

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la recherche scientifique

UNIVERSITE Abderrahmane MIRA BEJAIA
Faculté de Technologie
Département de Génie Mécanique

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de

MASTER

Filière : Génie Mécanique

Spécialité : Construction Mécanique

Par :

BALI LYNDA

Thème

Etude de la plastification d'un tube cylindrique métallique sous pression interne

Soutenu le lundi 6 septembre 2021 devant le jury composé de :

Pr.	BECHIR Hocine	Rapporteur
Mr.	YAYA Kamel	Rapporteur
Mr.	BENSLIMANE Abdelhakim	Président
Mme	Safia BOUZIDI	Examinatrice

Année Universitaire 2020-2021.

Remerciements

A mes encadreur, Monsieur BECHIR Hocine et Monsieur YAYA

Toute ma reconnaissance et ma gratitude pour votre encadrement, votre aide, vos orientations, et votre patience. Merci d'avoir accepté d'être rapporteurs de ce travail et de m'avoir poussé à donner de mon mieux. Je vous remercie encore une fois pour la confiance que vous m'avez accordée.

A Monsieur, BENSLIMANE Abdelhakim le président de jury,

Je vous remercie de m'avoir fait l'immense honneur de présider ce jury. Je vous exprime mes remerciements les plus sincères pour l'intérêt que vous avez apporté à mon projet de fin d'étude et pour toutes vos remarques qui vont contribuer à améliorer ce travail.

A Madame BOUZIDI Safia membre de jury d'examinations,

Je vous remercie d'avoir accepté avec beaucoup de générosité d'examiner mon travail et de m'avoir honorée d'être membre de ce jury. Veuillez accepter mes sincères remerciements et reconnaissances pour vos encouragements.

A tous mes enseignants qui m'ont accompagné et formé le long de ma formation

Je vous présente mon profond respect et mes vifs remerciements.

Il est difficile de trouver des qualificatifs assez forts pour souligner votre gentillesse et patience à prodiguer des conseils pertinents.

Dédicaces

A ma chère Maman et mon cher papa, aucune dédicace ne saurait exprimer mon respect, mon amour et ma considération pour tous les sacrifices que vous avez consentis pour mon instruction et mon bien être. Je vous remercie pour tout le soutien, la patience et l'amour que vous me portez depuis toujours et j'aspire votre bénédiction.

A mes sœurs et mon frère que Dieu vous illumine la vie de sérénité, foi et bonheur.

A ma tante Sabiha et son époux, qui ont toujours été là pour moi.

A tous mes ami(e)s avec j'ai traversé le meilleur et le pire.

A mes collègues, spécialement MOURAD et DJIDJI.

A la mémoire de mes défunts grands parents.

Table des matières

Introduction générale.....	1
Chapitre I : Généralités	
I.1. Généralité sur les pipelines	4
I.1.1. Fonctionnement d'un gazoduc.....	4
I.1.2. Réseau de transport par canalisations	5
I.1.3. La formation des tubes et le type de matériau	6
I.1.3.1. Normes et réglementation	6
I.1.3.2. Résistance des matériaux	7
I.2. Généralité théorique	8
I.2.1. Différentes étapes de comportement du matériau.....	8
I.2.2. Loi générale de Hooke	9
I.2.3. Tenseur des contraintes.....	9
I.2.3.1. Déviateur et partie sphérique.....	9
I.2.3.2. Contraintes principales	10
I.2.3.3. Les invariants.....	10
I.2.4. Tenseur des déformations	10
I.2.5. Les critères de la limite élastique.....	11
I.2.5.1. Critère de Von Mises	11
I.2.5.2. Critère de Tresca.....	11
I.3. Modélisation et simulation numérique	11
Chapitre II : Analyse élastique d'un tube cylindrique	
II.1. Formulation du problème en élasticité linéaire	12
II.2. Etude du comportement élastique dans un repère cylindrique.....	12
II.3. Evaluation du rayon critique	15
II.4. Représentation des résultats théoriques.....	18

Chapitre III : Analyse élasto-plastique d'un tube cylindrique

III.1. Introduction	22
III.2. Etude élasto-plastique d'un tube cylindrique	22

Chapitre IV : Modélisation et simulations par éléments finis

IV.1. Introduction	27
IV.2. Géométrie	27
IV.3. Physique	29
IV.4. Maillage, convergence	30
IV.4.1. Le choix de maillage	30
IV.5. Résolution.....	31
IV.6. Post traitement.....	32
IV.7. Comparaison des résultats Analytique et numérique	35
IV. 7.1.Le calcul d'erreur relative.....	37
Conclusion et perspectives	38

Liste des figures

Liste des figures

	Pages
Figure I.1: On montre le pipeline reliant Hassi_Mesaoud à Almeiria [1].....	4
Figure I.2 : les gazoducs vers l'Europe [1].....	5
Figure I.3 : Courbe de contraintes-déformations de traction uni-axial [4]	6
Figure I.4 : Courbe de contraintes-déformations de traction uni-axial [4].....	8
Figure I.5 : Composantes du tenseur de contraintes.....	9
Figure II.6 : Représentation d'un cylindre élastique linéaire, homogène et isotrope sous pression interne P_i . [6].....	12
Figure II.7 : Graphe des courbes du rapport de la contrainte équivalente de von – Mises et la limite élastique obtenu analytiquement pour $\eta=1.5$, en fonction du rayon adimensionnel pour différentes valeurs de k	18
Figure II.8 : Graphe des courbes du rapport de la contrainte équivalente de von – Mises et la limite élastique obtenu analytiquement pour $\eta=1.25$, en fonction du rayon adimensionnel pour différentes valeurs de k	19
Figure II.9 : Graphe des courbes du rapport de la contrainte équivalente de von – Mises et la limite élastique dans le cas des tubes minces $\eta=1.1$, en fonction du rayon adimensionnel pour différentes valeurs de k	19
Figure II.10 : Graphe du rayon critique adimensionnel en fonction de $\log(k)$	21
Figure III.11 : la progression de la zone plastique à partir de la face interne.	23
Figure IV.12 : Dessin d'un anneau (tuyau 2D).	27
Figure IV.13 : Formation d'un solide.....	28
Figure IV.14 : la formation de notre quart du tuyau en 2D.....	28
Figure IV.15 : Définition des conditions aux limites sur COMSOL.	29
Figure IV.16 : Définition des paramètres sous- domaine.....	29
Figure IV.17 : Représentation de la géométrie en 2D, mettant en évidence les plans de symétries ainsi que la pression interne appliquée.....	30
Figure IV.18 : Graphe des contraintes de von-Mises maximales en fonction de nombre de nœuds pour type et élément de maillage différents tout en fixant la pression à $k=2.5*10^{-1}$	31
Figure IV.19 : Distribution de champs de contraintes de von-Mises sur notre structure maillée.	32
Figure IV.20 : Résultat de la simulation numérique par EF pour différentes valeurs de k	33
Figure IV.21 : Courbes issus du calcul analytique (AN) et celles obtenus numériquement (EF).	36

Figure IV.22 : Graphe présentant le rapport des contraintes de von-Mises obtenus analytiquement et celles obtenus numériquement en fonction du rayon adimensionnel ρ_n 36

Liste des tableaux

Liste des tableaux

	Pages
Tableau I.1 : les grade que couvre la spécification API [3]	7
Tableau I.2 : propriétés mécanique des aciers de tubes selon la norme API [3].....	7
Tableau IV.3 : Le rapport $\sigma_{eq}^{EF} / \sigma_e$ en fonction du rayon adimensionnelle ρ_n pour différentes pressions (valeurs extraites des courbes obtenues par Comsol).....	34
Tableau IV.4 : Les valeurs $\sigma_{eq}^{AN} / \sigma_e$ en fonction de ρ_n pour différentes pressions	35

Symboles, Notations et abréviations

API : American Petroleum Institute ;

ESP : Equipements sous pressions ;

TRI3 : Elément triangulaire à 3 nœuds ;

QUA4 : Eléments quadrangle à 4 nœuds ;

EF : Eléments finis ;

A, B : Constantes d'intégrations ;

k : Coefficient de multiplication ;

E : Module d'Young ;

e : Epaisseur ;

r : Rayon ;

r_e : Rayon extérieur ;

r_i : Rayon interne ;

P_i : Pression interne ;

P^* : Pression réduite adimensionnelle ;

$\bar{u}(r, \theta, z)$: Champ de déplacement ;

u_r : La composante radiale du champ de déplacement ;

Δ : Opérateur Laplacien ;

∇ : Opérateur gradient ;

θ : Angle polaire ;

σ_{ij} : Contrainte de Cauchy ;

σ_e : La limite élastique ;

σ^{AN} : Contrainte de Cauchy obtenue analytiquement ;

σ^{EF} : Contrainte de Cauchy Obtenue par simulations numérique ;

$\langle \sigma \rangle, \sigma_{eq}$: Contrainte équivalente de von-Mises ;

σ_{pq}^D : Tenseur déviateur des contrainte de Cauchy ;

C_{ijkl} : Tenseur de rigidité ;

ε : Tenseur de déformation ;

μ, λ : Constantes de Lamé ;

ν : Coefficient de poisson ;

ρ_n, ρ : Rayon adimensionnel ;

η : Rapport du rayon externe sur le rayon interne ;

Introduction Générale

Introduction générale

La résistance d'un matériau ne peut être déduite par un simple test ou définie par une équation. Réellement elle n'est qu'une évaluation de charges et de forces auxquelles la structure doit supporter tout en étant capable d'effectuer ses tâches pour lesquelles elle a été conçue. Ce seuil peut être dépassé par plusieurs phénomènes ; par choc ou fatigue ou bien encore en le soumettant à une charge plus ou moins constante au fil du temps. Toute structure métallique, peut subir une déformation élastique, plastique puis une rupture.

La déformation élastique est temporaire de sorte que le matériau reprend son état initial dès que la force n'est plus appliquée. Cependant, la déformation plastique est permanente ; Face à une charge d'intensité croissante le métal peut tout d'abord se déformer élastiquement, puis plastiquement et finalement se rompre.

Le dimensionnement des tubes cylindriques soumis à des changements de pressions internes est l'un des axes de recherche important dans le domaine de la mécanique. En effet, l'augmentation de la pression à l'intérieur de ces corps peut provoquer des dommages catastrophiques. Toutes les sollicitations ne peuvent engendrer que des déformations élastiques mais aussi des déformations plastique quand les contraintes dépassent la limite d'écoulement du matériau.

Prenons le gazoduc qui est une structure dont l'intégrité doit être garantie afin d'assurer la distribution du gaz entre les champs d'extraction et les consommateurs. En fait, les fuites d'hydrocarbures de pipelines provoquent des désastres environnementaux, mais aussi des pertes économiques considérables. Il est donc impératif de dimensionner des tubes cylindriques en acier qui sont considérés comme infiniment longs (hypothèse des déformations planes). Des pertes de charges sont générées durant la mise en service des pipes qui sont dues au frottement, viscosité et autres. De ce fait, des installations de compressions sont mises en œuvre afin de compenser ces pertes de charges ; ces dernières sont fluctuantes autour d'une valeur moyenne. Dans le cadre de ce travail, on vise à évaluer le rayon de plastification d'une part, et d'autre part de développer une méthodologie de dimensionnement en élasticité linéaire.

Nous précisons que les équipements sous pressions (ESP) doivent impérativement résister aux sollicitations suivantes :

- Sollicitations externes : contraintes mécaniques, fatigue ... ;

- Sollicitations internes : pression, frottement, température... ;
- Sollicitations environnementales : corrosion, oxydation, attaque chimique et chaleur ...

Les structures cylindriques minces présentent un grand intérêt, principalement dû à leurs faibles masses, mais l'inconvénient majeur est leur faible épaisseur pouvant générer des instabilités structurelles. C'est pourquoi, les structures cylindriques métalliques épaisses peuvent constituer une alternative.

L'accroissement du diamètre extérieur des canalisations permettrait de contenir les fluctuations de la pression interne du tube, et minimiser ainsi l'endommagement du pipe. Généralement, les tubes sont en aciers de construction qui sont ductiles.

Le tube qui va fait l'objet de notre étude est en acier dit 5L X60 selon la spécification de l'API (American Petroleum Institute) ; c'est un matériau de haute limite d'élasticité.

L'intérêt primordial de notre travail est d'estimer le rayon critique correspondant au début de la plastification de tubes cylindriques épais, en faisant varier la pression interne exercée par le fluide sur la paroi interne des tubes. Ainsi, nous allons développer une approche analytique que nous validerons par simulations numériques.

Le premier chapitre sera consacré à des généralités afin de mettre en évidence la pertinence de la problématique traitée dans le cadre industriel d'importance vitale en Algérie.

Au chapitre deux, nous allons poser et formuler le problème dans le cadre de l'élasticité linéaire, homogène et isotrope.

Au chapitre trois, nous allons faire une analyse élasto-plastique de notre tube cylindrique.

Au quatrième chapitre on propose une modélisation numérique par éléments finis via le code de calcul commercial COMSOL MULTIPHYSICS ; Cette méthode fournit un modèle qui représente aussi fidèlement que possible le phénomène physique dans la réalité. Nous allons par la suite comparer les contraintes équivalentes de von Mises issues de la modélisation analytique

et numérique de notre modèle élastique. Les résultats obtenus seront analysés afin d'ouvrir de pistes pour un travail plus approfondie.

Nous terminerons ce manuscrit par une conclusion générale et des perspectives.

Chapitre I :

Généralités

Chapitre I : Généralités

I.1. Généralité sur les pipelines

Pipeline est un mot Anglais emprunté qui désigne généralement les canalisations de transport des fluides qui peuvent être enterrées, à découvert ou sous-marin, comme le montre la figure I.1.

Un pipeline peut transporter du pétrole ou de l'eau ou du gaz, on parle alors respectivement d'oléoduc, aqueduc et du gazoduc.

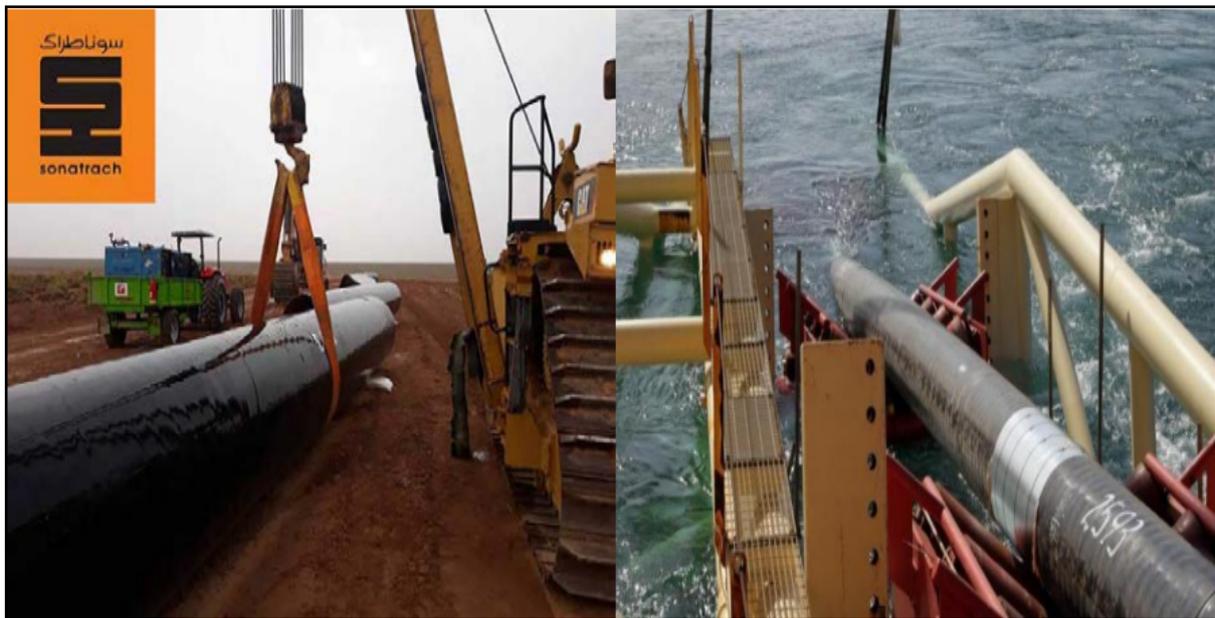


Figure I.1: On montre le pipeline reliant Hassi_Mesaoud à Almeiria [1]

I.1.1. Fonctionnement d'un gazoduc

Les gazoducs sont des canalisations où le gaz se transporte par pression de la zone d'extraction vers celles d'exploitation et de consommation. Maintenir une pression adéquate impose l'installation des stations de compression environ tous les 100 à 200 Km.

La station de compression et le pipeline forment un système fermé pour que le gaz naturel ne s'en échappe pas.

On distingue trois types de gazoducs :

- Les gazoducs de collecte qui assure le transport à partir des sites d'extraction aux sites de traitement ;
- Les gazoducs de transport, traversant les continents jusqu'aux grandes zones de consommation sous haute pression ;

- Les gazoducs de distribution, qui fait distribuer le gaz à basse pression au profit du consommateurs.

I.1.2.Réseau de transport par canalisations

Le réseau de transport par canalisations en Algérie ne cesse d'évoluer en fonction du développement des activités de SONATRACH, en national et en international. Ce dernier, compte 20 oléoducs d'une longueur de 9 883 Km, avec une capacité de transport de 145 Millions tonnes et de 14 gazoducs d'une longueur totale de 8629 Km, avec une capacité de transport de 142 milliards de m³ /an.

Notre réseau de transport des hydrocarbures dépasse aujourd'hui plus de 15.000 kilomètres avec 28 canalisations en service [1]. Quatre gazoducs transcontinentaux nous relient à l'Europe comme le montre la carte géographique suivante :



Figure I.2 : les gazoducs vers l'Europe [1]

I.1.3. La formation des tubes et le type de matériau

Les canalisations sont généralement constituées d'ensemble de tubes d'aciers soudés bout à bout.

Il existe 3 types de tubes :

- Tubes non soudés ;
- Tubes soudés en spirale ;
- Tubes soudés longitudinalement. [2]

On s'intéressera dans le cadre de cette étude au tubes non soudés, dans le but de simplifier l'étude en négligeant l'effets de bord.



Figure I.3 : Prototype de tubes de différentes formes [1]

Les tubes qui forment le pipeline sont fait en acier d'excellente qualité de résistance ; Sa limite d'élasticité est assez importante. Il peut supporter de grandes contraintes dans les systèmes de canalisations de pétrole et de gaz.

I.1.3.1. Normes et réglementation

Les normes et les réglementations techniques améliorent la sécurité des opérations industrielles, garantissent la qualité, aident à réduire les coûts, à réduire les déchets et à minimiser la confusion.

L'API est une organisation de normalisation mondial qui a été créée en 1919. Ses normes ont été développées dans le cadre du processus accrédité de l'American National Standards Institute de l'API. [3]

Les qualités d'aciers couramment utilisées dans la construction des pipelines sont définies selon les spécifications 5L de l'API (American Petroleum Institute)

Ces spécifications sont utilisées d'une façon générale dans le monde entier.

Spécification API	Grade
5L	A
5L	B
5L	X42
5L	X46
5L	X52
5L	X56
5L	X60
5L	X65
5L	X70

Tableau I.1 : les grade que couvre la spécification API [3]

Cette spécification couvre les grades A, B, X42, X46, X52, X56, X60, X65 et X70 où les deux chiffres suivant le « X » indique la limite d'élasticité minimale (en milliers de psi ou 1psi= 0.00689476) des tuyaux produits à cette qualité.

I.1.3.2. Résistance des matériaux

Les aciers les plus employés dans la construction des tubes pour les transmissions pétrolières et gazières ont les propriétés mécaniques qui sont présentées dans le tableau ci-dessous :

Tuyaux sans soudure			
Spécification API	Grade	Limite d'élasticité minimale [MPa]	Résistance à la rupture [MPa]
5L	A	210	335
5L	B	245	415
5L	X42	290	415
5L	X46	320	435
5L	X52	360	460
5L	X56	390	490
5L	X60	415	520
5L	X65	450	535
5L	X70	485	570

Tableau I.2 : propriétés mécanique des aciers de tubes selon la norme API [3]

L'API 5L X60 est un acier de construction de tube de haute qualité dans les spécifications API 5L qui assure le transport de pétrole et du gaz. Ainsi appelé tuyau L415, en référence à sa limite d'élasticité minimale en 415 Mpa. Il couvre les types de fabrication sans soudure (laminés à chaud et à froid) dont on s'intéresse dans cette recherche. [3]

I.2. Généralité théorique

I.2.1. Différentes étapes de comportement du matériau

Le comportement d'un acier de construction (ductile) est représenté sur la courbe typique de traction, en mettant en évidence le domaine élastique, la limite d'élasticité, le domaine élasto-plastique, le palier de l'écoulement plastique et la limite à la rupture.

On dit que le matériau a un comportement élastique s'il reprend sa forme initiale dès qu'on supprime la charge. Les contraintes dans ce palier peuvent avoir une valeur maximal égal à la limite élastique du matériau. On utilise la loi de Hooke pour décrire le comportement élastique.

Dès que les contraintes dépassent la limite élastique du matériau, les déformations plastiques apparaissent.

On charge un matériau au-delà de sa limite élastique puis on supprime la charge là on parle de l'écrouissage où on s'intéresse à l'écrouissage d'un matériau ductile qui consiste au fait d'élargir son domaine élastique par conséquent avoir une limite élastique plus grande ; en terme physique, c'est le durcissement du matériau due à sa déformation plastique.

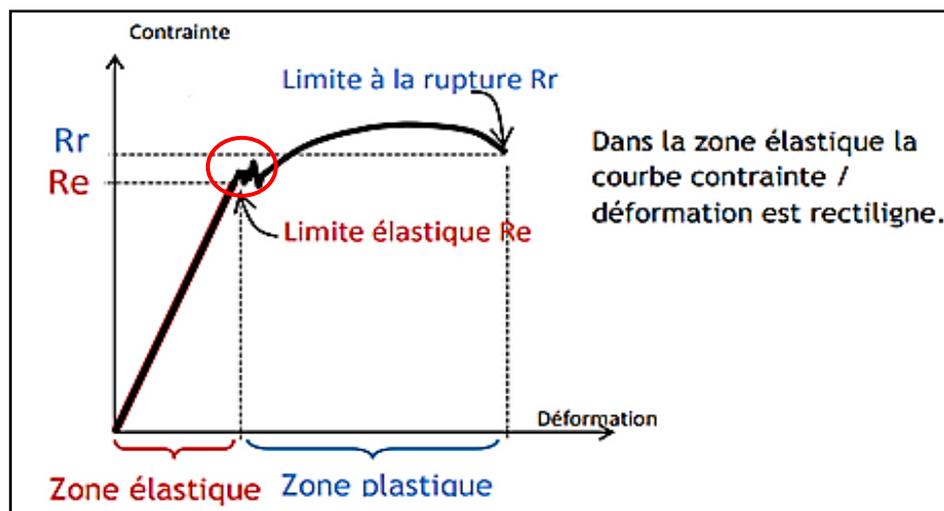


Figure I.4 : Courbe de contraintes-déformations de traction uni-axial [4]

I.2.2. Loi générale de Hooke

La loi de Hooke décrit le développement théorique du comportement physique des corps d'une façon générale et plus particulièrement des corps solides élastiques, on constate que la loi de comportement relie la notion mécanique qui est la contrainte à celle géométrique représentant la déformation. Elle s'exprime sous la forme suivante pour le matériaux homogène et isotrope :

$$\sigma_{ij} = 2 \mu \varepsilon_{ij} + \lambda (tr(\sigma_{ij})) I \tag{I.1}$$

I.2.3. Tenseur des contraintes

Le tenseur de contraintes est une grandeur physique définie en chaque point qui représente les efforts de cohésion dans une application linéaire symétrique d'ordre 2.

- Les composantes du tenseur des contraintes :

Le tenseur des contraintes se compose des contraintes normales sur la diagonale et des contraintes tangentielles hors la diagonale comme le montre la figure I.5.

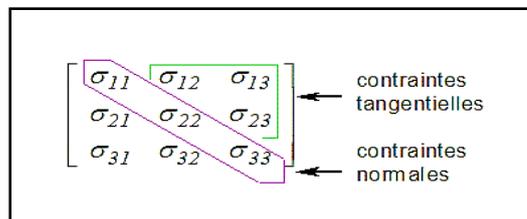


Figure I.5 : Composantes du tenseur de contraintes

I.2.3.1. Déviateur et partie sphérique

Tout tenseur d'ordre deux peut se décomposer en tenseur sphérique et déviatorique.

Le déviateur est un tenseur de trace nulle qui est utilisé en mécanique des milieux continus, plus précisément en plasticité.

Soit σ un tenseur de dimension n. Le déviateur de $\underline{\underline{\sigma}}$, noté $\underline{\underline{\sigma}}^D$, vaut :

$$\underline{\underline{\sigma}}^D = \underline{\underline{\sigma}} - \frac{1}{n} (tr(\underline{\underline{\sigma}})) \underline{\underline{I}} \tag{I.2}$$

Le facteur $\frac{1}{n} (tr(\underline{\underline{\sigma}})) \underline{\underline{I}}$ correspond à la partie sphérique qui n'est rien d'autre que la pression hydrostatique.

La signification physique du tenseur déviateur dans notre cas en 3 dimensions ($n = 3$) correspond aux contributions des contraintes autres que surfaciques.

I.2.3.2. Contraintes principales

En mécanique des milieux continus, les contraintes principales ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$) sont les contraintes exprimées dans la base principale où le tenseur des contraintes est diagonal.

Usuellement les valeurs propres sont les contraintes (normales) principales ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$)

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \quad (\text{I.3})$$

Pour calculer les contraintes principales d'une matrice donnée $\underline{\underline{\sigma}}$, il faut résoudre l'équation caractéristique $\underline{\underline{\sigma}} - \lambda \underline{\underline{I}} = \underline{\underline{0}}$

I.2.3.3. Les invariants

Le terme invariant signifie interchangeable, de ce fait les invariants restent insensible au changement de repère (Ils se définissent avec les mêmes formules dans toutes les bases).

Pour que le système linéaire $\underline{\underline{\sigma}} - \lambda \underline{\underline{I}} = \underline{\underline{0}}$ n'admet pas une solution nulle, il faut que le polynôme

$$\det(\underline{\underline{\sigma}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = 0.$$

Ce polynôme est de l'ordre 3 s'écrit comme suit :

$$-\lambda^3 + I_1 \lambda^2 - I_2 \lambda + I_3 = 0$$

I_1, I_2, I_3 sont appelés invariants principaux de σ .

Le calcul des invariants est très simple suivant les formules suivantes :

$$I_1 = \text{tr}(\sigma) = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3;$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \left[(I_1(\sigma))^2 - \text{tr}(\sigma^2) \right]; \quad (\text{I.4})$$

$$I_3 = \det \sigma = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3.$$

I.2.4. Tenseur des déformations

Le tenseur de déformation est un tenseur symétrique d'ordre deux qui décrit la déformation en tout point du corps.

En HPP (Hypothèse de Petites Perturbations), on parle du tenseur des déformations linéarisé, se présentant dans une base orthonormée comme suit :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\overline{\text{grad } u} + \overline{\text{grad } u^T} \right). \quad (\text{I.5})$$

I.2.5. Les critères de la limite élastique

I.2.5.1. Critère de Von Mises

Le critère de Von Mises est écrit avec le deuxième invariant du tenseur déviatorique (cf. Équation 4). La contrainte équivalente sera donc écrite comme suit :

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} \sigma : \sigma}. \quad (\text{I.6})$$

I.2.5.2. Critère de Tresca

Le critère de Tresca ou de cisaillement, qui estime que la plasticité se développe par cisaillement sur les plans les plus favorables.

Dans le cas des contraintes triaxiales on a :

$$\max_{i \neq j} (|\sigma_i - \sigma_j|) \leq R_e. \quad (\text{I.7})$$

I.3. Modélisation et simulation numérique

COMSOL Multiphysics est un logiciel de simulation multifonctionnel utilisé pour la modélisation dans toutes les branches de l'ingénierie, de la production et de la recherche scientifique.

Le produit plate-forme peut être utilisé seul ou enrichi de fonctionnalités issues de n'importe quelle combinaison de modules complémentaires pour simuler l'électromagnétisme, la mécanique des structures, l'acoustique, la mécanique des fluides, le transfert thermique et le génie chimique. Les modules complémentaires et les produits LiveLink™ se connectent de manière transparente dans un processus de modélisation qui reste identique quelle que soit la modélisation envisagée.[5]

Chapitre II :
Analyse élastique d'un tube cylindrique

Chapitre II : Analyse élastique d'un tube cylindrique

II.1. Formulation du problème en élasticité linéaire

On se propose d'évaluer le rayon critique d'un tube sous pression interne afin de s'assurer qu'il travaille dans le domaine élastique. Il est bien évident que nous ne tenons pas compte des effets d'endommagements (corrosion, vieillissement, défaut de soudage, ...), cet aspect de la problématique nécessite des études approfondies qui sortent du cadre de ce mémoire.

Considérons un cylindre métallique, élastique linéaire, homogène et isotrope de constantes de Lamé μ et λ . Le cylindre est sous pression interne, notée P_i (Cf. Fig.6). Compte tenu de la symétrie cylindrique, on utilise les coordonnées cylindriques (r, θ, z) . Ainsi, le vecteur déplacement s'écrit : $\bar{u} = (u_r, 0, 0)$. L'inconnue principale est la composante u_r du vecteur de déplacement ; nous allons résoudre l'équation de Navier.

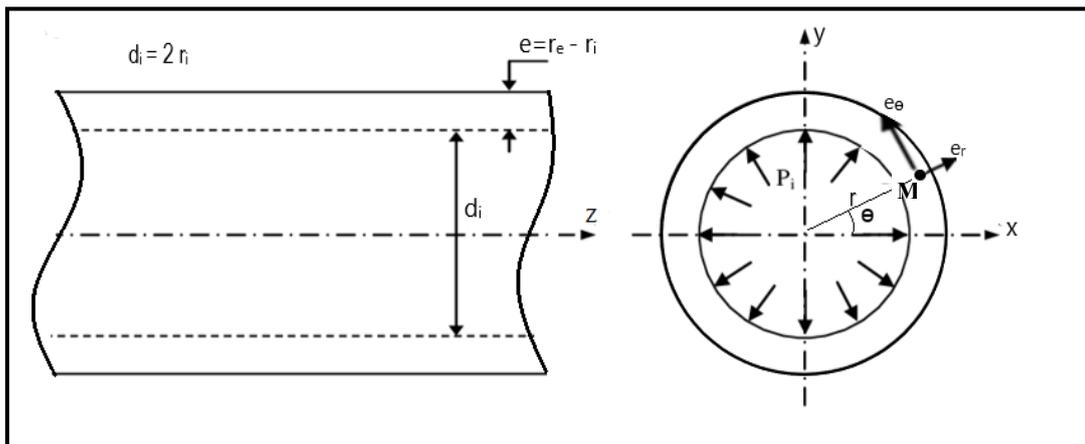


Figure II.6 : Représentation d'un cylindre élastique linéaire, homogène et isotrope sous pression interne P_i . [6]

II.2. Etude du comportement élastique dans un repère cylindrique

La matrice associée au tenseur des déformations est :

$$(\varepsilon_{ij}) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr} & \varepsilon_{r\theta} & \varepsilon_{rz} \\ \varepsilon_{\theta r} & \varepsilon_{\theta\theta} & \varepsilon_{\theta z} \\ \varepsilon_{zr} & \varepsilon_{z\theta} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}. \quad (\text{II.8})$$

On calcule les déformations à partir des composantes du vecteur déplacement :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (\text{II.9})$$

En coordonnées cylindriques, les composantes du tenseur des déformations sont :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}; & \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}; & \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z}; & \varepsilon_{r\theta} &= \varepsilon_{\theta r} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} \right]; \\ \varepsilon_{rz} &= \varepsilon_{zr} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right]; & \varepsilon_{\theta z} &= \varepsilon_{z\theta} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right]. \end{aligned} \quad (\text{II.10})$$

La loi de Hooke s'écrit pour un milieu compressible, c'est-à-dire, le coefficient de Poisson $\nu \neq 0.5$ de la manière suivante :

$$\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \varepsilon_{ll} \delta_{ij}; \quad \varepsilon_{ll} = \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}). \quad (\text{II.11})$$

où δ_{ij} est l'indice de Kronecker.

Il vient alors :

$$\sigma_{rr} = 2\mu \varepsilon_{rr} + \lambda(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta}); \quad \sigma_{\theta\theta} = 2\mu \varepsilon_{\theta\theta} + \lambda(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta}); \quad \sigma_{zz} = \lambda(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta}). \quad (\text{II.12})$$

En négligeant les forces de volume et en régime quasi-statique, l'équation d'équilibre ordinaire s'écrit :

$$\sigma_{ij,j} = 0. \quad (\text{II.13})$$

On reporte l'équation (11) dans (13), on obtient :

$$\mu(u_{j,jk} + u_{j,ii}) + \lambda u_{k,kj} = \mu \Delta u_j + (\lambda + \mu)(\text{div} \bar{u}) = 0. \quad (\text{II.14})$$

L'équation (9) s'écrit sous forme vectorielle de la manière suivante :

$$\mu \Delta \bar{u} + (\lambda + \mu) \bar{\nabla}(\bar{\nabla} \bar{u}) = \bar{0}; \quad (\text{II.15})$$

où Δ est l'opérateur laplacien et $\bar{\nabla}$ l'opérateur nabla ; $\Delta u_j \equiv u_{j,kk}$ et $\bar{\nabla}_j(\bar{\nabla} \bar{u}) \equiv u_{k,kj}$.

En substituant les expressions des constantes de Lamé (en fonction du module d'Young et du coefficient de Poisson) dans (15), on obtient :

$$(1 - 2\nu) \Delta \bar{u} + \bar{\nabla}(\bar{\nabla} \bar{u}) = \bar{0}, \quad \nu \neq 0.5. \quad (\text{II.16})$$

Dans le cas général, la résolution de l'équation (16) est numérique, soit par la méthode des différences finies ou par la méthode des éléments finis.

Compte tenu de la symétrie cylindrique, on pose :

$$\bar{u}(r, \theta, z) = u(r) \bar{e}_r. \quad (\text{II.17})$$

En reportant (17) dans (16), on obtient l'équation différentielle dite d'Euler suivante :

$$\left(r^2 \frac{d^2}{dr^2} + r \frac{d}{dr} - 1 \right) u(r) = 0 \quad \text{avec} \quad r_i \leq r \leq r_e. \quad (\text{II.18})$$

En faisant le changement de variable $t = \ln r$, on obtient la solution de l'équation différentielle (18) de la forme suivante :

$$u(r) = Ar + \frac{B}{r}. \quad (\text{II.19})$$

où A et B sont des constantes d'intégrations qu'on détermine à l'aide des conditions aux limites.

En substituant (19) dans (11), on obtient :

$$\left(\varepsilon_{ij} \right) = \begin{pmatrix} A - \frac{B}{r^2} & 0 & 0 \\ 0 & A + \frac{B}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{II.20})$$

Finalement, les composantes du tenseur des contraintes de Cauchy sont :

$$\left(\sigma_{ij} \right) = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix}; \quad (\text{II.21})$$

$$\sigma_{rr} = 2(\lambda + \mu)A - 2\mu \frac{B}{r^2}; \quad \sigma_{\theta\theta} = 2(\lambda + \mu)A + 2\mu \frac{B}{r^2}; \quad \sigma_{zz} = 2A\lambda.$$

On peut observer que l'état des contraintes est tri-dimensionnel ($\sigma_{zz} \neq 0$) en tout point matériel de la structure.

Les conditions aux limites sont les suivantes :

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}(r = r_i) &= -P_i ; \\ \sigma_{rr}(r = r_e) &= 0.\end{aligned}\tag{II.22}$$

Le équations (21) et (22) conduisent à l'écriture matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} 2(\lambda + \mu) & -2\frac{\mu}{r_i^2} \\ 2(\lambda + \mu) & -2\frac{\mu}{r_e^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -P_i \\ 0 \end{pmatrix}.\tag{II.23}$$

Il vient alors :

$$A = \frac{P_i}{2(\lambda + \mu)} \frac{r_i^2}{r_e^2 - r_i^2}; \quad B = \frac{-P_i r_i^2 r_e^2}{2\mu(r_i^2 - r_e^2)}.\tag{II.24}$$

On remplace les expressions de A et B dans les composantes du tenseur des contraintes de Cauchy, on obtient :

$$\sigma_{rr} = \frac{P_i r_i^2}{r_e^2 - r_i^2} \left[1 - \left(\frac{r_e}{r} \right)^2 \right]; \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{P_i r_i^2}{r_e^2 - r_i^2} \left[1 + \left(\frac{r_e}{r} \right)^2 \right]; \quad \sigma_{zz} = \frac{P_i r_i^2}{(r_e^2 - r_i^2)(\lambda + \mu)}.\tag{II.25}$$

On pose : $P_i^* = \frac{P_i r_i^2}{r_e^2 - r_i^2}$ qui est la pression réduite adimensionnelle, on peut alors exprimer les contraintes de la manière suivante :

$$\sigma_{rr} = P_i^* \left[1 - \left(\frac{r_e}{r} \right)^2 \right]; \quad \sigma_{\theta\theta} = P_i^* \left[1 + \left(\frac{r_e}{r} \right)^2 \right]; \quad \sigma_{zz} = P_i^* \frac{\lambda}{(\lambda + \mu)}.\tag{II.26}$$

On peut conclure que $\sigma_\theta > \sigma_z > \sigma_r$; En appliquant le critère de Tresca comme critère de limite élastique on aura : $\sigma_\theta - \sigma_r = \sigma_e$ ou $|\sigma_\theta - \sigma_r| = \sigma_e$.

II.3. Evaluation du rayon critique

L'équation (26) montre bien que l'état de contraintes est triaxial. Pour pouvoir comparer cet état à l'état de contrainte de l'essai de traction uni-axial, on doit calculer la contrainte équivalente de Von-Mises.

Bon nombre de matériaux métalliques obéissent au critère de résistance de von-Mises [7]. Par ailleurs, la valeur de la limite élastique des métaux est obtenue à partir des courbes de traction uni-axiale (cf. Fig.4). En conséquence, afin d'évaluer le rayon critique correspondant à la limite du régime élastique ou au début de l'élasto-plasticité, on se propose alors de comparer la contrainte équivalente de von-Mises à la limite élastique du matériau métallique. La contrainte équivalente de von-Mises s'exprime de la manière suivante :

$$\langle \sigma \rangle = \sqrt{\frac{3}{2} \sigma_{pq}^D \sigma_{qp}^D} \quad (\text{II.27})$$

où σ_{pq}^D sont les composantes du tenseur déviateur des contraintes de Cauchy qui est défini par :

$$\sigma_{pq}^D = \sigma_{pq} - \frac{1}{3} \sigma_{ss}^D \delta_{pq} \quad ; \quad \text{où l'indice s'est dit muet.}$$

Il vient alors :

$$\sigma_{rr}^D = \frac{1}{3} (-2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz}); \quad \sigma_{\theta\theta}^D = \frac{1}{3} (-2\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} - \sigma_{zz}); \quad \sigma_{zz}^D = \frac{1}{3} (-2\sigma_{zz} - \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}). \quad (\text{II.28})$$

En remplaçant l'équation (28) dans (27) on aura :

$$\langle \sigma \rangle = \sqrt{\sigma_{rr}^2 + \sigma_{\theta\theta}^2 + \sigma_{zz}^2 - \sigma_{rr} \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} \sigma_{zz} - \sigma_{zz} \sigma_{\theta\theta}} \quad (\text{II.29})$$

On pose :

$$P_i = k \cdot \sigma_e; \quad \eta = \frac{r_e}{r_i}; \quad \rho = \frac{r}{r_i};$$

où P_i est la pression interne du fluide transporté (gaz naturel ou pétrole), $\rho \in [1, \eta]$.

En substituant les expressions des contraintes de Cauchy de l'équation (25) dans (29), il vient alors :

$$\sigma_{eq} = \frac{k \sigma_e \sqrt{3\eta^4 \mu^2 + 6\eta^4 \mu \lambda + 3\eta^4 \lambda^2 + \mu^2 \rho^4}}{(\eta^2 - 1) \rho^2 (\mu + \lambda)}, \quad (\text{II.30})$$

soit

$$\frac{\sigma_{eq}}{\sigma_e} = \frac{k \sqrt{3\eta^4 \mu^2 + 6\eta^4 \mu \lambda + 3\eta^4 \lambda^2 + \mu^2 \rho^4}}{(\eta^2 - 1) \rho^2 (\mu + \lambda)}; \quad (\text{II.31})$$

μ, λ Sont des constantes de lamé où leurs formules s'écrivent comme suit :

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = 80769.23 \text{ MPa} ; \lambda = \frac{\nu E}{((1+\nu)(1-2\nu))} = 1.21 \cdot 10^5 \text{ MPa} . \quad (\text{II.32})$$

Dans le but d'alléger l'écriture d'équation (31), on va procéder de la manière suivante :

$$\frac{\sigma_{eq}}{\sigma_e} = \frac{k \mu \sqrt{3\eta^4 + 6\eta^4 \frac{\lambda}{\mu} + 3\eta^4 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \rho^4}}{\mu(\eta^2 - 1)\rho^2 \left(1 + \frac{\lambda}{\mu}\right)} ; \quad (\text{II.33})$$

On va intégrer une autre constante inscrite de sur cette forme : $\tilde{\nu}$

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{2\nu}{1-2\nu} = \tilde{\nu} ; \quad (\text{II.34})$$

Par conséquent, on peut écrire l'équation (33) de façon plus alléger après le remplacement du report (cf. eqt.34) :

$$\frac{\sigma_{eq}}{\sigma_e} = \frac{k \sqrt{3\eta^4 + 6\eta^4 \tilde{\nu} + 3\eta^4 (\tilde{\nu})^2 + \rho^4}}{(\eta^2 - 1)\rho^2 (1 + \tilde{\nu})} ; \quad (\text{II.35})$$

Le rapport de l'équation (35) dépend des paramètres $k, \tilde{\nu}, \eta, \rho$; ses valeurs extrêmes sont :

$$\left. \frac{\sigma_{eq}}{\sigma_e} \right|_{\rho=1} = \frac{k \sqrt{3\eta^4 + 6\eta^4 \tilde{\nu} + 3\eta^4 (\tilde{\nu})^2 + 1}}{(\eta^2 - 1)(1 + \tilde{\nu})} ; \quad (\text{II.36})$$

$$\left. \frac{\sigma_{eq}}{\sigma_e} \right|_{\rho=\eta} = \frac{k \sqrt{1 + 3(\tilde{\nu} + 1)^2}}{(\tilde{\nu} + 1)} \left[\frac{1}{(\eta^2 - 1)} \right].$$

Néanmoins, selon la littérature, il existe une relation empirique afin de distinguer les tubes minces des tubes épais. Cette relation est définie par :

$$\phi = \frac{e}{d_i} = \frac{r_e - r_i}{2r_i} = \frac{1}{2}(\eta - 1) ; \quad (\text{II.37})$$

Si $\phi < 0.1$ alors le tube est mince, sinon le tube est épais.

L'équation (37) conduit à l'expression suivante :

$$\eta = 2\phi + 1;$$

Les tubes minces sont caractérisés par :

$$\eta(\phi \approx 0.1) \approx 1.2.$$

On constate que η pour le tube épais doit être strictement supérieur à 1.2.

II.4. Représentation des résultats théoriques

Considérons un cas particulier qui correspond aux aciers (X60 ou X65) utilisés en Algérie. Les propriétés mécaniques (cf. Tableau.2) de l'acier X60 sont les suivantes : module d'Young

$E = 210000MPa$, coefficient de Poisson $\nu = 0.3$, coefficient $k = \frac{P_i}{\sigma_e}$ la limite élastique

$$\sigma_e = 415 MPa.$$

On montre sur les figures II.7, II.8 et II.9 les graphes du rapport $\frac{\sigma_{eq}}{\sigma_e}$ en fonction du rayon adimensionnel ρ , en faisant varier l'épaisseur du tube.

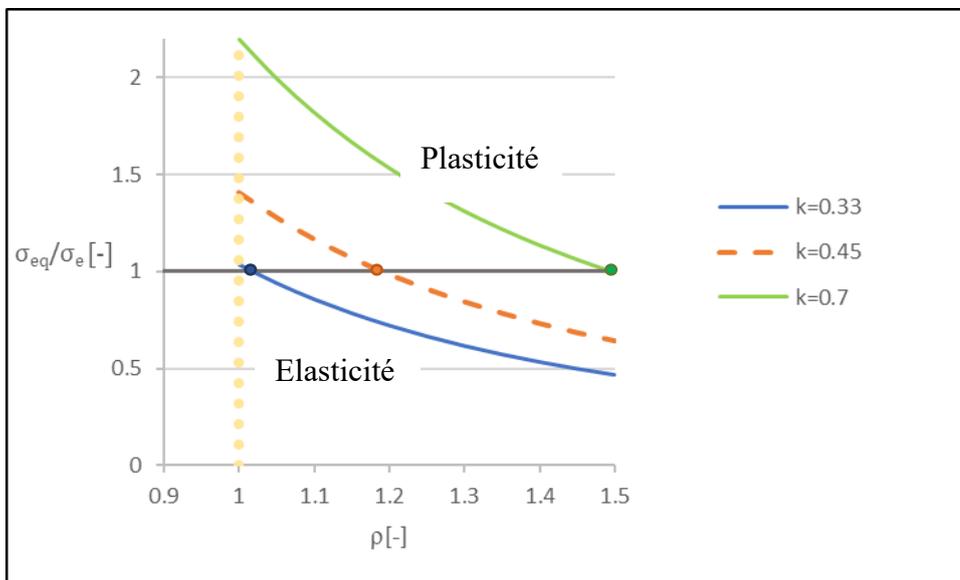


Figure II.7 : Graphe des courbes du rapport de la contrainte équivalente de von – Mises et la limite élastique obtenu analytiquement pour $\eta=1.5$, en fonction du rayon adimensionnel pour différentes valeurs de k .

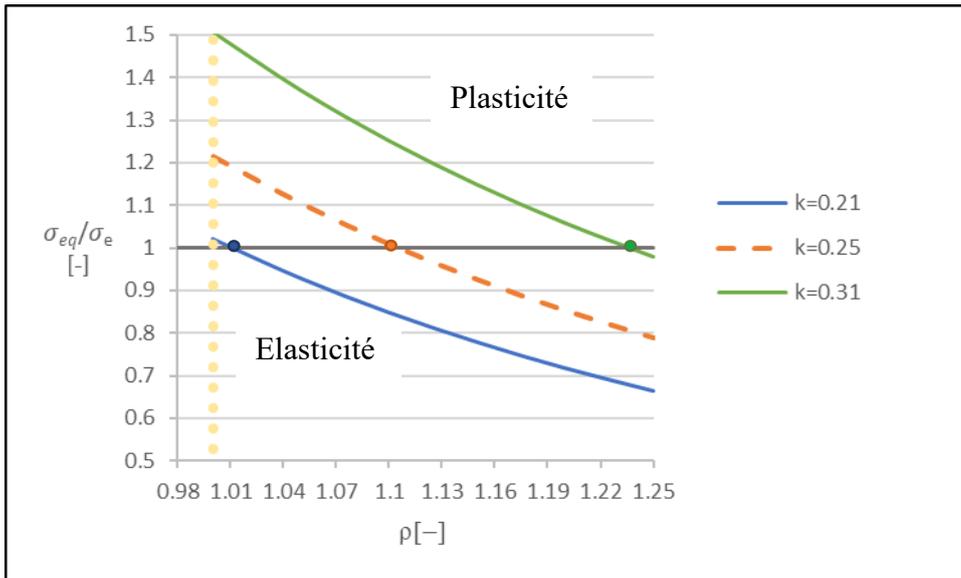


Figure II.8 : Graphe des courbes du rapport de la contrainte équivalente de von – Mises et la limite élastique obtenu analytiquement pour $\eta=1.25$, en fonction du rayon adimensionnel pour différentes valeurs de k .

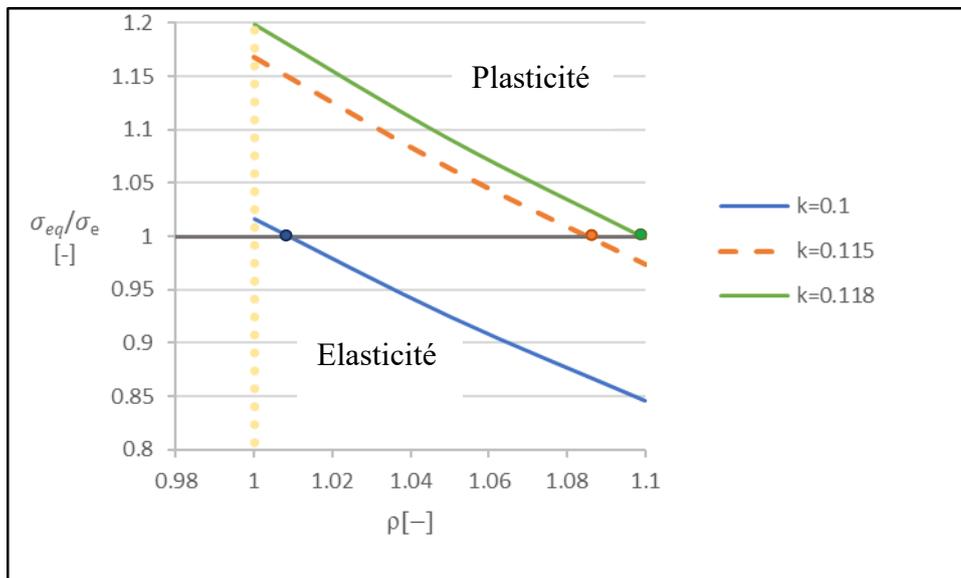


Figure II.9 : Graphe des courbes du rapport de la contrainte équivalente de von – Mises et la limite élastique dans le cas des tubes minces $\eta=1.1$, en fonction du rayon adimensionnel pour différentes valeurs de k .

Il se dégage à travers ces courbes que le choix du facteur k est important afin de s'assurer que la structure travaille dans le domaine strictement élastique du matériau. En fait, les graphes de

couleurs bleus sur les figures II.7, II.8 et II.9 indiquent bien que le rapport $\frac{\sigma_{eq}}{\sigma_e}$ est toujours inférieur ou égale à un. Pour les autres valeurs du facteur k (courbes vert et marron), un rayon critique est mis en évidence ; en effet, pour $1 \leq \rho < \rho_c$ le rapport $\frac{\sigma_{eq}}{\sigma_e}$ est supérieur à un ; ce résultat montre que la mise sous pression du tube s'accompagnerait d'une plastification du tube épais.

Pour des valeurs du rayon adimensionnel critique $\rho \geq \rho_c$, le rapport $\frac{\sigma_{eq}}{\sigma_e}$ devient inférieur à un ; en outre dans le domaine élastique. Par conséquent, la plastification du tube précède son comportement élastique.

Les valeurs du facteurs physiquement acceptables sont celles relatives aux courbes de couleur bleu sur les figures II.7, II.8 et II.9, et la pression interne convenable est déduite de la manière suivante :

$$P_i = k(\eta, \tilde{\nu}) \sigma_e.$$

La condition de résistance de la structure est définie par :

$$\sigma_{eq} \leq \sigma_e \Rightarrow \frac{\sigma_{eq}}{\sigma_e} \leq 1 ;$$

En d'autres termes, la structure travaille dans le domaine élastique stricte du matériau. On propose d'évaluer les rayons adimensionnels critiques en faisant varier les valeurs de k et η qui sont obtenues via la résolution analytique ; En fixant à chaque fois l'épaisseur η et pour différentes de k dans l'équation 35 $\left(\frac{\sigma_{eq}}{\sigma_e} = 0 \right)$ on trouve les rayons adimensionnels, On reporte sur la figure II.10 les résultats obtenus.

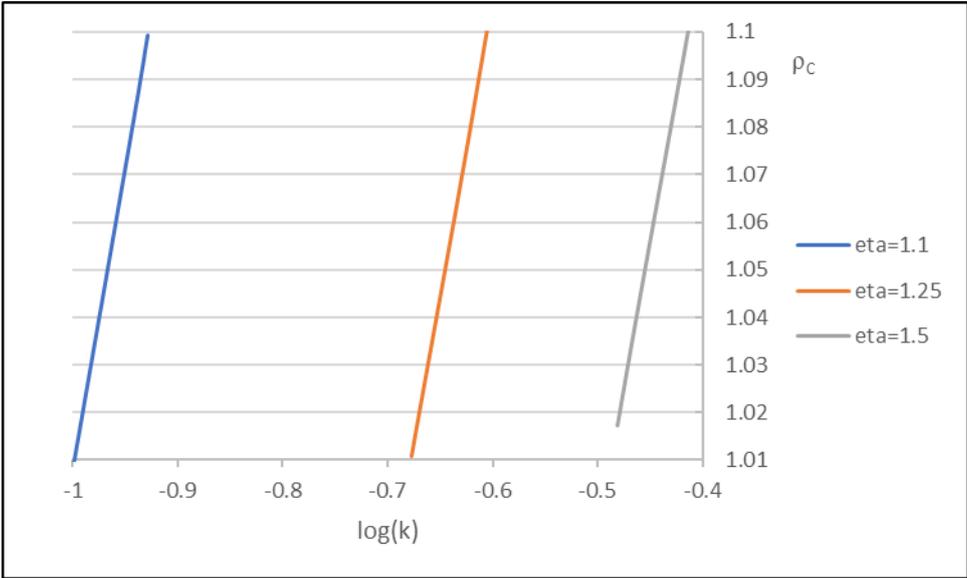


Figure II.10 : Graphe du rayon critique adimensionnel en fonction de $\log(k)$.

On constate que les droites sont parallèles, la loi d'évolution du rayon critique est donc linéaire et dépend de l'épaisseur du tube.

Chapitre III :
Analyse élasto-plastique d'un tube cylindrique

Chapitre III : Analyse élasto-plastique d'un tube cylindrique

III.1. Introduction

L'étude élasto-plastique d'un corps isotrope, nous permet de considérer la non-linéarité du matériau. Lorsque la limite élastique est dépassée, le matériau se comporte différemment que le comportement élastique et la suppression des chargements nous mène à la découverte des déformations de l'état plastique (permanente). De plus que la non-linéarité du matériau reste acceptable tant que les formations plastique sont infinitésimales.

III.2. Etude élasto-plastique d'un tube cylindrique

Le premier point plastique se forme sur le périmètre du rayon interne $r = r_i$, lorsque la pression P atteint la valeur P_e , cela conduit à dire que le terme $(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr})$ qui est une fonction croissante de la pression P soit égale à la limite élastique σ_e .

A partir des résultats de l'analyse élastique (cf. Equation. 24), on calcule le terme : $(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr})$

$$\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = \frac{P_i r_i^2}{r_e^2 - r_i^2} \left[2 \left(\frac{r_e}{r} \right)^2 \right]; \quad (\text{III.38})$$

En appliquant le critère de Tresca comme critère de limite élastique, on aboutit à : $\sigma_{\theta} - \sigma_r = \sigma_e$

avec : $\sigma_{\theta} - \sigma_r = \sigma_e$

$$\frac{2 P_i r_i^2}{r_e^2 - r_i^2} \left(\frac{r_e}{r} \right)^2 = \sigma_e; \quad (\text{III.39})$$

A la formation du premier point de plastique pour $r = r_i$ et $P = P_e$, l'équation précédente devient :

$$\frac{2 P_e r_i^2}{r_e^2 - r_i^2} \left(\frac{r_e}{r_i} \right)^2 = \sigma_e; \quad (\text{III.40})$$

Ce qui conduit à l'expression de la pression P_e au début de plastification qui s'écrit comme suit :

$$P_e(r = r_i) = \frac{1}{2} \sigma_e \left(1 - \left(\frac{r_i}{r_e} \right)^2 \right). \quad (\text{III.41})$$

L'accroissement de la pression interne P au-delà de la valeur P_e engendre le début de plastification sur la face interne du cylindre, il est évident que la zone plastique se manifeste à partir du rayon interne car c'est là où la contrainte est appliqué.

On reprend à partir de nos courbes (bleu, marron et vert) ; on a bien constaté que les pressions internes de l'ordre de la limite élastique de l'acier X60 ne développent pas de la plasticité du tube (courbe bleu). Les courbes marron et verte, montrent que les pressions internes conduisent à

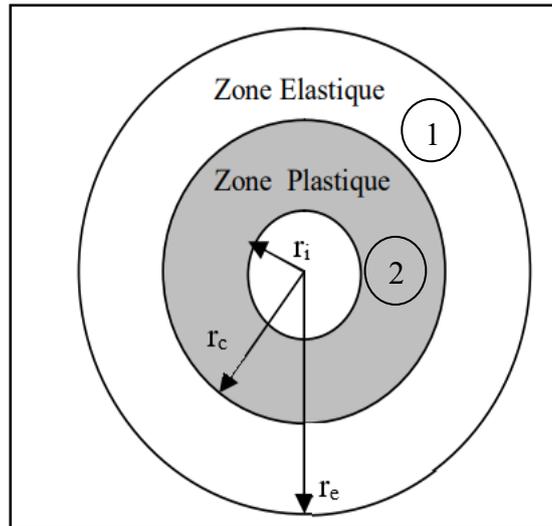


Figure III.11 : la progression de la zone plastique à partir de la face interne.

la plastification du tube, en d'autre terme, le cylindre de départ se présente comme deux tubes co-axiaux ; le premier dont le rayon $r_i \leq r \leq r_c$ est généré par la plasticité de l'acier (domaine 2), le second cylindre se comporte élastiquement de rayon $r_c \leq r \leq r_e$ (domaine 1).

Par ailleurs, on peut considérer que les contraintes radiales sont continues à l'interface des domaine 1 et 2, c'est-à-dire, en $r = r_c$. Aussi nous avons constaté que le rayon critique $r_c = \phi(\eta)$ dépend de l'épaisseur de tube épais.

Dans le domaine 1, on se référant à l'équation 22 ($\sigma_{rr}(r_i) = -P_i$), on peut écrire

$$\sigma_{rr}(r_c) = -P_e(r_c) \quad ;$$

où :

$$\sigma_{rr}(r_c) = -P_e \Rightarrow \sigma_{rr}(r_c) = -\frac{1}{2}\sigma_e \left[1 - \left(\frac{r_c}{r_e} \right)^2 \right]. \quad (\text{III.42})$$

Les contraintes dans la zone élastique sont donc données par les équations (25) dans lesquelles on peut remplacer r_i par r_c et P_e par $(-\sigma_{rr}(r_c))$; dans cette zone :

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{1}{2}\sigma_e \left[1 - \left(\frac{r_c}{r_e} \right)^2 \right] \frac{r_c^2}{r_e^2 - r_c^2} \left[1 - \left(\frac{r_e}{r} \right)^2 \right] = \frac{1}{2}\sigma_e \left(\frac{r_c}{r_e} \right)^2 \left[1 - \left(\frac{r_e}{r} \right)^2 \right]; \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{1}{2}\sigma_e \left(\frac{r_c}{r_e} \right)^2 \left[1 + \left(\frac{r_e}{r} \right)^2 \right]; \quad \sigma_{zz} = \frac{1}{2}\sigma_e \left(\frac{r_c}{r_e} \right)^2 \frac{\lambda}{\lambda + \mu}.\end{aligned}\tag{III.43}$$

Pour déterminer les contraintes dans le domaine plastique, on dispose des équations d'équilibre et du critère de plasticité Trisca:

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{1}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) &= 0; \\ \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} &= \sigma_e.\end{aligned}\tag{III.44}$$

En combinant ces deux équations, on obtient :

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{1}{r}\sigma_e = 0 \Rightarrow \sigma_{rr} = \sigma_e \ln(r) + C_1.\tag{III.45}$$

La détermination de la constante d'intégration C_1 s'effectue en $r = r_c$, en utilisant la continuité de la composante σ_{rr} :

$$\sigma_{rr} = \sigma_e \ln(r_c) + C_1 = -\frac{1}{2}\sigma_e \left[1 - \left(\frac{r_c}{r_e} \right)^2 \right];\tag{III.46}$$

On peut alors écrire l'expression de la constante d'intégration C_1 comme suit :

$$C_1 = \frac{1}{2}\sigma_e \left[\left(\frac{r_c}{r_e} \right)^2 - 1 - 2\ln(r_c) \right].\tag{III.47}$$

En remplaçons l'expression de la constante C_1 , on obtient :

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{1}{2}\sigma_e \left[\left(\frac{r_c}{r_e} \right)^2 - 1 - 2\ln\left(\frac{r_c}{r} \right) \right]; \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{1}{2}\sigma_e \left[\left(\frac{r_c}{r_e} \right)^2 + 1 - 2\ln\left(\frac{r_c}{r} \right) \right].\end{aligned}\tag{III.48}$$

Ces contraintes dépendent du paramètre r_c , il faut donc déterminer l'expression de la pression dans cette zone pour $r = r_i$, on a :

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(r_i) &= -P_i ; \\ P_i &= -\frac{I}{2} \sigma_e \left[\left(\frac{r_c}{r_e} \right)^2 - 1 - 2 \ln \left(\frac{r_c}{r_i} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{III.49})$$

r_i et r_e sont des constantes, étant supposé que les transformations du cylindre sont infiniment petites, la dérivation de P par rapport à r_c donne alors :

$$\frac{dP}{dr_c} = \sigma_e \left[\frac{r_e^2 - r_c^2}{r_c r_e^2} \right]. \quad (\text{III.50})$$

Ce terme est toujours positif. Le rayon r_c de la zone plastique croît donc constamment avec P ; ce résultat est cohérent avec l'hypothèse que nous avons faite (la zone plastique se développe à partir de la face interne du cylindre).

Du fait de la plasticité, les contraintes radiales, tangentielle et axiale dans le domaine I doivent prendre en compte à la fois l'élasticité et la plasticité de l'acier.

On suppose qu'on travaille en petites déformations, cela nous permet d'écrire :

$$\mathcal{E}_T = \mathcal{E}_{\text{élastique}} + \mathcal{E}_{\text{plastique}}. \quad (\text{III.51})$$

Par conséquent, on pourra écrire :

$$\sigma_{rr}^I = \sigma_{rr}^e + \sigma_{rr}^p = \frac{P_i r_i^2}{r_e^2 - r_i^2} \left[1 - \left(\frac{r_e}{r} \right)^2 \right] + \frac{I}{2} \sigma_e \left[\left(\frac{r_c}{r_e} \right)^2 - 1 - 2 \ln \left(\frac{r_c}{r} \right) \right]; \quad (\text{III.52})$$

$$\sigma_{rr}^I = P_i^* \left[1 + \left(\frac{r_e}{r} \right)^2 \right] + \frac{I}{2} \sigma_e \left[\left(\frac{r_c}{r_e} \right)^2 - 1 - 2 \ln \left(\frac{r_c}{r} \right) \right].$$

$$\sigma_{\theta\theta}^I = \sigma_{\theta\theta}^e + \sigma_{\theta\theta}^p = P_i^* \left[1 + \left(\frac{r_e}{r} \right)^2 \right] + \frac{I}{2} \sigma_e \left[\left(\frac{r_c}{r_e} \right)^2 + 1 - 2 \ln \left(\frac{r_c}{r} \right) \right]. \quad (\text{III.53})$$

En prenant l'équation $\sigma_{zz} = 2\lambda A$ où $A = \frac{P_i r_i^2}{2(\lambda + \mu)(r_e^2 - r_i^2)}$, on trouve après le remplacement

des constantes de Lamé (cf. équation.32) l'expression de la contrainte longitudinale sous une nouvelle forme :

$$\sigma_{zz} = 2\nu P_i^*. \quad (\text{III.54})$$

Revenons à l'équation 28 et appliquons-la sur les contraintes du domaine 1 trouver précédemment, on aura :

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^D &= \frac{1}{3} \left(-2\sigma_{rr}^1 - \sigma_{\theta\theta}^1 - \sigma_{zz}^1 \right); & \sigma_{\theta\theta}^D &= \frac{1}{3} \left(-2\sigma_{\theta\theta}^1 - \sigma_{rr}^1 - \sigma_{zz}^1 \right); \\ \sigma_{zz}^D &= \frac{1}{3} \left(-2\sigma_{zz}^1 - \sigma_{rr}^1 - \sigma_{\theta\theta}^1 \right). \end{aligned} \quad (\text{III.55})$$

L'expression de la contrainte équivalente de Von-Mises s'écrit désormais dans ce domaine comme suit :

$$\langle \sigma \rangle = \sqrt{\left(\sigma_{rr}^1 \right)^2 + \left(\sigma_{\theta\theta}^1 \right)^2 + \left(\sigma_{zz}^1 \right)^2 - \sigma_{rr}^1 \sigma_{\theta\theta}^1 - \sigma_{rr}^1 \sigma_{zz}^1 - \sigma_{zz}^1 \sigma_{\theta\theta}^1} . \quad (\text{III.56})$$

On obtient alors l'équation suivante :

$$\langle \sigma \rangle = \sqrt{\frac{2}{4} \sigma_e \left(\left(\frac{\rho}{\eta} \right)^2 - 1 \right)^2 - \frac{\sigma_e^2}{(\eta^2 - 1)} \left(\left(\nu - \frac{1}{2} \right) - \frac{3}{2} \eta^2 + \frac{1}{\rho^2} \right) \left(\left(\frac{\rho}{\eta} \right)^2 + 1 \right) + 4 \frac{\sigma_e^2 k^2}{(\eta^2 - 1)^2} \left(\left(\nu - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{2} \eta^2 + \frac{1}{\rho^2} \right)} \quad (\text{III.57})$$

Chapitre IV :
Modélisation et simulation par éléments finis

Chapitre IV : Modélisation et simulations par éléments finis

IV.1. Introduction

Dans cette partie du manuscrit, nous présentons un outil d'analyse numérique : COMSOL MULTIPHYSICS ; La modélisation et simulations par la méthode d'éléments finis est une méthode d'approximation des calculs plus ou moins proche de la réalité. Cependant, le modélisateur doit prendre en considération les limites du modèle numérique qui représente fidèlement le système réel.

Dans un premier temps, à partir d'un modèle élastique, on vise à calculer à l'aide des simulations par éléments finis via le code de calcul commercial COMSOL MULTIPHYSICS, la contrainte équivalente de von Mises. Pour ce faire, nous allons considérer un cylindre élastique, isotrope et homogène, et infini dans le cadre de l'hypothèse des déformations planes. Ainsi, nous avons fixé

le rayon extérieur du cylindre de telle sorte que $\eta = \frac{r_e}{r_i} \approx 1.25$.

IV.2. Géométrie

Compte tenu de l'axisymétrie de la structure, le problème dans l'espace tridimensionnel peut être traité dans un espace bi-dimensionnel. Afin de reproduire fidèlement notre système, nous avons dessiné deux cercle concentriques (de même centre) où le premier de rayon $r = r_e$ et le second $r = r_i$. On a sélectionné en première étape les deux cercles et on a fait la différence pour avoir un anneau comme le montre la figure IV.12.

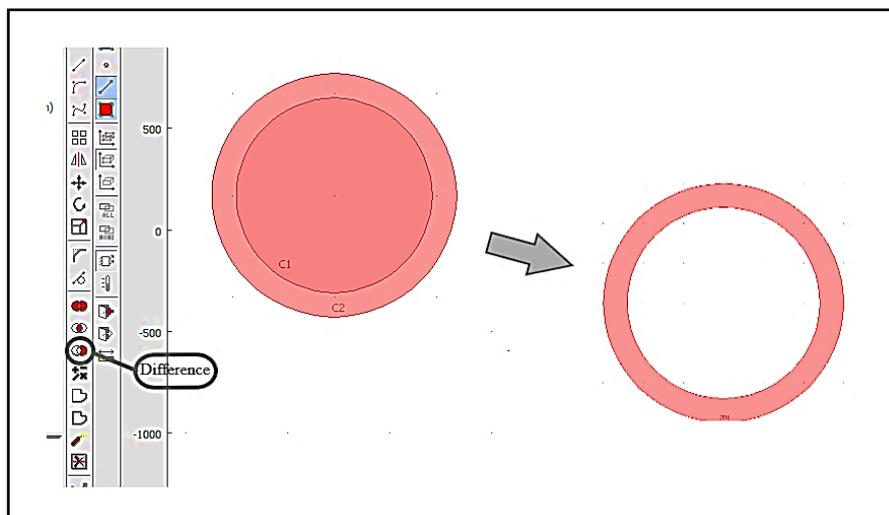


Figure IV.12 : Dessin d'un anneau (tuyau 2D).

Par la suite, nous avons dessiné trois droites formant un triangle droit au centre de l'anneau et nous avons également regroupé les droites afin de former un solide par l'icône sélectionner dans la figure IV.13.

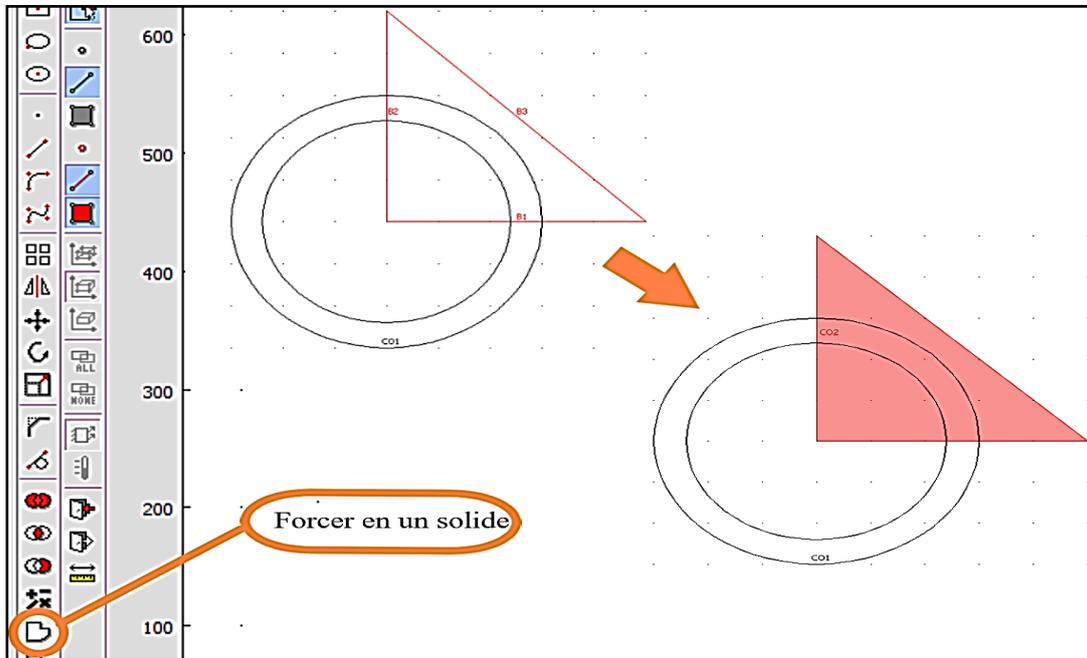


Figure IV.13 : Formation d'un solide.

Compte tenu de la symétrie de notre structure, nous avons préféré de travailler avec un quart du cylindre (l'anneau en 2D) pour optimiser le temps de calcul. (cf.fig.14).

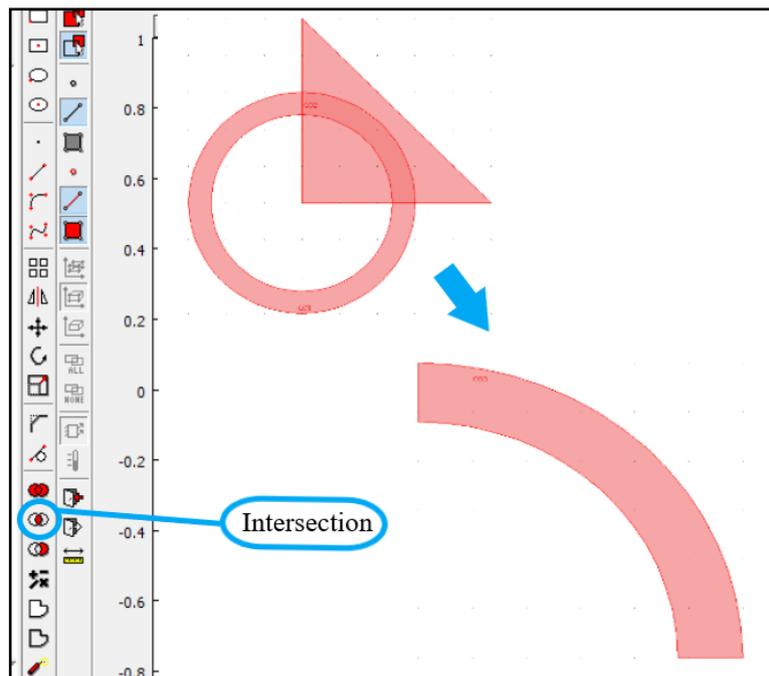


Figure IV.14 : la formation de notre quart du tuyau en 2D.

IV.3. Physique

L'anglet physique vient après celui de géométrie sur l'interface de COMSOL MULTIPHYSICS où on définit le comportement de notre modèle élastique (isotrope), Module de Young, coefficient de poisson, la densité ainsi que la longueur du tube cylindrique qui est selon notre géométrie que l'épaisseur dans le volet matériau du sous-domaine (cf.fig.16). Ensuite, nous avons déterminé les conditions aux limites et les plans de symétries, appliquer une pression interne sur la face interne (3) comme le montre la figure IV.15.

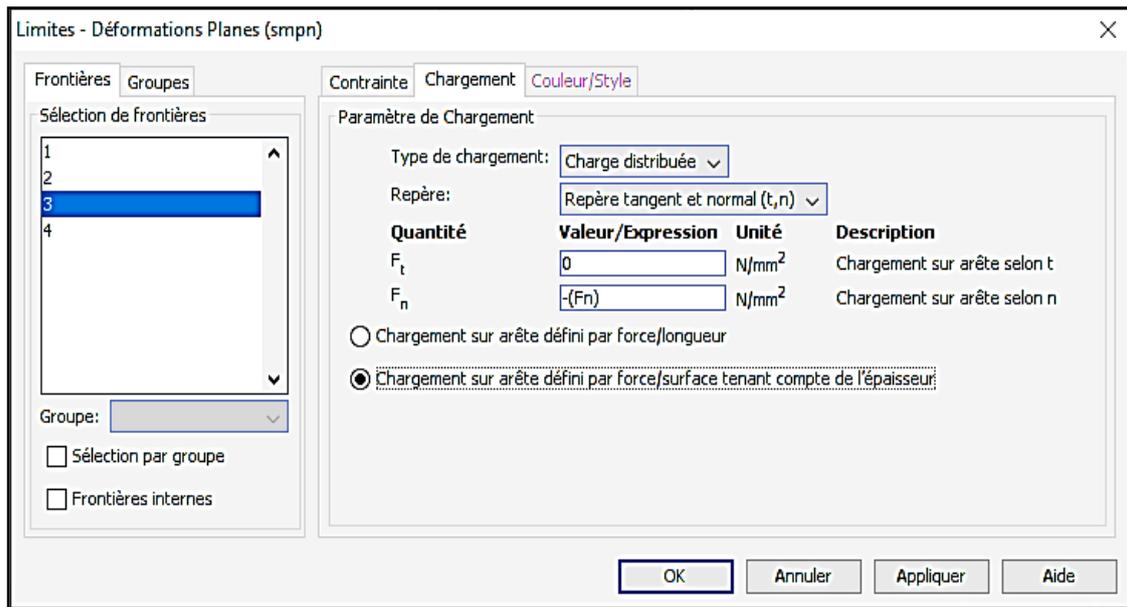


Figure IV.15 : Définition des conditions aux limites sur COMSOL.

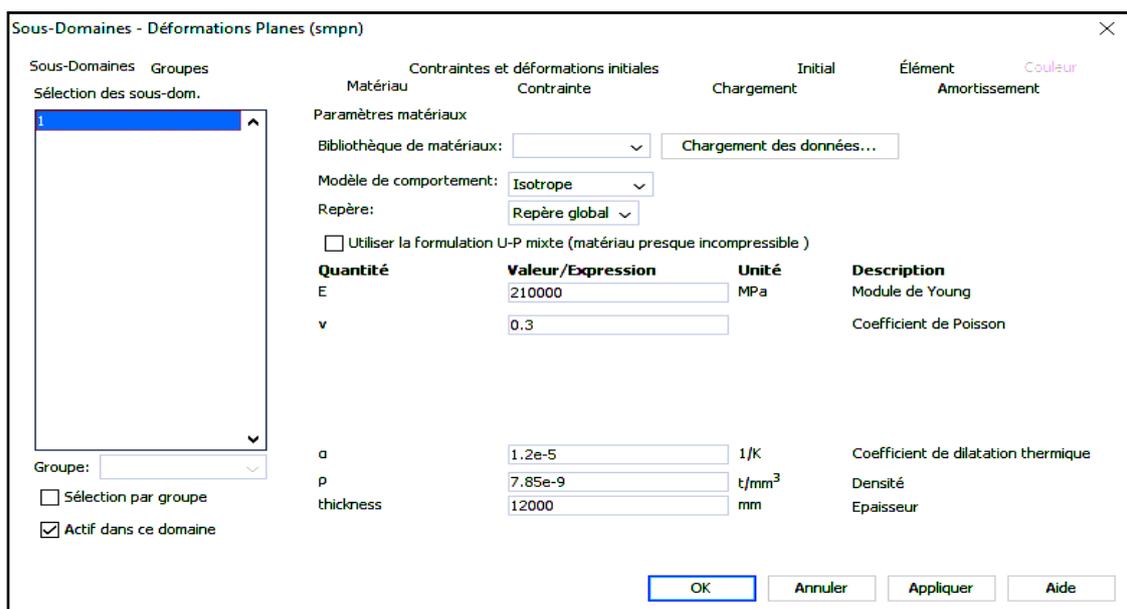


Figure IV.16 : Définition des paramètres sous- domaine.

Le résultat est représenté sur la figure IV.17 où les plans de symétries sont représentés en rouge et la pression interne en petites flèches bleus.

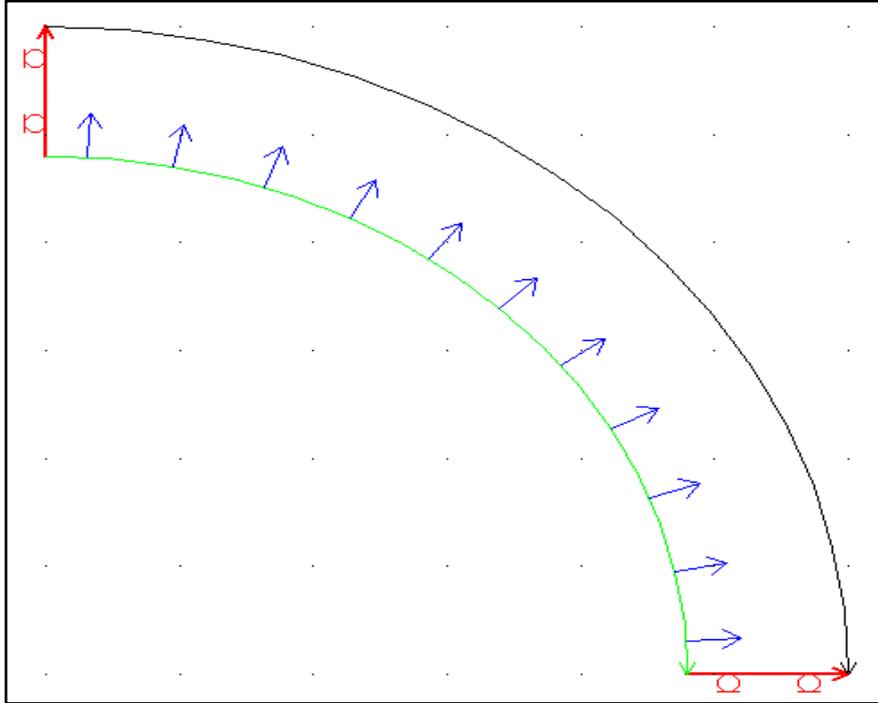


Figure IV.17 : Représentation de la géométrie en 2D, mettant en évidence les plans de symétries ainsi que la pression interne appliquée.

IV.4. Maillage, convergence

IV.4.1. Le choix de maillage

Dans ce modèle EF ; nous avons le choix entre des éléments triangulaires et quadrangulaires, afin d'optimiser la précision des simulations numériques et convergence.

Afin de définir l'élément fini le plus adéquat nous avons procédé par une étude paramétrique. Les résultats sont présentés sous forme de graphe (Cf.Fig.IV.18).

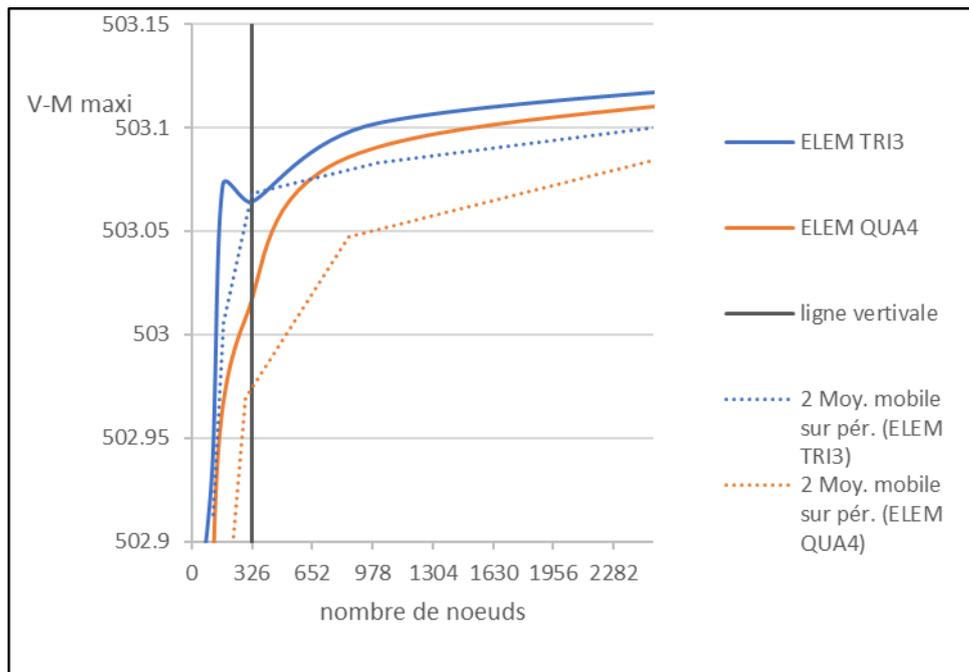


Figure IV.18 : Graphe des contraintes de von-Mises maximales en fonction de nombre de nœuds pour type et élément de maillage différents tout en fixant la pression à $k=2.5 \cdot 10^{-1}$

La ligne verticale et les courbes de tendances (Cf.Fig.18), nous conduit à dire que l'élément triangulaire converge plus rapidement pour moins de nombre de nœuds par rapport à l'élément quadrangle nous pouvons ainsi conclure que pour l'élément triangulaire, avoir un maillage raffiné à plus de 326 nœuds (326 nœuds, équivalent à un maillage plus fin) n'optimise ni la précision ni le temps des calculs.

5. Résolution

Une fois la géométrie est fidèle à notre modèle, la physique et les conditions aux limites sont appliquées, le matériau défini, les constantes, les expressions sont déclarées et le maillage généré, nous lançons la résolution de notre système.

On impose une pression intérieure $P_i = k \sigma_e$ où $k \in [2.1 \cdot 10^{(-1)}, 3.1 \cdot 10^{(-1)}]$ (Cf. Fig.17) ; ensuite on lance à chaque fois le calcul pour une valeur fixée de k.

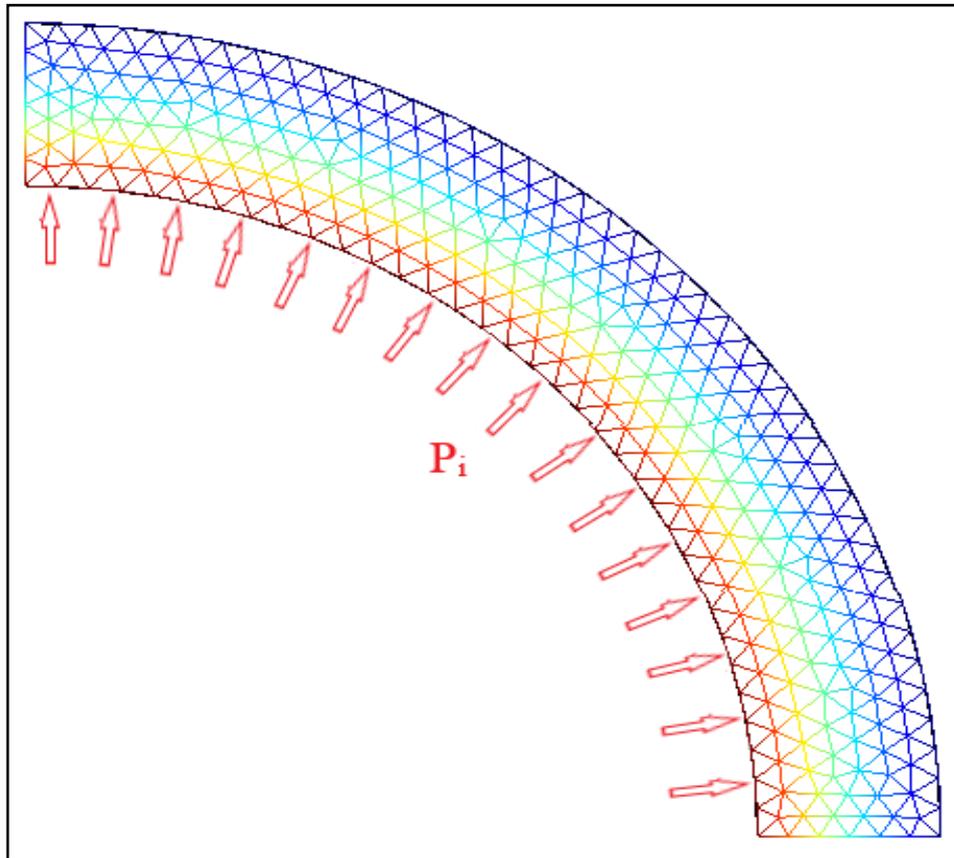


Figure IV.19 : Distribution de champs de contraintes de von-Mises sur notre structure maillée

IV.6. Post traitement

Le post traitement vient après la résolution ; Pour chaque valeur de k , on a généré une courbe du rapport de la contrainte de von Mises et la limite élastique, en utilisant « paramètres de section » dans le post traitement.

On extrait le rapport de la contrainte de von Mises et la limite élastique en différents points de l'épaisseur du cylindre sur un segment qui est défini par l'angle polaire θ ; i.e. $\theta = 30^\circ$. Nous précisons que les résultats obtenus sont indépendants de l'angle polaire compte tenu de l'isotropie du matériau élastique constitutif de la paroi du cylindre. La contrainte de von Mises est ainsi obtenue en fonction du rayon adimensionnel qui est défini par $\rho_n = \eta^{1+n+N}$.

On montre sur la Fig.20 les résultats des simulations numériques par EF qui mettent en évidence la variation l'effet du nombre k.

On reporte les valeurs numériques du rapport $\frac{\sigma_{eq}}{\sigma_e}$ sur le tableau ci-après.

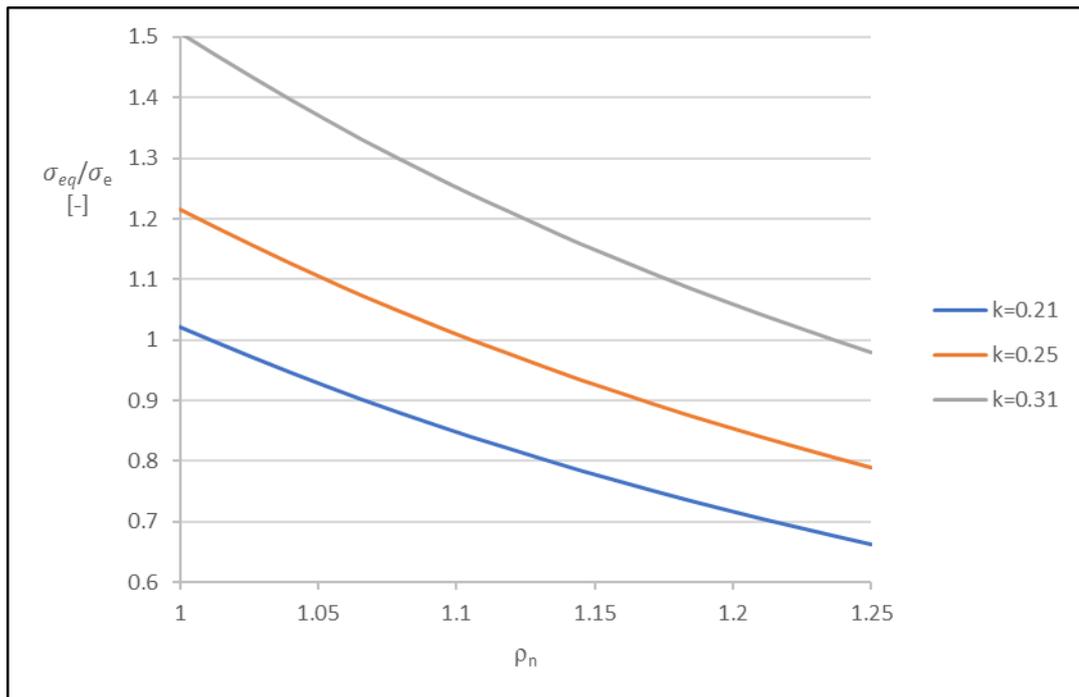


Figure IV.20 : Résultat de la simulation numérique par EF pour différentes valeurs de k

D'après la figure, on remarque que pour $k = 0.21$ la plastification du cylindre est quasi nul, en revanche, elle est progressivement importante pour des valeurs de k supérieures.

Le tableau ci-dessous présente les valeurs numériques de $\sigma_{eq}^{EF} / \sigma_e$ extraites des courbes générées par COMSOL MULTIPHISICS, pour chaque point des 20 points qu'on a pris au long de l'épaisseur de notre tube et pour différentes valeurs de k.

$\sigma_{eq}^{EF} / \sigma_e$ en fct(ρ)			
ρ_n \ / k	k=2.1*10 ⁻¹	k=2.5*10 ⁻¹	k=3.5*10 ⁻¹
1.0000141	1.0209476	1.2154137	1.507113
1.0131717	0.9957171	1.1853775	1.4698682
1.0263293	0.97108185	1.1560498	1.4335018
1.0394869	0.94713145	1.1275375	1.3981465
1.0526445	0.92418504	1.1002202	1.3642731
1.0658021	0.90162414	1.0733621	1.330969
1.0789597	0.88062423	1.0483621	1.2999691
1.0921173	0.86023825	1.0240932	1.2698755
1.1052749	0.84035397	1.0004214	1.2405225
1.1184325	0.8218776	0.97842574	1.2132479
1.1315901	0.803269	0.95627266	1.1857781
1.1447477	0.7851055	0.93464947	1.1589653
1.1579053	0.7684573	0.9148301	1.1343893
1.171063	0.75171125	0.89489436	1.109669
1.1842206	0.73567575	0.8758044	1.0859975
1.1973782	0.7204955	0.8577327	1.0635886
1.2105358	0.7055202	0.839905	1.0414822
1.2236934	0.6912967	0.8229723	1.0204856
1.236851	0.67720014	0.8061906	0.99967635
1.2500086	0.66348654	0.7898649	0.97943246

Tableau IV.3 : Le rapport $\sigma_{eq}^{EF} / \sigma_e$ en fonction du rayon adimensionnelle ρ_n pour différentes pressions (valeurs extraites des courbes obtenues par Comsol)

IV.7. Comparaison des résultats Analytique et numérique

Nous avons calculé le rapport de la contrainte équivalente de von Mises et la limite élastique déduite en utilisant l'expression analytique (Cf. Eq.30. Chapitre II) en fonction du rayon adimensionnel ρ_n ; les résultats obtenus sont réunis sur le tableau 5. Ensuite, nous avons comparé les résultats des simulations numériques par éléments finis à ceux obtenus via le calcul analytique.

$\sigma_{eq}^{AN} / \sigma_e$ en fct(ρ)			
ρ_n \diagup k	$k=2.1*10^{-1}$	$k=2.5*10^{-1}$	$k=3.1*10^{-1}$
1.0000141	1.021311022	1.215846455	1.507649604
1.0131717	0.995527405	1.185151672	1.469588074
1.0263293	0.970743548	1.155647081	1.43300238
1.0394869	0.946909314	1.127272993	1.397818511
1.0526445	0.923977678	1.099973426	1.363967049
1.0658021	0.901904498	1.073695831	1.331382831
1.0789597	0.880648305	1.04839084	1.300004641
1.0921173	0.860170112	1.024012038	1.269774927
1.1052749	0.840433235	1.000515756	1.240639538
1.1184325	0.821403136	0.977860876	1.212547487
1.1315901	0.80304727	0.956008654	1.185450731
1.1447477	0.785334949	0.934922558	1.159303972
1.1579053	0.768237218	0.914568116	1.134064464
1.171063	0.751726614	0.894912635	1.109691668
1.1842206	0.735777556	0.875925662	1.086147821
1.1973782	0.720365495	0.857577971	1.063396684
1.2105358	0.705467327	0.839842057	1.04140415
1.2236934	0.691061182	0.822691884	1.020137936
1.236851	0.677126344	0.806102791	0.99956746
1.2500086	0.66364318	0.790051405	0.979663742

Tableau IV.4 : Les valeurs $\sigma_{eq}^{AN} / \sigma_e$ en fonction de ρ_n pour différentes pressions

Par le biais de la superposition des courbes analytiques et celles obtenues par éléments finis, on a eu droit à une comparaison (Cf. Fig.21)

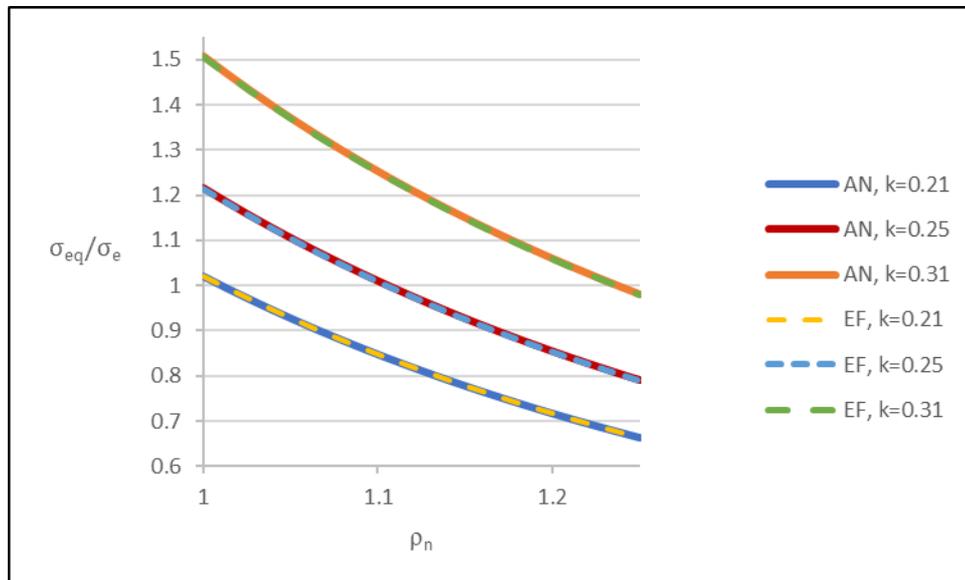


Figure IV.21 : Courbes issues du calcul analytique (AN) et celles obtenues numériquement (EF).

Les courbes obtenues par calcul analytique sont en trait continu en revanche celles en trait discontinu sont obtenues via la simulation numérique. On constate que les simulations FE reproduisent « parfaitement » les résultats issus de l'expression analytique de la contrainte de von Mises. Dans le but de s'assurer, on a tracé la courbe du rapport $\sigma^{AN} / \sigma^{EF}$ en fonction de ρ_n (Cf.Fig.IV22).

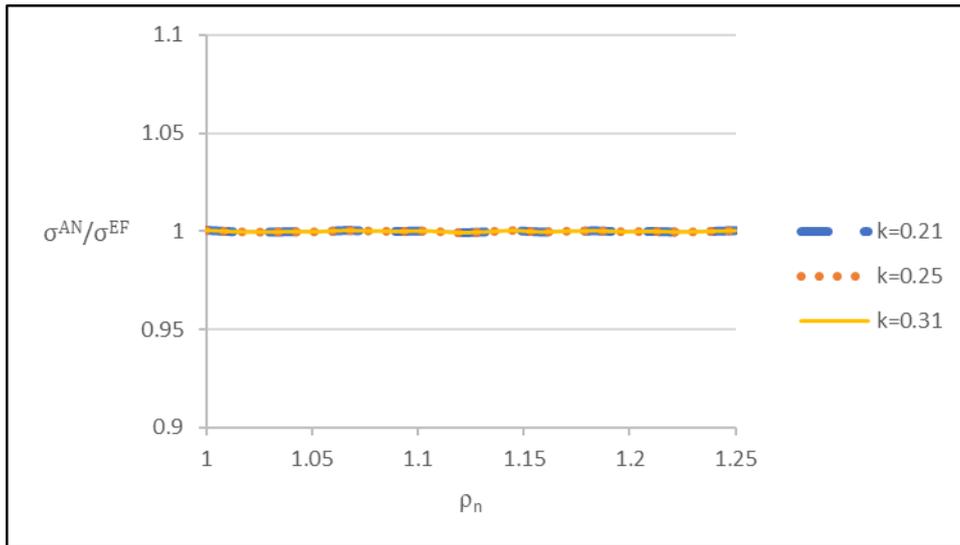


Figure IV.22 : Graphe représentant le rapport des contraintes de von-Mises obtenus analytiquement et celles obtenus numériquement en fonction du rayon adimensionnel ρ_n

On conclut alors que notre calcul analytique est bon et le calcul numérique l’approuve.

IV.7.1. Le calcul d’erreur relative

Afin de quantifier l’erreur relative entre chaque courbe analytique et celle du numérique, on a utilisé la formule suivante :

$$Erreur_{relative} (\%) = 100 \sqrt{\sum_i^N \left(\frac{(\sigma_{eq}^{AN})_i - (\sigma_{eq}^{EF})_i}{(\sigma_{eq}^{AN})_i} \right)^2} \tag{IV.58}$$

d’où :

	$k=2.1 \cdot 10^{-1}$	$k=2.5 \cdot 10^{-1}$	$k=3.1 \cdot 10^{-1}$
Erreur	0.1149405	0.1149438	0.1149451

L’erreur relative entre la contrainte de von-Mises obtenue de la simulations numériques par éléments finis et de celle retrouvée via l’approche analytique a été calculé et de l’ordre de 0.1% En tenant compte de cette précision, nous pouvons juger que les résultats obtenus sont bons.

Conclusion et Perspectives

Conclusion et perspectives

Notre étude concerne l'évaluation des contraintes de Cauchy dans un tube épais en acier. En conséquence, l'état de contraintes est triaxial conduit au calcul de la contrainte équivalente de Von-Mises à des fins de comparaison à la limite élastique du matériau, qui est obtenue lors d'un essai de traction uni-axial.

Ensuite, nous avons considérés le critère de résistance afin d'obtenir la pression interne admissible en variant l'épaisseur du tube. Une analyse critique a été développée sur cette question.

Par la suite, l'analyse élasto-plastique nous a permis de déterminer la distribution des contraintes circonférentielles et radiales à travers le tube cylindrique. Il a été clair de notifier que les contraintes augmentent en fonction de l'élargissement du rayon de plasticité.

Au dernier chapitre, nous avons proposé une analyse de contrainte de Cauchy par la méthode des éléments finis dans le cadre du code commercial COMSOL MULTIPHYSICS, où on a constaté que l'élément triangulaire convient à notre géométrie. Ainsi, le maillage le plus fin a été utilisé afin d'optimiser le temps de calcul et la précision des simulations numériques.

L'erreur relative entre la contrainte de von-Mises issue des simulations numériques-EF et de l'approche analytique a été calculé et de l'ordre de 0.1%. Compte tenu de cette précision, nous pouvons affirmer que les résultats obtenus sont bons.

Ce présent travail nécessite une étude approfondie afin de tenir compte des fluctuations de la pression interne générée par les stations de compression afin de compenser les pertes de charges.

En fait, la solution peut être envisagé dans le cadre de l'élasto-dynamique, c'est-à-dire, on tiendra compte de l'effet de la fréquence sur la distribution des contraintes de Cauchy au long de l'épaisseur du tube épais.

Aussi, l'étude peut envisager dans le cadre d'élasto-plasticité via une loi d'écoulement plastique.

Ces deux perspectives exigent du temps et du travail qui aboutiront à mieux dimensionner les tubes en acier sous pressions interne.

RESUME

Les tubes cylindriques soumis à des pressions internes ont une grande utilité dans le domaine de la mécanique tel que : les conduites d'eau, les gazoducs, les oléoducs, les turboréacteurs et les fusées ; et même dans la biomécanique tels que les tubes minces et les vaisseaux sanguins. En effet, sous l'effet de la fluctuation des pressions internes, ces corps peuvent subir d'importante déformation élasto-plastique où des fissurations peuvent facilement apparaître et risquer à un endommagement considérable ou leur destruction. Pour cela, la détermination des zones élasto-plastiques de ces corps joue un rôle très important pour éviter leur endommagement. Notre travail consiste en l'analyse des contraintes limites élastiques et la détermination des zones plastiques en fonction de l'épaisseur d'un tube cylindrique homogène soumis à des changements de pressions internes. La mise en œuvre des équations élastique puis élasto-plastiques en utilisant le critère de Tresca où les contraintes radiales et circonférentielles ont été déterminés à travers la zone élasto-plastique. Au final, une résolution par la méthode des éléments finis a approuvé notre l'analyse élastique.

ABSTRACT

Cylindrical pipes subjected to internal pressures have great utility in the field of mechanics such as: water pipes, gas pipelines, oil pipelines, turbojets, and rockets; Even in biomechanics like thin tubes and blood vessels. Indeed, under the effect of fluctuating internal pressures, these bodies can suffer from significant elastoplastic deformation where cracks can easily appear and risk considerable damage or destruction. In this purpose, the determination of the elastoplastic zones of these bodies plays a very important role in preventing their damage. Our work consists of the analysis of the elastic limit stresses and the determination of the plastic zones according to the thickness of a homogeneous cylindrical tube subjected to changes in internal pressures. The implementation of the elastic then elastoplastic equations using the Tresca criterion where the radial and circumferential stresses were determined through the elastoplastic zone. In the end, a resolution by the finite element method approved our elastic analysis.