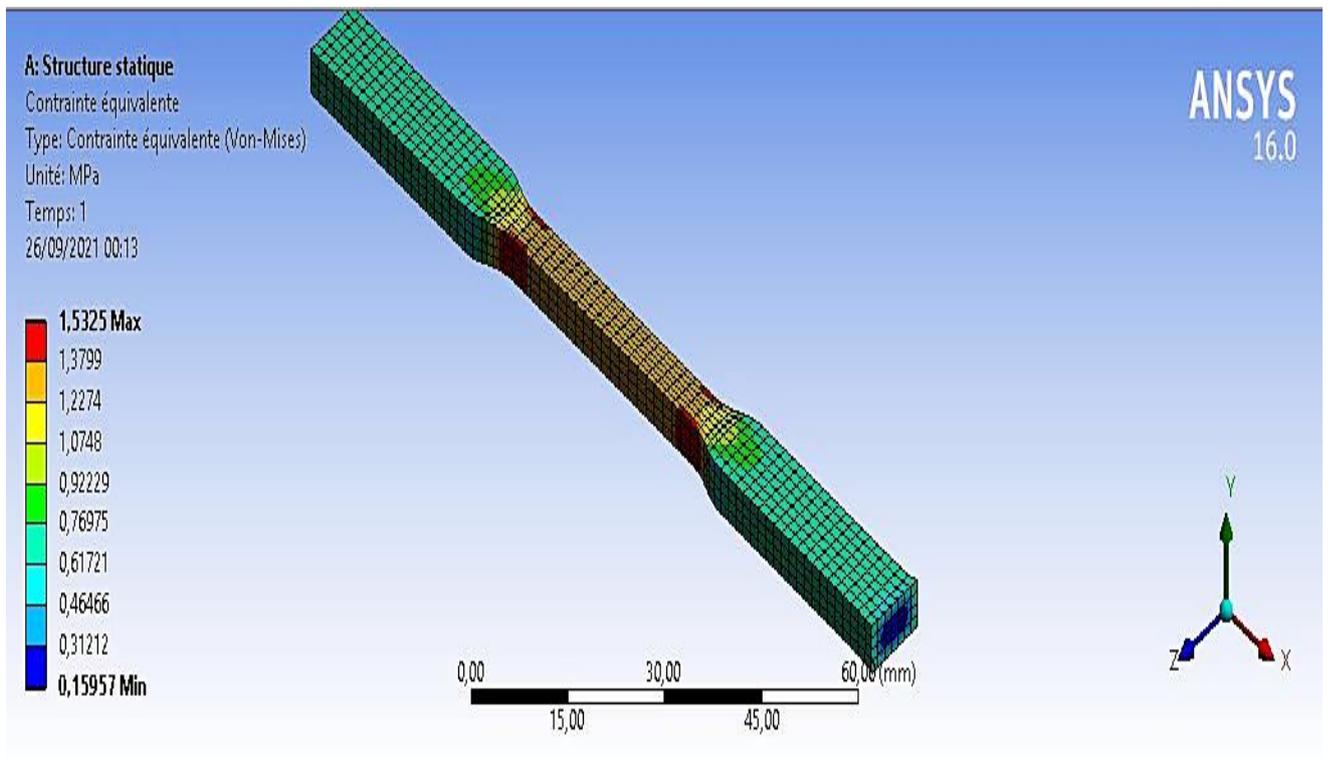


Figure III-26 : Distribution des contraintes pour  $\dot{\lambda} = 0.01 \text{ s}^{-1}$

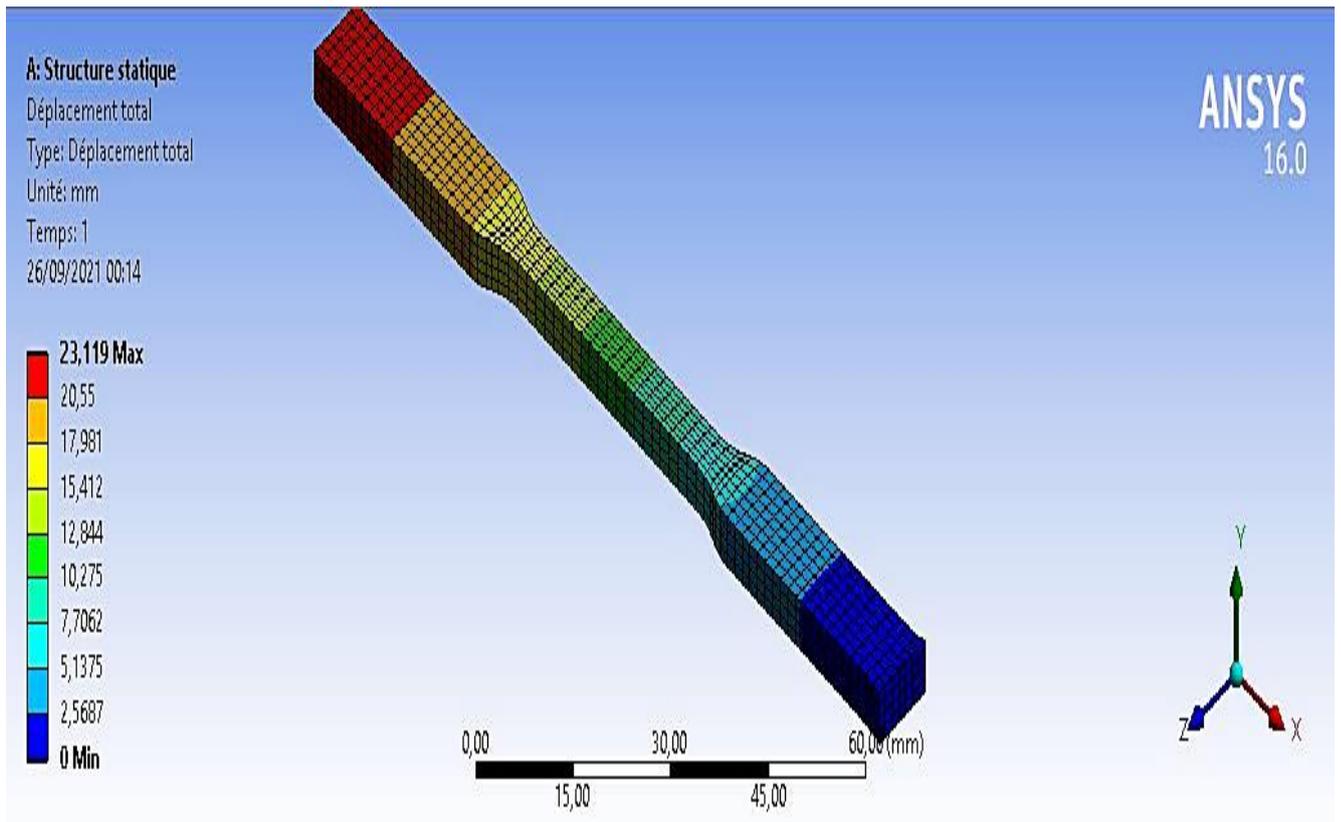


Figure III-27 : Déplacement total de l'éprouvette pour  $\dot{\lambda} = 0.01 \text{ s}^{-1}$

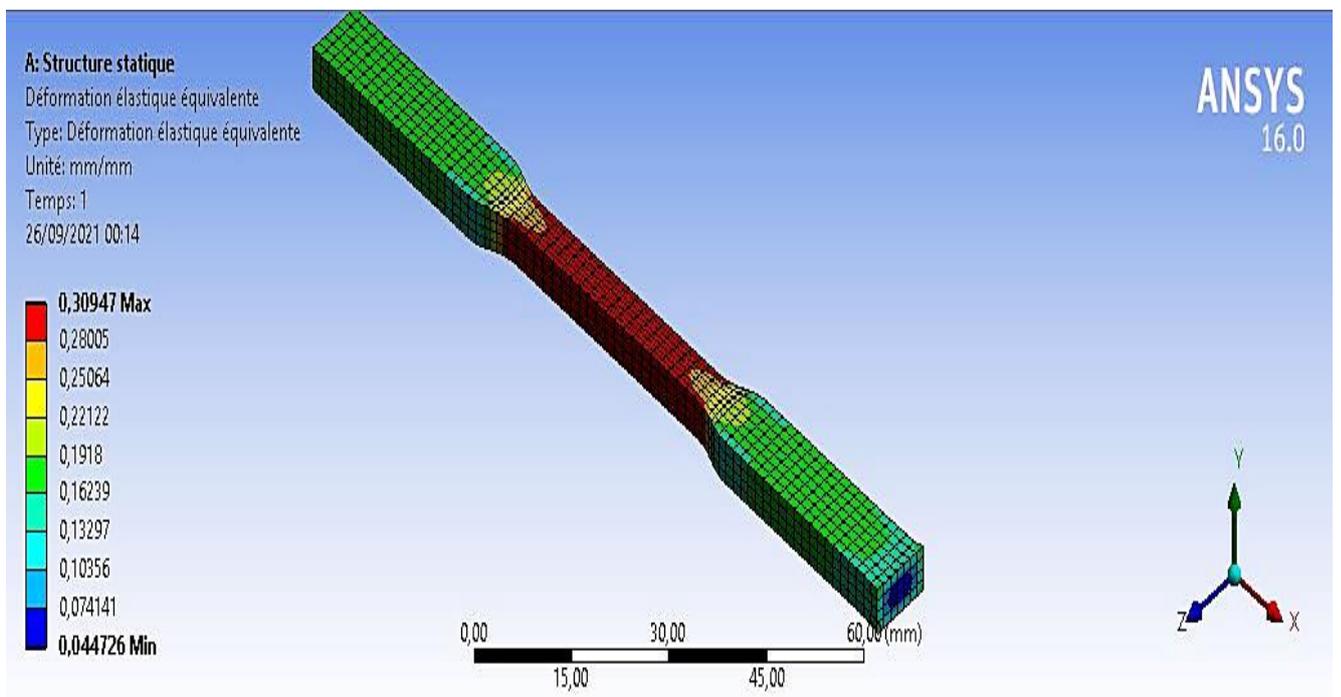


Figure III-28 : Déformation élastique équivalente de l'éprouvette pour  $\dot{\lambda} = 0.01 \text{ s}^{-1}$

Pour la troisième vitesse de déformation  $\dot{\lambda} = 0.001 \text{ s}^{-1}$  :

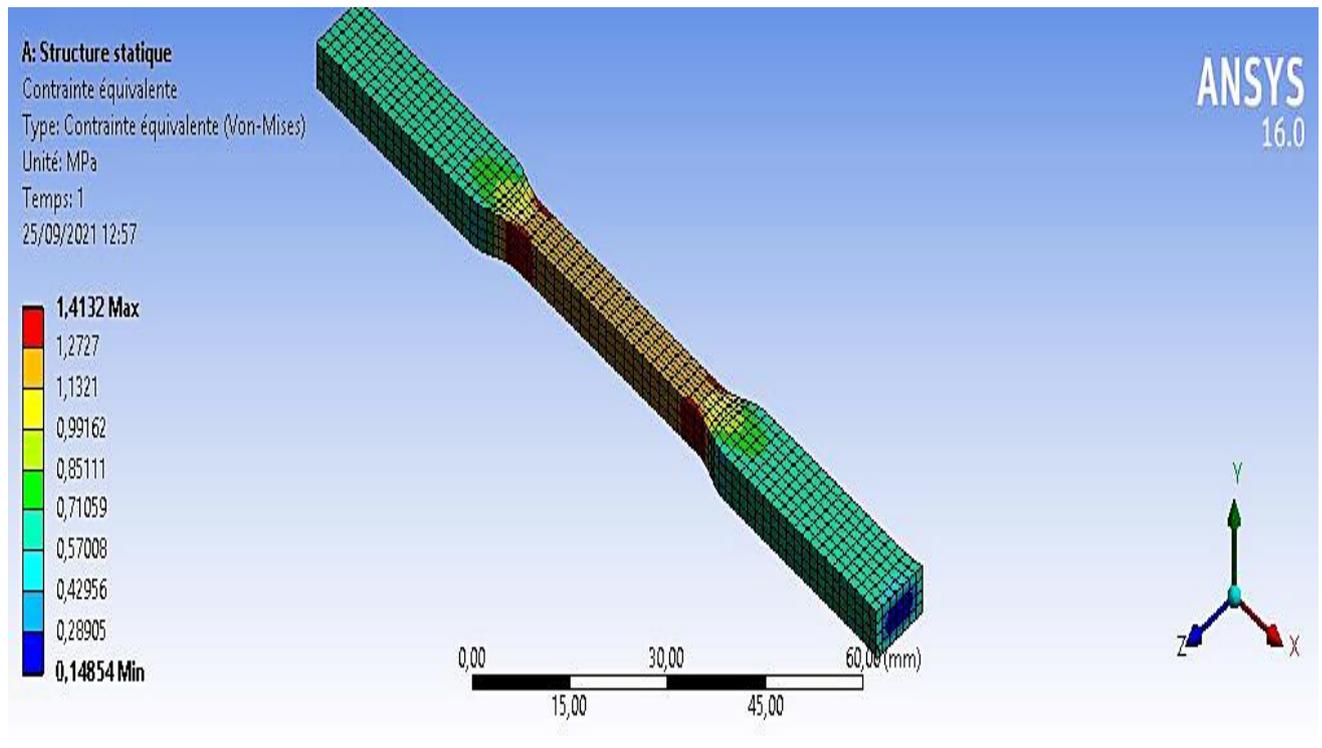


Figure III-29 : Distribution des contraintes pour  $\dot{\lambda} = 0.001 \text{ s}^{-1}$

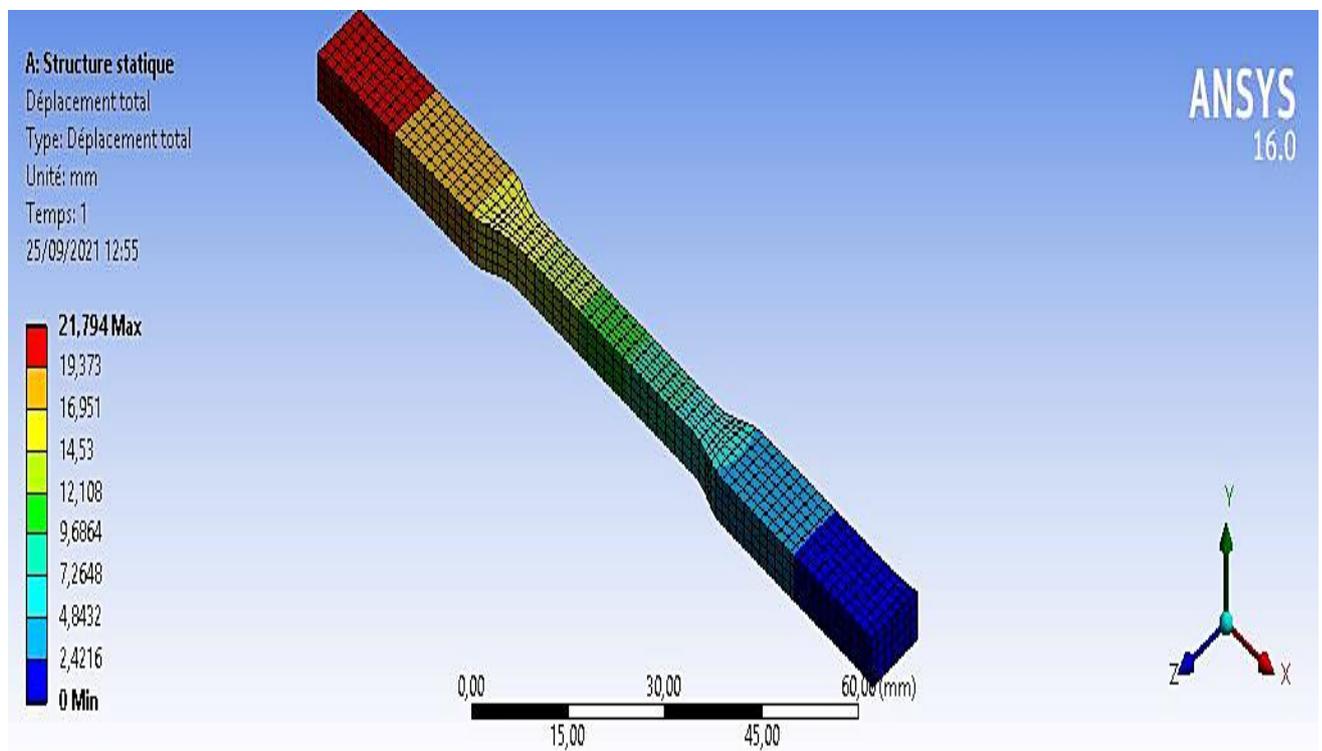
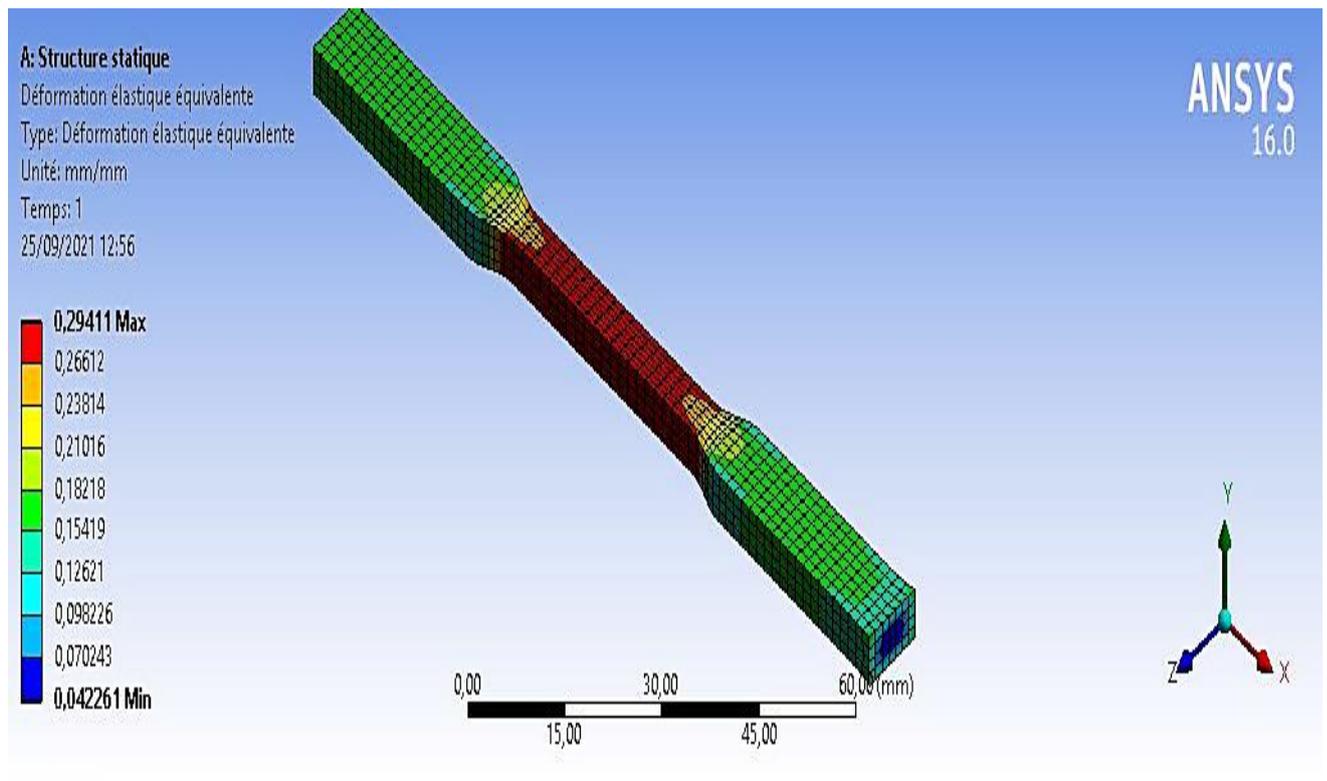


Figure III-30 : Déplacement total de l'éprouvette pour  $\dot{\lambda} = 0.001 \text{ s}^{-1}$



**Figure III-31** : Déformation élastique équivalente de l'éprouvette pour  $\dot{\lambda} = 0.001 \text{ s}^{-1}$

#### III.4.4 Discussion des résultats

Nous remarquons à travers les différents résultats, une légère différence entre les valeurs des contraintes numériques et expérimentales pour les deux plus grandes vitesses de déformation, pour la vitesse de référence statique les résultats sont similaires et ce pour un même taux de déformation (Annexe E). Lors de la simulation numérique le même taux de déformation est atteint pour une contrainte qui est moindre que l'expérimentale.

	$\dot{\lambda} = 0.1 \text{ s}^{-1}$	$\dot{\lambda} = 0.01 \text{ s}^{-1}$	$\dot{\lambda} = 0.001 \text{ s}^{-1}$
Contraintes expérimentales $\sigma^{Exp}$	2.38	1.83	1.45
Contraintes numérique $\sigma^{Num}$	2.37	1.53	1.48
Erreur relative % $100 \left  \frac{\sigma^{Exp} - \sigma^{Num}}{\sigma^{Exp}} \right $	0.31 %	16.42 %	1.61 %

Tableau 7 : Erreur relative du calcul des contraintes maximales

### III.4.5 Comparaison des valeurs Expérimentales et numériques

Pour  $\dot{\lambda} = 0.1 \text{ s}^{-1}$

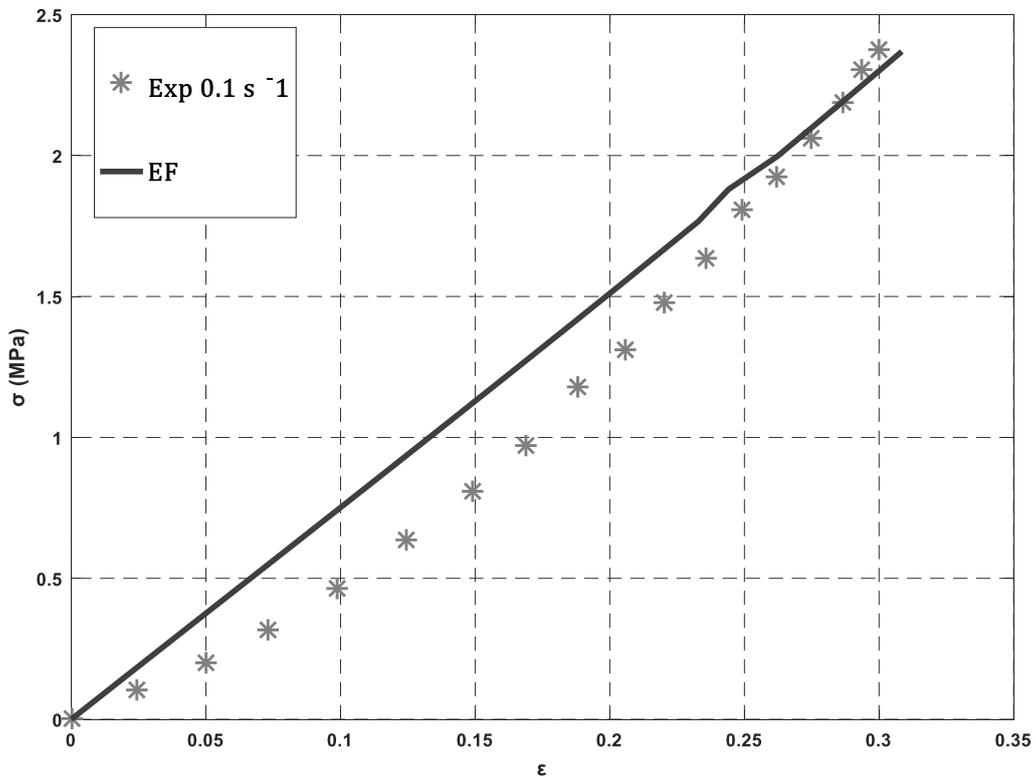
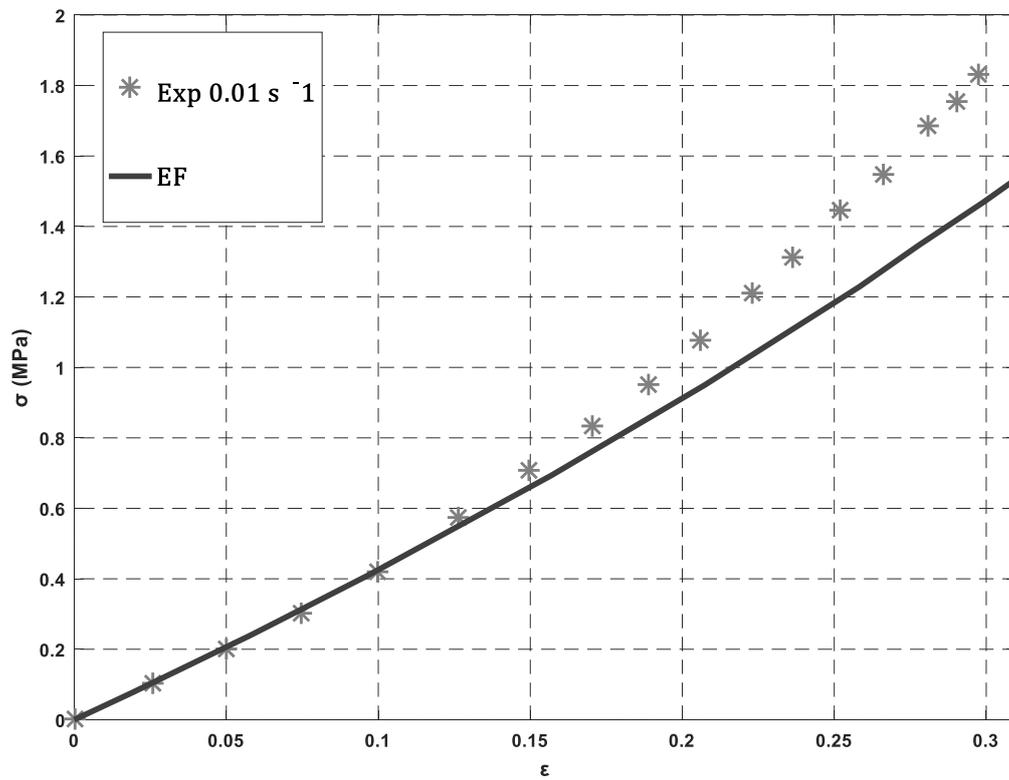


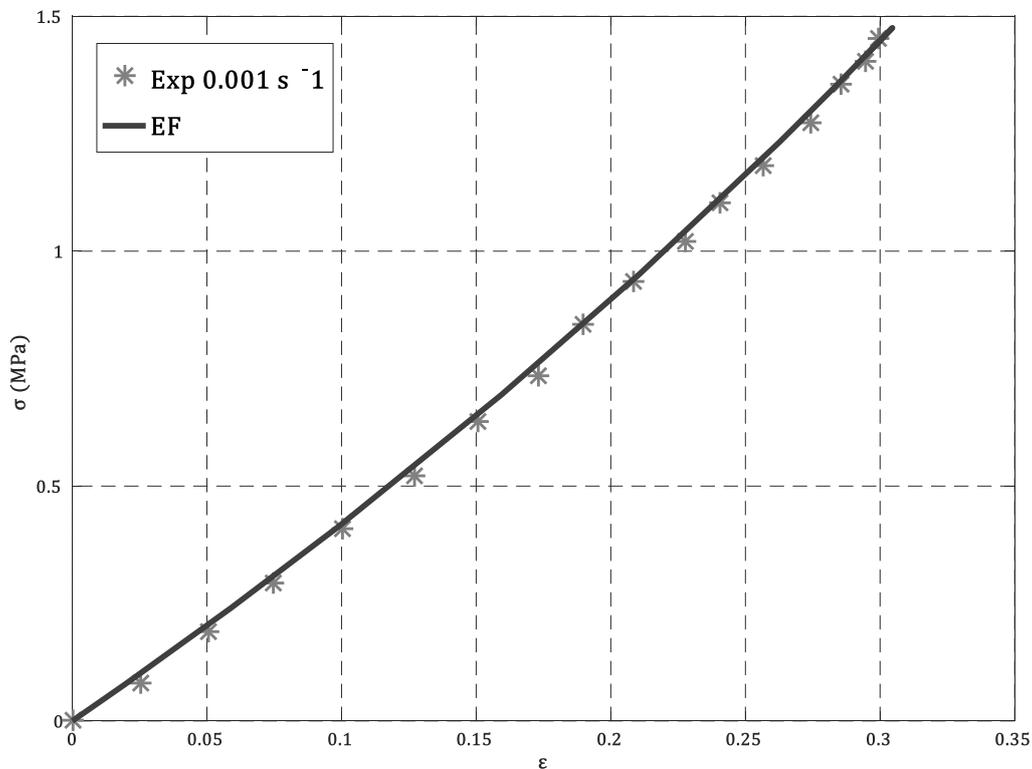
Figure III-32 : Comparaison de la courbe des contraintes expérimentales avec les contraintes calculées numériquement pour  $\dot{\lambda} = 0.1 \text{ s}^{-1}$

Pour  $\dot{\lambda} = 0.01 \text{ s}^{-1}$



**Figure III-33** : Comparaison de la courbe des contraintes expérimentales avec les contraintes calculées numériquement pour  $\dot{\lambda} = 0.01 \text{ s}^{-1}$ .

Pour  $\dot{\lambda} = 0.001 \text{ s}^{-1}$



**Figure III-34 :** Comparaison de la courbe des contraintes expérimentales avec les contraintes calculées numériquement pour  $\dot{\lambda} = 0.001 \text{ s}^{-1}$

### III.5 Conclusion

Les modèles hyperélastiques comme par exemple le modèle de Mooney-Rivlin et Yeoh sont capables de décrire le comportement quasi-statique des matériaux élastomères.

Le comportement en dynamique est décrit par les modèles hyper-viscoélastiques comme par exemple le modèle N unités de Maxwell et le modèle K-BKZ.

# **Conclusion Générale**

# Conclusion Générale

Ce mémoire s'inscrit dans le cadre de l'étude du comportement statique et dynamique des matériaux élastomères.

Les objectifs principaux de notre travail sont :

- Faire une comparaison entre les deux modèles hyper-élastiques (Mooney-Rivlin et Yeoh). Les résultats montrent que les deux modèles conviennent pour les sollicitations quasi-statiques, mais l'expression de la contrainte en traction du modèle de Mooney-Rivlin est simple et le nombre de paramètre du matériau à déterminer est inférieur à celui de Yeoh.
- Le deuxième objectif était de comparer deux modèles viscoélastiques : le modèle N unités de Maxwell et le modèle K-BKZ. Nous avons montré que l'applicabilité du modèle est une fonction de la vitesse de déformation.
- Identifier les paramètres des deux modèles hyper-viscoélastiques en supposant que la partie hyper-élastique est donnée par le modèle de Mooney Rivlin. La méthode d'identification est la méthode Monte Carlo. Nous avons trouvé que le modèle N unités de Maxwell est capable de décrire l'expérience pour des vitesses de déformations très élevées.
- Enfin, nous avons utilisé un logiciel Eléments Finis pour déterminer la distribution des contraintes en compression. Nous avons comparé les résultats de simulation du modèle de Mooney-Rivlin avec les résultats expérimentaux. Généralement, l'erreur calculée est faible et les paramètres identifiés à l'aide du logiciel de simulation varient d'une vitesse à une autre.

# **Références Bibliographiques**

## Références Bibliographiques

- [1] GHERIB Samia, Effet du noir de Carbone et de la Silice sur le comportement à la rupture des élastomères, Université du Guelma, Thèse de Doctorat 2010
- [2] WERNER Hofmann, Rubber Technology Handbook, Cincinnati : Hanser-Gardner Publications, p264, 1994
- [3] GRILLES Marckmann, « Contribution à l'étude des élastomères et membranes Soufflées », école Centrale de Nantes, Thèse de Doctorat 2004.
- [4] Imen Elkhaldi-Mkaouar, Application de la différentiation automatique pour l'identification, l'optimisation et l'étude de sensibilité dans quelques problèmes mécanique, These doctorat de l'université de Lorraine, le 17/02/2016.
- [5] Erwan. Verron. Modélisation du comportement des structures et des matériaux élastomères, Thèse de Doctorat, Université de Nantes, 2003.
- [6] L. Mullins et N. R. Tobin. Theoretical model for the elastic behavior of filled reinforced vulcanized rubbers , p.397-412, (1956).
- [7] S. Toki, T. Fujimaki, et M. Okuyama. "Strain-induced crystallization of natural rubber as detected real-time by wide-angle x-ray diffraction technique. Polymer, 41: p.5423-5429,(2000).
- [8] G.Chagnon, E.Verron, L., Gornet G. Marckmann et P. Charrier « On the relevance of continuum damage mechanics as applied to the mullins effect in elastomeres. » J. of the Mechanics and Physics of Solids, vol. 324, pp. 1-23(2003).
- [9] A.I. Medalia « Selecting carbon blacks for dynamic properties », Rubber World, Vol.168, n°49 (1973).
- [10] ZINE Adil, Fatigue multiaxial des élastomères : vers un critère de dimensionnement unifié. Thèse de doctorat, Université de Lille (France) et Université de FES (Maroc).2006.
- [11] Jean Christophe Petiteau, Caractérisation expérimentale et modélisation du comportement des elastomeres en dynamique rapide, Ecole Central de Nante, 2012.
- [12] J. Lei, M. Xu, T. Lio, Y Xuan, H. Sun and Zan Wei : Compressive mechanical behavior and constitutive model of Polyvinyl chloride elastomer under dynamic loading, Paper published as part of the special topic on Chemical Physics, Energy, Fluids and Plasmas, Materials Science and Mathematical Physics, 2020.
- [13] Fabrice DELEAU ; comportement tribologique et vibro-acoustique d'un contact Élastomère / verre. Thèse de Doctorat 2009, École Centrale De Lyon.
- [14] Bouzidi Safia, Contribution à la modélisation micro-mécanique du comportement hyperélastique des élastomères composites, mémoire Magister, Université de Bejaia, 2006.

# **ANNEXES**

**Annexe A : [Valeurs des contraintes expérimentales et déformation regroupé à partir de l'essai de compression uni-axial pour de différentes vitesses de déformation.]**

$\dot{\lambda} = 0.1 \text{ s}^{-1}$		$\dot{\lambda} = 0.01 \text{ s}^{-1}$		$\dot{\lambda} = 0.001 \text{ s}^{-1}$	
Déformation $\varepsilon$	Contrainte expérimentale $\sigma$ (MPa)	Déformation $\varepsilon$	Contrainte expérimentale $\sigma$ (MPa)	Déformation $\varepsilon$	Contrainte expérimentale $\sigma$ (MPa)
0	0	0	0	0	0
0.0241287	0,1028	0.0257	0,1026	0.02557	0,0798
0.049866	0,2002	0.0499	0,2002	0.0507	0,1889
0.07311903	0,3146	0.0748	0,3032	0.0748	0,2924
0.0989276	0,4641	0.0997	0,4215	0.1005	0,4106
0.124665	0,6353	0.1263	0,5727	0.1271	0,5211
0.148794	0,8071	0.1496	0,7068	0.1504	0,6365
0.168901	0,9729	0.1705	0,8350	0.1729	0,7358
0.188204	1,1783	0.1890	0,9493	0.1898	0,8441
0.205898	1,3107	0.2059	1,0783	0.2083	0,9360
0.220375	1,4784	0.2228	1,2100	0.2276	1,0217
0.235657	1,6373	0.2365	1,3139	0.2405	1,1024
0.24933	1,8101	0.2517	1,4452	0.2566	1,1835
0.26198	1,9259	0.2662	1,5461	0.2743	1,2743
0.275067	2,0621	0.2807	1,6840	0.2855	1,3549
0.286327	2,1888	0.2903	1,7528	0.2944	1,4042
0.293566	2,3071	0.2976	1,8336	0.2992	1,4520
0.3	2,3763				

**Annexe B : [contraintes de l'ingénieur  $\pi$  calculé pour de différentes vitesses de déformations]**

$\dot{\lambda} = 0.1 \text{ s}^{-1}$		$\dot{\lambda} = 0.01 \text{ s}^{-1}$		$\dot{\lambda} = 0.001 \text{ s}^{-1}$	
Déformation $\varepsilon$	Engineering Stress $\pi$ (MPa)	Déformation $\varepsilon$	Engineering Stress $\pi$ (MPa)	Déformation $\varepsilon$	Engineering Stress $\pi$ (MPa)
0	0	0	0	0	0
0.0241	0.1054	0.0257	0.1054	0.0257	0.0819
0.0499	0.2107	0.0499	0.2107	0.0507	0.1990
0.0732	0.3395	0.0748	0.3278	0.0748	0.3161
0.0989	0.5151	0.0997	0.4682	0.1005	0.4565
0.1247	0.7258	0.1263	0.6555	0.1271	0.5970
0.1488	0.9482	0.1496	0.8311	0.1504	0.7492
0.1689	1.1706	0.1705	1.0067	0.1729	0.8896
0.1882	1.4515	0.1890	1.1706	0.1898	1.0418
0.2059	1.6505	0.2059	1.3579	0.2083	1.1823
0.2204	1.8963	0.2228	1.5569	0.2276	1.3227
0.2357	2.1421	0.2365	1.7207	0.2405	1.4515
0.2493	2.4114	0.2517	1.9314	0.2566	1.5920
0.2622	2.6104	0.2662	2.1070	0.2743	1.7558
0.2751	2.8445	0.2807	2.3411	0.2855	1.8963
0.2863	3.0669	0.2903	2.4699	0.2944	1.9900
0.2936	3.2659	0.2976	2.6104	0.2992	2.0719
0.3000	3.3946				

**Annexe C : [Contraintes Mooney-Rivlin( $\pi^{MR}$ ) pour les différents essais de compression uni-axiale (quasi-Statiques)]**

$\dot{\lambda} = 0.1 \text{ s}^{-1}$		$\dot{\lambda} = 0.01 \text{ s}^{-1}$		$\dot{\lambda} = 0.001 \text{ s}^{-1}$	
Déformation $\varepsilon$	Contrainte $\pi^{MR}$ (MPa)	Déformation $\varepsilon$	Contrainte $\pi^{MR}$ (Mpa)	Déformation $\varepsilon$	Contrainte $\pi^{MR}$ (MPa)
0	0	0	0	0	0
0.0241287	0.1322	0.0257	0.1122	0.02557	0.1040
0.049866	0.2884	0.0499	0.2287	0.0507	0.2127
0.07311903	0.4452	0.0748	0.3620	0.0748	0.3264
0.0989276	0.6374	0.0997	0.5104	0.1005	0.4579
0.124665	0.8529	0.1263	0.6875	0.1271	0.6064
0.148794	1.0792	0.1496	0.8618	0.1504	0.7491
0.168901	1.2882	0.1705	1.0351	0.1729	0.8991
0.188204	1.5088	0.1890	1.2036	0.1898	1.0206
0.205898	1.7302	0.2059	1.3714	0.2083	1.1635
0.220375	1.9266	0.2228	1.5440	0.2276	1.3247
0.235657	2.1502	0.2365	1.7138	0.2405	1.4397
0.24933	2.3660	0.2517	1.9065	0.2566	1.5930
0.26198	2.5840	0.2662	2.1042	0.2743	1.7750
0.275067	2.8176	0.2807	2.3180	0.2855	1.8988
0.286327	3.0361	0.2903	2.4703	0.2944	2.0009
0.293566	3.1840	0.2976	2.5901	0.2992	2.0584
0.3	3.3206				

**Annexe D : [Contraintes nominales  $\pi^{YEOH}$  du modèle YEOH calculée pour les différents essais de compression uni-axiale (quasi-Statiques)]**

$\dot{\lambda} = 0.1 \text{ s}^{-1}$		$\dot{\lambda} = 0.01 \text{ s}^{-1}$		$\dot{\lambda} = 0.001 \text{ s}^{-1}$	
Déformation $\varepsilon$	Contrainte $\pi^{YEOH}$ (MPa)	Déformation $\varepsilon$	Contrainte $\pi^{YEOH}$ (MPa)	Déformation $\varepsilon$	Contrainte $\pi^{YEOH}$ (MPa)
0	0	0	0	0	0
0.0241287	0.1262	0.0257	0.1170	0.02557	0.1084
0.049866	0.2704	0.0499	0.2339	0.0507	0.2196
0.07311903	0.4128	0.0748	0.3644	0.0748	0.3342
0.0989276	0.5869	0.0997	0.5073	0.1005	0.4654
0.124665	0.7842	0.1263	0.6767	0.1271	0.6121
0.148794	0.9958	0.1496	0.8440	0.1504	0.7525
0.168901	1.1967	0.1705	1.0117	0.1729	0.9000
0.188204	1.4147	0.1890	1.1767	0.1898	1.0195
0.205898	1.6401	0.2059	1.3435	0.2083	1.1604
0.220375	1.8457	0.2228	1.5278	0.2276	1.3202
0.235657	2.0863	0.2365	1.6917	0.2405	1.4349
0.24933	2.3249	0.2517	1.8926	0.2566	1.5886
0.26198	2.5720	0.2662	2.1023	0.2743	1.7726
0.275067	2.8437	0.2807	2.3333	0.2855	1.8988
0.286327	3.1038	0.2903	2.5005	0.2944	2.0034
0.293566	3.2831	0.2976	2.6335	0.2992	2.0626
0.3	3.4510				

**Annexe E : [Valeurs des contraintes et déformation regroupé à partir de l'essai numérique pour de différentes vitesses de déformation.]**

$\dot{\lambda} = 0.1 \text{ s}^{-1}$		$\dot{\lambda} = 0.01 \text{ s}^{-1}$		$\dot{\lambda} = 0.001 \text{ s}^{-1}$	
Déformation $\varepsilon$	Contrainte numérique $\sigma$ (MPa)	Déformation $\varepsilon$	Contrainte numérique $\sigma$ (MPa)	Déformation $\varepsilon$	Contrainte numérique $\sigma$ (MPa)
0	0	0	0	0	0
0.02056	0.15479	0.019208	0,077518	0.019458	0.077527
0.041751	0.31398	0.057988	0,23978	0.058787	0.23988
0.069188	0.51985	0.097239	0,41248	0.098654	0,41281
0.10361	0,77843	0.15693	0,69332	0.15939	0,69439
0.16501	1.243	0.20734	0,94965	0.21077	0,95186
0.18453	1.3921	0.25823	1.2286	0.26272	1.2326
0.20486	1.5483	0.277869	1.347	0.28363	1.3519
0.24741	1.88	0.2992	1.4696	0.29411	1.4132
0.27729	2.1171	0.30947	1.5325	0.3046	1.4755
0.2997	2.2411	0.3509	1.7957	0.3151	1,539
0.30844	2.3689				

## **Résumé**

Le travail réalisé s'inscrit dans le cadre de l'étude du comportement statique et dynamique des élastomères. Dans la première partie nous avons fait une comparaison entre les deux modèles hyper-élastiques (Mooney Rivlin et Yeoh), le deuxième objectif était de comparer deux modèles viscoélastiques : le modèle N unités de Maxwell et le modèle de K-BKZ, après on a identifié les paramètres des deux modèles hyper-viscoélastiques en supposant que la partie hyper-élastique est donnée par le modèle de Mooney Rivlin. Enfin, nous avons utilisé un logiciel Élément Finis pour déterminer la distribution des contraintes en compression.

**Mots clés : Elastomères, Hyper-élasticité, Viscoélasticité, Visco-Hyper-élastique.**

---

## **Abstract**

The work to be carried out is part of the study of the static and dynamic behavior of elastomers. In the first part we made a comparison between the two hyperelastic models (Mooney Rivlin and Yeoh), the second objective was to compare two viscoelastic models: the model N units of Maxwell and the model of K-BKZ, after we identified the parameters of the two hyper-viscoelastic models assuming that the hyperelastic part is given by the Mooney Rivlin model. Finally, we used Finite Element software to determine the distribution of compressive stresses.

**Keywords: Elastomers, Hyperelasticity, Viscoelasticity, Visco-Hyperelastic.**