

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abderrahmane MIRA de Bejaia



Faculté de Technologie
Département d'Hydraulique

Laboratoire de Recherche en Hydraulique Appliquée et Environnement (LRHAE)

MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES

Présenté par :

BOUSTA Azzeddine

SLIMI Ramdane

En vue de l'obtention du diplôme de **MASTER en Hydraulique**

Option : **Ouvrages et Aménagements Hydrauliques**

INTITULE :

ÉTUDE COMPARATIVE DE DEUX SCHÉMAS AUX DIFFÉRENCES FINIES IMPLICITE ET EXPLICITE POUR LA SIMULATION DE L'ONDE DE RUPTURE DE BARRAGE.

Soutenu le **29 /09 /2022** devant le jury composé de :

- Président : **Mr BERREKSI, A.**
- Promoteur (s) : **Mr IKNI, T.**
- Examineur (s) : **Mr AMOURA, Z.**

Remerciements

Nous remercions tout d'abord le tout puissant dieu de nous avoir donné le courage, patience et force durant toutes ces années d'étude et pour réaliser ce modeste travail.

Nous tenons à présenter nos remerciements les plus sincères à notre promoteur Mr Ikni Tahar pour son encadrement ses précieux conseils, et sa disponibilité, sa générosité pour l'établissement de ce travail.

Nous remercions les membres de jury qui nous ont honorés de leurs présences.

Nous tenons à exprimer encore notre gratitude à tous nos enseignants du département d'hydraulique pour leurs assistances pédagogiques et scientifiques.

Enfin, nous remercions nos familles, nos amis et tous ceux qui ont participé de près ou de loin à la réussite de ce travail.

Merci beaucoup et « Tanmirt s tusda »

DÉDICACES

Je dédie ce modeste travail :

✓ *À mes parents et tous les membres de ma famille.*

✓ *À tous mes amis sans exception.*

AZZEDDINE BOUSTA

DÉDICACES

***JE DÉDIE CE MODESTE TRAVAIL À TOUS CEUX QUI ONT
CONTRIBUÉ À SON ABOUTISSEMENT DE PRÈS OU DE LOIN.***

***À MA FAMILLE EN PREMIER LIEU, ET ENSUITE MES CHERS
AMIS.***

SLIMI

RAMDANE

TABLE DES MATIERES

Introduction générale	1
Chapitre I : Recherche bibliographique	
Introduction.....	3
I.1 Généralités sur les barrages	3
I.2 Eléments constructifs d'un barrage	4
I.2.1 Corps du barrage	4
I.2.2 Les ouvrages annexes	5
I.3 la classification des barrages	5
I.3.1 Classification des retenues d'après les utilisations diverses de l'eau	5
I.3.2 Classification des retenues d'après la structure	5
I.3.3 Classification des barrages selon le type de matériaux et le mode de résistance à la poussée de l'eau	6
I.3.4 Autres classifications des barrages	6
I.4 Problèmes de sécurité des barrages	7
I.4.1 Phénomène de rupture d'un barrage	8
I.4.2 Causes de rupture des barrages	11
I.4.2.1 Cas d'un barrage en béton	211
I.4.3 L'onde de submersion	11
Conclusion	12
Chapitre II : Les écoulements à surface libre	
Introduction.....	13
II.1 La surface libre	13
II.2 la classification des écoulements a surface libre	13
II.2.1 Variabilité dans le temps	14
II.2.2 Variabilité dans l'espace	14
II.3 Les différents régimes d'écoulements	15
II.4 Les canaux.....	15
II.4.1 Types des canaux	16
II.4.1 Distribution des vitesses dans un canal	17
II.5 Le ressaut hydraulique.....	17
II.6 Courbes de remous	18
II.6.1 Types de courbes de remous	18
II.7 Les seuils et déversoir	19

II.8 Ecoulement avec Onde 20
Conclusion 21

Chapitre III : Modélisation mathématique

Introduction..... 22
III.1 Hypothèses de base..... 22
III.2 Etablissement des équations du mouvement 23
 III.2.1 Equation de continuité 23
 III.2.2 Equation de la quantité de mouvement 25
III.3 Conditions initiales et aux limites 27
 III.3.1 Conditions initiales 27
 III.3.2 Conditions aux limites 28
Conclusion 28

Chapitre IV : Modélisation numérique

Introduction..... 29
IV.1 Méthode des différences finies 29
 IV.1 .1 Discrétisation du domaine 32
 IV.1 .2 Approximation des dérivées 33
IV.2 Analyse de l’approximation..... 34
IV.3 Les schémas explicites et implicites 35
 IV.3.1. Schéma explicite 35
 IV.3.2. Schéma implicite 35
 IV.3.3 Comparaison des schémas implicites et explicites 36
IV.4 Condition de stabilité 36
IV.5 Viscosité artificielle 37
IV.6 Résolution du système par un schéma explicite (schéma de Lax-Friedrichs) 39
IV.7 Résolution du système par un schéma implicite (schéma de Lax-Friedrichs)..... 40
IV.7 Organigramme de calcul 43
Conclusion 44

Chapitre V : Applications numériques

Introduction..... 45
V.1 La présentation du logiciel MATLAB..... 45
V.2 Etude de l’onde de rupture de barrage dans un canal horizontal..... 46
 V.2.1 Solution analytique pour le cas sec 46
V.3 Etude comparative de la solution numérique avec la solution analytique des deux schémas implicite et explicite dans le cas sec..... 47
V.4 Etude comparative entre les deux schémas implicite et explicite pour la simulation de l’onde de rupture de barrage sur un plan horizontal avec frottement..... 49
V.5 Influence de quelques paramètres sur l’écoulement dans le cas horizontal..... 50

IV.5.1 Influence du nombre de courant	50
V.5.2 Influence du pas de discrétisation Δx	51
Conclusion	53
Conclusion générale.....	54
<i>Bibliographie.....</i>	55

Liste des symboles

BSV : Barré Saint-Venant

C : Célérité de l'onde de gravité (m/s)

CFL : Courant Friedrich Lewy

C_n : Nombre de courant

C_w : Célérité absolue (m/s)

D_h : profondeur hydraulique (m)

dM : Variation de quantité de mouvement

dt : Variation dans le temps

dv : Variation de la vitesse

F(U) : Vecteur flux

F_{ext} : Forces extérieures (N)

F_f : Force de frottement (N)

F_g : Force de gravité (N)

F_p : Force de pression (N)

F_r : Nombre de Froude

g : Accélération de la pesanteur ($\approx 9,81$ N/Kg)

h : Tirant d'eau (m)

h_1 et h_2 : profondeurs conjuguées du ressaut (m)

h_c : hauteur critique (m)

h_0 : hauteur en aval (m)

h_n : hauteur normal (m)

H_n : Hauteur de chute nette (m)

H_p : Charge hydraulique(m)

i : Indice du maillage suivant la direction x

J_c : Pente critique

J_f : Pente de fond

J_w : Pente de la surface libre

j : Indice du maillage suivant la direction y (pas de variation dans le temps)

k : Coefficient de dissipation

K_s : Coefficient de Strickler

L : Longueur du canal (m)

LISTE DES SYMBOLES

M : Masse d'une particule (kg)
M_n : Coefficient de rugosité de Manning
n : La rugosité (s⁻¹.m^{1/3})
P : Pression
Q : Débit (m³/s)
q : Débit unitaire (m²/s)
Re : nombre de Reynolds
R_h : Rayon hydraulique (m)
S(U) : Vecteur source
S₀ : Pente du fond
S_f : Pente d'énergie
t : Temps (s)
U : Vecteur d'écoulement
u : Vitesse d'écoulement (m/s)
V : Vitesse moyenne de l'écoulement (m/s)
V_i : Solution réelle (exacte)
v_i : Solution numérique
W_i : Erreur globale du calcul
x : Abscisse dans l'espace
Z : Côte du canal (m)
α : Paramètre de pondération
ρ : Masse volumique de l'eau (kg/m³)
Δt : Pas de temps
Δx : Pas de discrétisation spatial
Γ : Limite du domaine
τ₀ : Contrainte tangentiel
1D : Unidimensionnel

Liste des figures

Figure I.1 : Classification des barrages de 81 pays jusqu'en 1998 suivant leurs buts (d'après le Registre Mondial des Grands Barrages, 1998)	4
Figure I.2 : représente le corps du barrage. (MESSAID)	4
Figure I.3 : barrage de Malpasset... ..	8
Figure I.4 : barrage du Vajont après le mouvement de terrain du 9 octobre 1963	9
Figure I.5 : rupture du barrage de Taum Sauk dans le Missouri (États-Unis) en décembre 2005	10
Figure I.6 : rupture du barrage d'Aznalcóllar (Espagne) en 1998	10
Figure II.1 : Représentation de la surface libre	13
Figure II.2 : Schéma des écoulements permanents uniformes et variés.....	14
Figure II.3 : Coupe transversale d'un canal naturel	14
Figure II.4 : Coupe transversale des canaux artificiels	16
Figure II.5 : Distribution des vitesses dans un canal	16
Figure II.6 : Schémas d'un ressaut hydraulique.....	18
Figure II.7 : Schéma d'un déversoir.....	19
Figure II.8 : Représentation d'un écoulement avec onde (cas d'un régime fluvial.....	20
Figure II.9 : Représentation d'un écoulement avec onde (cas d'un régime torrentiel).....	21
Figure II.10 : Représentation d'un écoulement avec onde (cas d'un régime critique).....	21
Figure III. 1 : le flux entrant et sortant d'un domaine élémentaire	24
Figure III. 2 Volume de contrôle	25
Figure IV.1 : le maillage des différences finis	32
Figure IV.2 : schéma explicite	35
Figure IV.3 : schéma implicite	36
Figure IV.4 : le domaine n'est pas défini en amont	38
Figure IV.5 : le domaine n'est pas défini en aval.....	38
Figure V.1: "Edit Windows", où l'utilisateur peut modifier ou créer des programmes Matlab ("M-files").....	46
Figure V.2 : Présentation de la rupture de barrage d'un coursier sec et horizontal	47
Figure V.3 : Comparaison des résultats numériques et les résultats analytiques dans le cas sec sans frottement à $t=0.01$ s, a) Hauteur d'eau, b) Débit spécifique	47
Figure V.4 : Comparaison des résultats numériques et expérimentaux dans le cas sec sur un plan horizontal avec frottement à $T=3.75$ s.....	49
Figure V. 5 : Comparaison des résultats numériques et expérimentaux dans le cas sec sur un plan horizontal avec frottement à $T=9.4$ s.....	49
Figure V.6 : Effets de nombre de courant à $t=0.01$ s	50
Figure V.7 : Effets du nombre de mailles N (pas de discrétisation spatiale Δx) à $t=0.01$ s.....	51

Liste des tableaux

<i>Tableau I.1 : la classification des barrages selon la nature de matériaux de la digue et des terrains d'assise et selon la hauteur de l'ouvrage</i>	<i>7</i>
<i>Tableau II.1 : la classification des courbes de remous</i>	<i>19</i>
<i>Tableau IV.1. Tableau des coefficients de pondération des schémas aux différences finies.....</i>	<i>31</i>
<i>Tableau V. 1 : Calcul d'erreur pour le cas sec.....</i>	<i>48</i>
<i>Tableau V. 2 : Calcul d'erreur pour le nombre de maille N.....</i>	<i>51</i>

INTRODUCTION
GENERALE

Introduction générale

L'hydraulique désigne la branche de la physique qui étudie les propriétés mécaniques des liquides et des fluides.

Depuis sa renaissance, l'hydraulique n'a cessé de gagner du terrain et plusieurs problèmes ont été résolus. Parmi ces problèmes on trouve le problème de rupture de barrage connu sous le nom **“DAM-BREAK”**.

La rupture d'un barrage peut entraîner des variations rapides et significatives des conditions d'écoulement (augmentation de la vitesse et de débit) qui peuvent engendrer un risque pour la sécurité des populations et des infrastructures.

Nombreux chercheurs et scientifiques ont fait des études pour résoudre ce problème, on cite les solutions analytiques développées par Ritter en 1882 et Chanson en 2006, les études les plus récentes portaient sur l'élaboration ou l'usage de modèles de calcul comme ceux de Soares en 2007, Strauss en 2010 et enfin les travaux de Mihoubi en 2012.

Dans cette étude on s'intéresse à la simulation numérique, par deux schémas explicite et implicite aux différences finies pour étudier la propagation de l'onde de rupture de barrage.

Ce mémoire est composé de cinq chapitres.

Le premier chapitre est une recherche bibliographique sur les barrages, leurs classifications, les problèmes liés à la sécurité des barrages, le phénomène de rupture et on terminera par donner quelques exemples des catastrophes causées par ce phénomène.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons des généralités sur les écoulements à surface libre, les différents types des canaux et le phénomène de ressaut hydraulique et les écoulements avec onde.

Le troisième chapitre est consacré à la modélisation mathématique du problème, et à l'établissement des équations unidimensionnelles de Saint-Venant sur la base des principes de conservation de la masse et de conservation de la quantité de mouvement en tenant comptes des conditions initiales et aux limites.

Au quatrième chapitre, nous allons présenter la discrétisation des équations de Saint-Venant en utilisant les schémas explicite et implicite aux différences finies (Lax-Friedrichs explicite, Lax-Friedrichs implicite).

Enfin, la présentation des résultats de la simulation et leur analyse est faite au cinquième chapitre. Ces résultats concernant l'étude comparative des deux schémas aux différences finies implicite et explicite.

Nous terminerons ce modeste travail par une conclusion générale qui englobera les principaux résultats obtenus.

*CHAPITRE I : RECHERCHE
BIBLIOGRAPHIQUE*

Chapitre I : Recherche bibliographique

Introduction

Les barrages sont des ouvrages potentiellement très dangereux mais heureusement très sûrs. Comme tout ouvrage de génie civil, les barrages peuvent connaître des défaillances de sécurité, qui peuvent aboutir à des accidents plus ou moins graves. Le taux de rupture moyen annuel est d'environ 3% pour l'ensemble des barrages construits dans le monde, mais actuellement le nombre de ruptures va en diminuant, Afin de comprendre ce phénomène la présente étude va évoquer dans ce chapitre les généralités et les éléments constructifs de barrages et leurs classifications, ainsi que les dangers qui peuvent causer leurs ruptures.

I.1 Généralités sur les barrages

I.1.1 Définition d'un barrage

Un barrage est un ouvrage artificiel (ou naturel), généralement établi en travers d'une vallée, qui la transforme en un réservoir d'eau. Ils jouent cependant deux rôles principaux : celui, d'une part de stocker les apports d'eau de répondre aux besoins vitaux et économiques des populations, et celui d'autre part de protection contre des effets destructeurs de l'eau (LEBRETON, 1997).

Les barrages contribuent donc efficacement à la gestion des ressources mondiales en eau qui sont limités, mal réparties et peuvent présenter de grandes variations saisonnières. Suivant le Registre Mondial des Grands Barrages (1998), deux grandes catégories de barrages peuvent être distinguées (figure I.1) :

- Les barrages à but unique (17 953 barrages).
- Les barrages à buts multiples (14 656 barrages).

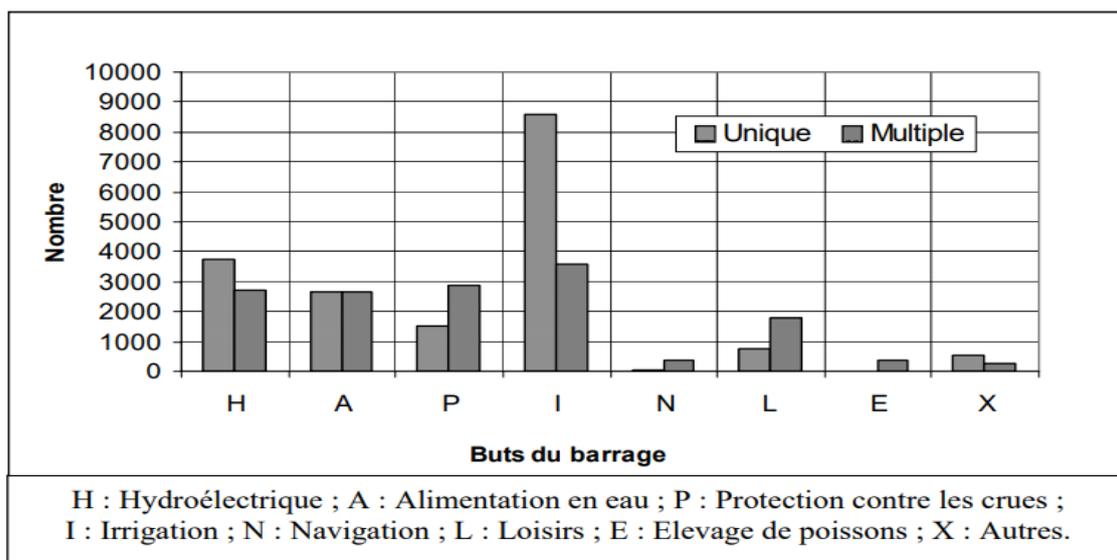


Figure I.1 : Classification des barrages de 81 pays jusqu'en 1998 suivant leurs buts (d'après le Registre Mondial des Grands Barrages, 1998).

I.2 Eléments constructifs d'un barrage

I.2.1 Corps du barrage

Grossièrement le corps du barrage présente en coupe un profil Trapézoïdal prolongé en profondeur par un moyen d'étanchéité des fondations (figure I.2).

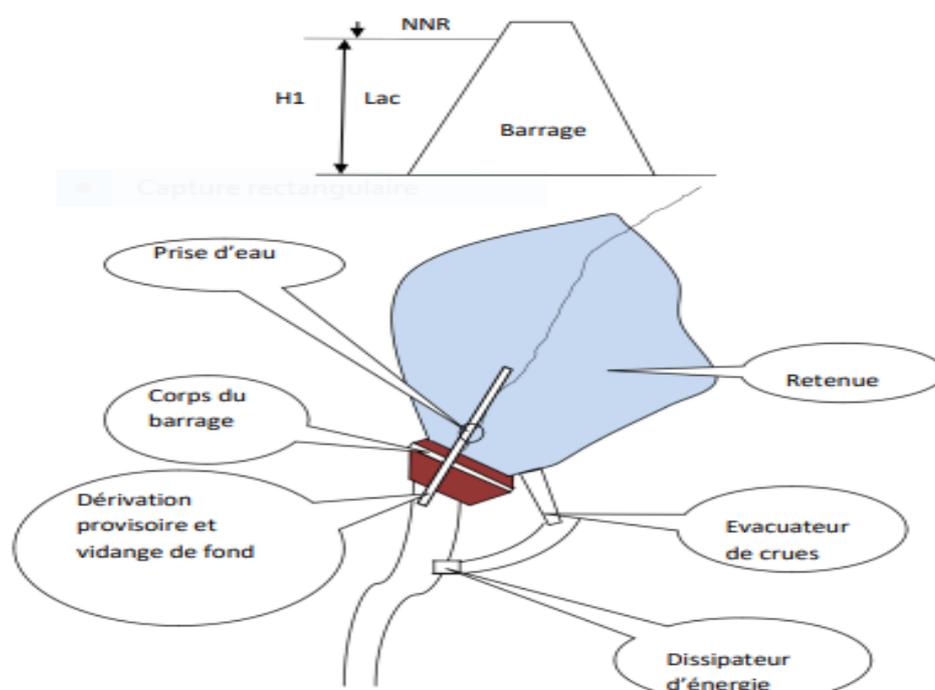


Figure I.2 : représente le corps du barrage (MESSAID).

I.2.2 Les ouvrages annexes

- **Evacuateur de crues** : C'est un ouvrage qui permet le passage des crues quand le barrage est rempli.
- **Dérivation provisoire** : La dérivation provisoire est associée à un batardeau, ces ouvrages servent à se protéger des eaux de crues durant la construction de l'ouvrage.
- **Prise d'eau** : C'est un ouvrage qui permet de prélever l'eau pour son utilisation.
- **vidange de fond** : C'est un ouvrage qui permet de vidanger partiellement ou totalement la retenue.

I.3 la classification des barrages

Parmi les diverses classifications possibles, nous retiendrons les deux suivantes : d'après la fonction et la structure et suivant le type de matériaux constituant la digue, le mode de résistance à la poussée de l'eau et le procédé de construction (MAALEL, 2012).

I.3.1 Classification des retenues d'après les utilisations diverses de l'eau

D'après les possibilités d'accumulation de la retenue, nous distinguons les barrages d'exhaussement et barrages d'accumulation. Cette classification est liée avec celle adoptée pour les aménagements hydroélectriques.

Les barrages qui jouent seulement un rôle d'exhaussement sont principalement ceux des aménagements de basse chute ($H_n < 30$ m ; H_n : hauteur de chute nette) généralement situés en basse vallée.

L'exhaussement est caractérisé par la hauteur de retenue maximale, h_m , différence entre la cote du plan d'eau à la retenue normale au droit du barrage et la cote du fond du cours d'eau au point le plus bas de celui-ci dans la section occupée par le barrage. Les barrages d'accumulation sont ceux des aménagements de moyenne ($30 < H_n < 200$ m), généralement situé en haute vallée.

I.3.2 Classification des retenues d'après la structure

Suivant la structure du barrage, nous pouvons distinguer les barrages fixes et barrages mobiles. Les barrages fixes créent une obstruction pratiquement invariable du lit du cours d'eau sur lequel ils sont construits. Les barrages mobiles, au contraire, comprennent des éléments amovibles (bouchures mobiles) qui permettent de faire varier l'obstruction créée dans le cours d'eau et, par suite, de régler le niveau du plan d'eau en amont en fonction du débit.

I.3.3 Classification des barrages selon le type de matériaux et le mode de résistance à la poussée de l'eau

Les barrages sont souvent classés sur la base du type de matériaux de construction ou sur la méthode de résistance à la pression de l'eau. Les principaux types de barrages sont :

- Barrages rigides (en matériaux assemblés).
- Barrages poids.
- Barrages voûtes.
- Barrages à voûtes multiples.
- Barrages à contreforts.
- Barrages en remblais (en matériaux non assemblés).
- Barrages en terre.
- Barrages en enrochement.

I.3.4 Autres classifications des barrages

Plusieurs autres types de classification des barrages existent, nous présenterons quelques une dans ce qui suit.

Selon que les matériaux constituant la digue sont liés ou meubles on parle de barrage souples ou barrages rigides.

Les barrages souples sont parfois appelés aussi, barrage en remblais.

Selon le procédé utilisé lors de la construction, on distingue les barrages construits à sec et les barrages construits dans l'eau.

On distingue aussi, les barrages submersibles et les barrages insubmersibles. Les barrages en terre sont de natures insubmersibles, sachant qu'une submersion même à faible débit implique une quasi-certitude d'une destruction rapide.

On parle aussi, de barrages provisoires et de barrages définitifs. Les barrages provisoires ou batardeaux, ont une utilité temporaire, ils sont souvent construits pour permettre ou pour faciliter la construction d'ouvrages définitifs. Les barrages définitifs sont destinés à rester en service pour la durée de vie de l'ouvrage qui peut s'étendre à des dizaines ou même à des centaines d'années moyennant un entretien convenable.

Les barrages de hauteur inférieure à 100 m, sont appelés barrages ordinaires, les autres sont appelés barrages de grandes hauteurs (le barrage d'Aswan en Egypte, par exemple).

Selon la nature de matériaux de la digue et des terrains d'assise et selon la hauteur de l'ouvrage on distingue 4 classes (Tableau I.1) :

Tableau I.1 : la classification des barrages selon la nature de matériaux de la digue et des terrains d'assise et selon la hauteur de l'ouvrage.

Ouvrage de retenue	Terrains d'assise	Hauteur de l'ouvrage pour la classe			
		IV	III	II	I
Barrages en terre et en enrochement	* Rocheux	25	25-70	70-100	100
	* Sableux, de grosses pierres, argileux compacts	15	15-35	35-75	75
	* Argileux bien saturé en état plastique	15	15-25	25-50	50
Barrages en béton, béton armé et ouvrages annexes	* Rocheux	25	25-60	60-100	100
	* Sableux, de grosses pierres, argileux compacts	10	10-25	25-50	50
	* Argileux bien saturé en état plastique	10	10-20	20-25	25

I.4 Problèmes de sécurité des barrages

Les barrages ont une grande importance économique et le capital investi dans leur construction est souvent très élevé et la rupture d'un barrage même pour les plus petits engendre souvent des dégâts très graves avec parfois des pertes humaines. Malheureusement, dans ce type d'ouvrages le risque zéro est inexistant et la solution adéquate est toujours difficile à mettre en œuvre, ce qui nous contraint à faire un choix entre le facteur sécurité et le facteur économique et il est essentiel d'apprécier correctement la marge de sécurité disponible.

Il est également indispensable de surveiller attentivement les ouvrages en service et faire des comparaisons avec d'autres ouvrages tout en tentant toujours d'améliorer la technologie et les méthodes de calcul et de réalisation de divers barrages. Il est à signaler que pour un facteur de sécurité donné, les grandeurs calculées peuvent être différentes des grandeurs réelles et l'écart peut atteindre des fois 100% mais dans les cas les plus complexes on ne doit pas hésiter à passer aux essais sur modèles réduits. Enfin la notion de sécurité n'est pas simple à circonscrire et les coefficients destinés à l'évaluer ne font pas l'unanimité chez les spécialistes, car ces coefficients dépendent eux-mêmes de nombreux éléments qui eux même sont très variables d'une pratique à une autre.

Quand on pense « accident de barrage » on pense tout de suite, « rupture de barrage » c'est l'évènement le plus catastrophique que l'on peut imaginer mais ce n'est pas, bien heureusement, le plus fréquent (MESSAID).

I.4.1 Phénomène de rupture d'un barrage

Les ruptures de barrages sont des événements très rares. Elles peuvent être de différents ordres (problèmes techniques, causes naturelles ou causes humaines) et correspondent à une destruction totale ou partielle de l'ouvrage. Les causes, ainsi que les mécanismes en jeu lors d'une rupture sont variables en fonction des caractéristiques propres au barrage (ANCEY, 2010).

Quelques catastrophes ont causé des dommages considérables et provoqué la mort des centaines ou des milliers de personnes :

- **Malpasset (Var, France)** : le 2 décembre 1959, le barrage-voûte barrant la rivière Reyran cède à cause d'un défaut géologique dans le massif où s'ancrait la voûte. Une vague de 40 mètres déferle sur la vallée et atteint la ville de Fréjus. Des blocs rocheux (jusqu'à 600 t!) sont entraînés et détruisent le quartier de Malpasset. En tout, ce sont 423 victimes qui sont déplorées (figure I.3).

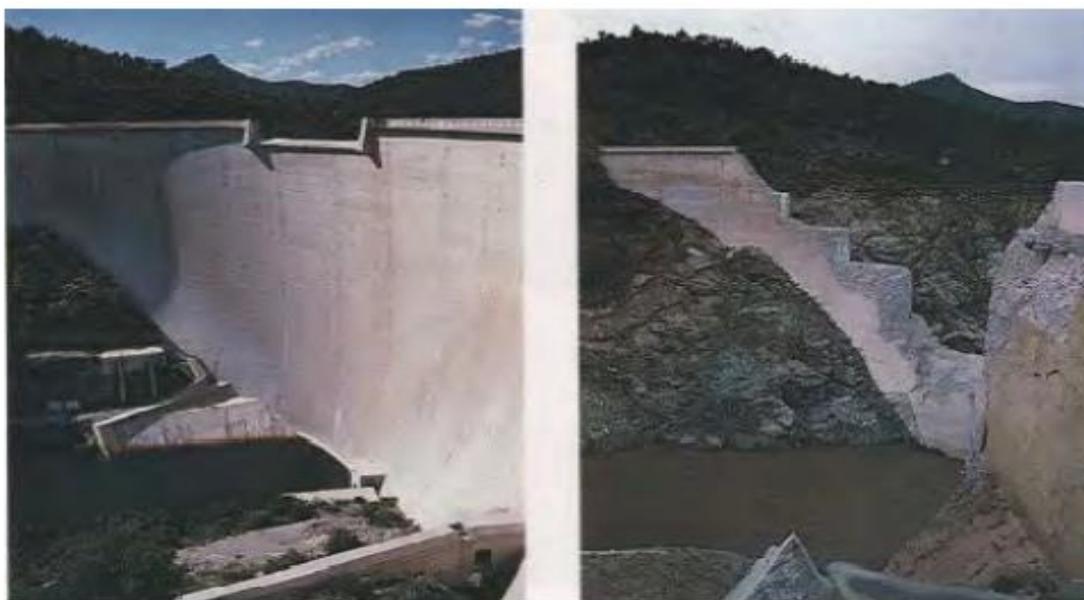


Figure I.3 : barrage de Malpasset.

- **Le barrage de Molare (bordure sud des Alpes italiennes au nord-est de Gênes)** : céda en août 1935 après des pluies diluviennes. Les évacuateurs de crue furent dans l'impossibilité d'évacuer le débit de crue généré par des pluies d'une intensité exceptionnelle (environ 500 mm dans la journée du 13 août 1935), ce qui entraîna la rupture de la digue de Zerbino. Une vague d'une hauteur de 20 mètres dévasta la vallée de l'Orba, causant environ la mort de 100 personnes (Visentini, 1936).

- **Vajont (Italie)** : le 9 octobre 1963 un glissement de terrain a mobilisé 260 Mm³ de terres et de roches dans la retenue du Vajont barrée par un barrage-voûte achevé en 1959 (Panizzo et al, 2005a). Deux vagues d'une hauteur prodigieuse (150–200 m) se sont engouffrées dans l'étroit ravin à l'aval du barrage 150 mètres de haut. La masse d'eau dévaste Longarone, Pirago, Rivalta, Villanova et Faè et de nombreux petits villages aux alentours. On estime à 1909 le nombre de personnes tuées. Le barrage n'a subi que de très légers dommages (figureI.4).



Figure I.4 : barrage du Vajont après le mouvement de terrain du 9 octobre 1963.

- **Aux États-Unis** : à Taum Sauk dans les collines du Missouri (voir figure I.5), une retenue d'environ 5 millions de m³ implantée à 1500 m d'altitude a cédé en décembre 2005 et a généré une onde de submersion dévastatrice (dénivellation de l'ordre de 700 m).



Figure I.5 : rupture du barrage de Taum Sauk dans le Missouri (États-Unis) en décembre 2005.

- **catastrophe d’Aznalcóllar (Andalousie, Espagne)** : le 25 avril 1998, la rupture d’une digue libère un volume considérable (8 km^3) d’eau contaminée par des métaux lourds et de résidus miniers. La rupture a généré une onde de crue dans les rivières Guadiamar et Guadalquivir et a pollué le parc naturel de Doñana (figure I.6) .



Figure I.6 : rupture du barrage d’Aznalcóllar (Espagne) en 1998.

- **catastrophe du Val de Stava (Trentin-Haut-Adige, Italie) :** le 19 juillet 1985, un barrage retenant les boues de décantation d'une mine cède sous la pression de l'eau après qu'un drain vétuste s'est bouché. En environ une trentaine de secondes, ce sont quelque 200000 m³ de boue qui sont libérés et s'écoulent dans le Rio di Stava. La coulée de boue a tué 268 personnes et détruit 62 bâtiments dans le village de Stava, près de Tesero.

I.4.2 Causes de rupture des barrages

Les causes de rupture d'un barrage proviennent essentiellement de la ruine ou de la détérioration de la digue. Ces causes sont multiples et liées aux matériaux de construction du barrage (remblai ou béton).

I.4.2.1 Cas d'un barrage en remblais

Dans le cas d'un barrage remblai, les causes de rupture sont les suivantes (BALIT, 2013) :

- Déversement par-dessus le barrage par défaut du système d'évacuation ;
- Érosion interne le long du contact avec les fondations ;
- Tassement important dans les fondations ;
- Phénomène de Renards qui sont dus aux fissures par tassement ;
- Hétérogénéités dans les fondations ou le barrage lui-même ;

I.4.2.1 Cas d'un barrage en béton

Dans le cas d'un barrage béton, les causes de rupture sont essentiellement dues aux :

- Défaut de stabilité du barrage ;
- Discontinuité des fondations ;
- Défaut dans les systèmes de drainages ;
- Perméabilité élevée.

I.4.3 L'onde de submersion

A la suite de la rupture d'un barrage, on observe en aval une inondation catastrophique, précédée par le déferlement d'une onde de submersion plus ou moins importante selon le type de barrage et la nature de la rupture et occasionnant d'énormes dégâts en raison de la nature des matériaux transportés par le flot.

Il est possible de simuler la rupture d'un barrage et de modéliser l'onde de submersion afin de déterminer quelles seraient les surélévations des niveaux dans la rivière à l'aval du barrage (VAZQUEZ, 2010).

Cela permet notamment de localiser les habitations et immeubles occupés par des personnes qui seraient submergés et de prévoir l'alerte. Habituellement, la modélisation de l'onde de submersion, s'arrête lorsqu'elle coïncide avec un niveau d'inondation connu (généralement l'inondation centennale) (HAUTE-VIENNE).

Conclusion

On a présenté dans ce chapitre des généralités sur les barrages. Leurs types et classifications, les problèmes liés à la sécurité des barrages en particulier le phénomène de rupture de barrage, les causes et quelques exemples de rupture à travers l'histoire.

*CHAPITRE II : LES
ÉCOULEMENTS A SURFACE
LIBRE*

Chapitre II : Les écoulements à surface libre

Introduction

Les écoulements a surface libre s'écoulent sous l'effet de la gravité en étant en contact partiellement avec un contenant (canal, rivière, conduite) et avec l'air dont la pression est généralement a surface libre. De nombreux phénomènes physiques intéressant le domaine de l'environnement sont concernés par les écoulements de fluides à surface libre; on s'intéresse ici essentiellement : aux différentes régimes d'écoulement et leurs classifications , ainsi aux canaux et leurs types et finalement aux écoulements avec onde .

II.1 La surface libre

La surface libre est l'interface entre l'air et l'eau. La pression y est égale le plus souvent à la pression atmosphérique. Les écoulements dans les canaux naturels (rivière) et artificiels (irrigation, assainissement) sont, dans la plupart des cas, des écoulements à surface libre (figure II.1) (VAZQUEZ, 2010).

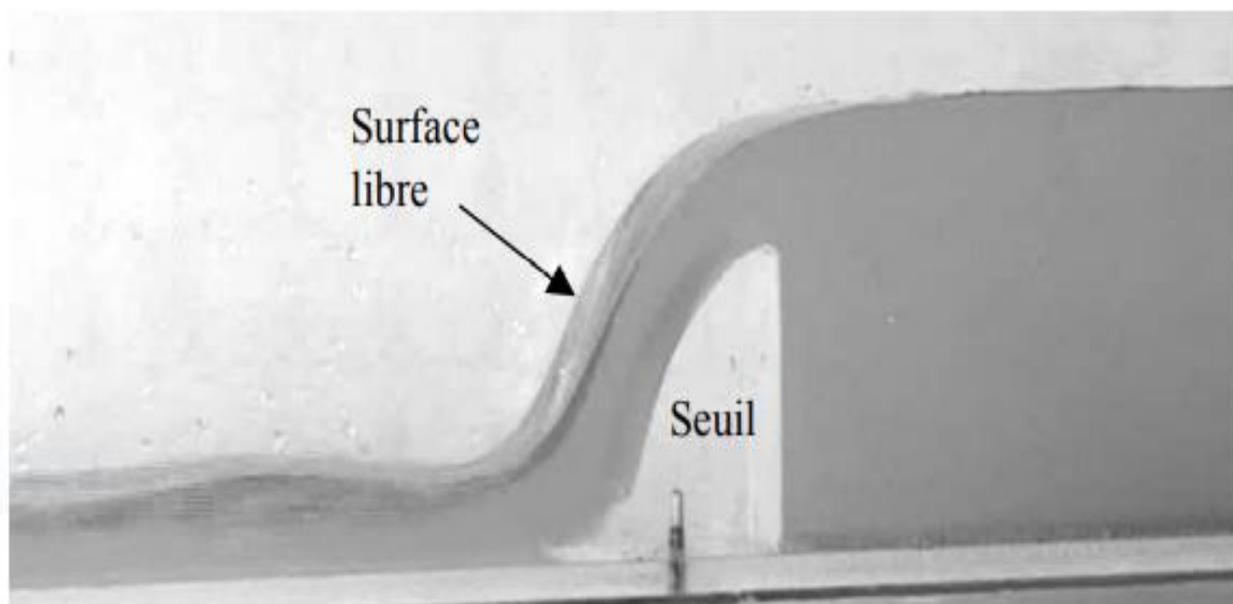


Figure II.1 : Représentation de la surface libre.

II.2 la classification des écoulements a surface libre

Une classification des écoulements peut se faire selon la variation de la profondeur, h ou D_h , en fonction du temps et de l'espace :

$$D_h = f(t, x)$$

II.2.1 Variabilité dans le temps

Le mouvement est permanent si les vitesses moyennes V et ponctuelles u , ainsi que la profondeur, h ou Dh , restent invariables dans le temps en grandeur et en direction. Par conséquent, le débit est constant.

Le mouvement est non permanent si la profondeur, $h(t)$, ainsi que les autres paramètres varient avec le temps. Par conséquent, le débit n'est pas constant.

En pratique, l'écoulement dans les canaux est rarement permanent. Néanmoins, les variations temporelles sont souvent suffisamment lentes pour que l'écoulement puisse être considéré comme permanent, du moins dans un intervalle de temps relativement court.

II.2.2 Variabilité dans l'espace

Trois cas sont à envisager (figure II.2) :

- Le mouvement est uniforme si la profondeur $Dh(x)$, ainsi que les autres paramètres, restent invariables dans les diverses sections du canal. La ligne de la pente de fond est donc parallèle à la ligne de la surface libre et l'on a $J_f = J_w$.
- Le mouvement est non uniforme ou varié si la profondeur $Dh(x)$, ainsi que les autres paramètres, changent d'une section à l'autre. La pente de fond diffère alors de celle de la surface libre, $J_f \neq J_w$.
- Lorsque le mouvement est rapidement varié, la profondeur $Dh(x)$, ainsi que les autres paramètres changent brusquement, parfois avec des discontinuités. Cela se manifeste en général au voisinage d'une singularité, telle qu'un déversoir, un rétrécissement, un ressaut hydraulique ou une chute brusque (BENABID, 2009).

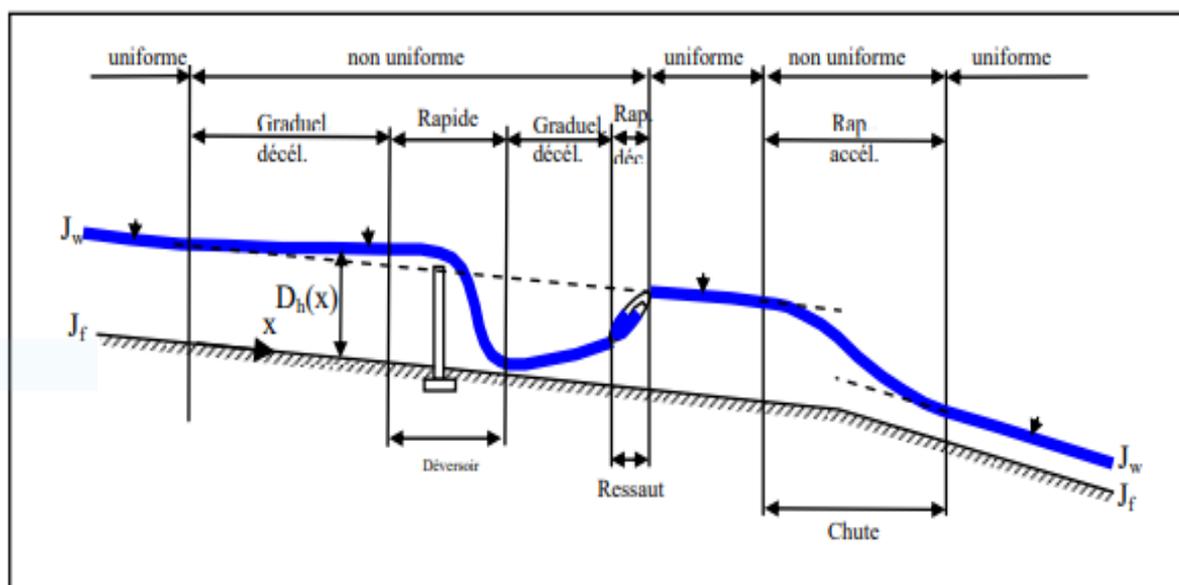


Figure II.2 : Schéma des écoulements permanents uniformes et variés.

II.3 Les différents régimes d'écoulements

L'écoulement d'un fluide réel dans un canal à surface libre est le siège des forces suivantes (BENABID, 2009):

- Forces de gravité.
- Forces de frottement (viscosité et rugosité).

Les équations réduites du mouvement font intervenir les coefficients ou nombres adimensionnels suivants :

- 1) le nombre de Froude, qui est le rapport entre les forces de gravité et celles d'inertie ou :

$$Fr = \frac{V}{\sqrt{gDh}} \quad (\text{II.1})$$

Le rôle du nombre de Froude est de permettre le classement des écoulements comme suit :

- écoulement fluvial $Fr < 1$
- écoulement torrentiel $Fr > 1$
- écoulement critique $Fr = 1$

- 2) le nombre de Reynolds, qui est le rapport entre les forces de frottement et celles d'inertie ou :

$$Re = \frac{\rho.u.d}{\mu} \quad (\text{II.2})$$

Le rôle du nombre de Reynolds est de permettre le classement des écoulements comme suit :

- écoulement laminaire $Re < 500$
- écoulement turbulent $Re > 2000$
- transition $500 < Re < 2000$

II.4 Les canaux

On appelle canal un système de transport dans lequel un liquide s'écoule et dont la surface libre est soumise à la pression atmosphérique.

L'étude hydraulique d'un canal se pose souvent aux ingénieurs sous la forme suivante :

Pour une pente longitudinale de fond, il faut évacuer un certain débit ; la forme et les dimensions du canal sont à déterminer (GRAF, 2000).

On distingue deux catégories de canaux :

- 1) les canaux naturels.
- 2) les canaux artificiels.

II.4.1 Types des canaux

Nous distinguons deux types de canaux :

a) Les canaux naturels

Sont les cours d'eau qui existent naturellement sur (ou sous) terre, tels que les ruisselets, torrents, rivières, fleuves et estuaires (voir figure II.3).

Les propriétés géométriques et hydrauliques des canaux naturels sont généralement assez irrégulières. L'application de la théorie hydraulique ne donne que des résultats approximatifs obtenus à partir d'hypothèses qui s'imposent (GRAF, 2000)

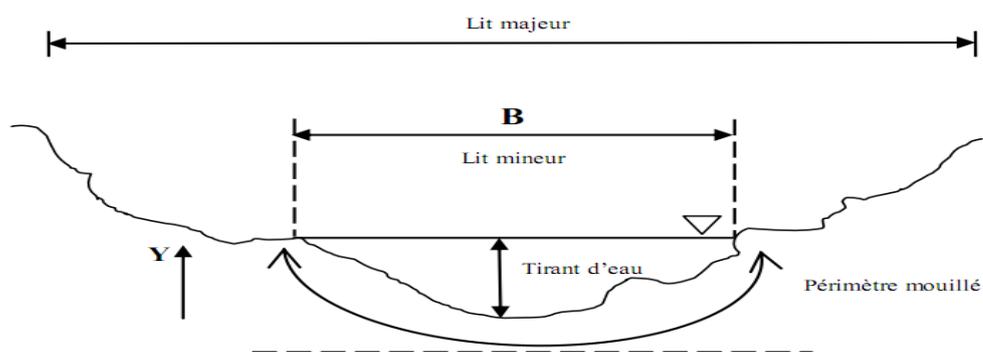


Figure II.3 : Coupe transversale d'un canal naturel.

b) Les canaux artificiels

Ce sont des cours d'eau réalisés par l'homme sur (ou sous) terre tels que : les canaux découverts construits au ras du sol (canaux de navigation, d'adduction et d'évacuation, d'irrigation et de drainage) ou les canaux couverts dans lesquels les liquides ne remplissent pas toute la section (tunnels hydrauliques, aqueducs, drains, égouts) (figure II.4).

Les propriétés hydrauliques des canaux artificiels sont généralement assez régulières. L'application de la théorie hydraulique donne souvent des résultats réalistes (GRAF, 2000).

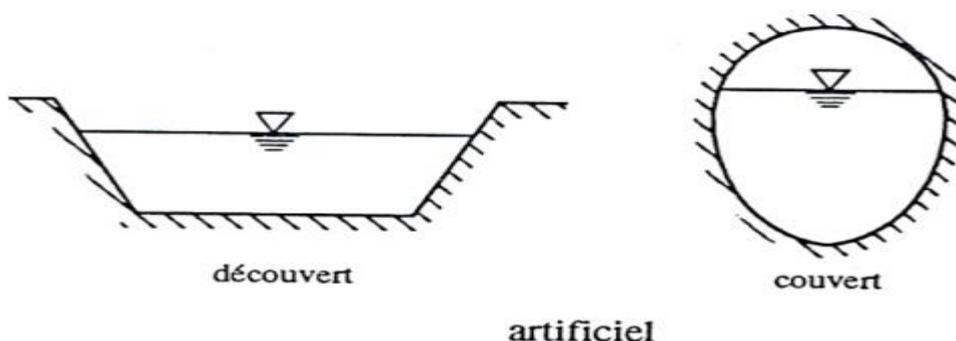


Figure II.4 : Coupe transversale des canaux artificiels.

II.4.1 Distribution des vitesses dans un canal

La distribution des vitesses dans une section transversale varie en fonction de la forme de la section et de la rugosité des parois.

La figure suivante montre la répartition des iso-vitesses dans le cas d'un régime turbulent. Dans certains cas, la vitesse peut-être maximale un peu au-dessous de la surface libre (GRAF, 2000).

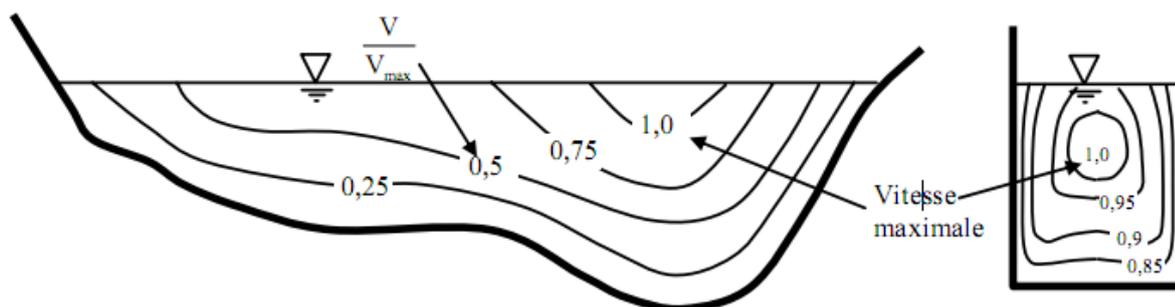


Figure II.5 : Distribution des vitesses dans un canal.

Comme pour les écoulements en charge, nous avons également un régime d'écoulement laminaire et turbulent (L'écoulement laminaire est rare en hydraulique).

II.5 Le ressaut hydraulique

Le ressaut hydraulique est une surélévation brusque de la surface libre d'un écoulement permanent, qui se produit lors du passage du régime torrentielle au régime fluvial (KATEB, 2014).

Il est accompagné d'une agitation marquée et de grandes pertes d'énergie (figure II.5).

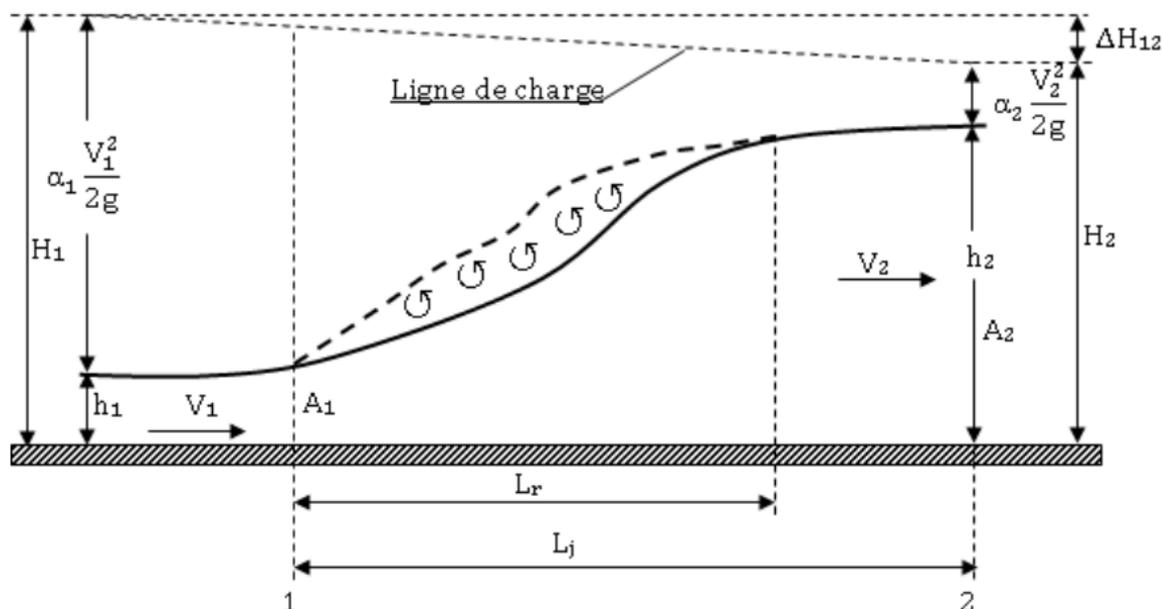


Figure II.6 : Schémas d'un ressaut hydraulique.

Les hauteurs h_1 et h_2 sont appelées profondeurs conjuguée du ressaut. La distance L_j entre la section 1 et 2 est appelée longueur du ressaut et la distance L_r appelée longueur du rouleau. La perte de charge est représentée par ΔH_{12} .

La capacité de dissipation du ressaut est généralement évaluée par le rapport de la perte de charge qu'il occasionne entre ces sections initiales et finales à la charge totale dans sa section initiale.

L'écoulement torrentiel à l'amont du ressaut est caractérisé par un coefficient cinétique (ou nombre de Froude $Fr_1 > 1$) et représente la relation entre la vitesse de l'écoulement et la vitesse de propagation des petites perturbations.

II.6 Courbes de remous

Les courbes de remous représentent la ligne d'eau d'un écoulement graduellement varié, qui est caractérisé par une variation progressive des divers paramètres hydraulique le long d'un courant.

Le calcul des courbes de remous pour les écoulements graduellement varié à surface libre dans les canaux ouverts permet de déduire la profondeur à tout point du canal. Il consiste à suivre l'évolution de la ligne d'eau sur toute la longueur du canal considéré.

II.6.1 Types de courbes de remous

La classification des courbes de remous dépend de la pente de fond J_f .

Le tableau ci-dessous présente les types de courbes de remous, Selon les différents types de pente en fonction de la hauteur normale (h_n) et la hauteur critique (h_c).

Tableau II.1 : la classification des courbes de remous.

Types de pente	Pente de fond	J_f et J_c	h_n et h_c	Type de la courbe
Canal à faible pente	$J_f > 0$	$J_f < J_c$	$h_n > h_c$	M
Canal à forte pente		$J_f > J_c$	$h_n < h_c$	S
Canal à pente critique		$J_f = J_c$	$h_n = h_c$	C
Canal horizontal	$J_f = 0$	/	/	H
Canal à contre pente	$J_f < 0$	/	/	A

II.7 Les seuils et déversoir

Un déversoir ou seuil en rivière est un ouvrage, fixe ou mobile, qui sert à contrôler le niveau d'eau et mesurer le débit s'écoulant au-dessus de l'ouvrage (figure II.7).

La présence d'un seuil crée une surélévation de la ligne d'eau en amont du seuil, une section de contrôle hydraulique au niveau du seuil, pouvant conduire à la création d'un petit plan d'eau à l'amont de l'ouvrage, suivi d'une zone de rapides sur le parement aval.

On distingue principalement trois types de déversoirs :

- à paroi mince.
- à crête arrondie (déversoir dénoyé).
- à seuil épais.

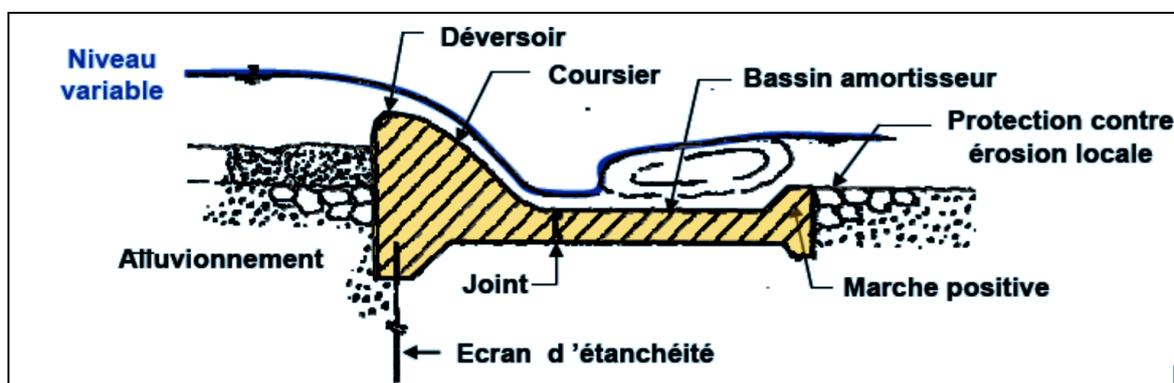


Figure II.7 : Schéma d'un déversoir.

II.8 Ecoulement avec Onde

Les écoulements non permanents (variable dans le temps) à surface libre sont caractérisés par des ondes de gravité.

Une onde de gravité est définie par sa vitesse par rapport au niveau normal du liquide dans le canal (célérité d'onde).

Considérons que la surface libre est soumise à un déplacement périodique au cours du temps dû à une onde bidimensionnelle et progressive soit dans la direction x^+ (sens positif de l'écoulement), soit dans la direction x^- (sens négatif de l'écoulement). C 'est la célérité d'une onde de forte amplitude.

$$C^2 = gD_h \quad (\text{Canal rempli d'eau au repos}) \quad (\text{II.3})$$

La relation (II.1) reste valable dans le cas où l'eau serait en mouvement ; où on observe la superposition de l'onde au courant de l'écoulement. Par conséquent, la célérité générée par cette superposition est donnée par (GRAF, 2000) :

$$C_w = V \pm C \quad (\text{II.4})$$

C_w : la célérité absolue, qui la vitesse par rapport au sol, à évidemment deux valeurs :

$$C'_w = V + C \quad (\text{II.5})$$

$$C''_w = V - C \quad (\text{II.6})$$

V : La vitesse d'écoulement dans le canal.

Trois cas différents de l'écoulement par onde sont possibles en fonction de l'ampleur relative des vitesses V et C , Ces trois cas sont :

- 1) **1^{ère} cas ($V < C$)** : l'onde avec la célérité C'_w se propage vers l'aval et l'onde avec la célérité C''_w se propage vers l'amont; c'est le régime fluvial (figure II.8).

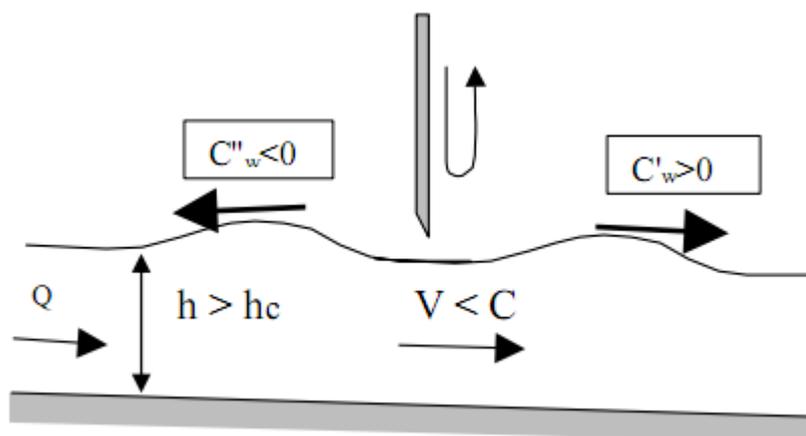


Figure II.8 : Représentation d'un écoulement avec onde (cas d'un régime fluvial).

- 2) **2^{ème} cas ($V > C$)** : les deux ondes se propagent vers l'aval ; c'est le régime torrentiel (figure II.9).

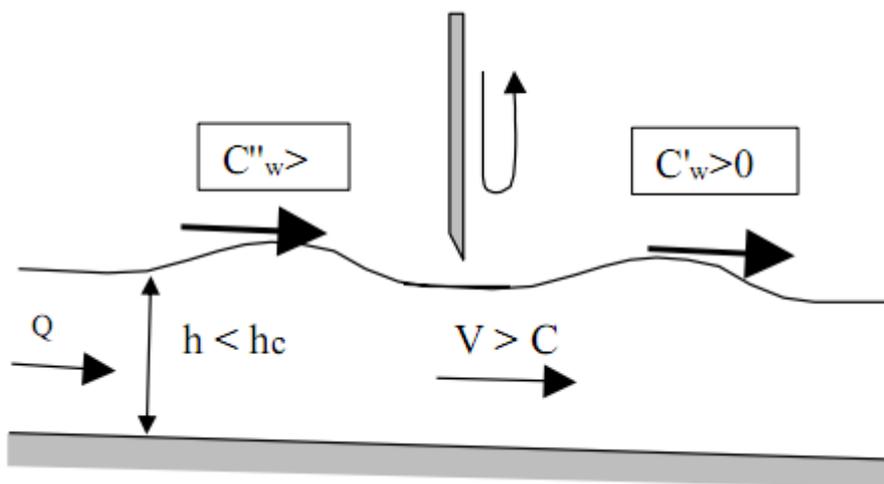


Figure II.9 : Représentation d'un écoulement avec onde (cas d'un régime torrentiel).

- 3) **3^{ème} cas ($V = C$)** : l'onde avec la célérité C'_w se propage vers l'aval et l'onde avec la célérité C''_w reste stationnaire; c'est le régime critique (figure II.10).

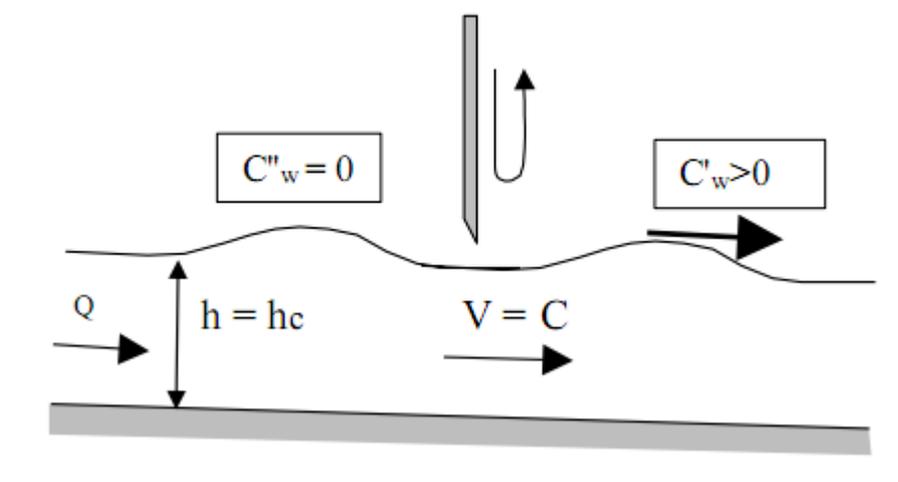


Figure II.10 : Représentation d'un écoulement avec onde (cas d'un régime critique).

Conclusion

On a cité dans ce chapitre les notions de bases sur les écoulements à surface libre dans les différents canaux ainsi la classification des régimes d'écoulement et les courbes de remous, Nous avons parlé aussi sur le phénomène de ressaut hydraulique et le rôle important des seuils et déversoirs dans un écoulement. Et finalement on a évoqué un élément essentiel qui est l'écoulement avec une onde.

*CHAPITRE III : MODELISATION
MATHEMATIQUE*

Chapitre III : Modélisation mathématique

Introduction

L'étude mathématique des écoulements à surface libre n'est pas une discipline scientifique récente. Elle a débuté depuis 200 ans lors de l'essor de l'ensemble des théories mécaniques, avec les travaux de Laplace en 1776 et de Lagrange vers 1781 sur la propagation des ondes à la surface des canaux. Dès 1871, Barré de Saint-Venant a formulé mathématiquement, par un système d'équations différentielles, le mouvement des eaux à surface libre pouvant faire l'objet d'une description filaire. Depuis lors, ces équations servent de base aux modèles mathématiques d'écoulement à surface libre en rivière, en canaux et en réseau d'assainissement d'après (KOVACS, 1988).

III.1 Hypothèses de base

Les formulations mathématiques, étant une schématisation de la réalité qui permet de calculer les grandeurs qui l'intéressent, ne peuvent avoir lieu qu'après avoir fixé auparavant un certain nombre d'hypothèses (RAHMANI, 2014).

Les divers éléments d'un modèle mathématique sont :

- Un domaine de l'espace où l'on va calculer des écoulements et une représentation de la topographie des fonds.
- Un système d'équations à résoudre dans ce domaine accompagné de conditions aux limites qui représentent l'interaction entre domaine modélisé et l'extérieur à ce domaine (amont-aval).
- Une discrétisation et une méthode de résolution.

Les principales hypothèses simplificatrices sont :

- L'écoulement est unidimensionnel ;
- L'écoulement est non permanent ;
- Liquide incompressible ;
- La pente du canal est faiblement inclinée ;
- Le canal est à section transversale rectangulaire ;
- Répartition uniforme des vitesses transversales ;
- Distribution hydrostatique des pressions ;

-Les contraintes tangentielles au fond du canal sont prépondérantes sur les autres Contraintes ;

III.2 Etablissement des équations du mouvement

La simulation d'écoulements à surface libre turbulent nécessite la résolution d'un système d'équations appelé "système de Barré Saint-Venant", obtenu à partir d'une intégration sur la verticale des équations de Navier-Stokes. On procède généralement à partir d'hypothèses simplificatrices en considérant que la pression hydrostatique, le fond et la surface libre sont imperméables et l'hypothèse de Boussinesq.

Ces équations sont basées sur certaines lois physiques, à savoir la conservation de la masse (équation de continuité) et la conservation de la quantité de mouvement (équation fondamentale de la dynamique).

Les équations de Barré de Saint Venant unidimensionnelles sont écrites sous certaines hypothèses qui sont les suivantes (MARC, 2002):

- La distribution des pressions est considérée comme hydrostatique dans une section. Cette hypothèse de pression hydrostatique impose des accélérations verticales faibles devant la pesanteur ;
- Le liquide est incompressible, sa masse volumique est donc constante ;
- La pente de la surface libre est faible. Soit z , i et α , la cote, la pente et l'angle du fond du canal respectivement. Pour un angle α petit :

$$\text{On a : } \sin \alpha \cong \tan \alpha = i = - \frac{dz}{dx} \quad (\text{III.1})$$

- La vitesse est supposée constante dans une section.

En utilisant les mêmes lois empiriques qui régissent l'écoulement uniforme, les forces de frottement et de turbulence peuvent être représentées par un seul paramètre S_f (ABDALLAH, 2005).

III.2.1 Equation de continuité

L'équation de continuité est d'intérêt très général puisqu'elle traduit le principe de conservation de la masse au sein d'un écoulement. L'établissement de cette équation locale repose sur un bilan de masse de fluide au sein d'un élément de volume pendant un temps élémentaire dt .

On considère alors un élément de volume parallélépipédique $dV = dx \, dy \, dz$ dont la masse est proportionnelle à la masse volumique du fluide et vaut donc : $m = \rho \, dV$. De manière générale, la variation de masse pendant le temps dt peut se formuler (figure III.1) :

$$dm = \frac{\partial m}{\partial t} dt = \frac{\partial \rho}{\partial t} dV dt \quad (\text{III.2})$$

Par ailleurs, cette variation de masse peut être identifiée à la somme algébrique des débits traversant les 6 faces du parallélépipède, augmentée (ou diminuée) des éventuels sources ou puits pouvant se trouver à l'intérieur du parallélépipède (ces sources ou puits sont des point de où de la matière fluide peut être créée ou détruite).

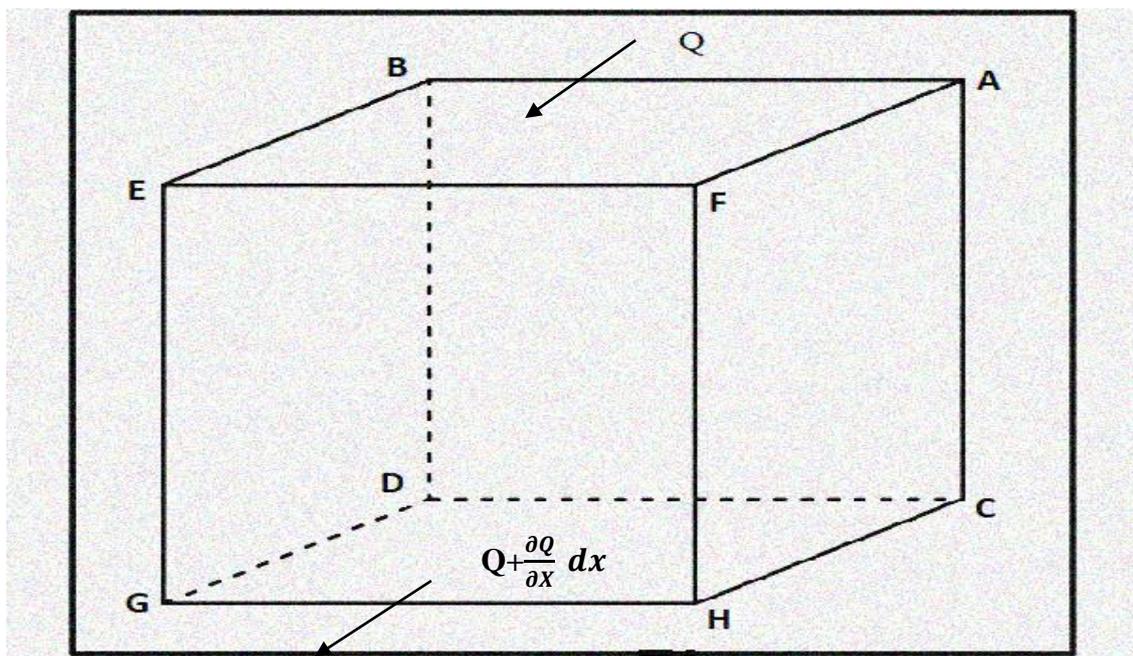


Figure III. 1 : le flux entrant et sortant d'un domaine élémentaire

- à l'instant t, le débit entrant par la section ABCD est : Q . (III.3)

- à $t = t + dt$, le débit sortant par la section EFGH est : $Q + \frac{\partial Q}{\partial x} dx$. (III.4)

- La variation du flux entre ces deux sections pendant le temps dt, est : $\left(-\frac{\partial Q}{\partial x}\right) dx$ (III.5)

Cette variation résulte d'une augmentation de volume due au déplacement de la ligne d'eau entre t et t+dt (Figure III.1).

$$ds dx = \frac{\partial s}{\partial t} dt dx \quad (\text{III.6})$$

$$\left(-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)dx dt = \frac{\partial s}{\partial t}dt dx \tag{III.7}$$

D'où :

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial t} = 0 \tag{III.8}$$

On a : $s = b * h$ et $Q = u * s$ donc on aura :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + h \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \tag{III.9}$$

III.2.2 Equation de la quantité de mouvement

Cette équation se déduit de la deuxième loi de Newton : le taux de variation de la quantité de mouvement d'une particule de masse **M** est égal à la somme des forces extérieures agissant sur cette particule (figure III.2). Les forces extérieures agissant sur le volume de contrôle sont les forces de pressions, et celles de gravité et de frottements (ELGOUIZI, 2012).

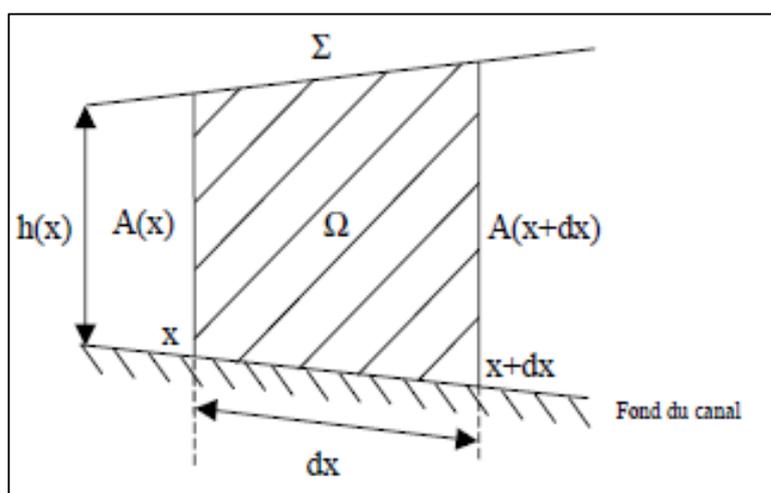


Figure III- 2 Volume de contrôle

$$F_{ext} = F_{pression} + F_{gravité} + F_{frottement} \tag{III.10}$$

- La force de pression :

$$F_{pression} = -g\rho \frac{\partial h}{\partial x} A dx \tag{III.11}$$

- la force de gravité :

$$F_{gravité} = \rho g A \sin(\alpha) dx \tag{III.12}$$

avec : $i = \sin \alpha$

Où α correspond à l'angle formé par l'horizontale et le radier du canal.

- **La force de frottement** : est due à une contrainte de cisaillement et agit sur le Périmètre mouillé. Elle s'exprime par la relation :

$$F_{\text{frottement}} = -\tau_0 P dx = -\rho g A s_f dx \quad (\text{III.13})$$

τ_0 : Force de frottement par unité de surface.

P : périmètre mouillé.

s_f : Est la pente de la ligne de charge au total appelée frottement de résistance. Elle est donné par une relation de type Chézy.

On rencontre plus communément ce terme exprimé sous la forme de la relation de Manning-Strickler :

$$S_f = \frac{Q^2}{K_S^2 A^2 R_h^{4/3}} = \frac{u^2 M_n^2}{R_h^{4/3}} \quad (\text{III.14})$$

Avec :

K_S : Coefficient de Strickler.

M_n : Coefficient de Manning.

En appliquant le principe fondamental de la dynamique, on obtient :

$$\sum F_{\text{ext}} = m \frac{du}{dt} = \rho A dx \frac{du}{dt} \quad (\text{III.15})$$

$$\sum F_{\text{ext}} = +\rho A g dx \sin(\alpha) - \rho g A s_f dx - g \rho \frac{\partial h}{\partial x} A dx \quad (\text{III.16})$$

Après simplifications :

$$\frac{du}{dt} = g \sin(\alpha) - g s_f - g \frac{\partial h}{\partial x} \quad (\text{III.17})$$

La définition de la dérivée particulaire nous permet d'écrire :

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \quad (\text{III.18})$$

On remplaçant l'équation (III.17) dans l'équation (III.18) on aura finalement :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = g(S_0 - S_f) \quad (\text{III.19})$$

Avec :

$\frac{\partial u}{\partial t}$: Terme d'inertie dépend du temps donc de la vitesse de montée de la crue ;

$u \frac{\partial u}{\partial x}$: Deuxième terme d'inertie (accélération convective) dépend de la géométrie des canalisations ;

$g \frac{\partial h}{\partial x}$: Terme de pression, lié à la pente de la surface libre ;

g : Terme de gravité ;

$S_0 - S_f$: Terme de frottement, lié aux pertes de charges ;

Les équations (III.9) et (III.19) représentent les équations connues de Barré de Saint Venant :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + h \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} - g(S_0 - S_f) = 0 \end{cases} \quad (III.20)$$

Formulation en débit :

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial(Q^2/S)}{\partial x} - g(S_0 - S_f) = 0 \end{cases} \quad (III.21)$$

La forme conservative de Barré de Saint Venant est (GRAF, 1998):

$$U_t + F(U)_x = S(U) \quad (III.22)$$

Avec :

$$U = \begin{pmatrix} h \\ hu \end{pmatrix} ; F(U) = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + 0.5gh^2 \end{pmatrix} ; S(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ gh(S_0 - S_f) \end{pmatrix} \quad (III.23)$$

III.3 Conditions initiales et aux limites

Pour résoudre les équations de Barré de Saint Venant on utilise des conditions initiales et des conditions aux limites.

III.3.1 Conditions initiales

On suppose qu'avant la rupture de barrage l'eau est initialement au repos, la profondeur d'eau en amont est de la hauteur de l'eau dans le barrage, la hauteur de l'eau à l'aval est nulle (sec), la vitesse a été initialisée par une valeur nulle (RAHMANI, 2014) :

A $t=0$ on a :

A l'extrémité amont : $h(0, x) = h \quad (III.24)$

A l'extrémité aval :

$$h(0, x) = 0 \quad (\text{III.25})$$

La vitesse en amont et aval:

$$u(0, x) = 0 \quad (\text{III.26})$$

III.3.2 Conditions aux limites

Les conditions aux limites dépendent de la profondeur d'eau, de la vitesse moyenne à l'amont et à l'aval sont appliquées à toutes les frontières externes du domaine de calcul et à tous les temps $t > 0$.

A l'aide d'une extrapolation linéaire on a (DELESTRE, 2010):

A $t > 0$

$$U_0^{n+1} = 2U_1^{n+1} - U_2^{n+1} \quad (\text{III.27})$$

$$U_N^{n+1} = 2U_{N-1}^{n+1} - U_{N-2}^{n+1} \quad (\text{III.28})$$

Conclusion

Dans ce chapitre, on a cité les différentes hypothèses pour la modélisation mathématique des écoulements à surface libre qui nécessite la résolution des équations de Barré Saint-Venant unidimensionnelles basées sur les deux lois (conservation de la masse et la conservation de la quantité de mouvement) ainsi nous avons donné les conditions initiales et conditions aux limites.

CHAPTRE IV :
MODELISATION NUMERIQUE

Chapitre IV : Modélisation numérique

Introduction

La résolution des problèmes liés aux équations aux dérivées partielles est faite à l'aide des méthodes numériques, Ces méthodes sont développées par les scientifiques et les chercheurs dans le domaine de l'analyse numérique car la résolution de ces équations analytiquement est difficile.

Plusieurs méthodes numériques ont été par la suite développées dans ce contexte, on peut distinguer les méthodes suivantes :

- Méthode des éléments finis ;
- Méthode des caractéristiques ;
- Méthode des éléments intégrables aux frontières ;
- Méthode des différences finies ;
- Méthode des volumes finis ;

Dans ce chapitre nous utilisons la méthode des différences finies pour la résolution des équations de Barré Saint-Venant, car elle est la mieux conseillée quand on traite un problème d'écoulement unidimensionnel, selon les constats faits par certains chercheurs.

IV.1 Méthode des différences finies

Les méthodes de résolution par différences finies sont actuellement les plus utilisées. Il existe différentes méthodes de résolution en fonction des schémas numériques mis en œuvre. La méthode de résolution par différences finies consiste à remplacer les opérateurs différentiels par des opérateurs algébriques (basés sur des intervalles de temps et d'espace Δt et Δx), établis à partir de développement de série de Tylor, puis on résout le système d'équations algébriques ainsi obtenu en tenant compte des conditions initiales et aux limites. Temps t : $U = U(x, t)$. Les dérivées partielles par rapport à x s'expriment de la manière suivante.

On pose, avec a très faible (MAHDAOUI, 2014) :

$$U(x + a) = U(x) + aU'(x) + \frac{a^2}{2} U''(x) + \theta_1(a)^3 \quad (\text{IV.1})$$

$$U(x - a) = U(x) - aU'(x) + \frac{a^2}{2} U''(x) + \theta_2(a)^3 \quad (\text{IV.2})$$

En négligent les termes d'ordre supérieur à 2, la dérivée est calculée par la relation suivante (schéma centré avec approximation d'ordre 2) :

$$U'(x) = \frac{U(x+a) - U(x-a)}{2a} \quad (\text{IV.3})$$

On peut également utiliser les relations négligeant les termes d'ordre supérieur à 1 seulement, ce qui conduit :

- Soit à un schéma progressif (ou avancé) avec approximation d'ordre 1 :

$$U'(x) = \frac{U(x+a) - U(x)}{a} \quad (\text{IV.4})$$

- Soit à un schéma régressif (ou retardé) avec approximation d'ordre 1 :

$$U'(x) = \frac{U(x) - U(x-a)}{a} \quad (\text{IV.5})$$

- Si on remplace par un pas d'espace Δx , il devient :

$$\frac{\partial U}{\partial x} \approx \frac{U(x+\Delta x) - U(x-\Delta x)}{2\Delta x} \quad (\text{IV.6})$$

Où :

$$\frac{\partial U}{\partial x} \approx \frac{U(x+\Delta x) - U(x)}{\Delta x} \quad (\text{IV.7})$$

Où :

$$\frac{\partial U}{\partial x} \approx \frac{U(x) - U(x-\Delta x)}{\Delta x} \quad (\text{IV.8})$$

Selon le pas de temps avec lequel sont calculées les dérivées partielles par rapport à x , on utilise soit des schémas explicites lorsque toutes les valeurs de U sont calculées au pas de temps $n \Delta t$. Soit des schémas implicites lorsque les valeurs de U sont calculées au pas de temps $(n+1) \Delta t$.

Pour simplifier les écritures nous noterons i l'indice relatif au pas d'espace et n l'indice relatif au pas de temps.

Dans ces conditions, on peut écrire :

$$U(i\Delta x, n \Delta t) = U_i^n \quad (\text{IV.9})$$

Dans le cas le plus général, on peut donc écrire une dérivée partielle par rapport à x sous la forme :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \alpha_3 \frac{\alpha_3(U_{i+1}^{n+1} - U_i^{n+1}) + (1-\alpha_3)(U_i^{n+1} - U_{i-1}^{n+1})}{\Delta x} + (1-\alpha_3) \frac{\alpha_2(U_{i+1}^n - U_i^n) + (1-\alpha_2)(U_i^n - U_{i-1}^n)}{\Delta x} \quad (\text{IV.10})$$

Selon les différentes pondérations effectuées, on obtient les différents possibles indiqués dans le Tableau (IV.1). Il existe ainsi de très nombreuses possibilités de choix de schémas aux différences finies pour les dérivées partielles par rapport à x :

Tableau IV.1. Tableau des coefficients de pondération des schémas aux différences finies

$\alpha_3 = 0$		Schéma explicite, ne dépendant que du pas de temps n
$\alpha_3 = 0.5$		Schéma implicite centré dans le temps, dépendant des pas de temps n et $n+1$
$\alpha_3 = 1$		Schéma implicite, ne dépendant que du pas de temps $n+1$
$\alpha_1 = 1$	$\alpha_2 = 1$	Schéma progressif
$\alpha_1 = 0.5$	$\alpha_2 = 0.5$	Schéma centré
$\alpha_1 = 0$	$\alpha_2 = 1$	Schéma régressif
$\alpha_1 = 1$	$\alpha_2 = 0$	Schéma mixte décentré

D'autre part, la dérivée partielle de U par rapport au temps t est calculée selon le même principe, avec une pondération possible selon que les valeurs de f sont calculées au pas d'espace $i\Delta x$ ou $(i + 1)\Delta x$:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\alpha_4(U_i^{n+1} - U_i^n) + (1 - \alpha_4)(U_{i+1}^{n+1} - U_{i-1}^n)}{\Delta t} \tag{IV.11}$$

Une fois les discrétisations choisies, on substitue leurs expressions dans le système d'équations à résoudre. L'équation différentielle initiale est ainsi remplacée par un système de N équations contenant N inconnues, à résoudre pour chaque pas de temps.

Dans le cas des schémas explicites, les dérivées partielles par rapport à x sont calculées au pas de temps n et seules les dérivées partielles par rapport à t contiennent des termes calculés au pas de temps $(n + 1)$. On peut ainsi calculer explicitement les valeurs U_i^{n+1} à partir des valeurs U_i^n .

Dans le cas des schémas implicites, on ne peut calculer les valeurs de U au pas de temps $(n + 1)$ qu'en résolvant le système formé des N équations linéaires algébriques du schéma.

La méthode des différences finies est plus efficace dans le domaine car :

- Elle a une grande simplicité d'écriture par rapport à la méthode des éléments finis (complexité de mise en œuvre).
- Un faible coût de calcul (grand coût en temps de calcul et mémoire pour les éléments finis).
- Résultats de convergence satisfaisante par rapport à la méthode des volumes finis (peu de résultats de convergence).

Un problème aux équations différentielles nécessite de :

- Réduire le domaine de résolution de l'équation différentielle à un domaine borné ;
- Définir une grille (maillage) finie des points de ce domaine ;
- Approcher les dérivées qui figurent dans l'équation à l'aide d'un développement de Taylor autour des points de la grille. Pour les points situés aux bords du domaine de calcul, on écrit les conditions aux limites de manière exacte ou éventuellement approchée.

IV.1.1 Discrétisation du domaine

Dans le cas de la résolution des équations de BSV, on commence par quadriller le plan (x, t) afin d'obtenir des mailles de taille $(\Delta x, \Delta t)$ où Δx est le pas d'espace et Δt le pas de temps (figure VI.1). Les méthodes aux différences finies sont toutes basées sur les développements de Taylor des fonctions continues et dérivables. Lorsque les pas de temps et d'espace sont petits, les développements limités sont proches des valeurs exactes. La figure ci-dessous montre une grille de computation typique, la position du nœud est dénotée par l'indice i et le temps par l'indice n .

$$U_i^n = U(i\Delta x, n\Delta t)$$

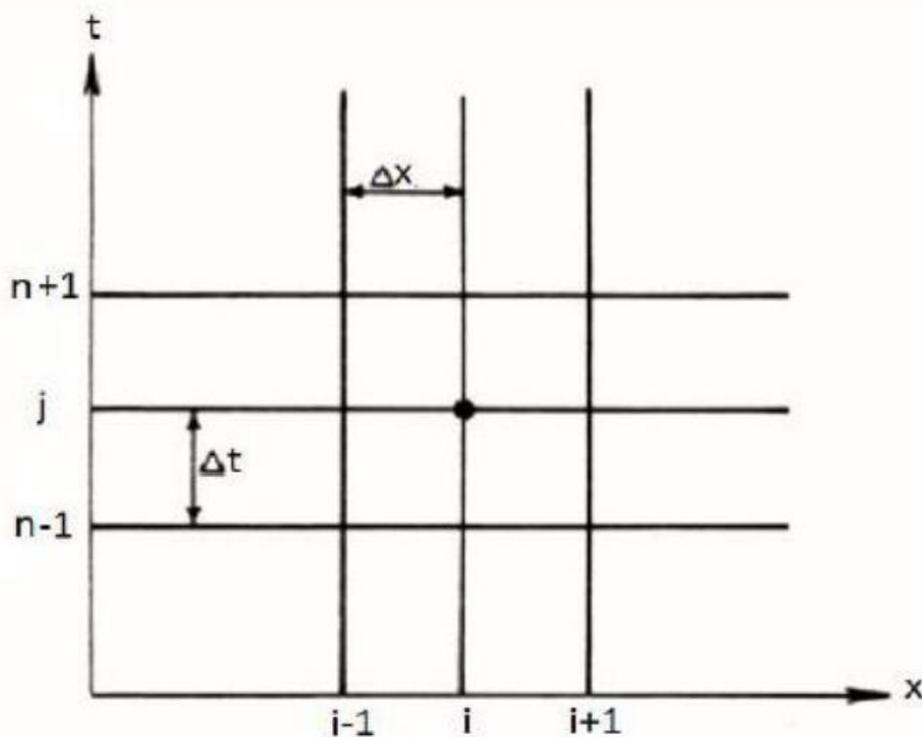


Figure IV.1 : le maillage aux différences finies.

IV.1 .2 Approximation des dérivées

On utilise le développement en série de Taylor pour l'approximation des dérivées par différences finis $U(\mathbf{x}, t)$.

➤ La dérivée partielle par rapport à l'espace est exprimé par :

$$U_{i+1} = U_i + \Delta x \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + O_3(\Delta x^2) \quad (\text{IV.12})$$

$$U_{i-1} = U_i - \Delta x \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - O_3(\Delta x^2) \quad (\text{IV.13})$$

$O_3(\Delta x^2)$: Erreur d'approximation ;

Tel que :

$$O_3 = \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} \quad (\text{IV.14})$$

▪ D'après (III.1) on aura :

Dérivée avancée :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{U_{i+1} - U_i}{\Delta x} + O_2(\Delta x^2) \quad (\text{IV.15})$$

Avec :

$$O_2(\Delta x^2) = \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (\text{IV.16})$$

D'après l'équation III.2 on aura :

Dérivée retardée :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{U_i - U_{i-1}}{\Delta x} + O_2(\Delta x^2) \quad (\text{IV.17})$$

D'après l'équation III.15 et l'équation III.17 on a :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2\Delta x} + O_2(\Delta x^2) \quad (\text{IV.18})$$

➤ La dérivée partielle par rapport au temps est exprimé par :

Dérivée temporelle avancée :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{U_i^{j+1} - U_i^j}{\Delta t} \quad (\text{IV.19})$$

Dérivée temporelle retardée :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{U_i^j - U_i^{j-1}}{\Delta t} \quad (\text{IV.20})$$

IV.2 Analyse de l'approximation

▪ Erreur de troncature

L'erreur de troncature vient du fait qu'on a tronqué le développement en série de Taylor de la fonction U .

L'erreur de troncature par pas est la différence entre la valeur calculée et la valeur exacte, en supposant qu'au pas précédent la valeur calculée et la valeur exacte étaient identiques.

▪ La consistance d'un schéma aux différences finies

Nous n'aurons de chance d'obtenir la convergence du schéma que si nous approchons correctement le problème continu, c'est-à-dire si nous remplaçons les dérivées partielles par des différences finies effectivement. La « qualité » de cette consistance s'appelle la précision du schéma.

▪ La stabilité

Un schéma numérique est stable, si les erreurs de n'importe quelle origine n'augmentent pas à chaque pas de temps de calcul. L'instabilité numérique peut avoir une cause d'origine physique ; c'est le cas lorsque le phénomène n'est pas correctement modélisé.

▪ La Convergence

Un schéma est dit convergent lorsque la solution de l'équation aux différences se rapproche de la vraie solution de l'équation aux dérivées partielles ayant les mêmes conditions initiales et aux limites lorsque la dimension des mailles de discrétisation diminue. Généralement, un schéma consistant est stable et également convergent.

Soit $v(x, t)$ la valeur approchée déterminée par différence finies de $V(x, t)$ et soit $W(x, t)$ tel que :

$$w_i^j = V_i^j - v_i^j \quad (\text{IV.21})$$

V_i^j : La solution réelle (exacte).

v_i^j : La solution numérique.

w_i^j : L'erreur globale de calcul.

On dit que le schéma converge si $w_i^j \rightarrow 0$ lorsque $(\Delta x, \Delta t) \rightarrow 0$

IV.3 Les schémas explicites et implicites

Selon la façon de discrétisation de l'équation aux dérivées partielles, il existe deux cas pour la méthode des différences finies :

IV.3.1. Schéma explicite

Le schéma est dit alors explicite. Si les caractéristiques de l'écoulement à un temps donné sont exprimées en fonction des caractéristiques de celui-ci supposées connues à l'instant précédent, de ce fait, ce qui se passe au temps $t + \Delta t$ ne dépend que du passé au temps t (Figure (IV.2)). L'inconvénient principal des schémas explicites, se situe dans la restriction du pas de Courant-Friedrich-Lewy (CFL), qui assure la stabilité de ces schémas.

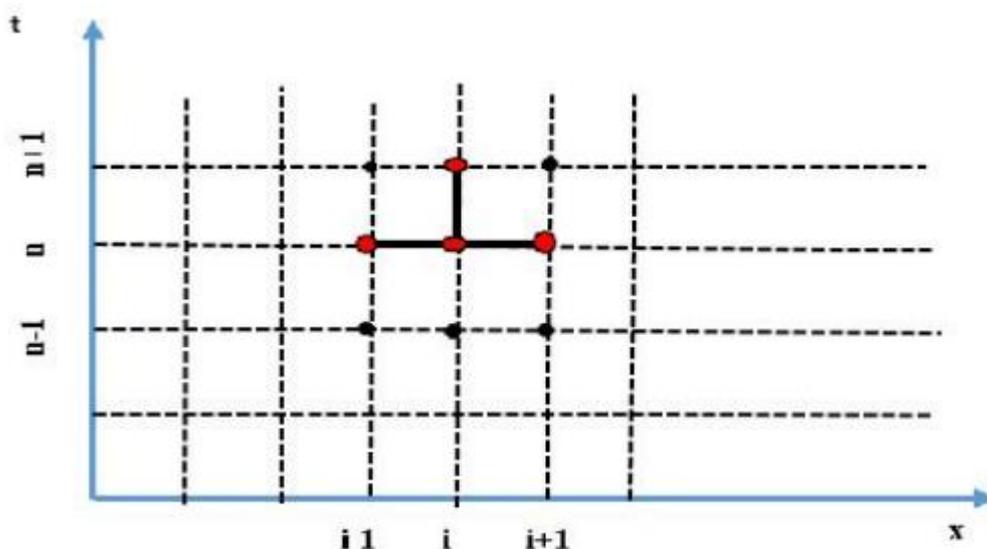


Figure IV.2 : schéma explicite

IV.3.2. Schéma implicite

Le schéma est dit implicite. Si les caractéristiques de l'écoulement à un temps donné $t + \Delta t$ sont approchées en fonction de la solution précédente trouvée au temps t , et des valeurs recherchées au temps même du calcul $t + \Delta t$, la liaison est implicite, et le schéma est dit par conséquent implicite (Figure IV.3). La stabilité de ces schémas n'est pas conditionnée par la condition CFL, mais par la nature de la solution (ABDALLAH, 2005).

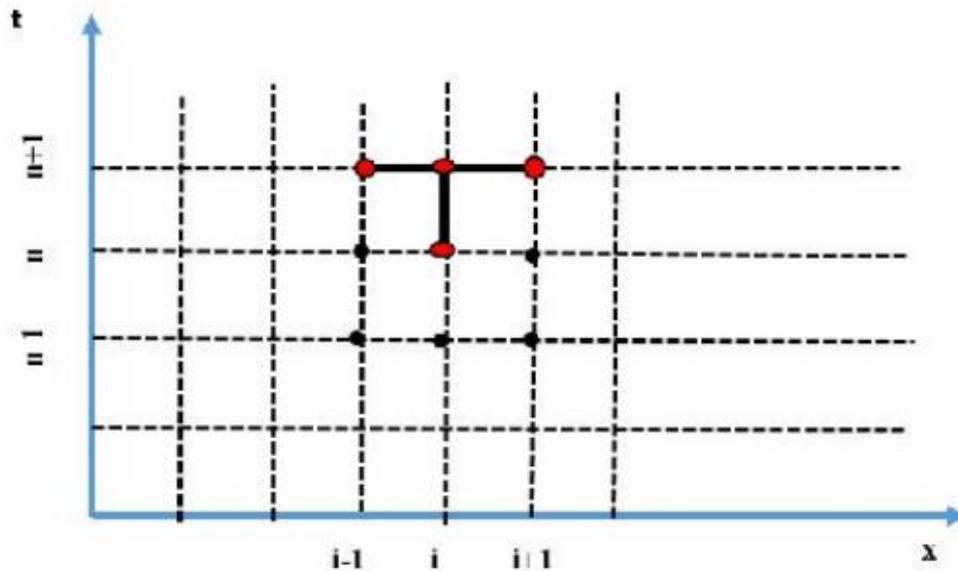


Figure IV.3 : schéma implicite

IV.3.3 Comparaison des schémas implicites et explicites

Une comparaison entre les deux schémas nécessite au préalable une étude des différents schémas. Selon la comparaison faite par certains chercheurs, on retient les avantages et les inconvénients suivants (MAHDAOUI, 2014) :

- La méthode explicite exige une condition de stabilité sur le pas de temps tandis que la méthode implicite ne nécessite aucune.
- La méthode explicite est adaptée lorsque la géométrie est régulière, par contre la méthode implicite est mieux adaptée pour la section irrégulière.
- La souplesse de programmation offerte par la méthode explicite est beaucoup meilleure que celle offerte par la méthode implicite, surtout lorsque le temps de programmation.
- Etant donné que le pas de temps dépend de chaque itération, les valeurs de cette dernière paraissent souvent très petites de sorte que les précisions sur les calculs sont meilleures.
- L'économie de calcul est beaucoup plus importante pour un schéma implicite car il n'y a aucune restriction sur le pas de temps.
- La méthode explicite est très conseillée dans le cas de problème de discontinuité.

IV.4 Condition de stabilité

La condition de stabilité, (Courant – Friedrichs - Lewy) ou condition de courant du nom des auteurs (Richard-Courant, Kurt-Friedrichs et Hans-Lewy) est un condition pour résoudre des équations différentielles (équations de Saint-Venant) et vérifier leur convergence.

Elle est utilisée en général, pour vérifier que le schéma utilisé pour le calcul est stable et qu'il converge vers la solution recherchée, c'est-à-dire vers la solution du système.

Pour la stabilité du schéma cité ci-dessus, il faut que le nombre de courant (Cn), soit inférieur ou égal à 1.

$$Cn = \frac{\Delta t}{\Delta x} \max(|u| + c) \quad (IV.22)$$

$$\Delta t = Cn \frac{\Delta x}{\max(|u|+c)} \quad (IV.23)$$

Avec :

Cn : nombre de courant.

IV.5 Viscosité artificielle

Une analyse par **Warming** et **Hayet** montre que des modifications doivent être utilisées sur les équations par ajout d'un terme supplémentaire qui n'existait pas au paravent dans les équations aux dérivées partielles (TRAORE, 2001).

Ce terme signifie en fait une erreur de troncature qui se produit dans le développement **Taylor**. Ces erreurs peuvent sérieusement affecter les résultats, conduisant à une instabilité diffusible ou dispersive du schéma.

En plus de ces erreurs, l'application du schéma explicite près des discontinuités peut également produire des oscillations souvent très importantes.

Par ailleurs, certaines conditions imposées pour des besoins de programmation, notamment aux limites amont et aval conduisent à d'éventuelles oscillations de résultats.

L'utilisation de la viscosité artificielle a l'avantage de lisser les solutions dans les régions où il y a des fluctuations et de laisser intact les régions relativement lisses. Le principe consiste à ajouter un terme supplémentaire.

$$\Gamma_i = \frac{\Delta x}{\Delta t} \frac{|h_{i+1} - 2h_i + h_{i-1}|}{|h_{i+1}| + 2|h_i| + |h_{i-1}|} \quad (IV.24)$$

$$\Gamma_{i+1/2} = K \max(\Gamma_{i+1}, \Gamma_i) \quad (IV.25)$$

avec :

K : coefficient de dissipation utilisé pour régulariser les oscillations.

Il s'agit alors de modifier les variables par l'introduction d'un nouveau paramètre.

$$\Phi_i = \Gamma_{i+\frac{1}{2}}(U_{i+1} - U_i) - \Gamma_{i-\frac{1}{2}}(U_i - U_{i-1}) \quad (IV.26)$$

Les nouvelles valeurs de U seront enfin :

$$U_i = U_i - \Phi_i \tag{IV.27}$$

Lorsque les variables ne sont pas définies en un point, un problème se pose. Deux cas peuvent se présenter :

- **1^{ère} cas** : le point (i - 1) se trouve à l'amont du champ d'écoulement (figure IV.4), Γ_i devient :

$$\Gamma_i = \frac{|h_{i+1} - h_i|}{|h_{i+1}| + |h_i|} \tag{IV.28}$$

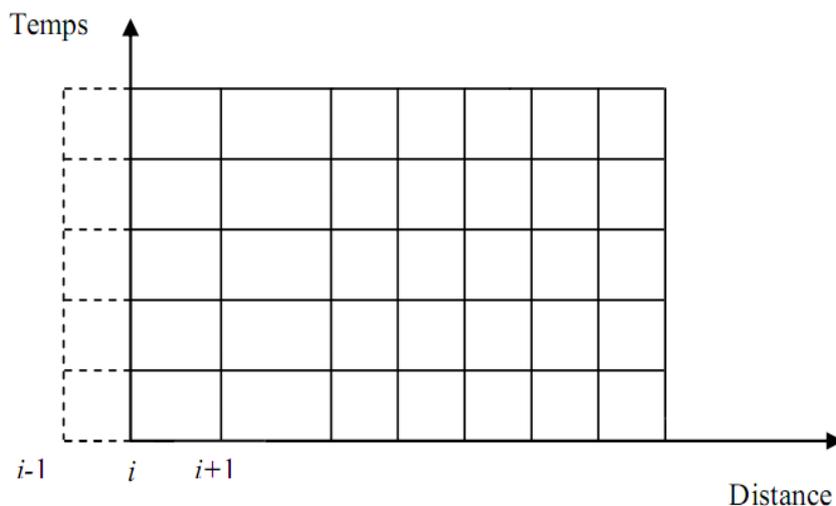


Figure IV.4 : le domaine n'est pas défini en amont

- **2^{ème} cas** : le point (i + 1) se trouve à l'aval du champ d'écoulement (figure IV.5), Γ_i devient :

$$\Gamma_i = \frac{|h_i - h_{i-1}|}{|h_i| + |h_{i-1}|} \tag{IV.29}$$



Figure IV.5 : le domaine n'est pas défini en aval

Dans cette étude nous utilisons la viscosité artificielle Lax-Friedrichs (RAHMANI, 2014) .

$$U_i^n = \alpha U_i^n + (1 - \alpha) \frac{U_{i+1}^n + U_{i-1}^n}{2} \quad (IV.30)$$

Deux viscosités artificielles sont utilisées dans cette étude.

$$U_i^n = \frac{(1+\alpha)}{2} U_i^n + (1 - \alpha) \frac{U_{i+1}^n + U_{i-1}^n}{2} \quad (IV.31)$$

Et

$$U_i^n = \frac{(1-\alpha)}{2} U_i^n + (1 + \alpha) \frac{U_{i+1}^n + U_{i-1}^n}{2} \quad (IV.32)$$

Avec : $0 < \alpha < 1$ un coefficient (constant) qui contrôle la stabilité de l'algorithme appelé coefficient de pondération.

IV.6 Résolution du système par un schéma explicite (schéma de Lax-Friedrichs)

Dans ce schéma, les dérivées partielles des équations étudiées sont estimées comme suit :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{h_{i+1}^n - h_{i-1}^n}{2\Delta x} \\ \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{h_i^{n+1} - h_i^n}{\Delta t} \\ \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{U_{i+1}^n - U_{i-1}^n}{2\Delta x} \\ \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} \end{cases} \quad (IV.33)$$

Tel que :

$$\begin{cases} h_i^n = \frac{1}{2} (h_{i-1}^n + h_{i+1}^n) \\ U_i^n = \frac{1}{2} (U_{i-1}^n + U_{i+1}^n) \end{cases} \quad (IV.34)$$

En remplaçant les dérivées partielles des équations du mouvement dans (III.22) on obtient :

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} + \frac{F_{i+1}^n - F_{i-1}^n}{2\Delta x} - S_i = 0 \quad (IV.35)$$

Par simplification on aura :

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (F_{i+1}^n - F_{i-1}^n) + \Delta t S_i \quad (IV.36)$$

On ajoute la viscosité artificielle :

$$U_i^n = \alpha U_i^n + (1 - \alpha) \frac{U_{i+1}^n + U_{i-1}^n}{2} \quad (IV.37)$$

L'équation devient :

$$U_i^{n+1} = \alpha U_i^n + (1 - \alpha) \frac{U_{i+1}^n + U_{i-1}^n}{2} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (F_{i+1}^n - F_{i-1}^n) + \Delta t S_i \quad (IV.38)$$

Et l'équation sans frottement s'écrit :

$$U_i^{n+1} = \alpha U_i^n + (1 - \alpha) \frac{U_{i+1}^n + U_{i-1}^n}{2} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (F_{i+1}^n - F_{i-1}^n) \quad (IV.39)$$

IV.7 Résolution du système par un schéma implicite (schéma de Lax-Friedrichs)

On a :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = S \quad \text{ou bien :} \quad \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} - S = 0 \quad (IV.40)$$

Avec :

$$U = \begin{pmatrix} h; h \\ hu; q \end{pmatrix}; F(U) = \begin{pmatrix} hu; q \\ hu^2 + 0.5gh^2 \end{pmatrix}; S(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ gh(S_0 - S_f) \end{pmatrix}$$

Ou : $hu=q$

L'écriture des termes F(U) et S(U) en fonction de q :

$$F(U) = \begin{pmatrix} q \\ \frac{q^2}{h} + 0.5gh^2 \end{pmatrix}; S(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ ghS_0 - gn^2 \frac{q^2}{h^{\frac{7}{3}}} \end{pmatrix} \text{ avec } : S_f = \frac{n^2 u^2}{R_h^{\frac{4}{3}}} \quad (IV.41)$$

Le schéma implicite s'écrit :

$$U_i^{n+1} = U_i^n + \Delta t \frac{\partial U_i^n}{\partial t} + O\Delta t^2 \quad \text{ou bien :} \quad \Delta U_i^{n+1} = \Delta t \frac{\partial U_i^n}{\partial t} \quad (IV.42)$$

$$\text{Avec : } \Delta U_i^{n+1} = U_i^{n+1} - U_i^n \quad (IV.43)$$

L'écriture implicite de l'équation :

$$\Delta U_i^{n+1} = -\Delta t \left(\frac{\partial f_i^{n+1}}{\partial x} - S_i^{n+1} \right) \quad (IV.44)$$

Linéarisation des termes F et S de l'équation avec le développement de Taylor donne :

$$f_i^{n+1} = f_i^n + \Delta t \frac{\partial f_i^n}{\partial t} + O\Delta t^2 = f_i^n + \frac{\partial f_i^n}{\partial t} \frac{\partial U_i^n}{\partial U_i^n} \Delta t \quad (IV.45)$$

On pose :

$$A^n = \frac{\partial f_i^n}{\partial U_i^n}$$

D'où :

$$f_i^{n+1} = f^n + A^n \Delta U_i^{n+1} \tag{IV.46}$$

Similairement pour le terme source S :

$$S_i^{n+1} = S^n + B^n \Delta U_i^{n+1} \tag{IV.47}$$

Avec : $A^n = \frac{\partial f_i^n}{\partial U_i^n}$ et $B^n = \frac{\partial S_i^n}{\partial U_i^n}$ sont des matrices Jacobienne.

La détermination des deux matrices A et B :

Tant que : $U \begin{pmatrix} h \\ q \end{pmatrix}$ alors :

$$A = \begin{bmatrix} \frac{df_1}{dh} & \frac{df_1}{dq} \\ \frac{df_2}{dh} & \frac{df_2}{dq} \end{bmatrix} \text{ après la derivation on aura : } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -U^2 + gh & 2U \end{bmatrix} \tag{IV.48}$$

Et :

$$B = \begin{bmatrix} \frac{dS_1}{dh} & \frac{dS_1}{dq} \\ \frac{dS_2}{dh} & \frac{dS_2}{dq} \end{bmatrix} \text{ avec : } S(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ gh(S_0 - S_f) \end{pmatrix} \tag{IV.49}$$

$$\text{et : } S_0 = 0 \quad ; \quad S_f = \frac{n^2 u^2}{R_h^{(4/3)}} \quad \text{ou : } R_h = \frac{S}{p} = \frac{h*b}{b+2h} \quad / \quad h \ll b \quad ; \quad b+2h \cong b \tag{IV.50}$$

$$\text{Donc : } R_h = h$$

Après la dérivation la matrice B s'écrit comme suit :

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{7gn^2n^2}{3h^{(4/3)}} & \frac{-gn^2u}{h^{(4/3)}} \end{bmatrix} \quad \text{ou : } B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{7}{3}gS_f & \frac{-2}{u}gS_f \end{bmatrix} \tag{IV.51}$$

La dérivée spatiale du flux F suivant la direction x est :

$$\frac{\partial f_i^{n+1}}{\partial x} = \frac{\partial f_i^n}{\partial x} + \frac{\partial \Delta U_i^{n+1}}{\partial x} \quad (\text{IV.52})$$

$$\Delta U_i^{n+1} = -\frac{\Delta t}{2x}(f_{i+1}^n - f_{i-1}^n) - \frac{\Delta t}{2x}(A_{i+1}^n - A_{i-1}^n)\Delta U_i^{n+1} + \frac{\Delta t}{2}(S_{i+1}^n + S_{i-1}^n) + \frac{\Delta t}{2}(B_{i+1}^n + B_{i-1}^n)\Delta U_i^{n+1} \quad (\text{IV.53})$$

$$\Delta U_i^{n+1} + \frac{\Delta t}{2x}(A_{i+1}^n - A_{i-1}^n)\Delta U_i^{n+1} - \frac{\Delta t}{2}(B_{i+1}^n + B_{i-1}^n)\Delta U_i^{n+1} = -\frac{\Delta t}{2x}(f_{i+1}^n - f_{i-1}^n) + \frac{\Delta t}{2}(S_{i+1}^n + S_{i-1}^n) \quad (\text{IV.54})$$

$$\left(I + \frac{\Delta t}{2x}(A_{i+1}^n - A_{i-1}^n) - \frac{\Delta t}{2}(B_{i+1}^n + B_{i-1}^n)\right)\Delta U_i^{n+1} = -\frac{\Delta t}{2x}(f_{i+1}^n - f_{i-1}^n) + \frac{\Delta t}{2}(S_{i+1}^n + S_{i-1}^n) \quad (\text{IV.55})$$

Avec I une matrice identité.

$$\Delta U_i^{n+1} + \frac{\Delta t}{2x}(A_{i+1}^n - A_{i-1}^n)\Delta U_i^{n+1} = -\frac{\Delta t}{2x}(f_{i+1}^n - f_{i-1}^n) + S_i^n \quad (\text{IV.56})$$

$$\left(I + \frac{\Delta t}{2x}(A_{i+1}^n - A_{i-1}^n)\right) = -\frac{\Delta t}{2x}(f_{i+1}^n - f_{i-1}^n) + S_i^n \quad (\text{IV.57})$$

Avec I une matrice identité.

Résolution de ce système :

Première étape :

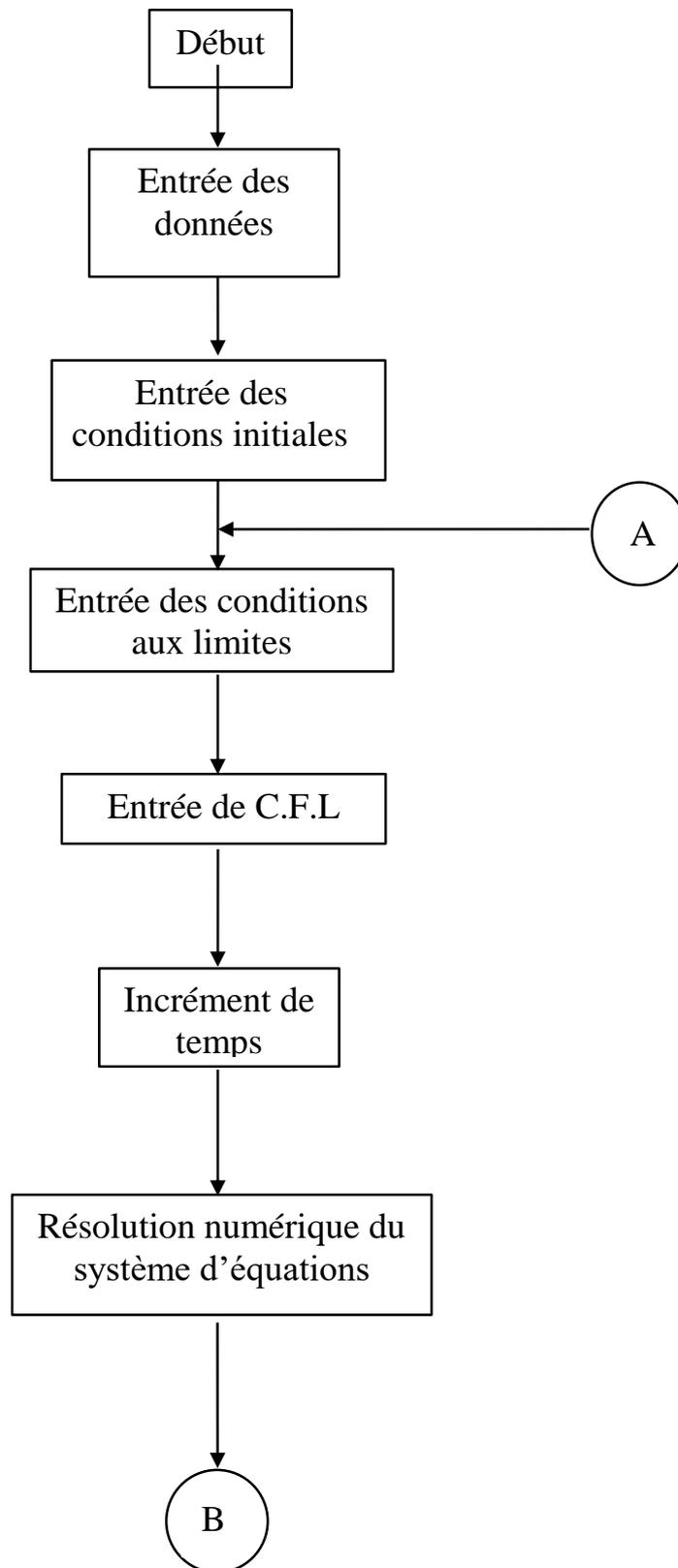
$$\left(I + \frac{\Delta t}{2x}(A_{i+1}^n - A_{i-1}^n) - \frac{\Delta t}{2}(B_{i+1}^n + B_{i-1}^n)\right)\Delta U_i^{n+1} = -\frac{\Delta t}{2x}(f_{i+1}^n - f_{i-1}^n) + \frac{\Delta t}{2}(S_{i+1}^n + S_{i-1}^n) \quad (\text{IV.58})$$

Deuxième étape :

$$U_i^{n+1} = U_i^n + \Delta U_i^{n+1}$$

$$U_i^{n+1} = \alpha U_i^n + (1 - \alpha)\frac{U_{i+1}^n + U_{i-1}^n}{2} + \Delta U_i^{n+1} \quad (\text{IV.59})$$

IV.7 Organigramme de calcul



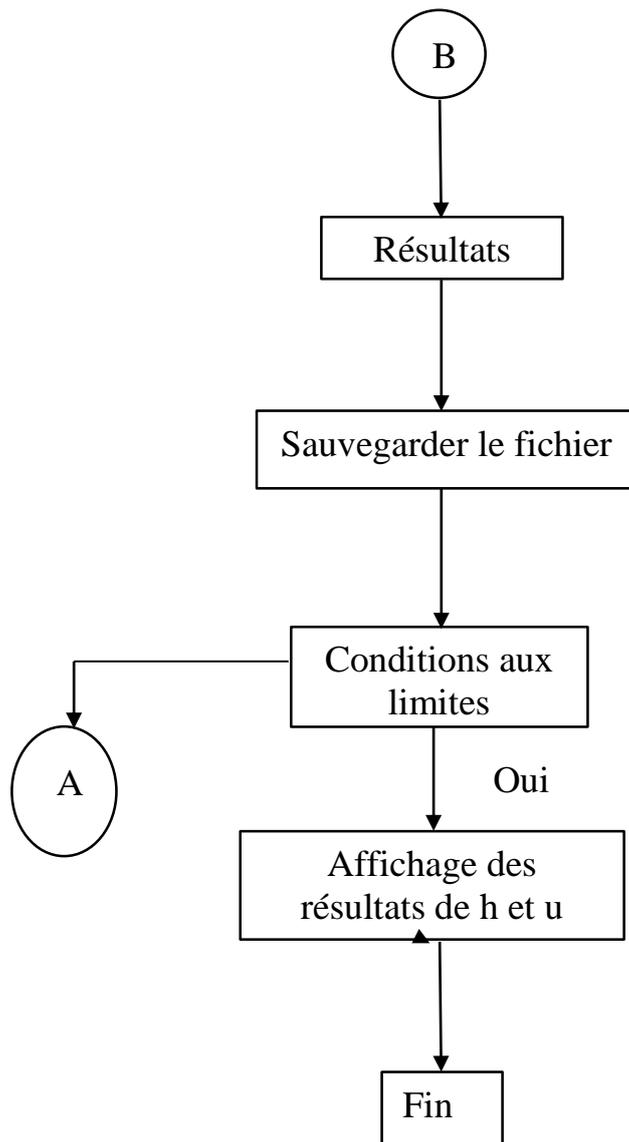


Figure IV.6 : Organigramme de calcul

Conclusion

Dans ce chapitre on a présenté les schémas explicite et implicite aux différences finies pour la résolution des équations de Barré Saint-Venant en tenant compte des conditions initiales et aux limites. Nous avons ensuite développé ces schémas pour résoudre le problème de propagation de l'onde de rupture de barrage.

*CHAPITRE V : APPLICATIONS
NUMERIQUES*

Chapitre V : Applications numériques

Introduction

L'essor des outils informatique a conduit à la mise au point de divers logiciels. Grâce à la performance de ces logiciels, il est possible de résoudre tous les problèmes qui demeuraient non résolus. Nous avons opté pour le MATLAB afin de résoudre les équations de Saint-Venant.

Dans ce chapitre nous avons utilisé la méthode des différences finies pour simuler le phénomène de l'onde de rupture de barrage. Les simulations numériques seront comparées avec les résultats analytiques et expérimentaux afin de tester la validité du modèle mathématique qui gouverne les écoulements non permanents à surface libre. Après la validation du modèle, il sera ensuite question d'étudier l'effet de quelques paramètres sur l'écoulement, notamment, l'influence du nombre de Courant (CFL) et de pas Δx .

V.1 La présentation du logiciel MATLAB

MATLAB (abréviation de "Matrix Laboratory") est un langage de programmation multi-paradigme propriétaire et un environnement de calcul numérique développé par MathWorks. MATLAB permet la manipulation de matrices, le traçage de fonctions et de données, la mise en œuvre d'algorithmes, la création d'interfaces utilisateur et l'interaction avec des programmes écrits dans d'autres langages.

MATLAB a été inventé par le mathématicien et programmeur informatique Cleve Moler. L'idée de MATLAB était basée sur sa thèse de doctorat dans les années 1960. Moller est devenu professeur de mathématiques à l'Université du Nouveau-Mexique et a commencé à développer MATLAB comme passe-temps pour ses étudiants. En 1967, il a développé la programmation d'algèbre linéaire initiale pour MATLAB avec son directeur de thèse unique, George Forsyth. Suivi du code Fortran pour les équations linéaires en 1971.

À l'origine (avant la version 1.0), MATLAB "n'était pas un langage de programmation ; c'était une simple calculatrice matricielle interactive. Pas de programmes, de boîtes à outils, de graphiques.

La première version de MATLAB a été réalisée à la fin des années 1970. Le logiciel a été divulgué pour la première fois au public en février 1979 à la Naval Graduat School de Californie. Les versions antérieures de MATLAB étaient de simples calculatrices matricielles avec 71 fonctions prédéfinies. À l'époque, MATLAB était librement distribué aux universités. Moller

laisserait des copies aux universités qu'il a visitées et le logiciel a développé une suite forte dans les départements de mathématiques sur les campus universitaires (ADRIAN, 2004).

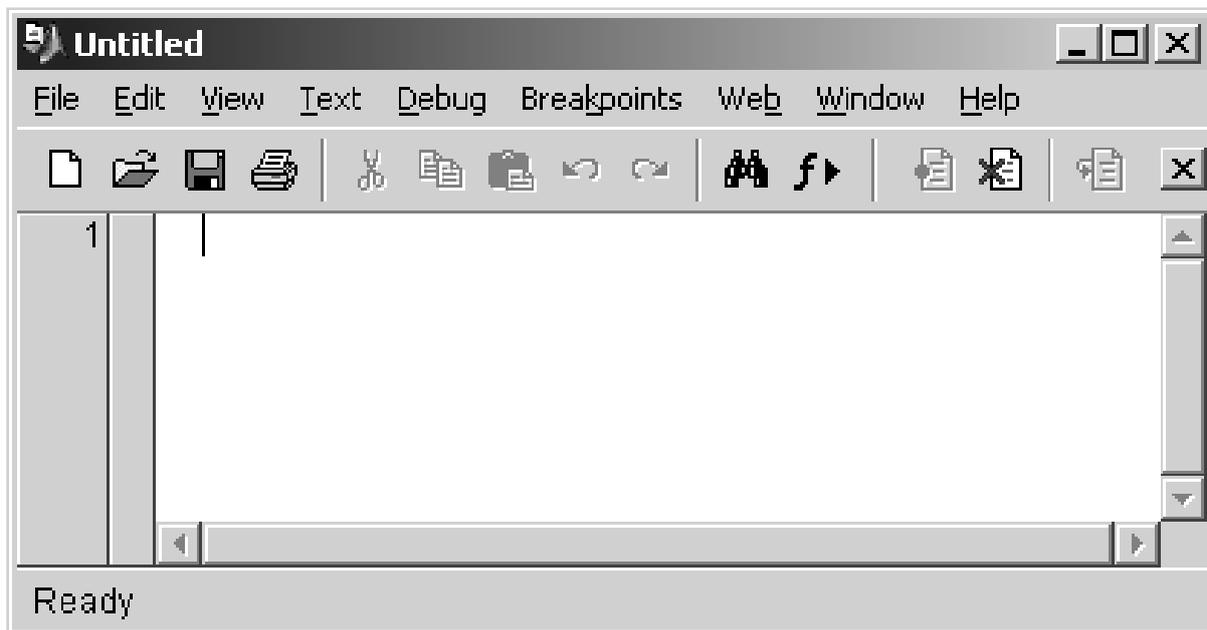


Figure V.1 : "Edit Windows", où l'utilisateur peut modifier ou créer des programmes Matlab ("M-files")

V.2 Etude de l'onde de rupture de barrage dans un canal horizontal

V.2.1 Solution analytique pour le cas sec en aval

Considérons une rupture instantanée de barrage, dans un canal rectangulaire, horizontale S_0 et initialement sec, avec un réservoir amont semi-infini et un fluide parfait S_f la solution analytique a été dérivée par RITTER (1892) qui a montré que le front de l'onde se propage avec une célérité $U=2+\sqrt{g * D}$ ou D est la profondeur initiale de réservoir entre le front de l'onde ($x=x_s$) et la position la plus amont de l'onde négative ($x=x_2$), le profile instantané de la surface libre suit une loi parabolique :

La solution de Ritter s'écrit (DELESTRE, 2010) :

$$(h(t,x), u(t,x)) = \begin{cases} (H_0, 0) & \text{Si } x \leq x_A(t) \\ \left(\frac{4}{9g} (c_g - (x/2t)^2), \frac{2}{3} \left(\frac{x}{t} + c_g \right) \right) & \text{Si } x_A(t) \leq x \leq x_B(t) \\ (0,0) & \text{Si } x_B(t) < x \end{cases} \quad (V.1)$$

Tel que : $x_A(t) = -c_g t$ (V.2)

$x_B(t) = 2c_g t$ (V.3)

Et $c_g = \sqrt{gH_0}$ (V.4)

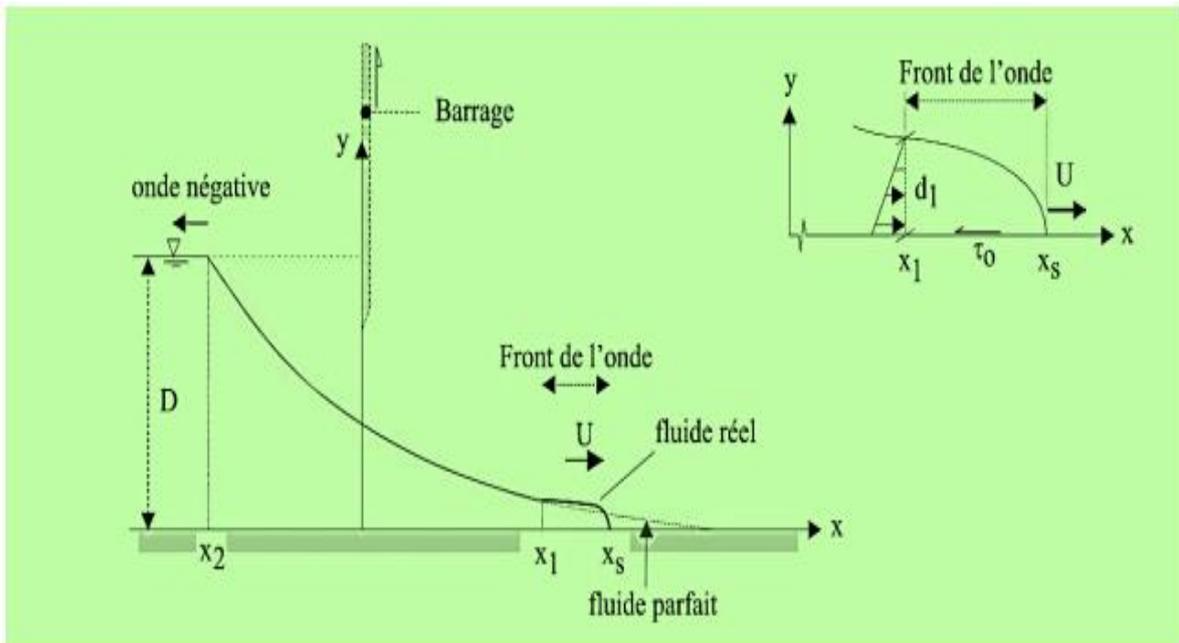


Figure V. 2 : Présentation de la rupture de barrage d'un coursier sec et horizontal.

V.3 Etude comparative de la solution numérique avec la solution analytique des deux schémas implicite et explicite dans le cas sec en aval sans frottement

Pour valider le modèle, nous avons fait une étude comparative entre les résultats du modèle numérique et les résultats analytiques

Les données utilisées pour cette étude sont :

- La longueur $L=10m$;
- La hauteur $h_0 = 0.00005m$ (à l'aval);
- Le pas de discrétisation $dx=10/nx$ ($nx=2000$);
- $Cn = 0.1$;

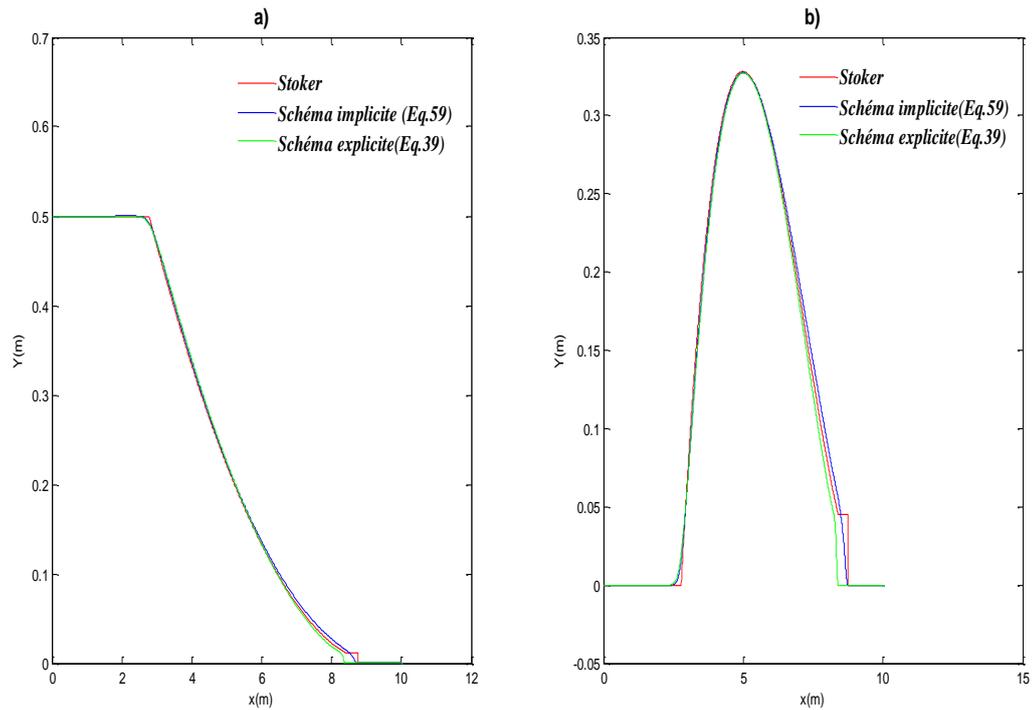


Figure V.3 : Comparaison des résultats numériques et les résultats analytiques dans le cas sec sans frottement à $t=0.01$ s, a) Hauteur d'eau, b) Débit spécifique.

Le calcul d'erreur entre la solution analytique et les résultats simulés se calcule par la formule suivante :

$$S = \sqrt{\frac{\sum_i^n (H_{\text{simulé}}(i) - H_{\text{analytique}}(i))^2}{\sum_i^n (H_{\text{analytique}}(i))^2}} \quad (\text{V.5})$$

Tableau V. 1 : Calcul d'erreur pour le cas sec

	Eq(IV.39)	Eq(IV.59)
Erreur($H_{\text{aval}}/H_{\text{amont}}=0.0001\text{m}$)	0.0127	0.0099

D'après les valeurs calculées de l'erreur (Tableau V.1), on déduit que le schéma de Lax-Friedrichs implicite donne les meilleurs résultats par rapport au schéma explicite.

V.4 Etude comparative entre les deux schémas implicite et explicite pour la simulation de l'onde de rupture de barrage sur un plan horizontal avec frottement

D'après l'étude de Schoklitsch (1917) de l'écoulement de rupture d'un barrage sur un fond sec. Le canal est dimensionné comme suit : 0.096 m de largeur, 0.08m de hauteur et 20 m de longueur. Sachant que le barrage est placé au milieu du canal. La hauteur d'eau en amont de barrage est de 0.074 m et a l'aval du barrage le canal est sec. Le coefficient de rugosité de Manning est de 0.009 s/m^{1/3}. Les autres valeurs utilisées :

- La longueur $L=20$ m ;
- Le pas de discrétisation est L/nx ($nx=1500$) ;
- $Cn=0.6$;
- $\alpha = 0.1$

A $T1=3.75s$:

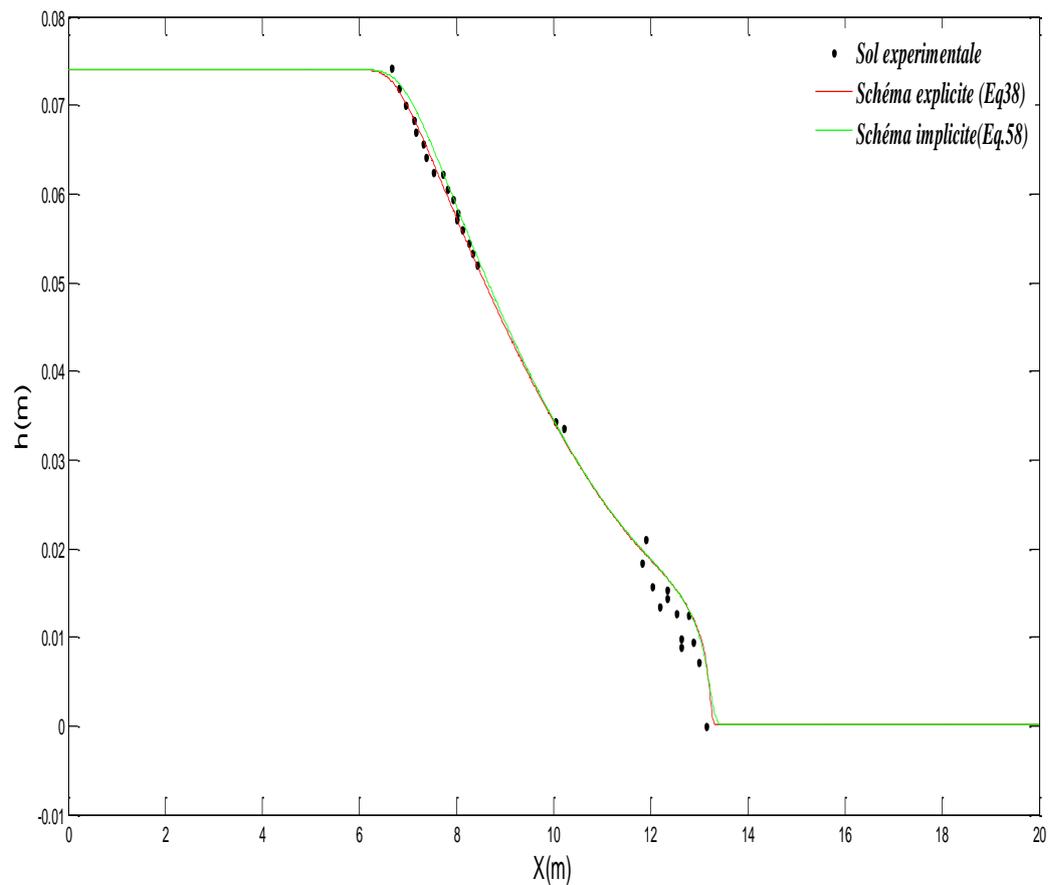


Figure V.4 : Comparaison des résultats numériques et expérimentaux dans le cas sec sur un plan horizontal avec frottement à $T=3.75s$.

- A l'instant $T_2 = 9.4s$:

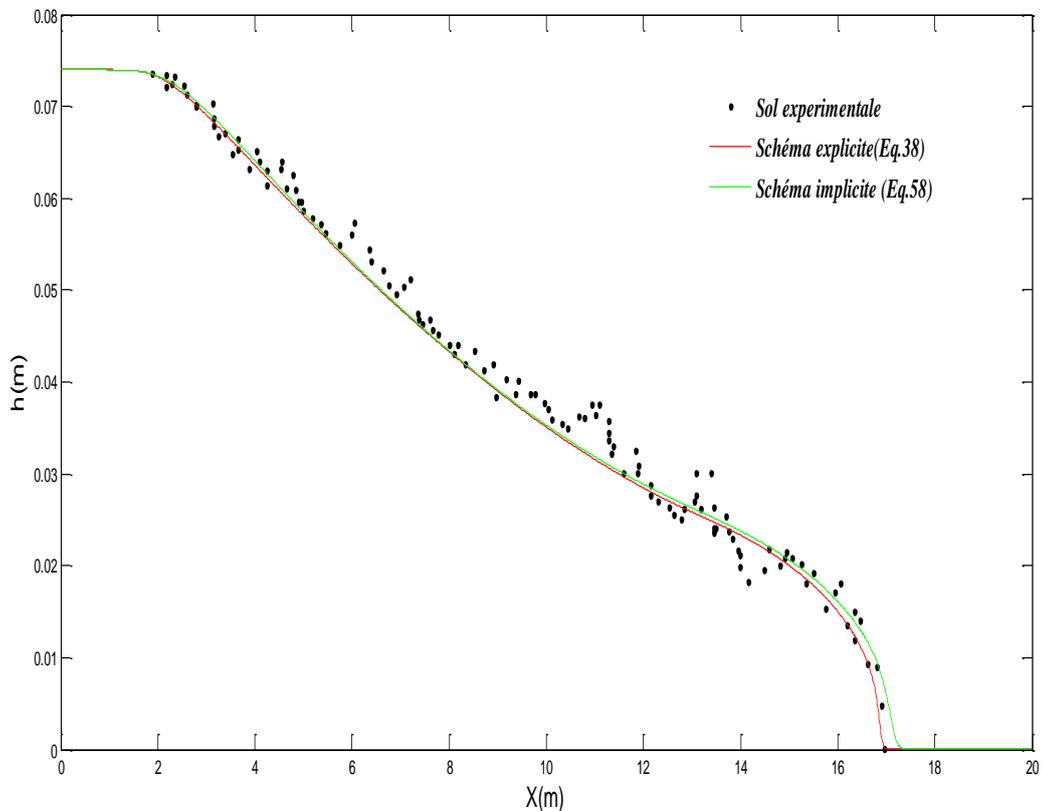


Figure V.5 : Comparaison des résultats numériques et expérimentaux dans le cas sec sur un plan horizontal avec frottement à $T = 9.4s$.

D'après les figures (V.4, V.5), on remarque que les schémas numériques donnent presque les mêmes allures en amont, par contre en aval le schéma implicite est plus proche de la solution analytique à l'instant T_1 et T_2 .

V.5 Influence de quelques paramètres sur l'écoulement dans le cas horizontal

IV.5.1 Influence du nombre de Courant

Cette étape consiste à étudier les effets de quelques paramètres sur la propagation d'onde à savoir le nombre de Courant (CFL), le pas de discrétisation (Δx).

Pour étudier l'influence et l'effet du nombre de courant sur l'écoulement nous avons varié le nombre de courant, les autres paramètres sont constants. Les valeurs utilisées sont :

- La longueur $L=10m$;
 - La hauteur $h_0 = 0.00005m$ (à l'aval);
 - Le pas de x $dx=10/nx$ ($N=1000$) ;
 - Pour le nombre de courant, les valeurs 0.98 ,0.6, 0.3 ont été utilisées.
- Les résultats obtenus sont représentés dans la figure (V.6) :

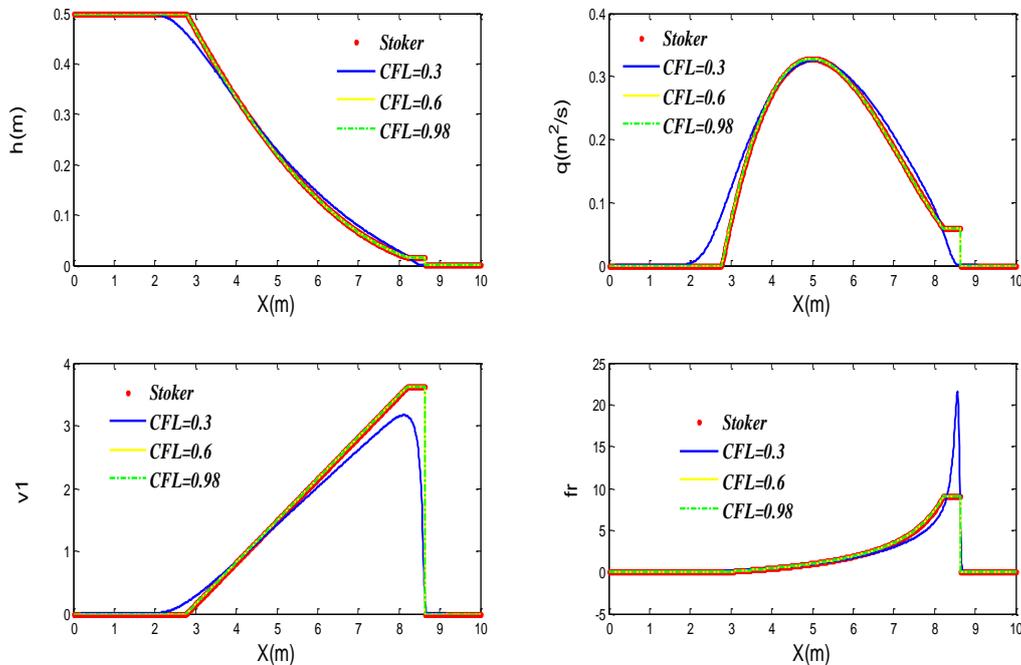


Figure V.6 : Effets de nombre de courant à $t=0.01s$.

D'après la figure (V.6), on remarque que le nombre de Courant (CFL) influe sur les paramètres hydraulique ($h, V1, q, fr$) à l'amont et à l'aval du canal, plus que le CFL est proche de 1 plus que les résultats numériques s'approchent des résultats analytiques.

V.5.2 Influence du pas de discrétisation Δx

Nous choisissons différents maillages ; et nous fixons les autres paramètres physiques comme suit :

- Nombre de courant $Cn=0.6$;
- La hauteur $h_0=0.0001$ (à l'aval);
- La longueur $L=10m$;
- $\alpha =0.1$;
- Pour les valeurs de $dx=10/nx$ ($nx=1000, 500, 250$).

Les résultats sont présentés dans la figure (V.7) suivante :

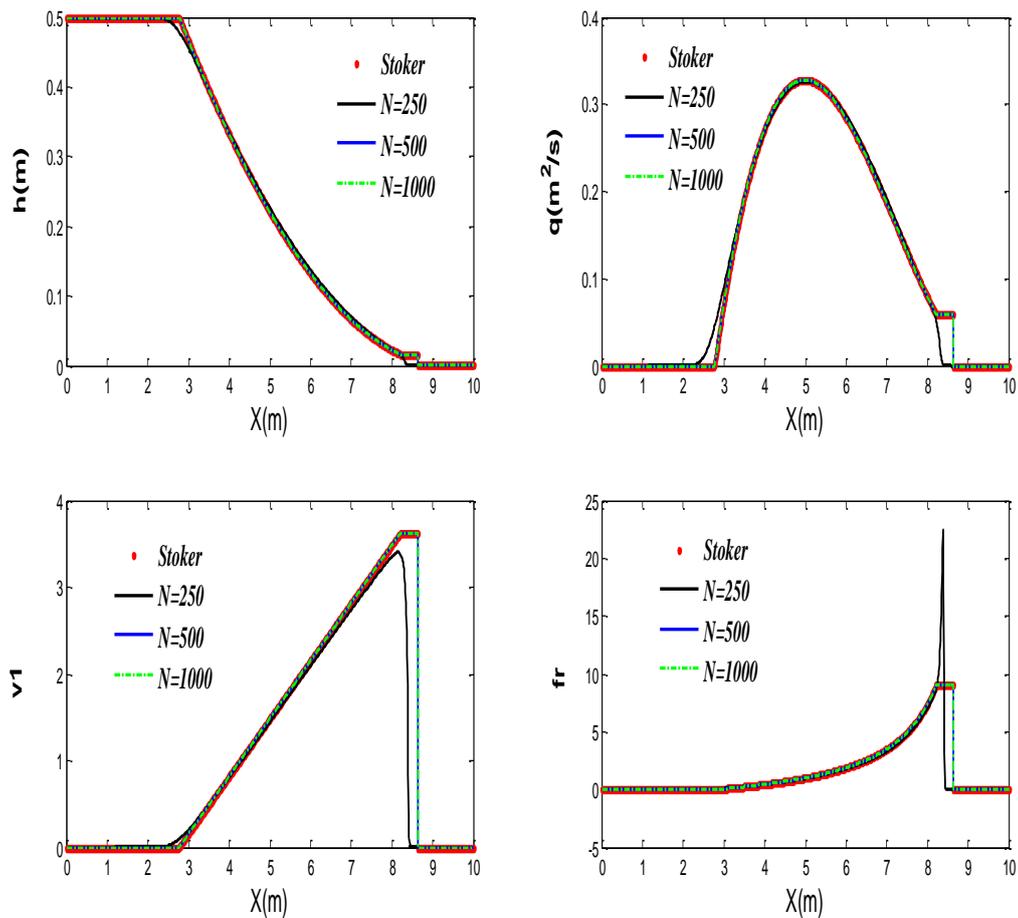


Figure V.7 : Effets du nombre de mailles N (pas de discrétisation spatiale Δx) à $t=0.01s$.

Tableau V. 2 : Calcul d'erreur pour le nombre de maille N

	Pour N =250	Pour N=500	Pour N=1000
ERREUR	0 ,6297	0 ,5212	0,0165

D'après la figure (V.7) et le Tableau V.2 on constate que les courbes sont bien superposées (même calage) lorsque le nombre de maillage N est grand (le pas de discrétisation Δx est petit).

Conclusion

Dans ce chapitre, on a effectué une comparaison entre les résultats expérimentaux et analytiques pour les deux schémas implicite et explicite aux différences finies, et ensuite on a étudié l'influence de quelques paramètres tels que le nombre de Courant (C_n) et le pas de discrétisation (Δx) sur l'allure d'onde de rupture de barrage dans le cas horizontal et sec.

D'après les résultats numériques discutés, on conclure que la bonne simulation est donnée par le schéma implicite.

CONCLUSION GENERALE

Conclusion générale

Les ondes de rupture de barrages sont des écoulements difficiles à étudier, à cause de la discontinuité de la vitesse et la hauteur d'eau à l'extrémité aval de l'écoulement. L'étude présente la résolution des équations de Barré Saint-Venant (1D) par deux schémas de Lax-Friedrichs explicite et implicite aux différences finies pour la simulation de l'allure d'eau dans un écoulement à la surface libre due à la rupture de barrage.

Dans le premier chapitre, on a présenté les généralités sur les barrages, avec leurs classifications, ainsi le phénomène de rupture de barrage et les causes de cette dernière.

Dans le deuxième chapitre, on a étudié les écoulements à surface libre avec les régimes d'écoulement. Une petite présentation des types des canaux, ainsi l'écoulement avec onde.

L'établissement des équations de Barré Saint-Venant unidimensionnelles dans un canal rectangulaire horizontal et sec. Les conditions initiales et les conditions aux limites ont été maintenues constantes tous le long des itérations ce qui fait l'objet de troisième chapitre.

Dans le quatrième chapitre, la discrétisation de système BSV par le schéma numérique de Lax-Friedrichs de type explicite et implicite aux différences finies pour la simulation de l'onde rupture de barrages.

Une étude comparative entre les résultats de simulation, expérimentaux et analytiques des deux schémas implicite et explicite sur un plan horizontal et sec avec et sans frottement. D'après le calcul d'erreur obtenue, on a déduit que le schéma de Lax-Friedrichs implicite donne les meilleurs résultats pour la simulation de l'onde de rupture de barrage sur un plan horizontal.

Les résultats des études de rupture de barrage sont très utiles pour la sécurité de la zone située à l'aval de barrage. Ils doivent par conséquent être exploités de manière optimale pour sécuriser au maximum ces ouvrages contre les causes (crue, séisme, ...) qui peuvent provoquer leurs destructions et un risque pour la sécurité de la population.

BIBLIOGRAPHIE

Bibliographie

ABDALLAH, M., "Sur les méthodes de discrétisation numérique de problèmes hyperboliques non linéaires appliquées aux équations de Barré de Saint-Venant pour la modélisation de l'hydraulique en réseau d'assainissement", hèse de doctorat, Université Louis Pasteur Strasborug, 196 pages , 2005.

ABDELLAOUI, R., "Modèles et méthodes numériques pour la simulation des écoulements turbulents en eau peu profonde", Thèse de doctorat, Université Mohammed Premier Oujda, 128 pages, 2014.

ADRIAN, B. et MOSHE, B., Wikipedia, Pearson Education, 2004.

ANCEY, C., " Hydraulique à surface libre ", Lausanne, 254 pages, 2010.

ARBAOUI, A., "Modélisation numerique des écoulements transitoires dans les conduites en charge", Mémoire de Master en Hydraulique, Ecole Nationale Supérieure d'hydraulique, 61 pages, 2014.

BALIT, M., "Simulation de la rupture d'un barrage à l'aide du modèle VOF", Mémoire de fin d'études, Département Hydraulique, Université de Bejaia, 62 pages, 2013.

BENABID, A., "Contribution à l'étude des écoulements permanents graduellement variées en canal prismatique", Mémoire de Magister, Université de Batna, 126 pages, 2009.

DDRM DE LA HAUTE-VIENNE., "Les risque rupture de barrage en Haute- Vienne", 10 pages, 2010.

DELESTRE, O., " Simulation du ruissellement d'eau de pluie sur des surfaces agricoles ", Thèse de doctorat, Université d'Orléans, 293 pages, 2010.

ELGOUIZI, H., "L'application de la méthode des différences finies au modèle de Barré de Saint-Venant", Mémoire de fin d'études, Université de M'sila, 59 pages, 2012.

GRAF, W. et ALTINAKAR, M., « Hydraulique fluvial", "Ecoulement et phénomènes de transport les canaux à géometrie simple", Traité de Génie Civil de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Laussane, 627 pages, 2000.

GRAF, W. et ALTINAKAR, M., "Hydraulique, une introduction", Lausanne, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 1998.

KATEB, S., "Etude expérimentale de quelques caractéristiques du ressaut hydraulique évoluant dans un canal trapézoïdal", Thèse de doctorat, Université de Biskra, 167 pages, 2014.

KOVACS, Y., "Modèles de simulation d'écoulement transitoire en réseau d'assainissement", thèse de doctorat, Ecole Nationale des ponts et chaussées, 328 pages, 1988.

LEBRETON, A., "Prévision des risques dus aux barrages", Paris, 6 pages, 1997.

MAALEL, K. et HAFSIA, Z., "Polycopié du cours ouvrages hydrauliques", Tunisie, Département de Génie Civil de l'ENIT, 210 pages, 2012, <https://dlscrib.com>.

MAHDAOUI, H. et BENAMIROUCHE, D., "Résolution numérique des équations de Saint Venant 1D par la méthode des différences finies", Mémoire de fin d'études, Université de Béjaïa, 69 pages, 2014.

MARC, B., "Transport de flux en réseau d'assainissement : modèle 1D pour l'hydraulique des collecteurs et deversoirs avec prise en compte des discontinuités", Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur Strasbourg I, 225 pages, 2002.

MESSAÏD, B., "Généralité sur les barrages", Polycopié du cours, Université de Batna 2, 8 pages, <http://staff.univ-batna2.dz>.

RAHMANI, K., "Quelques solutions des ondes de rupture d'un barrage sur un fond", Mémoire de Magister, Université Hadj lakhdar-Batna, 70 pages, 2014.

TRAORE, S. et SADOU, S., "Etude d'un écoulement transitoire à surface libre (dam-break) «onde de rupture d'un barrage»", Mémoire de fin d'études, Université de Bejaïa, 82 pages, 2001.

VAZQUEZ, J., "Hydraulique générale", Ecole Nationale du Génie de l'eau et de l'environnement de Strasbourg, 105 pages, 2010.

ملخص:

الهدف من هذه الدراسة هو المحاكاة العددية لموجة هدم السد على قناة أفقية. تم إجراء المحاكاة من خلال تحديد معاملات سان فنان من خلال المخططين الضمني والصريحي بطريقة الفروق المنتهية. تمت دراسة تأثير معاملات معينة مثل عدد التيارات وخطوة التقدير. أعطت معايرة النتائج التي تم الحصول عليها بواسطة الحل التحليلي والنتائج التجريبية والمحاكاة للباحثين الآخرين نتائج مرضية، خاصة بالنسبة للمخطط الضمني.

الكلمات المفتاحية: هدم سد، سان فنان، طريقة الفروق المنتهية، المخطط الضمني، المخطط الصريحي.

Résumé :

L'objectif de cette étude est la simulation numérique de l'onde de rupture de barrage sur un canal horizontal. La simulation est faite par la discrétisation des équations de Saint-Venant par deux schémas implicite et explicite aux différences finies. L'effet de quelques paramètres tels que le nombre de Courant et le pas de discrétisation a été étudié.

Le calage des résultats obtenus avec la solution analytique, résultats expérimentaux et de simulations d'autres chercheurs a donné des résultats satisfaisants notamment pour le schéma implicite.

Mots clés : rupture de barrage, Saint-Venant, différences finies, schéma implicite, schéma explicite.

Abstract :

The objective of this study is the numerical simulation of the dam break wave on a horizontal channel. The simulation is made by the discretization of the Saint-Venant equations by the implicit and explicit schemes with finite differences. The effect of certain parameters such as the flow number and the discretization step has been studied.

The calibration of the results obtained with the analytical solution, experimental results and simulations of other researchers gave satisfactory results, in particular for the implicit scheme.

Key word: dam break, Saint -Venant, finite differences, implicit scheme, explicit scheme.