

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**

**MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR**

**ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**UNIVERSITE ABDERRAHMANE MIRA BEJAIA**

**FACULTE DE TECHNOLOGIE**

**DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE**

**MEMOIRE**

Présenté pour l'obtention du diplôme de

**MASTER**

Filière : Génie Mécanique

Spécialité : Energétique

Par :

**Bouadjama lahlal**

**Adjaoud Abdeloualid**

## Thème

---

**Etude d'un écoulement externe sur une plaque**

**Effet de variation de la viscosité.**

---

Soutenu le 28 septembre 2022 devant le jury composé de:

Mr.	ADNANI	Président
Mr.	ALIAGHA	Rapporteur
Mr.	LAOUCHE	Examineur

**Année Universitaire 2021-2022**



**Déclarations sur l'honneur**  
**Engagement pour respecter les**  
**règles d'authenticité scientifique dans l'élaboration d'un**  
**travail de recherche**

Arrêté ministériel n°1082 du 27 Décembre 2020(\*)  
fixant les règles relatives à la prévention et la lutte contre le plagiat

Je soussigné,

Nom : .....

Prénom: .....

Matricule: .....

Spécialité et/ou Option: .....

Département : .....

Faculté: .....

Année universitaire : ...../.....

et chargé de préparer un mémoire de (*Licence, Master, Autres à préciser*): .....

Intitulé: .....

.....

.....

déclare sur l'honneur, m'engager à respecter les règles scientifiques, méthodologiques, et les normes de déontologie professionnelle et de l'authenticité académique requises dans l'élaboration du projet de fin de cycle ci-dessus.

Fait

à Béjaïa ...../...../.....

Signature de l'intéressé

(\*) Lu et approuvé

.....



## **Remerciements**

**Nous remercions Dieu pour le courage et la volonté sans lesquels cette étude n'aurait jamais vu le jour.**

**Nous tenons à exprimer notre profonde reconnaissance et nos sincères remerciements à notre encadrent Mr ALI AGHA pour l'intérêt porté à notre travail, leurs disponibilités, leurs conseils précieux et surtout leur grande patience.**

**Nos vifs remerciements vont à nos très chers parents pour leurs efforts fournis et leurs conseils pendant toute ces années d'études.**

**Nous présentons nos respects et nos sincères remerciements aux membres du jury qui ont accepté d'évaluer notre travail. Nous tenons à remercier tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.**

## Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

A mes chers parents, qui m'ont toujours poussé et motivé dans mes études. Ce projet fin d'étude représente donc l'aboutissement du soutien et des encouragements qu'ils m'ont prodigués tout au long de ma scolarité. Qu'ils en soient remerciés par cette modeste dédicace.

A mes sœurs **Hakima, Kahina, Lydia, Zahra** et mes frères **Akli** et **Rabah** en témoignage de l'amour et de l'affection qui nous attachent.

A mes neveux **Aya, Mami, Imane**

A ma famille,

A mes chers amis,

En souvenir des bons moments nos éclats de rire et nos balades, en souvenir de tout ce qu'on a vécu ensemble : **Idris, Djaafar, Nabil, Khaled, Idir, Lyes, Zahir, Koukous, Islam, Moumouh, Ouassim, ...**

En particulier mon binôme **Abdeloualid** avec qui j'ai partagé ce travail.

**Lahlal**

## Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

A mes chers parents, qui m'ont toujours poussé et motivé dans mes études. Ce projet fin d'étude représente donc l'aboutissement du soutien et des encouragements qu'ils m'ont prodigués tout au long de ma scolarité. Qu'ils en soient remerciés par cette modeste dédicace.

A mes sœurs **Lila**, **Meriem** et **Imane** et mon frère **Djemy** et sa femme **Billa** en témoignage de l'amour et de l'affection qui nous attachent.

A mes neveux **Wassim**, **Djana** et **Nelya** ,

A ma famille,

A mes chers amis,

En souvenir des bons moments nos éclats de rire et nos balades, en souvenir de tout ce qu'on a vécu ensemble : **Lyes**, **Ouassim**, **Biggi**, **Zizou**, **Salim**, **Lahlou**, **Raouf**, **Ghiles**, **Lalim**, **Hazem**, **Yacine**, **Cylia**, **Tereza**, **Lili**, ...

A mes frères de 400 : **Koukouss**, **Zaynas**, **Moumouh**, **Islam**, **Joujou**, **Nounour**, **Yacine**, ...

A mon poto : **Zoohir**

En particulier mon binôme **Lahlal** avec qui j'ai partagé ce travail.

**WALID**

## Sommaire

<b>Liste des figures.....</b>	<b>vii</b>
<b>Liste des tableaux.....</b>	<b>vii</b>
<b>NOMENCLATURE.....</b>	<b>viii</b>
<b>Introduction Générale.....</b>	<b>ix</b>

## Chapitre I

<b>Introduction.....</b>	<b>1</b>
<b>I.1.Convection :.....</b>	<b>1</b>
<b>I.1.1.Définition :.....</b>	<b>1</b>
<b>I.1.2.Type de convection :.....</b>	<b>2</b>
I.1.2.1.Convection naturelle :.....	3
I.1.2.2.Convection forcée :.....	4
I.1.2.3.Convection mixte :.....	5
<b>I.2.Grandeurs sans dimension.....</b>	<b>5</b>
I.2.1.Le Nombre de Reynolds :.....	5
I.2.2.Nombre de Prandlt :.....	6
I.2.3.Le Nombre de Peclet :.....	6
I.2.4.Le Nombre de Grashof :.....	6
I.2.5.Le Nombre de Richardson :.....	6
I.2.6.Le Nombre de Rayleigh :.....	7
I.2.7.Le Nombre de Nusselt :.....	7
<b>I.3.Couches limites :.....</b>	<b>7</b>
<b>I.3.1.concept de couches limites :.....</b>	<b>7</b>
<b>I.3.2.Couche limite dynamique :.....</b>	<b>8</b>
I.3.2.1.Couche limite laminaire :.....	8
I.3.2.2.Couche limite turbulente :.....	9
<b>I.3.3.Transition vers la turbulence :.....</b>	<b>9</b>
<b>I.3.4.Couche limite thermique.....</b>	<b>10</b>

<b>I.3.5. Paramètres caractéristiques de la couche limite :</b> .....	<b>11</b>
• Epaisseur de la couche limite $\delta$ : .....	11
• Epaisseur de déplacement $\delta_1$ : .....	11
• Epaisseur de quantité de mouvement $\delta_2$ : .....	11
• Le facteur de forme H : .....	11
• Force de frottement : .....	11
• Coefficient de frottement : .....	11
<b>I.3.6. Equations fondamentales :</b> .....	<b>12</b>
I.3.6.1. Equation de continuité : .....	12
I.3.6.2. Equation de Navier-Stokes : .....	12
I.3.6.3. Equations de Prandl (équations de la couche limite) : .....	13
<b>I.3.7. Contrôle de la couche limite :</b> .....	<b>13</b>
<b>Conclusion :</b> .....	<b>14</b>

## Chapitre II

<b>Introduction</b> .....	<b>16</b>
<b>II.1. Géométrie du problème :</b> .....	<b>16</b>
<b>II.2. Modèle physique et formulation mathématique :</b> .....	<b>17</b>
<b>II.2.1. Equations générales de conservation :</b> .....	<b>17</b>
<b>II.2.2. Hypothèses simplificatrices :</b> .....	<b>18</b>
<b>II.2.3. L'équation de continuité :</b> .....	<b>18</b>
<b>II.2.4. Les équations de quantité de mouvement :</b> .....	<b>19</b>
<b>II.2.5 Equation de l'énergie :</b> .....	<b>19</b>
<b>II.2.6 Conditions aux limites :</b> .....	<b>19</b>
<b>II.3. Formulation adimensionnelle :</b> .....	<b>20</b>
<b>II.3.1 Equations adimensionnelles et solution auto-similaire :</b> .....	<b>20</b>
<b>Conclusion :</b> .....	<b>21</b>

### Chapitre III

Introduction.....	23
III.1. Equation différentielle ordinaire :.....	23
III.2. Problème de valeur aux limites : .....	24
III. 3.Méthode numérique :.....	24
Conclusion .....	27

### Chapitre IV

Introduction :.....	29
IV.1.Etude dynamique .....	29
IV.1.1. Effet de nombre de prandtl (Pr): .....	30
IV.1.2.effet de la viscosité ( $\epsilon$ ):.....	30
IV.1.3. L'effet de paramètre de flottabilité ( $\lambda$ ): .....	31
IV.2. étude thermique.....	32
IV.2.1. Effet de nombre de prandtl (Pr): .....	32
IV.2.2. Effet de la viscosité ( $\epsilon$ ):.....	32
IV.2.3.effet de paramètre de flottabilité( $\lambda$ ) :.....	33
IV.3. Variation de nombre de Nusselt.....	34
IV.4.Validation du code de calcul : .....	35

Conclusion générale

Conclusion générale

Références Bibliographiques

## Liste des figures

Figure I-1: Action de fluide en mouvement dans la convection .....	2
Figure I-2: représentation des 3 modes de transfert de chaleur .....	3
Figure I-3: Principe physique de la convection naturelle .....	4
Figure I-4 :développement d'une couche limite dynamique le long d'une plaque plane.....	8
Figure I-5: Délimitation des zones de couche limite dynamique.....	9
Figure I-6:Développement d'une couche limite thermique le long d'une plaque plane isotherme.....	10
Figure I-7: Objectif de base du contrôle de la couche limite [34].....	14
Figure II-1: Paramètres de flux et système de coordonnées .....	17
Figure IV-1: Influence du nombre de prandtl sur l'évolution longitudinale de la vitesse.....	30
Figure IV-2: Influence du la vsicosite sur l'évolution longitudinale de la vitesse.....	30
Figure IV-3: Influence parametre de fottabilte sur l'évolution longitudinale de la vitesse.....	31
Figure IV-4: Influence du nombre de prendtl sur l'évolution longitudinal de la température..	32
Figure IV-5: Influence du viscosité sur l'évolution longitudinal de la température. ....	32
Figure IV-6 : Influence du paramètre de flottabilité sur l'évolution longitudinal de la température.....	33

## Liste des tableaux

Tableau IV-1 : Valeur de nusselt à $Pr=0.7$ et $\lambda=0.5$ .....	34
Tableau IV-2: Valeur de nusselt à $Pr = 0.7$ et $\varepsilon= 1.0$ .....	34
Tableau IV-3:Tableau de comparaison du Nusselt avec les resultat de Raju et Al .....	35

## NOMENCLATURE

Symboles	Définition	Unité (SI)
C	: Chaleur spécifique	$J\ kg^{-1}\ K^{-1}$
h	: Coefficient d'échange convectif moyen	$W\ m^{-2}\ K^{-1}$
S	: Surface d'échange	$m^2$
T	: Température	K
g	: Accélération de la pesanteur	$m\ s^{-2}$
k	: Conductivité thermique	$W\ m^{-1}\ K^{-1}$
p	: Pression	Pa
Pr	: Nombre de Prandtl, $Pr = \nu / \alpha$	-

### Symboles grecs

$\alpha$	: Diffusivité thermique	$m^2\ s^{-1}$
$\Gamma$	: Coefficient de diffusion	$m^2\ s^{-1}$
$\mu$	: viscosité dynamique du fluide	$kg/(m.s)$
$\nu$	: Viscosité cinématique	$m^2\ s^{-1}$
$\rho$	: Masse volumique	$kg\ m^{-3}$
$\sigma$	: Constante de Stefan-Boltzmann	$W.m^{-2}.K^{-4}$

### Indices

i, j	: i <sup>ème</sup> et j <sup>ème</sup> composantes.
H, C	: Surface chaude, surface froide

# **Introduction Générale**

## Introduction générale

---

Dans la présente étude, nous choisissons de tirer parti des avantages offerts par la modélisation numérique afin de réaliser une étude hydrodynamique et thermique de l'écoulement laminaire en mode de convection d'un fluide, dans une géométrie plate verticale semi-infinie. Néanmoins, la négligence de certains effets rend les résultats obtenus relativement loin de la réalité. C'est pour cette raison que la présente étude a mis en avant l'influence de plusieurs paramètres, tel que la prise en compte de la fonction de dissipation visqueuse.

La compréhension et la résolution du problème physique considéré nécessite, au préalable, la connaissance des notions fondamentales de la mécanique de fluides, des différents modes de transfert thermique et certaines notions sur les écoulements. Ces généralités feront l'objet du premier chapitre qui portera également sur une synthèse bibliographique regroupant les différents travaux entrepris par les chercheurs dans ce domaine.

Le second chapitre sera consacré à la présentation mathématique des problèmes physiques considérés. Ce dernier comprendra, en effet, les équations de conservation qui régissent ce type d'écoulement, à savoir : l'équation de continuité, l'équation de l'énergie en tenant compte de la dissipation visqueuse. L'introduction des variables réduites dans ces équations fait ressortir des groupements adimensionnels qui sont les nombres de Reynolds, de Prandtl, de Grashof et de Bingham.

La modélisation numérique des équations de conservation sera abordée dans le troisième chapitre. La méthode des volumes finis sera utilisée pour résoudre les équations de conservation exprimées en variables primitives, c'est-à-dire, en formulation vitesse température. Le traitement du couplage de ces variables sera réalisé à travers l'utilisation de l'algorithme SIMPLER. Sur ces bases, un code de calcul sera développé en langage Fortran, avec une configuration bidimensionnelle et tridimensionnelle permettant la résolution des équations de transport d'une manière générale en coordonnées cartésiennes.

Dans le quatrième et dernier chapitre, les différents résultats issus des simulations numériques relatifs à l'écoulement laminaire en développement simultané pour les deux configurations considérées, seront exposés. Ces résultats porteront sur l'effet de certains paramètres, à savoir : la viscosité, le paramètre de flottabilité et prend  $\text{Pr}$ , sur Nusselt et les

caractéristiques hydrodynamique et thermique de l'écoulement en modes de convection forcée.

En conclusion à ce mémoire, nous présenterons brièvement les principaux résultats obtenus afin de dégager les perspectives de développement de ce travail à moyen terme et les extensions à donner à cette recherche.

Les principaux résultats issus de la présente étude seront regroupés dans une conclusion générale.

# **Chapitre I**

## **Partie Bibliographique**

## Introduction

---

Ce chapitre a pour but de présenter les connaissances actuelles relatives à la convection et les couches limites dynamique et thermique.

On s'attache également à décrire l'influence de plusieurs paramètres sur la convection (naturelle, forcée et mixte) telle que la forme de la géométrie (enceinte carrée et ondulée), l'angle d'inclinaison et la position de la source de chaleur.

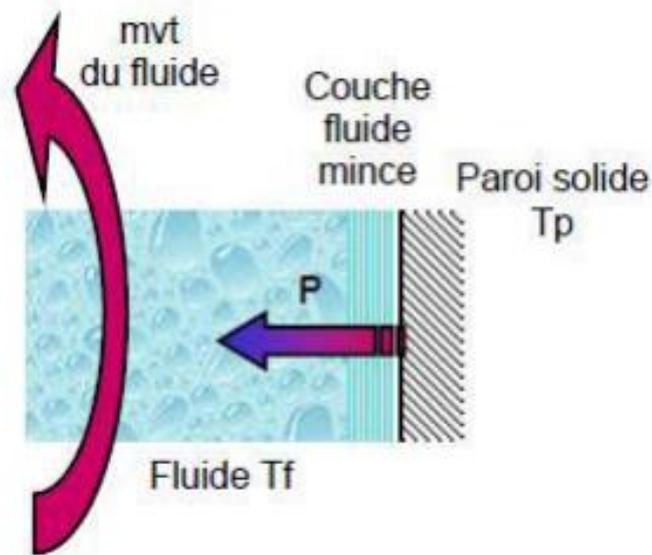
Et aussi on donne quelques définitions et concepts de la couche limite; passant par les équations aux dérivées partielles et différentielles qui gouvernent ce phénomène tel que les équations de Prandtl, l'équation de Blasius, l'équation de Von Kàrmàn...etc

A la fin on va présenter des revues de littérature, dont les thèmes sont en rapport avec le problème envisagé dans ce mémoire .

### I.1.Convection :

#### I.1.1.Définition :

La convection est une mode de transport d'énergie par l'action combinée de la conduction, de l'accumulation de l'énergie et du mouvement du milieu. La convection est le mécanisme le plus important de transfert d'énergie entre une surface solide et un liquide ou un gaz. Le transfert d'énergie par convection d'une surface dont la température est supérieure à celle du fluide qui l'entoure s'effectue en plusieurs étapes. D'abord la chaleur s'écoule par conduction de la surface aux particules fluides adjacentes, L'énergie ainsi transmise sert à augmenter la température et l'énergie interne de ces particules. Ensuite ces dernières vont se mélanger avec d'autres particules situées dans une région à basse température et transférer une partie de leur énergie, celle-ci est à présent emmagasinée dans les particules fluides et elle est transportée sous l'effet de leur mouvement.



**Figure 1:** Action de fluide en mouvement dans la convection [1]

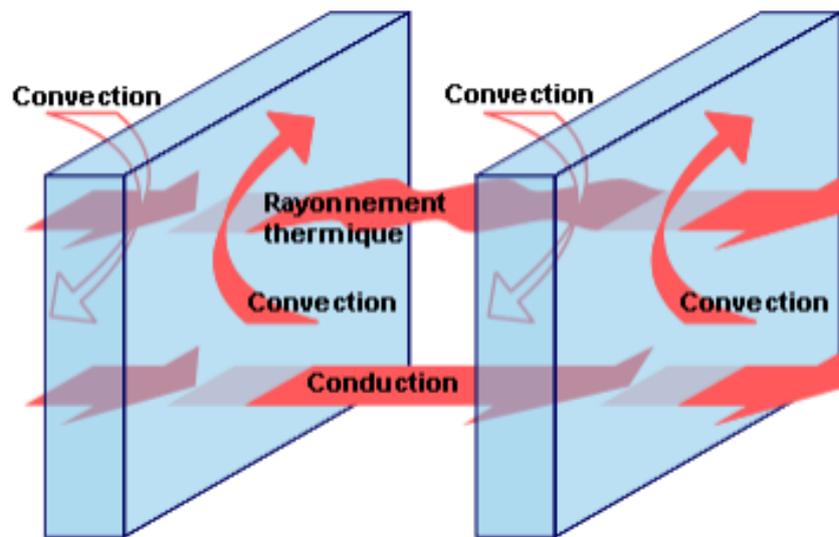
L'intensité de la convection est reliée à plusieurs paramètres tels que, les valeurs de températures, la nature de fluide et la surface d'échange. Le flux convectif est donné par la loi de Newton :

$$\Phi = hs(T_s - T_\infty) \quad [\text{W}] \dots\dots\dots(\text{I.1})$$

### I.1.2.Type de convection :

La transmission de chaleur par convection est désignée, selon le mode d'écoulement du fluide, par convection libre et convection forcée. Lorsqu'il se produit au sein du fluide des courants dus simplement Aux différences de densité résultant des gradients de température, on dit que la convection est naturelle ou libre. Par contre si le mouvement du fluide est provoqué par une action externe, telle une pompe ou un ventilateur, le processus est appelé convection forcée. Si les deux causes existent simultanément, sans que l'une soit négligeable par rapport à l'autre, la convection est dite mixte

La figure suivante présente les trois modes de transfert de chaleur pour un composant électronique :



**Figure 2:** représentation des 3 modes de transfert de chaleur [2]

### I.1.2.1. Convection naturelle :

La convection naturelle (ou libre) diffère de la convection forcée à cet égard. Le mouvement du fluide n'est pas dû à l'apport externe d'énergie mécanique, Trouvant sa source dans le liquide lui-même sous l'action conjuguée du gradient de Densité et champ gravitationnel. Fluctuation de densité Généralement dû au gradient de température. Écoulement de liquide dû à la convection naturelle due aux différences de La température peut provenir du chauffage ou du refroidissement par le bas, ceci Ecoulement de Rayleigh-Bénard ou résultant d'un gradient La température générée par le chauffage ou le refroidissement par le côté. En convection naturelle, le mouvement du liquide est causé par Gradient de densité dû à la non-uniformité du champ de température. couche En raison de sa température élevée et de sa faible densité, il est exposé à des forces dirigées. Par le même mécanisme que la poussée d'Archimède évoquée plus haut. parmi eux Par conséquent, dans la région chaude, le fluide se déplace vers le haut. Le phénomène inverse de flux descendant des composants se produit Liquide plus froid qu'un liquide chaud. La convection naturelle est due à la différence de poids. Certain, et donc le phénomène, est causé par la présence du champ La gravité de la terre. L'intervention de Wait donne à la verticale un rôle privilégié. Par conséquent, la définition de la géométrie du système de convection doit inclure la forme. Dimensions verticales et placement. L'effet de convection naturelle est connu. On peut les

voir Dans l'eau chauffée dans le récipient, Cheminées, circulation atmosphérique, vents et orages dans certaines usines Il y a aussi l'effet de la convection naturelle. Pour formaliser la convection naturelle, il faut décrire la combinaison de champs Calcul de la température, de la pression et de la vitesse à partir de l'équation de conservation de Momentum, masse, énergie.

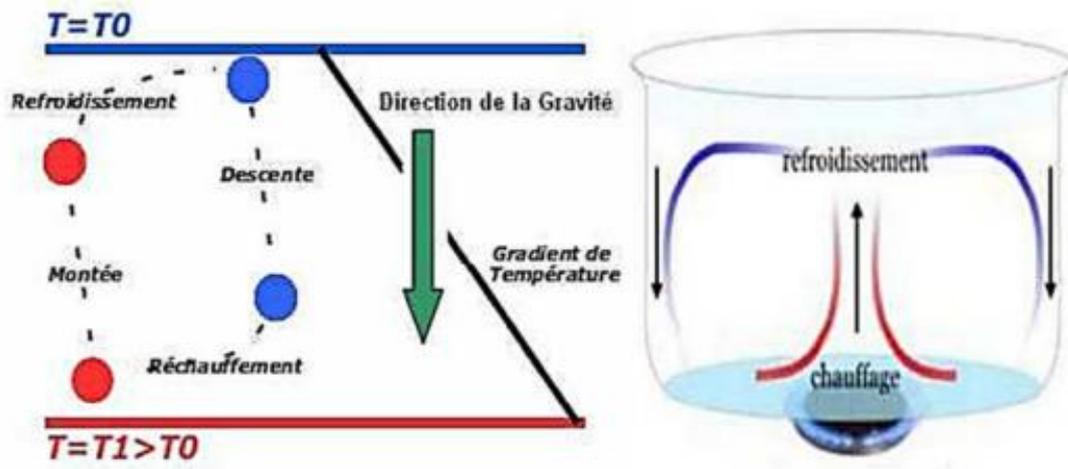


Figure 3: Principe physique de la convection naturelle [3]

**I.1.2.2. Convection forcée :**

La convection forcée dans laquelle le mouvement est provoquée par un procédé mécanique indépendant des phénomènes thermiques ; c'est donc un gradient de pression extérieur qui provoque les déplacements des particules du fluide. L'étude de la transmission de chaleur par convection est donc étroitement liée à celle de l'écoulement des fluides. La convection est dite forcée quand il existe une cause du mouvement autre que les variations de températures du fluide, cette cause étant la seule à prendre en compte en raison de son importance relative.

La relation générale pour la convection forcée est  $Nu = f(Re, Pr)$ .

En microélectronique, le transfert de chaleur obéit alors à l'expression suivant :

$$Nu = c \cdot Re^n \cdot Pr^m \dots\dots\dots(I.2)$$

Où c, n et m sont des constantes dépendant des caractéristiques du solide et du fluide.

### I.1.2.3. Convection mixte :

Il existe une cause externe au mouvement du fluide mais insuffisante pour que la poussée d'Archimède puisse être négligée (frontière entre la convection libre et la convection forcée) c'est le cas des transferts de chaleur dans un habitacle d'automobile : L'air est soufflé dans l'habitacle par un ventilateur, mais la poussée d'Archimède n'est pas négligeable, surtout lorsqu'on se place loin des entrées d'air . Le groupe adimensionnel qui détermine laquelle de ces convections est dominante est le nombre de Richardson Ri qui est le rapport du nombre de Grashof sur le carré du nombre de Reynolds :

$$Ri = \frac{Gr}{Re^2} \dots\dots\dots(I.3)$$

Si :  $\frac{Gr}{Re^2} < 0.1$  c'est la convection forcée qui domine.

Si :  $\frac{Gr}{Re^2} > 10$  c'est la convection naturelle qui domine.

Si :  $0.1 < \frac{Gr}{Re^2} < 10$  c'est le domaine de la convection mixte (naturelle et forcée).

## I.2. Grandeurs sans dimension

Une grandeur adimensionnelle est une quantité utilisée pour décrire une propriété physique sans la dimension ou l'unité explicite d'une expression. Il se compose du produit ou du rapport taille/dimension de sorte que le rapport unitaire soit égal à 1.

Ces grandeurs sans dimension sont utilisées pour expliquer les phénomènes de transport, notamment en mécanique des fluides Utilisez la similarité des modèles à l'échelle ou la théorie des modèles à l'échelle pour construire une interprétation des résultats des tests. On les appelle nombres sans dimension, nombres sans dimension ou nombres caractéristiques.

### I.2.1. Le Nombre de Reynolds :

Représente le rapport entre les forces d'inertie et les forces visqueuses. Ce nombre sans dimension apparaît naturellement en adimensionnant les équations de Navier-Stokes. On le définit de la manière suivante :

$$Re = \frac{U_0 L}{\nu} \dots\dots\dots(I.4)$$

### I.2.2. Nombre de Prandtl :

Qui est le rapport de la viscosité cinématique  $\nu$  et la diffusivité thermique  $\alpha$ , il caractérise l'importance relative des effets thermiques et visqueux, Ce nombre porte le nom de Ludwig Prandtl, physicien allemand :  $Pr = \nu/\alpha$

Le nombre de Prandtl compare la rapidité des phénomènes thermiques et des phénomènes hydrodynamiques dans un fluide. Un nombre de Prandtl élevé indique que le profil de température dans le fluide sera fortement influencé par le profil de vitesse. Un nombre de Prandtl faible indique que la conduction thermique est tellement rapide que le profil de vitesse a peu d'effet sur le profil de température

### I.2.3. Le Nombre de Peclet :

Est un nombre sans dimension utilisé en transfert thermique et en transfert massique. Il représente le rapport de deux temps caractéristiques : celui du transfert par convection et celui du transfert par conduction (ou par diffusion pour les transferts massiques). Il est équivalent au produit du nombre de Reynolds et du nombre de Prandtl dans le cas du transfert thermique. Ce nombre porte le nom d'Eugène Péclet, physicien français:

$$Pe = \frac{U_0 L}{\alpha} = Re * Pr \dots\dots\dots(I.5)$$

### I.2.4. Le Nombre de Grashof :

Est un nombre sans dimension utilisé en mécanique des fluides pour caractériser la convection naturelle dans un fluide. Il correspond au rapport des forces de gravité sur les forces visqueuses. Ce nombre porte le nom de Franz Grashof, ingénieur allemand. On le définit de la manière suivante :

$$Gr = \frac{g\beta\theta L^3}{\nu^2} \dots\dots\dots(I.6)$$

### I.2.5. Le Nombre de Richardson :

Qui compare les effets de la gravité à ceux d'inertie

$$Ri = \frac{g\beta\theta L}{U_0^2} \dots\dots\dots(I.7)$$

Le nombre de Richardson sera le paramètre de convection mixte puisqu'il est fonction du paramètre de convection naturelle ( $Gr$ ) et du paramètre de convection forcée ( $Re$ ) :

$$Ri = \frac{Gr}{Re^2} \dots\dots\dots(I.8)$$

### **I.2.6.Le Number de Rayleigh :**

Est un nombre sans dimension utilisé en mécanique des fluides et caractérisant le transfert de chaleur au sein d'un fluide : inférieur à une valeur critique de 2000, le transfert s'opère essentiellement par conduction, tandis qu'au-delà de cette valeur c'est la convection naturelle qui devient importante. On peut le définir comme le produit du nombre de Grashof, reliant les effets de la force gravifique à la viscosité du fluide, et du nombre de Prandtl. Ce nombre porte le nom de Lord Rayleigh, physicien anglais. On le définit de la manière suivante

$$Ra = \frac{g\beta H^3(T_H - T_L)}{\nu\alpha} = Gr * Pr \dots\dots\dots(I.9)$$

### **I.2.7.Le Nombre de Nusselt :**

Est un nombre adimensionnel utilisé dans les opérations de transfert thermique. Il représente le rapport entre le transfert thermique convectif et le transfert thermique conductif à travers une interface (souvent fluide/solide). Si la conduction est le principal mode de transfert, alors le nombre de Nusselt sera de l'ordre de l'unité. En cas de présence de convection (due par exemple au déplacement d'un fluide en régime turbulent), le transfert thermique s'effectuera principalement par déplacement du fluide et aura pour conséquence de faire tendre le nombre de Nusselt vers l'infini. On le définit de la manière suivante :

$$Nu = Hh/k \dots\dots\dots(I.10)$$

## **I.3.Couches limites :**

### **I.3.1.concept de couches limites :**

Le concept de la théorie de la couche limite a été introduit par Prandtl en 1904, qui a conçu et donné l'idée d'une couche caractéristique des fluides près d'une frontière solide. Il a proposé que même pour une très faible viscosité, la condition d'adhérence devait être satisfaite à la limite solide Ce concept donne naissance à la mécanique des fluides moderne.

Dans le cas d'un transfert de chaleur entre un fluide et un solide, on observe le même phénomène appelé couche limite thermique.

### I.3.2. Couche limite dynamique :

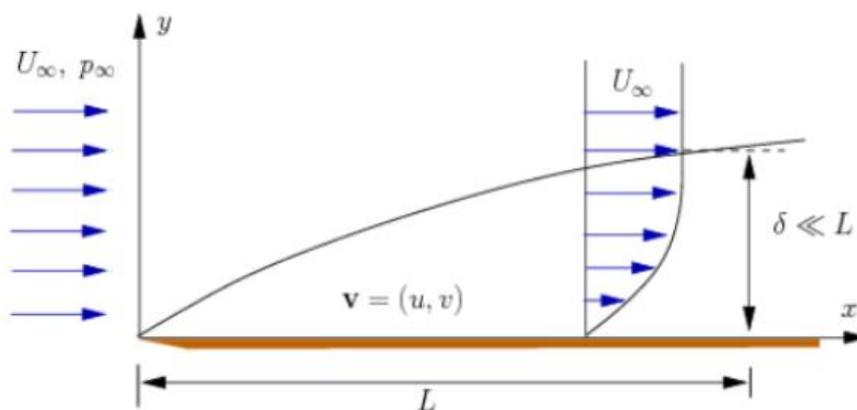
Lorsqu'un fluide se déplace sur un obstacle, les champs de vitesse et de pression sont perturbés par ce dernier. La couche limite est la zone de fluide contiguë à la paroi (ou bien, on peut dire qu'il s'agit d'une zone d'interface entre le corps et le fluide), dans laquelle se produit l'accommodation entre la vitesse nulle en paroi et la pleine vitesse locale du fluide libre.

De nombreuses propriétés de l'écoulement (frottement, transfert thermique et présence éventuelle de décollements) dépendent de cette couche limite

On distingue deux types de couche limite dynamique :

#### I.3.2.1. Couche limite laminaire :

La couche limite laminaire est caractérisée par le fait que tous les vecteurs vitesses sont parallèles à un même plan, l'écoulement se présente alors sous la forme de lames de fluide glissant les unes sur les autres. Ces lames restent rectilignes sur une certaine longueur, puis s'estompent. On observe une telle couche limite vers le bord d'attaque d'un profil. On appelle conventionnellement l'épaisseur  $\delta$  de la couche limite la distance à la paroi à partir de laquelle la vitesse  $U$  est telle que :  $U = 0.99 U$

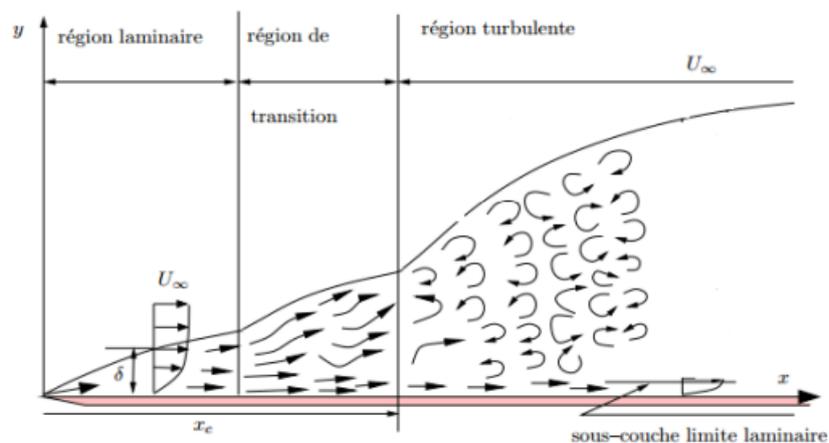


**Figure I-4 :** développement d'une couche limite dynamique le long d'une plaque plane [4]

En fait assez rapidement les lames disparaissent et la couche limite n'est plus dite laminaire mais turbulente.

### I.3.2.2. Couche limite turbulente :

L'écoulement présente un caractère désordonné, due en partie aux aspérités qui existent toujours sur la paroi. La couche limite devient turbulente et les vecteurs vitesses ne sont plus parallèles entre eux



**Figure 5:** Délimitation des zones de couche limite dynamique [5].

On remarque qu'il existe une délimitation entre les deux zones précédemment définies que l'on nomme zone de transition

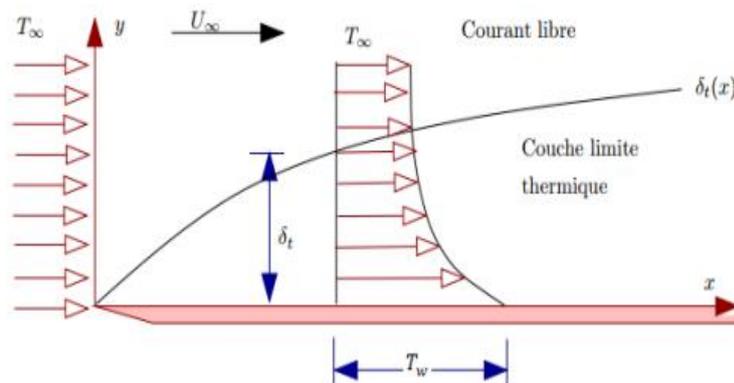
### I.3.3. Transition vers la turbulence :

L'étude de la transition laminaire/turbulent dans la couche limite est importante afin de comprendre le phénomène de tremblement.

L'origine de la turbulence dans la couche limite est à rechercher dans les propriétés de la zone laminaire. La première étape est liée au phénomène de réceptivité, au cours duquel des perturbations présentes dans l'environnement de la couche limite interagissent avec l'écoulement pour générer des instabilités. Celles-ci peuvent alors croître, conduisant à la transition, ou décroître, selon les caractéristiques de l'écoulement.

### I.3.4. Couche limite thermique

Lorsqu'un fluide, à température  $T_\infty$ , s'écoule sur une paroi à température  $T_w$ , des échanges thermiques s'établissent. Les particules du fluide s'échauffent ou se refroidissent au contact à la paroi et un gradient thermique se forme.



**Figure 6:** Développement d'une couche limite thermique le long d'une plaque plane isotherme.[6]

Dans le cas où ces deux phénomènes se présentent de manière simultanée, il existe un nombre adimensionnel, le nombre de Prandtl  $Pr$  caractérisant le fluide et défini par :  $Pr = \frac{\nu}{a}$ , Traduisant le rapport entre la diffusion visqueuse et la diffusion thermique, qui permet de lier les épaisseurs des deux couches limites :

- $Pr \ll 1$  Dans ce cas la chaleur se diffuse plus rapidement que la quantité de mouvement donc l'épaisseur de la couche limite thermique sera plus grande que celle de la couche limite dynamique  $\delta_t \gg \delta$
- $Pr \gg 1$  Dans ce cas l'écoulement se caractérise par une diffusion de la quantité de mouvement beaucoup plus importante que la diffusion de la chaleur  $\delta_t \ll \delta$
- $Pr \approx 1$  Les deux épaisseurs sont du même ordre de grandeur.

### I.3.5. Paramètres caractéristiques de la couche limite :

- **Épaisseur de la couche limite  $\delta$  :**

On définit conventionnellement l'épaisseur de la couche limite  $\delta$  comme la distance à la paroi telle que [7] :

$$\frac{u(x,\delta)}{u_e(x)} = 0.99 \dots\dots\dots(I.11)$$

- **Épaisseur de déplacement  $\delta_1$  :**

L'épaisseur de déplacement  $\delta_1$  caractérise la perte de débit massique au travers d'une section de la couche limite par rapport au cas de l'écoulement de fluide parfait incompressible [7]:

$$\delta_1 = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy \dots\dots\dots(I.12)$$

- **Épaisseur de quantité de mouvement  $\delta_2$  :**

L'épaisseur de quantité de mouvement  $\delta_2$  caractérise la perte de quantité de mouvement dans la couche limite par rapport au cas d'écoulement de fluide parfait [7]:

$$\delta_2 = \int_0^\delta \frac{u}{u_e} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy \dots\dots\dots(I.13)$$

- **Le facteur de forme H :**

On définit également le facteur de forme comme le rapport de ces deux dernières grandeurs  $H = \frac{\delta_1}{\delta_2}$  ; il permet de décrire l'évolution de la couche limite [7]

- **Force de frottement :**

La force de frottement est liée à la contrainte de cisaillement pariétale donné par [8]:

$$\tau_p = \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} \dots\dots\dots(I.14)$$

- **Coefficient de frottement :**

La contrainte de cisaillement pariétale peut être normalisée par la pression dynamique, on obtient ainsi un coefficient sans dimension dit coefficient de frottement local [8] :

$$C_f = \frac{\tau_p}{\frac{1}{2}\rho u_e^2} \dots\dots\dots(I.15)$$

### I.3.6. Equations fondamentales :

Dans le cas d'un fluide Newtonien en écoulement bidimensionnel, incompressible et permanent, les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement (équations de Navier- Stokes) s'écrivent comme suit [9]:

#### I.3.6.1. Equation de continuité :

L'équation de continuité est une affirmation sur la conservation de la masse. Il exprime le fait que, par unité de volume, la somme de toutes les masses entrantes et sortantes par unité de temps doit être égale au changement de masse dû au changement de densité par unité de temps, cela donne [10]:

$$\operatorname{div} \vec{q} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \dots\dots\dots(I.16)$$

#### I.3.6.2. Equation de Navier-Stokes :

Les équations de Navier Stokes proviennent de la conservation de la quantité de mouvement [11] :

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \vec{\nabla} \cdot \sigma + \rho f \dots\dots\dots(I.17)$$

Où

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{q} \cdot \vec{\nabla} \dots\dots\dots(I.18)$$

Représente la dérivée particulaire; et pour un fluide Newtonien et en tenant compte de l'hypothèse de Stokes, cette équation s'écrit

$$\rho \frac{D\vec{q}}{Dt} = -\nabla P + \mu \Delta \vec{q} + \rho f + \frac{\mu}{3} \nabla (\nabla \cdot \vec{q}) \dots\dots\dots(I.19)$$

Pour le cas d'un fluide incompressible l'équation précédente devient :

$$\rho \frac{D\vec{q}}{Dt} = -\nabla P + \mu \Delta \vec{q} + \rho f \dots\dots\dots(I.20)$$

### I.3.6.3. Equations de Prandtl (équations de la couche limite) :

En effet, en comparant les ordres de grandeur des différents termes des équations de Navier Stokes, Prandtl a montré que plusieurs d'entre eux sont négligeables dans la couche limite. En particulier, la vitesse dans la direction normale à la paroi est négligeable devant la vitesse tangentielle et la variation de la vitesse le long de la paroi est très faible devant la variation de la vitesse dans la direction normale à la paroi. Les équations de Navier-Stokes ainsi simplifiées modélisent l'écoulement du fluide dans la couche limite et sont appelées "équations de Prandtl". Pour un écoulement permanent bidimensionnel incompressible, elles s'écrivent de la manière suivante :

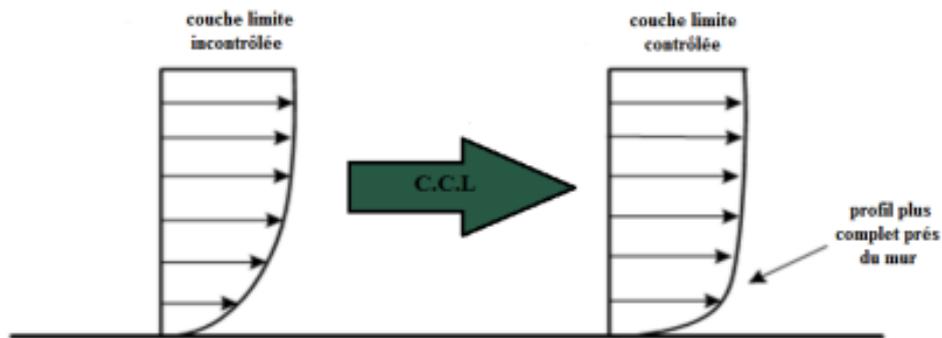
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \dots\dots\dots(I.21)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \dots\dots\dots(I.22)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \dots\dots\dots(I.23)$$

### I.3.7. Contrôle de la couche limite :

Afin d'atténuer les conséquences défavorables de SWBLI, des techniques de contrôle de couche limite sont conçues et appliquées. Le principe de base est illustré dans la Figure 7. En comparant les deux couches limites, on obtient un profil plus complet après contrôle, ce qui suggère qu'une énergie cinétique plus élevée est contenue dans le flux proche du mur. La couche limite est donc mieux à même de supporter le gradient de pression défavorable induit par le choc. Le paramètre couramment utilisé pour l'évaluation de l'efficacité est le facteur de forme H. Le but de la plupart des techniques de contrôle de flux est de manipuler le flux de la couche limite vers des valeurs plus petites de H. La relation entre H et la plénitude de la couche limite peut également être observée à travers la comparaison de couches limites laminares et turbulentes. Une classification possible est au moyen de deux catégories en fonction de la nécessité ou non d'un apport d'énergie externe: le contrôle passif et le contrôle actif. Les deux catégories sont abordées dans cette section [13].



**Figure I-7:** Objectif de base du contrôle de la couche limite [13].

## **Conclusion :**

---

Notre travail nous a permis de classer ces contributions dans les grands axes suivants:

- nous présentons une recherche bibliographique sur la convection et ses types ( naturelle, forcée et mixte ), comme on a situé quelques grandeurs adimensionnelles comme les nombres Reynolds, Prandlt, Garshof, Nusselt...

-donnons des définitions sur les couches limites et ses deux type dynamique et thermique, et de donner les équations fondamentaux (continuité d'énergie ...)

# **Chapitre II**

## **Modélisation mathématique**

## Introduction

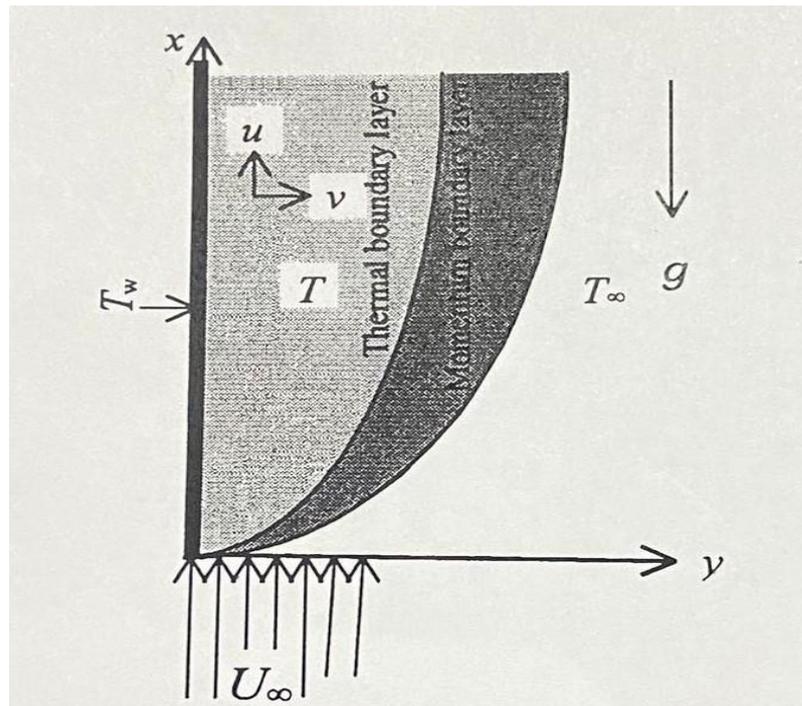
---

Le terme convection est habituellement connu sous le nom de transport d'énergies par gradients potentiels et mouvement du fluide. La convection est un mode de transfert de chaleur qui est le mécanisme le plus important de transfert d'énergie entre une surface solide et un liquide ou un gaz.[14]

Ce chapitre est consacré a mise en œuvre des équations du problème considéré en utilisant les équations de conservation de la masse, de quantité de mouvement et de l'énergie. Ces dernières expriment les principes fondamentaux de la physique. On commence par une description et présentation de la géométrie étudiée, on passe après à l'écriture des équations gouvernantes et on termine par les conditions aux limites

### II.1. Géométrie du problème :

Considérons la convection forcée stationnaire bidimensionnelle libre laminaire d'un fluide visqueux incompressible. Le long d'une plaque plate verticale semi-infinie. La plaque est dans le plan x-z. La température de la plaque  $T_w$  est uniforme et supérieure à la température du flux libre  $T_\infty$ . Une vitesse d'écoulement libre uniforme  $U_\infty$  est également supposée. Parallèle à la plaque verticale. Nous continuons à supposer que les changements de propriétés avec la température sont limités à la densité et la viscosité, la densité ne sont prises en compte que dans  $T$  tant qu'elle affecte la période de levage de la quantité de mouvement, Équation uniquement (approximation de Bousinesq). Schéma Diagramme montrant l'aire et les coordonnées de l'écoulement Le système est montré dans figure II-1



**Figure II-1:** Paramètres de flux et système de coordonnées

Où : (u) et (v) sont les liquide composants de vitesse le long de l'axe (x) et le (y) sont Pour chaque plaque,

( $\rho$ ) est la densité de liquide,

(g) est Gravitationnel accélération,

(f) coefficient de chaleur Expansion,

(T) température dans la couche limite,

( $\alpha$ ) est la diffusivité thermique

## II.2.Modèle physique et formulation mathématique :

### II.2.1.Equations générales de conservation :

La formulation mathématique des phénomènes de convection mixte repose sur les équations liant les différents paramètres, à savoir : la vitesse, la pression, la température et la concentration. Ces équations sont obtenues à partir de :

-La loi de conservation de masse (équation de continuité)

- La loi de conservation de quantité de mouvement (équation de Navier-Stokes)
- La loi de conservation d'énergie (équation d'énergie)

### II.2.2.Hypothèses simplificatrices :

La modélisation du phénomène étudié est basée sur les hypothèses simplificatrices suivantes :

- L'écoulement du fluide, les transferts de chaleur sont permanents et le régime est laminaire.
- Le fluide est newtonien et incompressible.
- Les propriétés thermophysiques du fluide ( $\mu$ ,  $C_p$ ,  $k$ ,) sont constantes.
- La dissipation visqueuse est négligeable.
- Le système ne présente pas de source de chaleur.
- La plaque est imperméable
- Les effets Soret et Dufour (interactions entre le transfert de chaleur et de masse) sont négligeables.

Si  $(x, y)$  et  $(u, v)$  sont respectivement les deux coordonnées dimensionnelles et les deux composantes de vitesse dimensionnelle, et on prend en considération les hypothèses simplificatrices citées ci-dessus, les équations dimensionnelles peuvent s'écrire comme suit

### II.2.3.L'équation de continuité :

Cette équation est déduite du premier principe de conservation de masse. Elle s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho V_j) = 0 \dots\dots\dots (II.1)$$

Qui , dans le cas de la première configuration, se réduit a :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \dots\dots\dots (II.2)$$

**II.2.4. Les équations de quantité de mouvement :**

D'après la deuxième loi fondamentale de la dynamique, le taux temporaire de changement de quantité de mouvement d'une particule fluide est égal à la somme des forces extérieures sur cette particule. L'équation de la quantité de mouvement s'écrit donc sous forme tensorielle comme suit :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = g\beta(T - T_{\infty}) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \dots\dots\dots (II.3)$$

$$y=0 \frac{dp}{dy} = 0$$

**II.2.5 Equation de l'énergie :**

L'équation de l'énergie est obtenue en appliquant le premier principe de la thermodynamique pour un fluide Newtonien incompressible, elle s'écrit comme suit :

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \dots\dots\dots (II.4)$$

**II.2.6 Conditions aux limites :**

La résolution du système d'équations obtenu précédemment nécessite l'incorporation des conditions aux limites pour chaque variable dépendante.

Les conditions aux limites satisfaites par l'équation ci-dessus sont les suivantes :

-pour :  $y=0$

$$u=0, \quad v=0, \quad T=T_w \dots\dots\dots (II.5)$$

-pour :  $y=\infty$

$$u=U_{\infty}, \quad T=T_{\infty}$$

Pour les liquides actuels, les viscosités sont considérés comme appartenant à la forme suivante :

$$\mu = \frac{\mu_0}{1+\gamma(T-T_\infty)} \dots\dots\dots (II.6)$$

Où  $\mu$  est la viscosité du liquide environnant,  $\gamma$  est constante.

Pour liquides de viscosité constante ( $\gamma=0$ ) Le problème à portée de main était étudié par Merkin [14] et Hunt Et Wilkes [15]. Dans son , Markin a reçu un approprié transformations pour réduire les équations (1)-(3) En amont près du bord d'attaque en aval. Perturbation des méthodes ont été utilisées à cette fin Avoir le solution dans ces deux régimes extrêmes. Il a également En utilisant une intégrale par étapes, nous obtenu la solution de une équation transformée, localement différente qui régit le circulent à travers le libre forcé convection régime. Le méthode développée par Choleshi [16].

**II.3. Formulation adimensionnelle :**

L'emploi de la variable adimensionnelle permet d'exprimer la réalité des phénomènes physiques indépendamment des systèmes de mesures, et ainsi permettre d'avoir des informations généralisées sur une variété de problèmes ayant les mêmes grandeurs de coefficient de similitudes d'un côté, et d'un autre côté, réduire le nombre de paramètres d'un problème.

**II.3.1 Equations adimensionnelles et solution auto-similaire :**

Pour résoudre le système d'équations on cherche une solution de type auto-similaire étant donné qu'il s'agit d'un écoulement de couche limite. Ainsi, on introduit les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \psi(x,y) &= v_\infty Re_x^{1/2} f, & \eta &= \frac{y}{x} Re_x^{1/2} \\ Re_x &= \frac{U_\infty x}{\nu_\infty}, & \frac{T-T_\infty}{T_w-T_\infty} &= \theta \dots\dots\dots (II.7) \\ Gr_x &= \frac{g\beta(T_w-T_\infty)x^3}{\nu_\infty^2}, & \lambda &= \frac{Gr_x}{Re_x^2} \end{aligned}$$

Où,  $\psi$  est la fonction de courant définie comme suit :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad , \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \dots\dots\dots(\text{II.8})$$

$\nu_{\infty} = (\mu/\rho)$  est la viscosité cinématique de l'écoulement libre,  $f(\eta)$  est une fonction de flux sans dimension,  $(\lambda)$  est une Paramètres de flutons . Ou le paramètre est petit près du bord d'attaque forcé La convection est dominante et grande dans les parties inférieures la convection libre est dominante.  $(Gr_x)$  et  $(Re_x)$  sont respectivement le nombre de Grashof local et le nombre de Reynolds local.

Transformation donnée en (II-7) (II-3)-(II-4) Les différentes équations suivantes sont obtenues, ajuster le flux et la distribution de l'énergie:

$$(1 + \varepsilon\theta)f'''' - \varepsilon\theta'f'' + (1 + \varepsilon\theta)^2 \left( \frac{1}{2}ff'' + \lambda\theta \right) = 0$$

.....(II.9)

$$\frac{1}{Pr}\theta'' + \frac{1}{2}\theta'f = 0 \quad \dots\dots\dots(\text{II.10})$$

## Conclusion :

---

Une fois les équations régissant le problème posé, avec les conditions aux limites associées, et mises sous leurs formes adimensionnelles, étant donné leurs présentations sous forme d'équation ou dérivées partielles ne peuvent pas prétendre à une résolution analytique directe, nous avons donc opté pour une résolution numérique. Celle-ci permettra de transformer les équations aux drivées partielles en équations algébriques plus simples à résoudre. En utilisant le Matlab

# **Chapitre III**

## **Méthode Numérique**

## Introduction

---

Dans cette partie, nous décrivons la méthode numérique utilisée pour résoudre les équations de base formulées dans la partie précédente .

Nous allons être amenés à étudier un problème d'équation différentielle ordinaire (EDO) aux limites (BVP), dont le comportement est très différent de celui d'un problème aux valeurs initiales (IVP). Dans l'application, nous utilisons la méthode de différence finie avec le solveur `bvp4c` créé en Matlab qui permet de résoudre le problème aux limites (BVP) qui implémente la formule de Lobatto à trois étapes de collection.

### III.1. Equation différentielle ordinaire :

Les Equations différentielles ordinaires décrivent des phénomènes qui changent en permanence. Il se posent en modèles à travers les mathématiques, les science et l'ingénierie. En soi un système d'équations différentielles à nombreuse solutions. Communément une solution d'intérêt est déterminée en spécifiant les valeurs de tous ses composants en un seul point  $x=a$ . c'est un problème de valeur initiale (IVP).Cependant, dans de nombreuses applications d'une solution est déterminée d'une manière plus complexe.

Un problème de valeur limite (BVP) spécifie les valeurs ou des équations pour composants de la solution a plus d'un  $x$ . Contrairement de IVP, un problème de valeur limite ne peut être avoir une solution, ou peut avoir un nombre fini, ou peut avoir une infinité. De ce fait, les programmes de résolution de BVP, les utilisateurs doivent fournir une estimation de la solution souhaitée. Souvent ; il existe des paramètres qui doivent être déterminés de tel sort que le BVP a une solution. Encore une fois il pourrait y avoir plus d'une possibilité, afin que les programmes nécessitent une estimation pour les paramètres souhaite. Singularités dans les coefficients et les problèmes posés sur des intervalles infinis ne sont pas inhabituelles.

Ce qui montre comment formuler, résoudre et tracer la solution d'un BVP avec le programme `bcp4c` Matlab. Il vise à rendre la résolution d'un problème type d'un BVP aussi facile que possible. BVPs sont beaucoup plus difficiles à résoudre qu'un IVP et tout solveur peut échouer même avec de bonnes estimations pour la solution et des paramètres inconnus. `Bvp4c` est un solveur efficace, mais la méthode sous-jacente et l'environnement de calcul ne sont pas appropriés pour de grandes précisions, ni pour des problèmes avec très brusques changements de leurs solutions.

### III.2. Problème de valeur aux limites :

Si la fonction  $f$  est continue sur l'intervalle  $[a, b]$ , le problème de valeur initiale  $y' = f(x, y)$ . Avec  $y(a)$  donné, possède une solution unique. Les problèmes de valeurs aux limites à deux bouts sont illustrés par l'équation :

$$y' = f(x, y).$$

Avec les conditions aux limites suivantes :  $y(a) = A, y(b) = B$ . Une manière d'analyser ce problème est de considérer une famille de solutions d'IVP.

Soit  $y(x, s)$ , la solution de l'équation (...) avec les valeurs initiales  $y(a) = A$  et  $y'(a) = s$ . Chaque  $y(x, s)$ , s'étend jusqu'à  $x = b$ , maintenant la question et de déterminer les valeurs de  $s$  pour lesquelles  $y(b, s) = B$ .

S'il existe une solution  $S$  pour cette équation algébrique, la valeur  $y(x, s)$ , correspondante constitue une solution de l'équation différentielle qui satisfait les deux conditions aux limites. En utilisant la linéarité, nous pouvons trier les possibilités aisément.

Soit  $u(x)$  la solution définie par  $y(a) = A, y'(a) = 0$  et  $v(x)$  la solution définie par  $y(a) = 0, y'(a) = 1$ . La linéarité implique que  $y(x, s) = u(x) + sv(x)$ , et la condition à la limite  $B = y(b, s) = u(b) + sv(b)$  n'est autre qu'une équation algébrique linéaire qui définit la pente initiale inconnue  $s$ . Les faits familiers de l'existence et l'unicité de solutions d'équations algébriques linéaires nous disent alors qu'il y a soit une solution exactement à la BVP, ou il y a des valeurs limites  $B$  pour lesquels il n'existe aucune solution et d'autres pour lesquels il existe une infinité de solutions.

### III. 3.Méthode numérique :

En générale pour résoudre ce genre de problème la méthode la plus connue à laquelle ont recours des ingénieurs n'est autre que la méthode Runge-kutta avec une technique de tir, ce qui peut surprendre que la routine `bvp4c` n'est pas un code de technique de tir (shooting méthode). `BVP4c` met une méthode de collection pour la solution du BVP de la forme

$$y' = f(x, y, p), \quad a < x < b$$

Avec de non-linéaire générale, deux points conditions aux limites

$$g(y(a), y(b), p) = 0$$

Ici  $p$  est un vecteur de paramètres inconnus. Pour plus de simplicité, il est supprimé dans les expressions qui suivent. la solution d'approximation  $s(X)$  est une fonction de continue qu'est un polynôme cubique sur chaque sous-intervalle  $[X_n, X_{n+1}]$  d'une maille  $a = X_0 < X_1 < \dots < X_n = b$ . Il satisfait les conditions aux limites

$$g(s(a), s(b)) = 0$$

Et qu'il satisfait aux équations différentielles (de col locales) aux deux extrémités et le point médian de chaque sous-intervalle

$$s'(x_n) = f(x_n, s(x_n))$$

$$s'((x_n + x_{n+1})/2) = f((x_n + x_{n+1})/2, s((x_n + x_{n+1})/2)) \dots\dots\dots(III.1)$$

$$s'(x_{n+1}) = f(x_{n+1}, s(x_{n+1}))$$

Ces conditions conduisent à un système d'équations algébrique non linéaire pour les coefficients définissant  $s(x)$ . A la différence de la technique de tir, la solution  $y(X)$  est évaluée sur tout l'intervalle  $[a, b]$  et les conditions aux limites sont pris en compte à tous les moments. Les équations algébriques non linéaire sont résolues de manière itérative par linéarisation, si cette approche s'appuie sur les solveurs d'équations linéaires de Matlab plutôt que ces codes IVP. la méthode de base de `bvp4c`, que l'on appelle la méthode de Simpson, est bien connue et se trouve dans un certain nombre de codes. il peut être démontré que les hypothèses modestes,  $s(X)$  est une approximation de quatrième ordre a une solution isolée  $y(X)$ , c'est-à-dire,  $\|y(x) - s(x)\| \leq Ch^4$ .  $h$  est la valeur maximale de la taille de pas  $h_n = x_{n+1} - x_n$  et  $C$ , est une constante. Parce que ce n'est pas vrai de certaines méthodes de collocation populaires, nous insistants sur le fait important que cette borne est vraie pour tout

$x$  dans  $[a, b]$ , après  $s(X)$  est calculer sur un maillage avec `bvp4c`, il peut être évalué à peu de frais à tout  $x$ , ou un ensemble de  $x$ , dans  $[a, b]$  avec la fonction `bvpval`.

Parce que BVPs peuvent avoir plus d'une solution, les codes de BVP obligent les utilisateurs à fournir une Estimation pour la solution souhaitée. L'estimation comprend estimation d'un maillage initial Révèle que le comportement de la solution souhaité. Les codes ensuite adapté le maillage de manière à obtenir une solution numérique exacte avec un nombre réduit de points de maillage. Venir avec suffisamment bonne supposition est souvent la partie la plus difficile de résoudre un BVP[18]. `Bvp4c` adopte une approche inhabituelle pour le contrôle d'erreur qui lui permet de traiter avec suppositions pauvres. La continuité de  $s(X)$  sur  $[a, b]$  et collocation aux extrémités de chaque sous-intervalle implique que  $s(X)$  a également une dérivée continue sur  $[a, b]$  pour une telle approximation, le résidu  $r(x)$  dans l'équation différentielle est définie par :

$$r(x_n) = s'(x) - f(x, s(x)) \dots\dots\dots(III.2)$$

Autrement dit, cela dit que  $s(X)$  est la solution exacte d'ODEs perturbé.

$$s'(x) = f(x, s(x) + r(x))$$

De même, le résidu dans les conditions aux limites est  $g(s(a), s(b))$ . `Bvp4c` contrôle les tailles de ces résidus. Si les résidus sont uniformément petits,  $s(X)$  est une bonne solution dans le sens que cet est la solution exacte d'un problème proche de celui fourni au solveur. En outre, pour un problème relativement bien conditionné, les petits résidus impliquent que  $s(X)$  est proche de  $y(X)$ , même quand  $h$  n'est pas assez petit pour que le quatrième ordre de convergence est évident. Les codes de techniques de tir peuvent également être décrites comme contrôlant la taille de ces résidus : à chaque étape, un code d'IVP contrôle l'erreur locale, ce qui équivaut à contrôler la taille du résidu d'un prolongement continu approprié de formule utiliser, et le solveur d'équations non linéaires est utilisé pour trouver des valeurs initiales pour lesquelles le résidu dans les conditions aux limites est faible. La suppression résiduelle a des vertus importantes : les résidus sont bien définis, peu importe à quel point la solution approchée, et les résidus peuvent être évalués peu importe ou simplement en

évaluation  $f(x, s(x))$  ou  $g(s(a), s(b))$ . Bvp4c est basée sur des algorithmes qui sont plausibles, même lorsque le maillage initial est très faible ; mais fournir des résultats corrects que  $h$  tend vers 0 [18]. Ils exploitent des propriétés très intéressantes de la méthode de Simpson.

BVPs se posent dans les formes les plus diverses. A peu près tout BVP peut être formulé pour solution avec bvp4c. La première étape consiste à écrire l'ODE comme un système de premières équations différentielles d'ordre.

C'est une tâche familière, car elle doit également être faite pour IVP solveur de Matlab. L'idée de base est d'introduire de nouvelles variables, une pour chaque variable dans le problème d'origine et l'autre pour chacun de ses dérivés à un de moins que le dérivé le plus élevé apparaisse. C'est tout ce qui est nécessaire pour résoudre un IVP, mais BVP peut être beaucoup plus compliqué : comme nous l'avons déjà vu, contrairement IVPs, problèmes aux limites n'ont pas nécessairement une solution, et quand ils le font, la solution n'est pas nécessairement unique.

En effet, BVP implique généralement des valeurs de paramètres pour lesquels le problème a une solution. En outre, les singularités de toutes sortes ne sont pas du tout inhabituel [19]

## Conclusion

---

Dans cette partie nous avons rappelé succinctement quelques notions sur les équations différentielles ordinaires et nous avons présenté brièvement la méthode qui est utilisée par le solveur bvp4c.

Dans le chapitre suivant nous allons entamer l'exposition des résultats ainsi que l'analyse et l'interprétation de ces derniers.

# **Chapitre IV**

## **Résultats et Discussions**

## Introduction :

---

Toute résolution numérique est principalement basée sur la précision des résultats qui dépendent à leur tour du maillage utilisé. Une solution numérique convergera vers la solution réelle, lorsque l'augmentation du maillage n'influe plus sur les résultats et que d'autre part, l'erreur relative entre les deux solutions tende vers zéro

Ainsi, une validation préalable du code de calcul de Nusselt, par comparaison de nos résultats avec ceux de la littérature, sera systématiquement entreprise pour les deux configurations étudiées. Par la suite, l'étude thermique de l'écoulement en mode de convection forcée sera abordée pour les fluides en variation de la viscosité et la convection et prandtl

C'est ainsi que dans ce chapitre, seront présentés, les différents résultats issus de la résolution numérique des équations de transfert gouvernant l'écoulement du fluide considéré. Pour la description mathématique de l'écoulement, nous adopterons les coordonnées cartésiennes pour l'écriture de l'équation de continuité, des trois projections des l'équations étudié.

La première partie de notre étude, correspondant sur la vitesse de l'écoulement en fonction de la variation d' $\eta$ , en changeons entre la viscosité ( $\epsilon$ ) et la convection ( $\lambda$ ) et prendt (Pr). La seconde partie des résultats, relative à la seconde configuration, celle de température en fonction d' $\eta$  a la variation de la viscosité, la convection et prendt.

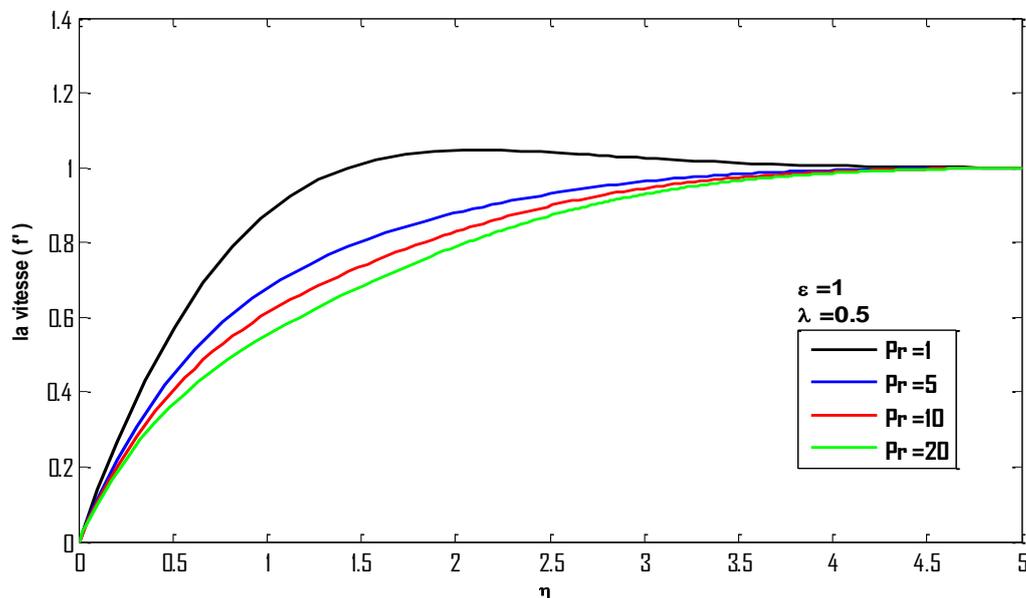
Soulignons enfin pour terminer que ce chapitre nous a pris un temps considérable pour son achèvement, étant donné le temps nécessaire à chaque exécution en particulier, lors du passage de la première configuration à la seconde.

### IV.1.Etude dynamique

Nous avons étudié le problème de la convection forcée de fluides visqueux incompressibles de viscosité variable à travers des plaques imperméables verticales et isothermes pour les trois régimes d'écoulement différents.

### IV.1.1. Effet de nombre de prandtl (Pr):

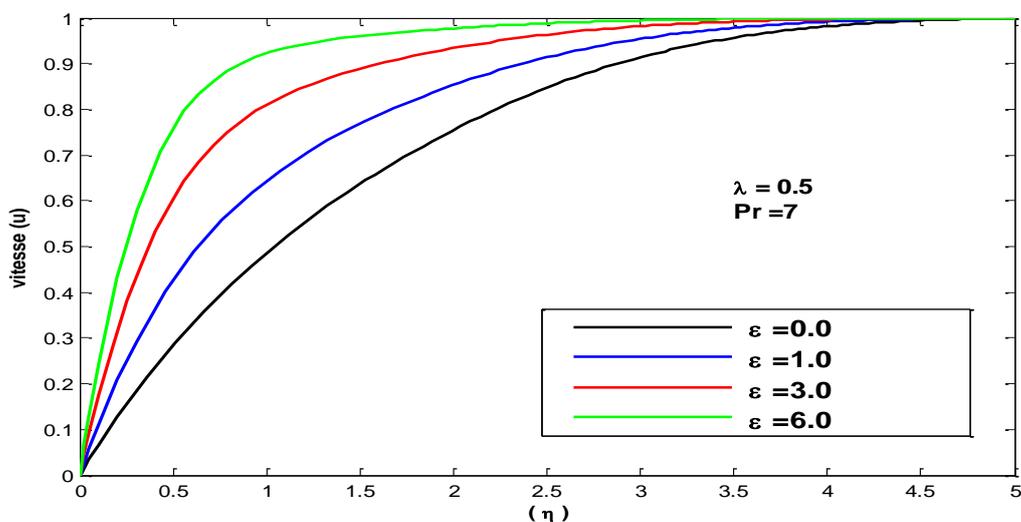
Vous obtiendrez la solution pour le numéro Prandtl. Pour  $Pr= 1, 5, 10, 20$  par rapport au paramètre de flottabilité  $\lambda =0,5$  et aux valeurs à longue portée du paramètre de viscosité,  $\varepsilon =1$



**Figure IV-4:** Influence du nombre de prandtl sur l'évolution longitudinale de la vitesse.

### IV.1.2. effet de la viscosité ( $\varepsilon$ ):

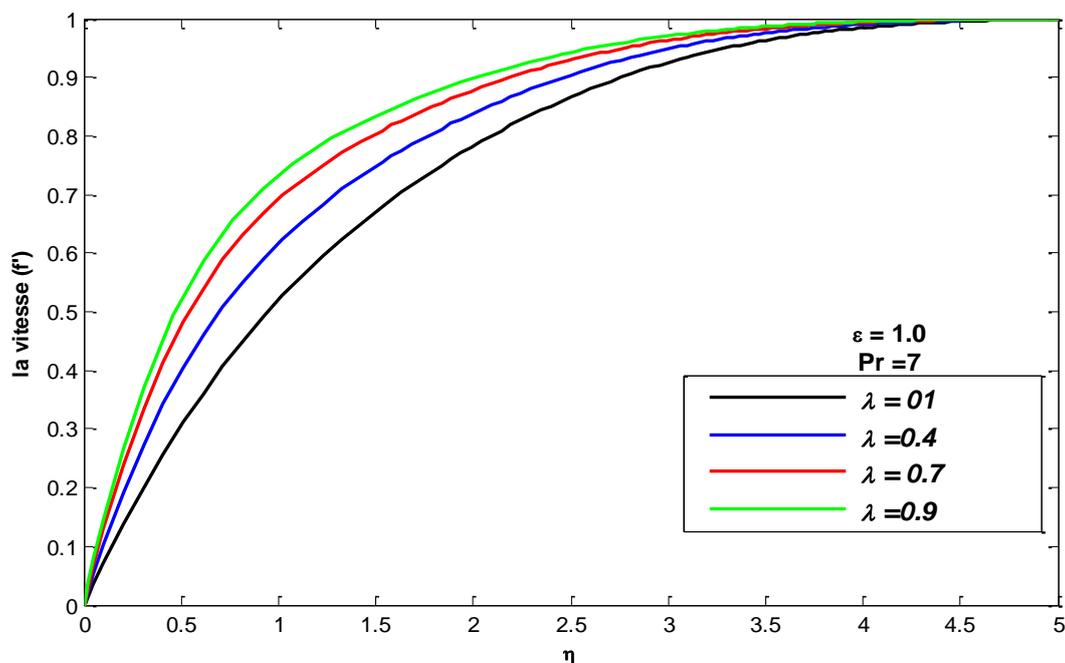
Valeur numérique de la vitesse de fluide ( $f'$ ) Et la variable ( $\eta$ ) pour diverses valeurs  $\lambda=0.5$ ,  $Pr = 7$ , et  $\varepsilon=0.0, 1.0, 3.0, 6.0$ , montre ce qui a été obtenu à partir de quatre régimes d'écoulement différents. **Figures IV-2**



**Figure IV-28:** Influence de la viscosité sur l'évolution longitudinale de la vitesse.

### IV.1.3. L'effet de paramètre de flottabilité ( $\lambda$ ):

Vous obtiendrez la solution pour le paramètre de flottabilité  $\lambda = 0.1, 0.4, 0.7, 0.9$  par rapport au numéro Prandtl locale  $Pr=7$  et aux valeurs à longue portée du paramètre de viscosité,  $\varepsilon = 1$  on obtient le graphe dans **figure(IV-3)**



**Figure IV-39:** Influence paramètre de flottabilité sur l'évolution longitudinale de la vitesse.

A travers les figures (IV-1) , (IV-2) , (IV-3) , nous présentons l'effet du nombre de prandtl et de viscosite et flottabilite sur l'évolution longitudinale de la vitesse du fluide .Nous remarquons que les courbes suivent la même allure : une croissance progressive de la vitesse centrale quand  $\eta$  ( $\eta$ ) augmente, jusqu'à atteindre une valeur constante de la vitesse au-delà de  $\eta = 4.5$ ,

Notons également que sauf a l'effet de nombre de prandtl, qu'il caractérisé par une diminution de cette vitesse avec l'accroissement du nombre de prandtl.

## IV.2. étude thermique

### IV.2.1. Effet de nombre de prandtl (Pr):

La figure (IV-4) montre l'évolution longitudinale de la température du fluide en fonction du nombre de Prandtl, quand le paramètre de flottabilité  $\lambda=0.5$  et la viscosité  $\varepsilon=1$ .

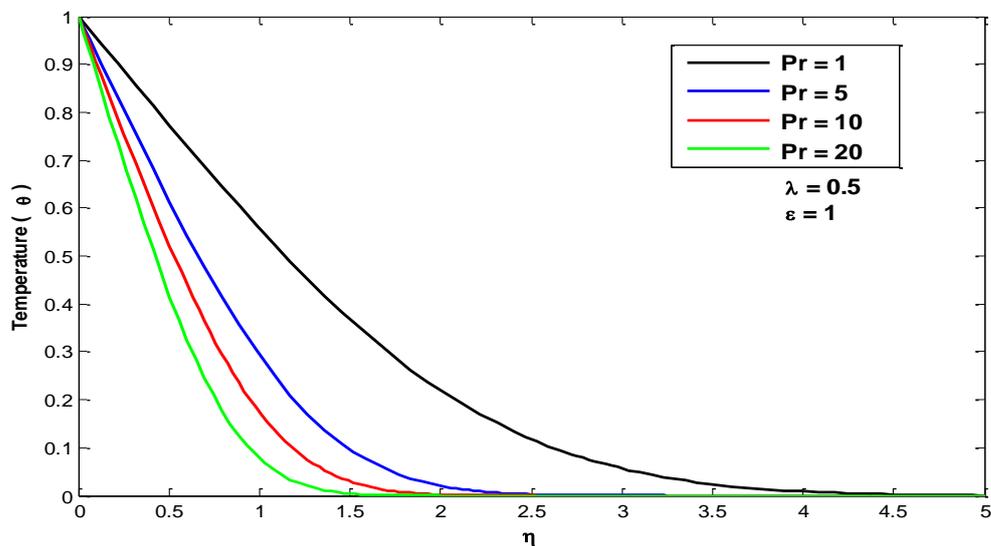


Figure IV-4 : Influence du nombre de prandtl sur l'évolution longitudinal de la température.

### IV.2.2. Effet de la viscosité ( $\varepsilon$ ):

L'évolution longitudinale de la température est représentée sur la figure (IV-5) et ce, pour différentes valeurs de la viscosité  $\varepsilon$ .

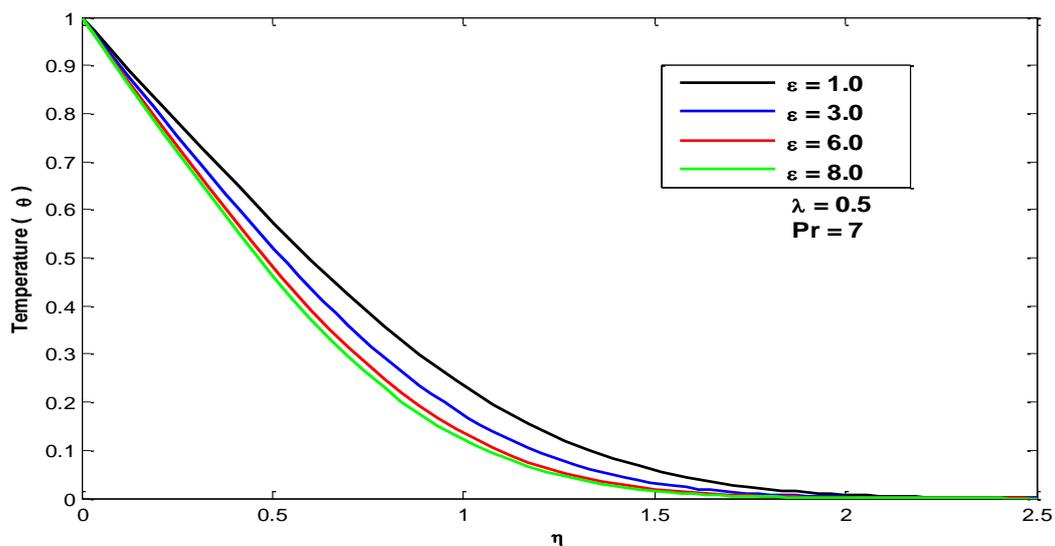
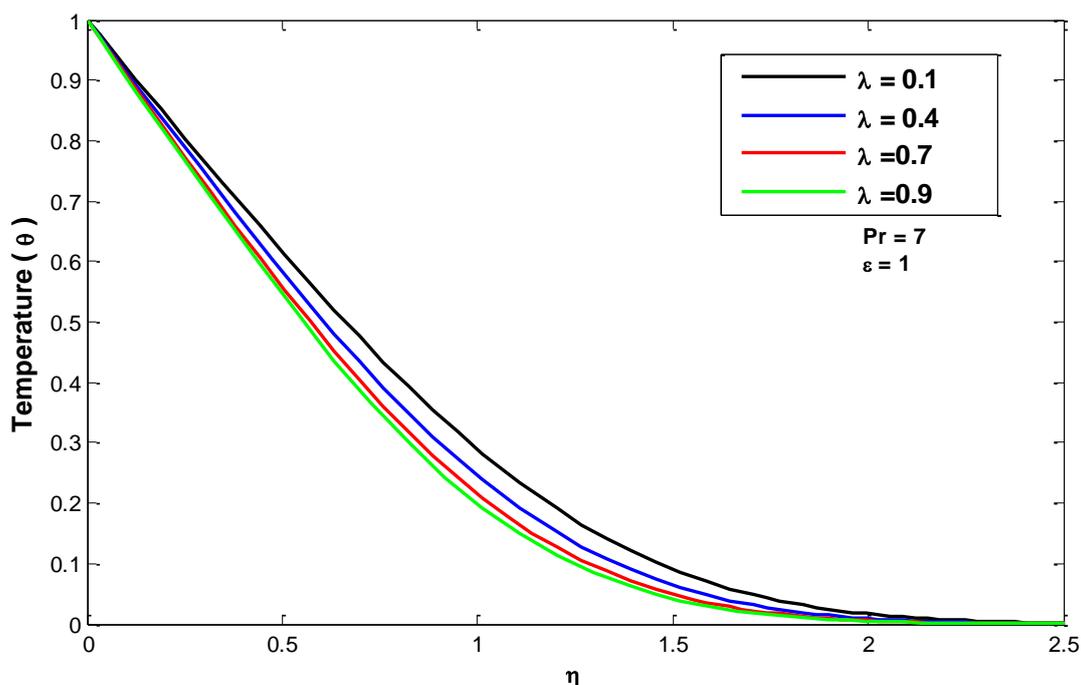


Figure IV-5: Influence de la viscosité sur l'évolution longitudinal de la température.

### IV.2.3. effet de paramètre de flottabilité( $\lambda$ ) :

L'évolution longitudinale du température est représentée sur la figure (IV-6) et ce, pour différentes valeurs du paramètre de flottabilité  $\lambda=0.1$  ,  $0.4$  ,  $0.7$  ,  $0.9$  . quand la viscosité  $\varepsilon=1$  et le nombre de prandtl  $Pr=7$  .



**Figure IV-6 :** Influence du paramètre de flottabilité sur l'évolution longitudinal de la température.

On remarque que l'augmentation du nombre de Prandtl ou de la viscosité ou de flottabilité provoque d'une part, une décroissement de la température du fluide.

Dans l'effet de Prandtl Figure (IV-4), les échanges thermiques sont d'autant plus importants ce qui conduit à une réduction de l'écart de température entre le fluide et la paroi

Et dans figures (IV-5), (IV-6) les résultats sont plus près entre les quatre courbe

Les courbes présentent la même allure pour le fluide, une forte diminution des valeurs du température du fluide localisée au niveau de la zone d'entrée , traduisant ainsi l'établissement du régime thermique. Remarquons également que l'accroissement du la viscosité provoque une intensification des échanges thermiques.

En revanche, la valeur du température de fluide reste insensible aux variations du viscosité.

### IV.3. Variation de nombre de Nusselt

Les résultats sont obtenus en termes de nombre de Nusselt (Nu), Différentes valeurs des paramètres physiques ci-dessus celles-ci sont résumées dans **les tableaux**.

Dans cette partie, on a étudié l'effet de quelques paramètres (paramètre de flottabilité et la viscosité) sur le nombre de Nusselt.

Dans le **tableau IV-1**, les valeurs numériques de Nusselt obtenues à  $Pr = 0.7$  et  $\lambda = 0.5$ , on fait varier les valeurs de Epsilon ( $\epsilon$ )

$\epsilon$ (La Viscosité)	Nu (Nombre de Nusselt)
0.0	0.3631
0.1	0.3680
1.0	0.3996
2.5	0.4286

**Tableau IV-1 : Valeur de nusselt à  $Pr=0.7$  et  $\lambda=0.5$**

Et dans le **tableau IV-2** les valeurs numériques de Nusselt obtenues à  $Pr = 0.7$  et  $\epsilon = 1.0$ , on fait varier les valeurs de Lambda ( $\lambda$ )

$\lambda$ (Paramètre de flottabilité)	Nu (Nombre de Nusselt)
0.1	0.3452
0.5	0.3996
0.7	0.4186
1.0	0.4421

**Tableau IV-2: Valeur de nusselt à  $Pr = 0.7$  et  $\epsilon = 1.0$**

De ces résultats on constate que le nombre de Nusselt est sensible à la valeur de paramètre de flottabilité et de la viscosité.

#### IV.4. Validation du code de calcul :

Valeurs numériques obtenues à  $\varepsilon = 0,0$  et  $Pr = 0,7$  dans le **tableau IV-3** à des fins de comparaison. Avec les résultats de Raju et al. [20]. Comparaison entre ces valeurs correspond très bien.

Paramètre flottabilité ( $\lambda$ )	Nos résultats (Nu)	Raju et Al [8]
0.00	0.2944	0.2932
0.29011	0.3407	0.3334
0.42115	0.3553	0.3465
0.52992	0.3659	0.3549
0.62920	0.3746	0.3609

**Tableau IV-3:** Tableau de comparaison du Nusselt avec les resultat de Raju et Al[20]

# **Conclusion générale**

## Conclusion générale

---

Dans ce travail, on a présenté une étude numérique du transfert de chaleur par convection forcée stationnaire bidimensionnelle libre laminaire d'un fluide visqueux incompressible. Le long d'une plaque plate verticale semi-infinie.

Les équations qui régissent l'écoulement sont les équations de continuité, de quantité du mouvement, et l'équation d'énergie, la méthode des volumes finis est utilisée pour la discrétisation des équations, et l'algorithme SIMPLE est adopté pour le couplage vitesse et température.

Après la conception de la géométrie en utilisant Matlab, on a passé aux simulations numériques, les résultats de simulation sont présentés la vitesse et la température de fluide.

Les résultats obtenus montrent que la température diminue avec l'augmentation des paramètres ( la viscosité , de paramètre de flottabilité , Prandtl) pour les différentes cas, si les paramètres augmente la vitesse d'écoulement augmente, ce qui conduit à une meilleur évacuation de la chaleur à partir de la source de chaleur et par conséquent, une diminution de leur températures.

Il est noté que le nombre de Nusselt moyen dans le dissipateur de chaleur augmente avec l'augmentation de nos paramètres.

Ce qui donne une meilleure évacuation de la chaleur à partir de la source de chaleur et par conséquent, un bon refroidissement du composant électronique.

# **Références Bibliographiques**

## Références Bibliographiques

---

- [1] : Cour de convection et rayonnement-4, plate forme TTE-C.E.S.I.R.E, Université Joseph Fourier-Grenoble.pdf.
- [2] : **S. SADDAM**, Amélioration de la convection mixte dans un dissipateur de chaleur à ailette elliptique creuse. Thèse de Master Université de M'sila.2015
- [3]**Gladés Bachir**. Contribution à l'étude de la convection naturelle dans les nanofluides en configuration de Rayleigh-Bénard. ThèsedoctoratL'Université Toulouse III- Paul Sabatier2010.
- [4] **N. MOKRANI**. Simulation numérique par code fluent d'une couche limite contrôlée et non contrôlée sur un profil d'aile NACA 0012 a incidence de 18°. Mémoire de master. Université de Tizi Ouzou, PP [22], (2009/2010).
- [5] **Helel. D et al** « effet des couches limites dynamique thermique et massique sur les mécanismes des transferts de chaleur et de masse au sein d'un milieu poreux soumis à une convection forcée laminaire », 2005, Paris.
- [6] **T. BENYAMMA , A. BACI**. Influence de l'effet thermique sur les caractéristiques de la couche limite laminaire sur une paroi lisse. Mémoire de master. Université Biskra, PP [5], (2017-2018)
- [7] **L. BILLON**. Génération et adaptation de maillage volume-couche limite dynamique pour les écoulements turbulents autour de géométries complexe. Thèse de doctorat. Université de Paris, PP [78-79], (2016).
- [8] **M. RECHACHE, M. A. BEN AZZOUZ**. Réalisation d'un logiciel pédagogique d'analyse d'écoulement potentiel subsonique atour. Mémoire de master. Université de Blida, PP [59], (2011).
- [9] **A. BENSLIMANE**. Introduction à la mécanique de fluide. Cours. Université de Bejaia, PP [68], (2011).
- [10] **H. SCHLICHING**. Boundary-Layer theory. 9th edition: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, PP [51], (2017).

- [11] **F. AZIEZ.** Simulation numérique de la convection naturelle sur une plaque plane horizontale. Mémoire de master. Université de Biskra, PP [1-6-7], (2017/2018).
- [12] **CH. BAYEUX.** Méthode intégrale pour la couche limite tridimensionnelle Applications au givrage. Thèse de doctorat. Université de Toulouse, PP [4-5], (2017).
- [13] **Z. SUN.** Micro Ramps in Supersonic Turbulent Boundary Layers. Master of Engineering. University of China, PP [5-6], (2014).
- [14] **Hossain M.A, Kabir S Rees D,A,S.,** Natural convection flow from vertical wavy surface with variable viscosity, Z. Angew. Math. Phys. (1999) ( in press)
- [15] **Merkin J.H** , The effects of buoyancy forces on the boundary layer flow over semi-infinite vertical flat plate in a uniform free stream, J. Fluid Mech. 35 (1969) 439-450
- [16] **Hunt R., Wilks G.,** Continuous transformation computation of boundary layer equations between similarity regimes, J. Comp. Phys. 40 (1981) 474-490.
- [17] **Hartree D.R.,** Numerical Analysis, 2nd edition, Oxford University Press, 1958, pp. 180-184.
- [18] **Cheng P, Minkowycz WJ.** Free convection about a vertical flat plate embedded in a porous medium with application to heat transfer from a dike. J Geophys Res
- [19] : **J. Kierzenka** « studies in the numerical solution of ordinary differential equations », these de doctorat,southern Methodist University,Dallas,TX,(1998).
- [20] **Raju M.S. , Liu X.R. , Law C.K. ,** A formulation of combined forced and free convection past horizontal and vertical surface, Int. J. Heat Mass Tran. 27 (1984) 22152224

## **Résumé:**

Dans ce travail on a mené une étude numérique de la convection forcée stationnaire bidimensionnelle libre et laminaire d'un fluide visqueux incompressible. Le long d'une plaque plate verticale semi-infinie. Les équations gouvernantes ont été discrétisées par la méthode des volumes finis. Les champs thermique et dynamique ont été obtenus ainsi que le nombre de Nusselt. Notre procédure de simulation a été validée en comparant les résultats qu'on obtient avec ceux d'autres travaux. Les simulations numériques sont effectuées pour la viscosité et le paramètre de flottabilité et Prandtl. Les résultats obtenus montrent que le transfert de chaleur est influencé par la température aléatoire.

**Mots clés:** convection forcée, fluide visqueux incompressible, champs thermique et dynamique, température aléatoire, géométrie complexe

## **Abstract :**

In this work we carried out a numerical study of the stationary two-dimensional free and laminar forced convection of an incompressible viscous fluid. Along a semi-infinite vertical flat plate. The governing equations were discretized by the finite volume method. The thermal and dynamic fields were obtained as well as the Nusselt number. Our simulation procedure has been validated by comparing the results obtained with those of other works. Numerical simulations are performed for the viscosity and the buoyancy parameter and Prandtl. The obtained results show that the heat transfer is influenced by the random temperature.

**Key words:** forced convection, incompressible viscous fluid, thermal and dynamic fields, random temperature, complex geometry