

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur

Et de la recherche scientifique



UNIVERSITE Abderrahmane MIRA BEJAIA

Faculté de Technologie

Département de Génie Mécanique

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de

MASTER

Filière : Génie Mécanique

Spécialité : Installations énergétiques et turbomachines

Par :

YAKOUBI Azeddine

ZEKRINI Billal

Thème

Étude de transfert thermique devant une surface chauffée

Soutenu le 21/09/2022 devant le jury composé de :

Mr. ADNANI M.

Président

Mr. ALI AGHA H.

Rapporteur

Mr. BOUTALBI N.

Examineur

Année Universitaire 2021-2022

Remerciements

Nous tenons tout d'abord à remercions Dieu le tout puissant de nous avoir accordé grâce, santé, et courage depuis le début de nos études jusqu'à l'aboutissement de ce travail.

*En second lieu, Nous tenons à remercier vivement **Mr. ALI AGHA Hamza** pour nous avoir honorés par son encadrement, pour sa disponibilité, sa patience, ses orientations, ses précieux conseils et ses encouragements qui nous ont permis de mener à bien ce travail.*

Nous tenons à exprimer nos sincères remerciements à tous les professeurs qui nous ont enseigné et qui par leurs compétences nous ont soutenu dans la poursuite de nos études.

Nos remerciements sont adressés également à nos chers parents, pour leur amour, leurs sacrifices et leur patience.

Un énorme merci à nos familles et amis pour leurs éternels soutiens et la confiance qu'ils ont en nos capacités.

Enfin, à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ce Modeste travail trouve ici l'expression de notre sincère gratitude et nos Remerciements les plus sincères.

Dédicaces

Je dédie ce travail a mon cher père MOHAMED et ma chère mère FARIDA, pour leurs soutiens tout au longue mes années d'étude. A mes trois sœurs et ma nièce.

A la mémoire de mes grands-mères.

A mon binôme AZEDDINE pour sa persévérance et son attachement.

A mes amis LAMINE, HACENE qui ont été toujours a mes côté.

A ceux qui ont veillé pour mon bien-être.

A ceux que j'aime et respecte infiniment.

Zekrini Billal

Dédicaces

Je dédie ce travail a la mémoire de mon très cher père ABDELKADER

Yakoubi Azeddine

Sommaire

Remerciements.....	i
Dédicaces.....	ii
Dédicaces.....	iii
Sommaire.....	iv
Liste des figures.....	vi
Liste des tableaux.....	vii
Nomenclature.....	viii
Introduction générale.....	1
CHAPITRE I : Généralité et contexte scientifique	
I.1.Introduction.....	2
I.2.Généralité sur transfert thermique.....	2
I.3.La convection.....	3
I.3.1.Formulation générale des équations de la convection.....	4
I.3.2.Les types de la convection.....	4
I.4.Ecoulement laminaire externe.....	6
I.5.Nombre adimensionnels.....	7
I.6.Couche limites sur une plaque plane.....	9
I.6.1.Types de couche limite.....	10
I.6.2.Equation de la couche limite dynamique et thermique	11
I.7.Approche différentielle (équation de Blasius).....	13
I.8.Approche intégrale (équation de Von karman).....	13
I.9.Profil de Pohlhausen.....	14
I.10.Paramètre caractéristique de la couche limite.....	14
I.11.Etat de l’art.....	16

I.12.Conclusion.....	19
CHAPITRE II : Problématique et Modélisation Mathématique	
II.1.Introduction.....	20
II.2.Présentation de problème.....	20
II.3.Hypothèses simplificatrices.....	21
II.4.Equations de conservations.....	21
II.4.1.Conditions aux limites.....	22
II.5.Formulation adimensionnelle.....	22
II.5.1.Changement de variable.....	22
II.5.2.Equations adimensionnelles.....	23
II.5.3.Conditions aux limites.....	23
II.6.Caractérisation de nombre de Nusselt et le coefficient de frottement.....	23
II.7.Conclusion.....	24
CHAPITRE III : Résultats et discussions	
III.1.Introduction.....	25
III.2.Validation de programme.....	25
III.3.Résultats et discussions.....	25
III.3.1.Profils de vitesse adimensionnelles.....	26
III.3.2.Profils de température adimensionnelles.....	28
III.4.Variation de nombre de Nusselt local.....	33
III.5.Variation de coefficient de frottement local.....	34
III.6.Conclusion.....	35
Conclusion générale.....	36
Références Bibliographiques.....	38
Annexes.....	42
Résumé / Abstract.....	47

Liste des figures

Figure I.1 : les modes de transfert thermique.....	3
Figure I.2 : transfert par convection naturelle.....	5
Figure I.3 : transfert par convection forcée.....	6
Figure I.4 : convection mixte.....	6
Figure I.5 : la couche limite sur une plaque plane verticale chauffée.....	9
Figure I.6 : variation de l'épaisseur et de la vitesse de la couche limite dynamique sur une Paroi plane.....	10
Figure I.7 : couche limite thermique sur une plaque plane.....	11
Figure II.1 : géométrie du problème et système de coordonnées.....	20
Figure III.1 : Variations de profil de vitesse avec η pour Gr variable.....	26
Figure III.2 : Variations de profil de vitesse avec η pour Br variable.....	27
Figure III.3 : Variations de profil de vitesse avec η pour Pr variable.....	28
Figure III.4 : Variations de profil de température avec η pour Gr variable.....	29
Figure III.5 : Variations de profil de température avec η pour Br variable.....	30
Figure III.6: Variations de profil de température avec η pour Pr variable.....	31
Figure III.7 : Variations de profil de température avec η pour H variable.....	32

Liste des tableaux

Tableau III.1 : Comparaison de $\theta(0)$ et $-\theta(0)$ pour différentes valeurs de H, et Pr.....	25
Tableau III.2 : Valeurs de Nusselt pour Pr, Gr variable.....	33
Tableau III.3 : Valeurs de Nusselt pour Br, H variable.....	33
Tableau III.4 : Valeurs de coefficient de frottement pour Pr, Gr variable.....	34
Tableau III.5 : Valeurs de coefficient de frottement pour Br, H variable.....	34

Nomenclature

Symboles	Définition	Unité (SI)
Br	Nombre de Brinkman	-
C_f	Coefficient de frottement	-
C_P	Capacité thermique massique	$J.kg^{-1}.k^{-1}$
h	Coefficient de transfert thermique	$W.m^{-2}.k^{-1}$
H	Paramètre de la convection a la paroi	-
g	Accélération de pesanteur	$m.s^{-2}$
Gr	Nombre de Grashof	-
L_C	Longueur caractéristique	m
Nu	Nombre de Nusselt	-
P	La Pression	Pa
Pr	Nombre de Prandtl	-
Ra	Nombre de Rayleigh	-
Re	Nombre de Reynolds	-
Ri	Nombre de Richardson	-
T_f	Température de fluide chaud	K
T_s	Température a la surface	K
T_∞	Température de fluide ascendant	K
u	Composant de la vitesse dans la direction de x	$m.s^{-1}$
U	Composant de la vitesse adimensionnée selon x	-

U_{∞}	Vitesse de fluide ascendant	m.s^{-1}
V	Vitesse de fluide caractéristique	m.s^{-1}
v	Composant de la vitesse adimensionnée selon y	-
x, y	Coordonnées cartésiennes	-

Symboles grecs

λ	Conductivité thermique du fluide	$\text{w.m}^{-1}.\text{k}^{-1}$
α	Diffusivité thermique	$\text{m}^2.\text{s}^{-1}$
ν	Viscosité cinématique	$\text{m}^2.\text{s}^{-1}$
μ	Viscosité dynamique	$\text{Kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$
ρ	La masse volumique	Kg.m^{-3}
β_T	Coefficient dilatation thermique	k^{-1}
ρ_{∞}	La masse volumique du fluide a la température T_{∞}	-
q_w	Le flux surfacique	w.m^{-2}
∂	Dérivée partielle	-
θ	Température adimensionnelle	-
ψ	Fonction de courant	-
τ	Contraint de frottement	Nm^{-1}
η	Variable de similitude	-
δ	Epaisseur de la couche limite dynamique	m
δ_T	Epaisseur de la couche limite thermique	m
δ_1	Epaisseur de déplacement	m
δ_2	Epaisseur de quantité de mouvement	m

Indice

i, j $i^{\text{ème}}$ et $j^{\text{ème}}$ composantes.

∞ Infini

Abréviations

EDO Equation différentielle ordinaire

IVP Problème valeur initiale

BVP Problème valeur limite

Introduction Générale

Introduction Générale

Il est bien connu depuis plus d'un siècle, que les scientifiques se penchent sur l'étude des écoulements avec transfert de chaleur par différents modes de convection (naturelle, forcée et mixte). L'amélioration du transfert de chaleur par convection est l'objet principal de plusieurs travaux. Ainsi, un grand nombre de chercheurs ont mené une multitude d'études tant numériques qu'expérimentales sur la description des phénomènes géant la convection forcée.

Ce travail concerne l'étude numérique et la visualisation de la couche limite Thermique et dynamique au voisinage d'une plaque plane verticale chauffée en convection forcée. Pour cela nous avons eue recours aux équations de Navier-Stokes couplées à l'équation de Blasius par lesquelles nous allons aboutir à deux équations différentielles ordinaires que nous avons résolues par la méthode de différences finies avec le solveur `bvp4c` par l'outil MATLAB.

Ce mémoire est devisé en trois chapitres, le premier chapitre est consacré à des généralités sur le transfert thermique, le phénomène de la convection, couche limite sur plaque plane, ainsi quelques travaux bibliographique en rapport avec le problème posé.

Second chapitre est consacré a la modélisation mathématique du problème, aux hypothèses simplificatrices, équations de conservations et les conditions aux limites qui leurs sont associés que nous avons transformé sous forme adimensionnelles.

Troisième chapitre est consacré à la présentation des résultats obtenus après avoir programmé les équations différentielles ordinaires qui régisse le problème étudié, sur le logiciel de calcul MATLAB.

Enfin nous avons terminés par une conclusion générale résumant les principaux résultats obtenus durant cette étude.

Chapitre I
Généralités et contexte
Scientifique

I.1.Introduction :

Depuis plus d'un siècle, les scientifiques ont étudié les écoulements avec transfert de chaleur à travers différents modes de convection (naturelle, forcée et mixte).

Pour cette raison, dans ce premier chapitre nous allons présenter le phénomène de la convection qui est considéré le mécanisme le plus important de transfert d'énergie entre une surface solide et un liquide ou gaz.

Ainsi, nous allons présenter des définitions et concepts sur la couche limite devant une plaque verticale chauffée, passant par une étude détaillée et les méthodes utilisés pour résoudre les équations de la couche limite laminaire.

Enfin, quelques travaux bibliographiques en rapport avec le phénomène étudié.

I.2. Généralité sur transfert thermique :

I.2.1Définition :

Le transfert thermique correspond au déplacement de hautes températures c'est toujours le plus chaud qui cède de l'énergie au profit le plus froid, également appelé énergie microscopique désordonnée, qui est l'énergie thermique produite par la rencontre de différentes particules dans l'air, souvent appelée chaleur.

I.2.2 Modes de transfert thermique :

On distingue trois modes essentiels de transfert de chaleur la conduction, la convection, le rayonnement thermique. La conduction est un phénomène provoqué par une différence de température entre deux corps en contact sans déplacement de matière. La convection se produit entre deux phases dont l'une est généralement au repos et l'autre en mouvement en présence d'un gradient de température, implique un déplacement de matière dans le milieu. Et le rayonnement contrairement aux deux précédent ne nécessite pas un milieu matérielle transport se fait par des ondes électromagnétiques. [1]

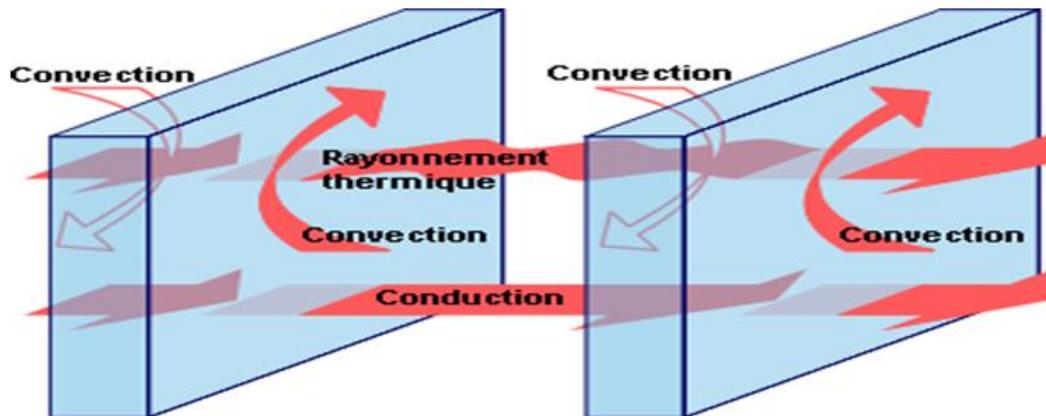


Figure I.1 : les modes de transfert thermique [2]

Et dans les problèmes de convection l'objectif principal est de déterminer le coefficient convectif pour différentes géométries et de multiples conditions d'écoulement. Le coefficient convectif dépend d'un nombre important de paramètres : propriétés physiques du fluide, la température, la vitesse, caractéristique de fluide.

Il s'avère très utile d'utiliser la technique de l'analyse adimensionnelle pour laquelle on groupe les grandeurs physiques sous forme de nombres adimensionnels, et on détermine expérimentalement et théoriquement la relation entre ces nombres qu'on représente par des corrélations. Les nombres adimensionnels importants dans la convection thermique sont : le nombre de Reynolds, Prandtl et Nusselt.

I.3. LA CONVECTION :

La convection est le phénomène qui se produit lorsqu'un fluide en mouvement et un objet stationnaire sont à des températures différentes. Elle décrit la transmission de chaleur dans un fluide, un gaz ou un liquide, avec des molécules mobiles.

Lorsqu'un fluide se déplace devant une plaque plane avec une différence de température, il y a un échange de chaleur entre la plaque et les particules de fluide en contact. Cet échange se fait par conduction. Cependant, une fois que la particule fluide a traversé la chaleur, elle se déplace et est remplacée par une autre particule.

Le mécanisme de base pour le transfert de chaleur est la conduction, mais le phénomène global est la convection, qui résulte de la combinaison de cette conduction avec des mouvements de fluide qui suivent des lois spécifiques. [3].

I.3.1 Formulation générale des équations de la convection :

L'analyse de la convection thermique est basée sur l'application de trois lois physiques fondamentales : conservation de masse, quantité de mouvement et d'énergie.

Dans le but d'établir la formulation du phénomène de la convection, nous recommandons les équations classiques de Navier-Stokes écrites sous forme vectorielle : [4]

- **Equation de conservation de la masse :**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{\nabla} \rho \vec{V} = \bar{0} \quad (\text{I.1})$$

- **Equation de conservation de la quantité de mouvement :**

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} - \bar{\nabla} p + \mu \bar{\nabla}^2 \vec{V} \quad (\text{I.2})$$

- **Equation de l'énergie :**

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = \bar{\nabla} \cdot k \bar{\nabla} T + \mu \phi \quad (\text{I.3})$$

En deux dimension l'opérateur $\bar{\nabla}$ est un vecteur est défini par :

$$\bar{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} \quad (\text{I.4})$$

Et :

$$\frac{D}{Dt} = u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial t} \quad (\text{I.5})$$

ϕ Est la fonction de la dissipation définie en deux dimensions comme suit : [4]

$$\phi = 2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right] + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \quad (\text{I.6})$$

I.3.2. Les Types de la convection :

La transmission de chaleur par convection est désignée, selon le mode d'écoulement du fluide, par convection libre, convection forcée et convection mixte.

I.3.2.1. Convection libre (naturelle) :

C'est le cas dans lequel le mouvement du fluide est provoqué par des différences de densité, qui sont provoquées par des différences de température dans le fluide.

La convection naturelle dans laquelle le mouvement est provoqué par une modification du volume massique du fluide en fonction de la température ; ce changement crée un champ gravitationnel qui régit le mouvement des particules fluides. La convection naturelle se produit lorsqu'un fluide entre en contact avec une paroi plus chaude ou plus froide, ce qui entraîne des différences de volume de masse qui provoquent un mouvement à l'intérieur du fluide. [5]

Le nombre de Grashof caractérise la convection naturelle du type où plus le nombre est élevé, plus l'effet de convection naturelle est important.

$$Gr = \frac{g\beta(T_s - T_\infty)L_C^3}{\nu^2} \quad (\text{I.7})$$

De façon générale : $Nu_{L_c} = f(Gr_{L_c}, Pr)$ [5]



Figure I.2 : transfert par convection naturelle [6]

I.3.2.2. Convection forcée :

La convection forcée dans laquelle le mouvement est provoqué par un processus mécanique indépendant des phénomènes thermiques (pompe, ventilateur). Le mouvement des particules fluides est donc provoqué par un gradient de pression externe. L'étude de la transmission thermique par convection est donc étroitement liée à l'étude de l'écoulement des fluides. [5]

L'application du théorème de Buckingham à un problème de convection forcée fait apparaître trois groupements ou nombres sans dimension en relation sous la forme suivante :

$$Re = \frac{VL_C}{\nu} \quad \text{Le nombre de Reynolds.}$$

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} \quad \text{Le nombre de Prandtl}$$

La relation générale de la convection forcée selon des différentes conditions étudiées est :

$$Nu_{L_c} = f(Re_{L_c}, Pr) [7]$$



Figure I.3 : Transfert par convection forcée. [6]

I.3.2.3. Convection mixte :

La Convection mixte correspond au couplage des deux phénomènes précédents (Convection libre et forcée) quand les vitesses d'écoulement, fictives, dues aux deux types de convections sont considérées séparément, du même ordre de grandeur. [8]

Le groupe adimensionnel qui détermine laquelle de ces convections est dominante est le nombre de Richardson, rapport du nombre de Grashof sur le carré du nombre de Reynolds :

(I.8)

$Ri \ll 1$ La convection forcée dominante.

$Ri \gg 1$ La convection naturelle dominante.

$Ri \approx 1$ La convection mixte.

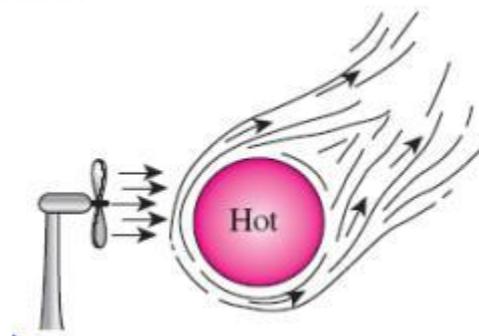


Figure I.4 : convection mixte [9]

I.4. Écoulement laminaire externe :

Le flux externe du fluide est en contact avec la paroi matérielle, mais est infini dans les autres directions. L'exemple le plus classique est l'écoulement sur une plaque plane [10]. Il existe

certaines écoulements sont lisses et ordonnées, tandis que d'autres sont plutôt chaotiques. En écoulement laminaire pur, les flux de fluides ne se mélangent pas ; l'échange de substances d'une couche à une couche adjacente est entièrement dû à l'agitation moléculaire. Le terme écoulement laminaire vient du mouvement des particules fluides adjacentes dans un stratifié. L'écoulement de fluides à haute viscosité, tels que des huiles à faible vitesse, est généralement laminaire. Ainsi, le nombre de Prandtl des gaz est proche de l'unité, en revanche, les liquides non métalliques (eau, alcools) les liquides visqueux (glycérol, huile) vont de quelques unités à des centaines d'unités, comme les liquides métalliques (mercure, métal ou alliage en fusion) avec un nombre de Prandtl d'environ 0,1 à 0,01. [1]

I.5. Nombres adimensionnels :

Dans les études de convection, il est courant de dimensionner les équations gouvernantes et de combiner les variables, qui se regroupent en nombres sans dimension afin de réduire le nombre de variables totales :

- **Nombre de Nusselt :**

Est un nombre adimensionnel utilisé pour caractériser le type de transfert thermique entre un fluide et une paroi. [11]

$$Nu = \frac{hL_c}{\lambda} \quad (\text{I.9})$$

h : Coefficient de transfert thermique ($\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{k}^{-1}$)

λ : Conductivité thermique du fluide ($\text{w}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{k}^{-1}$)

L_c : La longueur caractéristique (m)

- **Nombre de Reynolds :**

Après des expériences exhaustives dans les années 1880, Osborne Reynolds a découvert que le régime d'écoulement dépend principalement du rapport des forces d'inertie aux forces visqueuses dans le fluide. Ce rapport est appelé nombre de Reynolds. [11]

$$Re = \frac{VL}{\nu} = \frac{\rho VL_c}{\mu} \quad (\text{I.10})$$

ρ : La masse volumique du fluide (Kg/m^3)

V : la vitesse moyenne du fluide (m/s)

L_c : Longueur caractéristique (m)

μ : viscosité dynamique ($\text{kg}/\text{m}/\text{s}$)

- **Nombre de Prandtl :**

Le nombre de Prandtl caractérise entièrement le fluide considéré. Il compare la rapidité des phénomènes thermiques et des phénomènes hydrodynamiques dans un fluide. [11]

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\mu C_p}{\lambda} \quad (\text{I.11})$$

C_p : capacité thermique massique ($\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$)

- **Nombre de Grashof :**

Le nombre de Grashof (Gr) est un nombre sans dimension utilisé en mécanique des fluides pour caractériser la convection libre dans un fluide. [11]

$$Gr = \frac{\beta g \rho^2 L_c^3 \Delta T}{\mu^2} = \frac{\beta g L_c^3 \Delta T}{\nu^2} \quad (\text{I.12})$$

g : accélération de pesanteur

β : coefficient de dilatation

ΔT : différence de température

- **Nombre de Brinkman :**

C'est un nombre sans dimension utilisé pour le transfert de chaleur et est principalement utilisé pour le moulage de liquides visqueux tels que les polymères. Il donne le rapport entre l'énergie de la force visqueuse dissipée et l'énergie transférée par conduction thermique.

On le définit de la manière suivante : [12]

$$Br = \frac{\mu V^2}{\lambda \Delta T} \quad (\text{I.13})$$

- **Nombre de Rayleigh :**

Le nombre de Rayleigh est étroitement lié au nombre de Grashof et Prandtl. Les deux chiffres sont utilisés pour décrire la convection naturelle (Gr) et le transfert de chaleur par convection naturelle (Ra). [13]

$$Ra = Gr * Pr \quad (\text{I.14})$$

- **Lois de corrélation pour le calcul de Nusselt pour un fluide devant une surface [14],[15] :**

$$\overline{Nu} = \left\{ 0.825 + \frac{0.387.Ra_D^{1/6}}{\left[1 + (0.492 / Pr)^{9/16} \right]^{8/27}} \right\}^2 \quad (\text{I.15})$$

I.6. Couche limite sur une plaque plane :

Une couche limite est une région spécifique d'écoulement de cisaillement libre ou de paroi où les gradients de vitesse et de température sont concentrés, suivie d'une couche limite thermique, dynamique [16]. La région où l'écoulement s'ajuste d'une vitesse nulle à la paroi à un maximum dans l'écoulement principal de l'écoulement s'appelle la couche limite. Le concept de couches limites est important dans toute la théorie de la dynamique des fluides visqueux et du transfert de chaleur.

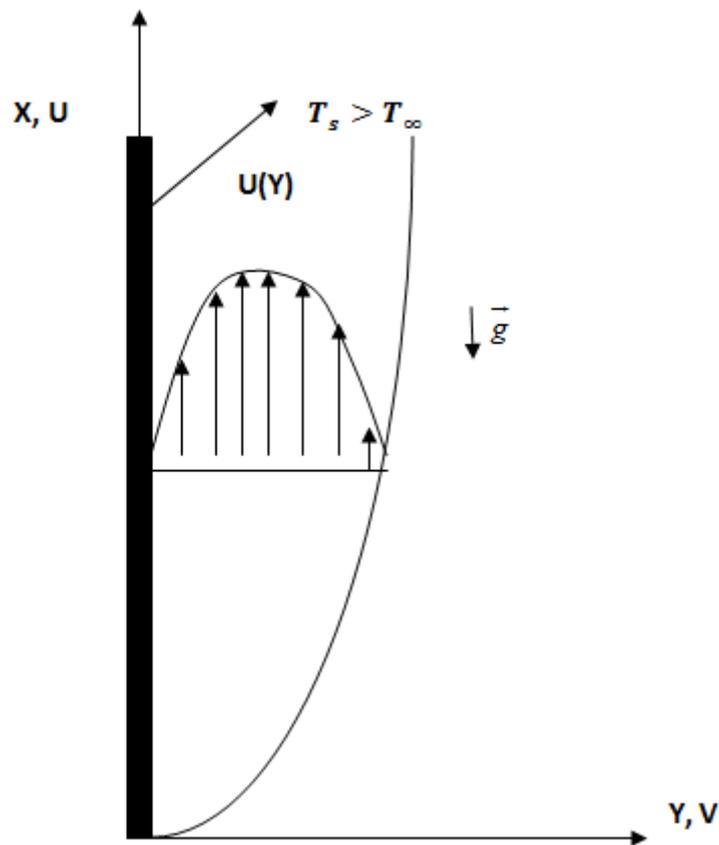


Figure I.5 : La couche limite sur une plaque verticale chauffée. [17]

I.6.1. Type de couche limite :

I.6.2.1. Couche limite dynamique :

Une couche limite dynamique est une région où la rotation alitée est très forte aux parois et affaiblie aux frontières ; le fluide est au repos en raison de la contrainte de cisaillement aux parois. La couche limite peut être laminaire ou turbulente, selon la valeur du nombre de Reynolds. [18] :

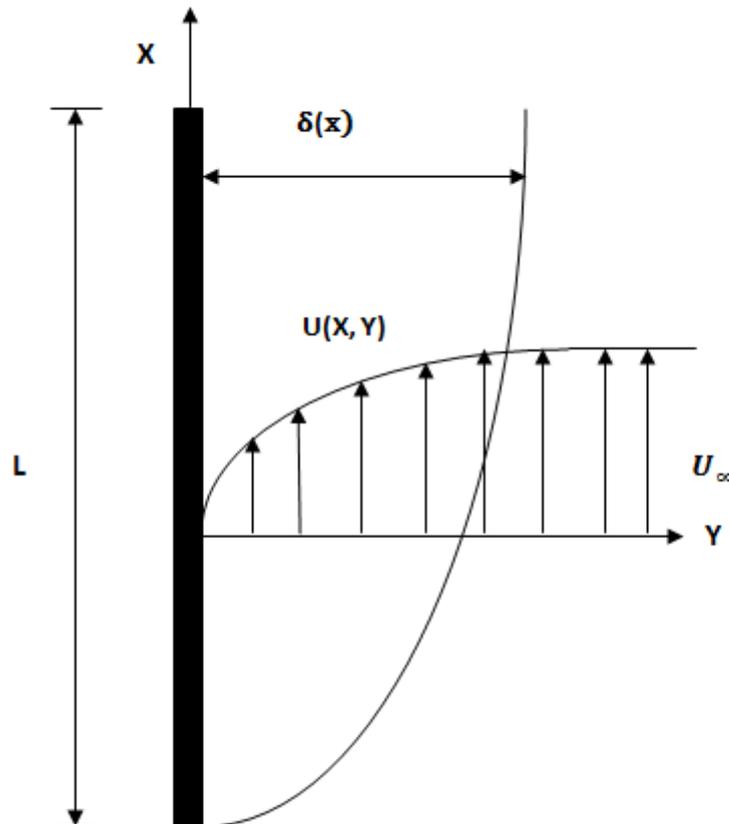


Figure I.6: Variation de l'épaisseur et de la vitesse de la couche limite dynamique sur une paroi plane. [19]

I.6.2.2. Couche limite thermique :

Une couche limite thermique est définie là où la température diffère de la température ambiante : c'est la région où la température est perturbée par la présence de l'interface. [18] :

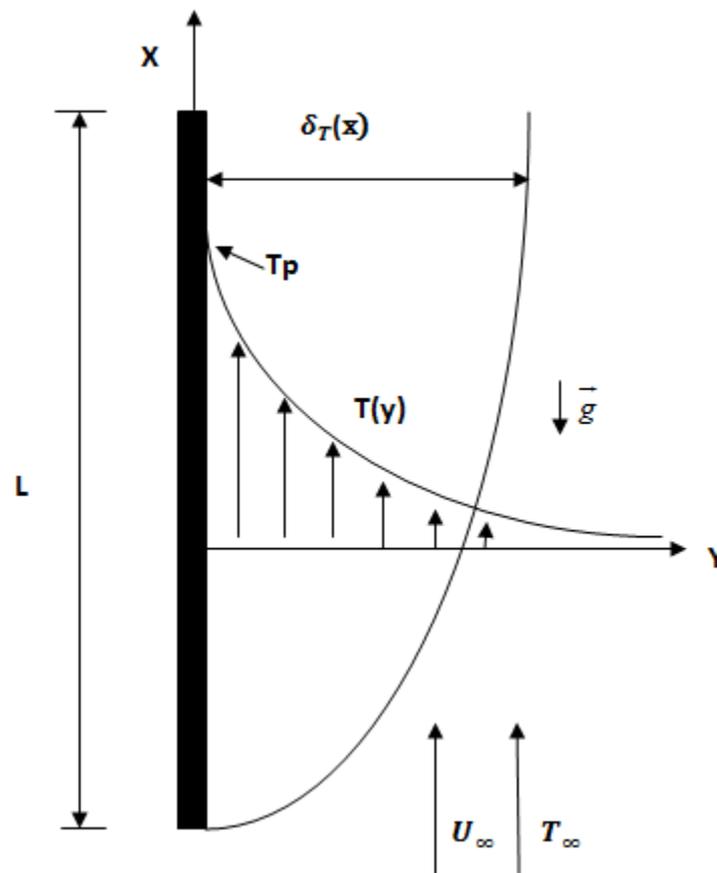


Figure I.7 : Couche limite thermique sur une plaque plane. [19]

I.6.2. Équations de la couche limite Dynamique et thermique :

Passons maintenant à l'étude détaillée de la couche limite laminaire. Avec ces hypothèses, on peut dériver les équations de la couche limite, des équations de Navier Stokes, ici écrites en termes de dimensions, dans le cas d'une plaque plane. Il reste à voir si les équations de Navier Stokes (représentant le bilan de quantité de mouvement local) peuvent être simplifiées dans cette partie de l'écoulement, en préservant les conditions expérimentales. [10]

Les données expérimentales stipulent que l'écoulement est :

- permanent : $\frac{\partial}{\partial t} = 0$
- bidimensionnel (dans le plan x, y).
- isochore : $\rho = \text{cte.}$

- **Equation de continuité :**

$$\text{div} \vec{V} = 0 \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{I.16})$$

- **Equation de quantité de mouvement :**

Selon x :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \rho g \quad (\text{I.17})$$

Selon y :

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \rho g \quad (\text{I.18})$$

• **Equation de l'énergie :**

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (\text{I.19})$$

u et v: Les composant de vitesse

ρ : La masse volumique

P : La pression

ν : Viscosité cinématique

Puisque à une abscisse donnée l'épaisseur δ est toujours petite devant x , on peut soupçonner que $v < u$, que les variations de v sont faibles devant celles de u , et que les variations de u et v (y compris au niveau des dérivées secondes) sont beaucoup moins marquées suivant la direction x que suivant la direction y . On formule ainsi les « hypothèses de la couche limite » (ou hypothèses de Prandtl) : [10]

$$\frac{\partial T}{\partial x} < \frac{\partial T}{\partial y} \quad v < u \quad : \quad \frac{\partial v}{\partial x} < \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{ET} \quad \frac{\partial v}{\partial y} < \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} < \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} < \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \text{ET} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} < \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} < \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

Alors, les équations de Navier – Stokes prennent une forme simplifiée, dite dégénérée, qui s'établit sur deux niveaux. Les termes $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ peuvent être négligés devant $\frac{\partial^2}{\partial y^2}$, il reste :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (\text{I.20})$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad (\text{I.21})$$

On a :

$$\frac{\partial p}{\partial y} < \frac{\partial p}{\partial x} \text{ On est donc conduit à poser l'approximation } \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

En conclusion, équation de couche limite (équation de Prandtl) est comme suivante : [11]

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{I.22})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{array} \right. \quad (\text{I.23})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{I.24})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \end{array} \right. \quad (\text{I.25})$$

I.7. Approche différentielle (équation de Blasius)

Blasius a introduit une technique en 1908 pour transformer le problème bien connu de l'écoulement laminaire de la couche limite sur une plaque plane en équations différentielles ordinaires. L'équation de Blasius est très importante dans de nombreuses applications d'ingénierie, et sa solution fournit une très bonne approximation de l'épaisseur de la couche limite et de la résistance totale en écoulement externe laminaire : [20]

$$f'''(\eta) + \frac{1}{2} f(\eta) f''(\eta) = 0 \quad (\text{I.26})$$

Les conditions aux limites sont :

$$f(0) = 0 \quad f'(0) = 0 \quad f'(\infty) = 1$$

Où la prime désigne la dérivation par rapport à η qui est appelée variable de similitude et définie comme : [20]

$$\eta = \frac{y}{\delta} \quad (\text{I.27})$$

I.8. Approche intégrale (Equation de Von Karman) :

Cette méthode d'intégration est basée sur deux articles de Von Karman et Pohlhausen en 1921. La solution exacte de l'équation de la couche limite ne peut être trouvée que dans des cas

simples, comme une couche limite sur une plaque horizontale plane sans gradient de pression, dont la solution est dans des cas plus complexes, la méthode de Karman-Pohlhausen est une technique alternative très utile. En dehors (extérieur) de la couche limite où l'écoulement est considéré comme idéal (non visqueux), à partir de l'équation du mouvement suivant x , il

$$\text{s'ensuit : [21]} \quad -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = u_e \frac{du_e}{dx} \quad (\text{I.28})$$

Par la suite, l'équation intégrale de Von Karman peut être établie en intégrant l'équation de mouvement par rapport à y de 0 à ∞ : [21]

$$\frac{d\delta_2}{dx} + \frac{2+H}{u_e} \frac{du_e}{dx} \delta_2 = \frac{\tau_p}{\rho u_e^2} \quad (\text{I.29})$$

I.9. Profil de Pohlhausen :

Pour fermer l'équation de Von Karman, Pohlhausen a proposé en 1921 d'exprimer le profil de vitesse dans la couche limite à l'aide d'une fonction polynômiale de quatrième degré : [22]

$$\frac{u}{u_e} = A_0 + A_1\eta + A_2\eta^2 + A_3\eta^3 + A_4\eta^4 = P_4(\eta) \quad (\text{I.30})$$

$$\text{Avec : } \eta = \frac{y}{\delta}$$

Les conditions aux limites appropriées conduisent à un système de 5 équations dont la résolution permet de déterminer les 5 constantes A_i . Finalement, le profil de vitesse s'écrit : [21]

$$\frac{u}{u_e} = [2\eta - 2\eta^3 + \eta^4] + \frac{\Lambda}{6} \eta(1-\eta)^3 \quad (\text{I.31})$$

Avec Λ est le paramètre de Pohlhausen. La méthode de Pohlhausen n'est qu'un exemple, parmi beaucoup d'autres, qui montre comment fermer l'équation de Von Karman pour une couche limite laminaire.

I.10. Paramètres caractéristiques de la couche limite :

- **Épaisseur de la couche limite dynamique δ :**

On définit conventionnellement l'épaisseur de la couche limite δ comme la distance à la paroi telle que [23] :

$$\frac{u(x, \delta)}{u_e} = 0.99 \quad (\text{I.32})$$

$$\delta = x \sqrt{\frac{1}{R_{ex}}} \text{ Avec : } R_{ex} = \frac{\rho u x}{\mu}$$

Donc δ est proportionnelle à x : la forme de la couche limite est parabolique.

- **Épaisseur de la couche limite thermique δ_T :**

L'épaisseur δ_T de la couche limite thermique est conventionnellement définie comme étant la distance à la paroi pour laquelle le rapport :

$$\frac{T - T_s}{T_\infty - T_s} = 0,99 \quad [6] \quad (\text{I.33})$$

- **Épaisseur de déplacement δ_1 :**

L'épaisseur de déplacement δ_1 caractérise la perte de débit massique au travers d'une section de la couche limite par rapport au cas de l'écoulement de fluide parfait incompressible [23] :

$$\delta_1 = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy \quad (\text{I.34})$$

- **Épaisseur de quantité de mouvement δ_2 :**

L'épaisseur de quantité de mouvement δ_2 caractérise la perte de quantité de mouvement dans la couche limite par rapport au cas d'écoulement de fluide parfait [23]:

$$\delta_2 = \int_0^\delta \frac{u}{u_e} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy \quad (\text{I.35})$$

- **Force de frottement :**

La force de frottement est liée à la contrainte de cisaillement pariétale donné par [23] :

$$\tau_p = \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} \quad (\text{I.36})$$

- **Coefficient de frottement :**

La contrainte de cisaillement pariétale peut être normalisée par la pression dynamique, on obtient ainsi un coefficient sans dimension dit coefficient de frottement local [24] :

$$C_f = \frac{\tau_p}{\frac{1}{2} \rho u e^2} \quad (\text{I.37})$$

I.11.L'état de l'art :

ONUR [25] Dans cet article, l'auteur a mené une étude expérimentale de la convection forcée provenant de la surface d'un modèle de capteur solaire plan (dont le plus petit mesurait $7,62 \times 10^{-2}$ m de longueur, $7,62 \times 10^{-2}$ m de largeur et $3,3 \times 10^{-2}$ m de profondeur ; et le plus grand avait $15,875 \times 10^{-2}$ m de longueur, $15,875 \times 10^{-2}$ m de largeur et $3,3 \times 10^{-2}$ m de profondeur) placé sur le toit incliné d'un modèle de maison résidentielle ; en s'attendant à ce que ces petites unités puissent représenter un capteur solaire plan. Les expériences ont été effectuées pour déterminer les coefficients de transfert de chaleur moyens pour un écoulement d'air en convection forcée sur la surface du modèle qui était inclinée avec 30° et 45° par rapport à la direction de l'écoulement d'air loin du modèle. La vitesse du vent variait approximativement de 2,5 m/s à 15 m/s dont l'écoulement était laminaire. L'étude conclut qu'une réduction des pertes de chaleur d'environ 15% est attendue pour un angle d'orientation de 180° .

DEWITT et INCROPERA [26] Le livre « Fundamentals of Heat and Mass Transfer » représente une référence dans le domaine de transfert de chaleur et de masse. Dans cette référence, on peut trouver tout un chapitre consacré pour les écoulements externes dans lequel les auteurs ont présenté en détail la théorie de la couche limite dynamique et thermique sur une plaque plane horizontale ; à l'aide de laquelle les équations de mouvement et d'énergie peuvent être simplifiées puis résolues pour avoir la distribution de la vitesse et de la température. Cela nous permet de déduire l'équation "la plus fameuse dans le domaine du transfert de chaleur" exprimant le nombre de Nusselt en fonction du nombre de Reynolds et du nombre de Prandtl et servant de référence pour presque tous les travaux réalisés depuis:

$$Nu = 0.664 Re^{0.5} Pr^{0.33} \quad \text{Laminaire}$$

$$Nu = 0.0293 Re^{0.8} Pr^{0.33} \quad \text{Turbulent}$$

Kumari et al. [27] Intéressé par l'écoulement de convection mixte de fluides non newtoniens sur une plaque mobile chauffée à une température constante. Une partie du système d'équations thermodynamiques et cinétiques régissant l'écoulement est résolue numériquement

dans un format implicite par la méthode des différences finies. Ils ont étudié l'effet de divers paramètres impliqués dans le transfert de chaleur pariétal, tels que le nombre de Prandtl, le nombre de Pecklet et la poussée thermique.

Mai Ton Hoang et al. [28] Ont étudié, en régime transitoire, la couche limite laminaire sur une plaque verticale en convection mixte. Le système d'équations est résolu à l'aide de la méthode numérique aux différences finies, avec un schéma implicite. Ils ont montré que la nature de la plaque influe sur les épaisseurs des couches limites dynamique et thermique ainsi que sur la vitesse de l'écoulement. Ils ont observé qu'une faible perturbation de vitesse engendre une instabilité de l'écoulement

Aya Adnan, 2013 [29] L'étude Théorique et expérimentale de convection forcée en transfert thermique d'une plaque chauffante noyée dans milieux poreux à flux thermique constant. Les expériences effectuées pour étudier l'effet nombre de Reynolds ($24118 \leq Re \leq 82208$) sur le flux chaleur ($1000 \leq \text{flux thermique} \leq 5000 \text{ W / m}^2$) et nombre de Reynolds sur le numéro local de Nusselt, en utilisant le programme fluent. Le cadre théorique et les résultats expérimentaux ont révélé que le mur local, la température augmente avec le débit, diminue avec le nombre de Reynolds et augmente avec la chaleur fluide, mais la température du fluide diminue progressivement dans les milieux poreux avec la verticale la direction à l'opposé du mur chauffé, et les résultats montrent une augmentation du nombre local de Nusselt lorsque le nombre de Reynolds et le flux thermique augmentent.

Al-Sanea [30] a traité le cas de la convection mixte le long d'une plaque isotherme verticale mobile avec aspiration ou injection. L'écoulement est considéré laminaire en régime permanent avec des propriétés constantes sauf dans le terme de gravité où l'hypothèse de Boussinesq est adoptée, la dissipation visqueuse est négligeable. Les équations sont discrétisées et résolues à l'aide de la méthode des volumes finis. Il a étudié les effets du nombre de Prandtl, la force de flottabilité et l'aspiration ou l'injection sur les coefficients de frottement et de transfert thermique.

Hsiao-Tsung et al. [31] ont étudié la convection mixte en régime permanent de couche limite laminaire sur une plaque isotherme, horizontale et en mouvement parallèle à l'écoulement du fluide. Le système d'équations est résolu numériquement par la méthode de Keller's Box, avec un schéma implicite. Les solutions numériques précises et des corrélations complètes sont présentées pour une large gamme de fluides $0.01 \leq Pr \leq 10000$ et dans tout le domaine de la convection mixte. L'étude engendre n'importe quelle vitesse relative entre la plaque et

l'écoulement potentiel. Les effets de la poussée thermique et de la vitesse relative sur le champ d'écoulement, le frottement, le champ de température et le taux de transfert thermique sont illustrés pour une plaque se déplaçant parallèlement en co-courant ou en contre-courant de l'écoulement potentiel et ceci pour les cas : (i) ; l'écoulement potentiel et la poussée thermique dans le même sens et (ii) ; l'écoulement potentiel et la poussée thermique dans le sens inverse

Guo T. et al. [32] L'étude entreprise a porté sur l'influence de la convection naturelle sur la convection forcée au-dessus d'une surface plane verticale soumise à un flux de rayonnement thermique. Ils ont considéré un plan vertical semi-infini dont une face est soumise au rayonnement tandis que l'autre est léchée par un fluide en écoulement, parallèlement à sa surface. L'échauffement du plan par le rayonnement, donne naissance à une convection naturelle dans le fluide qui perturbe l'écoulement forcé. Ces auteurs ont axé leur dans le calcul, en régime laminaire et permanent, des distributions des vitesses et de la température, dans la couche limite qui se développe sur le plan à partir de son bord d'attaque.

Mohmed Ali et Al-yousef [33] Ont étudié l'écoulement d'une couche limite laminaire, en convection mixte, sur une surface verticale présentant une perméabilité linéaire en mouvement. L'investigation traite les cas d'une poussée thermique qui aide ou s'oppose à l'écoulement. Les solutions locales de similitude sont obtenues par les équations de la couche limite. Comme conditions aux limites, ces auteurs ont supposé que les variations de la température et de la vitesse suivent une loi en puissance. L'étude a porté sur l'effet de divers paramètres régissant l'écoulement, tels que le nombre de Prandtl Pr , le paramètre d'injection ou aspiration d et le nombre de Richardson sur les distributions de vitesse, de température et du coefficient de transfert thermique. Des valeurs critiques ont été trouvées et qui sont vérifiées par la solution analytique de l'équation d'énergie.

NAHOUI et BAHY [34] Ont étudié la couche limite laminaire, bidimensionnelle et incompressible sur une plaque plane et autour des profils NACA 0012 et NACA 661012 et son contrôle par soufflage et par aspiration, est étudiée par voie numérique. L'étude est basée sur le modèle de la couche limite de Prandtl utilisant la méthode des différences finies et le schéma de Cranck-Nicolson. La distribution de vitesse, l'épaisseur de la couche limite et le coefficient de frottement, sont déterminés et présentés avec et sans contrôle. L'application du contrôle a démontré son effet positif sur le point de transition et sur le coefficient de frottement. Les deux techniques de contrôle sont comparées pour différentes longueurs, vitesses et angles de soufflage et d'aspiration.

I.12.Conclusion :

Nous avons vu dans ce chapitre la recherche bibliographique et les définitions, les équations générale de la convection et les couches limites .Ce qui nous permet de faire le choix physique et mathématique étudié, ainsi que les conditions initiales et les conditions aux limites qui sont associées et que nous allons aborder dans le prochain chapitre.

Chapitre II
Problématique
Et modélisation mathématique

II.1. Introduction :

Dans ce chapitre, nous présentons le problème physique et les hypothèses simplificatrices. On utilise les formulations générales des équations de la convection (équation Navier-stokes) devant une plaque verticale, nous allons exprimer les équations de conservation et les conditions aux limites sous forme adimensionnelle.

II.2. Présentation de problème :

Le schéma ci-dessous (Figure II.1) représente le problème physique à traiter, L'origine de repère O_{xy} est situé sur la plaque et coïncide avec son bord d'attaque. L'axe O_x est orienté suivant le sens de l'écoulement, L'axe O_y est perpendiculaire à la plaque.

On considère une plaque plane verticale chauffée par un fluide à une température T_f et un coefficient d'échange convectif h_f constant, avec un écoulement laminaire et permanent, d'un fluide newtonien, incompressible caractérisé par une vitesse U_∞ et une température T_∞ traversant en mouvement ascendant qui entre en contact avec la surface de la paroi telle qu'il est montré sur le schéma, avec \vec{g} est l'accélération de pesanteur. Dans ce cas il apparaîtra deux couches limites thermique, dynamique qui sont respectivement δ_T , δ_D .

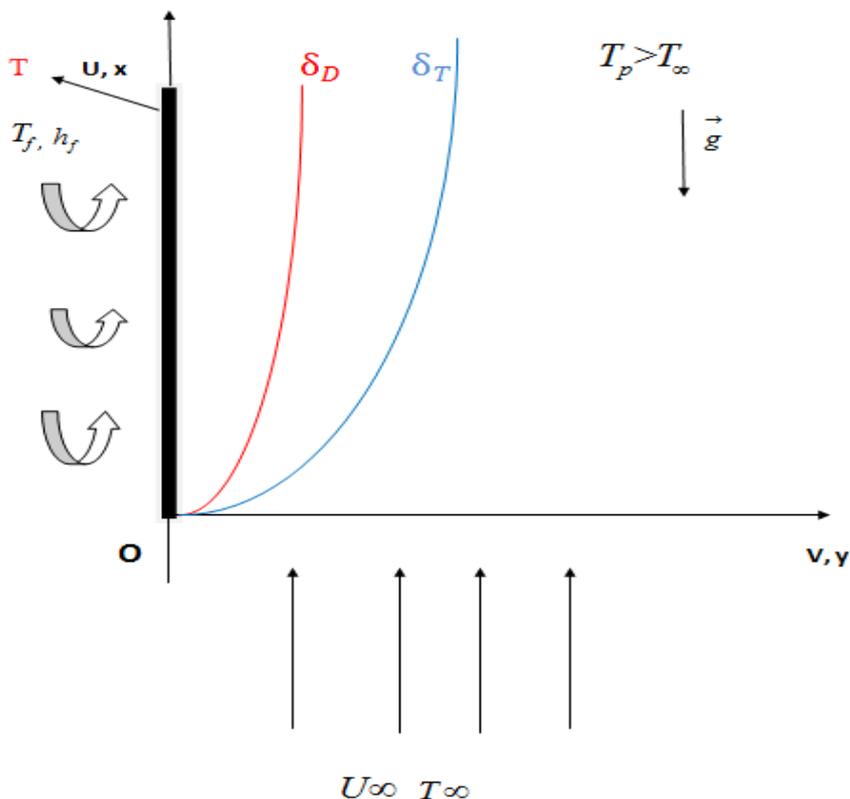


Figure II.1 : Géométrie du problème et système de coordonnées

II.3. Hypothèses simplificatrices :

La modélisation du système étudié est basée sur les hypothèses suivantes :

- Régime permanent $\frac{\partial}{\partial t} = 0$
- Ecoulement bidimensionnel (x, y).
- Le fluide étudié est newtonien $(\rho, \mu) = cst$ et incompressible.
- Les approximations de couche limite :

$$v < u ; \quad \frac{\partial v}{\partial x} < \frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial v}{\partial y} < \frac{\partial u}{\partial y} \quad \frac{\partial T}{\partial x} < \frac{\partial T}{\partial y}$$

$$\text{On applique l'approximation d'Oberbeck Boussinesq : } \rho = \rho_{\infty}[1 - \beta_T(T - T_{\infty})] \quad (\text{II.1})$$

ρ_{∞} : La masse volumique du fluide à la température d'entrée T_{∞}

β_T : Le coefficient de dilatation thermique.

II.4. Equations de conservations :

Les équations (I.1) (I.2) (I.3) gouvernent l'écoulement convectif forcé et le transfert de chaleur en coordonnées cartésiennes, après simplification ses équations s'écrivent comme suit:

- **Equation de continuité :**

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{II.2})$$

- **Equation de quantité de mouvement :**

Selon Ox :

$$u \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g \beta_T (T - T_{\infty}) \quad (\text{II.3})$$

Selon Oy :

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (\text{II.4})$$

- **Equation d'énergie :**

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\mu}{\rho C_p} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (\text{II.5})$$

$$\alpha = \frac{\lambda}{\rho C_p}$$

II.4.1. Conditions aux limites :

$$\left\{ \begin{array}{llll} y = 0 & u = 0 & v = 0 & -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = h(T_f - T) \\ y \rightarrow \infty & u = U_\infty & T(\infty) = T_\infty & \end{array} \right. \quad (\text{II.6})$$

T_∞ : Représente la température caractéristique de l'écoulement de convection forcée.

U_∞ : Représente la vitesse caractéristique de l'écoulement de convection forcée.

II.5. Formulation adimensionnelle :

Pour résoudre le problème il est préférable d'utiliser l'adimensionnement des variables qui nous permettent d'avoir des informations généralisées à une variété des problèmes ayant les mêmes grandeurs de coefficient de similitudes, et réduire le nombre de paramètres d'un problème. Pour faire apparaître les paramètres de contrôle du problème, il est nécessaire d'introduire les grandeurs de référence :

II.5.1. Changement de variable :

- Le nombre de Reynolds définie par : $\text{Re}_x = \frac{U_\infty x}{\nu}$

- La fonction de courant définie par : $u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}$ et $v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$

- La variation de similitude définie par : $\eta = \frac{y}{x} \text{Re}_x^{\frac{1}{2}}$

- vitesses adimensionnelles définie par : $u = U_\infty f'$ et $v = \frac{\nu}{2x} (\text{Re}_x^{\frac{1}{2}})(\eta f' - f)$

Les variables adimensionnelles ψ, θ définie par :

$$\psi = \nu \text{Re}_x^{\frac{1}{2}} f(\eta) \quad ; \quad \theta(\eta) = \frac{T - T_\infty}{T_f - T_\infty}$$

II.5.2. Equations adimensionnelles :

- Equation de quantité de mouvement :

$$f''' + \frac{1}{2} ff'' + Gr \theta = 0 \quad (\text{II.7})$$

- Equation de l'énergie :

$$\theta'' + \frac{1}{2} Pr \theta' f + Br f''^2 = 0 \quad (\text{II.8})$$

II.5.3. Conditions aux limites :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{A } \eta=0 : \quad f'=0 \quad ; \quad f(0)=0 \quad ; \quad \theta' = -H(1-\theta) \\ \text{A } \eta \rightarrow \infty : \quad f'=1 \quad ; \quad \theta=0 \end{array} \right. \quad (\text{II.9})$$

Avec :

$$\text{Paramètre de convection a la paroi : } H = \frac{-Bi_x}{\text{Re}_x^{\frac{1}{2}}}$$

$$\text{Nombre de Grashof : } Gr = \frac{g\beta_T \Delta T x}{U_\infty^2}$$

$$\text{Nombre de Prandtl : } Pr = \frac{\mu C_p}{\lambda}$$

$$\text{Nombre de Brinkman : } Br = \frac{\mu U_\infty^2}{\lambda \Delta T}$$

II.6. Caractérisation de nombre de Nusselt et le coefficient de frottement:

Le nombre de Nusselt est un nombre adimensionnel utilisé pour caractériser le transfert

Thermique entre un fluide et une paroi « transfert convectif », défini par :

$$Nu_x = \frac{x(q_w)}{h\Delta T} \quad (\text{II.10})$$

La densité thermique : $q_w = -h \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0}$ (II.11)

De l'équation (II.10), (II.11) on obtient :

$$\frac{Nu_x}{Re_x^{\frac{1}{2}}} = -\theta(0) \quad (\text{II.12})$$

Coefficient de frottement est un paramètre caractéristique sans dimension de la couche limite définie par :

$$C_f = \frac{\tau_w}{\rho U_\infty^2} \quad (\text{II.13})$$

Contrainte de cisaillement : $\tau_w = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0}$ (II.14)

De l'équation (II.13), (II.14) on obtient :

$$Re_x^{\frac{1}{2}} C_f = f''(0) \quad (\text{II.15})$$

II.7. Conclusion :

Durant la résolution de notre problème physique, nous avons utilisé les équations de Navier-Stokes en coordonnée cartésienne qui gouverne l'écoulement laminaire en convection forcé, qui nous a permis de trouver les équations adimensionnelles à l'aide des grandeurs physique et les changements de variable.

Chapitre III

Résultats et discussions

III.1.Introduction :

Dans ce chapitre nous décrivons la méthode numérique utilisée pour résoudre les équations de base formulées dans le chapitre II, et est consacré à la présentation des résultats obtenus après avoir programmé les équations différentielles ordinaires qui régissent le problème étudié, sur le logiciel de calcul MATLAB.

Rappelant que le problème étudié est un écoulement en convection forcé devant une Plaque plane verticale chauffée.

III.2.Validation de programme :

Afin de vérifier l'exactitude de la méthode utilisée, les résultats actuels correspondants Sont comparés à ceux obtenus par la référence [36] (tableau III.1), Il ressort de ce tableau que les résultats Actuels sont en bon accord avec ceux rapportés par le travail cité.

H	Pr	$\theta (0)$		$-\theta (0)$	
		Abdul Aziz [35]	Présent travaille	Abdul Aziz [35]	Présent travaille
0,05	0,1	0,2536	0,2536	0 ,0373	0 ,0373
	0,72	0,1447	0,1447	0,0428	0,0428
	10	0,0643	0,0643	0,0468	0,0468
0,8	0,1	0,8446	0,8446	0,1243	0,1243
	0,72	0,7302	0,7302	0,2159	0,2159
	10	0,5235	0,5235	0,3812	0,3812
10	0,1	0,9855	0,9855	0,1450	0,1450
	0,72	0,9713	0,9713	0,2871	0,2871
	10	0,9321	0,9321	0,6787	0,6787

Tableau III.1 : Comparaison de $\theta (0)$ et $-\theta (0)$ pour différentes valeurs de H, et Pr

III. 3 .Résultats et discussions :

Une étude paramétrique a été réalisée selon la méthode décrite précédemment, un ensemble représentatif des résultats graphiques a été obtenu pour la vitesse adimensionnelle $f'(\eta)$, la température $\theta(\eta)$. Cela pour plusieurs conditions de nombre adimensionnels. Nombre de Grashof, le nombre de Prandtl, et le nombre de Brinkman.

III.3.1. Profil de vitesse adimensionnelle :

La variation de la distribution de la vitesse adimensionnelle suivant la variable de similarité η est représentée respectivement sur les figures (III.1) à (III.3) pour quelques ensembles de valeurs de Gr, Br et Pr.

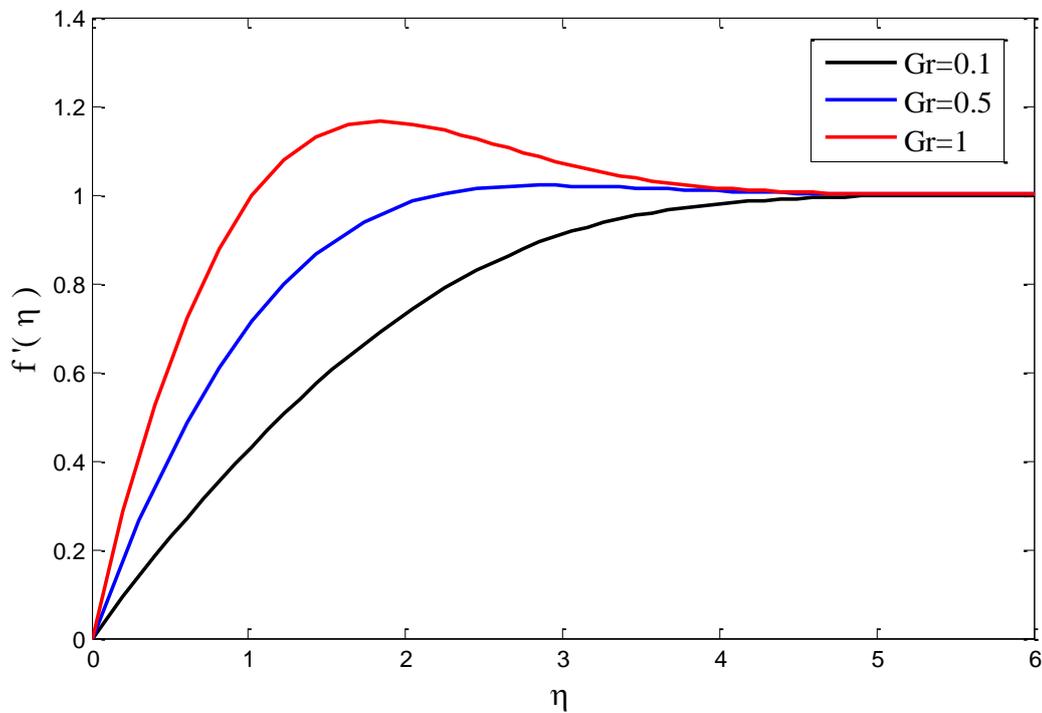


Figure III.1 : variations de profil de vitesse avec η pour Gr variable

($H = 10, Pr = 1, Br = 0,7$)

Figure III.1 : illustre la variation de la vitesse adimensionnelle en fonction de la variable de similarité η . Cela montre que l'augmentation de nombre de Grashof implique une augmentation de profil de vitesse.

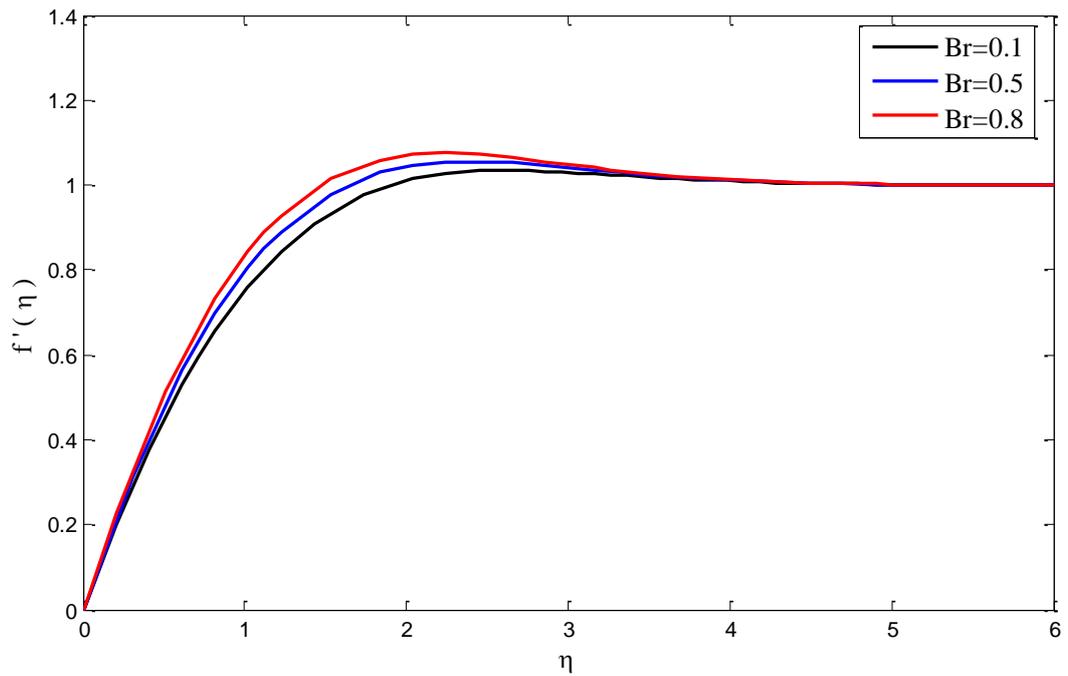


Figure III.2 : variations de profil de vitesse avec η pour Br variable
($H = 10$, $Pr = 1$, $Gr = 0,7$)

Figure III.2 : La variation de la vitesse adimensionnelle en fonction de la variable similarité η . Montre que l'augmentation de profil de vitesse est dû a l'augmentation de nombre Brinkman

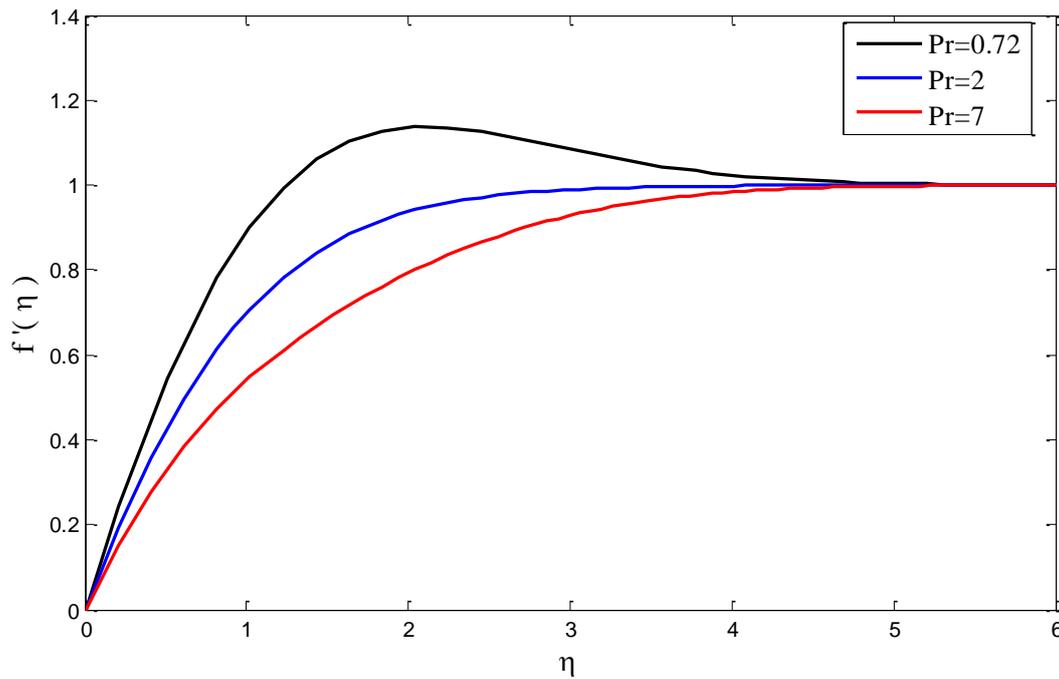


Figure III.3 : variations de profil de vitesse avec η pour Pr variable
($H = 10$, $Br = 0,7$ $Gr = 0,7$)

Figure III.3 : La variation de la vitesse adimensionnelle en fonction de la variable similarité η . Montre que l'augmentation de nombre de Prandtl implique la diminution de profil de vitesse.

III.3.2 Profil de température adimensionnelle :

La variation de la distribution de la Température adimensionnelle suivant la variable de similarité η est représentée respectivement sur les figures (III.4) (III.6) (III.7) pour quelques ensembles de valeurs de Gr , Br et Pr , H .

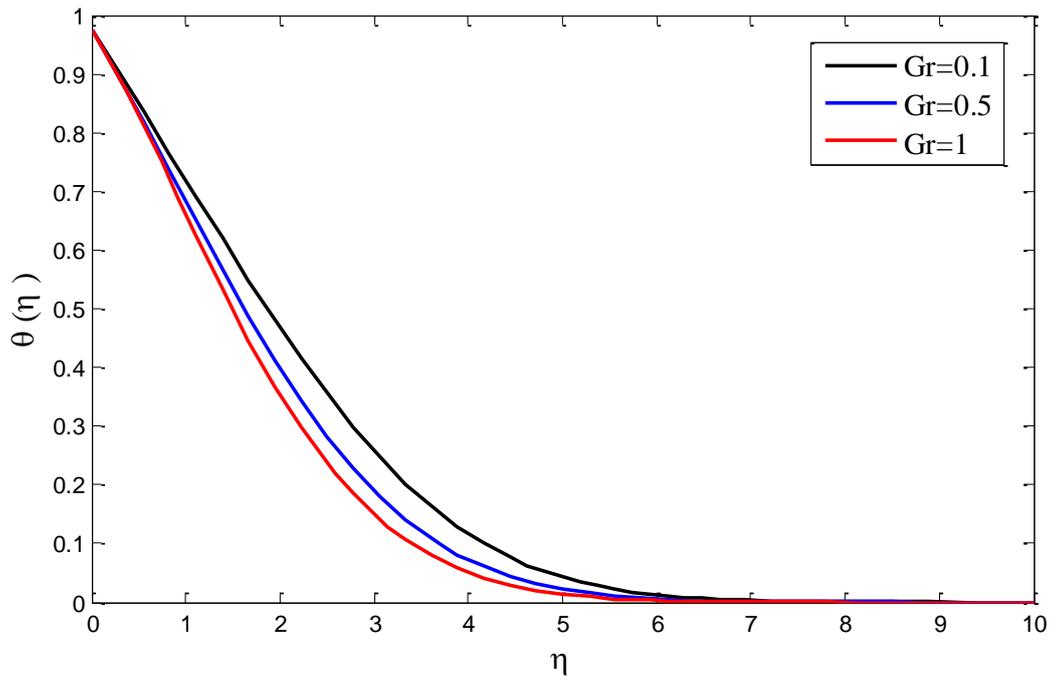


Figure III.4 : variations de profil de Température avec η pour Gr variable

($H= 10$, $Pr= 0,5$, $Br= 0.1$)

Figure III.4 : La variation de la distribution de la Température adimensionnelle suivant la variable de similarité η . Montre que l'augmentation de nombre de Grashof implique une diminution de température adimensionnelle.

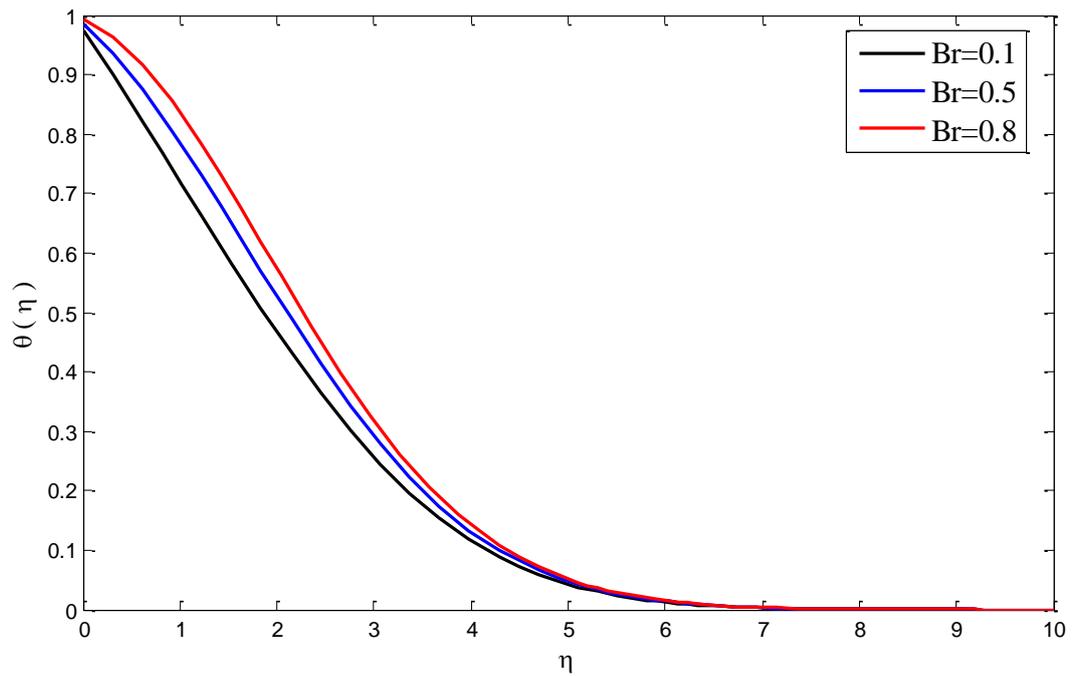


Figure III.5 : variations de profil de Température avec η pour Br variable

($H= 10$, $Pr= 0.5$, $Gr= 0.1$)

Figure III.5 : La variation de la distribution de la Température adimensionnelle suivant la variable de similarité η . Signifie que l'augmentation de température est due à l'augmentation de nombre de Brinkman

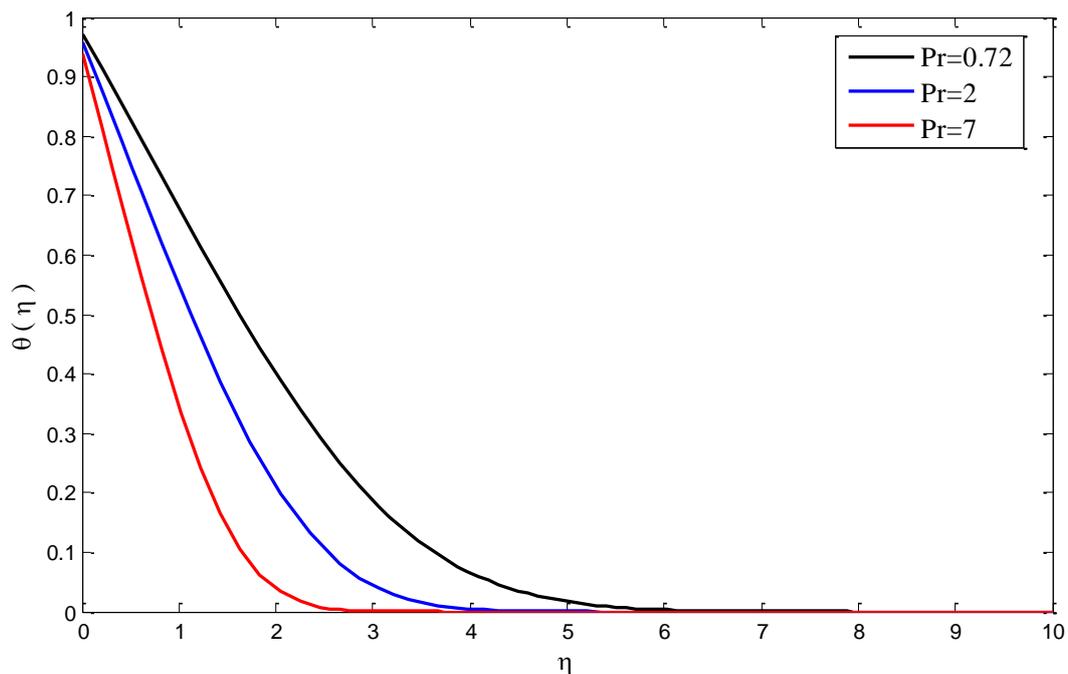


Figure III.6 : variations de profil de Température avec η pour Pr variable

($H= 10$, $Gr= 0.1$, $Br= 0.1$)

Figure III.6 : La variation de la distribution de la Température adimensionnelle suivant la variable de similarité η . On remarque que l'effet du nombre Prandtl implique sur la diminution de profil de température et se traduit par une diminution de la couche limite thermique quand le nombre de Prandtl est élevé ($Pr=7$ eau).

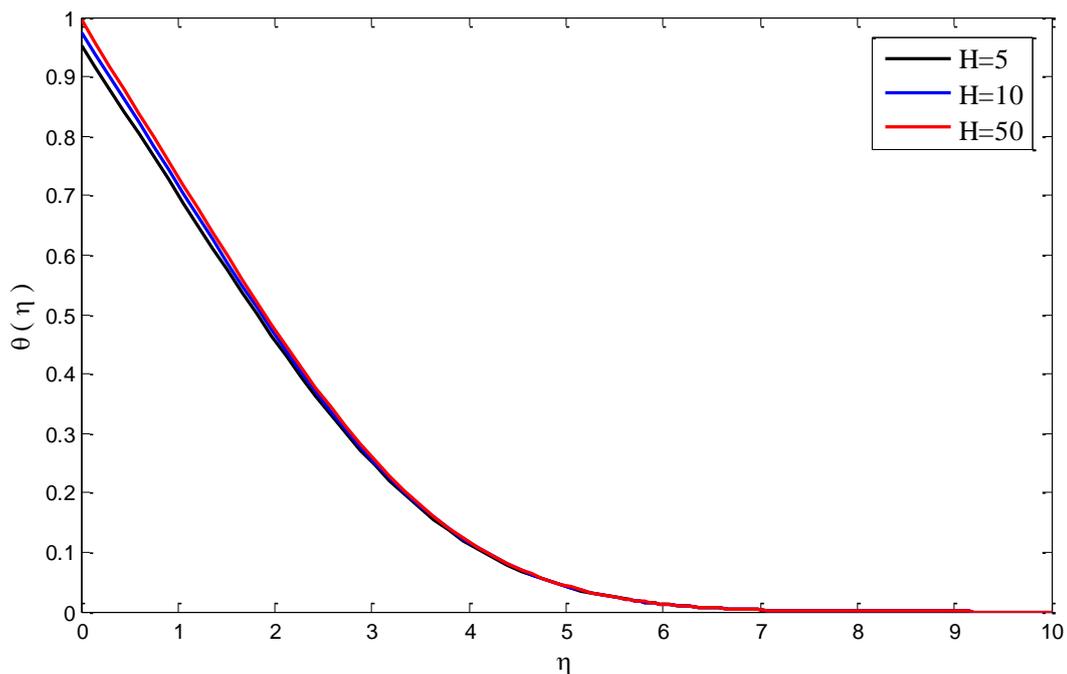


Figure III.7 : variations de profil de Température avec η pour H variable

($Br= 0,1$ $Gr= 0.1$ $Pr= 0.5$)

Figure III.7 : La variation de la distribution de la Température adimensionnelle suivant la variable de similarité η . Montre que la température augmente avec l'augmentation de paramètre de la convection a la paroi H jusqu'à ($H=50$,la température est constante) ce qui explique que la plaque est chauffée au Maximum.

III.4. Variation de nombre de Nusselt local :

Les variations du nombre de Nusselt local sont concernées aux différentes valeurs du Paramètre de convection à la paroi (H), nombre de Brinkman (Br), nombre de Prandtl (Pr), nombre Grashof (Gr) Les résultats sont illustrés dans les tableaux (III.2), (III.3) :

$$\text{Nombre de Nusselt local définie par : } \frac{Nu_x}{\frac{1}{Re^2}} = -\theta(0)$$

Br=0,1, H=50			
Pr	Gr=0,1	Gr=0,5	Gr=0,7
0,72	0,2911	0,3155	0,3185
1	0,3301	0,3632	0,3705
6	0,6194	0,6899	0,7151
10	0,7340	0,8124	0,8415

Tableau III.2 : valeurs de Nusselt pour Pr, Gr variables.

Tableau III.2 : Montre que le nombre de Nusselt augmente avec l'augmentation des valeurs des nombres de Prandtl et Grashof.

Pr=7, Gr=0,5			
Br	H=0,1	H=10	H=1000
0	0,0869	0,6985	0,7563
0,1	0,0853	0,6808	0,7365
0,5	0,0782	0,6070	0,6546
1	0,0679	0,5079	0,5454

Tableau III.3 : valeurs de Nusselt pour Br, H variables.

Tableau III.3 : Montre que le nombre de Nusselt augmente avec l'augmentation des valeurs de paramètre de convection et le nombre de Brinkman

III.5.Variation de coefficient de frottement local :

Le coefficient de frottement local représenté dans les tableaux (III.4),(III.5) pour différentes Valeurs du nombre de Prandtl (Pr), Grashof (Gr), Brinkman (Br), Paramètre de convection à la paroi (H). Les résultats sont illustrés dans les tableaux (III.4), (III.5) :

Coefficient de frottement local est définie par : $Re_x^{\frac{1}{2}} C_f = f''(0)$

Br=0,1, H=50			
Pr	Gr=0,1	Gr=0,5	Gr=0,7
0,72	0,4734	0,9327	1,1324
1	0,4626	0,8898	1,0756
6	0,4130	0,6910	0,8140
10	0,4018	0,6448	0,7531

Tableau III.4 : valeurs de coefficient de frottement pour Pr, Gr variable.

Tableau III.4 : Montre l'augmentation des valeurs de coefficient de frottement avec l'augmentation des valeurs de nombre de Prandtl et Grashof.

Pr=7, Gr=0,5			
Br	H=0,1	H=10	H=1000
0	0,3835	0,6564	0,6778
0,1	0,3935	0,6600	0,6808
0,5	0,4348	0,6745	0,6929
1	0,4893	0,6929	0,7081

Tableau III.5 : valeurs de coefficient de frottement pour Br , H variable.

Tableau III.5 : Montre l'augmentation des valeurs de coefficient de frottement avec l'augmentation des valeurs de nombre de Brinkman et Paramètre de convection H.

III.6.Conclusion :

Dans cette étude, on a analysé le comportement de l'écoulement de la couche limite qui se développe autour d'une plaque vertical chauffé, Les équations différentielles représentant le problème physique ont été transformées en donnée numérique en utilisant la méthode des différences finie. À savoir l'influence des nombres adimensionnelles sur le développement de la couche limite thermique et dynamique d'où on a tracé les profils de vitesse de température et étudié la variation de coefficient de frottement et de Nusselt, les résultats issus de cette étude sont vérifié et discutés. L'analyse montre que les profils de vitesses et de températures dans les couches limites respectives dépendent des paramètres adimensionnels, à savoir le nombre de Prandtl Pr , nombre de Grashof Gr , nombre de Brinkman Br , et le paramètre de convection H .

Conclusion Générale

Conclusion Générale

Dans ce présent travail, nous avons effectué une étude numérique d'un écoulement en convection forcé, laminaire et permanent d'un fluide newtonien et incompressible qui entre en contact avec une plaque plane chauffée.

Les équations qui régissent à l'écoulement sont l'équation de quantité de mouvement et l'équation de l'énergie. La méthode de Blasius a été utilisée pour parvenir à la forme adimensionnelle de ces équations pour aboutir à deux équations différentielles ordinaires.

Ces équations ont été résolues numériquement grâce à la méthode différence finie en utilisant le solveur bvp4c créé en MATLAB.

Notre étude numérique a été effectuée afin d'examiner l'influence des nombre adimensionnelles nombre de Prandtl, Grashof, Brinkman, paramètre de convection H sur le profil de vitesse et température dans les couches limites (thermique et dynamique).

Les conclusions tirées de cette étude sont comme suite :

Les graphes représentant les profils de vitesse adimensionnelle en fonction de la variable η montrent :

L'augmentation de profil de vitesse en augmentant les nombres de Grashof et Brinkman.

L'augmentation de nombre de Prandtl implique la diminution de profil de vitesse.

Les graphes représentant les profils de température adimensionnelle en fonction de la Variable η montrent :

Diminution de profil de température en augmentant les nombres de Grashof et Prandtl.

L'augmentation de nombre de Brinkman et le paramètre convectif H implique l'augmentation de la température.

Les tableaux représentant le nombre de Nusselt local et le coefficient de frottement local montrent :

Pour les tableaux ou les valeurs de Brinkman, et le paramètre de convection à la paroi sont fixes, le nombre de Nusselt local et le coefficient de frottement local augmente avec l'augmentation des valeurs Prandtl et Grashof

Pour les tableaux ou les valeurs de Prandtl et Grashof sont fixes, le nombre de Nusselt local et le coefficient de frottement local augmente avec l'augmentation des valeurs Brinkman et le paramètre de convection.

Les résultats obtenus montrent que les profils de vitesse et de température dans les couches limites (thermique et dynamique) dépend de paramètre adimensionnel à savoir le nombre de Prandtl, nombre de Grashof, nombre de Brinkman, et le paramètre de convection a la paroi H .

Références Bibliographiques

Références Bibliographiques :

[1] : **Benacer Bousaria**, Mémoire Magister « Etude de la convection forcée en régime laminaire sur une plaque plane chaud poue différents angles d'attaque », Génie mécanique spécialité énergétique, université Mohamed Khider Biskra.

[2] : **S. SADDAM**, Amélioration de la convection mixte dans un dissipateur de Chaleur à ailette elliptique creuse. Thèse de Master Université de M'sila.2015

[3] : **S.Lyès**, « La convection mixte dans un canal horizontal muni de blocs chauffés », (Mémoire magister en Génie des Procédés option: Energétique et Procédés Université KassdiMerbah Ouargla (2012-2013)).

[4]: **BOUAYED ZINE-ELABIDINE**, Mémoire Magister « Etude de la convection mixte laminaire dans une cavité ventilée par la méthode de Boltzmann sur réseau » spécialité génie mécanique, université Abdelhamid Ibn Badis de Mostaganem (2014).

[5]: **KHIDER Fatma zohra**, Amélioration de la convection mixte en utilisant des ailettes cylindriques avec des ouvertures au niveau de la base. Thèse de Master Université de M'sila.2015

[6] :**H. ALI AGHA**, Cours « Initiation aux transferts thermiques »3ème Licence : Energétique et Construction Mécanique Université Abderrahmane MIRA BEJAIA Faculté de Technologie Département de Génie Mécanique, 2019.

[7]: **Jean-Luc Battaglia, Andrzej Kusiak et Jean-Rodolphe Puiggali**, Introduction aux transferts thermiques : Cours et exercices corrigés, Paris, Dunod, 2010 (ISBN 978-2-10-054828-6).

[8] : **JEAN Taine, FRANCK Enguehard, ESTELLE Lacona**, Cours et exercices d'application « Transferts thermique, introduction aux transferts d'énergie »

[9]: **Yunus A. Cengel, Afshin J. Ghajar McGraw-Hill** "NATURAL CONVECTION "Mehmet KanogluUniversity of Gaziantep. Heat and Mass Transfer : Fundamentals & Applications Fourth Edition, Chapter 9, 2011.

[10] : **JACQUES Padet**, Fluides en écoulement – Méthodes et modèles (jacques PADET) seconde édition revue et augmenté. Professeur émérite à l'université de Reims.

- [11] : **A. HADDAD**, Transferts thermique un cours de base pour les étudiants en cycle de graduation Dar-El-DjazairiaAlger, (2001).
- [12] : **Carl W. Hall, Laws and Models** : Science, Engineering and Technology, Boca Raton, CRC Press, 2000, 524 p.
- [13] : **NICK CONNOR** Article « qu'est-ce-que-rayleigh-number-definition » Le 14/10/2019.
- [14] : **F. INCROPERA, D. DEWITT** – Fundamentals of Heat and Mass Transfer. John Wiley & Sons, Inc., 2011.
- [15] : **S. W. CHURCHILL, H. H. S. CHU**, Correlation equations for laminar and turbulent free convection from a vertical plate. Int. J. Heat Mass Transfer, 18, 1323, 1975.
- [16] : Travail réaliser par des étudiants de l'ENSEEIH de Toulouse encadrés par M. Patrick Chassaing, professeur de mécanique des fluides.
- [17] : **SAMI BEN Amara**, Ecoulements et transferts thermiques en convection naturelle dans les milieux macro-poreux alimentaires application aux réfrigérateursmenagers. Physics [physics]. INAPG (AgroParisTech), 2005. English. ffNNT : 2005INAP0006ff. Ffpastel-00001581f
- [18] : **BENYAHIA Idir, ADDALOU Lamine**. Mémoire magister « EffetSoret sur un écoulement en convection mixte devant une plaque plane verticale » Université de Bejaia filière Génie Mécanique Option installation énergétique et turbomachine.
- [19] : **H. BERKANE**, Mémoire de magister. « Influence de l'effet thermique sur les caractéristiques de la couche limite laminaire sur une paroi lisse » Université de Mohamed Khider Biskra filière génie mécanique option construction mécanique (04/05/2005).
- [20] : **U. KARABULUT, A. KILIÇ**. Various techniques to solve Blasius equation. Article BandırmaOnyediyünlüUniversity, PP [130], (2018).
- [21] : **R. OLIMUDER**. The boundary layer of a fluidstream over a flat plat. Universty of twente, PP [13-14], (2013).
- [22] : **CH. BAYEUX**. Méthode intégrale pour la couche limite tridimensionnelle Applications au givrage. Thèse de doctorat. Université de Toulouse, PP [4-5], (2017).
- [23] : **L. BILLON**. Génération et adaptation de maillage volume-couche limite dynamique pour les écoulements turbulents autour de géométries complexe. Thèse de doctorat. Université de Paris, PP [78-79], (2016).

- [24] : **M. RECHACHE, M. A. BEN AZZOUZ**. Réalisation d'un logiciel pédagogique d'analyse d'écoulement potentiel subsonique autour. Mémoire de master. Université de Blida, PP [59], (2011).
- [25] : **N. ONUR**. Forced convection heat transfer from a flat-plate model collector on roof of a model house. *Wairme- und Stoffibertragung* 28, 141-145 (1993).
- [26] : **T. L. BERGMAN, A S. LAVINE, F. P. INCROPERA, D. P. DEWITT**. Fundamentals of heat and mass transfer. 7eme edition. John Wiley & Sons (2011).
- [27] : **Mahesh Kumari., Girishwar Nath**, "Conjugate mixed convection transport from a moving vertical plate in a non-Newtonian fluid", *International Journal of Thermal Sciences* 45, 607-614, (2006)
- [28] : **BOUHEZZA Aicha**, Mémoire de Magister "étude d'une couche limite laminaire en convection mixte : effet de l'inclinaison de la paroi" Présenté à l'Université 20 Août 55, Skikda Faculté des Sciences et Sciences de l'Ingéniorat Département des Sciences Fondamentales Spécialité : Physique Option : Energétique 2007.
- [29] **Aya adnan**, 2013 "Experimental and Numerical investigation of forced convection in a porous media subjected to constant heat flux" M.Sc. University of Baghdad.
- [30] : **SAMI A. Al-SANEA**, "Mixed convection heat transfer along a continuously moving heated vertical plate with suction or injection", *Int. J. Heat Mass Transfer* 47 (2004) 1445-1465.
- [31]: **HSIAO-TSUNG LIN, KUO-YEU WU and HUEY-LING HOH**, "Mixed convection from an isothermal horizontal plate moving in parallel or reversely to a free stream", *Int. J. Heat Mass Transfer*. Vol. 36, No. 14, pp. 3547-3554, 1993.
- [32] : **GUO T., BACHRUN R., DAGUENET M.**, "Influence de la convection naturelle sur la convection forcée au-dessus d'une surface plane verticale soumise à un flux de rayonnement", *Int. J. Heat Mass Transfer*. Vol. 25, No. 7, pp. 1061-1065, 1982.
- [33] : **Mohmed Ali., Fahd Al-Yousef.**, "Laminar mixed convection boundary layers induced by a linearly stretching permeable surface", *Int. J. Heat and Mass Transfer* 45, 4241-4250, (2002).
- [34] : **NAHOUI et BAHI** Incompressible laminar boundary layer control by blowing and suction. Université Mentouri, Constantine 1, Algeria, n°38, PP [21-28], (2014).
- [35] : **Abdul Aziz**, *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat* 14 (2009) 1064-1068 «A similarity solution for laminar thermal boundary layer over a flat plate with a convective surface boundary

condition », table 1 P(1066).

[36] : Cheng P, Minkowycz WJ. Free convection about a vertical flat plate embedded in a porous medium with application to heat transfer from a dike. J GeophysRes

[37] : J. Kierzenka « studies in the numerical solution of ordinary differential equations », these de doctorat,southern Methodist University,Dallas,TX,(1998).

Annexes

Annexe A : Résolution de problème des valeurs aux limites pour les équations différentielles ordinaires dans Matlab avec bvp4c.

A. 1 Introduction :

Dans cette partie, nous décrivons la méthode numérique utilisée pour résoudre les équations de base formulées dans le chapitre II.

Nous allons être amenés à étudier un problème d'équations différentielles ordinaires (EDO) aux limites (BVP), dont le comportement est très différent de celui d'un problème aux valeurs initiales (IVP). Dans l'application, nous utilisons la méthode de différence finie avec le solveur bvp4c créée en Matlab qui permet de résoudre le problème aux limites (BVP) qui implémente la formule de Lobatto à trois étapes de collection.

A.2 Equation différentielle ordinaire :

Les Equations différentielles ordinaires décrivent des phénomènes qui changent en permanence. Ils se posent en modèles à travers les mathématiques, les sciences et l'ingénierie. En soi un système d'équations différentielles à nombreuse solutions. Communément une solution d'intérêt est déterminée en spécifiant les valeurs de tous ses composants en un seul point $x=a$. c'est un problème de valeur initiale (IVP). Cependant, dans de nombreuses applications d'une solution est déterminée d'une manière plus complexe.

Un problème de valeur limite (BVP) spécifie les valeurs ou des équations pour composants de la solution a plus d'un x . Contrairement de IVP, un problème de valeur limite ne peut être avoir une solution, ou peut avoir un nombre fini, ou peut avoir une infinité. De ce fait, les programmes de résolution de BVP, les utilisateurs doivent fournir une estimation de la solution souhaitée. Souvent ; il existe des paramètres qui doivent être déterminés de tel sort que le BVP a une solution. Encore une fois il pourrait y avoir plus d'une possibilité, afin que les programmes nécessitent une estimation pour les paramètres souhaite. Singularités dans les coefficients et les problèmes posés sur des intervalles infinis ne sont pas inhabituelles.

Ce qui montre comment formuler, résoudre et tracer la solution d'un BVP avec le programme bvp4c Matlab. Il vise à rendre la résolution d'un problème type d'un BVP aussi facile que possible. BVPs sont beaucoup plus difficiles à résoudre qu'un IVP et tout solveur peut échouer même avec de bonnes estimations pour la solution et des paramètres inconnus. Bvp4c est un solveur efficace, mais la méthode sous-jacente et l'environnement de calcul ne sont pas

appropriés pour de grandes précisions, ni pour des problèmes avec très brusques changements de leurs solutions.

III. 3 Problème de valeur aux limites :

Si la fonction f est continue sur l'intervalle $[a, b]$, le problème de valeur initiale $y' = f(x, y)$. Avec $y(a)$ donné, possède une solution unique. Les problèmes de valeurs aux limites à deux bouts sont illustrés par l'équation :

$$y'' + y = 0 \tag{A.1}$$

Avec les conditions aux limites suivantes : $y(a) = A$, $y(b) = B$. Une manière d'analyser ce problème est de considérer une famille de solutions d'IVP.

Soit $y(x, s)$, la solution de l'équation (A.1) avec les valeurs initiales $y(a) = A$ et $y'(a) = s$. Chaque $y(x, s)$, s'étend jusqu'à $x = b$, maintenant la question et de déterminer les valeurs de s pour lesquelles $y(b, s) = B$.

S'il existe une solution S pour cette équation algébrique, la valeur $y(x, s)$, correspondante constitue une solution de l'équation différentielle qui satisfait les deux conditions aux limites. En utilisant la linéarité, nous pouvons trier les possibilités aisément.

Soit $u(x)$ la solution définie par $y(a) = A$, $y'(a) = 0$ et $v(x)$ la solution définie par $y(a) = 0$, $y'(a) = 1$. La linéarité implique que $y(x, s) = u(x) + sv(x)$, et la condition à la limite $B = y(b, s) = u(b) + sv(b)$ n'est autre qu'une équation algébrique linéaire qui définit la pente initiale inconnue s . Les faits familiers de l'existence et l'unicité de solutions d'équations algébriques linéaires nous disent alors qu'il y a soit une solution exactement à la BVP, ou il y a des valeurs limites B pour lesquels il n'existe aucune solution et d'autres pour lesquels il existe une infinité de solutions.

A. 4 Méthode numérique :

En générale pour résoudre ce genre de problème la méthode la plus connue à laquelle ont recours des ingénieurs n'est autre que la méthode Runge-kutta avec une technique de tir, ce qui

peut surprendre que la routine `bvp4c` n'est pas un code de technique de tire (shooting méthode). `BVP4c` met une méthode de collection pour la solution du BVP de la forme :

$$y' = f(x, y, p), \quad a < x < b \quad (\text{A.2})$$

Avec de non-linéaire générale, deux points conditions aux limites

$$g(y(a), y(b), p) = 0 \quad (\text{A.3})$$

Ici p est un vecteur de paramètres inconnus. Pour plus de simplicité, il est supprimé dans les expressions qui suivent. la solution d'approximation $s(X)$ est une fonction de continue qu'est un polynôme cubique sur chaque sous-intervalle $[X_n, X_{n+1}]$ d'une maille $a = X_0 < X_1 < \dots < X_n = b$. Il satisfait les conditions aux limites

$$g(s(a), s(b)) = 0 \quad (\text{A.4})$$

Et qu'il satisfait aux équations différentielles (de col locatives) aux deux extrémités et le point médian de chaque sous-intervalle

$$s'(x_n) = f(x_n, s(x_n)) \quad (\text{A.5})$$

$$s'\left(\frac{x_n + x_{n+1}}{2}\right) = f\left(\frac{x_n + x_{n+1}}{2}, s\left(\frac{x_n + x_{n+1}}{2}\right)\right) \quad (\text{A.6})$$

$$s'(x_{n+1}) = f(x_{n+1}, s(x_{n+1})) \quad (\text{A.7})$$

Ces conditions conduisent à un système d'équations algébrique non linéaire pour les coefficients définissant $s(x)$. A la différence de la technique de tir, la solution $y(X)$ est évaluée sur tout l'intervalle $[a, b]$ et les conditions aux limites sont pris en compte à tous les moments. Les équations algébriques non linéaire sont résolues de manière itérative par linéarisation, si cette approche s'appuie sur les solveurs d'équations linéaires de Matlab plutôt que ces codes IVP. la méthode de base de `bvp4c`, que l'on appelle la méthode de Simpson, est bien connue et se trouve dans un certain nombre de codes. il peut être démontrer que les hypothèses modestes, $s(X)$ est une approximation de quatrième ordre a une solution isolée $y(X)$, c'est-à-dire, $\|y(x) - s(x)\| \leq Ch^4$. h est la valeur maximale de la taille de pas $h_n = x_{n+1} - x_n$ et C , est une

constante . Parce que ce n'est pas vrai de certaines méthodes de collocation populaires, nous insistants sur le fait important que cette borne est vraie pour tout x dans $[a, b]$, après $s(X)$ est calculer sur un maillage avec `bvp4c`, il peut être évalué a peu de frais a tout x , ou un ensemble de x , dans $[a, b]$ avec la fonction `bvpval`.

Parce que BVPs peuvent avoir plus d'une solution, les codes de BVP obligent les utilisateurs à fournir une Estimation pour la solution souhaitée. L'estimation comprend estimation d'un maillage initial Révèle que le comportement de la solution souhaité. Les codes ensuite adapté le maillage de manière à obtenir une solution numérique exacte avec un nombre réduit de points de maillage. Venir avec suffisamment bonne supposition est souvent la partie la plus difficile de résoudre un BVP [34]. `Bvp4c` adopte une approche inhabituelle pour le contrôle d'erreur qui lui permet de traiter avec suppositions pauvres. La continuité de $s(X)$ sûr $[a, b]$ et collocation aux extrémités de chaque sous-intervalle implique que $s(X)$ a également une dérivée continue sur $[a, b]$ pour une telle approximation, le résidu $r(x)$ dans l'équation différentielle est définie par :

$$r(x_n) = s'(x) - f(x, s(x)) \quad (\text{A.8})$$

Autrement dit, cela dit que $s(X)$ est la solution exacte d'ODEs perturbe.

$$s'(x) = f(x, s(x) + r(x)) \quad (\text{A.9})$$

De même, le résidu dans les conditions aux limites est $g(s(a), s(b))$. `Bvp4c` contrôle les tailles de ces résidus. Si les résidus sont uniformément petits, $s(X)$ est une bonne solution dans le sens que cet est la solution exacte d'un problème proche de celui fourni au solveur. En outre, pour un problème relativement bien conditionne, les petits impliquent que $s(X)$ est proche de $y(X)$, même quand h n'est pas assez petit pour que le quatrième ordre de convergence est évident. Les codes de techniques de tir peuvent également entre décrite comme contrôlant la taille de ces résidu :à chaque étape ,un code d'IVP contrôle l'erreur locale , ce qui équivalent à contrôler la taille du résidu d'un prolongement continu approprie de formule utiliser ,et le résolveur d'équations non linéaires est utilisé pour trouver des valeurs initiales pour lesquelles le résiduel dans les conditions aux limites est faible .suppression résiduelle a des vertus importantes :résidu sont bien définis ,peu importe à quel point la solution approchée , et les

résidu peuvent être évaluée importe ou simplement en évaluation $f(x, s(x))$ ou $g(s(a), s(b))$. Bvp4c est basée sur des algorithmes qui sont plausibles, même lorsque le maillage initial est très faible ; mais fournir des résultats corrects que h tend vers 0 [36]. Ils exploitent des propriétés très intéressantes de la méthode de Simpson.

BVPs se posent dans les formes les plus divers. A peu près tout BVPs peuvent être formulées pour solution avec bvp4c. La première étape consiste à écrire l'ODE comme un système de premières équations différentielles d'ordre.

C'est une tâche familière, car elle doit également être faite pour IVP solveur de Matlab. L'idée de base est d'introduire de nouvelles variables, une pour chaque variable dans le problème d'origine et l'autre pour chacun de ses dérivés à un de moins que le dérivé le plus élevé apparaisse. C'est tout ce qui nécessaire pour résoudre un IVP, mais BVP peut-être beaucoup plus compliqué : comme nous l'avion déjà vu, contrairement IVPs, problèmes aux limites n'ont pas nécessairement une solution, et quand ils le font, la solution n'est pas nécessairement unique.

En effet, BVP implique généralement des valeurs de paramètres pour lesquels le problème a une solution. En outre, les singularités de toutes sortes ne sont pas des tous inhabituels [37]

A.5 Conclusion :

Dans cette partie nous avons rappelé succinctement quelque notion sur les équations différentielles ordinaire et nous avons présenté brièvement la méthode qui est utilisée par le solveur bvp4c.

Dans le chapitre suivant nous allons entamer l'exposition des résultats ainsi que l'analyse et l'interprétation de ces derniers

Résumé

Le présent travail consiste en une étude numérique d'un écoulement convectif forcé, laminaire et permanent devant une plaque plane verticale chauffée par un fluide newtonien, incompressible. Afin de résoudre les équations différentielles ordinaires contrôlant le phénomène physique, nous avons adopté la méthode de différence finie, en utilisant le solveur `bvp4c` en MATLAB. Cette étude montre que les profils de vitesse et de température dans les couches limites (thermique, dynamique) respectives dépendent des nombres de Prandtl, Groshof, Brinkman et le paramètre de la convection à la paroi H . En plus de l'étude de ces paramètres sur les caractéristiques de l'écoulement de la couche limite (vitesse, température), on a étudié la variation de coefficient de frottement et de Nusselt, les résultats issus de cette étude sont vérifiés et discutés.

Mots clés : convection forcée, plaque plane verticale, écoulement laminaire, différence finie, couche limite.

Abstract

The present work consists a numerical study of a forced, laminar and steady convective flow in front of a vertical flat plate heated by an incompressible Newtonian fluid. In order to solve the differential equations controlling the physical phenomenon, we adopted the finite difference method, using the `bvp4c` solver in MATLAB. This study shows that the velocity and temperature profiles in the boundary layers (thermal, dynamic) depend on the numbers of Prandtl, Groshof, Brinkman and the parameter of convection at the wall H . In addition to the study of these parameters on the flow characteristics of the boundary layer (velocity, temperature), The variation in coefficient of friction and Nusselt has been studied, the results of this study are verified and discussed.

Keywords: forced convection, vertical flat plate, laminar flow, finite difference, boundary layer.

