

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE.  
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUE

Université Abderrahmane Mira -Béjaia-

Faculté des Sciences Exactes

Département de Mathématiques



Mémoire

Présenté par : **DOUALI Taous et OUNAS Hafsa**

THÈME

# La méthode SVD et la résolution de problèmes inverses

Soutenu publiquement, le 03/10/2021 devant le jury composé de :

## Président

Mr. Fatah BOUHMILA Univ. A. Mira de Béjaia

## Encadreur

M<sup>me</sup>. Halima BECHIR Univ. A. Mira de Béjaia

## Examineur

M<sup>me</sup>. Sonia MEDJBAR Univ. A. Mira de Béjaia

Année Universitaire : 2020/2021

# Remerciements

*Je tiens à remercier mon encadreur M<sup>me</sup> BECHIR Halima pour la confiance qu'elle m'a témoignée en me proposant ce sujet, ses encouragements et sa patience. Les discussions scientifiques qu'elle a su générer. Ses remarques et ses suggestions m'ont permis de finaliser ce modeste travail.*

*Je remercie aussi tous les membres du jury pour l'honneur qu'ils m'ont fait, en acceptant de juger ce modeste travail. Je ne peux pas clôturer mes remerciements sans se retourner vers les êtres que me sont le plus cher ; ma famille qui on eu rôle essentiel et continu dans ma réussite, et tous mes amis qui étaient à mes côtés tout au long de mon travail .*

# Dédicace

*Au meilleur des pères*

*A ma très chère maman*

*Qu'ils trouvent en moi la source de leur fierté*

*A qui je dois tout*

*A ma soeur et mon frère*

*A tous mes amis et ma famille qui me souhaite un avenir radieux plein de réussite*

Hafsa

## Dédicace

*A l'homme, mon précieux offre de Dieu, à qui je dois ma vie, ma réussite et tout mon respect : mon cher père M.Ouali*

*A la femme qui a souffert sans me laisser souffrir, qui n'a jamais dit non à mes exigences qui n'a épargné aucun effort pour me rendre heureuse : mon adorable mère Chabha*

*A mes frères : Nassim, Massinissa et Messipsa, et mes soeurs : Nassima, Ismahane, Kahina, qui n'ont pas cessé de me conseiller, encouragé tout au long de mes études. Que Dieu les protège et leur offre la chance et le bonheur*

*A mon oncle maternel : Kamel qui m'a vraiment soutenu dans les moments difficiles, il était comme un deuxième père pour moi*

*A ma grande-mère que Dieu lui donne une longue et joyeuse vie*

*A ma binôme Hafsa*

*A toutes mes amies*

Taous

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Les problèmes inverses et méthodes de régularisation</b>	<b>3</b>
1.1 Problèmes bien et mal posés . . . . .	3
1.2 Méthodes de régularisation . . . . .	4
1.2.1 Méthodes directes . . . . .	5
1.2.2 Méthodes itératives . . . . .	9
<b>2 Représentation de la SVD</b>	<b>14</b>
2.1 Décomposition en valeurs singulières de matrices . . . . .	15
2.1.1 Interprétations géométriques de la SVD . . . . .	21
2.2 Développement en Valeurs Singulières des Opérateurs Compacts . . . . .	22
2.3 Les méthodes qui utilisent la SVD . . . . .	23
2.3.1 La Décomposition en Valeur Singulière avec Troncature (SVDT)	24

*Table des matières*

2.3.2	Une procédure de transformation de Hankel . . . . .	26
2.3.3	Application de la SVD aux problèmes de moindres carrés . . . . .	29
2.4	Pseudo-Inverse et solution au sens de moindres carrés . . . . .	31
<b>3</b>	<b>Simulation</b>	<b>35</b>
3.1	Exemple 1 : Compression d'image . . . . .	35
3.2	Exemple 2 : un exemple numérique . . . . .	39
	<b>Conclusion générale et perspectives</b>	<b>46</b>
	<b>References</b>	<b>47</b>

# Introduction

La notion d'un problème mathématique mal-posé est apparue dans les discussions du mathématicien français J . Hadamard dans son ouvrage [4] , après avoir introduit, une vingtaine d'années avant, la notion d'un problème bien-posé qui doit satisfaire, d'après lui, à trois propriétés : l'existence, l'unicité et la stabilité de la solution. La perte d'une des propriétés définit un problème dit mal-posé .

Une difficulté pratique de l'étude des problèmes inverses est qu'elle demande souvent une bonne connaissance du problème direct, ce qui se traduit par le recours à une grande variété de notions tant physiques que mathématiques. Le succès dans la résolution d'un problème inverse repose en général sur des éléments spécifiques à ce problème. Il existe toutefois quelques techniques qui possèdent un domaine d'applicabilité étendu, qui est la régularisation des problèmes mal posés.

Plusieurs mathématiciens comme Tikhonov, Lavrentiev, et d'autres ont travaillé pour développer la théorie et les méthodes pour résoudre les problèmes mal- posés sous forme linéaire  $Ax = y$ .

Notre travail consacré à l'étude de la décomposition en valeurs singulières ( Singular Values Decomposition, notée SVD) des problèmes mal posé en dimension finie, dans un espace de Hilbert dans lui-même.

La décomposition en valeurs singulières généralise la notion de valeurs propres

aux matrices rectangulaires. Elle est un outil de factorisation de telles matrices, et peut être vu comme le procédé de diagonalisation pour les matrices carrées.

Plusieurs méthodes utilisent la SVD : Moindre carré, transformation de Hankel et d'autres.

Les travaux dans ce mémoire sont organisés en trois chapitres :

Dans **le premier chapitre**, nous présentons les définitions d'un problème direct et problème inverse, problème bien posé et mal-posé et on donne quelques exemples de problèmes mal-posés, et on aborde brièvement quelques méthodes de régularisation plus courante : la méthode des moindres carrés, la méthode de Tikhonov, la méthode de Lavrentiev, la méthode de Landweber, la méthode du gradient conjugué, et la méthode de showalter.

**Le deuxième chapitre**, consiste à définir les valeurs singulières, nous étudions la décomposition d'une matrice rectangulaire (n'est pas forcément carrée comme les valeurs propres) en valeurs singulières avec quelques propriétés, on a aussi défini quelques méthodes qui utilisent la SVD puis on définit la notion de l'inverse généralisé (pseudo inverse).

**Le troisième chapitre**, il s'agit des applications en Matlab, on a traité deux exemples, un numérique et l'autre de compression d'image.

# Chapitre 1

## Les problèmes inverses et méthodes de régularisation

Un problème inverse consiste à déterminer des causes à partir de la connaissance des effets. Ce problème est l'inverse du problème dit direct, consistant à déduire les effets à partir de la connaissance des causes. Les problèmes inverses risquent de poser des difficultés particulières puisque les mêmes effets peuvent provenir de causes différentes. C'est la principale difficulté de l'étude des problèmes inverses : ils peuvent avoir plusieurs solutions donc il est nécessaire d'ajouter des informations supplémentaires pour choisir entre elles.

### 1.1 Problèmes bien et mal posés

Hadamard a défini trois conditions pour qu'un problème mathématique soit bien posé :

- la solution existe.
- la solution est unique.
- la solution dépend continûment des données ( stabilité).

Un problème qui n'est pas bien posé au sens de la définition ci-dessus "au sens d'Hadamard" est dit mal posé.

En fait, nous verrons que souvent les problèmes inverses ne vérifient pas l'une ou l'autre de ces conditions, on peut dire alors qu'ils sont des problèmes mal posés .

Parmi les domaines dans lesquels les problèmes inverses jouent un rôle important, nous pouvons entre autres citer : l'imagerie médicale (échographie, scanners, rayons X), l'ingénierie pétrolière (prospection par des méthodes sismiques, magnétiques, identification des perméabilités dans un réservoir), le radar et l'acoustique sous-marine (détermination de la forme d'un obstacle).

## 1.2 Méthodes de régularisation

Régulariser un problème mal posé, c'est de le modifier légèrement en un autre qui possède de meilleures propriétés. On distingue deux types de méthodes de régularisations des problèmes inverses linéaires : méthodes directes et méthodes itératives.

On se place dans le cadre des espaces de Hilbert, pour que les résultats s'appliquent aux équations intégrales de Fredholm de première espèce , mais on indiquera les simplifications qui interviennent en dimension finie.

On désigne par  $A$  un opérateur linéaire continu d'un espace de Hilbert  $E$  dans un espace de Hilbert  $F$  :  $A \in L(E, F)$ .

L'existence et l'unicité ne dépendent que de la nature algébrique des espaces et de l'opérateur  $A$  c'est-à-dire si l'opérateur est surjectif ou injectif.

La stabilité, cependant, dépend aussi des topologies des espaces, c'est-à-dire l'opérateur inverse  $A^{-1} : F \rightarrow E$  est continu.

### 1.2.1 Méthodes directes

On étudiera les méthodes suivantes : la méthode des moindres carrés, la méthode de Tikhonov et la méthode de Lavrentiev.

#### La méthode des moindres carrés

Etant donné  $y \in F$ , on cherche  $x \in E$  solution de :

$$Ax = y \tag{1.1}$$

Revenons dans ce cas particulier sur la discussion concernant les problèmes bien et mal posés :

- l'opérateur  $A$  peut ne pas être surjectif
- il peut ne pas être injectif
- si un inverse existe, peut ne pas être continu

Pour régler la première difficulté (l'existence) il suffit de se restreindre à  $\text{Im}(A)$ . La deuxième (l'unicité) il faut pouvoir choisir, parmi plusieurs solutions, celle qui est appropriée au problème. La dernière (stabilité) est liée à l'étude de la fermeture de  $\text{Im}(A)$ , qu'on présente dans le théorème suivant :

**Théorème 1.2.1** [7] *Soit  $A \in L(E, F)$ ,  $E$  et  $F$  deux espaces de Hilbert. Supposons que  $A$  soit injectif, et notons  $A^{-1} : \text{Im}(A) \rightarrow E$  l'inverse de  $A$ , on a :*

$$\text{Im}(A) \text{ fermé} \iff A^{-1} \text{ est continu.}$$

**Remarque 1.2.1** *Si  $A$  est compact alors  $A^{-1}$  n'est pas continu, dans ce cas  $\text{Im}(A)$  ne sera pas fermé.*

Le problème (1.1) n'a de solution que si  $y \in \text{Im}(A)$ , on cherche donc une autre formulation de ce problème.

Cette formulation représente un problème de moindres carrés, on remplace donc

(1.1) par :

$$\min_{x \in E} \| Ax - y \|_F^2 \tag{1.2}$$

Nous allons voir que ce problème (1.2) est équivalent à une équation normale définie par :

$$A^* Ax = A^* y \tag{1.3}$$

- L'unicité est liée à l'injectivité de  $A$ , comme le précise le lemme suivant :

**Lemme 1.2.1** [7] *La solution du problème (1.2) est unique si et seulement si, l'opérateur  $A$  est injectif.*

- En ce qui concerne l'existence, on a le résultat suivant :

**Proposition 1.2.1** [7] *L'équation (1.3) admet une solution si et seulement si  $y \in \text{Im } A \oplus \text{Im } A^\perp$ .*

**Lemme 1.2.2** [7] *Le sous-espace  $\text{Im } A \oplus \text{Im } A^\perp$  est dense dans  $F$ .*

On a donc bien réussi à étendre la notion de solution à un sous-espace dense dans  $F$ , ce qui est presque aussi bien que de l'étendre à  $F$  tout entier .

**Corollaire 1.2.1** [7] *Si  $y \in \text{Im } A \oplus \text{Im } A^\perp$ , le problème (1.2) admet une unique solution de norme minimale.*

### Méthode de Tikhonov

La régularisation de Tikhonov est la plus utilisée pour la résolution des problèmes inverses, elle a été initiée par le mathématicien russe Andrei Nikolaievitch Tikhonov, pour traiter les systèmes linéaires de la forme  $Ax = y$ , elle consiste à minimiser  $\| Ax - y \|_F$  .

Etant donné l'opérateur linéaire borné  $A : E \rightarrow F$  et  $y \in F$ , déterminons  $x^\alpha \in E$  qui minimise la fonctionnelle de Tikhonov suivante :

$$J_\alpha(x) = \| Ax - y \|_F^2 + \alpha \| x \|_E^2 \quad , \quad \text{pour } x \in E$$

avec  $\alpha$  est le paramètre de régularisation.

**Théorème 1.2.2** [8] *Soit  $A : E \rightarrow F$  l'opérateur linéaire borné entre deux espaces de Hilbert et  $\alpha > 0$ . Alors la fonctionnelle de Tikhonov  $J_\alpha$  a un unique minimum  $x^\alpha \in E$ . Ce minimum  $x^\alpha$  est l'unique solution de l'équation normale suivante :*

$$\alpha x^\alpha + A^* A x^\alpha = A^* y \tag{1.4}$$

L'opérateur  $\alpha I + A^* A$  est un isomorphisme de  $E$  dans lui même pour tout  $\alpha > 0$ .

La solution  $x^\alpha$  de l'équation (1.4) peut s'écrire sous la forme  $x^\alpha = R_\alpha y$  avec

$$R_\alpha := (\alpha I + A^* A)^{-1} A^* : F \rightarrow E$$

### La méthode de Lavrentiev

Soit  $A \in L(E)$  un opérateur non-négatif, auto-adjoint et injectif,  $\text{Im}(A)$  non fermé avec  $E$  un espace de Hilbert. On suppose que  $y^\delta \in E$  sont des données bruitées disponibles avec :

$$\|y^\delta - y\| \leq \delta \tag{1.5}$$

$\delta$  est le niveau de bruit connu, dans le cas des opérateurs non-négatifs, auto-adjoints  $A$ , le problème (1.3) est équivalent à :

$$A^*Ax + \alpha x = A^*y^\delta$$

qu'on peut remplacer par l'équation régularisée plus simple :

$$Ax + \alpha x = y^\delta \tag{1.6}$$

$\alpha$  est le paramètre de régularisation tel que  $\alpha > 0$ .

La méthode de calcul de l'approximation régularisée  $x_\alpha^\delta$  en résolvant (1.6) est appelée *méthode de régularisation de Lavrentiev*. L'objectif de cette méthode, est d'approcher la solution du problème (1.1) avec des données  $y^\delta \in E$  satisfaisant la condition (1.5).

On prend la solution  $x_\alpha = (\alpha I + A)^{-1}y$  de l'équation :

$$Ax + \alpha x = y$$

L'équation (1.6) définit une famille d'opérateurs de régularisation  $R_\alpha = (\alpha I + A)^{-1}$ . On considère  $(\varphi_k)$  une suite orthonormée de fonctions propres  $\{\lambda_k\}$  ( $0 \leq \dots \leq \lambda_{k+1} \leq \lambda_k \leq \dots \leq \lambda_1$ ) la suite des valeurs propres de l'opérateur  $A$ .

Comme précédemment,  $x_\alpha$  peut être représentée sous la forme [6] :

$$x_\alpha = \sum_{k \geq 1} \frac{y_k}{\alpha + \lambda_k} \varphi_k \quad \text{tel que} \quad y_k = \langle y, \varphi_k \rangle$$

On déduit que  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|x - x_\alpha\| = 0$  (voir [6]).

A présent, on pose  $y_k^\delta = \langle y^\delta, \varphi_k \rangle$ , alors la solution de l'équation (1.6) est représentée par :

$$x_\alpha^\delta = \sum_{k \geq 1} \frac{y_k^\delta}{\alpha + \lambda_k} \varphi_k$$

On estime alors la différence

$$\|x - x_\alpha^\delta\| \leq \|x - x_\alpha\| + \|x_\alpha - x_\alpha^\delta\|$$

Le premier terme du membre de droite disparaît quand  $\alpha \rightarrow 0$ , et le second terme peut être estimé comme suit :

$$\begin{aligned} \|x_\alpha - x_\alpha^\delta\|^2 &= \left\| \sum_{k \geq 1} \left( \frac{y_k}{\alpha + \lambda_k} - \frac{y_k^\delta}{\alpha + \lambda_k} \right) \varphi_k \right\|^2 = \sum_{k \geq 1} \frac{(y_k - y_k^\delta)^2}{(\alpha + \lambda_k)^2} \\ &\leq \frac{1}{\alpha^2} \sum_{k \geq 1} (y_k - y_k^\delta)^2 = \frac{1}{\alpha^2} \|y - y^\delta\|^2 \\ &\leq \frac{\delta^2}{\alpha^2} \end{aligned}$$

Par conséquent,  $\lim_{\alpha, \delta \rightarrow 0} \|x - x_\alpha^\delta\| = 0$ , à condition que  $\frac{\delta}{\alpha} \rightarrow 0$ .

## 1.2.2 Méthodes itératives

Les méthodes itératives sont utilisées pour les problèmes de grande taille. Ces méthodes consistent à chercher des suites de solutions approchées qui convergent vers la solution désirée.

### Méthode de Landweber

La méthode de Landweber, qui a pour principal avantage de se prêter à une analyse simple. Malheureusement, elle converge trop lentement pour être utilisable en pratique.

Étant donné un paramètre de relaxation  $\omega$ , la méthode de Landweber pour résoudre le problème de moindres carrés (1.3) est définie par la formule de récurrence :

$$x_0 = 0 \quad \text{et} \quad x_{n+1} = x_n + \omega(A^*y - A^*Ax_n)$$

On constate par récurrence sur  $n$  que  $x_n \in \text{Im } A \subset \text{Ker } A^\perp$ . Par conséquent, si  $x_n$  converge vers un élément  $x \in E$ , on doit avoir  $x \in \text{Ker } A^\perp$  (puisque ce sous-espace est fermé). De plus, par continuité,  $x$  satisfait l'équation (1.3), et donc  $x$  la solution de norme minimale de (1.2). Il reste donc à trouver une condition sur  $\omega$  qui assure la convergence de  $x_n$  vers  $x$ , puis à montrer que, dans le cas bruité l'on peut choisir  $n$  en fonction du niveau de bruit.

Pour simplifier, on se restreint au cas où  $A$  est un opérateur compact, et on note  $(\sigma_j)_{j \in \mathbb{N}}$  ses valeurs singulières.

#### Proposition 1.2.2 [7]

*i) On a*

$$x_n = \omega \sum_{0 \leq j \leq n-1} (I - \omega A^*A)^j A^*y.$$

*ii) Si on choisit  $0 < \omega < \frac{2}{\sigma_1^2}$ , la suite des itérés  $x_n$  de la méthode de Landweber converge vers  $x$  pour  $y \in \text{Im } A$ .*

### Méthode du gradient conjugué

La méthode du gradient conjugué est une méthode de régularisation itérative non-linéaire pour résoudre les systèmes d'équations linéaires de la forme  $Ax = y$ . Cette méthode consiste à régulariser le problème (1.3) en approchant itérativement le problème  $f(x) = \|Ax - y\|^2$ .

Soient  $(x^m)$  et  $(p^m)$  les suites de la méthode du gradient conjugué. On définit l'espace  $V_m = \text{span}\{p^0, \dots, p^m\}$  et on a les caractérisations équivalentes de  $V_m$  suivantes [8] :

$$V_m = \text{span}\{\nabla f(x^0), \dots, \nabla f(x^m)\}$$

$$V_m = \text{span}\{p^0, A^*Ap^0, \dots, (A^*A)^m p^0\}$$

On définit  $\nabla f(x) := 2A^*(Ax - y) \in E$ .

Pour  $m = 0, 1, 2, \dots$ , l'espace  $V_m$  est appelé espace de Krylov, de plus  $x^m$  est le minimum de  $f$  sur le sous-espace  $V_{m-1}$  pour tout  $m \geq 1$ . On peut alors écrire  $x^m$  sous la forme :

$$x^m = -P_{m-1}(A^*A)p^0 = P_{m-1}(A^*A)A^*y$$

Avec un polynôme bien défini  $P_{m-1} \in \mathbf{P}_{m-1}$  de degré  $\leq m-1$  (dépend seulement de  $y$ ).

L'algorithme (voir [8]), décrit un algorithme du gradient conjugué qui permet de calculer les itérations  $x^m$  qui représentent la solution approximative du problème des moindres carrés (1.2) :

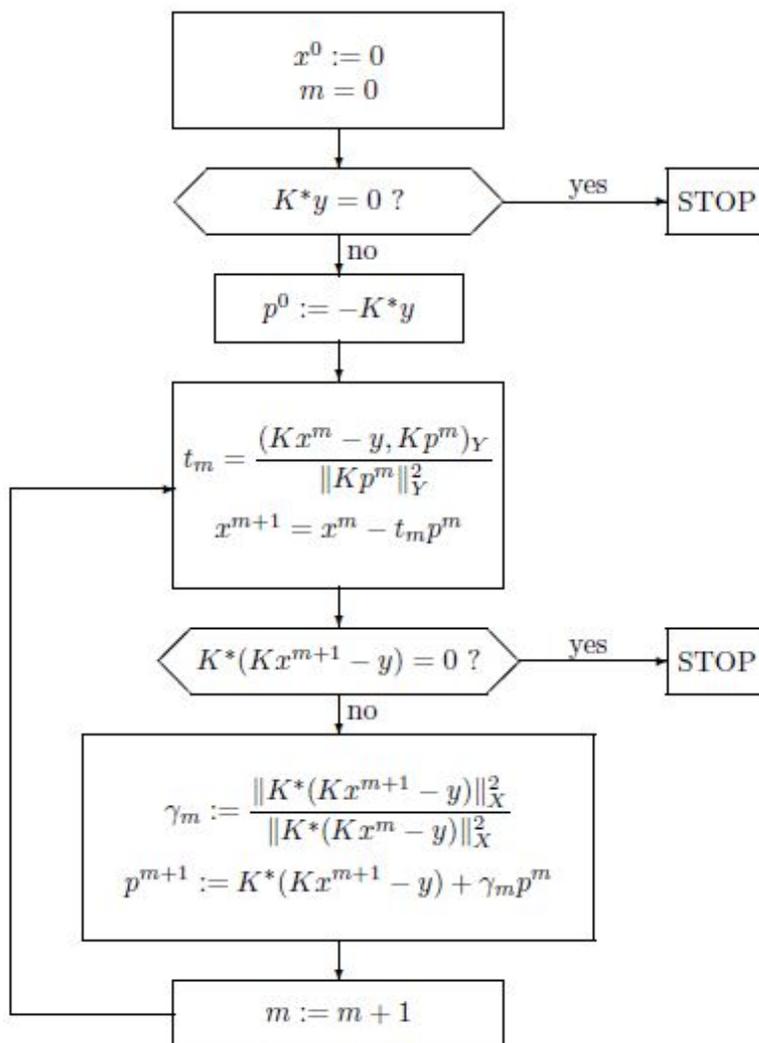


figure 1 : Méthode du Gradient Conjugué

### La méthode de Showalter

La méthode de Showalter connue sous le nom régularisation asymptotique, elle concerne de calculer la solution de (1.1), il est important de remarquer que  $x^\alpha$  est la

solution du problème à valeur initiale suivant :

$$\begin{cases} u'(t) + A^*Au(t) = A^*y, t \in \mathbb{R}_+ \\ u(0) = 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

$$u : \mathbb{R}_+ \rightarrow E$$

La régularisation consiste à intégrer ce problème de valeur initiale (1.7) non pas autant possible (théoriquement à  $+\infty$ ), mais seulement jusqu'à une abscisse  $t = \frac{1}{\alpha}$  où  $\alpha$  est le paramètre de régularisation c'est-à-dire  $x^\alpha = u(\frac{1}{\alpha})$ .

On peut vérifier que (voir l'exemple [2])

$$u(t) = v_t(A^*A)A^*y \quad \text{avec} \quad v_t(\lambda) = \frac{1 - \exp(-\lambda t)}{\lambda}$$

est bien solution de (1.7). Ainsi on déduit que la solution régularisée  $x^\alpha$  suivant la méthode de Showalter est définie par :

$$x^\alpha = v_\alpha(A^*A)A^*y \quad \text{avec} \quad v_\alpha(\lambda) = \frac{1 - \exp(-\frac{\lambda}{\alpha})}{\lambda}.$$

On déduit que la précision  $\|x^\alpha - x\|$  s'améliore quand  $\alpha$  devient plus petit, c'est-à-dire que l'abscisse  $t$  jusqu'à laquelle on intègre devient plus grande.

# Chapitre 2

## Représentation de la SVD

La Décomposition en Valeurs Singulières ("Singular Value Decomposition" en anglais, souvent abrégée SVD) est devenue depuis quelques dizaines d'années un outil fondamental pour étudier un nombre croissant de problèmes linéaires. La décomposition a été découverte il y a plus de cent ans par Beltrami, mais n'est devenu un outil numérique que depuis la fin des années 1960, quand G. Golub a montré comment on pouvait la calculer de façon stable et (raisonnablement) efficace [7].

On considère le type suivant de problème mal posé dans le cas continu, on se donne une équation intégrale linéaire de première espèce :

$$g(t) = \int_0^1 K(t, s) f(s) ds \quad (2.1)$$

où  $K$  est un opérateur compact d'inverse  $K^{-1}$  .

Dans le cadre algébrique, considérons un système carré ( $n \times n$ ) d'équation linéaire

$$Ax = y \quad (2.2)$$

où  $A$  est inversible et mal-conditionnée, et (2.2) est une approximation discrète de (2.1), obtenue en utilisant une règle de quadrature.

Un problème est mal posé si de petits changements dans les données  $g(t)$  du problème (2.1),  $y$  du problème (2.2) peuvent entraîner de grands changements dans la solution.

**Objectif 1** *C'est d'approximer le problème d'origine par un problème mieux conditionné que (2.1), qui réduit l'influence du bruit, et (2.2) nous donne une solution qui se rapproche de la solution exacte.*

## 2.1 Décomposition en valeurs singulières de matrices

L'avantage de la SVD est qu'elle peut être applicable pour n'importe quelle matrice de taille  $(m \times n)$ . On considère le problème (2.2) qui est plus facile à discuter dans le cadre algébrique.

**Théorème 2.1.1** [13]

*Soit  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  une matrice de rang  $r$ , alors il existe  $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$  et  $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tel que la décomposition en valeurs singulières de la matrice  $A$  est donnée par :*

$$A = U\Sigma V^t \tag{2.3}$$

*Où  $U$  et  $V$  deux matrices orthogonales,  $U$  un ensemble orthonormal de vecteurs propres de  $AA^t$ , et  $V$  un ensemble orthonormal de vecteurs propre de  $A^tA$ .*

*$\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$  une matrice diagonale dont les entrées sont les valeurs singulières de  $A$ , sa structure est schématisée ci-dessous :*

$$\begin{aligned} \Sigma &= \begin{pmatrix} \Sigma_1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{tel que } \Sigma_1 = \text{Diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \quad \text{si } m \leq n \\ \Sigma &= \begin{pmatrix} \Sigma_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{tel que } \Sigma_1 = \text{Diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \quad \text{si } m > n \end{aligned}$$

Les  $\sigma_j, j = \overline{1, n}$  sont les valeurs singulières de  $A$  qu'on suppose ordonnées par ordre décroissant

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n$$

Composante par composante, l'identité matricielle (2.3) devient :

$$\begin{aligned} Av_j &= \sigma_j u_j \quad , \quad A^t u_j = \sigma_j v_j \quad \text{pour } j = 1, \dots, n \\ A^t u_j &= 0, \quad \text{pour } j = n + 1, \dots, m \end{aligned}$$

**Preuve.** La matrice  $A^t A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est hermitienne

$$(A^t A)^t = A^t (A^t)^t$$

elle est de plus positive :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad , \quad x^t A^t A x = \|Ax\|_2^2 \geq 0$$

D'après le théorème spectral, il existe une matrice  $V$  orthogonale et une matrice  $D$  diagonale, tel que la matrice  $A^t A$  est diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres  $(v_1, \dots, v_n)$  qui s'écrit :

$$V^t A^t A V = D$$

où  $D$  contient les valeurs propres de  $A^t A$  sur la diagonale.

Puisque  $A^t A$  est positive, ses valeurs propres  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  sont aussi positives, où

l'on suppose que les  $\lambda_j$  sont ordonnées de telle sorte que  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ .

On pose,  $\sigma_j = \sqrt{\lambda_j}$  pour  $j = \overline{1, n}$  et on note  $D = \text{Diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$

$$u_j = \frac{1}{\sigma_j} Av_j$$

$(u_1, \dots, u_r)$  est une famille orthonormée de  $\mathbb{R}^n$ , on peut la compléter en une base de  $\mathbb{R}^m$ .

En notant  $U$  la matrice qui a pour colonnes les vecteurs  $u_j$ , il vient pour  $j \leq r$  :

$$u_j^t Av_j = \frac{1}{\sigma_j} v_j^t A^t Av_j = \frac{\sigma_j^2}{\sigma_j} = \sigma_j$$

Puisque  $A^t Av_j = \lambda_j v_j = \sigma_j^2 v_j$ .

On en déduit que  $U^t AV = \text{Diag}(\sigma_j)$ , où  $U$  et  $V$  sont orthogonales, avec

$r = \min(m, n) = \text{rg}(A)$  par définition.

On note  $\Sigma = D$ , en multipliant successivement la dernière égalité de la preuve par  $V^t$  puis par  $U$ , on obtient la forme la plus utilisée pour la SVD :

$$A = U\Sigma V^t$$

■

On note  $U = (u_1, \dots, u_m)$  et  $V = (v_1, \dots, v_n)$  les colonnes des matrices  $U$  et  $V$ , les vecteurs  $u_j$  et  $v_j$  sont, respectivement, les vecteurs singuliers droits et gauches associés à la valeur singulière  $\sigma_j$ .

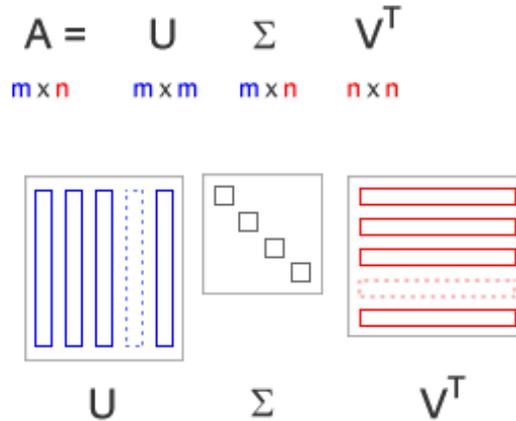


figure 3 : Schéma de la SVD

On définit  $r$  comme étant l'indice de la plus petite valeur singulière non nulle.

Varah [14], Lawson et Hanson [10] décidèrent que les entrées de  $\Sigma$  qui ne sont pas significatives, les entrées "insignifiantes" sont mises égale à zéro, on obtient alors :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_r & 0 \\ & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{si } m \leq n$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_r \\ & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{si } m > n$$

Où  $\Sigma_r = \text{Diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r)$  est la matrice diagonale d'ordre  $r$  des valeurs singulières non nulles dans l'ordre croissant.

On traite maintenant, l'obtention des valeurs singulières. Le théorème de la SVD suggère l'existence d'un lien fort entre valeurs singulières et valeurs propres d'une matrice bien choisie [13].

Soit  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , d'après le théorème de la SVD, on peut écrire  $A = U\Sigma V^t$  et  $A^t = V\Sigma U^t$  alors :

$$A^t A = V\Sigma U^t U \Sigma V^t = V\Sigma^2 V^t$$

On pose  $S = \Sigma^2$  et  $W = V$ .

On construit alors une diagonalisation de la matrice  $A^t A$  dont les valeurs propres  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  vérifient :

$$\forall j \in \{1, \dots, n\}, \sigma_j = \sqrt{\lambda_j}$$

et de vecteur propres portés par les colonnes de  $V$ , lesquels sont orthonormés.

En ce qui concerne l'unicité de la SVD on distingue deux cas [13] :

- \_ 1<sup>er</sup> cas : les valeurs singulières sont toutes distinctes.  
les valeurs singulières ont un unique vecteur singulier à droite et à gauche, au facteur  $e^{i\theta}$  près ( facteur -1 pour les matrices à coefficients réels). Ceci est clair, puisque si l'on multiplie conjointement un vecteur singulier à droite et à gauche par ce facteur, la SVD reste inchangée, le caractère unitaire des matrices aussi puisque  $|e^{i\theta}| = 1$ . La SVD est donc unique au facteur près.
- \_ 2<sup>ème</sup> cas : s'il existe  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  deux valeurs singulières telles que  $\sigma_1 = \sigma_2$  , alors elles admettent le même vecteur singulier. Les vecteurs singuliers génèrent un sous-espace de l'espace entier, et toute combinaison linéaire des vecteurs de cet espace est un vecteur singulier : la SVD n'est pas unique.

Les principales propriétés de la matrice  $A$  sur sa SVD est données par la proposition suivante :

**Proposition 2.1.1** *On a les relations suivantes [7] :*

- i) Le rang de  $A$  est égal au nombre de valeurs singulières non-nulles .*
- ii)  $\ker(A) = \text{vect}(v_{r+1}, \dots, v_n)$ ,  $\text{Im}(A) = \text{vect}(u_1, \dots, u_r)$*
- iii)  $\ker(A^t) = \text{vect}(v_1, \dots, v_r)$ ,  $\text{Im}(A^t) = \text{vect}(u_{r+1}, \dots, u_m)$*
- iv)  $\|A\|_2 = \sigma_1$ .*

– Pour démontrer (ii), on a besoin du corollaire suivant :

**Corollaire 2.1.1** *Soit  $A = U\Sigma V^t$  la décomposition en valeurs singulières de la matrice  $A$ .*

*Appelons  $u_j$  (resp  $v_j$ ) les colonnes de  $U$  (resp  $V$ ) [9] alors :*

$$A = \sum_{j=1}^r \sigma_j u_j v_j^t$$

– Pour démontrer (iv), on a besoin la proposition suivante :

**Proposition 2.1.2** *Soit  $A$  une matrice rectangulaire de taille  $(m \times n)$ ,  $U$  (resp  $V$ ) une matrice carrée d'ordre  $n$  (resp  $m$ ) [9], alors :*

$$\|VAU\|_2 = \|A\|_2$$

**Preuve.** (De la proposition (2.1.1)).

Les matrices  $U$  et  $V$  sont des isométries, donc des bijections. Les différentes propriétés sont donc des conséquences de ce qu'elles sont vraies pour  $\Sigma$ .

i) Le rang d'une matrice diagonale est égal au nombre d'éléments diagonaux non-nuls.

comme  $U$  et  $V$  sont inversibles, et on a :

$$U^t AV = \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & & & \\ & \cdot & & & & 0 \\ & & \sigma_r & & & \\ 0 & & & 0 & & \\ & & & & \cdot & \\ & & & & & 0 \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Alors  $rg(A) = rg(\Sigma) = r$ .

ii) Soit  $x \in \ker(A) \Leftrightarrow Ax = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^r \sigma_j u_j (v_j^t x) = 0 \Leftrightarrow v_j^t x = 0$  pour  $1 \leq j \leq r$   
 $\Leftrightarrow x \in \text{vect}(v_{r+1}, \dots, v_n)$

On sait que  $rg(A) = \dim(\text{Im}(A)) = r$  donc par définition :

$$\text{Im } A = \text{vect}(u_1, \dots, u_k)$$

iii) La preuve est analogue au point précédent.

iv) Comme  $A = U\Sigma V^t$  donc  $\|A\|_2 = \|\Sigma\|_2$

Soit  $x = \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j$  avec  $\sum_{j=1}^n |\alpha_j|^2 = 1$ , alors :

$$\|\Sigma x\|_2^2 = \langle \Sigma x, \Sigma x \rangle = \sum_{j=1}^m \sigma_j^2 |\alpha_j|^2 \leq \sigma_1^2 \sum_{j=1}^n |\alpha_j|^2 = \sigma_1^2$$

Donc  $\|\Sigma\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|\Sigma x\|_2 \leq \sigma_1$

Mais le vecteur  $e_1$  qui est de norme unité, tel que  $\|\Sigma e_1\| = \sigma_1$

Donc  $\|\Sigma\|_2 = \sigma_1$ . ■

### 2.1.1 Interprétations géométriques de la SVD

A toute matrice  $A$  de dimension  $(m \times n)$ , il est possible d'associer une application linéaire qui envoie tout vecteur de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^m$ . On considère  $U$  et  $V$  comme des rotations et des réflexions et  $\Sigma$  comme une matrice d'étirement. La figure suivante illustre la séquence de transformation sous  $A$  sur les vecteurs unitaires  $v_1$  et  $v_2$  (et

tous les autres vecteurs sur le cercle unité) dans le cas  $m = n = 2$  [15].

On note que  $V = (v_1 v_2)$  lorsque sont multipliés par  $V^t$  à gauche, les deux vecteurs subissent une rotation et deviennent des vecteurs unitaires  $e_1 = (1, 0)^t$  et  $e_2 = (0, 1)^t$ .

Ensuite, la matrice  $\Sigma$  étant ces deux vecteurs résultants à  $\sigma_1 e_1$  et  $\sigma_2 e_2$  respectivement, dans la dernière étape les vecteurs subissent une rotation finale due à  $U$  et deviennent  $\sigma_1 u_1$  et  $\sigma_2 u_2$ .

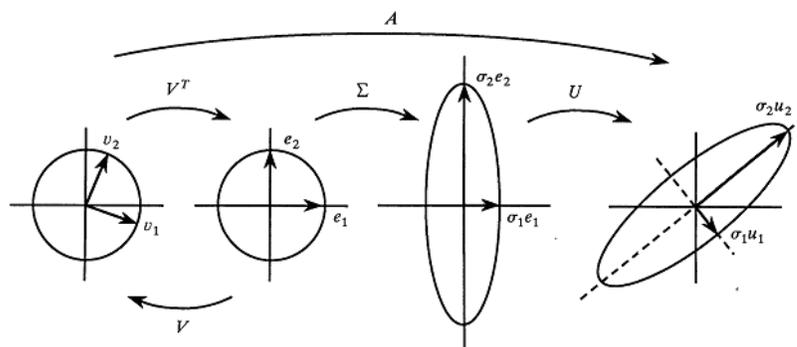


figure 3 : Interprétation géométrique de la SVD

## 2.2 Développement en Valeurs Singulières des Opérateurs Compacts

$K$  un opérateur compact de  $E$  dans  $F$ . On va généraliser la décomposition en valeurs singulières à cette situation. La principale différence sera l'existence d'une infinité (dénombrable) de valeurs singulières.

On obtient en conséquence un critère pour l'existence d'une solution au problème de moindres carrés (le critère de Picard).

**Théorème 2.2.1** Soit  $K : E \rightarrow F$  un opérateur compact. Il existe une suite

$(\sigma_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+$ , et deux famille orthonormales  $(u_j)_{j \in \mathbb{N}} \in E$  et  $(v_j)_{j \in \mathbb{N}} \in F$  telles que :

i)  $(\sigma_j)_{j \in \mathbb{N}}$  est décroissante et  $\lim_{j \rightarrow +\infty} \sigma_j = 0$ .

ii)  $Ku_j = \sigma_j v_j$  ,  $K^*v_j = \sigma_j u_j$ .

iii) Pour tout  $f \in E$ , on a le développement :

$$f = f_0 + \sum_{j=1}^{+\infty} (f, u_j) u_j \quad \text{où} \quad f_0 \in \text{Ker}(K) \quad (2.4)$$

iv) Pour tous  $f \in E$  et  $g \in F$  on a :

$$Kf = \sum_{j=1}^{+\infty} \sigma_j (f, u_j) v_j \quad K^*g = \sum_{j=1}^{+\infty} \sigma_j (g, v_j) u_j$$

La suite  $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$  est une base hilbertienne de  $\text{Ker}(K^\perp)$ , la suite  $(v_j)_{j \in \mathbb{N}}$  est une base hilbertienne de  $\overline{\text{Im}(K)}$ .

**Preuve.** [7]. ■

**Définition 2.2.1** Les nombres  $\sigma_j$  sont appelés les valeurs singulieres de  $K$ . Les vecteurs  $u_j$  et  $v_j$  sont les vecteurs singuliers. Le développement obtenu en (2.4) s'appelle le développement en valeurs singulieres de  $K$  ("singular value expansion", abrégé SVE en anglais) .

**Remarque 2.2.1** On a supposé que l'opérateur  $K^*K$  avait une infinité de valeurs propres pour obtenir des énoncés plus simples, car dans le cas d'un nombre fini de valeurs propres, ne correspond pas à des situations rencontrées en pratique.

## 2.3 Les méthodes qui utilisent la SVD

Pour résoudre les problèmes de type (2.1) et (2.2) en utilisant la SVD, on propose les méthodes suivantes :

### 2.3.1 La Décomposition en Valeur Singulière avec Troncature (SVDT)

La SVDT modifiera un problème mal posé de manière à ce qu'il soit numériquement stable.

Picard (dans son théorème)[11], donne une condition nécessaire et suffisante de l'existence et l'unicité de la solution du problème (2.1).

– En ce qui concerne l'existence, on a le résultat suivant :

Soit  $K(t, s)$  un opérateur compact, pour  $(t, s) \in [0, 1] \times [0, 1]$  et soit  $g \in L^2([0, 1])$ . Alors, (2.1) admet une solution  $f \in L^2([0, 1])$  si et seulement si :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma_n^2} (g^t U_n)^2 < \infty$$

Où  $g \in \overline{rg(K)}$ ,  $U_n$  est un ensemble complet de fonction propre pour l'opérateur  $KK^*$ ,  $\sigma_n^2$  est l'ensemble correspondant de valeurs propres de  $KK^*$  tel que  $\sigma_n^2 \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$  et  $K^*$  est l'opérateur adjoint de  $K$  et son noyau est  $K^*(t, s) = \overline{K(t, s)}$ .

– Pour l'unicité, on a :

Sous les hypothèses du résultat précédent, l'équation (2.1) admet une unique solution  $f \in N(K)^\perp$  (complément orthogonal de l'espace nul de  $K$ ), qui s'écrit sous la forme :

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma_n} (g^t U_n) V_n$$

Où  $V_n$  sont les fonctions propre de l'opérateur  $K^*K$ .

Le système  $\{U_n\}, \{V_n\}, \{\sigma_n\}, n = 1, 2, \dots$  est la décomposition en valeurs singu-

lières de l'opérateur  $K$  c'est-à-dire :

$$K = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n U_n V_n^t$$

De même, pour la matrice  $A$  on obtient :  $A = U\Sigma V^t$

Où les colonnes de  $U$  et  $V$  sont les vecteurs  $u_1, \dots, u_n$  et  $v_1, \dots, v_n$  respectivement et  $\Sigma$  est la matrice diagonale dont les entrées non nulles sont  $\sigma_j, j = \overline{1, n}$ , les  $\sigma_j$  sont appelées les valeurs singulières de  $K$  ou  $A$ .

**Définition 2.3.1** *Une matrice  $A$  est dite oscillatoire si  $A$  est totalement non-négative, inversible et tous les éléments de la diagonale principale et la première super-diagonale et sous-diagonale sont non nuls.*

On considère par exemple les matrices oscillatoires de Gantmacher [3], ou au moins ayant la propriété d'oscillation suivante :

**Définition 2.3.2** *Une matrice  $A$  avec des valeurs propres  $\lambda_j, j = \overline{1, n}$  avec  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ , a "la propriété d'oscillation" si :*  
*il existe  $m \leq n$  valeurs propres distinctes  $\mu_j, j = \overline{1, m}$  avec  $\mu_1 \geq \dots \geq \mu_m$  et une base complète correspondante de valeurs propres tel que chacun des vecteurs de base correspondant à  $\mu_j$  a exactement  $j - 1$  variation de signe dans ses coordonnées.*

On note que les matrices oscillatoires ont la propriété d'oscillation.

On observe que si la matrice  $A$  dans (2.2) a la propriété d'oscillation, alors la SVDT peut supprimer les effets du bruit fortement oscillatoire chaque fois que la solution souhaitée est plus clair, cependant, si  $A$  n'a pas cette propriété, SVDT peut avoir peu d'effet sur le bruit.

### 2.3.2 Une procédure de transformation de Hankel

L'objectif est de remplacer le problème original mal posé (2.1) ou (2.2) par un problème bien conditionné qui atténue l'effet du bruit dans nos données sur la solution et qui nous donne une solution physiquement significative qui se rapproche de la vraie solution dans certains sens. L'approche de Ekstrom et Rhoads utilise également la Décomposition en Valeurs Singulière de la matrice  $A$  du problème (2.2) mais avec un système de pondération au lieu d'une troncature, cette pondération peut atténuer efficacement l'effet du bruit [1].

La discussion dans Ekstrom et Rhoads est restreinte aux équations de convolution. c'est-à-dire :

dans (2.1)

$$K(t, s) = k(t - s)$$

et dans (2.2)

$$A_{ij} = A_{i-j} = A_{i+1, j+1} \tag{2.5}$$

Cependant, les idées de [1] peuvent être étendues aux matrices générales, en utilisant la Décomposition en Valeur Singulière. Par conséquent, même si on restreint la discussion aux équation de convolution de la matrice  $A$ , on considère une grande classe de problèmes intéressants, satisfaisant (2.5) s'appelle une matrice de Toeplitz.

**Définition 2.3.3** *Une matrice de Toeplitz est une matrice dont les coefficients sur une diagonale descendant de gauche à droite sont les mêmes. Par exemple, la matrice suivante est une matrice de Toeplitz :*

$$\begin{pmatrix} a & b & c & e \\ f & a & b & c \\ g & f & a & b \\ h & g & f & a \end{pmatrix}$$

**Définition 2.3.4** Une matrice  $A$  est persymétrique si elle est symétrique par rapport à la diagonale secondaire  $a_{j(n-j+1)}, 1 \leq j \leq n$ .

persymétrique exige que  $a_{ij} = a_{n-j+1, n-i+1}, 1 \leq i, j \leq n$ .

Par exemple les matrices persymétriques ( $5 \times 5$ ) ont la forme :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{23} & a_{13} \\ a_{41} & a_{42} & a_{32} & a_{22} & a_{12} \\ a_{51} & a_{41} & a_{31} & a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

**Remarque 2.3.1** Il est clair qu'une matrice de Toeplitz est persymétrique.

**Lemme 2.3.1** Si  $A$  est une matrice persymétrique et  $P$  la matrice de tout les zéros à l'exception de ses premiers éléments sur la diagonal secondaire, alors la matrice  $H = AP$  est une matrice symétrique.

De plus  $x = Pz$ , où  $z$  est la solution de  $Hx = y$ , est la solution de  $Ax = y$ .

**Preuve.** comme  $A$  est persymétrique,

$$a_{ij} = a_{n-j+1, n-i+1} \quad \text{for } 1 \leq i, j \leq n \tag{2.6}$$

de plus, on a  $H = AP$ ,  $h_{ij} = a_{i(n-j+1)}$ , mais (2.6) implique que  $a_{i(n-j+1)} = a_{j(n-i+1)}$

l'entrée  $i, j$  dans  $H^t$

En conséquant,  $H$  est symétrique. De plus, si on définit  $x = Pz$  alors  $Ax = APz = Hz = y$ . ■

Par conséquant, on peut transformer notre système  $Ax = y$  en un système symétrique équivalent  $Hx = y$ .

Puisque  $A$  est Toeplitz,  $H$  est une matrice de Hankel.

**Définition 2.3.5** Une matrice  $A$  est une matrice de Hankel de taille  $(n \times n)$  si et seulement si :

$$a_{ij} = a_{i-1, j+1}, \quad 1 \leq i \leq n \text{ et } 0 \leq j \leq n - 1$$

Par exemple une matrice de Hankel de taille 4 s'écrit sous la forme :

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & e \\ c & d & e & f \\ d & e & f & g \end{pmatrix}$$

Dans une matrice de Hankel, les éléments le long de la diagonale secondaire sont tous égaux, ainsi que tous les éléments sur le diagonale parallèles à la diagonale secondaire.

On constate que la procédure d'Ekstrom et Rhoads [13] ne discute qu'avec des systèmes généraux étendus à l'aide de la SVD et d'équations de convolution, mais qui pourra pondérer les mesures de la variation des vecteurs propres de  $A^t A$  ou les vecteurs propres de  $AA^t$ .

### 2.3.3 Application de la SVD aux problèmes de moindres carrés

La décomposition en valeurs singulières fournit la solution la plus claire du problème de moindres carrés.

Dans ce qui suit, on abandonne l'hypothèse que  $A$  est de rang  $n$ , puisqu'un des points forts de la SVD est justement de permettre de traiter ce cas. Quand  $A$  est de rang  $r < n$ , on cherche la solution de norme minimale.

Introduisons la SVD de  $A$  dans le problème de moindres carrés (1.2) du premier chapitre :

$$\| Ax - y \|_2^2 = \| U\Sigma V^t x - y \|_2^2 = \| \Sigma(V^t x) - U^t y \|_2^2$$

Puisque  $U$  est orthogonale. Notons  $w = U^t y$  (avec  $\| w \|^2 = \| y \|^2$ ), et prenons comme nouvelle inconnue  $z = V^t x$  (avec encore  $\| z \|^2 = \| x \|^2$ , puisque  $V$  est orthogonale, ce qui sera important pour calculer la solution de norme minimale).

Comme  $\Sigma$  est diagonale, ce problème est découpé, et se résout composante par composante dans les bases  $(u_1, \dots, u_m)$  et  $(v_1, \dots, v_n)$ .

On a donc :

$$\| Ax - y \|_2^2 = \| \Sigma z - w \|_2^2 = \sum_{j=1}^r | \sigma_j z_j - w_j |^2$$

On obtient donc toutes les solutions du problème (1.2) de moindres carrés (chapitre 1) en posant :

$$z_j = \begin{cases} \frac{w_j}{\sigma_j}, & \text{pour } j = 1, \dots, r \\ \text{quelconque} & \text{pour } j = r + 1, \dots, n \end{cases} \quad (2.7)$$

Dans le cas où  $A$  est de rang plein ( $rg(A) = n$ ), il y a bien une solution unique, et dans le cas contraire, la solution est définie à l'addition d'un élément du noyau noté par  $\eta$  de  $A$  près. Dans ce dernier cas, la norme d'une solution est

$$\sum_{j=1}^r \left| \frac{w_j}{\sigma_j} \right|^2 + \|\eta\|_2^2$$

La solution de norme minimale est donc celle qui n'a pas de composante dans  $\text{Ker}A$ . Énonçons le résultat sous une forme plus intrinsèque :

**Théorème 2.3.1** [7] *La solution de norme minimale du problème de moindres carrés (1.2) est donnée par :*

$$x = \sum_{j=1}^r \frac{(y, u_j)}{\sigma_j} v_j \tag{2.8}$$

**Preuve.** Nous avons déjà fait la plus grande partie de la démonstration. Par définition,  $z = V^t x$  s'inverse en  $x = Vz$ , dont les composantes sont  $(x, v_j) = (Vz, v_j) = (z, V^t v_j) = z_j$ . En utilisant (2.7), nous avons :

$$x = \sum_{j=1}^r (x, v_j) v_j = \sum_{j=1}^r z_j v_j = \sum_{j=1}^r \frac{(y, u_j)}{\sigma_j} v_j$$

■

Ce résultat nous permet de donner des premières indications sur la sensibilité de la solution  $x$  par rapport à des perturbations sur la donnée  $y$ . Pour simplifier, plaçons nous dans le cas où  $A$  est de rang  $n$ .

On pose  $y = y + \delta y$ , et notons  $x + \delta x$  la solution du problème perturbé  $Ax = y + \delta y$ . Par linéarité, on déduit immédiatement de (2.8) que :

$$\delta x = \sum_{j=1}^r \frac{(\delta y, u_j)}{\sigma_j} v_j \tag{2.9}$$

et donc que  $\| \delta x \|_2^2 = \sum_{j=1}^r \frac{|\delta y_j|^2}{\sigma_j^2}$ .

En l'absence d'information plus précise, le mieux que l'on puisse déduire de (2.9) est :

$$\| \delta x \|_2 \leq \frac{\| \delta y \|_2}{\sigma_n}$$

Puisque  $\sigma_n$  est la plus petite valeur singulière de  $A$ , ce qui veut dire que l'erreur sur la solution a été amplifiée par l'inverse de la plus petite valeur singulière par rapport à l'erreur sur la donnée. Dans le cas où cette plus petite valeur singulière est petite, cette amplification peut devenir problématique. Nous verrons que cela sera le cas général pour la discrétisation des problèmes mal posés, et cela constitue l'explication fondamentale à l'instabilité rencontrée lors de leur solution.

## 2.4 Pseudo-Inverse et solution au sens de moindres carrés

Une autre application de la décomposition en valeurs singulières consiste en la notion de "pseudo-inverse" (ou inverse Moore-Penrose) qui généralise la notion habituelle d'inverse d'une matrice carrée régulière aux matrices rectangulaires d'une part, et aux matrices carrées singulières d'autre part [5].

On définit d'abord, la pseudo-inverse d'une matrice  $\Sigma$  de la décomposition en

valeurs singulières de la matrice  $A$  dans (2.3) par :

$$\Sigma^\dagger = \begin{pmatrix} \Sigma_r^{-1} & 0 \\ & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{si } m > n$$

$$\Sigma^\dagger = \begin{pmatrix} \Sigma_r^{-1} \\ & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{si } m \leq n$$

Où  $\Sigma_r^{-1} = \text{Diag}(\frac{1}{\sigma_1}, \dots, \frac{1}{\sigma_r})$  est l'inverse au sens habituel de  $\Sigma_r$ .

On définit alors la pseudo-inverse de  $A$  par  $A^\dagger$ , comme suit :

$$A^\dagger = V\Sigma^\dagger U^t$$

**Remarque 2.4.1** Lorsque  $A$  est une matrice carrée régulière ( $m = n = r$ ), on a :

$$A^\dagger A = AA^\dagger = I \quad \text{donc} \quad A^\dagger = A^{-1}$$

On a donc obtenu une généralisation de l'inverse d'une matrice.

**Lemme 2.4.1** [8]

i)

$$A^\dagger = \sum_{j=1}^r \frac{1}{\sigma_j} v_j u_j^t$$

ii) On définit la matrice de la projection orthogonal sur  $\text{Im } A$  par :

$$AA^\dagger = \sum_{j=1}^r u_j u_j^t$$

iii) Et la matrice de la projection orthogonal sur  $\text{Im } A^t$  par :

$$A^\dagger A = \sum_{j=1}^r v_j v_j^t$$

**Preuve.** Soit  $e_j$  (resp  $\varepsilon_j$ ) les colonnes de matrices identités  $I_n$  (resp  $I_m$ ) c'est-à-dire : le  $j^{\text{ème}}$  vecteur de la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  (resp  $\mathbb{R}^m$ ), par définition :

$$V = \sum_{j=1}^n v_j e_j^t \quad , \quad U^t = \sum_{j=1}^m \varepsilon_j u_j^t$$

$$\text{Comme} \quad \Sigma^\dagger \varepsilon_j = \begin{cases} \sigma_j^{-1} e_j & \text{pour } 1 \leq j \leq r \\ 0 & \text{pour } r+1 \leq j \leq m \end{cases}$$

$$\text{On a} \quad \Sigma^\dagger U^t = \sum_{j=1}^m \sigma_j^{-1} e_j u_j^t$$

$$\text{Alors} \quad A^\dagger = V(\Sigma^\dagger U^t) = \sum_{j=1}^m \sigma_j^{-1} (V e_j) u_j^t = \sum_{j=1}^m \sigma_j^{-1} v_j u_j^t$$

donc :  $AA^\dagger = \sum_{j=1}^r u_j u_j^t$  est la matrice de la projection orthogonale sur  $\text{vect}(u_1, \dots, u_r) = \text{Im } A$   
 et  $A^\dagger A = \sum_{j=1}^r v_j v_j^t$  est la matrice de la projection orthogonale sur  $\text{vect}(v_1, \dots, v_r) = \text{Im } A^t$ . ■

**Remarque 2.4.2** La restriction à  $\text{Im } A^t = (\text{Ker } A)^\perp = (\text{Ker } A^t A)^\perp$  de  $A^t A$  est une matrice inversible et comme elle est carrée donc (d'après la remarque précédente) :

$$(A^t A)^{-1} = (A^t A)^\dagger$$

On obtient le fait que, pour tout  $y$  élément de  $\mathbb{R}^n$ , il existe un unique vecteur  $x \in (\text{Ker}A^tA)^\perp$  solution de  $A^tAx = A^ty$ , soit l'existence et l'unicité de la solution au sens des moindres carrés (1.2) du système  $Ax = y$ .

Cette unique solution est donnée par :

$$x = (A^tA)^\dagger A^ty$$

La pseudo-inverse d'une matrice est définie à partir de la décomposition SVD de cette matrice. Comme la décomposition SVD n'est pas unique, la matrice pseudo-inverse n'est pas unique. Par contre, du point de vue des applications linéaires associées aux matrices, l'application pseudo-inverse est unique.

# Chapitre 3

## Simulation

### 3.1 Exemple 1 : Compression d'image

On démontre l'idée d'approximation matricielle avec un exemple simple : Compression d'image.

Les images naturelles présentent un exemple simple et intuitif de cette compressibilité inhérente, une image en niveaux de gris peut être considérée comme une matrice à valeur réelle  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , où  $m$  et  $n$  sont le nombre de pixels dans les directions verticale et horizontale, respectivement [12].

On considère l'image du cheval sur la *figure 5*, cette image a  $427 \times 328$  pixels.

La *figure 5* montre la matrice approximative  $M_{app}$  pour différentes valeurs du rang  $r$ .

On présente le script sous Matlab qui compresse cette image :

```

1      % d'abord, chargeons l'image
2 -   A=imread('cheval.jpg');
3 -   A=double(rgb2gray(A));
4 -   m=size(A,1);
5 -   n=size(A,2);
6 -   figure,subplot(2,2,1)
7 -   imagesc(A)
8 -   axis off
9 -   colormap gray
10 -  title('ORIGINAL')
11   % et on prend la SVD
12 -  [U,S,V]=svd(A);
13   % On sauvgarde les valeurs diagonales de S en tant que vs
14   % stockée comme un vecteur.
15 -  vs=diag(S);
16 -  k=size(vs,1);
17   % Ensuite, calculons la matrice approchée en utilisant
18   % la SVD tronqué pour différents rangs
19 -  p=2;
20 -  for r=[5,20,155]
21 -  if r <= k
22 -  Mapp=U(:,1:r)*S(1:r,1:r)*V(:,1:r)';
23 -  subplot(2,2,p)
24 -  p=p+1;
25 -  q=100*(r*(n+m+r))/(n*m);
26 -  imagesc(Mapp)
27 -  axis off , colormap gray
28 -  title(['r=',num2str(r,'%d'),' ',' ',num2str(q,'%2.2f')
29 -  '%stockage'])
30 -  end
31 -  end

```

figure 4 : le script de compression d'image

Afin de réduire la place de stocker d'une image, on peut réduire sa résolution c'est-à-dire diminuer le nombre de pixels. La façon la plus simple d'effectuer cette réduction consiste à supprimer des lignes et des colonnes dans l'image de départ.

La figure suivante montre les résultats obtenus en élevant des lignes et des colonnes.



*figure 5* : Compression de l'image du cheval

Au lieu de stockage de  $427 \times 328 = 14056$  valeurs (chacun ( $8bits$ )), on peut stocker, par exemple,  $(427 + 328 + 5) \times 5 = 3800$  valeurs, qui est d'environ 2.71% de la taille originale :

$$100 * (r * (n + m + r)) / (n * m) = 100 \times (5 \times (427 + 328 + 5)) / (427 \times 328) = 2.71\%$$

C'est un exemple de la façon dont la SVD peut être utilisée pour faire avec perte de compression d'image.

Le changement dans l'erreur avec l'augmentation du nombre de valeurs singulières peut être vu après l'exécution du script suivant :

```

1   % lire et convertir l'image
2 -  A=imread('cheval.jpg');
3 -  A=double(rgb2gray(A));
4   %Décomposer l'image en utilisant la SVD
5 -  [U,S,V]=svd(A);
6   %Utilises différents nombres de valeurs
7   % singulières pour compresser et reconstruire l'image
8 -  x=[];y=[];
9 -  for r=5:10:300
10 -      Mapp=U(:,1:r)*S(1:r,1:r)*V(:,1:r)';
11   %Tracer et calculer l'erreur
12 -  figure;
13 -  buffer=sprintf('image utilisant %d valeurs singulières',r);
14 -  imshow(uint8(Mapp));
15 -  title(buffer);
16 -  erreur=sum(sum((A-Mapp).^2));
17 -  x=[x;erreur];
18 -  y=[y;r];
19 -  end
20 -  figure;
21 -  title('erreur de compression');
22 -  plot(y,x);
23 -  xlabel('nombre de valeurs singulières utilisées');
24 -  ylabel('l'erreur entre la compression et l\'originale');

```

figure 6 :le script de l'erreur entre l'image original et la compressée

On voit après l'exécution de ce script plusieurs images qui s'affichent, à chaque fois qu'on change  $r$  on voit une image différente de sorte que  $r$  augmente l'image devient plus précise.

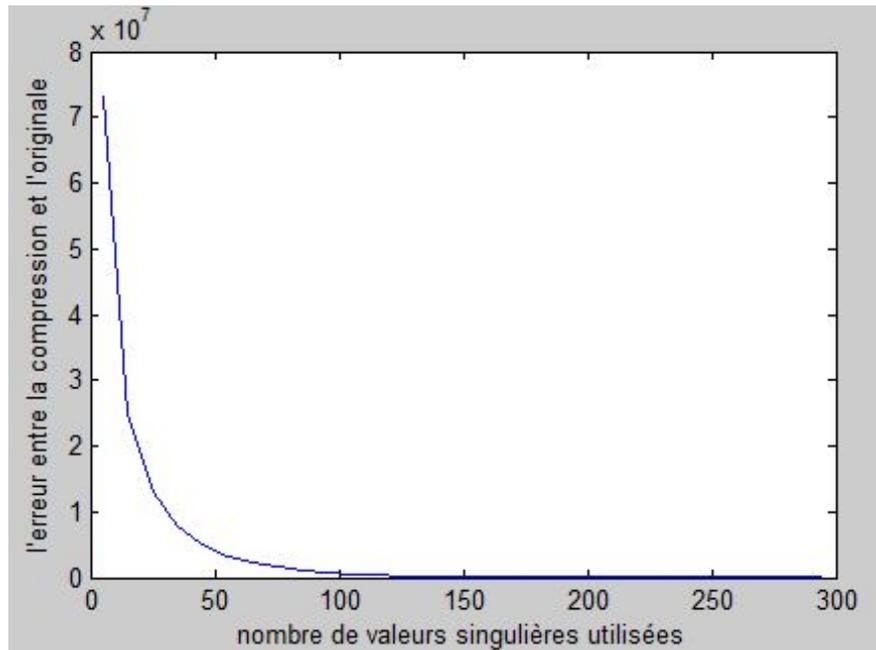


figure 7 : Changement de l'erreur avec l'augmentation du nombre de valeurs singulières

Ici on peut remarquer que la figure montre l'utilisation d'environ 150 premières valeurs singulières des rendements d'environ zéro erreur.

### 3.2 Exemple 2 : un exemple numérique

Soit la matrice  $A$  suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On souhaite calculer la SVD de cette matrice :

On calcule d'abord la matrice  $AA^t$  et on cherche les valeurs propres de cette matrice :

$$AA^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Le polynome caractéristique est :

$$\det(AA^t - \lambda I) = (3 - \lambda)(1 - \lambda)$$

Les valeurs propres de  $AA^t$  sont  $\lambda_1 = 3$  et  $\lambda_2 = 1$ , alors les valeurs singulières de la matrice  $A$  sont  $\sigma_1 = \sqrt{3}$  et  $\sigma_2 = 1$ .

Alors la matrice  $\Sigma$  est définie par :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ensuite, on doit trouver les vecteurs propres correspondants à  $AA^t$ , définis par l'équation  $AA^t X = \lambda_i X$ ,  $i = 1, 2$ .

- Pour  $\lambda_1 = 3$  :

$$AA^t X = \lambda_1 X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 3x \\ -x + 2y = 3y \end{cases}$$

$$\text{On trouve } \bar{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

– Pour  $\lambda_2 = 1$  :

$$AA^t X = \lambda_2 X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = x \\ -x + 2y = y \end{cases}$$

$$\text{On trouve } \bar{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ces vecteurs propres deviennent des vecteurs colonnes dans une matrice ordonnée par la taille de la valeur propre correspondante. En d'autres termes, le vecteur propre de la plus grande valeur propre est la première colonne, le vecteur propre de la prochaine plus grande valeur propre est la deuxième colonne, et ainsi de suite jusqu'à ce que nous ayons le vecteur propre de la plus petite valeur propre comme la dernière colonne de notre matrice.

Dans la matrice ci-dessous, le vecteur propre pour  $\lambda_1 = 3$  est la colonne une, et le vecteur propre pour  $\lambda_2 = 1$  est la colonne deux.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Enfin, on doit convertir cette matrice en une matrice orthogonale, en appliquant le processus d'orthonormalisation aux vecteurs colonnes.

On commence par normaliser les vecteurs  $\bar{u}_1$  et  $\bar{u}_2$  :

$$u_1 = \frac{\bar{u}_1}{\|\bar{u}_1\|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}^t}{\sqrt{(1)^2 + (-1)^2}} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}^t}{\sqrt{2}} = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$u_2 = \frac{\bar{u}_2}{\|\bar{u}_2\|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^t}{\sqrt{(1)^2 + (1)^2}} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^t}{\sqrt{2}} = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

Ce qui donne :

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Le calcul de  $V$  est similaire,  $V$  basé sur  $A^t A$  donc on a :

$$A^t A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le polynome caractéristique est :

$$\det(A^t A - \lambda I) = \lambda(\lambda - 3)(1 - \lambda)$$

Les valeurs propres de  $A^t A$  sont  $\lambda_1 = 3$  et  $\lambda_2 = 1$  et  $\lambda_3 = 0$ . Pour trouver les vecteurs propres correspondants à  $A^t A$ , on procède comme ci-dessus. On obtient :

$$\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } \bar{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On aura donc la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour trouver une matrice orthogonale  $V$ , on applique le processus d'orthonormalisation aux vecteurs colonnes :

$$V = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Finalement :

$$\begin{aligned} A &= U\Sigma V^t \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Soit  $y = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ , on veut trouver  $x$  telque  $Ax = y$  en utilisant la SVD.

Le but de ce programme est de décomposer la matrice  $A$  et d'étudier l'efficacité de la méthode de décomposition en valeurs singulières.

Sachant que la valeur exacte de  $x$  est  $X\_exact = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

On doit calculer alors, l'erreur entre  $X\_exact$  et  $x$  cherché par SVD en utilisant la norme vectorielle infinie.

Voici le programme :

```
1  function [ x ] = SVD( A,y, X_exact )
2  -   [U,S,V] = svd(A)
3  -   [m,n]=size(S);
4  -   S_inv=zeros(n,m);
5  -   if m<n
6  -   for i=1:n
7  -   for j=1:m
8  -       S_inv(j,j) = 1/S(j,j);
9  -       if i~=j
10 -         S_inv(i,j)=0;
11 -       end
12 -     end
13 -   end
14 -   else
15 -   for i=1:n
16 -       S_inv(i,i) = 1/S(i,i);
17 -   for j=1:m
18 -       if i~=j
19 -         S_inv(i,j)=0;
20 -       end
21 -     end
22 -   end
23 -   end
24 -   x = V*S_inv*U'*y;
25 -   Erreur = norm(X_exact-x, Inf)
26 -   end
```

figure 8 : programme de résolution de  $Ax=y$  avec la SVD

Après l'exécution de ce programme on obtient les résultats suivants :

```
>> [ x ] = SVD( [1 0 -1;-1 1 0],[2;1], [1; 2; -1] )  
  
U =  
  
   -0.7071    0.7071  
    0.7071    0.7071  
  
S =  
  
   1.7321    0    0  
    0    1.0000    0  
  
V =  
  
   -0.8165   -0.0000    0.5774  
    0.4082    0.7071    0.5774  
    0.4082   -0.7071    0.5774  
  
Erreur =  
  
    0.6667  
  
x =  
  
    0.3333  
    1.3333  
   -1.6667
```

figure 9 : Les résultats de l'exécution

# Conclusion

Dans ce travail nous nous sommes intéressés aux méthodes de résolution des problèmes mal posés.

Après un rappel de ce que la littérature propose comme résultats établis, notre intérêt a porté sur une méthode particulière, la méthode de la SVD, dont nous avons essayé de parcourir les atouts sans occulter ou nier les travers. Nous avons appliqué les résultats théoriques existants dans la littérature à un exemple pratique.

Ce mémoire sans prétention n'est qu'une infime contribution à l'étude des méthodes de résolutions des problèmes mal posés qui ont de beaux jours devant eux.

# Bibliographie

- [1] M. P. Ekstrom and R. L. Rhoads. On the application of eigenvector expansions to numerical deconvolution. *J. of Comp. Phys.* 14, 319-340, 1974.
- [2] H.W. Engl, M. Hanke and A. Neubauer. *Regularization of Inverse Problems.* Kluwer. Dordrecht, 1996.
- [3] F. R. Gantmater. *The Theory of Matrices, Vol. II* Chelsea Publ. New York. 1964.
- [4] J. Hadamard. *Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations.* Yale University Press. (1923).
- [5] P. Jacques. Résolution de systèmes non réguliers par une méthode de décomposition en valeurs singulières. Clé : R6.03.01, 12/09/2013.
- [6] S. I. Kabanikhin. definitions and examples of inverse and ill-posed problems, in *J. Inv. Ill-Posed Problems* 16 (2008). 317–357.
- [7] M. Kern. Problèmes inverses : aspects numériques. Engineering school. 1999 à 2002. École supérieure d'ingénieurs Léonard de Vinci. 20020. pp.138. .cel-00168393v2
- [8] A. Kirsch. *An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems.* Springer-Verlag New York. Inc.. New York. NY. 01996.
- [9] P. Lascaux, R. Théodor. *Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur, 1. Méthodes directes.* Masson Paris, 1986.
- [10] L. Lawson Charles and Richard J. Hanson. *Solving Least Squares Problems.* Prentice-Hall. Englewood Cliffs. N. J. 1974.
- [11] F. Smithies. *Integral Equations,* Cambridge University Press. London. 1958.
- [12] L. B. Steven. *Singular Value Decomposition (SVD).* University of Washington Seattle. 18 January 2020.
- [13] R. Thomas. Rapport de stage : Décomposition en valeurs singulières et approximation de rang faible. POLYTECH. 18 Août 2015.

*Bibliographie*

- [14] J.M.Varah. A practical examination of some numerical methods for linear discrete ill-posed problems. T.R. 76-08. Computer Science. The University of British Columbia. 1976.
- [15] J. Yan-Bin. Singular Value Decomposition. Com S 477/577 Notes. Sep 10, 2020.