



Faculté des Sciences Exactes  
Département de Physique

## Mémoire de Master

Spécialité:

Physique Théorique

Thème:

*Résolution des équations de Maxwell via la  
méthode modale de Fourier (FMM) pour  
applications en nano-optique.*

Réalisé par:

**TOUATI SALAH**

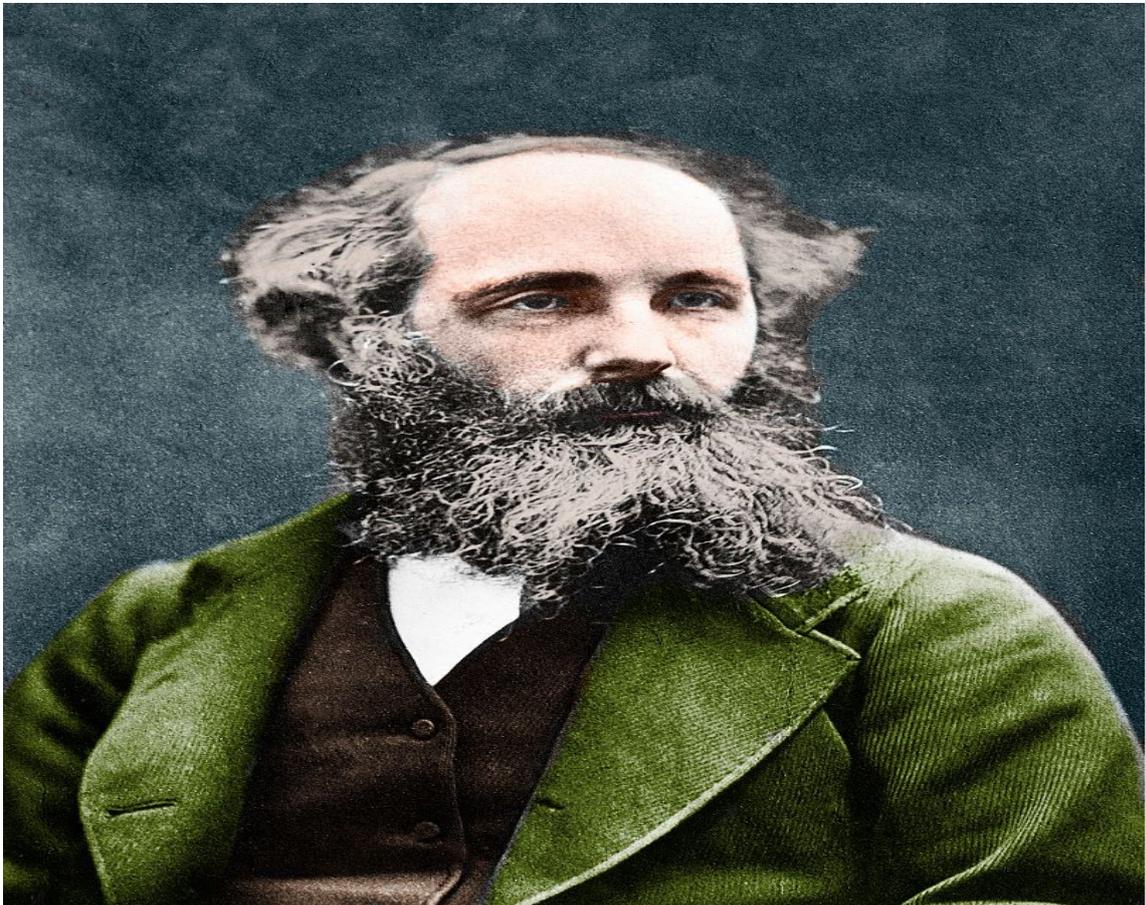
Examiné par le jury composé de :

Mr	H . YALA	Maitre de conférences - Univ. Béjaia	Encadreur
Mr	S . MAHTOUT	Professeur - Univ. Béjaia	Examineur
Mr	K . BOUFALA	Maitre de conférences - Univ. Béjaia	Examineur

Année universitaire: 2020/2021



**Joseph Fourier (1768-1830).**



**James Clerk Maxwell (1831-1879).**

## REMERCIEMENTS

Avant tous, je remercie Dieu le tout puissant de m'avoir accordé la santé, le courage, et la patience pour accomplir ce travail qui a été effectué au sein du département de physique de l'université de Béjaia.

Je tiens tout particulièrement à remercier chaleureusement Monsieur **H.YALA**, Maître de Conférences à l'université de Béjaia, d'avoir accepté de m'encadrer, ainsi que pour son aide, sa disponibilité, ses précieux conseils, pour tous ses efforts afin de réaliser ce travail.

J'exprime ma profonde reconnaissance à Monsieur **S.MAHTOUT**, Professeur à l'université de Béjaia, et à Monsieur **K.BOUFALA**, Maître de Conférences à l'Université de Béjaia, pour l'intérêt qu'ils ont bien voulu porter à ce travail en acceptant d'en être examinateurs.

Je désire remercier vivement Monsieur **A.HOUARI**, Professeur à l'université de Béjaia, pour sa disponibilité et ses bons conseils tout au long de cette formation.

Je présente également ma gratitude à mes parents, tous mes amis, et tous les membres de ma famille qui m'ont soutenus durant l'accomplissement de ce travail.

En fin, j'adresse mes remerciements à tous ceux qui m'ont aidé et encouragé de près ou de loin à mener à terme ce travail.

## **DÉDICACES**

Á la mémoire de mon grand-père,

Á la mémoire de mon cousin,

Á mes chers parents,

Á toute ma famille (cousins et oncles),

Á mes chers amis,

Pour que je n'oublie de citer personne, je dédie ce travail à tous les membres de mon village.

<b>Liste des figures</b>	<b>VII</b>
<b>Introduction Générale</b>	<b>1</b>
<b>1 Outils théoriques sur les réseaux de diffraction</b>	<b>5</b>
1.1 Équations de Maxwell . . . . .	5
1.2 Équations constitutives . . . . .	6
1.3 Équations de Maxwell en régime harmonique . . . . .	7
1.3.1 Régime temporel . . . . .	7
1.3.2 Régime harmonique . . . . .	7
1.4 Équations de propagation du champ électromagnétique : . . . . .	8
1.5 Relations de passage . . . . .	9
1.6 Énergie électromagnétique . . . . .	10
1.6.1 Le flux du vecteur de Poynting . . . . .	10
1.6.2 Le vecteur de Poynting : . . . . .	10
1.7 Réseaux multicouches . . . . .	11
1.7.1 Diffraction classique et diffraction conique . . . . .	12
1.7.2 Polarisation TE et TM . . . . .	12
1.7.3 Développement de Rayleigh . . . . .	13
1.7.4 Efficacité de diffraction . . . . .	15
1.8 Absorption . . . . .	17
1.9 Conclusion . . . . .	17
<b>2 La méthode modale de Fourier</b>	<b>18</b>
2.1 Description du problème : . . . . .	19
2.2 Méthode modale de Fourier . . . . .	20
2.2.1 Cas transverse électrique (TE) . . . . .	21

2.2.2	Cas transverse magnétique (TM) . . . . .	27
2.3	Convergence de la FMM en polarisation TM . . . . .	28
2.3.1	Règles de factorisation de Fourier . . . . .	28
2.4	Calcul des amplitudes des champs diffractés : . . . . .	30
2.4.1	Conditions de continuité du champ EM . . . . .	30
2.5	Approche de la matrice S . . . . .	32
2.5.1	Algorithme de la matrice S . . . . .	33
2.5.2	Combinaison des matrices S . . . . .	34
2.6	Conclusion . . . . .	35
2.7	APPLICATIONS NUMÉRIQUES . . . . .	36
	<b>Conclusion Générale</b>	<b>42</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>47</b>

## LISTE DES FIGURES

1.1	Schéma simplifié d'une surface séparant deux milieux différents. . . . .	9
1.2	Exemple d'un réseau multicouche de périodicité 1D . . . . .	11
1.3	(a) polarisation TE et (b) polarisation TM. . . . .	12
2.1	Subdivision du réseau en couches suivant ( $Oy$ ). Chaque couche à une épaisseur $h_q = y_{q+1} - y_q$ ( <i>staircase approximation</i> ). . . . .	20
2.2	Convergence de l'efficacité de diffraction du réseau binaire métallique en polarisation TM. . . . .	36
2.3	Représentation schématique du réseau lamellaire. Une onde plane incidente ( $\Delta$ ) sur le réseau périodique donne naissance aux différents ordres de diffraction en réflexion ( $R_n$ ) et en transmission ( $T_n$ ). . . . .	37
2.4	Convergence des ordres de diffraction $R_{-1}$ et $T_{-1}$ . $\theta = 30^\circ$ , $d = \lambda$ , $\epsilon_r = (0.2 + 6.7j)^2$ , $\epsilon_i = \epsilon_t = 1$ . . . . .	38
2.5	Efficacités de diffraction en fonction de la longueur d'onde . . . . .	38
2.6	Distribution spatiale de l'intensité du champ magnétique . . . . .	39
2.7	Distribution spatiale de l'intensité du champ électrique $E_x$ . . . . .	39
2.8	Expérience des fontes de Young. . . . .	40
2.9	Guide d'onde gravé. . . . .	40
2.10	Excitation par le monomode d'un guide d'onde. . . . .	41
2.11	Incidence gaussienne sur un dioptre plan . . . . .	41

# INTRODUCTION GÉNÉRALE

Depuis plus de vingt ans, la photonique bénéficie à la fois des techniques de micro et nano-fabrication développées par l'industrie de la micro-électronique [47], et des progrès des processus de synthèse chimique et biochimique. C'est ainsi que les composants optiques et opto-électroniques incluent des micro et nano-structures à la géométrie de plus en plus complexe et de mieux en mieux contrôlée. Cet essor de la nano-photonique [49] s'est accompagné d'un accroissement des besoins en calcul électromagnétique des propriétés optiques de micro et nano-structures [62, 66, 68].

La lumière étant une onde électromagnétique, sa propagation, aussi bien dans le vide que dans un milieu structuré, est gouvernée par les équations de Maxwell. Jusqu'à l'avènement des micro et nanotechnologies [46], il était plutôt rare que l'opticien ait besoin de résoudre ces équations dans toute leur généralité. Comme la taille des structures considérées était nettement plus grande ou plus petite que la longueur d'onde, la propagation, la diffraction et la diffusion de la lumière pouvaient être décrites de façon précise en introduisant des approximations conduisant par exemple à l'optique géométrique, à l'optique de Fourier [59] ou aux théories d'homogénéisation.

Les premiers travaux sur l'élaboration de méthodes numériques pour résoudre les équations de Maxwell ont été réalisés pour les radio-fréquences [7, 63] et les micro-ondes [61], en parallèle des premiers développements de l'informatique. Les opticiens se sont tournés vers les méthodes numériques dans les années 60 puis 70 pour l'étude des guides d'onde, des réseaux de diffraction pour la spectroscopie ou des réseaux coupleurs pour l'optique intégrée [20]. Le développement et la démocratisation des méthodes numériques sont ensuite allés de pair avec l'essor de l'informatique et l'accroissement considérable des puissances de calcul. La simulation numérique occupe aujourd'hui une place importante dans la phase de conception de composants photoniques. Elle apporte une aide majeure à l'opticien pour concevoir et optimiser de

nouvelles micro et nano-structures aux propriétés optiques originales en évitant de multiples fabrications coûteuses.

Il existe actuellement de nombreuses méthodes numériques permettant de résoudre les équations de Maxwell. Certaines sont basées sur des algorithmes génétiques [17] de résolution d'équations aux dérivées partielles comme la méthode des différences finies [9], et la méthode des éléments finis [6], et permettent de traiter n'importe quelle géométrie, alors que d'autres sont au contraire plus spécifiques et ne s'appliquent qu'à un seul type de problème. Cependant, les problèmes électromagnétiques de conception et d'analyse sont traités dans les domaines temporels et fréquentiels .

Les méthodes temporelles résolvent les équations de Maxwell en fonction des variables d'espace et de temps et permettent de suivre l'évolution du champ électromagnétique au cours du temps quel que soit son contenu fréquentiel . Par exemple, la méthode FDTD (*Finite-Difference-Time-Domain*) est l'une des plus répandues . Cette méthode est générale et fournit des solutions exactes , mais lente et très consommatrice en taille mémoire .

Les méthodes fréquentielles considèrent quant à elles des champs électromagnétiques monochromatiques. Le temps disparaît des équations au profit de la fréquence de l'onde et la résolution se fait fréquence par fréquence en fonction des seules variables d'espace . Là encore , nombreuses possibilités existent . Une première famille regroupe les méthodes basées sur la discrétisation des trois dimensions de l'espace comme les différences finies ou la méthode des éléments finis (FEM). Cette dernière possède l'avantage de pouvoir traiter des formes géométriques complexes sans avoir besoin d'approcher la géométrie par des marches d'escalier. Cependant, elle nécessite une discrétisation de tout l'espace, ce qui s'avère vite très gourmande en mémoire vive et en temps de calcul pour des problèmes tridimensionnels, voir même bidimensionnels.

Une autre famille de méthodes fréquentielles exploite la périodicité du système en développant les champs électromagnétiques en séries de Floquet-Fourier. Autrement dit, la discrétisation, en couches d'épaisseurs plus ou moins homogènes, se fait uniquement suivant la direction perpendiculaire aux direction de périodicité. Suivant cette direction, les équations peuvent être intégrées soit numériquement, c'est le cas de la méthode différentielle, soit analytiquement (problème aux valeurs et vecteurs propres), c'est le cas de la méthode modale de Fourier (FMM), également appelée (RCWA) (*Rigorous Coupled Wave Analysis*). C'est cette méthode qui nous intéresse dans ce travail. Celle-ci se distingue par sa simplicité de mise en œuvre, son efficacité et la rapidité des codes de calcul qui en sont issus. La précision de la solution

dépend uniquement du nombre de termes retenus dans le développement en séries de Fourier des champs. Sans oublier le critère de la convergence et la satisfaction de la conservation d'énergie. C'est une méthode rigoureuse et physique, qui permet, pratiquement, de suivre la répartition de l'énergie entre les différents modes de la structure. Toutes ces caractéristiques ont fait de la FMM l'une des méthodes les plus populaires et utiles dans les communautés scientifiques dans le domaine d'optique diffractive.

Ce mémoire est divisé en deux chapitres :

Le premier chapitre consiste en un rappel sur les notions de base de l'électromagnétisme et de la photonique. Ce sont des outils théoriques nécessaires pour la compréhension et la mise en œuvre de la FMM.

Dans le deuxième chapitre, nous avons exposé en détail la FMM. Nous avons appliqué cette méthode pour résoudre les équations de Maxwell dans plusieurs cas, considérés plus ou moins pédagogiques. Le problème consiste en la recherche des amplitudes des champs diffractés ( $T$  et  $R$ ) et les efficacités de diffraction de tous les ordres propagatifs.

## Revue historique de la FMM

Pour la toute première fois, Lord Rayleigh a tenté d'expliquer l'anomalie de Wood [67] en calculant analytiquement l'amplitude des différents ordres de diffraction en 1907 [56]. Dans son modèle, il a utilisé une méthode d'expansion modale pour définir les champs. Cependant, il a limité son analyse au cas de la polarisation TE.

Les origines de la FMM reviennent aux années 1960 lorsque Tamir [65] a analysé les structures stratifiées sinusoïdales de la permittivité diélectrique en polarisation TE. Yeh [71] s'est particulièrement intéressé au calcul du TM de ces réseaux. Burckhardt [4] est le premier qui a tenté d'analyser rigoureusement la diffraction sur un hologramme épais avec une structure de réseau périodique. Il a supposé que le réseau avait un profil sinusoïdal. Il a utilisé l'expansion de Fourier et le théorème de Floquet pour représenter le champ électromagnétique à l'intérieur du réseau. Il a résolu séparément les cas de polarisation TE et TM. Une dérivation similaire a été faite par Kogelnik [25] en 1969, mais il a travaillé avec plus d'approximations. En 1973, Kaspar [22] a étendu la théorie de Burckhardt aux réseaux unidimensionnels périodiques quelconques. Il a également introduit la constante diélectrique complexe pour le traitement des réseaux absorbants. Deux ans plus tard, Peng [50] a résolu différents types de profils du réseau (sinusoïdal, rectangulaire, incurvé) pour un réseau multicouche et a discuté de plusieurs types de méthodes de propagation matricielle pour adapter les champs aux interfaces. Magnusson et Gaylord [37] ont étendu la méthode de Kogelnik à des conditions plus générales pour décrire les propriétés de diffraction des réseaux épais, ils ont prouvé que la méthode des ondes couplées est équivalente à la méthode modale lorsqu'elle inclut tous les ordres de diffraction et conserve

les dérivées secondes du champ EM [36, 37]. Plus tard, Knop [23] a appliqué la méthode aux réseaux en relief-surfaces rectangulaires.

Les fondateurs du la FMM moderne (ou dans leurs termes, RCWA) sont Moharam et Gaylord [43]. Ils ont généralisé le concept d'onde plane et utilisé la FMM pour analyser le comportement des réseaux de transmission et de réflexion. Ils ont comparé leur méthode aux théories modales approximatives qui existaient à l'époque et ont trouvé une convergence bonne et rapide de leurs résultats. La FMM a été formulée comme représentation de l'espace d'état, ou en termes modernes, dans le domaine de fréquence.

En 1982, Moharam [41] a utilisé une approximation en escalier pour simuler la diffraction de réseaux à relief de surface. En outre, Moharam et Gaylord ont publié un guide pour implémenter la RCWA d'une manière numériquement stable en 1995 [40]. Ils ont étendu leur formulation à la diffraction TE, TM et conique [42], et ont analysé la convergence de la méthode par rapport aux efficacités de diffraction.

Plus tard, Li [35] a souligné que le problème de convergence dans le cas de la polarisation TM était dû à la façon incorrecte d'utiliser l'expansion de Fourier pour la fonction de permittivité. En 1996, indépendamment l'un de l'autre, Lalanne et Morris [26] ainsi que Granet et Guizal [13] ont découvert empiriquement un moyen de surmonter ce problème pour le cas unidimensionnel. Cette méthode est aujourd'hui connue sous le nom de règles correctes de factorisation de Fourier (ou règles généralisées de Laurent). Li a démontré en termes mathématiques la raison pour laquelle les implémentations numériques proposés dans [13] et [26] améliorent le problème de la convergence. Li a fourni une description détaillée sur leur utilisation dans l'article [31]. Il a également ajouté un formalisme pour le traitement des réseaux croisés bidimensionnels [32], ainsi que la modélisation des réseaux anisotropes et double périodiques [34, 73]. Depuis lors, plusieurs améliorations sur la méthode ont été effectuées [14, 48].

## OUTILS THÉORIQUES SUR LES RÉSEAUX DE DIFFRACTION

En s'appuyant sur les travaux théoriques et expérimentaux de ses prédécesseurs (Faraday, Ampère, Gauss, ...etc.), J.C. Maxwell a réussi à construire une théorie unifiant les champs électrique et magnétique en régime variable [39]. Cette théorie est nommée électrodynamique classique [21] ou tout simplement électromagnétisme. Les équations de Maxwell, au nombre de quatre, sont des lois fondamentales de la physique. Elles constituent les postulats de base de cette théorie. Elles donnent ainsi un cadre mathématique précis, solide et cohérent à la notion du champ électromagnétique.

Dans ce travail, le domaine auquel nous nous intéressons est la nano-optique. Bien que les dimensions qui interviennent sont de l'ordre de la longueur d'onde, il faut noter que l'électrodynamique classique de Maxwell est largement suffisant pour décrire les phénomènes de diffraction et de propagations du champ EM, sans recourir justement à la théorie quantique du champ.

En fin, le but de ce chapitre est de rappeler les notions de base de l'électrodynamique classique ainsi que la diffraction du champ électromagnétique par des réseaux périodiques. Ces notions sont très utiles pour décrire et comprendre la méthode modale de Fourier (FMM), à laquelle nous nous intéressons dans ce mémoire.

### 1.1 Équations de Maxwell

Initialement, en 1861, Maxwell [38] a publié un ensemble de vingt équations, qui résumaient les connaissances sur l'électricité et le magnétisme à cette époque. Il a ainsi pu prouver l'interconnexion entre les deux domaines et a proposé que la lumière soit une combinaison d'ondes électriques et magnétiques s'influçant mutuellement. Plus tard, Heaviside [15] et, simulta-

nément, Gibbs [12] et Hertz [16] ont condensé les équations sous la forme actuelle de quatre seulement, en utilisant la notation vectorielle. Leur forme différentielle est :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \frac{-\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{équation M-F} \quad (1.1)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} \quad \text{équation M-A} \quad (1.2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad \text{équation M-G} \quad (1.3)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{équation de flux} \quad (1.4)$$

Les grandeurs ( $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{D}$ ,  $\vec{H}$ ) sont des champs vectoriels :

- $\vec{E}$  : le champ électrique .
- $\vec{B}$  : l'induction magnétique .
- $\vec{D}$  : l'induction électrique
- $\vec{H}$  : le champ magnétique .

$\rho$  et  $\vec{J}$  sont respectivement les densités de charge et de courant des porteurs de charges libres du milieu matériel considéré.  $\rho = 0$  et  $\vec{J} = 0$  dans le vide ou en absence de charges et de courant.

Il est à noter que le système d'équations précédent peut se réduire au deux équations vectorielles (1.1) et (1.2), car les deux autres équations scalaires (1.3) et (1.4) peuvent être déduites des deux premières en utilisant l'identité  $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{V}) = 0$  qui est valable quelque soit le champ  $\vec{V}$ .

## 1.2 Équations constitutives

Aux équations de Maxwell précédentes, il faut ajouter les équations constitutives. Ces dernières caractérisent les différents milieux matériels constituant le domaine considéré. Donc, elles ne sont pas fondamentales mais spécifiques et relatives à un milieu donné.

Dans notre cas, milieu linéaire, homogène et isotrope, les relations entre les champs et leurs inductions sont données par les expressions simples suivantes :

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \quad (1.5)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H} \quad (1.6)$$

$\epsilon_r$  et  $\mu_r$  sont respectivement la permittivité et la perméabilité relatives du milieu. Dans le vide,  $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} F/m$  et  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} H/m$

### **Remarques :**

- Dans le cas des milieux anisotropes  $\epsilon_r$  et  $\mu_r$  ne sont pas des constantes mais des tenseurs d'ordre  $(3 \times 3)$  [2].

- Dans l'équation de Maxwell-Ampère (1.2), le premier terme du deuxième membre représente le courant de déplacement. C'est ce terme qu'a ajouté Maxwell pour que ses équations soient compatibles avec l'équation de continuité en régime variable (conservation de la charge) :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (1.7)$$

## 1.3 Équations de Maxwell en régime harmonique

Les équations de Maxwell décrivent l'évolution du champ électromagnétique dans l'espace et dans le temps. La résolution analytique de ces équations est très rare. Cependant, avec l'avènement des ordinateurs et le développement de l'informatique, des méthodes numériques très précises ont été élaborées pour résoudre ces équations décrivant des phénomènes qui, autrefois, paraissaient impossibles à résoudre. Ces méthodes peuvent être classées dans deux grandes catégories ; celles qui travaillent dans l'espace direct (méthodes temporelles) et celles qui travaillent dans l'espace de Fourier (méthodes fréquentielles).

### 1.3.1 Régime temporel

Dans ce domaine, on étudie l'évolution du champ électromagnétique au cours du temps. La méthode numérique la plus utilisée dans ce cas est la méthode des différences finies dans le domaine temporel (FDTD, Finite Difference Time Domain method en Anglais) [64].

### 1.3.2 Régime harmonique

Dans ce régime, on considère que toutes les quantités électromagnétiques vibrent avec la même fréquence  $\nu$  qui est reliée à la pulsation  $\omega$  par la formule :  $\omega = 2\pi\nu$ . Dans ce domaine fréquentiel, les méthodes les plus utilisées sont la méthode des éléments finies (FEM pour Finite Element Method) et les méthodes modales, telles que la méthode modale de Fourier (FMM pour Fourier Modal Method) connue également par RCWA (Rigorous Coupled Wave Analysis) [23, 41, 43]. C'est cette dernière méthode (FMM) qui nous intéresse et que nous allons développer dans ce travail.

**Remarque :**

La convention temporelle utilisée dans ce travail est :  $e^{-j\omega t}$ . Cela permet d'écrire le champ EM sous la forme :  $\Psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r})e^{-j\omega t}$ . Avec cette notation, on peut réécrire les équations de Maxwell où on remplacera l'opérateur de différentiation temporel comme suit :  $\frac{\partial}{\partial t} = -j\omega$ . Ce qui conduit à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = j\omega \vec{B} \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{H} = -j\omega \vec{D} + \vec{J} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \end{array} \right. \quad (1.8)$$

## 1.4 Équations de propagation du champ électromagnétique :

En prenant le rotationnel de l'équation de Maxwell-Faraday et en remplaçant l'expression du champ  $\vec{H}$ , donnée par l'équation de Maxwell-Ampère, on obtient l'équation de propagation du champ électrique  $\vec{E}$  dans sa forme la plus générale :

$$\vec{\nabla} \wedge \left( \frac{1}{\mu_r} \vec{\nabla} \wedge \vec{E} \right) - k_0^2 \epsilon_r \vec{E} = j\omega \mu_0 \vec{J} \quad (1.9)$$

De même, en utilisant les deux équations citées précédemment, on obtient pour le champ magnétique :

$$\vec{\nabla} \wedge \left( \frac{1}{\epsilon_r} \vec{\nabla} \wedge \vec{H} \right) - k_0^2 \mu_r \vec{H} = \vec{\nabla} \wedge \vec{J} \quad (1.10)$$

$k_0 = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0}$  est le vecteur d'onde dans le vide.  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$  est la vitesse de la lumière dans le vide.

Dans le cas d'un milieu uniforme, en utilisant l'identité  $\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{V}) = \vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \vec{V} - \vec{\nabla}^2 \vec{V}$ , les équations précédentes prennent les formes suivantes :

$$\Delta \vec{E} + k^2 \vec{E} = \vec{\nabla} \left( \frac{\rho}{\epsilon} \right) + j\omega \mu \vec{J} \quad (1.11)$$

$$\Delta \vec{H} + k^2 \vec{H} = -\vec{\nabla} \wedge \vec{J} \quad (1.12)$$

Où  $k = k_0 n$  est le vecteur d'onde du milieu avec  $n = \sqrt{\mu_r \epsilon_r}$ , l'indice de réfraction correspondant.

Dans ces équations, les membres gauches représentent la propagation du champ EM et les

termes de droites sont à l'origine de celui-ci, ce sont les termes sources.

En absence de charges et de courants, les équations (1.11) et (1.12) prennent la forme combinée suivante :

$$(\Delta + k^2)\vec{\psi} = \vec{0} \quad \text{Avec} \quad \psi \equiv (\vec{E}, \vec{H}) \quad (1.13)$$

Cette équation est vérifiée par toutes les composantes du champ EM,  $(\vec{E}, \vec{H})$ .

La solution la plus utilisée pour ces équations est l'onde plane donnée par :

$$\vec{\psi} = \vec{\psi}_0 e^{j\vec{k} \cdot \vec{r}}$$

Avec  $\vec{r}$ , le vecteur position du point où l'onde est observée.

L'intérêt de ce choix est que les ondes planes peuvent servir comme base pour projeter le champ EM de la structure (les modes de la structure).

## 1.5 Relations de passage

Au passage d'une interface séparant deux milieux distincts, Fig. (1.1), le champ EM, solution des équations de Maxwell, doit vérifier des conditions aux limites ou de continuité sur cette interface. Ces conditions sont résumées par l'ensemble d'équation suivantes [3] :

$$\vec{n} \wedge (\vec{E}_{\Omega_1} - \vec{E}_{\Omega_2}) = \vec{0} \quad (1.14)$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{D}_{\Omega_1} - \vec{D}_{\Omega_2}) = \rho_{\Sigma} \quad (1.15)$$

$$\vec{n} \wedge (\vec{H}_{\Omega_1} - \vec{H}_{\Omega_2}) = \vec{J}_{\Sigma} \quad (1.16)$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{B}_{\Omega_1} - \vec{B}_{\Omega_2}) = 0 \quad (1.17)$$

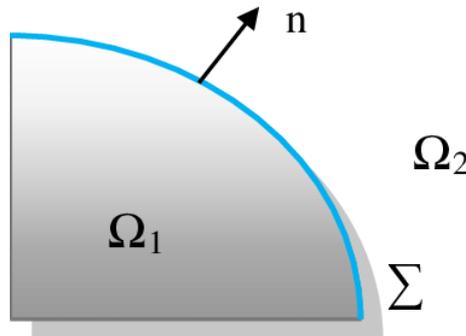


FIGURE 1.1 – Schéma simplifié d'une surface séparant deux milieux différents.

$\rho_\Sigma$  et  $\vec{J}_\Sigma$  représentent respectivement les densités de charges et de courants sur l'interface qui sépare les deux milieux.  $\vec{n}$  est le vecteur unitaire normale à l'interface  $\Sigma$ .

En absence de courant, les équations aux limites précédentes montrent que les composantes tangentielles du champ électromagnétique ( $\vec{E}, \vec{H}$ ) sont toujours continues. Ce n'est pas le cas pour les composantes normales même en l'absence de charges et de courant.

## 1.6 Énergie électromagnétique

Dans un milieu matériel, l'équation de conservation de l'énergie s'écrit :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{P} + \vec{E} \cdot \vec{J} = 0$$

Où :  $U = \frac{1}{2}\epsilon E^2 + \frac{1}{2\mu} B^2$  est la densité volumique de l'énergie électromagnétique.

$\vec{E} \cdot \vec{J}$  est l'énergie cédée par l'onde au milieu matériel (énergie dissipée).

$\vec{P} = \vec{E} \wedge \vec{H}$  est le vecteur de Poynting [54] (Vecteur densité de courant d'énergie électromagnétique). C'est cette grandeur qui nous intéresse, car son flux donne la puissance transportée par l'onde.

### 1.6.1 Le flux du vecteur de Poynting

Le flux du vecteur de Poynting à travers une surface ( $\Sigma$ ) représente la quantité d'énergie traversant celle-ci par unité de temps et de surface (puissance transmise). Il est donné par l'expression suivante :

$$\Phi = \int_{(\Sigma)} \vec{P} \cdot \vec{n} d\Sigma = \int_{(\Sigma)} \vec{P} \cdot \vec{d\Sigma} \quad (1.18)$$

Où  $\vec{n}$  est le vecteur normal à la surface  $\Sigma$ .

### 1.6.2 Le vecteur de Poynting :

En régime harmonique, représentation complexe, le raisonnement se fait sur les valeurs moyennes, calculées sur une période, plutôt que sur les valeurs instantanées. Le vecteur Poynting complexe est défini par :

$$\vec{P} = \frac{1}{2} (\vec{E} \wedge \vec{H}^*) \quad (1.19)$$

$\vec{H}^*$  est le complexe conjugué de  $\vec{H}$ .

En conséquence, la puissance moyenne traversant une surface  $\Sigma$  est alors donnée par le flux de la partie réelle du vecteur  $\vec{P}$  à travers celle-ci.

En coordonnées cartésiennes, le développement de l'équation (1.19) conduit au système ci-dessous :

$$\vec{P} = \frac{1}{2} \vec{E} \wedge \vec{H}^* = \begin{cases} P_x = \frac{1}{2} (E_y H_z^* - E_z H_y^*) \\ P_y = \frac{1}{2} (E_z H_x^* - E_x H_z^*) \\ P_z = \frac{1}{2} (E_x H_y^* - E_y H_x^*) \end{cases} \quad (1.20)$$

Il est à noter que ce système d'équations dépend du type de diffraction (classique ou conique) et de la polarisation (transverse électrique TE ou Magnétique TM dans le cas de la diffraction classique) considérés.

## 1.7 Réseaux multicouches

La figure (1.2) représente un exemple d'un réseau multicouche 1D, invariant suivant l'axe ( $Oz$ ) et périodique suivant l'axe ( $Ox$ ). Ce réseau est inhomogène suivant ( $Oy$ ). Suivant cette direction, le réseau est subdivisé en un certain nombre de sous couches d'épaisseurs données,  $h_q = y_{q+1} - y_q$  pour la sous couche  $q$ .

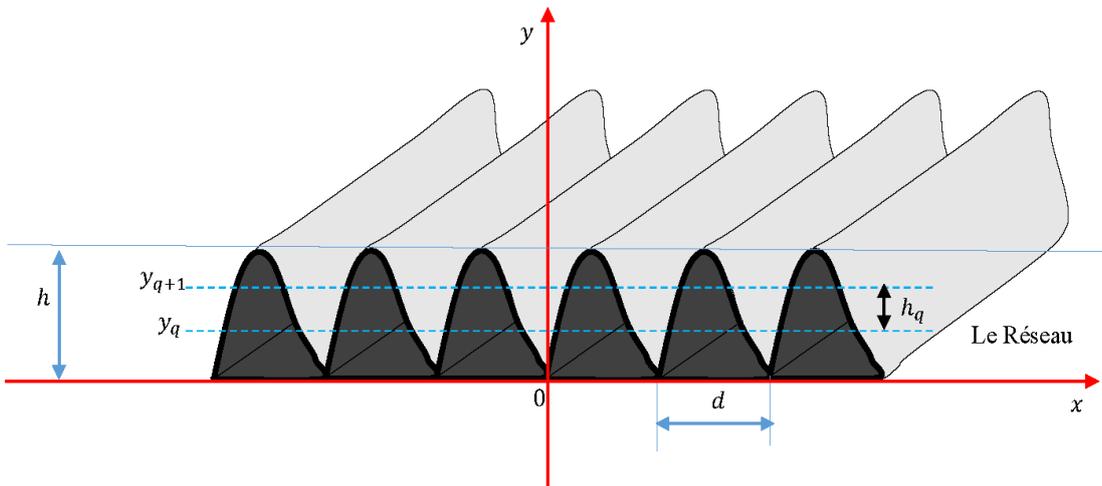


FIGURE 1.2 – Exemple d'un réseau multicouche de périodicité 1D

Chaque couche est constituée d'un milieu diélectrique, éventuellement métallique, linéaire et isotrope repéré par sa permittivité relative  $\epsilon_q$ .

**Remarque :**

Dans la suite de ce document, nous travaillerons en absence de charges et de courant. Dans le cas des métaux, la conductivité électrique sera intégrée dans la permittivité relative du milieu.

**1.7.1 Diffraction classique et diffraction conique**

On traite de classique le problème de diffraction dans le cas où le vecteur d'onde incident  $\vec{k}_i$  est perpendiculaire à la direction invariante du réseau, soit  $(Oz)$  cette direction ;  $\vec{k}_i = (k_x, k_y, 0)$

Dans le cas où le vecteur  $\vec{k}_i$  est quelconque, on dit alors que la diffraction est conique (ou bien incidence oblique) ;  $\vec{k}_i = (k_x, k_y, k_z)$  [28, 52].

Dans la suite de ce document, nous ne nous intéresserons qu'à la diffraction classique. Cette dernière est la plus utilisée, donc la plus importante, car, contrairement à la diffraction conique, elle permet deux modes de polarisation à savoir la polarisation transverse électrique (TE) et la polarisation transverse magnétique (TM).

**1.7.2 Polarisation TE et TM**

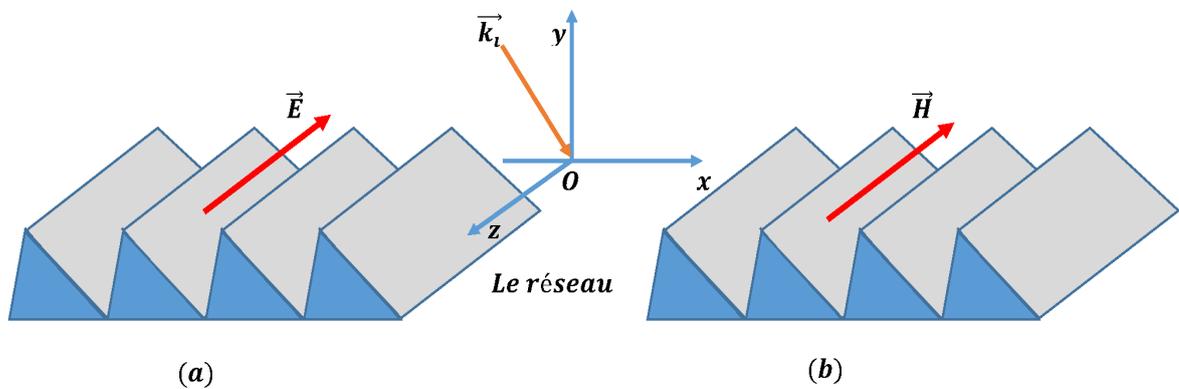


FIGURE 1.3 – (a) polarisation TE et (b) polarisation TM.

Le plan d'incidence est le plan défini par le vecteur d'onde incident  $\vec{k}_i$  et l'axe normal au réseau, ici  $(Oy)$ . Cette définition du plans d'incidence nous permet de définir deux types de polarisations, Fig.(1.3) :

\* Si le champ électrique est perpendiculaire au plan d'incidence, on parle de polarisation transverse électrique TE, ou s. Dans ce cas,  $\vec{E} = (0, 0, E_z)$  et le champ magnétique  $\vec{H}$  est dans le plan d'incidence,  $\vec{H} = (H_x, H_y, 0)$ .

\* Dans le cas où c'est le champ magnétique qui est perpendiculaire au plan d'incidence, la polarisation est dite transverse magnétique TM ou p. Ici,  $\vec{H} = (0, 0, H_z)$  et  $\vec{E} = (E_x, E_y, 0)$

### 1.7.3 Développement de Rayleigh

La première théorie électromagnétique permettant de calculer les efficacités de diffraction d'un réseau a été établie par J.W.S Rayleigh [55, 56] au début du siècle dernier. Cette théorie a pour but d'expliquer les anomalies de Wood [67]. Cependant, pour les milieux homogènes, le développement de Rayleigh fait apparaître une somme infinie d'ondes planes ; Le champ  $EM$  est exprimé par une série d'ondes planes montantes et descendantes. Ces ondes peuvent être propagatives ou évanescentes.

Le champ diffracté est défini comme étant la différence entre le champ totale et le champ incident. Il est donné par l'expression suivante[51] :

$$\psi_d(x, y) = \psi(x, y) - \psi_i(x, y) \quad (1.21)$$

$\psi$  représente  $E_z$  ou  $H_z$  selon la polarisation considérée, TE ou TM respectivement.

Considérons que le champ incident est une onde plane donnée par :  $\psi_i = e^{j(\vec{k}_i \cdot \vec{r})} = e^{j(\alpha_0 x + \beta_0 y)}$  [51].

L'onde plane incidente vérifie l'équation d'Helmholtz partout, donc le champ diffracté vérifie aussi cette équation, soit :

$$(\Delta + k_i^2) \psi_d = 0 \quad (1.22)$$

$k_i = k_0 n_i$  est le vecteur d'onde du milieu incident de composantes  $(\alpha_0, \beta_0)$ .

On montre que  $\psi_d$  est un champ pseudo-périodique [51]. Il a la même période que le réseau et vérifie les relations de continuité sur les interfaces et la condition de radiation quand  $y \rightarrow \infty$ . Il s'écrit :

$$\psi_d(x, y) = \phi(x, y) e^{j\alpha_0 x} \quad (1.23)$$

Avec  $\phi(x, y)$ , une fonction périodique de même période que le réseau :

$$\phi(x + d, y) = \phi(x, y)$$

Cette fonction est donc développable en série de Fourier :

$$\phi(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \phi_n(y) e^{jKnx} \quad (1.24)$$

$K = \frac{2\pi}{d}$  est le vecteur pulsation spatiale du réseau.

$\phi_n(y)$  représente les coefficients de la série de Fourier. Ils sont donnés par :

$$\phi_n(y) = \frac{1}{d} \int_0^d \phi(x, y) e^{-jKnx} dx$$

On remplace (1.24) dans (1.23), on aura :

$$\psi_d(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \phi_n(y) e^{j\alpha_n x} \quad (1.25)$$

Avec :

$$\alpha_n = \alpha_0 + nK \quad (1.26)$$

est l'expression de la fameuse formule des réseaux [74].

On remplaçant (1.25) dans l'équation d'Helmholtz (1.22) et en projetant sur la base  $e^{j\alpha_n x}$ , on trouve l'équation suivante, valable pour tout entier  $n$  :

$$\frac{d^2 \phi_n}{dy^2} + \beta_{i,n}^2 \phi_n = 0 \quad (1.27)$$

Avec :

$$\beta_{i,n}^2 = k_i^2 - \alpha_n^2 \quad (1.28)$$

Ce qui donne

$$\beta_{i,n} = \begin{cases} \sqrt{k_i^2 - \alpha_n^2} & \text{si } k_i \geq \alpha_n \\ j\sqrt{\alpha_n^2 - k_i^2} & \text{si } k_i < \alpha_n \end{cases} \quad (1.29)$$

La solution générale de l'équation (1.27) est une somme de deux ondes ; une montante et une

descendante. Elle s'écrit sous la forme :

$$\phi_n(y) = B_n e^{j\beta_{i,n}y} + R_n e^{-j\beta_{i,n}y} \quad (1.30)$$

Ces ondes sont nécessaires pour décrire le champ diffracté dans une couche délimitée dans l'espace comme celles constituant un réseau de diffraction. La région d'incidence est semi infinie. Dans ce cas, la condition de radiation implique que les coefficients  $B_n$  sont nuls. Par conséquent, dans cette région, le champ diffracté s'écrit sous la forme suivante :

$$\psi_d(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_n e^{j(\alpha_n x - \beta_{i,n} y)} \quad (1.31)$$

Cette expression a été établie pour la première fois par J.W.S. Rayleigh [56]. Pour cette raison, elle porte le nom de développement de Rayleigh.

Ainsi, l'expression du champ total dans la région d'incidence s'écrit :

$$\psi_i = e^{j(\alpha_0 x + \beta_0 y)} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_n e^{j(\alpha_n x - \beta_{i,n} y)} \quad (1.32)$$

En suivant la même procédure, on peut montrer que le champ dans la région de transmission ( $y > h$ ) est donné par l'expression :

$$\psi_t(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} T_n e^{j(\alpha_n x + \beta_{t,n} y)} \quad (1.33)$$

Avec :

$$\beta_{t,n}^2 = k_t^2 - \alpha_n^2 \quad (1.34)$$

Où  $k_t = k_0 n_t$  ;  $n_t$  est l'indice de réfraction dans le milieu de transmission.

### 1.7.4 Efficacité de diffraction

Les efficacités de diffraction sont définies comme le rapport de flux de vecteur de Poynting transporté par l'onde diffracté (réflexion ou bien transmission) , et le flux de vecteur de Poynting de l'onde incidente.

Dans la section (1.6.1) , on a parlé et définit le vecteur de Poynting et on a définit l'expression de ce vecteur ; ainsi que le flux , en particulier dans le régime harmonique. [voir l'équation

(1.19)]

La définition des efficacités de diffraction s'écrit mathématiquement comme suit :

$$e_n = \frac{\phi_n^d}{\phi_i} \quad (1.35)$$

$e_n$  représente  $r_n$  ou bien  $t_n$ , autrement dit, les efficacités de diffraction.

En remplaçant l'équation (1.19) dans (1.18), et on prend en considération l'invariance de réseau suivant l'axe (Oz) et sa périodicité selon l'axe (Ox), donc la variation du flux est suivant (Oy), donc on trouve que :

$$\phi_y = \frac{1}{2} \int_s \Re(E_z H_x^*) ds \quad \text{polarisation TE} \quad (1.36)$$

$$\phi_y = -\frac{1}{2} \int_s \Re(H_z E_x^*) ds \quad \text{polarization TM} \quad (1.37)$$

$\Re$  : La partie réelle.

En remplaçant les deux formules (1.36) et (1.37) dans (1.35) on aboutira :

$$r_n = \Re \left( \frac{R_n R_n^* \cos \theta_n^r}{\cos \theta_i} \right) \quad (1.38)$$

$$t_n = \Re \left( \eta_0 \frac{T_n T_n^* \cos \theta_n^t}{\cos \theta_i} \right) \quad (1.39)$$

Le coefficient  $\eta_0$  est défini comme suit :

$$\eta_0 = \begin{cases} 1 & \text{Polarisation TE} \\ \left( \frac{n_i}{n_t} \right)^2 & \text{Polarisation TM} \end{cases}$$

$R_n$  et  $R_n^*$  sont l'amplitude et l'amplitude conjugué respectivement, pareil pour  $T_n$  et  $T_n^*$ .

### 1.8 Absorption

L'efficacité de diffraction d'un ordre donné décrit la propagation d'une fraction de l'énergie incidente qui se propage dans cet ordre diffracté. Si le réseau n'est pas absorbant (permittivité diélectrique réelle), l'énergie incidente est égale à l'énergie réfléchie plus l'énergie transmise. C'est la loi de conservation de l'énergie :

$$\sum_n e_n = 1 \quad (1.40)$$

Si, par contre, le milieu considéré est absorbant (permittivité diélectrique possède une partie imaginaire, donc complexe), les pertes ou l'absorption ( $A$ ) se déduit de l'équation précédente par :

$$A = 1 - \sum_n e_n \quad (1.41)$$

### 1.9 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons rappelé les notions de base de la théorie électromagnétique classique (équation de Maxwell locales macroscopiques, les équations constitutives et les équations de propagation du champ électromagnétique, ainsi que la notion de l'énergie électromagnétique et le vecteur de Poyenting). Nous avons, également, évoqué les réseaux périodiques et les modes de polarisation TE et TM qu'on obtient dans le cas de la diffraction classique. Nous avons aussi rappelé le développement de Rayleigh, utilisé pour exprimer les champs électromagnétiques dans les régions homogènes d'incidence et de transmission. En fin, nous avons défini et exprimé les efficacités de diffraction pour les deux polarisations citées plus haut. Ce chapitre est donc considéré comme une introduction indispensable pour le chapitre suivant.

### Introduction

La méthode modale de Fourier (FMM pour Fourier Modal Method), également connue sous le nom de méthode rigoureuse des ondes couplées (RCWA pour Rigorous Coupled Wave Analysis) est une méthode fréquentielle [41, 43]. C'est une méthode rigoureuse, fiable [51] et très populaire, utilisée par les scientifiques et ingénieurs, pour résoudre les problèmes de propagation et de diffraction par des structures (réseaux) dont les dimensions sont à l'échelle de la longueur d'onde. Elle est dite rigoureuse car elle résout les équations de Maxwell dans toute leur généralité ; sans recourir, en effet, à des approximations. Elle est aussi populaire grâce à sa simplicité de mise en œuvre et aux temps d'exécutions des codes auxquels elle conduit qui sont très courts en les comparant à ceux des autres méthodes, telles que la FDTD [64, 70] et la FEM (Finite Element Method)[75, 76]. La FMM est une méthode numérique conçue spécialement pour les réseaux périodiques (la fenêtre de calcul est une période à 1D ou bi-périodique à 2D, selon le réseau étudié). La méthode ne discrétise pas l'espace de résolution comme c'est le cas pour les éléments finis ou la FDTD. La FMM utilise les séries de Fourier pour décrire le profil de la permittivité diélectrique (éventuellement la perméabilité)[4, 22, 23] et les séries de Fourier généralisées (Floquet-Fourier)[10, 11, 72] pour développer le champ électromagnétique (E, B) qui est considéré comme pseudo-périodique [51]. Les seules conditions que nous utilisons dans la FMM sont les conditions de continuité du champ EM à travers les surfaces de séparation de deux milieux ou couches et la condition de radiation stipulant que le champ doit être fini quand les coordonnées de l'espace tendent vers l'infini (dans la direction de propagation).

Dans le cas des réseaux finis dans l'espace (apériodiques)[27, 60], nous périodisons artificiellement (numériquement) le réseau en introduisant des couches absorbantes, type PML [1, 18].

Ces couches permettent d'avoir des périodes indépendantes les unes des autres. Toutefois, dans ce travail, nous nous limiterons notre étude à des réseaux périodiques.

Dans ce chapitre, Nous avons présenté en détail la méthode FMM. Pour bien comprendre le principe de cette méthode, nous avons utilisé l'exemple simple d'un réseau binaire de hauteur  $h$  et de période  $d$ , non magnétique  $\mu_r = 1$ , excité par une onde plane dans la direction  $(Oy)$  et polarisée TE. Les résultats obtenus sont facilement généralisables aux réseaux multicouches.

### 2.1 Description du problème :

Nous avons vu dans le chapitre précédent que le champ diffracté dans les régions semi-infinies d'incidence et de transmission est donné par le développement de Rayleigh . Donc , dans ces régions, le champ diffracté s'écrit :

$$\psi_r(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_n e^{j(\alpha_n x - \beta_{i,n} y)} \quad (2.1)$$

$$\psi_t(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} T_n e^{j(\alpha_n x + \beta_{t,n} y)} \quad (2.2)$$

$R_n$  et  $T_n$  sont les amplitudes des ordres diffractés de l'ordre  $n$ . Le problème consiste précisément à déterminer ces amplitudes. Pour cela, il faut résoudre les equations de Maxwell dans la zone modulée, i.e le réseau. En général, il n'y a pas de solutions analytiques fiables. Dans ce genre de problème, il faut résoudre les équations de Maxwell dans toutes leur généralité. Dans la littérature, plusieurs méthodes numériques ont été développées. Cependant, pour le problème de diffraction, la méthode FMM est l'une des méthodes les plus utilisées, car elle est simple, polyvalente, rapide et fiable.

Dans le cadre de cette méthode, la discrétisation se fait suivant l'axe de propagation  $(Oy)$ , voir Fig. (2.1). En plus des couches homogènes semi-infinies d'incidence et de transmission, le réseau est subdivisé en un ensemble  $N_c$  de couches d'épaisseur  $h_q = (y_{q+1} - y_q)$ ,  $(q = 1, 2 \dots N_c)$ . Il faut considérer que chaque couche est un nouveau milieu avec sa propre épaisseur et sa propre permittivité (éventuellement sa perméabilité). Dans chaque couche, il faut résoudre les équations de Maxwell. Les solutions obtenues sont écrites sous forme de modes. Ces derniers sont raccordés par la suite via l'algorithme de la matrice S (*S-matrix algorithm*) pour avoir les amplitudes  $R_n$  et  $T_n$ . Une fois ces amplitudes sont déterminées, les efficacités de diffractions sont directement déduites à partir des équations (1.38) et (1.39).

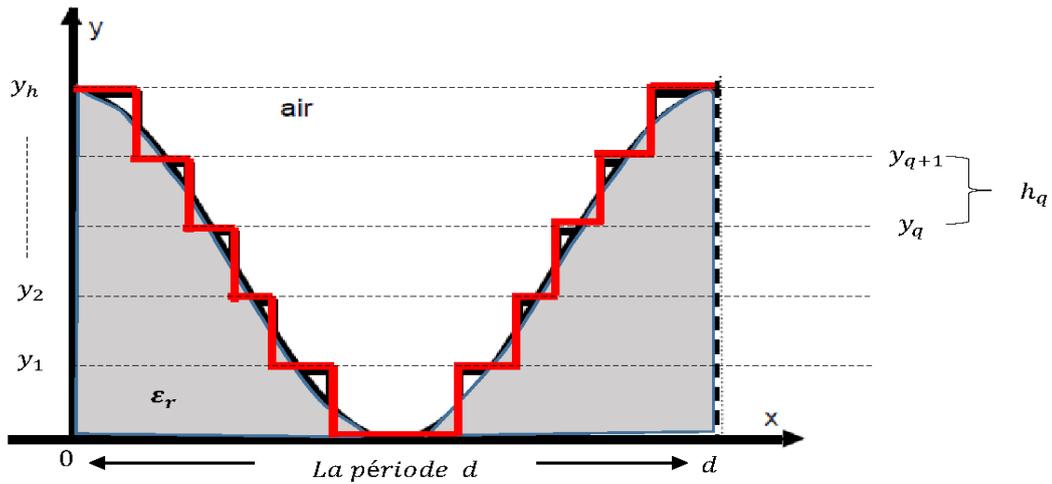


FIGURE 2.1 – Subdivision du réseau en couches suivant ( $Oy$ ). Chaque couche à une épaisseur  $h_q = y_{q+1} - y_q$  (staircase approximation).

## 2.2 Méthode modale de Fourier

En absence de charges et de courants, les équations de Maxwell-Faraday et Maxwell-Ampère s'écrivent respectivement :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (2.3)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2.4)$$

Dans le système cartésien, celles-ci impliquent six équations scalaires associées aux six composantes des champs  $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$ , et  $\vec{H} = (H_x, H_y, H_z)$ .

En régime harmonique et en utilisant la convention temporelle  $e^{-j\omega t}$ , la dérivée par rapport au temps  $\partial_t$  est remplacée dans ces équations par  $-j\omega$ .

Le développement des équations (2.3) et (2.4) donne naissance au système suivant :

$$\begin{cases} \partial_y E_z - \partial_z E_y = j\omega\mu_0 H_x \\ \partial_z E_x - \partial_x E_z = j\omega\mu_0 H_y \\ \partial_x E_y - \partial_y E_x = j\omega\mu_0 H_z \\ \partial_y H_z - \partial_z H_y = -j\omega\epsilon_0\epsilon_r E_x \\ \partial_z H_x - \partial_x H_z = -j\omega\epsilon_0\epsilon_r E_y \\ \partial_x H_y - \partial_y H_x = -j\omega\epsilon_0\epsilon_r E_z \end{cases} \quad (2.5)$$

En considérant le réseau invariant selon ( $Oz$ ), i.e.  $\partial_z = 0$ , et que la diffraction est classique ( $\vec{k}_i = (k_x, k_y, 0)$ ), le système 2.5 peut être scinder en deux groupes indépendants. Chaque groupe représente un cas de polarisation. En effet :

\* **Cas transverse électrique (TE),  $\vec{E} \parallel (Oz)$**

$$\begin{cases} \partial_y E_z = j\omega\mu_0 H_x \\ -\partial_x E_z = j\omega\mu_0 H_y \\ \partial_x H_y - \partial_y H_x = -j\omega\epsilon_0\epsilon_r E_z \end{cases} \quad (2.6)$$

\* **Cas transverse magnétique (TM),  $\vec{H} \parallel (Oz)$**

$$\begin{cases} -\partial_x H_z = -j\omega\epsilon_0\epsilon_r E_y \\ \partial_y H_z = -j\omega\epsilon_0\epsilon_r E_x \\ \partial_x E_y - \partial_y E_x = j\omega\mu_0 H_z \end{cases} \quad (2.7)$$

D'emblè, il y a lieu de noter que le cas de la polarisation TE est plus facile que celui de la polarisation TM. En effet, le problème de convergence de la FMM en TM a limité son utilisation pour longtemps. Ce n'est qu'une fois qu'on a découvert les règles de factorisation de Fourier adéquates [13, 26, 30] qu'on a pu surmonter ce problème.

### 2.2.1 Cas transverse électrique (TE)

A partir du système (2.6),  $H_x$  et  $H_y$  s'écrivent en fonction de  $E_z$  comme suit :

$$\begin{cases} H_x = \frac{1}{j\omega\mu_0} \partial_y E_z \\ H_y = -\frac{1}{j\omega\mu_0} \partial_x E_z \end{cases} \quad (2.8)$$

En reportant ces expressions dans la dernière équation du système (2.6), on trouve :

$$\partial_x^2 E_z + \partial_y^2 E_z = -k_0^2 \epsilon_r E_z \quad (2.9)$$

Avec  $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$ , le vecteur d'onde dans le vide.

Écrivons Maintenant les expressions donnant le champ total dans chaque région :

**\* Champ dans la région d'incidence, ( $y \leq 0$ ) :**

Dans la région d'incidence , le champ total est donné par :

$$E^{(1)}(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{j(\alpha_n x + \beta_{r,n} y)} \delta_{n0} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_n e^{j(\alpha_n x - \beta_{r,n} y)} \quad (2.10)$$

$$\delta_{n0} \text{ est le symbole de Kronecker ; } \delta_{n0} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\alpha_n$  et  $\beta_{r,n}$  sont les composantes du vecteur du milieu  $k_i$ , vérifiant la relation :

$$\alpha_n^2 + \beta_{r,n}^2 = k_i^2 \quad (2.11)$$

$\alpha_n$  est donné par la formule des réseaux.  $\beta_{r,n}$  se déduit à partir de l'équation (2.11) :

$$\beta_{r,n} = \begin{cases} \sqrt{k_i^2 - \alpha_n^2} & \text{si } k_i \geq \alpha_n \\ j\sqrt{\alpha_n^2 - k_i^2} & \text{si } k_i < \alpha_n \end{cases} \quad (2.12)$$

Avec :  $\Re(\beta_{r,n}) \geq 0$ , et  $\Im(\beta_{r,n}) \geq 0$  pour que les conditions d'ondes sortantes soient respecter.

**\* Champ dans la région de transmission, ( $y \geq h$ ) :**

Le champ diffracté dans la région de transmission est donné par le développement de Rayleigh (2.2). Cependant, pour des raisons de symétrie et de stabilité numériques, ce champ peut s'écrire sous la forme suivante :

$$E^{(3)}(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} T_n e^{j\beta_{t,n}(y-h)} e^{j\alpha_n x} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Delta'_n e^{-j\beta_{t,n}(y-h)} e^{j\alpha_n x} \quad (2.13)$$

Où  $\Delta'$  est un vecteur nul. les  $\beta_{t,n}$  se déduisent à partir du vecteur d'onde du milieu  $k_t$  de la même façon que les  $\beta_{r,n}$

**\* Champ dans la région modulée (le réseau), ( $0 \leq y \leq h$ ) :**

Dans cette région, le développement de Rayleigh n'est pas valide. La résolution des équations de Maxwell se fait donc numériquement. Dans ce travail, nous avons utilisé la méthode FMM. Dans le réseau, le champ est donné par le théorème de Floquet-Bloch [72]. C'est un champ pseudopériodique, donc développable en séries de Fourier généralisée :

$$E^{(2)}(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} E_n(y) e^{j\alpha_n x} \quad (2.14)$$

Ce champ doit vérifier l'équation d'Helmholtz (2.9), soit :

$$\Delta E^{(2)}(x, y) + k_0^2 \epsilon_r(x) E^{(2)}(x, y) = 0 \quad (2.15)$$

La permittivité du réseau est par définition périodique

$$\epsilon_r(x + d) = \epsilon_r(x)$$

Donc développable en série de Fourier :

$$\epsilon_r(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \epsilon_p e^{jK_p x} \quad (2.16)$$

Remarquons que le seconde terme de l'équation d'Helmholtz,  $\epsilon_r(x)E^{(2)}(x, y)$ , est un produit de deux séries de Fourier. Le produit se calcule comme suit :

$$\begin{aligned}\epsilon_r(x)E^{(2)}(x, y) &= \left( \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \epsilon_p e^{jKpx} \right) \left( \sum_{n=-\infty}^{+\infty} E_n(x, y) e^{j\alpha_n x} \right) \\ &= e^{j\alpha_0 x} \left( \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \epsilon_p e^{jKpx} \right) \left( \sum_{n=-\infty}^{+\infty} E_n(x, y) e^{jKnx} \right) \\ \epsilon_r(x)E^{(2)}(x, y) &= \sum_n \left( \sum_p \epsilon_{n-p} E_p \right)\end{aligned}\tag{2.17}$$

En remplaçant les équations (2.17) et (2.14) dans l'équation d'Helmholtz (2.15), on obtient :

$$\sum_n \left[ -\alpha_n^2 E_n + \frac{\partial^2 E_n}{\partial y^2} + k_0^2 \sum_p \epsilon_{n-p} E_p \right] e^{j\alpha_n x} = 0\tag{2.18}$$

La projection de cette équation sur la base  $(e^{j\alpha_n x})$  donne l'équation suivante, valable pour tout entier relatif  $n$  :

$$-\alpha_n^2 E_n + \frac{\partial^2 E_n}{\partial y^2} + k_0^2 \sum_p \epsilon_{n-p} E_p = 0; \quad \forall (n, p) \in \mathbb{Z}^2\tag{2.19}$$

L'équation (2.19) représente un système infini d'équations différentielles couplées . Ce système nous permet de trouver tous les harmoniques spatiales  $E_n(y)$  .

**Problème aux valeurs et vecteurs propres :**

Les séries de Fourier décrivant le champ électromagnétique et la permittivité du réseau sont infinies. Cependant, pour des raisons d'implémentation numérique, ces séries doivent être tronquer ; i.e  $n \in [-M, M]$ . Le nombre  $M$  est appelé nombre de troncature. Le nombre de termes de Fourier retenu est donc  $N = 2M + 1$ . En pratique, ce nombre  $M$  est déterminé en traçant la

courbe de convergence de la méthode.

Soit  $M$  l'ordre de troncature, i.e  $n, p \in [-M, M]$ . La composante dépendante de  $y$  du champ électrique est un vecteur colonne de  $N = 2M + 1$  valeurs :

$$\mathcal{E} = [E_{-M}, \dots, E_0, \dots, E_M]^T$$

Donc, le produit (2.17) s'écrit sous forme matricielle comme suit :

$$\sum_p \epsilon_{n-p} \mathbf{E}_p = \begin{bmatrix} \epsilon_0 & \dots & \epsilon_{-2M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \epsilon_{2M} & \dots & \epsilon_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{-M} \\ \vdots \\ E_M \end{bmatrix} = [|\epsilon|] \mathcal{E} \quad (2.20)$$

$[|\epsilon|]$  est la matrice de Toeplitz de la permittivité  $\epsilon_r$  ; chaque élément  $(i, j)$  de cette matrice représente la composante de Fourier  $(i - j)$  de la permittivité  $\epsilon_r$  .

L'équation (2.19) s'écrit alors sous forme suivante :

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}(y)}{\partial^2 y} = A_{TE} \mathcal{E}(y) \quad (2.21)$$

Où :

$$A_{TE} = \text{diag}(\alpha_n^2) - k_0^2 [|\epsilon|] \quad (2.22)$$

l'expression (2.21) est une écriture matricielle de l'équation différentielle (2.19). Le problème est ramené donc à celui du calcul des valeurs et vecteurs propres de la matrice  $A_{TE}$ .

Nous cherchons des solutions en ondes planes :

$$\mathcal{E}(y) = U_0 e^{Xy}$$

L'équation (2.21) implique :

$$A_{TE} \mathcal{E}(y) = X^2 \mathcal{E}(y) \quad \Rightarrow \quad A_{TE} = X^2$$

$A_{TE}$  est diagonalisable, donc :

$$A_{TE} = X^2 = PD^2P^{-1} \Rightarrow X = \pm PDP^{-1} \quad (2.23)$$

$P$  est la matrice contenant l'ensemble des vecteurs propres correspondant aux valeurs propres du vecteur  $D$ .  $P$  et  $D$  sont des matrices carrées de dimension  $N \times N$ , avec  $N = 2M + 1$ .

D'après (2.23), Deux solutions se présentent pour  $\mathcal{E}(y)$  :

$$\mathcal{E}_1(y) = Pe^{Dy}P^{-1}U_1 \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_2(y) = Pe^{-Dy}U_2P^{-1}$$

.

La dépendance en  $y$  de  $\mathcal{E}(y)$  est alors une combinaison linéaire de ces deux solutions ( $\mathcal{E}_1(y), \mathcal{E}_2(y)$ ) :

$$\mathcal{E}(y) = P \left( e^{Dy}U_1 + e^{-Dy}U_2 \right) P^{-1}$$

Qui peut s'écrire sous forme générale suivante :

$$\mathcal{E}(y) = P \left( e^{Dy}a + e^{-Dy}b \right). \quad (2.24)$$

$a$  et  $b$  sont les amplitudes des ondes montantes et descendantes dans les couches du réseau qui sont données par deux vecteurs colonnes comme suit :

$$a = [a_{-M} \dots a_0 \dots a_M]^T \quad \text{et} \quad b = [b_{-M} \dots b_0 \dots b_M]^T$$

En utilisant les équations (2.14) et (2.24), on peut écrire l'expression du champ dans la zone modulée sous une forme générale comme suit :

$$E^{(2)}(x, y) = \sum_n \left[ \sum_p P_{np} \left( a_p e^{D_p y} + b_p e^{-D_p y} \right) \right] e^{j\alpha_n x} \quad (2.25)$$

Les amplitudes  $a$  et  $b$  sont déterminées en utilisant la continuité des composantes électromagnétiques sur les interfaces des couches constituant le réseau.

Les composantes  $H_x$  et  $H_y$  du champ magnétique  $H$  ont même forme que celle du champ électrique  $E_z$ . Elles sont obtenues en remplaçant l'équation (2.25) dans le système d'équations (2.8), soit :

$$\begin{cases} H_x^{(2)}(x, y) = (j\omega\mu_0)^{-1} \sum_n [\sum_p P_{np} D_p (a_p e^{D_p y} - b_p e^{-D_p y})] e^{j\alpha_n x} \\ H_y^{(2)}(x, y) = -(j\omega\mu_0)^{-1} \sum_n (j\alpha_n) [\sum_p P_{np} (a_p e^{D_p y} + b_p e^{-D_p y})] e^{j\alpha_n x} \end{cases} \quad (2.26)$$

## 2.2.2 Cas transverse magnétique (TM)

Dans la section précédente, nous avons développé la *FMM* dans le cas de la polarisation *TE*. Dans cette section, Nous allons suivre un raisonnement analogue au précédent mais pour décrire le cas de la polarisation *TM*.

A partir du système d'équations (2.7),  $E_x$  et  $E_y$  s'expriment en fonction de  $H_z$  comme suit :

$$\begin{cases} E_x(x, y) = -(j\omega\epsilon_0)^{-1} \frac{1}{\epsilon_r} \partial_y H_z \\ E_y(x, y) = (j\omega\epsilon_0)^{-1} \frac{1}{\epsilon_r} \partial_x H_z \end{cases} \quad (2.27)$$

En reportant le système d'équations (2.27) dans la troisième équation du système d'équation (2.7), on tombe sur l'équation :

$$\vec{\nabla} \cdot \left[ \frac{1}{\epsilon_r(x)} \vec{\nabla} H_z(x, y) \right] + k_0^2 H_z(x, y) = 0 \quad (2.28)$$

Dans le réseau, les termes des harmoniques spatiales  $H_n$  de la composante  $H_z$  doivent vérifier l'équation différentielle suivante :

$$\frac{1}{\epsilon_r(x)} \sum_n \frac{d^2 H_n(y)}{dy^2} e^{j\alpha_n x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\epsilon_r(x)} \frac{\partial}{\partial x} \sum_n H_n(y) e^{j\alpha_n x} \right) - k_0^2 \sum_n H_n(y) e^{j\alpha_n x} \quad (2.29)$$

$\epsilon_r(x)$  est donnée par le développement de Fourier exprimé dans l'expression (2.16).

D'une manière analogue a celle de la section précédente, l'intégration de l'équation (2.29) se fait par le calcul des valeurs et vecteurs propres de la matrice  $A_{TM}$ , à priori par :

$$A_{TM} = [\epsilon_r] \left[ [\alpha] \left[ \frac{1}{\epsilon_r} \right] [\alpha] - k_0^2 I_d \right] \quad (2.30)$$

## 2.3 Convergence de la FMM en polarisation TM

Malheureusement, les résultats obtenus par cette formulation ont limité l'utilisation de la *FMM* pour longtemps. D'une part, les résultats obtenus convergent beaucoup plus lentement, d'autre part, l'étude des réseaux métalliques fait apparaître des instabilités numériques inexistantes dans le cas *TE* [45]. La raison de ce problème est attribué à la convergence lente des séries de Fourier de quelques composantes de champ dans le cas de la polarisation *TM* [35].

En 1996 et avec une approche empirique, Guizal et al [13] et Lalanne et al [26] proposaient une nouvelle formulation de l'expression 2.30. En effet, la formulation qu'ils ont proposées a permis d'améliorer notablement la convergence de la méthode [13, 26].

Au cours de la même année, Lifeng-Li [31] a complété les travaux cités en haut à partir d'une base mathématique solide. Il expliquait les règles à prendre en compte lors de l'utilisation des séries de Fourier en polarisation *TM*. Ces règles, nommées : règles de factorisation de Fourier, permirent par la suite d'étendre l'amélioration de la convergence de la *FMM* en polarisation *TM* [53].

Dans ce qui suit, nous allons essayer de décrire de façon simple les règles de factorisation de Fourier établies par Lifeng-Li [33].

### 2.3.1 Règles de factorisation de Fourier

Le problème principal de la mauvaise convergence de la *FMM* était dû au processus de la troncature. En effet, les équations sont rigoureuses lorsque le nombre des ordres de Fourier est infini. Cependant, en pratique et pour des raisons d'implémentations numériques, il faut se limiter à un nombre fini d'ordres. Malheureusement, cette troncature effectuée sur les séries de Fourier n'assure pas toujours la convergence de la méthode.

Pour résumer ces règles, considérons deux fonctions périodiques, bornées et continues par morceau notées  $f(x)$  et  $g(x)$ , on définit une nouvelle fonction  $h(x)$  comme étant le produit des deux fonctions précédentes ;  $h(x) = f(x)g(x)$ .

Dans ce cas , la règle de Laurent permet d'écrire les coefficients de  $h(x)$  notés  $h_n$  sous la forme :

$$h_n = \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} f_{n-p} g_p \quad (2.31)$$

Pour des raisons de simplifications, écrivons la formule précédente en notation matricielle. Désignons alors par  $[g]$  le vecteur construit par les composantes de  $g(x)$  , et par  $[|f|]$  la matrice de Toeplitz dont chaque élément  $(m,n)$  correspond au coefficient de Fourier  $f_{n-m}$ . Cela permet donc d'écrire l'expression précédente sous la forme :

$$[h] = [|f|][g] \quad (2.32)$$

Cette règle a été appliqué sans précaution pendant des années. En fait, elle constitue la cause principale de la mauvaise convergence dans le cas de la polarisation  $TM$ , et avait limité l'utilisation de la méthode  $FMM$  pour longtemps. Lifeng Li a su démontré mathématiquement les règles de factorisation de Fourier à respecter absolument dans le cas  $TM$  si on veut que ce problème de convergence soit évité ou surmonter. [31, 33].

**Résultats de Li :**

Toutes les difficultés viennent des points de discontinuité que peuvent avoir  $f$  et  $g$  en commun. Voici les résultats de Lifeng Li concernant ce problème :

- $h(x)$  peut être factorisé par la règle de Laurent si les deux fonctions  $f(x)$  et  $g(x)$  ne présentent pas des discontinuités aux même point .
- Si  $h(x)$  est continue tandis que  $f(x)$  et  $g(x)$  sont discontinues aux même point, il est alors plus adapté d'employer la règle inverse de Laurent [31] qui s'écrit sous forme matricielle comme suit :

$$[h] = [|\frac{1}{f}|]^{-1}[g] \quad (2.33)$$

- Si  $h(x)$  est discontinue et  $f(x)$  et  $g(x)$  sont aussi discontinues au même point, alors ni règle de Laurent, ni règle inverse de Laurent ne peut être appliquée.

Compte tenu de la deuxième règle de Li (la règle inverse de Laurent) et de la continuité des champs, la matrice  $A_{TM}$  s'écrit alors sous une forme légèrement différente à celle de (2.30). Sa nouvelle expression est donnée par :

$$A_{TM} = \left[ \frac{1}{\epsilon_r} \right]^{-1} \left[ [\alpha][\epsilon_r]^{-1}[\alpha] - k_0^2 I_d \right] \quad (2.34)$$

Cette equation a été établie par [13, 26] dans le cas des réseaux lamellaires . On note que les expression (2.30) et (2.34) sont strictement équivalentes pour un nombre infini d'ordres de Fourier, mais l'application de la règle inverse de Laurent assure une meilleure convergence pour la cas de la polarisation  $TM$  . Notons que la formule correspondante en polarisation  $TE$  est inchangée .

Cette nouvelle formulation a permis une amélioration drastique des performances de la  $FMM$  ; les problèmes rencontrés initialement ont été résolus grâce aux travaux de [13, 26] et [31]. La  $FMM$  est aujourd'hui une méthode numérique fiable et largement utilisée. Elle est appliquée au calcul de diagramme de bonde des cristaux photoniques[68, 69], ainsi qu'au calcul de la diffraction par des réseaux croisés[32].

## **2.4 Calcul des amplitudes des champs diffractés :**

Après la détermination des vecteurs et des valeurs propres (modes propres) partout , le problème se réduit à la détermination des amplitudes des modes .Nous devons résoudre le problème pour les inconnus : (R,T,a,b). L'implémentation des conditions aux limites sur les interfaces séparant les différentes couches du réseau permet d'avoir un système algébrique liant ces amplitudes de diffraction . Plusieurs algorithmes de résolution du système algébrique existent. Cependant, dans ce travail, nous exposerons que l'algorithme de la matrice de diffraction  $S$ ,  $S$ -Matrix.

### **2.4.1 Conditions de continuité du champ EM**

Les amplitudes de diffraction sont calculées en résolvant le système d'équations algébriques obtenu à partir des conditions aux limites du champ EM . En absence de charges et de courants , les composantes tangentielles du champ EM doivent être continues aux passage des interfaces  $y = 0$  et  $y = h$ . Les composantes concernées ici sont  $E_z$  et  $H_x$  . On peut exprimer cela mathématiquement comme suit :

$$\forall x , \quad x \in [0, d];$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_z^{(1)}(x, 0) = E_z^{(2)}(x, 0) \\ H_x^{(1)}(x, 0) = H_x^{(2)}(x, 0) \end{array} \right\} y = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_z^{(2)}(x, h) = E_z^{(3)}(x, h) \\ H_x^{(2)}(x, h) = H_x^{(3)}(x, h) \end{array} \right\} y = h \quad (2.35)$$

Le système d'équations précédent (2.35) peut être écrit comme suit :

$$y = 0 \left\{ \begin{array}{l} \sum_n (\delta_{n0} + R_n) e^{j\alpha_n x} = \sum_n [\sum_p P_{np} (a_p + b_p)] e^{j\alpha_n x} \\ \sum_n j\beta_{r,n} (\delta_{n0} - R_n) e^{j\alpha_n x} = \sum_n [\sum_p P'_{np} (a_p - b_p)] e^{j\alpha_n x} \end{array} \right.$$

$$y = h \left\{ \begin{array}{l} \sum_n [\sum_p P_{np} (a_p e^{D_p h} + b_p e^{-D_p h})] e^{j\alpha_n x} = \sum_n (T_n + \Delta') e^{j\alpha_n x} \\ \sum_n [\sum_p P'_{np} (a_p e^{D_p h} - b_p e^{-D_p h})] e^{j\alpha_n x} = \sum_n j\beta_{t,n} (T_n - \Delta'_n) e^{j\alpha_n x} \end{array} \right.$$

Où :  $P'_{np} = P_{np} D_p$  .

En notation matricielle , le système précédent devient :

$$y = 0 \left\{ \begin{array}{l} \Delta + R = P(a + b) \\ j\beta_r (\Delta - R) = P'(a - b) \end{array} \right. \quad (2.36)$$

$$y = h \left\{ \begin{array}{l} P(\phi a + \phi^{-1} b) = T + \Delta' \\ P'(\phi a - \phi^{-1} b) = j\beta_t (T - \Delta') \end{array} \right. \quad (2.37)$$

Où :  $\Delta = [\dots, 0, 1, 0, \dots]^T$ ,  $R = [\dots, R_{-1}; R_0, R_1 \dots]^T$ ,  $T = [\dots, T_{-1}, T_0, T_1 \dots]^T$ ,  $\phi = e^{Dh}$ ,  $P = P'D$ ,  $\beta_r = \text{diag}(\beta_{r,n})$ ,  $\beta_t = \text{diag}(\beta_{t,n})$ ,  $\Delta'$  est un vecteur nul .

Dans le cas d'un réseau multicouche Fig(2.1) , les conditions de continuité sur la frontière  $y_{q+1}$  séparant la couche ( $q$ ) et ( $q + 1$ ) sont données par les équations suivantes :

$$\begin{cases} P_q [\phi_q a_q + \phi_q^{-1} b_q] = P_{(q+1)} [a_{(q+1)} + b_{(q+1)}] \\ P'_q [\phi_q a_q - \phi_q^{-1} b_q] = P'_{(q+1)} [a_{(q+1)} - b_{(q+1)}] \end{cases} \quad (2.38)$$

Avec :  $\phi_q = e^{D_q h}$  et  $P' = P_q D_q$  .

Ce système de relations récurrentes est très utile pour construire la matrice de diffraction globale permettant le passage de la région d'incidence à la région de transmission .

## 2.5 Approche de la matrice S

L'application de la FMM revient à déterminer les valeurs et les vecteurs propres (modes propres) partout. Le problème se réduit à la détermination des amplitudes de ces modes propres. Pour résoudre complètement le problème des réseaux, il convient de les raccorder. L'implémentation des conditions aux limites sur l'interface  $y_{q+1}$  a donné naissance au système d'équations (2.38). Celui-ci peut être écrit sous forme matricielle. En effet, la résolution la plus simple est de bâtir une matrice de transfert qui s'écrit sous la forme :

$$\begin{pmatrix} a_{(q+1)} \\ b_{(q+1)} \end{pmatrix} = \mathcal{F}^{(q)} \begin{pmatrix} a_q \\ b_q \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

Où :  $\mathcal{F}^{(q)}$  représente la matrice de transfert de la couche .

L'utilisation répétée de l'équation (2.39) nous permet de construire la matrice de transfert (*T-matrix*) défini comme suit :

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}^{(N_c+1)} \mathcal{F}^{(N_c)} \dots \mathcal{F}^{(q)} \dots \mathcal{F}^{(0)} \quad (2.40)$$

Ce type d'approche est depuis longtemps utilisé en optique pour étudier les milieux stratifiés [2]. Malheureusement, il est bien connu que l'algorithme de cette méthode est instable numériquement. Ces instabilités sont attribuées à la présence des exponentielles croissantes. Plusieurs approches ont été proposées pour résoudre ce problème. Parmi celles-ci, l'approche de la matrice de diffraction  $S$  (scattering matrix), que nous allons décrire ci-dessous.

### 2.5.1 Algorithme de la matrice $S$

Pour surmonter le problème de l'instabilité numérique cité dans la section précédente, plusieurs approches ont été proposées [5, 8, 29, 30, 40]. Parmi celles-ci, l'approche de la matrice  $S$  (Scattering Matrix) est l'une des plus populaires. Elle a été déjà largement utilisée dans les années 50 dans le régime des micro-ondes [19, 44]. Il fallut attendre la fin des années 80 pour voir cette approche appliquée au domaine optique. Il fut d'abord utilisée pour l'étude de milieux stratifiés [24] avant d'être appliquée à la modélisation de réseaux de diffraction [8, 30]. Il existe plusieurs façons de la mettre en œuvre. Celle que nous avons choisie relie les amplitudes entrantes aux amplitudes sortantes s'écrit :

$$\begin{pmatrix} a_{(q+1)} \\ b_q \end{pmatrix} = S^{(q)} \begin{pmatrix} b_{(q+1)} \\ a_q \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

En utilisant le système (2.38), on montre que  $S^{(q)}$  est donné par :

$$S^{(q)} = \begin{pmatrix} I_d & 0 \\ 0 & \phi_q \end{pmatrix} \tilde{S}^{(q)} \begin{pmatrix} I_d & 0 \\ 0 & \phi_q \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

Où

$$\tilde{S}^{(q)} = \begin{pmatrix} P_{(q+1)} & -P_q \\ P'_{(q+1)} & P'_q \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -P_{(q+1)} & P_q \\ P'_{(q+1)} & P'_q \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

$S^{(q)}$  et  $\tilde{S}^{(q)}$  représentent les matrices de diffraction de couche et d'interface respectivement.

Outre la stabilité de la matrice  $S^{(q)}$ , elle présente un avantage d'avoir une signification physique importante, car elle représente les échanges d'énergie qui ont lieu à chaque interface entre les différents modes. Cet aspect devient manifeste lorsqu'on réécrit l'équation (2.41)

sous la forme :

$$\begin{pmatrix} a_{(q+1)} \\ b_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^{q+1} & T^{q+1} \\ T^q & R^q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{(q+1)} \\ a_q \end{pmatrix} \quad (2.44)$$

## 2.5.2 Combinaison des matrices S

Nous avons vu dans les sections précédentes que le calcul de la matrice  $S^{(q)}$  de la couche  $q$  se fait par la résolution du système (2.38). Ce système est utilisé pour obtenir toutes les autres matrices correspondantes à toutes les couches du réseau de diffraction. Selon les besoins, ces matrices peuvent être stockées ou pas. Le stockage de ces matrices est nécessaire par exemple, dans le cas où nous souhaitons tracer les cartes du champ électromagnétique. En effet, la détermination de l'ensemble des amplitudes du champ EM ( $a_q$  et  $b_q$ ) nécessite la connaissance de toutes les matrices de toutes les couches. En passant du milieu d'incidence à la région de transmission, ces matrices calculées doivent être concaténées pour obtenir la matrice globale du milieu considéré :

$$\begin{pmatrix} T \\ R \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \Delta' \\ \Delta \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

Avec :

$$S = S^{(0)} \star \dots \star S^{(q)} \star \dots \star S^{(Nc+1)} \quad (2.46)$$

Le produit  $\star$  n'est pas le produit habituel de deux matrices [30]. Ce produit est appelé *Redheffer star product* [57][58]. Pour mettre en clair ce produit dans l'algorithme de la matrice  $S$ , considérons trois matrices  $S^{(q)}$ ,  $S^{(q+1)}$  et  $S^c$  telles que :

$$S^c = S^{(q)} \star S^{(q+1)} \quad (2.47)$$

En utilisant ce produit, les éléments de la matrice  $S^c$ , qui sont eux même des blocs de matrices d'ordre  $(N \times N)$ , sont donnés par le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{11}^c = S_{11}^{(q)} + S_{12}^{(q)} \left[ I_d - S_{11}^{(q+1)} S_{22}^{(q)} \right]^{-1} S_{11}^{(q+1)} S_{21}^{(q)} \\ S_{12}^c = S_{12}^{(q)} \left[ I_d - S_{11}^{(q+1)} S_{22}^{(q)} \right]^{-1} S_{12}^{(q+1)} \\ S_{21}^c = S_{21}^{(q+1)} \left[ I_d - S_{22}^{(q)} S_{11}^{(q+1)} \right]^{-1} S_{21}^{(q)} \\ S_{22}^c = S_{22}^{(q+1)} + S_{21}^{(q+1)} \left[ I_d - S_{22}^{(q)} S_{11}^{(q+1)} \right]^{-1} S_{22}^{(q)} S_{12}^{(q+1)} \end{array} \right. \quad (2.48)$$

Où :  $I_d$  est la matrice identité d'ordre  $(N \times N)$ .

Ce système d'équations constitue les formules récursives pour cascader successivement les matrices de diffraction, en passant du milieu d'incidence au milieu de transmission, pour obtenir la matrice de diffraction totale  $S$ . Après ce calcul, nous pouvons obtenir les amplitudes  $T$  et  $R$  à partir de l'équation (2.45). Ces amplitudes sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} T = S_{12} \Delta \\ R = S_{22} \Delta \end{array} \right. \quad (2.49)$$

Sachant que  $\Delta'$  est un vecteur nul.

La détermination de  $R$  et  $T$  permet de calculer les efficacités de diffraction de tous les ordres propagatifs à l'aide des équations (1.38) et (1.39). Elle permet également de calculer les amplitudes  $a_q$  et  $b_q$  dans les différentes couches du réseau ; *i.e* : les tracés des cartes du champ électromagnétique.

## 2.6 Conclusion

Nous venons de présenter la méthode FMM ainsi que les considérations mathématiques à prendre en compte pour s'affranchir des instabilités numériques. Cette méthode permet de calculer les efficacités de diffraction en exprimant le champ à l'intérieur du réseau sous forme d'une somme d'ondes couplées.

La FMM est une méthode très rigoureuse et puissante pour l'analyse des problèmes de diffraction. Son formalisme mathématique est simple et élémentaire et ses codes numériques ne nécessitent pas des techniques compliquées. Ces caractéristiques font de la FMM l'une des méthodes les plus populaires et utiles dans le domaine de l'optique diffractive.

## 2.7 APPLICATIONS NUMÉRIQUES

Comme nous l'avons noté plus haut, la méthode FMM a souffert pendant longtemps de sa mauvaise convergence en TM. Ce n'est que vers le milieu des années 90 qu'on a pu surmonter cette difficulté après avoir découvert les règles correctes de factorisation de Fourier. En fait, le problème provient de la troncature des séries de Fourier. En effet, les expressions (2.30) et (2.34) sont équivalentes pour un nombre très important (infini) de termes de Fourier. Cependant, en pratique, le processus de troncature est indispensable. Cela impose, par conséquent, la prise en compte de ces règles de factorisation détaillées par L. Li [30]. Sur la figure (Fig.2.2), nous avons rapporté la convergence de l'ordre zéro de diffraction en utilisant, à la fois, l'ancienne et la nouvelle formulation, données respectivement par (2.30) et (2.34). D'après ce résultat, il est clair, comme nous pouvons le constater, que la nouvelle formulation assure une meilleure convergence.

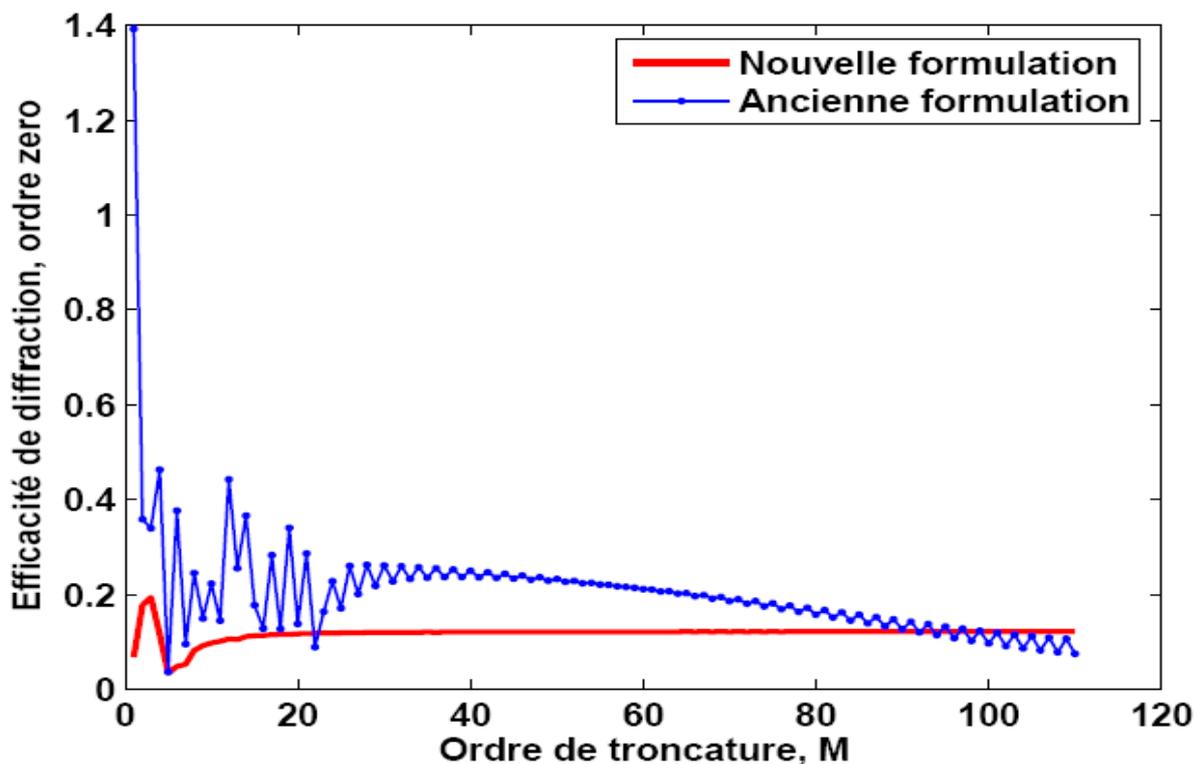


FIGURE 2.2 – Convergence de l'efficacité de diffraction du réseau binaire métallique en polarisation TM.

Dans cette section, Après avoir présenté en détail la méthode FMM, nous allons présenter quelques résultats obtenus de l'application de cette méthode. L'objectif de ce travail est de résoudre de façon rigoureuse le problème de diffraction, c'est-à-dire le calcul des efficacités de diffraction des ordres propagatifs. Autrement dit, la fraction d'énergie véhiculée par l'onde plane incidente se retrouvant dans ceux-ci.

A titre d'exemple, nous avons choisi la structure représentée sur la figure (Fig.2.3). Il s'agit d'un réseau lamellaire ; une structure de période  $d$  suivant l'axe  $(Ox)$ , situé dans la bande  $0 < y < h$ . Cette structure dépend de  $y$ , par contre invariante par translation suivant l'axe  $(Oz)$ . Le réseau est éclairé par une onde plane monochromatique dont le vecteur d'onde est dans le plan  $(xOy)$ . L'angle d'incidence est noté  $\theta$ . Il en résulte que le champ EM ne dépend que des variables  $x$  et  $y$  (*diffraction classique*). Une fois le code de calcul basé sur la FMM est établi,

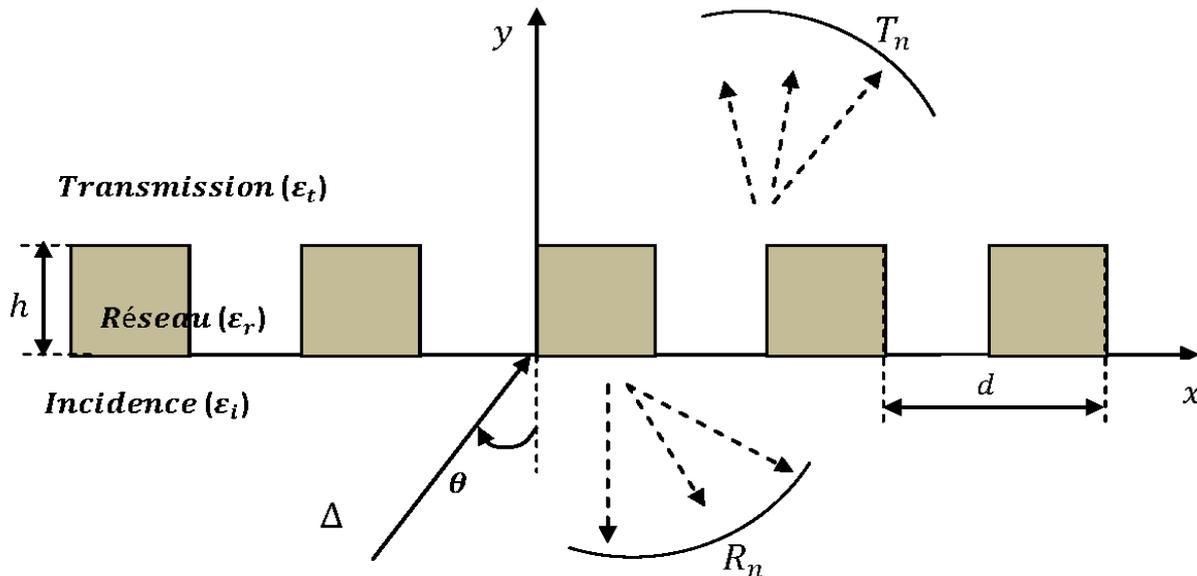


FIGURE 2.3 – Représentation schématique du réseau lamellaire. Une onde plane incidente ( $\Delta$ ) sur le réseau périodique donne naissance aux différents ordres de diffraction en réflexion ( $R_n$ ) et en transmission ( $T_n$ ).

il est toujours intéressant de faire un test de convergence (validation du code). La courbe de convergence permet, en effet, de fixer la valeur de l'ordre de troncature qu'il faut prendre pour s'assurer de la convergence, de la stabilité de la méthode et de la précision des calculs à réaliser. Sur la figure (Fig.2.4), nous avons rapporté la convergence des ordres de diffraction  $R_{-1}$  et  $T_{-1}$  en fonction de l'ordre de troncature  $M$ . Comme nous pouvons le constater sur cette figure, il ne convient pas, pour l'exemple traité ici, de prendre une valeur pour l'ordre  $M$  inférieure à 20, c'est-à-dire moins de 41 harmoniques de Fourier ( $N = 2M + 1$ ). La détermination des amplitudes  $R_n$  et  $T_n$ , formule (2.49), permet de calculer les efficacités de diffraction de tous les ordres propagatifs, équations (1.38) et (1.39). La figure (Fig.2.5), montre l'évolution, en fonction de la longueur d'onde du faisceau incident, des ordres  $R_{-1}$  et  $T_{-1}$ , ainsi que les pertes dues à l'absorption correspondante. Dans ce calcul, il est à noter qu'il n'est pas nécessaire de déterminer les amplitudes du champ électromagnétique dans les couches du réseau. Ce qui rend la FMM une des méthodes numériques les plus rapides ; consomme moins de temps et de mémoire d'ordinateur.

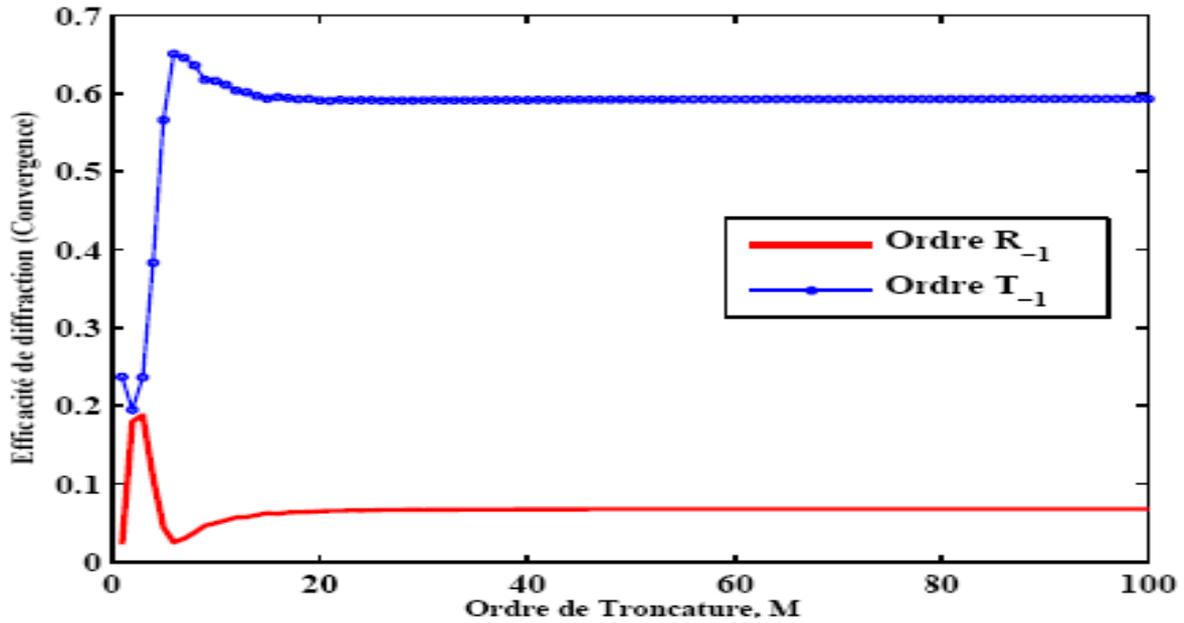


FIGURE 2.4 – Convergence des ordres de diffraction  $R_{-1}$  et  $T_{-1}$ .  
 $\theta = 30^\circ$ ,  $d = \lambda$ ,  $\epsilon_r = (0.2 + 6.7j)^2$ ,  $\epsilon_i = \epsilon_t = 1$

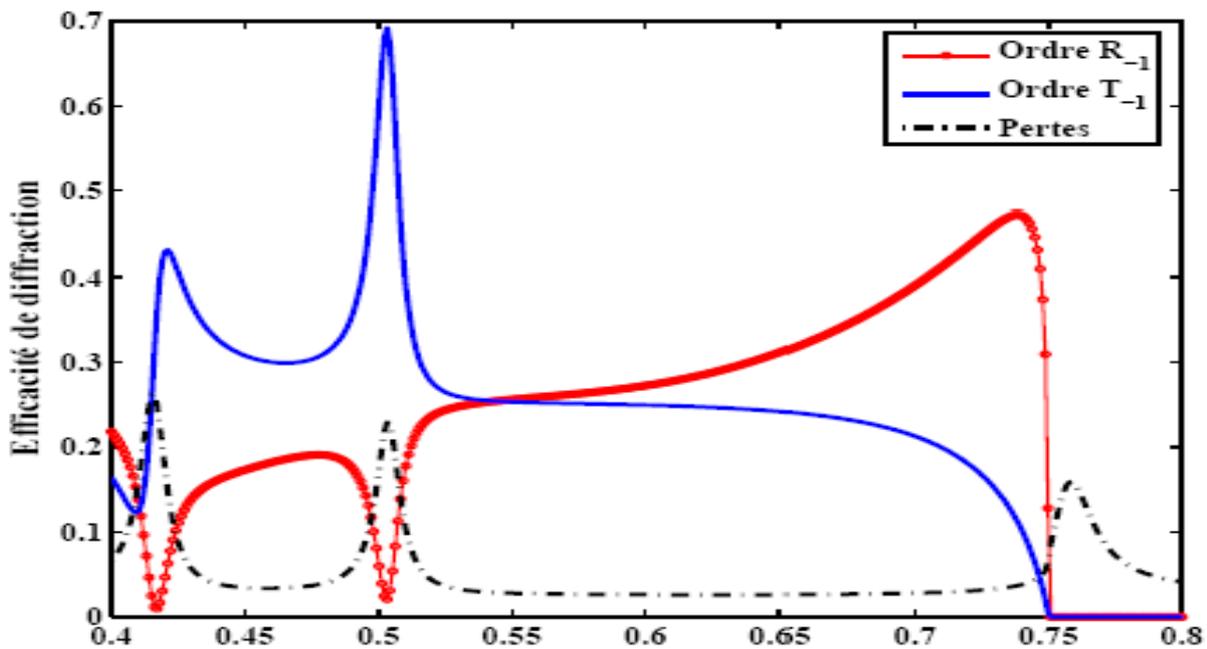


FIGURE 2.5 – Efficacités de diffraction en fonction de la longueur d'onde

La détermination de  $R$  et  $T$  permet, également, le calcul des amplitudes du champ électromagnétique  $a$  et  $b$  dans les différentes couches constituant le réseau. Ce dernier calcul se fait uniquement si nous souhaitons tracer les cartes des champs électromagnétiques. Pour l'exemple considéré ici, nous avons représenté sur les figures (Fig.2.6) et (Fig.2.7) le champ magnétique  $H$  et la composante  $E_x$  du champ électrique, respectivement, en polarisation TM.

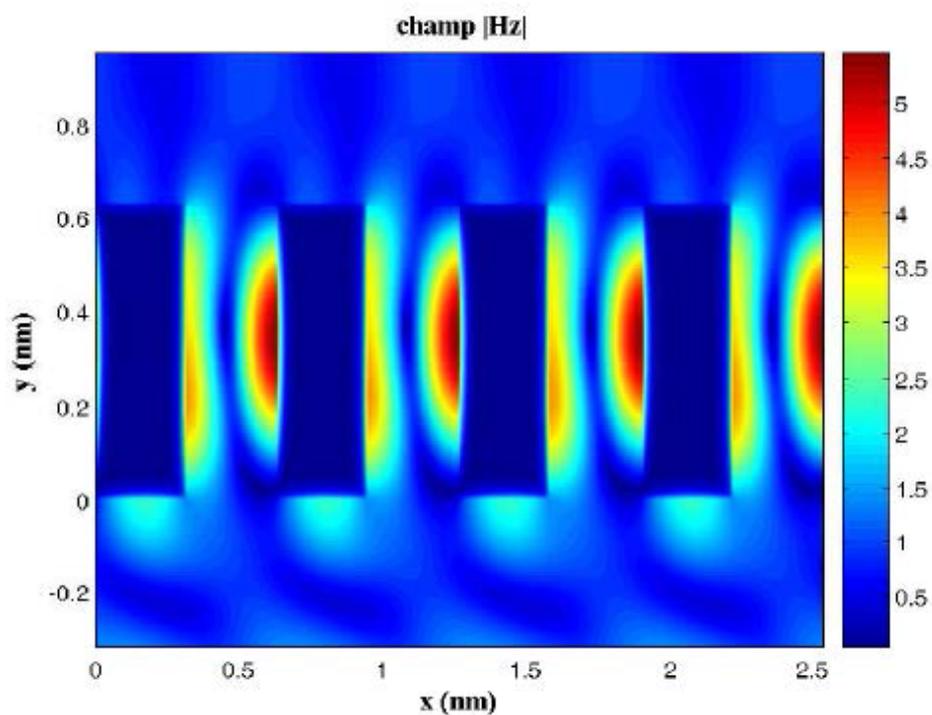


FIGURE 2.6 – Distribution spatiale de l'intensité du champ magnétique

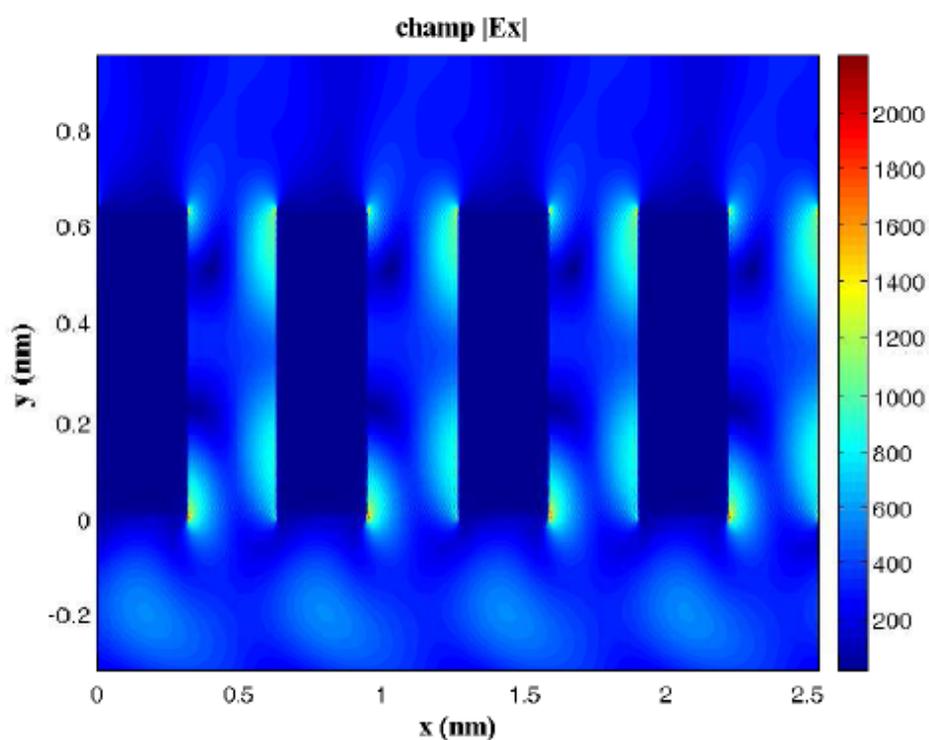


FIGURE 2.7 – Distribution spatiale de l'intensité du champ électrique  $E_x$ .

Nous avons pu appliquer la méthode FMM à d'autres exemples avec succès. Sur la figure (Fig.2.8), nous avons reproduit l'expérience des deux fentes de Young. Sur la figure (Fig.2.10), nous avons réussi de traiter le cas d'un guide d'onde gravé. Ce type de structure est très utilisé dans l'optique intégrée.

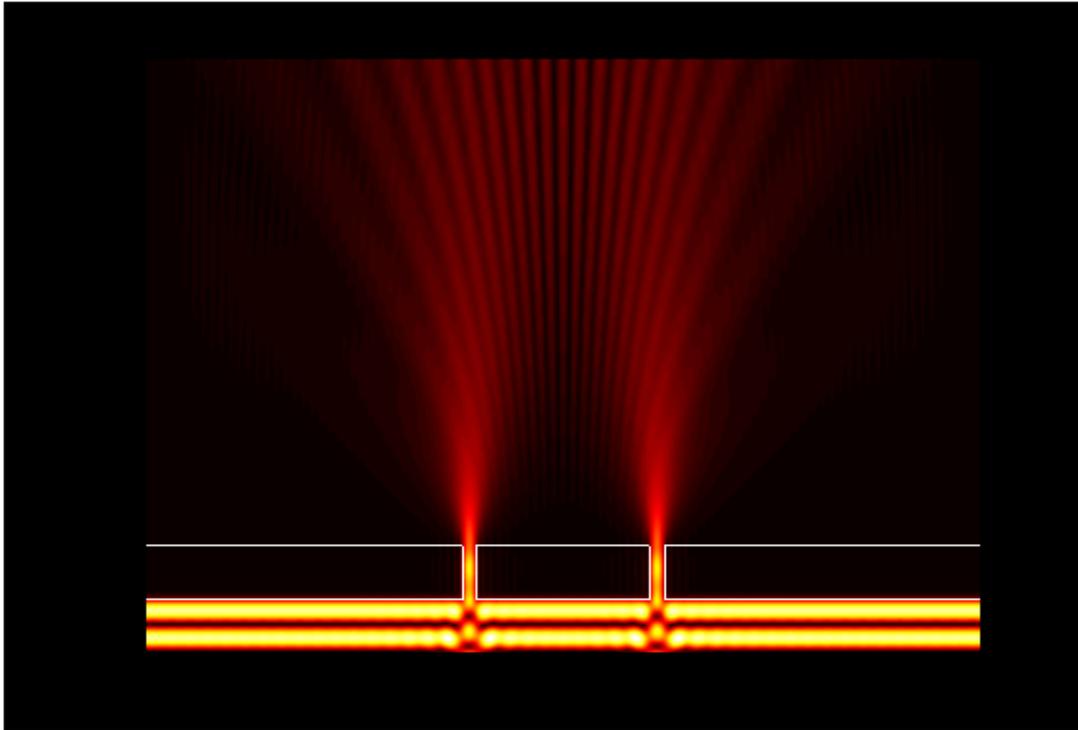


FIGURE 2.8 – Expérience des fentes de Young.

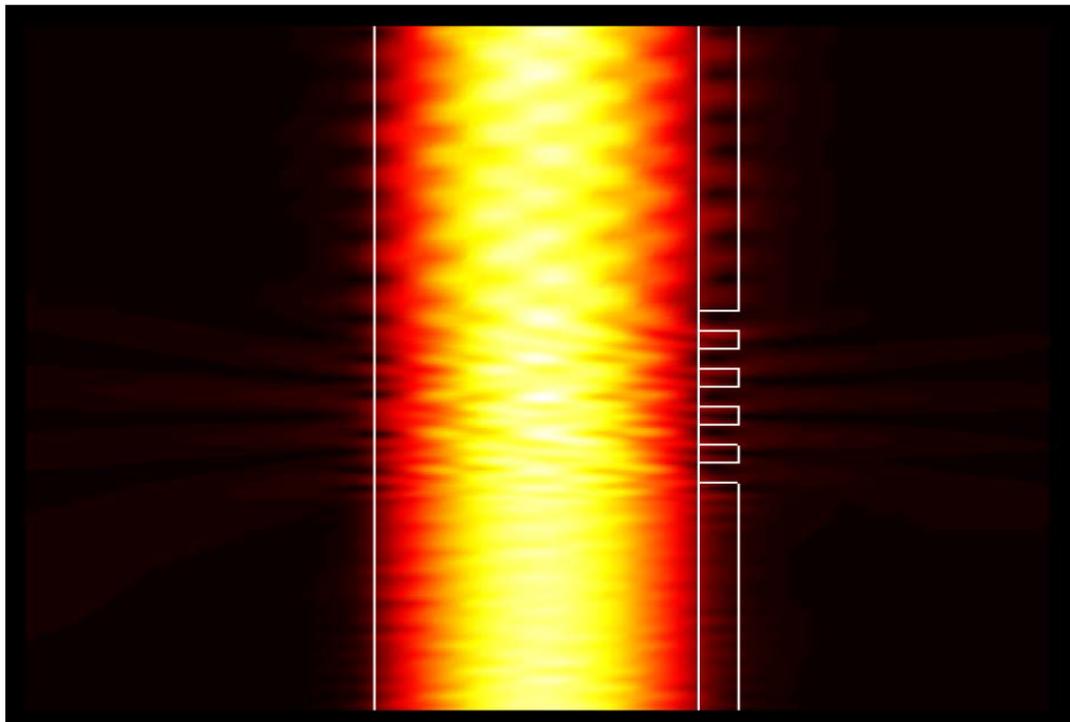


FIGURE 2.9 – Guide d'onde gravé.

Sur la figure (Fig.2.10), nous avons remplacé l'excitation incidente sur la structure par l'onde plane par le monomode d'un guide d'onde.

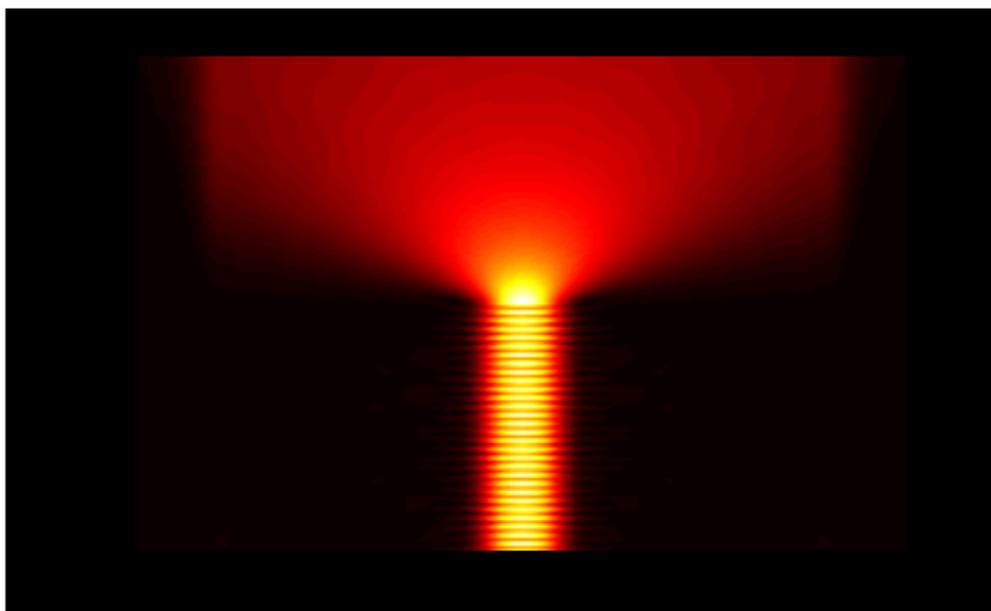


FIGURE 2.10 – Excitation par le monomode d'un guide d'onde.

Le dernier cas que nous avons traité est celui d'une incidence gaussienne sur un dioptre plan. Le résultat est affiché sur la figure (Fig.2.11).

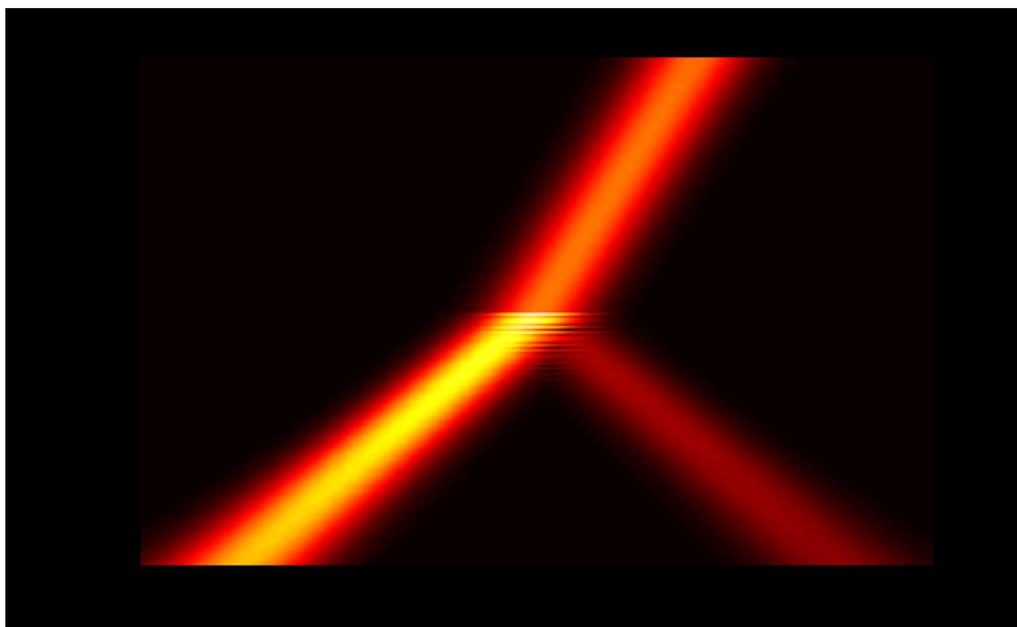


FIGURE 2.11 – Incidence gaussienne sur un dioptre plan

En conclusion, nous dirons que la méthode modale de Fourier est une méthode très rigoureuse, polyvalente et puissante pour l'analyse d'une panoplie de problèmes de diffractions. Sa simplicité de mise en œuvre et ses codes de calcul qui sont moins gourmands en temps et taille de mémoire d'ordinateur nécessaires font d'elle l'une des méthodes les plus populaires au sein de la communauté scientifique dans le domaine de l'optique diffractive.

## CONCLUSION GÉNÉRALE

Dans ce travail, Nous avons présenté et appliqué une méthode, rigoureuse et très populaire, utilisée par les scientifiques et ingénieurs, pour résoudre les problèmes de propagation et de diffraction par des structures dont les dimensions sont à l'échelle de la longueur d'onde, domaine dit raisonnant pour lequel il n'y a pas de solutions analytiques approchée fiables. Dans ce domaine, il est nécessaire de résoudre les équations, ici de Maxwell, dans toute leur généralité.

La FMM est une méthode numérique conçue spécialement pour les réseaux. La méthode ne discrétise pas l'espace de résolution comme c'est le cas pour les éléments finis ou la FDTD, par exemple. La FMM utilise les séries de Fourier pour décrire le profil de la permittivité diélectrique (éventuellement la perméabilité) et les séries de Fourier généralisées pour développer le champ électromagnétique. Les seules conditions que nous utilisons dans la FMM sont les conditions de continuité du champ EM à travers les surfaces de séparation de deux milieux ou couches et la condition de radiation stipulant que le champ doit être fini quand les coordonnées de l'espace tendent vers l'infini (dans la direction de propagation).

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés tout particulièrement à la méthode modale de Fourier (FMM). Cette méthode rigoureuse se distingue par sa simplicité de mise en œuvre, son efficacité et la rapidité des codes de calcul qui en sont issus et qui, depuis son introduction dans les années quatre-vingt, n'a cessé d'être améliorée. Elle a donné pleine satisfaction dans la simulation des problèmes de diffraction, de propagation, de guidage et dans les nouvelles thématiques en optique telles que la plasmonique et les métamatériaux. Nous avons exposé cette méthode en détail; nous avons présenté son mode opératoire, les difficultés rencontrées ainsi que les solutions apportées. Nous avons présenté, également, quelques applications numériques.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] Jean-Pierre Berenger. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *Journal of computational physics*, 114(2) :185–200, 1994.
- [2] Max Born and Emil Wolf. *Principles of optics : electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light*. Elsevier, 2013.
- [3] Alain Bossavit. *Electromagnetisme, en vue de la modelisation*, volume 14. Springer Science & Business Media, 2004.
- [4] CB Burckhardt. Diffraction of a plane wave at a sinusoidally stratified dielectric grating. *JOSA*, 56(11) :1502–1508, 1966.
- [5] Nicolas Chateau and Jean-Paul Hugonin. Algorithm for the rigorous coupled-wave analysis of grating diffraction. *JOSA A*, 11(4) :1321–1331, 1994.
- [6] Ray W Clough. The finite element method in plane stress analysis. In *Proceedings of 2nd ASCE Conference on Electronic Computation, Pittsburgh Pa., Sept. 8 and 9, 1960*, 1960.
- [7] C Cohen-Tannoudji and Serge Haroche. Absorption et diffusion de photons optiques par un atome en interaction avec des photons de radiofréquence. *Journal de Physique*, 30(2-3) :153–168, 1969.
- [8] NPK Cotter, TW Preist, and JR Sambles. Scattering-matrix approach to multilayer diffraction. *JOSA A*, 12(5) :1097–1103, 1995.
- [9] JB Davies and CA Muilwyk. Numerical solution of uniform hollow waveguides with boundaries of arbitrary shape. In *Proceedings of the Institution of Electrical Engineers*, volume 113, pages 277–284. IET, 1966.
- [10] M GANTON FLOQUET. *THESES PRESENTERS A LA FACULTE DES SCIENCES DE PARIS*. 1879.
- [11] Joseph Fourier. French mathematician. *Studied equations of mathematical physics and made extensive use of trigonometric series for their solution*, 1768.

- [12] JW Gibbs. Notes on the electromagnetic theory of light; part ii. *American Journal of Science*, 3(138) :460–476, 1882.
- [13] G Granet and B Guizal. Efficient implementation of the coupled-wave method for metallic lamellar gratings in tm polarization. *JOSA A*, 13(5) :1019–1023, 1996.
- [14] Brahim Guizal, H Yala, and Didier Felbacq. Reformulation of the eigenvalue problem in the fourier modal method with spatial adaptive resolution. *Optics letters*, 34(18) :2790–2792, 2009.
- [15] Oliver Heaviside. The induction of currents in cores. *Electrician*, 13 :133, 1884.
- [16] Heinrich Hertz. Ueber die grundgleichungen der electrodynamik für bewegte körper. *Annalen der Physik*, 277(11) :369–399, 1890.
- [17] John H Holland. Genetic algorithms. *Scientific american*, 267(1) :66–73, 1992.
- [18] Jean Paul Hugonin and Philippe Lalanne. Perfectly matched layers as nonlinear coordinate transforms : a generalized formalization. *JOSA A*, 22(9) :1844–1849, 2005.
- [19] Hendrik Christoffel Hulst and Hendrik C van de Hulst. *Light scattering by small particles*. Courier Corporation, 1981.
- [20] Robert G Hunsperger. *Integrated optics*, volume 4. Springer, 1995.
- [21] John David Jackson. *Classical electrodynamics*, 1999.
- [22] Frank G Kaspar. Diffraction by thick, periodically stratified gratings with complex dielectric constant. *JOSA*, 63(1) :37–45, 1973.
- [23] K\_ Knop. Rigorous diffraction theory for transmission phase gratings with deep rectangular grooves. *JOSA*, 68(9) :1206–1210, 1978.
- [24] D Yuk Kei Ko and JR Sambles. Scattering matrix method for propagation of radiation in stratified media : attenuated total reflection studies of liquid crystals. *JOSA A*, 5(11) :1863–1866, 1988.
- [25] HERWIG Kogelnik. The bell system technical journal. *Coupled Wave Theory for Thick*, 1969.
- [26] Philippe Lalanne and G Michael Morris. Highly improved convergence of the coupled-wave method for tm polarization. *JOSA A*, 13(4) :779–784, 1996.
- [27] Philippe Lalanne and Eric Silberstein. Fourier-modal methods applied to waveguide computational problems. *Optics Letters*, 25(15) :1092–1094, 2000.
- [28] Lifeng Li. A modal analysis of lamellar diffraction gratings in conical mountings. *Journal of Modern Optics*, 40(4) :553–573, 1993.
- [29] Lifeng Li. Multilayer modal method for diffraction gratings of arbitrary profile, depth, and permittivity. *JOSA A*, 10(12) :2581–2591, 1993.
- [30] Lifeng Li. Formulation and comparison of two recursive matrix algorithms for modeling layered diffraction gratings. *JOSA A*, 13(5) :1024–1035, 1996.

- [31] Lifeng Li. Use of fourier series in the analysis of discontinuous periodic structures. *JOSA A*, 13(9) :1870–1876, 1996.
- [32] Lifeng Li. New formulation of the fourier modal method for crossed surface-relief gratings. *JOSA A*, 14(10) :2758–2767, 1997.
- [33] Lifeng Li. Mathematical reflections on the fourier modal method in grating theory. In *Mathematical modeling in optical science*, pages 111–139. SIAM, 2001.
- [34] Lifeng Li. Fourier modal method for crossed anisotropic gratings with arbitrary permittivity and permeability tensors. *Journal of Optics A : Pure and Applied Optics*, 5(4) :345, 2003.
- [35] Lifeng Li and Charles W Haggans. Convergence of the coupled-wave method for metallic lamellar diffraction gratings. *JOSA A*, 10(6) :1184–1189, 1993.
- [36] R Magnusson and TK Gaylord. Analysis of multiwave diffraction of thick gratings. *JOSA*, 67(9) :1165–1170, 1977.
- [37] R Magnusson and TK Gaylord. Diffraction efficiencies of thin phase gratings with arbitrary grating shape. *JOSA*, 68(6) :806–809, 1978.
- [38] James Clerk Maxwell. Xxv. on physical lines of force : Part i.–the theory of molecular vortices applied to magnetic phenomena. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 21(139) :161–175, 1861.
- [39] James Clerk Maxwell. Viii. a dynamical theory of the electromagnetic field. *Philosophical transactions of the Royal Society of London*, (155) :459–512, 1865.
- [40] M. G. Moharam, Eric B. Grann, Drew A. Pommet, and T. K. Gaylord. Formulation for stable and efficient implementation of the rigorous coupled-wave analysis of binary gratings. *J. Opt. Soc. Am. A*, 12(5) :1068–1076, May 1995.
- [41] MG Moharam and Thomas K Gaylord. Diffraction analysis of dielectric surface-relief gratings. *JOSA*, 72(10) :1385–1392, 1982.
- [42] MG Moharam and Thomas K Gaylord. Three-dimensional vector coupled-wave analysis of planar-grating diffraction. *JOSA*, 73(9) :1105–1112, 1983.
- [43] MG Moharam and TK Gaylord. Rigorous coupled-wave analysis of planar-grating diffraction. *JOSA*, 71(7) :811–818, 1981.
- [44] CG Montgomery. Waveguide junctions with several arms, in “principles of microwave circuits” cg montgomery, rh dicke, and em purcell, 1948.
- [45] Mssrs Neviere. Sur la theorie du reseau conducteur et ses applications a l’optique. *Nouv. Rev. Optique*, 5 :65–77, 1974.
- [46] Lukas Novotny and Bert Hecht. *Principles of nano-optics*. Cambridge university press, 2012.
- [47] Robert N Noyce. Microelectronics. *Scientific American*, 237(3) :62–69, 1977.

- [48] Aura Mimosa Nugrowati. Vectorial diffraction of extreme ultraviolet light and ultrashort light pulses. 2008.
- [49] Motoichi Ohtsu and Hirokazu Hori. *Near-field nano-optics : from basic principles to nano-fabrication and nano-photonics*. Springer Science & Business Media, 1999.
- [50] ST Peng, Theodor Tamir, and Henry L Bertoni. Theory of periodic dielect waveguides. *IEEE transactions on microwave theory and techniques*, 23(1) :123–133, 1975.
- [51] R Petit and D Maystre. Application des lois de l'électromagnétisme, à l'étude des réseaux. *Revue de Physique Appliquée*, 7(4) :427–441, 1972.
- [52] E Popov and L Mashev. Conical diffraction mounting generalization of a rigorous differential method. *Journal of optics*, 17(4) :175, 1986.
- [53] Evgeni Popov and Michel Nevière. Grating theory : new equations in fourier space leading to fast converging results for tm polarization. *JOSA A*, 17(10) :1773–1784, 2000.
- [54] John Henry Poynting. Xv. on the transfer of energy in the electromagnetic field. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, (175) :343–361, 1884.
- [55] Lord Rayleigh. Iii. note on the remarkable case of diffraction spectra described by prof. wood. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 14(79) :60–65, 1907.
- [56] Lord Rayleigh. On the dynamical theory of gratings. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 79(532) :399–416, 1907.
- [57] Raymond Redheffer. Difference equations and functional equations in transmission-line theory. *Modern mathematics for the engineer*, 12 :282–337, 1961.
- [58] Raymond Redheffer. On the relation of transmission-line theory to scattering and transfer. *J. Math. Phys.*, 41, 1962.
- [59] George O Reynolds et al. *The New Physical Optics Notebook : Tutorials in Fourier Optics*. ERIC, 1989.
- [60] Eric Silberstein, Philippe Lalanne, Jean-Paul Hugonin, and Qing Cao. Use of grating theories in integrated optics. *JOSA A*, 18(11) :2865–2875, 2001.
- [61] John Clarke Slater. Microwave electronics. *Reviews of Modern Physics*, 18(4) :441, 1946.
- [62] David R Smith, John B Pendry, and Mike CK Wiltshire. Metamaterials and negative refractive index. *Science*, 305(5685) :788–792, 2004.
- [63] A Sommerfeld. Propagation of radio waves. *Ann. Phys.(Leipzig)*, 28 :665–695, 1909.
- [64] Allen Taflove, Susan C Hagness, and Melinda Piket-May. Computational electromagnetics : the finite-difference time-domain method. *The Electrical Engineering Handbook*, 3, 2005.

- [65] Theodor Tamir, HC Wang, and Arthur A Oliner. Wave propagation in sinusoidally stratified dielectric media. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 12(3) :323–335, 1964.
- [66] Victor G Veselago. Electrodynamics of substances with simultaneously negative electrical and magnetic permeabilities. *Soviet Physics Uspekhi*, 10(4) :504–509, 1968.
- [67] Robert Williams Wood. Xlii. on a remarkable case of uneven distribution of light in a diffraction grating spectrum. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 4(21) :396–402, 1902.
- [68] Eli Yablonovitch. Inhibited spontaneous emission in solid-state physics and electronics. *Physical review letters*, 58(20) :2059, 1987.
- [69] Eli Yablonovitch. Photonic band-gap structures. *JOSA B*, 10(2) :283–295, 1993.
- [70] KS Yee. Numerical solution of initial boundary value problems involving maxwell's equations in isotropic media. *iee transaction on antennas and propagation*, 14, 302-307. *On implementing a numeric Huygen's source scheme in a finite difference program to illuminate scattering bodies,"IEEE Trans. Nucl. Sci*, 27 :1829–1833, 1966.
- [71] C Yeh, KF Casey, and ZA Kaprielian. Transverse magnetic wave propagation in sinusoidally stratified dielectric media. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 13(3) :297–302, 1965.
- [72] Pochi Yeh, Amnon Yariv, and Chi-Shain Hong. Electromagnetic propagation in periodic stratified media. i. general theory. *JOSA*, 67(4) :423–438, 1977.
- [73] Chuanhong Zhou and Lifeng Li. Formulation of the fourier modal method for symmetric crossed gratings in symmetric mountings. *Journal of Optics A : Pure and Applied Optics*, 6(1) :43, 2003.
- [74] DA Zhuravlev. Eg loewen and e. popov diffraction gratings and their applications (marcel dekker, new york, 1997). *Optics and Spectroscopy*, 88(1) :143–144, 2000.
- [75] Olgierd Cecil Zienkiewicz, Robert Leroy Taylor, Perumal Nithiarasu, and JZ Zhu. *The finite element method*, volume 3. McGraw-hill London, 1977.
- [76] Olgierd Cecil Zienkiewicz, Robert Leroy Taylor, Robert Leroy Taylor, and Robert Lee Taylor. *The finite element method : solid mechanics*, volume 2. Butterworth-heinemann, 2000.