

Université Abderrahmane Mira De Bejaia

Faculté Des Sciences Exactes

Département De Mathématiques

MÉMOIRE

En vue de l'obtention du diplôme de Master

Filière : Mathématiques

Spécialité : Analyse Mathématique

Présenté par :

OURTI Amel

THÈME

Introduction à la méthode des éléments finis

Soutenue le 4/11/2021

Devant le jury composé de :

Mr. Rachid BOUKOUCHA MCA U. BEJAIA Président

Mr. Ouahmed MEZINE MAB U. BEJAIA Examineur

Mr. Arezki KHELOUFI PR U. BEJAIA Promoteur

Année Universitaire : 2020/2021

Table des matières

Introduction	2
1 Préliminaires	5
1.1 Outils mathématiques	5
1.1.1 Espaces de Hilbert	5
1.1.2 Espaces de Sobolev	11
1.1.3 Quelques inégalités	14
1.2 Formulations variationnelles de quelques problèmes aux limites	14
1.2.1 Problème modèle avec conditions aux limites de type Dirichlet en dimension 1	14
1.2.2 Problème modèle avec conditions aux limites de type Dirichlet en dimension N	16
1.2.3 Problème modèle avec conditions aux limites de type Fourier-Neumann en dimension 1	18
1.2.4 Problème modèle avec conditions aux limites de type Fourier en dimension N	21
2 Méthode des éléments finis	24
2.1 Approximation interne générale ou méthode de Galerkin	24
2.2 Discrétisation	25
2.3 Application à un problème de Dirichlet en dimension un	26

2.3.1	Discrétisation et choix d'une base	27
2.3.2	Le problème approché	29
2.3.3	Matrice de rigidité et vecteur charge élémentaire	30
2.3.4	Implémentation du Code Matlab	33
2.4	Application à un problème de Neumann en dimension un	38
	Conclusion	52
	Bibliographie	53

Remerciements

Je tiens particulièrement à remercier monsieur KHELOUFI d'avoir accepté de prendre le relais après la mort subite de madame TAS qui nous a profondément marquée, paix à son âme. Je le remercie aussi pour sa gentillesse, sa sympathie et sa bienveillance sur la qualité de ce travail.

Je remercie également tous les membres du jury qui me font l'honneur de donner leurs avis sur ce mémoire.

Je remercie aussi tous les membres du département pour le bon déroulement et la clôture de ces deux dernières années universitaires après la survenue de la pandémie COVID-19 ainsi que tous les enseignants d'avoir pris le risque d'enseigner, et tout le personnel universitaire pour les précautions prises contre la maladie.

Je remercie toute ma famille d'avoir répondu présent quand j'en avais le plus besoin et surtout mon frère qui a toujours été pour moi un meilleur ami dans la vie.

Dédicaces

Tout d'abord je dédie ce travail à notre très chère et regrettée professeur madame TAS

pour nous avoir transmis son savoir incessant,

que Dieu l'accueille dans son très vaste paradis et que son âme repose en paix.

A Mr KHELOUFI qui m'a encadrée et aidée à surmonter mes difficultés.

*A mon très cher frère MAHIEDDINE qui va bientôt être promu médecin généraliste,
je lui souhaite de tout coeur de réussir à son examen de résidanat très prochainement.*

A mes très adorables parents qui ont veillé sur moi et sur mes études.

A tous mes amis et tous mes proches.

*A tous les enseignants qui se sont donnés du mal pour nous transmettre le savoir
durant tout mon cursus universitaire.*

Résumé

Dans ce mémoire nous nous intéressons à la méthode des éléments finis. Notre objectif principal est de comprendre les principes généraux qui régissent cette méthode ainsi que de savoir utiliser cette méthode pour résoudre quelques problèmes aux limites. Nous commençons par rappeler les outils mathématiques utiles pour la méthode des éléments finis. Ensuite après avoir introduit cette méthode, nous illustrons son application par deux problèmes aux limites, l'un de Dirichlet et l'autre est de Neumann.

Mots-clés : Méthode des éléments finis, problèmes aux limites, formulation variationnelle, discrétisation, solution approchée, matrice de rigidité.

Introduction

La modélisation des phénomènes issus de différents domaines tels que la physique, la mécanique des solides, la mécanique des fluides, la propagation des ondes, la distribution de la chaleur, la mécanique quantique, l'électromagnétisme, l'aéronautique, les prédictions météorologiques ou encore le traitement d'imagerie médicale, par des problèmes aux limites, fait l'objet de recherches régulières des scientifiques et des ingénieurs. Cependant, certains problèmes aux limites ont des domaines très complexes, parfois avec des géométries inextricables, ce qui nécessite une bonne méthode numérique d'approximations des solutions approchées, lorsqu'on ignore comment calculer la solution exacte analytiquement. Ceci dit, la méthode des éléments finis est dite être "la méthode numérique de référence" vu sa grande flexibilité sur ce genre de domaines.

La méthode des éléments finis est une méthode largement utilisée pour résoudre numériquement des problèmes aux limites associés à des équations différentielles ordinaires ou à des équations aux dérivées partielles survenant en ingénierie et en modélisation mathématique. Elle consiste en la subdivision d'un grand système en parties plus petites et plus simples appelées éléments finis. Ceci est réalisé par la construction d'un maillage du domaine de la solution à l'aide de discrétisations particulières. Les équations simples qui modélisent ces éléments finis sont ensuite assemblées en un système d'équations plus large qui modélise l'ensemble du problème. La formulation par la méthode des éléments finis d'un problème aux limites aboutit

finaleme nt à un système d'équations algébriques.

La méthode des éléments finis est apparue vers 1850. Elle est née du besoin de résoudre des problèmes complexes d'élasticité et d'analyse structurale en génie civil et en aéronautique. Son développement remonte aux travaux de Hrennikoff [8] et Courant [6] au début des années 40. En URSS, l'introduction de l'application pratique de la méthode est liée au nom de Leonard Oganessian. La méthode a également été redécouverte en Chine par Feng Kang à la fin des années 1950 et au début des années 1960, sur la base des calculs de constructions de barrages. Bien que les approches utilisées par ces pionniers soient différentes, elles partagent une caractéristique essentielle : la discrétisation par maillage d'un domaine continu en un ensemble de sous-domaines discrets, généralement appelés éléments. La méthode des éléments finis a obtenu son véritable essor dans les années 1960 et 1970. Une base mathématique rigoureuse à la méthode des éléments finis a été fournie en 1973 avec la publication de Strang et Fix [13]. La méthode a depuis été généralisée pour la modélisation numérique de systèmes physiques dans une grande variété de disciplines d'ingénierie, par exemple, l'électromagnétisme, le transfert de chaleur et la dynamique des fluides, voir par exemple [2] et [14].

Pendant ce dernier siècle, la méthode des éléments finis a vu un essor considérable dans le domaine des mathématiques appliquées. La problématique de ce mémoire se pose alors : comment applique-t-on cette méthode surnommée M.E.F. ?

De prime à bord, l'application d'une telle méthode numérique passe par la discrétisation du domaine. En second lieu, l'approximation interne générale de l'espace de recherche (dite aussi méthode de Galerkin ou de Ritz) de la solution approchée, nécessite des espaces d'une grande particularité, possédant des propriétés pertinentes, parmi lesquelles on cite :

l'aptitude à dériver une fonction qui n'est même pas dérivable au sens classique, ce qui est le cas de la quasi-totalité des fonctions inconnues présentes dans la modélisation de problèmes de la vie réelle traduits en équations aux dérivées partielles (E.D.P.). Troisièmement, il vient alors, l'utilisation de fonctions de base pour le calcul des matrices qui composent un système linéaire et

tridiagonal qui en découle du problème de départ. Les fonctions de base sont nommées comme telles compte tenu du fait qu'elles forment une base de l'espace de recherche de la solution approchée. Enfin, la résolution du système fait appel à des logiciels de calculs numériques tel que Matlab, qui nous sera inévitable afin d'approcher la solution exacte.

Ce mémoire est composé de deux chapitres. Le premier chapitre contient des rappels d'analyse fonctionnelle nécessaires à l'application de la M.E.F. Ces rappels concernent les espaces de Hilbert, les espaces de Sobolev ainsi que des formulations dites faibles ou variationnelles de quelques problèmes aux limites modèles. Dans le second chapitre, nous donnons les concepts qui régissent la M.E.F. Ensuite, son application sera illustrée par l'étude des deux problèmes aux limites suivants :

$$(P_1) \begin{cases} -u''(x) = f(x), & x \in]0, 1[, \\ u(0) = 0, & u(1) = 0, \end{cases}$$

où $f \in L^2(]0, 1[)$ et

$$(P_2) \begin{cases} -\frac{d}{dx}[k(x)\frac{du}{dx}(x)] + \mu(x)u(x) = f(x), & x \in]0, 1[, \\ u'(0) = 0, & u'(1) = 0, \end{cases}$$

où $f \in L^2(]0, 1[)$, $k, \mu \in L^\infty(]0, 1[)$.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Outils mathématiques

1.1.1 Espaces de Hilbert

Définition 1.1. Soit E un espace vectoriel normé réel. Un produit scalaire dans E est une application $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ ayant les propriétés suivantes :

1. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bilinéaire : $\forall x, x_1, x_2, y_1, y_2, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R} :$

$$\langle \lambda x_1 + x_2, y \rangle = \lambda \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$$

et

$$\langle x, \lambda y_1 + y_2 \rangle = \lambda \langle x, y_1 \rangle + \langle x, y_2 \rangle.$$

2. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique :

$$\forall x, y \in E, \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle.$$

3. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie positive :

$$\forall x \in E \setminus \{0_E\}, \langle x, x \rangle > 0_{\mathbb{R}}.$$

La norme induite par ce produit scalaire est :

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Remarque 1.1. 1. *Tout produit scalaire est associé à une norme mais ce n'est pas toutes les normes qui sont associées à des produits scalaires (cas de la norme de la convergence uniforme).*

2. *Un espace vectoriel normé muni d'un produit scalaire est dit espace pré-hilbertien.*

Définition 1.2. ([5]) *Soit E un espace vectoriel normé et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de E . $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy si et seulement si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N / \forall p > N, \forall q > N, \|u_p - u_q\| < \varepsilon.$$

Autrement dit, il existe un certain rang à partir duquel tous les termes de la suite se rapprochent de plus en plus les uns des autres.

Propriétés 1.1. *Toute suite convergente est de Cauchy mais l'inverse n'est pas toujours vrai.*

Lemme 1.1. *Tout espace vectoriel normé E de dimension finie est complet pour toutes les normes définies sur E .*

Définition 1.3. *Dans le cas où toutes les suites de Cauchy sont convergentes dans un espace vectoriel normé bien précis, on dit alors que ce dernier est complet et il est appelé espace de Banach.*

Définition 1.4. *On dit qu'un espace préhilbertien H , muni de la norme associée à un produit scalaire, est un espace de Hilbert si H est un espace vectoriel normé complet.*

Proposition 1.1. ([5]) *Soit H un espace de Banach qui vérifie de plus l'identité du parallélogramme suivante :*

$$\forall x, y \in H, \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2[\|x\|^2 + \|y\|^2].$$

Alors H est un espace de Hilbert.

Lemme 1.2. ([5])

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace de Banach pour la norme $\|\cdot\|_E$ et $F \subset E$. Alors F est fermé dans E si et seulement si F contient les limites de toutes ses suites de Cauchy.

Lemme 1.3. Soit $(H, \|\cdot\|_H)$ un espace de Hilbert et $F \subset H$ un sous-espace fermé de H . Alors F est lui-même un espace de Hilbert pour la norme $\|\cdot\|_H$.

Théorème 1.1. (Théorème de représentation de Riesz) Pour toute forme linéaire continue φ sur H , il existe un unique $f \in H$ tel que $\varphi(v) = (f, v)_H, \forall v \in H$, de plus $\|\varphi\|_{H'} = \|f\|_H$ et on note $\varphi(v) = \langle \varphi, v \rangle$.

Théorème 1.2. (Théorème de Lax-Milgram). ([5]) Soit H un espace de Hilbert et $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue sur $H \times H$:

$$\exists M > 0, \forall (u, v) \in H^2, |a(u, v)| \leq M\|u\|\|v\|.$$

Si a est H -elliptique (ou coercive), c'est-à-dire

$$\exists \alpha > 0, \forall u \in H, a(u, u) \geq \alpha\|u\|^2,$$

et si $l : H \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme linéaire continue, alors le problème :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H \text{ tel que } \forall v \in H \\ a(u, v) = l(v), \end{cases} \quad (1.1)$$

admet une solution unique dans H .

Démonstration. Soit $l \in H'$. D'après le théorème de représentation de Riesz

$$\exists! f \in H, \text{ tel que } \langle l, v \rangle = (f, v)_H, \forall v \in H.$$

Pour tout $u \in H$, fixé, l'application

$$v \mapsto a(u, v)$$

est une forme linéaire continue sur H . Autrement dit $a(u, \cdot) \in H'$. D'après le théorème de représentation de Riesz

$$\exists! w_u \in H, \text{ tel que } \forall v \in H, a(u, v) = \langle w_u, v \rangle_H.$$

L'application

$$\begin{aligned} A : H &\longrightarrow H \\ u &\longmapsto Au = w_u \end{aligned}$$

est linéaire et continue. En effet,

1. pour $u, w \in H$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \forall v \in H : (A(u + \lambda w), v)_H &= a(u + \lambda w, v) \\ &= a(u, v) + \lambda a(w, v) \\ &= (Au, v)_H + \lambda (Aw, v)_H \\ &= (Au + \lambda Aw, v)_H. \end{aligned}$$

D'où,

$$A(u + \lambda w) = Au + \lambda Aw.$$

- 2.

$$\begin{aligned} \|Au\|_H^2 &= (Au, Au)_H \\ &= a(u, Au) \\ &\leq C_a \|u\|_H + \|Au\|_H. \end{aligned}$$

D'où

$$\exists C_a > 0, \forall u \in H, \|Au\|_H \leq C_a \|u\|_H.$$

Alors le problème (1.1) s'écrit,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver un unique } u \in H \text{ tel que} \\ (Au, v)_H = (f, v)_H, \forall v \in H. \end{array} \right.$$

ou encore,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver un unique } u \in H \text{ tel que} \\ Au = f. \end{array} \right.$$

Il s'agit de montrer que l'opérateur A est bijectif.

1. $a(.,.)$ étant coercive, on a

$$\exists \alpha > 0, \forall v \in H : \alpha \|v\|_H^2 \leq a(v, v) = (Av, v)_H.$$

Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\forall v \in H, \alpha \|v\|_H^2 \leq \|Av\|_H \|v\|_H,$$

ou encore

$$\forall v \in H : \|Av\|_H \geq \alpha \|v\|_H. \quad (1.2)$$

Ainsi,

$$Av = 0_H \Leftrightarrow v = 0_H.$$

Autrement dit

$$\text{Ker } A = 0_H.$$

Ce qui signifie que A est injectif.

2. Montrons que A est surjectif. Soit (v_n) une suite de $\text{Im } A$ telle que $v_n \rightarrow v$ dans H .

On a

$$\exists u_n \in H : v_n = Au_n \rightarrow v \text{ dans } H.$$

(Au_n) est donc une suite de Cauchy dans H . Grâce à (1.2), on a

$$\|u_n - u_m\|_H \leq \frac{1}{\alpha} \|Au_n - Au_m\|_H.$$

Donc la suite (u_n) est aussi une suite de Cauchy dans H . Par suite,

$$\exists u \in H, \text{ tel que } u_n \rightarrow u \text{ dans } H.$$

La continuité de A donne

$$Au_n \rightarrow Au \text{ dans } H.$$

Ainsi,

$$\exists v \in H \text{ tel que } v = Au.$$

D'où $Im A$ est un sous-espace fermé de H . D'autre part, soit $w \in (Im A)^\perp$ (ici, $(Im A)^\perp$ désigne l'orthogonal de $Im A$). Donc

$$(v, w)_H = 0, \forall v \in Im A.$$

Ce qui implique que

$$(Au, w)_H = 0, \forall u \in H.$$

En particulier

$$(Aw, w)_H = 0.$$

Mais,

$$(Aw, w)_H = a(w, w) \geq \alpha \|w\|_H^2.$$

Donc,

$$\|w\| \Leftrightarrow w = 0_H.$$

Par conséquent, $Im A$ est dense dans H , (i.e., $\overline{Im A} = H$). Comme $Im A$ étant fermé, alors

$$Im A = H.$$

Ce qui signifie que A est surjectif.

□

Une autre démonstration du théorème de Lax-Milgram :

Soit $A : H \rightarrow H$ l'opérateur linéaire défini par

$$\langle Au, v \rangle = a(u, v) \forall v \in H.$$

L'existence de Au résulte du théorème de Riesz, car $v \mapsto a(u, v)$ est linéaire continue sur H .

L'opérateur A est linéaire continu car

$$\|Au\| = \sup_{v \in H \setminus \{0\}} \frac{|\langle Au, v \rangle|}{\|v\|} \leq \frac{M\|u\|\|v\|}{\|v\|} = M\|u\|.$$

D'autre part, toujours d'après le théorème de Riez, il existe $b \in H$ tel que $Au = b$. On va procéder d'une manière itérative en partant d'un $u_0 \in H$ quelconque et en définissant, pour $\rho > 0$, la suite récurrente :

$$u_{k+1} = u_k - \rho(Au_k - b) = F(u_k).$$

Montrons que pour $\rho > 0$ suffisamment petit, F est contractante. On a

$$F(u) - F(v) = u - v - \rho(A(u - v)),$$

donc

$$\begin{aligned} \|F(u) - F(v)\|^2 &= \|u - v\|^2 + \rho^2 \|A(u - v)\|^2 - 2\rho \langle A(u - v), u - v \rangle \\ &= \|u - v\|^2 + \rho^2 \|A(u - v)\|^2 - 2\rho a(u - v, u - v) \\ &\leq \|u - v\|^2 + M^2 \rho^2 \|u - v\|^2 - 2\rho \alpha \|u - v\|^2 \\ &\leq (1 - 2\rho \alpha + M^2 \rho^2) \|u - v\|^2. \end{aligned}$$

Choisissons donc ρ tel que $\rho < 2\frac{\alpha}{M^2}$. Alors, F est contractante et le schéma itératif est convergent, ce qui démontre le théorème.

1.1.2 Espaces de Sobolev

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$.

Espace de Lebesgue $L^2(\Omega)$:

$$L^2(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, f \text{ mesurable sur } \Omega, \int_{\Omega} |f(x)|^2 dx < \infty\}.$$

Remarque 1.2. Si Ω est un ouvert borné, alors toute fonction dans $C^0(\overline{\Omega})$ est dans $L^2(\Omega)$. En effet, soit $f \in C^0(\overline{\Omega})$, alors

$$\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \leq \sup_{x \in \overline{\Omega}} (f(x))^2 \text{ mes } \Omega.$$

Théorème 1.3. $L^2(\Omega)$ muni du produit scalaire

$$(u, v) \mapsto \int_{\Omega} u(x)v(x)dx$$

est complet. C'est donc un espace de Hilbert. On notera

$$\|f\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} |f(x)|^2 dx.$$

Définition 1.5. ([5]) Soit $C^\infty(\Omega)$ l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables sur Ω . On définit

$$D(\Omega) = C_c^\infty(\Omega) = \{f \in C^\infty(\Omega) : \text{supp}(f) \text{ est compact dans } \Omega\},$$

où $\text{supp}(f)$ est l'adhérence de l'ensemble des x tels que leurs images par f sont non nulles

$$\text{supp}(f) = \overline{\{x \in I, f(x) \neq 0\}}.$$

Les fonctions de $L^2(\Omega)$ sont applicables en pratique grâce au résultat de densité suivant :

Théorème 1.4. $D(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$, c'est à dire

$$\forall f \in L^2(\Omega), \exists (f_n)_n \in D(\Omega)^N, \lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - f_n\|_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Définition 1.6. *Espace des distributions*

L'ensemble des formes linéaires continues sur $D(\Omega)$ est appelé espace des distributions sur Ω , on le note $D'(\Omega)$.

Espace de Sobolev $H^1(\Omega)$

$$H^1(\Omega) = \{v \in L^2(I) \text{ telle que, } \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(I), \forall i = 1, \dots, N\}.$$

Théorème 1.5. $H^1(\Omega)$ muni du produit scalaire

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} \mapsto \int_{\Omega} (uv + \nabla u \nabla v) dx$$

est complet. C'est donc un espace de Hilbert. On notera

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} (|u|^2 + |\nabla u|^2) dx.$$

Ici, $\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N})$.

Théorème 1.6. (Théorème de trace). *L'application trace*

$$\begin{aligned} \gamma_0 : H^1(\Omega) &\longrightarrow L^2(\partial\Omega) \\ v &\longmapsto \gamma_0(v) = v|_{\partial\Omega} \end{aligned}$$

est continue, i.e.,

$$\exists C_0, \forall v \in H^1(\Omega), \|\gamma_0(v)\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C_0 \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Remarque 1.3. 1. γ_0 n'est pas surjective de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$.

2. Im γ_0 est un sous espace strict de $L^2(\partial\Omega)$ qui est dense dans $L^2(\partial\Omega)$. Cet espace est noté $H^{1/2}(\partial\Omega)$.

Formule de Green

Soit Ω un ouvert borné régulier de classe C^1 et $u, v \in H^1(\Omega)$:

$$\int_{\Omega} u(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) dx = - \int_{\Omega} v(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) dx + \int_{\partial\Omega} u(x) v(x) \eta_i(x) d\sigma$$

avec $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_N)$ est le vecteur unitaire normal à l'extérieur de Ω et $d\sigma$ la mesure superficielle sur $\partial\Omega$.

Espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$

$H_0^1(\Omega)$ est défini comme l'adhérence de $D(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$, c'est à dire l'ensemble des limites des suites d'éléments de $D(\Omega)$ qui sont convergentes dans $H^1(\Omega)$. Par définition $D(\Omega)$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$.

Théorème 1.7. (Théorème de trace). *Le noyau de l'application trace γ_0 est dans $H_0^1(\Omega)$.*

Autrement dit,

$$H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : v|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

1.1.3 Quelques inégalités

1. **Inégalité de Cauchy-Schwarz** : Soit $\|\cdot\|_H$ la norme induite par le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Alors :

$$\forall (x, y) \in H^2 : |\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle},$$

ou d'une manière équivalente

$$\forall (x, y) \in H^2 : |\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_H \cdot \|y\|_H.$$

2. **Inégalité de Poincaré** : Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N au moins dans une direction. Alors :

$$\exists C > 0, \forall u \in H_0^1(\Omega), \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{(L^2(\Omega))^N}.$$

Remarque 1.4. *l'inégalité de Poincaré a lieu seulement dans l'espace $H_0^1(\Omega)$. L'inégalité relative à l'espace $H^1(\Omega)$ est la suivante :*

3. **Inégalité de Poincaré-Wirtinger** : Soit Ω un ouvert borné connexe de \mathbb{R}^N et de classe C^1 . Alors :

$$\exists C > 0, \forall u \in H^1(\Omega) : \int_{\Omega} u(x) dx = 0, \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{(L^2(\Omega))^N}.$$

1.2 Formulations variationnelles de quelques problèmes aux limites

1.2.1 Problème modèle avec conditions aux limites de type Dirichlet en dimension 1

Soit $f \in L^2(]0, 1[)$. On considère le problème suivant :

$$(P_1) \begin{cases} -u''(x) = f(x), & x \in]0, 1[, \\ u(0) = 0, & u(1) = 0. \end{cases}$$

1. Donnons une formulation variationnelle du problème (P_1) . On multiplie l'équation différentielle du problème (P_1) par des fonctions test v et on intègre sur $]0, 1[$.

$$\int_0^1 -u''(x)v(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx.$$

En utilisant la formule d'intégration par parties, on obtient

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx - u'(1)v(1) + u'(0)v(0) = \int_0^1 f(x)v(x)dx.$$

On prend $v \in H_0^1(]0, 1[)$, (i.e., $v(0) = v(1) = 0$). Donc

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx.$$

Comme les conditions de bord de (P_1) impliquent que $u \in H_0^1(]0, 1[)$, on voit que le bon choix est de prendre

$$V = H_0^1(]0, 1[), \quad a(u, v) = \int_0^1 u'(x)v'(x)dx \text{ et } l(v) = \int_0^1 f(x)v(x)dx.$$

Donc la formulation variationnelle de (P_1) est

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H_0^1(]0, 1[) \text{ tel que } \forall v \in H_0^1(]0, 1[) \\ \int_0^1 u'(x)v'(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx. \end{array} \right.$$

2. Montrons, en utilisant le théorème de Lax-Milgram, qu'il existe une unique solution faible de (P_1) dans $H_0^1(]0, 1[)$. Posons

$$a(u, v) = \int_0^1 u'(x)v'(x)dx \text{ et } l(v) = \int_0^1 f(x)v(x)dx.$$

Il est clair que $a(., .)$ est une forme bilinéaire sur $H_0^1(]0, 1[) \times H_0^1(]0, 1[)$ et que l est une forme linéaire sur $H_0^1(]0, 1[)$.

- (a) Continuité de $l(.)$: pour $v \in H_0^1(]0, 1[)$ on a

$$\begin{aligned} |l(v)| &\leq \int_0^1 |f(x)| \cdot |v(x)| dx \\ &\leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \\ &\leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{H^1}. \end{aligned}$$

Donc l est continue sur $H_0^1(]0, 1[)$.

(b) Continuité de $a(., .)$: pour $u, v \in H_0^1(]0, 1[)$ on a

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq \int_0^1 |u'(x)| \cdot |v'(x)| dx \\ &\leq \|u'\|_{L^2} \|v'\|_{L^2} \\ &\leq \|u\|_{L^2} \|v\|_{H^1}. \end{aligned}$$

Donc $a(., .)$ est continue sur $H_0^1(]0, 1[) \times H_0^1(]0, 1[)$.

(c) Coercivité de $a(., .)$: Soit $u \in H_0^1(]0, 1[)$. Grâce à l'inégalité de Poincaré, on a

$$\begin{aligned} |a(u, u)| &= \int_0^1 |u'(x)|^2 dx \\ &\geq \|u\|_{H^1}^2. \end{aligned}$$

Conclusion : Le théorème de Lax-Milgram assure l'existence d'une solution unique du problème variationnel.

1.2.2 Problème modèle avec conditions aux limites de type Dirichlet en dimension N

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N de classe C^1 . On considère le problème suivant :

$$(P_2) \begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où $f \in L^2(\Omega)$.

1. Donnons la formulation variationnelle du problème (P_2) . On multiplie l'EDP de (P_2) par des fonctions test v et on intègre sur Ω .

$$\int_{\Omega} -\Delta u v dx = \int_{\Omega} f v dx.$$

En utilisant la formule de Green, on obtient

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} v d\sigma = \int_{\Omega} f v dx.$$

On prend $V = H_0^1(\Omega)$ (i.e., $v = 0$ sur $\partial\Omega$). Donc

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx.$$

Comme les conditions de bord de (P_2) impliquent que $u \in H_0^1(\Omega)$, on voit que le bon choix est de prendre

$$V = H_0^1(\Omega), \quad a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx, \quad \text{et } l(v) = \int_{\Omega} f v dx.$$

On munit $V = H_0^1(\Omega)$ de la norme du gradient, i.e., $\|u\|_V = \|u\|_{L^2}$. Donc la formulation variationnelle de (P_2) est

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que } \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx \end{cases}$$

2. Application du théorème de Lax-Milgram : Posons

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx$$

et

$$l(v) = \int_{\Omega} u v dx.$$

Il est clair que $a(., .)$ est une forme bilinéaire sur $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ et que l est une forme linéaire sur $H_0^1(\Omega)$.

(a) Continuité de $l(.)$: pour $v \in H_0^1(\Omega)$ et grâce à l'inégalité de Poincaré, on a

$$\begin{aligned} |l(v)| &= \left| \int_{\Omega} f v dx \right| \\ &\leq \int_{\Omega} |f| |v| dx \\ &\leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \\ &\leq C_{\Omega} \|f\|_{L^2} \|v\|_{H_0^1}. \end{aligned}$$

Donc, l est continue sur $H_0^1(\Omega)$.

(b) Continuité de $a(., .)$: pour $u, v \in H_0^1(\Omega)$ on a

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq \left| \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx \right| \\ &\leq \int_{\Omega} |\nabla u| |\nabla v| dx \\ &\leq \|\nabla u\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2} \\ &= \|u\|_{H_0^1} \|\nabla v\|_{H_0^1}. \end{aligned}$$

Donc $a(.,.)$ est continue sur $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$.

(c) Coercivité de $a(.,.)$: Soit $u \in H^1(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned} |a(u, u)| &= \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \\ &\geq \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \\ &\geq \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Conclusion : Le théorème de Lax-Milgram assure l'existence d'une solution unique du problème variationnel.

1.2.3 Problème modèle avec conditions aux limites de type Fourier-Neumann en dimension 1

Soit $f \in L^2(]0, 1[)$. On considère le problème suivant :

$$(P_3) \begin{cases} -u''(x) + u(x) = f(x), & x \in]0, 1[, \\ u'(0) - u(0) = 0, & u'(1) = -1. \end{cases}$$

1. Donnons la formulation variationnelle du problème (P_3) dans $H^1(]0, 1[)$. On multiplie l'équation différentielle du problème (P_3) par des fonctions test v et on intègre sur $]0, 1[$

$$\int_0^1 -u''(x)v(x)dx + \int_0^1 u(x)v(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx.$$

En utilisant la formule d'intégration par parties, on obtient

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx - u'(1)v(1) + u'(0)v(0) + \int_0^1 u(x)v(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx.$$

En tenant compte des conditions aux limites sur u en 0 et en 1, on obtient

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx + \int_0^1 u(x)v(x)dx + v(1) + u(0)v(0) = \int_0^1 f(x)v(x)dx,$$

ou encore

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx + \int_0^1 u(x)v(x)dx + u(0)v(0) = \int_0^1 f(x)v(x)dx - v(1).$$

Nous en déduisons la formulation variationnelle du problème (P_3) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H^1(]0, 1[) \text{ tel que } \forall v \in H^1(]0, 1[) \\ \int_0^1 u'(x)v'(x)dx + \int_0^1 u(x)v(x)dx + u(0)v(0) = \int_0^1 f(x)v(x)dx - v(1). \end{array} \right.$$

2. Y-a-t-il existence et unicité des solutions faibles de (P_3) dans $H^1(]0, 1[)$? Posons

$$a(u, v) = \int_0^1 u'(x)v'(x)dx + \int_0^1 u(x)v(x)dx + u(0)v(0) \text{ et } l(v) = \int_0^1 f(x)v(x)dx - v(1).$$

Il est clair que $a(., .)$ est une forme bilinéaire sur $H^1(]0, 1[) \times H^1(]0, 1[)$ et que l est une forme linéaire sur $H^1(]0, 1[)$.

(a) Continuité de $l(.)$: pour $v \in H^1(]0, 1[)$ on a

$$\begin{aligned} |l(v)| &\leq \int_0^1 |f(x)| \cdot |v(x)| dx + |v(1)| \\ &\leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} + |v(1)|. \end{aligned}$$

Montrons à présent que $|v(1)| \leq 2\|v\|_{H^1}$. En remarquant que comme $v \in H^1(]0, 1[)$, on peut écrire que v est intégrale de sa dérivée. On a

$$v(1) = v(x) + \int_x^1 v'(t) dt$$

et donc par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} |v(1)| &\leq |v(x)| + \int_x^1 |v'(t)| dt \\ &\leq |v(x)| + \|v'\|_{L^2(]0, 1[)}. \end{aligned}$$

En intégrant cette inégalité entre 0 et 1, on obtient

$$|v(1)| \leq \|v\|_{L^1(]0, 1[)} + \|v'\|_{L^2(]0, 1[)}.$$

Or, $\|v\|_{L^1(]0, 1[)} \leq \|v\|_{L^2(]0, 1[)}$. De plus

$$\|v\|_{L^2(]0, 1[)} + \|v'\|_{L^2(]0, 1[)} \leq 2 \max(\|v\|_{L^2(]0, 1[)}, \|v'\|_{L^2(]0, 1[)}).$$

On a donc

$$\begin{aligned} (\|v\|_{L^2(]0, 1[)} + \|v'\|_{L^2(]0, 1[)})^2 &\leq 4 \max(\|v\|_{L^2(]0, 1[)}^2, \|v'\|_{L^2(]0, 1[)}^2) \\ &\leq 4(\|v\|_{L^2(]0, 1[)}^2 + \|v'\|_{L^2(]0, 1[)}^2). \end{aligned}$$

On en déduit que

$$|v(1)| \leq \|v\|_{L^2(]0,1])} + \|v'\|_{L^2(]0,1])} \leq 2\|v\|_{H^1(]0,1])}.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} |l(v)| &\leq \|f\|_{L^2}\|v\|_{L^2} + 2\|v\|_{H^1} \\ &\leq \|f\|_{L^2}\|v\|_{H^1} + 2\|v\|_{H^1} \\ &\leq (\|f\|_{L^2} + 2)\|v\|_{H^1}. \end{aligned}$$

Ce qui montre que l est continue sur $H^1(]0, 1])$.

Remarque : Le raisonnement effectué ci dessus pour montrer que $|v(a)| \leq 2\|v\|_{H^1}$ s'applique de la même manière pour montrer que

$$|v(a)| \leq 2\|v\|_{H^1}, \text{ pour tout } a \in [0, 1].$$

Ceci est une conséquence du fait que $H^1(]0, 1])$ s'injecte continûment dans $C([0, 1])$.

(b) Continuité de $a(., .)$: pour $u, v \in H^1(]0, 1])$ on a

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq \int_0^1 |u'(x)| \cdot |v'(x)| dx + \int_0^1 |u(x)| \cdot |v(x)| dx + |u(0)| |v(0)| \\ &\leq \|u'\|_{L^2} \|v'\|_{L^2} + \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} + |u(0)| |v(0)| \\ &\leq \|u'\|_{L^2} \|v'\|_{L^2} + \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} + 4\|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1} \\ &\leq 6\|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}. \end{aligned}$$

Donc $a(., .)$ est continue sur $H^1(]0, 1]) \times H^1(]0, 1])$.

(c) Coercivité de $a(., .)$: Soit $u \in H^1(]0, 1])$. On a

$$\begin{aligned} |a(u, u)| &= \int_0^1 |u'(x)|^2 dx + \int_0^1 |u(x)|^2 dx + u(0)^2 \\ &\geq \int_0^1 |u'(x)|^2 dx + \int_0^1 |u(x)|^2 dx \\ &\geq \|u\|_{H^1}^2. \end{aligned}$$

Conclusion : Par le théorème de Lax-Milgram, on en déduit l'existence et l'unicité des solutions faibles du problème variationnel.

1.2.4 Problème modèle avec conditions aux limites de type Fourier en dimension N

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N de classe C^1 . On considère le problème suivant :

$$(P_4) \begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} + \alpha u = g & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\partial\Omega)$ et $\alpha > 0$.

1. Donnons la formulation variationnelle du problème (P_4) dans $H^1(\Omega)$. On multiplie l'EDP de (P_4) par des fonctions test v et on intègre sur Ω .

$$\int_{\Omega} -\Delta u v dx + \int_{\Omega} u v dx = \int_{\Omega} f v dx.$$

En utilisant la formule de Green, on obtient

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \int_{\Omega} u v dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} v d\sigma = \int_{\Omega} f v dx.$$

En tenant compte de la condition aux limites sur $\partial\Omega$, on obtient

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \int_{\Omega} u v dx - \int_{\partial\Omega} (g - \alpha u) v d\sigma = \int_{\Omega} f v dx.$$

ou encore

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \int_{\Omega} u v dx + \alpha \int_{\partial\Omega} u v d\sigma = \int_{\Omega} f v dx + \int_{\partial\Omega} g v d\sigma.$$

Nous en déduisons la formulation variationnelle de (P_4) :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H^1(\Omega) \text{ tel que } \forall v \in H^1(\Omega) \\ \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \int_{\Omega} u v dx + \alpha \int_{\partial\Omega} u v d\sigma = \int_{\Omega} f v dx + \int_{\partial\Omega} g v d\sigma. \end{cases}$$

2. Application du théorème de Lax-Milgram : Posons

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \int_{\Omega} u v dx + \alpha \int_{\partial\Omega} u v d\sigma$$

et

$$l(v) = \int_{\Omega} f v dx + \int_{\partial\Omega} g v d\sigma.$$

Il est clair que $a(., .)$ est une forme bilinéaire sur $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ et que l est une forme linéaire sur $H^1(\Omega)$.

(a) Continuité de $a(., .)$: pour $u, v \in H^1(\Omega)$ on a

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &= \left| \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \int_{\Omega} uv dx + \alpha \int_{\partial\Omega} uv d\sigma \right| \\ &\leq \left| \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx \right| + \left| \int_{\Omega} uv dx \right| + \left| \alpha \int_{\partial\Omega} uv d\sigma \right| \\ &\leq \|\nabla u\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2} + \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} + \alpha \|u\|_{L^2(\partial\Omega)} \|v\|_{L^2(\partial\Omega)}. \end{aligned}$$

Or, l'application trace

$$\gamma_0 : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\partial\Omega),$$

est continue. Donc

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1} + \alpha C^2 \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1} \\ &= (1 + \alpha C^2) \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}. \end{aligned}$$

où C est la constante de la continuité de la trace. Donc $a(., .)$ est continue sur $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$.

(b) Continuité de $l(.)$: pour $v \in H^1(\Omega)$ on a

$$\begin{aligned} |l(v)| &= \left| \int_{\Omega} f v dx + \int_{\partial\Omega} g v d\sigma \right| \\ &\leq \left| \int_{\Omega} f v dx \right| + \left| \int_{\partial\Omega} g v d\sigma \right| \\ &\leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} + \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \|v\|_{L^2(\partial\Omega)} \\ &\leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} + C \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

où C est la constante de la continuité de la trace. On utilise ensuite le fait que $\|v\|_{L^2} \leq \|v\|_{H^1}$ et on obtient

$$|l(v)| \leq (\|f\|_{L^2} + C \|g\|_{L^2(\partial\Omega)}) \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

Par conséquent, l est continue sur $H^1(\Omega)$.

(c) Coercivité de $a(.,.)$: Soit $u \in H^1(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned} |a(u, u)| &= \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} |u|^2 dx + \alpha \int_{\partial\Omega} |u|^2 d\sigma \\ &\geq \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} |u|^2 dx \\ &\geq \|u\|_{H^1(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Conclusion : Les hypothèses du théorème de Lax-Milgram sont satisfaites. Donc le problème variationnel admet une unique solution.

Chapitre 2

Méthode des éléments finis

Dans ce chapitre, nous présentons les grandes lignes de la méthode des éléments finis. Son application sera illustrée par deux problèmes aux limites, l'un de Dirichlet et l'autre de Neumann.

2.1 Approximation interne générale ou méthode de Galerkin

Soient V un espace de Hilbert, $a(., .)$ une forme bilinéaire continue et coercive sur $V \times V$ et $l(.)$ une forme linéaire continue sur V . On considère le problème variationnel suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in V, \text{ tel que} \\ a(u, v) = l(v), \forall v \in V. \end{array} \right. \quad (2.1)$$

D'après le théorème de Lax-Milgram, le problème (2.1) admet une unique solution. L'approximation interne n'est rien d'autre que la substitution de l'espace de Hilbert V de dimension infinie par un sous-espace V_h de dimension finie. Autrement dit, cherchons la solution de :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h \in V_h, \text{ tel que} \\ a(u_h, v_h) = l(v_h), \forall v_h \in V_h. \end{array} \right. \quad (2.2)$$

On définit alors une base de V_h : $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{N_h})$. On peut donc décomposer notre solution approchée u_h en une combinaison linéaire des fonctions de base :

$$u_h = \sum_{i=1}^{N_h} \mu_i \varphi_i.$$

Et donc le problème devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{N_h}) \text{ tel que} \\ a(\sum_{i=1}^{N_h} \mu_i \varphi_i; v_h) = l(v_h), \forall v_h \in V_h. \end{array} \right.$$

Or a et l sont linéaires donc on peut écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{N_h}) \text{ tel que} \\ \sum_{i=1}^{N_h} \mu_i a(\varphi_i, \varphi_j) = l(\varphi_j), \forall j \in \{1, 2, \dots, N_h\}. \end{array} \right.$$

Cela revient à résoudre le système suivant : $A\mu = B$

$$\begin{pmatrix} a(\varphi_1, \varphi_1) & \dots & a(\varphi_{N_h}, \varphi_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ a(\varphi_1, \varphi_{N_h}) & \dots & a(\varphi_{N_h}, \varphi_{N_h}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \dots \\ \mu_{N_h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l(\varphi_1) \\ \dots \\ l(\varphi_{N_h}) \end{pmatrix}$$

Pour limiter le volume de calculs, on va définir des fonctions φ_i de petit support : chaque φ_i sera nulle partout sauf sur la i ème maille. Ainsi $a(\varphi_i, \varphi_j)$ sera le plus souvent nul (les fonctions sont de supports disjoints) et la matrice A sera creuse.

Remarque 2.1. *La méthode de Galerkin est très adaptée pour le cadre théorique, en particulier pour l'étude de problèmes non-linéaires, toutefois elle ne l'est plus quand il s'agit du cadre numérique. En effet, la matrice associée au système linéaire, qui résulte de cette méthode n'est généralement pas creuse ce qui rend sa résolution très fragile par rapport aux erreurs d'arrondi du calcul sur machine.*

2.2 Discrétisation

Le principe de la méthode des éléments finis est de construire des espaces d'approximation interne V_h , des espaces fonctionnels usuels $H^1(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$ dont la définition est basée sur la

notion géométrique de maillage du domaine. Un maillage est un recouvrement de l'espace en volumes élémentaires très simples : segment, triangles, parallélépipèdes.

Le paramètre h de V_h correspond à la taille maximale des mailles ou cellules qui composent le maillage. Typiquement une base de V_h sera constituée de fonctions dont le support est localisé sur une ou quelques mailles.

Ceci aura deux conséquences importantes : d'une part, quand $h \rightarrow 0$, l'espace V_h sera de plus en plus "grand" en terme de dimension et approchera de mieux en mieux l'espace V tout entier, et d'autre part, la matrice de rigidité A sera creuse, c'est-à-dire que la plupart de ses coefficients seront nuls (ce qui limitera le coût de la résolution numérique). numériquement des problèmes aux limites.

2.3 Application à un problème de Dirichlet en dimension un

On considère le problème aux limites modèle suivant :

$$(P_1) \begin{cases} -u''(x) = f(x), & x \in]0, 1[, \\ u(0) = 0, & u(1) = 0, \end{cases}$$

où $f \in L^2(0, 1)$ est une fonction donnée, u est une fonction inconnue de x , et u'' est la dérivée seconde de u par rapport à x . Le problème (P_1) peut être résolu directement en calculant des primitives. Cependant, cette méthode de résolution du problème aux limites ne fonctionne que lorsqu'il y a une dimension spatiale et ne se généralise pas aux problèmes de dimension supérieure ou à des problèmes comme $u + u'' = f$. Pour cette raison, nous allons développer la méthode des éléments finis pour (P_1) . La résolution se fait en deux étapes essentielles :

Dans un premier temps, on reformule le problème original sous sa forme faible. La deuxième étape est la discrétisation, où la forme faible est discrétisée dans un espace de dimension finie.

Après cette deuxième étape, nous avons des formules concrètes pour un grand problème

linéaire mais de dimension finie dont la solution résoudra approximativement le problème original. Ce problème de dimension finie est ensuite implémenté sur un ordinateur. La première étape consiste à convertir (P_1) en sa formulation faible équivalente :

$$(F.V.) \begin{cases} \text{Trouver } u \in H_0^1(]0, 1[) \text{ tel que } \forall v \in H_0^1(]0, 1[) \\ \int_0^1 u'(x)v'(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx. \end{cases}$$

L'existence et l'unicité de la solution se déduit du théorème de Lax-Milgram.

2.3.1 Discrétisation et choix d'une base

Le problème (P_1) est prêt à être discrétisé, ce qui conduit à un sous-problème. L'idée de base est de remplacer le problème linéaire de dimension infinie $(F.V.)$ avec une version en dimension finie :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que } \forall v \in V \\ \int_0^1 u'(x)v'(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx, \end{cases}$$

où V est un sous-espace de dimension finie de H_0^1 . Il y a beaucoup de choix possibles pour V . Pour la méthode des éléments finis, nous prenons V comme un espace de fonctions polynomiales par morceaux.

Commençons par discrétiser l'intervalle $]0, 1[$. En dimension 1 un maillage est simplement constitué d'une collection de points $(x_j)_{0 \leq j \leq N+1}$ tels que

$$0 = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_N \leq x_{N+1} = 1.$$

On choisit un maillage uniforme, c'est à dire les points x_j sont équidistants :

$$x_j = jh \text{ avec } h = \frac{1}{N+1}, \quad 0 \leq j \leq N+1.$$

Les points x_j sont aussi appelés les sommets (ou noeuds) du maillage.

Notons \mathbb{P}_k l'ensemble des polynômes à coefficients réels d'une variable réelle de degré inférieur ou égal à k :

$$\mathbb{P}_k = \left\{ \sum_{j=0}^k a_j x^j, \quad a_j \in \mathbb{R} \right\}$$

et définissons l'espace

$$V_h = \{v \in C^0([0, 1]), v|_{[x_j, x_{j+1}]} \in \mathbb{P}_1, 0 \leq j \leq N, v(0) = v(1) = 0\}.$$

Observons que les fonctions dans V_h ne sont pas dérivables. En effet, si $v \in V_h$ alors la dérivée n'est typiquement définie en aucun $x = x_j, j = 1, \dots, N$. Cependant, la dérivée existe en toutes les autres valeurs de x et on peut utiliser cette dérivée à des fins d'intégration par parties.

Pour terminer la discrétisation, nous devons sélectionner une base de V_h . Pour chaque point x_j nous choisirons la fonction linéaire par morceaux φ_j dans V_h dont la valeur est 1 en x_j et zéro en chaque $x_k, k \neq j$, c'est-à-dire,

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{j-1}}{x_j-x_{j-1}} & \text{si } x \in [x_{j-1}, x_j], \\ \frac{x_{j+1}-x}{x_{j+1}-x_j} & \text{si } x \in [x_j, x_{j+1}], \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

pour $j = 1, \dots, N$.

Lemme 2.1. Les $(\varphi_j)_{1 \leq j \leq N}$ constituent une base de V_h .

Démonstration. Puisque la famille $(\varphi_j)_{1 \leq j \leq N}$ est de dimension finie, on montre seulement que cette famille est libre.

Soient donc α_j des scalaires dans \mathbb{R} , avec $j \in \{1, \dots, N\}$. On suppose que :

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j \varphi_j(x_i) = 0 \quad \text{avec } i \in \{1, \dots, N\}.$$

Pour $i = 1$, on a

$$\alpha_1 \varphi_1(x_1) + \underbrace{\alpha_2 \varphi_2(x_1) + \dots + \alpha_N \varphi_N(x_1)}_{=0} = 0.$$

Ce qui implique $\alpha_1 \varphi_1(x_1) = 0$. D'où $\alpha_1 = 0$.

Pour $i = 2$, on a

$$\underbrace{\alpha_1 \varphi_1(x_2)}_{=0} + \alpha_2 \varphi_2(x_2) + \dots + \underbrace{\alpha_N \varphi_N(x_2)}_{=0} = 0.$$

Ce qui implique $\alpha_2\varphi_2(x_2) = 0$. D'où $\alpha_2 = 0$.

Pour $i = N$, on a

$$\underbrace{\alpha_1\varphi_1(x_N) + \alpha_2\varphi_2(x_N) + \dots + \alpha_N\varphi_N(x_N)}_{=0} = 0.$$

Ce qui implique $\alpha_N\varphi_N(x_N) = 0$. D'où $\alpha_N = 0$. Donc,

$$\forall j \in 1, \dots, N, \alpha_j = 0.$$

Ainsi $(\varphi_j)_{1 \leq j \leq N}$ est une famille libre. □

2.3.2 Le problème approché

Le problème (F.V.) dans le sous-espace V_h de $H_0^1([0, 1])$ défini précédemment s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que} \\ \int_0^1 u_h'(x)v_h'(x)dx = \int_0^1 f(x)v_h(x)dx, \forall v_h \in V_h. \end{cases} \quad (2.3)$$

La solution approchée u_h s'écrit dans V_h

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^N u_j \varphi_j(x)$$

où $u_j = u_h(x_j)$ est la valeur de la solution approchée au point x_j et $(\varphi_j)_{0 \leq j \leq N+1}$ est la base de V_h définie précédemment. On pose $v_h(x) = \varphi_i(x)$ et le problème approché s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_1, \dots, u_N \text{ tel que} \\ \sum_{j=1}^N u_j \int_0^1 \varphi_j'(x)\varphi_i'(x)dx = \int_0^1 f(x)\varphi_i(x)dx. \end{cases}$$

On pose

$$b_i = \int_0^1 f(x)\varphi_i(x)dx, \quad i \in \{1, \dots, N\}$$

et

$$A_{ij} = \int_0^1 \varphi_j'(x)\varphi_i'(x)dx, \quad i, j \in \{1, \dots, N\}.$$

Ainsi résoudre le problème approché revient à résoudre dans \mathbb{R}^N le système linéaire $AU = b$ qui s'en déduit des écritures de A_{ij} et b_i , c'est à dire trouver $U = (u_1, \dots, u_N)^T$, avec $A = (\int_0^1 \varphi_j'(x)\varphi_i'(x)dx)_{1 \leq i, j \leq N}$, et $b = (\int_0^1 f(x)\varphi_i(x)dx)_{1 \leq i \leq N}$.

2.3.3 Matrice de rigidité et vecteur charge élémentaire

En utilisant les fonctions de base définies précédemment, on détermine la matrice de rigidité

$$A = \left(\int_0^1 \varphi'_j(x) \varphi'_i(x) dx \right)_{1 \leq i, j \leq N}.$$

On a

$$\begin{aligned} A_{i,i-1} &= \int_0^1 \varphi'_{i-1}(x) \varphi'_i(x) dx \\ &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{(-1)}{h} \frac{1}{h} dx \\ &= \frac{-1}{h}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{i,i} &= \int_0^1 (\varphi'_i(x))^2 dx \\ &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{h^2} dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{(-h)^2} dx \\ &= \frac{2}{h}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{i,i+1} &= \int_0^1 \varphi'_{i+1}(x) \varphi'_i(x) dx \\ &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{h} \frac{(-1)}{h} dx \\ &= \frac{-1}{h}. \end{aligned}$$

D'où

$$A_{ij} = \begin{cases} \frac{-1}{h} & \text{si } j = i - 1 \text{ ou } j = i + 1, \\ \frac{2}{h} & \text{si } j = i, \\ 0 & \text{si } j \notin \{i - 1, i, i + 1\}. \end{cases}$$

Ainsi, la matrice de rigidité est la matrice tridiagonale

$$A = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \cdots & \cdots 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \cdots & -1 & 0 & 0 \\ 0 \vdots & \cdots 0 & -1 & 2 \cdots & -1 & 0 \\ 0 \vdots & 0 & 0 \cdots & -1 & 2 \cdots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Pour obtenir le second membre $b = (\int_0^1 f(x)\varphi_i(x)dx)_{1 \leq i \leq N}$, dit vecteur charge élémentaire, on doit calculer l'intégrale :

$$b_i = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)\varphi_i(x)dx \text{ pour tout } 1 \leq i \leq N.$$

Pour calculer les intégrales définissant le vecteur b , on utilise la formule d'intégration numérique dite du trapèze, et on trouve :

$$\begin{aligned} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\varphi_i(x)dx &= \frac{x_i - x_{i-1}}{2} [f(x_i)\varphi_i(x_i) + f(x_{i-1})\varphi_i(x_{i-1})] \\ &= \frac{h}{2} f(x_i). \end{aligned}$$

D'une manière analogue, on trouve :

$$\begin{aligned} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\varphi_i(x)dx &= \frac{x_{i+1} - x_i}{2} [f(x_{i+1})\varphi_i(x_{i+1}) + f(x_i)\varphi_i(x_i)] \\ &= \frac{h}{2} f(x_i). \end{aligned}$$

D'où,

$$b = [hf(x_i)]_{1 \leq i \leq N}^T.$$

Ainsi, le système à résoudre est

$$\frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \cdots & \cdots 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \cdots & -1 & 0 & 0 \\ 0 \vdots & \cdots 0 & -1 & 2 \cdots & -1 & 0 \\ 0 \vdots & 0 & 0 \cdots & -1 & 2 \cdots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \\ \vdots \\ f(x_{N-1}) \\ f(x_N) \end{pmatrix}$$

Remarque 2.2. *Le système ci-dessus admet une unique solution car la matrice A est tridiagonale, symétrique et définie positive.*

2.3.4 Implémentation du Code Matlab

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%-u''(x)=f(x)%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%u(0)=u(1)=0%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  
N=5;  
  
%Définition du Pas de la Discrétisation  
  
h=1/(N+1);  
  
%Discrétisation du Domaine  
  
x=0:h:1;  
  
%Création de la Matrice A  
  
A=zeros(N,N);  
  
for i=1: N  
    %Ecriture des Eléments de la Diagonale  
  
    A(i,i)=(2/h);  
  
end  
for i= 2: N-1  
    %Ecriture des Eléments de la Sur-diagonale  
  
    A(i,i+1)=-1/h;  
  
    %Ecriture des Eléments de la Sous-diagonale  
  
    A(i+1,i)=-1/h;  
  
end
```

FIGURE 2.1 – Le Code Matlab pour le problème de Dirichlet homogène

```
%Définition des Termes Manquants
- A(1,1)=2/h;
- A(2,1)=-1/h;
- A(1,2)=-1/h;          %Par Symétrie
- A(N,1)=0;
- A(1,N)=0;          %Par Symétrie

%Création du Vecteur Charge
- b=zeros(N,1);

%calcul du Vecteur Charge aux Points Intérieurs du Domaine
- for i= 2: N-1
-     b(i)=h*(x(i))^2;
- end

%Définition du Premier Terme du Vecteur Charge
- b(1)=h^3;

%Définition du Dernier Terme du Vecteur Charge
- b(N)=h*(x(N))^2;

%Résolution du Système Linéaire et Calcul de la Solution Approchée
- U=A\b
```

FIGURE 2.2 – Le Code Matlab pour le problème de Dirichlet homogène

```
%Définition du Dernier Terme du Vecteur Charge

b(N)=h*(x(N))^2;

    %Résolution du Système Linéaire et Calcul de la Solution Approchée

U=A\b
S=[0;U;0]
X=0:h:1;

%Représentation Graphique de la Solution Approchée

plot(X,S,'r')

    % Définition des Limites des Axes

axis([0 1 0 0.05])

%Maintien du Graphe

hold on ;
Y=0:h:1;
Uexacte=(1/12)*(Y-Y.^4)

%Représentation Graphique de la Solution Exacte

plot(Y,Uexacte,'g')

axis([0 1 0 0.05])

%Maintien du Graphe

hold on ;
```

FIGURE 2.3 – Le Code Matlab pour le problème de Dirichlet homogène

```
U =  
    0.0071  
    0.0134  
    0.0189  
    0.0213  
    0.0168  
  
S =  
    0  
    0.0071  
    0.0134  
    0.0189  
    0.0213  
    0.0168  
    0  
  
Uexacte =  
    0    0.0138    0.0267    0.0365    0.0391    0.0293    0  
  
>>
```

FIGURE 2.4 – Visualisation des résultats

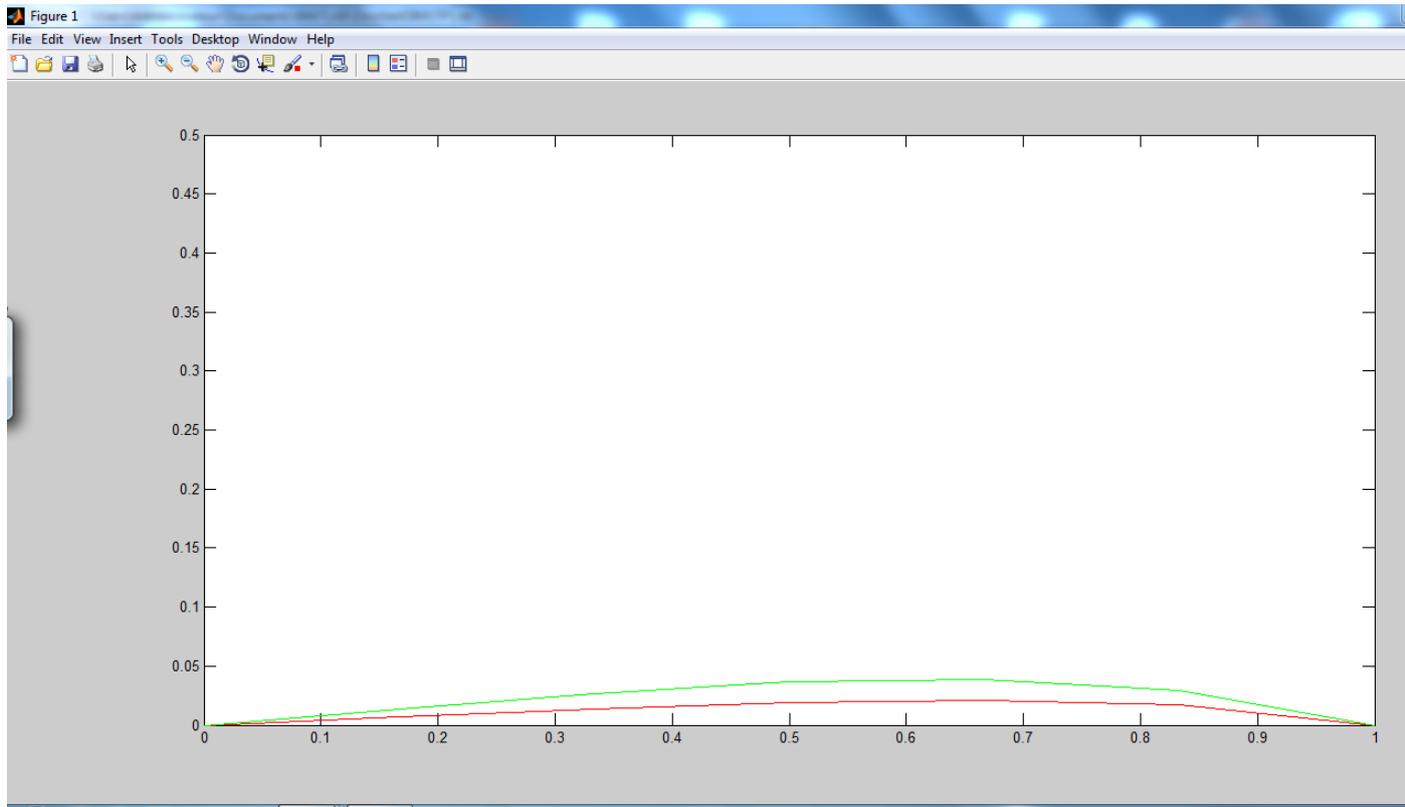


FIGURE 2.5 – Représentation graphique de la solution exacte en vert et de la solution approchée en rouge

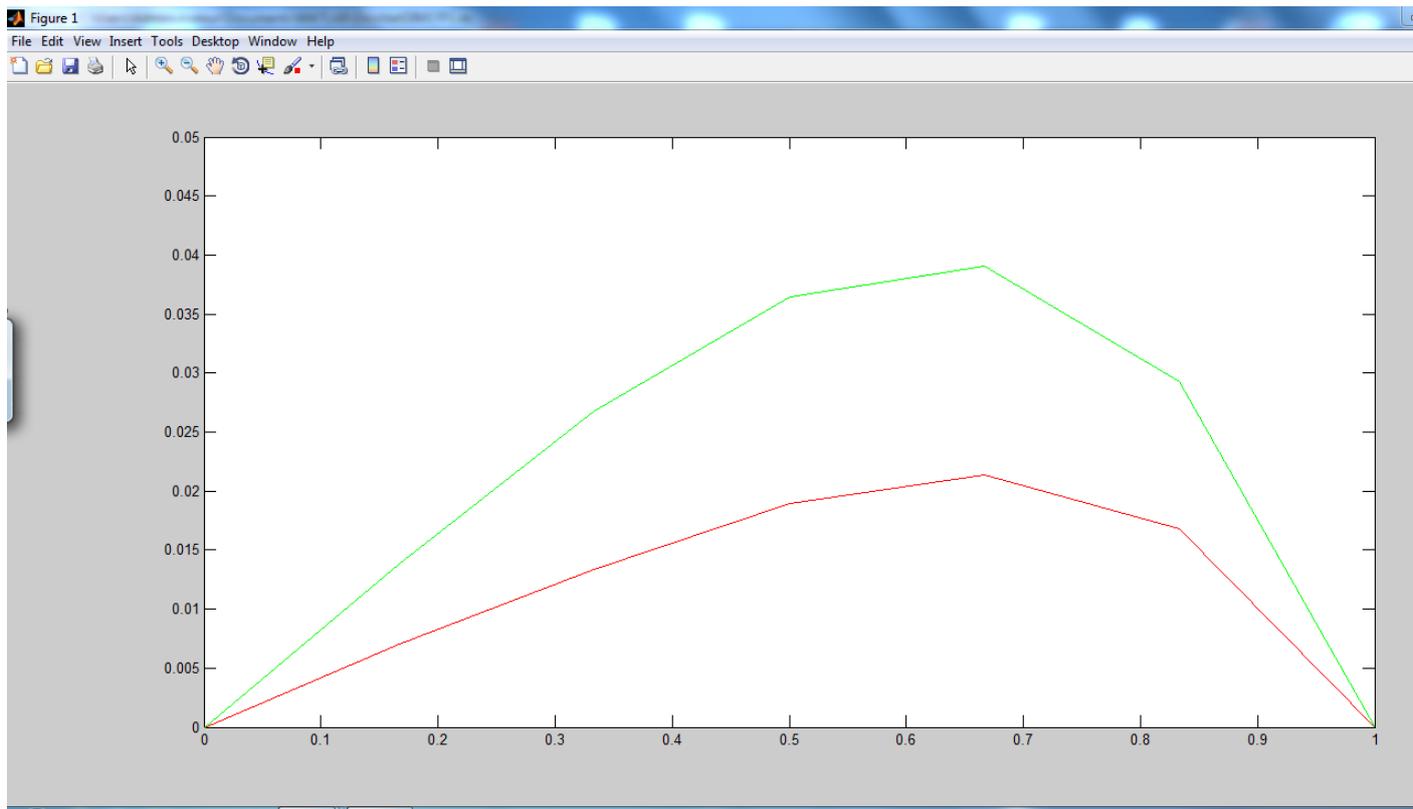


FIGURE 2.6 – Représentation graphique de la solution exacte en vert et de la solution approchée en rouge agrandie 10 fois

2.4 Application à un problème de Neumann en dimension

un

On considère le problème aux limites suivant :

$$(P_2) \begin{cases} -\frac{d}{dx}[k(x)\frac{du}{dx}(x)] + \mu(x)u(x) = f(x), & x \in]0, 1[, \\ u'(0) = 0, \quad u'(1) = 0, \end{cases}$$

avec $f \in L^2(0, 1)$. On suppose que k et μ sont des fonctions de $L^\infty(]0, 1[)$ telles que

$$k(x) \geq \alpha > 0, \quad \mu(x) \geq \alpha > 0, \quad \text{sur } \Omega.$$

La formulation variationnelle du problème (P_2) est :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H^1(]0, 1[) \text{ tel que } \forall v \in H^1(]0, 1[) \\ \int_0^1 k(x)u'(x)v'(x)dx + \int_0^1 \mu(x)u(x)v(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx. \end{cases}$$

L'existence et l'unicité de la solution se déduit du théorème de Lax-Milgram.

Introduisons la discrétisation suivante de l'intervalle $]0, 1[$:

$$0 = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_N \leq x_{N+1} = 1,$$

où

$$x_j = jh \text{ avec } h = \frac{1}{N+1}, \quad 0 \leq j \leq N+1.$$

Définissons l'espace

$$V_h = \{v \in C^0([0, 1]), v|_{[x_j, x_{j+1}]} \in \mathbb{P}_1, 0 \leq j \leq N\},$$

où \mathbb{P}_1 désigne l'ensemble des polynômes à coefficients réels d'une variable réelle de degré inférieur

ou égal à 1. On considère les fonctions suivantes de l'espace V_h appelées fonctions de forme ou

fonctions de base : pour $j = 1, \dots, N$,

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{j-1}}{x_j-x_{j-1}} & \text{si } x \in [x_{j-1}, x_j], \\ \frac{x_{j+1}-x}{x_{j+1}-x_j} & \text{si } x \in [x_j, x_{j+1}], \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \frac{x_1-x}{h} & \text{si } x \in [x_0, x_1], \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et

$$\varphi_{N+1}(x) = \begin{cases} \frac{x-x_N}{h} & \text{si } x \in [x_N, x_{N+1}], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La formulation variationnelle dans le sous-espace V_h de $H^1(]0, 1[)$ défini précédemment s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que } \forall v_h \in V_h \\ \int_0^1 k(x)u'_h(x)v'_h(x)dx + \int_0^1 \mu(x)u_h(x)v_h(x)dx = \int_0^1 f(x)v_h(x)dx. \end{cases} \quad (2.4)$$

La solution approchée u_h s'écrit dans V_h

$$u_h(x) = \sum_{j=0}^{N+1} u_j \varphi_j(x)$$

où $u_j = u_h(x_j)$ est la valeur de la solution approchée au point x_j et $(\varphi_j)_{0 \leq j \leq N+1}$ est la base de V_h définie précédemment. On pose $v_h(x) = \varphi_i(x)$ et le problème approché (2.4) s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_0, \dots, u_{N+1} \text{ tel que} \\ (\sum_{j=0}^{N+1} u_j) [\int_0^1 k(x)\varphi'_j(x)\varphi'_i(x)dx + \int_0^1 \mu(x)\varphi_j(x)\varphi_i(x)dx] = \int_0^1 f(x)\varphi_i(x)dx. \end{cases}$$

On pose

$$\begin{aligned} b_i &= \int_0^1 f(x)\varphi_i(x)dx, \quad i \in \{0, \dots, N+1\}, \\ K_{ij} &= \int_0^1 k(x)\varphi'_j(x)\varphi'_i(x)dx, \quad i, j \in \{0, \dots, N+1\}, \\ M_{ij} &= \int_0^1 \mu(x)\varphi_j(x)\varphi_i(x)dx, \quad i, j \in \{0, \dots, N+1\} \end{aligned}$$

et

$$A_{ij} = K_{ij} + M_{ij}, \quad i, j \in \{0, \dots, N+1\}.$$

Ainsi résoudre le problème approché revient à résoudre dans \mathbb{R}^{N+2} le système linéaire $AU = b$ qui s'en déduit des écritures de A_{ij} et b_i , c'est à dire trouver $U = (u_0, \dots, u_{N+1})^T$, avec $A = (\int_0^1 k(x)\varphi'_j(x)\varphi'_i(x)dx + \int_0^1 \mu(x)\varphi_j(x)\varphi_i(x)dx)_{0 \leq i, j \leq N+1}$, et $b = (\int_0^1 f(x)\varphi_i(x)dx)_{0 \leq i \leq N+1}$.

En utilisant les fonctions de base définies précédemment, on détermine la matrice de rigidité

$$K = \left(\int_0^1 k(x) \varphi'_j(x) \varphi'_i(x) dx \right)_{0 \leq i, j \leq N+1}$$

et la matrice dite de masse

$$M = \left(\int_0^1 \mu(x) \varphi_j(x) \varphi_i(x) dx \right)_{0 \leq i, j \leq N+1}.$$

On a

$$\begin{aligned} K_{i,i-1} &= \int_0^1 k(x) \varphi'_{i-1}(x) \varphi'_i(x) dx \\ &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} k(x) \frac{(-1)}{h} \frac{1}{h} dx. \end{aligned}$$

En utilisant la formule des trapèzes, on obtient

$$K_{i,i-1} = \frac{-1}{h^2} \frac{[x_i - x_{i-1}]}{2} [k(x_{i-1}) + k(x_i)].$$

En particulier, pour $k(x) = 1$ par exemple, on obtient

$$K_{i,i-1} = \frac{-1}{h}.$$

$$\begin{aligned} K_{i,i} &= \int_0^1 k(x) (\varphi'_i(x))^2 dx \\ &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} k(x) \frac{1}{h^2} dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} k(x) \frac{1}{(-h)^2} dx \\ &= \frac{2}{h} \quad (\text{pour } k(x) = 1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{i,i+1} &= \int_0^1 k(x) \varphi'_{i+1}(x) \varphi'_i(x) dx \\ &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} k(x) \frac{1}{h} \frac{(-1)}{h} dx \\ &= \frac{-1}{h} \quad (\text{pour } k(x) = 1). \end{aligned}$$

D'où, pour $k(x) = 1$, on a

$$K_{ij} = \begin{cases} \frac{-1}{h} & \text{si } j = i - 1 \text{ ou } j = i + 1, \\ \frac{2}{h} & \text{si } j = i, \\ 0 & \text{si } j \notin \{i - 1, i, i + 1\}. \end{cases}$$

Ainsi, la matrice de rigidité est la matrice tridiagonale

$$K = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \cdots & \cdots 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \cdots & -1 & 0 & 0 \\ 0: & \cdots 0 & -1 & 2 \cdots & -1 & 0 \\ 0: & 0 & 0 \cdots & -1 & 2 \cdots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Concernant la matrice de masse M , on a

$$\begin{aligned} M_{i,i-1} &= \int_0^1 \mu(x) \varphi_j(x) \varphi_i(x) dx \\ &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \mu(x) \frac{x_i - x}{h} \frac{x - x_{i-1}}{h} dx \\ &= \frac{1}{h^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \mu(x) (x_i - x)(x - x_{i-1}) dx \end{aligned}$$

En utilisant la formule des trapèzes, on obtient pour $\mu(x) = 1$

$$M_{i,i-1} = 0.$$

$$\begin{aligned} M_{i,i} &= \int_0^1 \mu(x) (\varphi_i)^2(x) dx \\ &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \mu(x) \left(\frac{x - x_{i-1}}{h}\right)^2 dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \mu(x) \left(\frac{x_{i+1} - x}{h}\right)^2 dx \\ &= h \quad (\text{pour } \mu(x) = 1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{i,i+1} &= \int_0^1 \mu(x) \varphi_{i+1}(x) \varphi_i(x) dx \\
&= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \mu(x) \left(\frac{x-x_i}{h}\right) \left(\frac{x_{i+1}-x}{h}\right) dx \\
&= 0 \text{ (pour } \mu(x) = 1\text{)}.
\end{aligned}$$

D'où, pour $\mu(x) = 1$, on a

$$M_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i, \\ h & \text{si } j = i. \end{cases}$$

Ainsi, la matrice de masse (pour $\mu(x) = 1$) est la matrice diagonale

$$M = \begin{pmatrix} h & 0 & 0 & 0 \cdots & \cdots 0 & 0 \\ 0 & h & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots 0 & 0 & h \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \cdots & 0 & h \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h \end{pmatrix}$$

Calculons maintenant le vecteur charge élémentaire $b = (\int_0^1 f(x) \varphi_i(x) dx)_{0 \leq i \leq N+1}$. En utilisant la formule du trapèze, on trouve

$$b_0 = \frac{h}{2} f(0), b_i = hf(x_i), 1 \leq i \leq N, b_{N+1} = \frac{h}{2} f(1)$$

Ainsi, le système à résoudre est

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{h} + h & \frac{-1}{h} & 0 & 0 \cdots & \cdots 0 & 0 \\ \frac{-1}{h} & \frac{2}{h} + h & \frac{-1}{h} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{h} & \frac{2}{h} + h \cdots & \frac{-1}{h} & 0 & 0 \\ 0 \vdots & \cdots 0 & \frac{-1}{h} & \frac{2}{h} + h \cdots & \frac{-1}{h} & 0 \\ 0 \vdots & 0 & 0 \cdots & \frac{-1}{h} & \frac{2}{h} + h \cdots & \frac{-1}{h} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{h} & \frac{2}{h} + h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \\ u_{N+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{h}{2} f(x_0) \\ hf(x_1) \\ hf(x_2) \\ \vdots \\ hf(x_N) \\ \frac{h}{2} f(x_{N+1}) \end{pmatrix}$$

Le système ci-dessus admet une unique solution car la matrice A est tridiagonale, symétrique et définie positive.

Remarque 2.3. *La différence fondamentale entre les méthodes d'approximation variationnelle des problèmes de Dirichlet et de Neumann réside dans le traitement des conditions aux limites. Pour le problème de Dirichlet, la solution approchée construite vérifie a priori les conditions aux limites $u_h(0) = u_h(1) = 0$. Pour le problème de Neumann la solution approchée u_h ne vérifie pas les conditions aux limites $u'_h(0) = u'_h(1) = 0$.*

Implémentation du Code Matlab : cas $f(x) = x^2 + 2x - 1, \mu(x) = k(x) = 1$

```

1      %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
2
3      %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
4
5      %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
6
7      N=10;
8
9      %Définition du Pas de la Discrétisation
0
1      h=1/(N+1);
2
3      %Discrétisation du Domaine
4
5      x=0:h:1;
6
7      %Création des Matrices de Rigidité K et de Masse M et A
8
9      K=zeros(N+2,N+2);
0
1      M=zeros(N+2,N+2);
2
3      A=zeros(N+2,N+2);
4
5      for i=1: N+2
6
7          %Ecriture des Eléments de la Diagonale
8
9          K(i,i)=(2/h);
0
1          M(i,i)=h;
2
3          A(i,i)=K(i,i)+M(i,i);
4

```

FIGURE 2.7 – Le Code Matlab pour le problème de Neumann homogène

```
        M(i,i)=h;

        A(i,i)=K(i,i)+M(i,i);

    end
    for i= 2: N+1

        %Ecriture des Eléments de la Sur-diagonale

        K(i,i+1)=-1/h;
        M(i,i+1)=0;
        A(i,i+1)=K(i,i+1)+M(i,i+1);

        %Ecriture des Eléments de la Sous-diagonale

        K(i+1,i)=-1/h;
        M(i+1,i)=0;
        A(i+1,i)=K(i+1,i)+M(i+1,i);

    end

    %Définition des Termes Manquants

    K(2,1)=-1/h;

    M(2,1)=0;

    A(2,1)=K(2,1)+M(2,1);

    K(1,2)=-1/h;           %Par Symétrie

    M(1,2)=0;             %Par Symétrie
```

FIGURE 2.8 – Le Code Matlab pour le problème de Neumann homogène

```
M(1,2)=0; %Par Symétrie

A(1,2)=K(1,2)+M(1,2);

%Puisque le Support des Fonctions de Base est Vide

K(N+2,1)=0; %Par Symétrie
K(1,N+2)=0;

%Puisque le Support des Fonctions de Base est Vide

M(N+2,1)=0; %Par Symétrie
M(1,N+2)=0;

%Création du Vecteur Charge

b=zeros(N+2,1);

%calcul du Vecteur Charge aux Points Intérieurs du Domaine
for i= 2: N+1
    b(i)=h*(x(i)^2+2*x(i)-1);
end
%Définition du Premier Terme du Vecteur Charge
```

FIGURE 2.9 – Le Code Matlab pour le problème de Neumann homogène

```
-----  
%Définition du Premier Terme du Vecteur Charge  
  
b(1)=-h/2;  
  
%Définition du Dernier Terme du Vecteur Charge  
  
b(N+2)=h;  
  
%Résolution du Système Linéaire et Calcul de la Solution Approchée  
  
U=A\b  
  
X=0:h:1;  
  
%Représentation Graphique de la Solution Approchée  
  
plot(X,U,'r')  
  
% Définition des Limites des Axes  
  
axis([0 1 -1 0.5])  
  
%Maintien du Graphe  
  
hold on ;  
  
%Calcul de la Solution Exacte  
  
Y=0:h:1;  
  
C1=(4-2*exp(-1))/(exp(-1)-exp(1));
```

FIGURE 2.10 – Le Code Matlab pour le problème de Neumann homogène

```
hold on ;

%Calcul de la Solution Exacte

Y=0:h:1;

C1=(4-2*exp(-1))/(exp(-1)-exp(1));

C2=C1+2;

Uexa=Y.^2+2*Y+1+(C1*exp(Y))+(C2*exp(-Y))

%Représentation Graphique de la Solution Exacte

plot(Y,Uexa,'g')

% Définition des Limites des Axes

axis([0 1 -1 0.5])

%Maintien du Graphe

hold on ;
```

FIGURE 2.11 – Le Code Matlab pour le problème de Neumann homogène

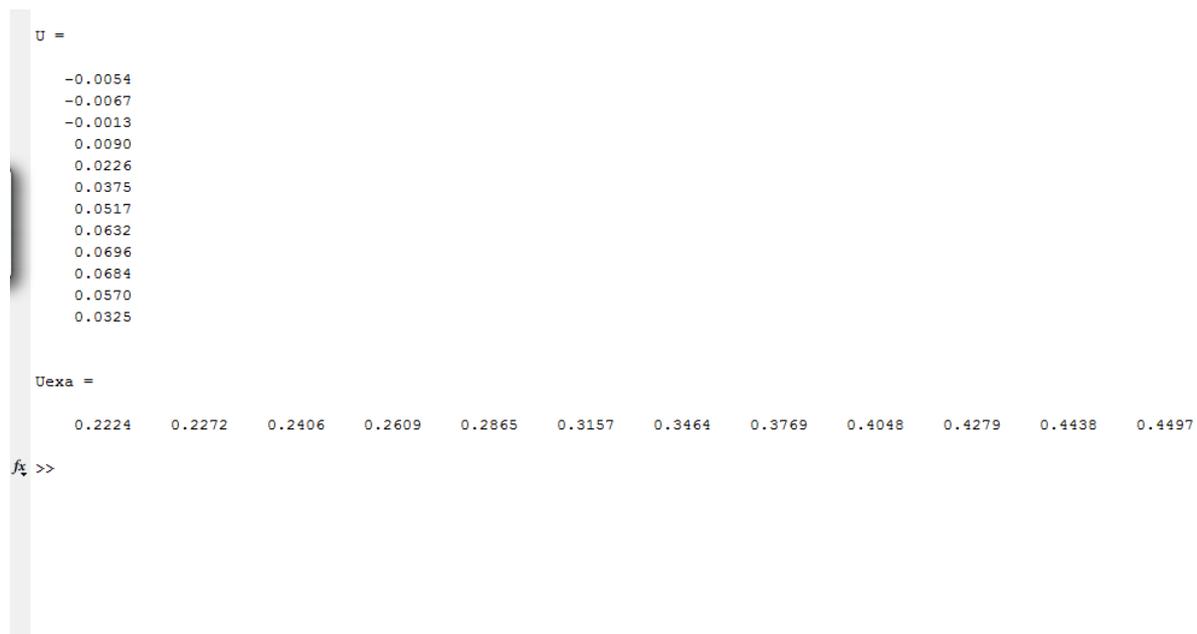


FIGURE 2.12 – Visualisation des résultats

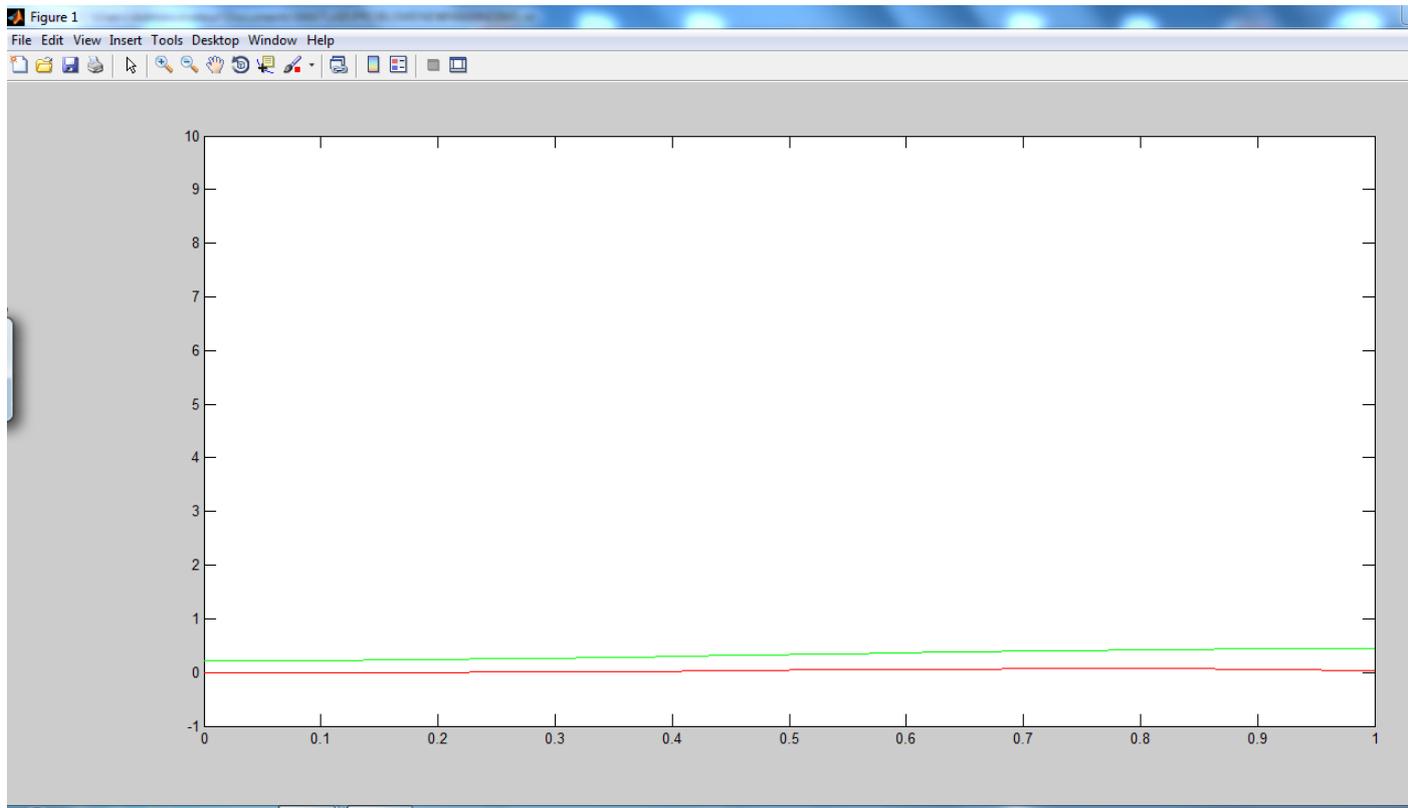


FIGURE 2.13 – Représentation de la solution exacte en vert et de la solution approchée en rouge

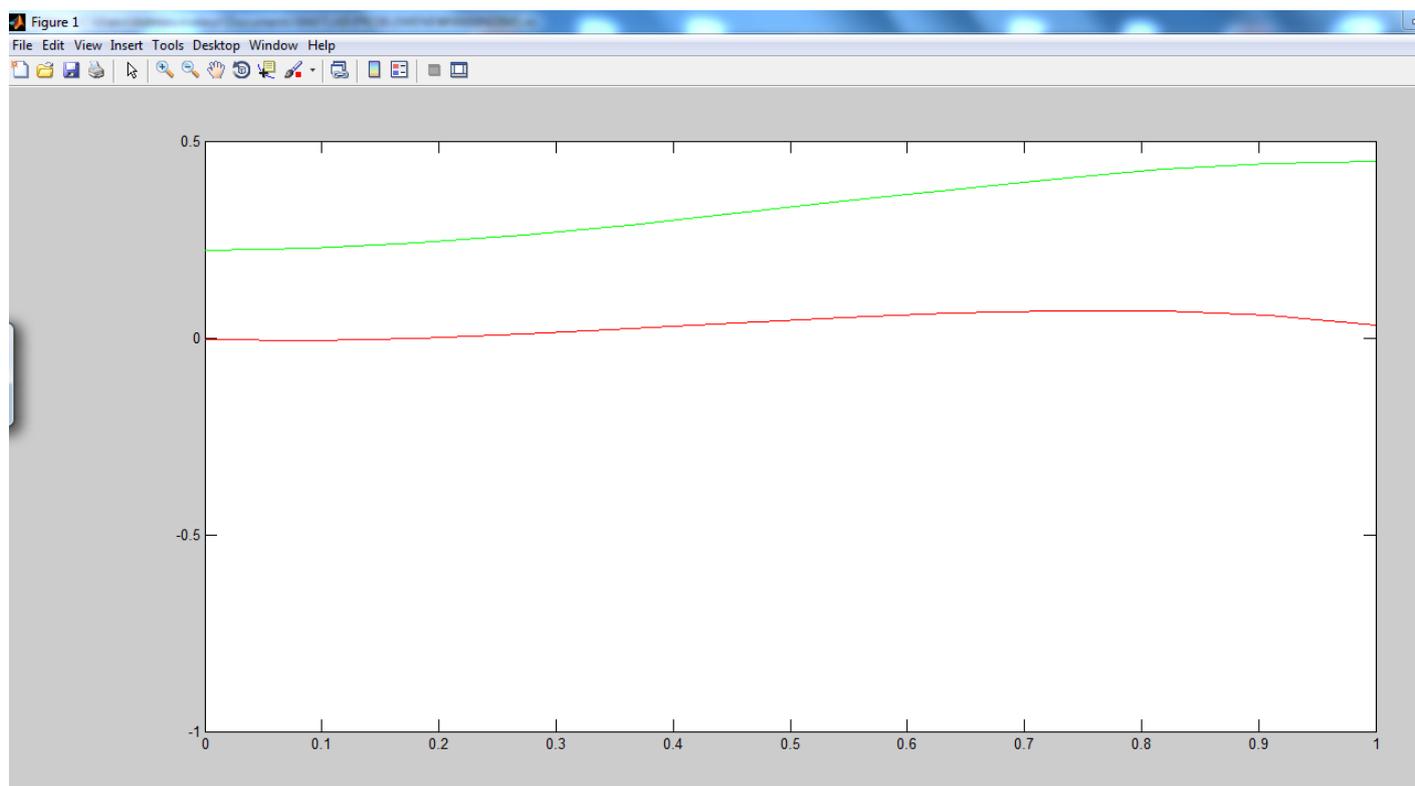


FIGURE 2.14 – Représentation de la solution exacte en vert et de la solution approchée en rouge agrandies 20 fois

Conclusion

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés à décrire l'une des méthodes les plus efficaces et les plus utilisées pour résoudre numériquement des problèmes aux limites. De façon générale, on part d'un problème (P) et on introduit sa formulation variationnelle (Q) : On montre l'existence et l'unicité d'une solution par le théorème de Lax-Milgram. On travaille dans des espaces de Hilbert : on peut donc construire des espaces d'approximations internes de dimensions finies à l'aide d'un maillage du domaine. Typiquement une base de ces espaces sera constituée de fonctions dont le support est localisé sur une ou quelques mailles. Enfin, on aboutira à la résolution d'un système linéaire dont la matrice sera creuse. Nous avons illustré l'application de la méthode des éléments finis par résoudre un problème de Dirichlet et un problème de Neumann en dimension un.

Bibliographie

- [1] G. Allaire, *Analyse Numérique et Optimisation : Une Introduction à la Modélisation Mathématique et à la Simulation Numérique*, École Polytechnique, France, 2005.
- [2] K. J. Bathe, *Finite Element Procedures*, Cambridge, MA : Klaus-Jürgen Bathe, 2006.
- [3] H. Brézis, *Analyse Fonctionnelle : Théorie et Applications*, Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise, 1987.
- [4] J. Chaskalovic, *Finite Element Method for Engineering Sciences : Theoretical Approach and Problem Solving Techniques*, Springer, 2008.
- [5] J. Chaskalovic, *Mathematical and Numerical Methods for Partial Differential Equations*, Springer, 2013.
- [6] R. Courant, *Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations*, Bulletin of the American Mathematical Society, 49(1943), 1-23.
- [7] A. Ern, *Aide-Mémoire des Éléments Finis*, Dunod, Paris, 2005.
- [8] A. Hrennikoff, *Solution of problems of elasticity by the framework method*, Journal of Applied Mechanics. 8 (4) (1941), 169-175.
- [9] G.R. Liu, S.S. Quek, *The Finite Element Method : A practical course*, Elsevier Science Ltd, 2003.
- [10] D.W. Pepper, J.C. Heinrich, *The Finite Element Method : Basic Concepts and Applications with MATLAB, MAPLE, and COMSOL*, CRC Press, Third Edition, U.S., 2017.

-
- [11] J. Rappaz, M. Picasso, *Introduction à l'Analyse Numérique*, Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne, 2004.
- [12] P.A. Raviart, J.M. Thomas, *Introduction à l'Analyse Numérique des Équations aux Dérivées Partielles*, Masson, Paris, 1983.
- [13] G. Strang, G. Fix, *An Analysis of The Finite Element Method*, Prentice Hall, 1973.
- [14] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, J.Z. Zhu, *The Finite Element Method : Its Basis and Fundamentals*, Butterworth-Heinemann, 2013.

Résumé

Dans ce mémoire nous nous intéressons à la méthode des éléments finis. Notre objectif principal est de comprendre les principes généraux qui régissent cette méthode ainsi que de savoir utiliser cette méthode pour résoudre quelques problèmes aux limites. Nous commençons par rappeler les outils mathématiques utiles pour la méthode des éléments finis. Ensuite après avoir introduit cette méthode, nous illustrons son application par deux problèmes aux limites, l'un de Dirichlet et l'autre est de Neumann.

Mots-clés : Méthode des éléments finis, problèmes aux limites, formulation variationnelle, discrétisation, solution approchée, matrice de rigidité.