

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur  
et de la recherche scientifique

UNIVERSITE Abderrahmane MIRA BEJAIA

Faculté de Technologie  
Département de Génie Mécanique

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de

**MASTER**

Filière : Génie Mécanique

Spécialité : Installation Energétique et Turbomachine

Par :

**Sabri Khalil**

**Ouari Iskander**

**Thème**

---

**Etude d'un écoulement de stagnation centré sur un disque  
chauffé en rotation**

---

Soutenu le 13/07/2022 devant le jury composé de :

Mr. BENSLIMANE. A

Président

Mr. MENDIL. F

Rapporteur

Mr. HAMDI. M

Examineur

**Année Universitaire 2021-2022**



## **Déclaration sur l'honneur**

### **Engagement pour respecter les règles d'authenticité scientifique dans l'élaboration d'un travail de recherche**

Arrêté ministériel n° 933 du 28 juillet 2016<sup>(\*)</sup> fixant les règles relatives à la prévention et la lutte contre le plagiat

Je soussigné,

Nom : .....

Prénom : .....

Matricule : .....

Spécialité et/ou Option : .....

Département : .....

Faculté : .....

Année universitaire : ...../.....

et chargé de préparer un mémoire de (*Licence, Master, Autres à préciser*) :

.....

Intitulé:

.....  
.....  
.....

déclare sur l'honneur, m'engager à respecter les règles scientifiques, méthodologiques, et les normes de déontologie professionnelle et de l'authenticité académique requises dans l'élaboration du projet de fin de cycle cité ci-dessus.

Fait à Béjaïa  
le ...../...../.....  
Signature de l'intéressé  
<sup>(\*)</sup> Lu et approuvé

.....

## Remerciements

*Avant tout propos, nous tenons à remercier Allah le tout puissant de nous avoir octroyé le courage, la patience, la force, et surtout la santé pour réaliser ce modeste travail.*

*Nous tenons à formuler nos remerciements les plus chaleureux à notre promoteur Monsieur MENDIL FATSAH pour ses judicieux conseils, pour son enthousiasme à suivre notre recherche du début jusqu'à la fin. Sa disponibilité nous a énormément éclairé*

*Nos remerciements s'adressent également aux honorables membres de jury qui ont acceptés et accompli la dernière étape de notre travail.*

*Nous n'oublions pas nos chers parents pour leurs encouragements et sacrifices et qui ont toujours été à nos côtés.*

*Enfin à toute personne ayant participé de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail de recherche.*

## Dédicaces

*C'est avec un immense plaisir que je dédie ce modeste travail :  
À la plus belle créature que Allah a créé dans ce monde, ma perle qui me  
donne l'espoir à continuer dans chaque pas que je fais ma chère et adorable  
mère.*

*À mon guide, mon cher père "Nourdinne " que dieu le protège.  
À mes très chères sœurs qui m'ont toujours soutenu, que Allah les garde.*

*À mon binôme "Iskander" pour les meilleures années qu'on a passé  
ensemble.*

*À tous mes amis et tous ceux qui m'ont aidé à réaliser ce travail.*

## Dédicaces

*C'est avec un immense plaisir que je dédie ce modeste travail :  
À la plus belle créature que Allah a créé dans ce monde, ma perle qui me  
donne l'espoir à continuer dans chaque pas que je fais ma chère et adorable  
mère.*

*À mon guide, mon cher père "Farid " que dieu le protège.  
À mes très chères sœurs et à mon adorable et unique frère "Djamel" qui  
m'ont toujours soutenu, que Allah les garde.*

*À ma fiancée en signe d'amour de m'avoir encouragé à poursuivre mes  
études.*

*Sans oublier de citer mon cher grand père que dieu le protège.  
À mon binôme "Khalil" pour les meilleures années qu'on a passé  
ensemble.*

*À tous mes amis et tous ceux qui m'ont aidé à réaliser ce travail.*

# Sommaire

<b>Remerciements</b> .....	<b>i</b>
<b>Dédicaces</b> .....	<b>ii</b>
<b>Sommaire</b> .....	<b>iv</b>
<b>Liste des figures</b> .....	<b>vii</b>
<b>Liste des tableaux</b> .....	<b>viii</b>
<b>NOMENCLATURE</b> .....	<b>ix</b>
<b>Introduction générale</b> .....	<b>1</b>
<b>Chapitre I : Généralités et revue bibliographique</b>	
I.1 Introduction : .....	3
I.2 Généralités sur les couches limites : .....	3
I.3 Les couches limites dynamique et thermique : .....	4
I.3.1 Couche limite dynamique : .....	4
I.3.2 La couche limite thermique : .....	5
I.4 Paramètres caractéristiques de la couche limite : .....	6
I.4.1 Épaisseur de la couche limite $\delta$ : .....	6
I.4.2 Épaisseur de déplacement $\delta_1$ : .....	6
I.4.3 Épaisseur de quantité de mouvement $\delta_2$ .....	6
I.5 Revue bibliographique sur les écoulements sur des disques en rotation.....	6
I.6 Jet impactant.....	12
I.7 Configuration d'un jet impactant : .....	13
a. Région de jet libre .....	13
b. Région de stagnation (région d'impact).....	13

c. Région de jet pariétal .....	14
I.8 Applications des jets .....	14
I.9 Conclusion : .....	15
<b>Chapitre II:Présentation du problème et formulation mathématique</b>	
II.1 Introduction : .....	17
II.2 Description du problème physique : .....	17
II.3 Équations générales du mouvement .....	18
a. Conservation de masse .....	18
b. Équations de conservation de quantité de mouvement : .....	18
c. Projection des équations sur les axes $(r, \theta, z)$ .....	19
Équation de continuité .....	19
d. Équations de quantité de mouvement (de Navier Stokes) : .....	19
II.4 Hypothèse simplificatrice : .....	20
II.5 Simplification des équations en se basant sur les hypothèses : .....	20
a. Équation de continuité (ou de conservation de masse) .....	20
b. Équations de quantité de mouvement (de Navier Stokes) : .....	20
c. Équations d'énergie.....	21
d. Conditions aux limites .....	21
II.6 Formulation adimensionnelle .....	21
II.6.2 Équations de quantité de mouvement (Navier Stokes) .....	22
II.6.3 Équations d'énergie.....	23
- Équations adimensionnelles : .....	23
- Conditions aux limites : .....	23
- Nombre de Nusselt : .....	23
- Coefficient de frottement : .....	24
<b>Chapitre III :Résolution numérique</b>	
III.8 Méthode d'Euler [18]: .....	25
III.9 Méthodes de Runge-Kutta [18]: .....	26

III.9.1 Méthodes de Runge-Kutta d'ordre 4 [19]:.....	26
III.10 Algorithme de résolution : .....	27
III.11 Conclusion .....	28
<b>Chapitre IV : Résultats et discussion</b>	
IV.1 Introduction : .....	30
IV.2 : Résultats : .....	30
IV.2.1 Caractéristiques thermiques :.....	36
IV.3 Conclusion :.....	40
<b>Conclusion générale.....</b>	<b>40</b>
<b>Références bibliographiques.....</b>	<b>43</b>
<b>Résumé</b>	

## Liste des figures

<b>Figure 1</b> : Le mouvement d'un fluide se trouve freiné au voisinage d'une paroi immobile, sur une épaisseur de l'ordre de $\delta$ (épaisseur de couche limite). .....	3
<b>Figure 2</b> : développement d'une couche limite dynamique. [13] .....	4
<b>Figure 3</b> : Évolution de la couche limite thermique [13] .....	5
<b>Figure 4</b> : Représentation de stagnation ou point d'arrêt (solution de Hiemenz) [2].....	7
<b>Figure 5</b> :Couche limite d'un disque rotatif.[8] .....	8
<b>Figure 6</b> : Impactant sur une région différente du disque en rotation.[9] .....	9
<b>Figure 7</b> : La géométrie du flux. [11].....	10
<b>Figure 8</b> : Configuration de flux.[15].....	11
<b>Figure 9</b> :Structure d'un jet impactant sur une paroi plane.[17] .....	13
<b>Figure 10</b> : Refroidissement par jets d'eau [17].....	14
<b>Figure 11</b> :Schéma de principe de l'écoulement de stagnation centré sur un disque chauffé en rotation.....	18
<b>Figure 12</b> Méthode Runge-Kutta d'ordre 4[19].....	27
<b>Figure 13</b> : l'effet de paramètre de rotation $\Omega$ sur la vitesse $F(\eta)$ .....	31
<b>Figure 14</b> : l'effet de paramètre de rotation $\Omega$ sur la vitesse $F'(\eta)$ .....	31
<b>Figure 15</b> : l'effet de paramètre de rotation $\Omega$ sur la vitesse $F''(\eta)$ .....	32
<b>Figure 16</b> : l'effet de paramètre de rotation $\Omega$ sur la vitesse $G(\eta)$ .....	33
<b>Figure 17</b> : l'effet de paramètre de rotation $\Omega$ sur la vitesse $G'(\eta)$ .....	34
<b>Figure 18</b> :Effet de la vitesse de rotation $\Omega$ sur là le gradient de température $\Theta(\eta)$ .....	35
<b>Figure 19</b> : Effet de la vitesse de rotation $\Omega$ sur le gradient de température $\theta''(\eta)$ .....	36
<b>Figure 20</b> : Effet du nombre de Prandtl (Pr) sur le gradient de température $\Theta(\eta)$ .....	37
<b>Figure 21</b> : Effet du nombre de Prandtl (Pr) sur le gradient de température $\theta'(\eta)$ .....	37
<b>Figure 22</b> : Le coefficient de frottement ( $C_f$ ) pour déférentes valeurs de $\Omega$ .....	39
<b>Figure 23</b> : Le nombre de Nusselt (Nu) pour déférentes valeurs de $\Omega$ .....	39

## Liste des tableaux

**Tableau 1** : Résultats obtenus pour  $F''$  pour diverses valeurs de  $\Omega$  et pour  $Pr = 7$  ..... 30

**Tableau 2**: Résultats obtenus pour  $G'$  pour diverses valeurs de  $\Omega$  et pour  $Pr = 7$ ..... 30

**Tableau 3**: Résultats obtenus pour  $-\theta'$  pour diverses valeurs de  $\Omega$  et pour  $Pr = 7$ ..... 30

**Tableau 4** : Résultats obtenus pour  $-\theta'$  pour diverses valeurs de  $Pr$  et pour  $\Omega = 0$  ... 30

# NOMENCLATURE

Symboles	Définitions	Unités (SI)
$C_f$	Le coefficient du frottement	-
$U_\infty$	La vitesse ambiante du fluide	-
$T_\infty$	La température ambiante du fluide	K
$T_w$	La température du disque	K
$T$	La température du fluide	K
$Z$	La Hauteur adimensionnelle	-
$N_u$	Le nombre de Nusselt	-
$R$	Le rayon du disque	m
$r$	Le rayon adimensionnel du disque	-
$Re$	Le nombre de Reynolds	-
$\Omega$	La vitesse de rotation de disque	-
$\theta$	La température adimensionnelle	-
$(r, \theta, Z)$	Les coordonnées cylindriques	-
$(U_r, U_\theta, U_z)$	Les composantes de la vitesse	-
$(F', F, G)$	Les composantes adimensionnelles de la vitesse	-
$Pr$	Le nombre de Prandtl	-
$K$	Conductivité thermique	W/m.K
$\eta$	Variable de similitude	-
$B$	Paramètre de Source de chaleur	-

**Symboles grecs**

$\mu$	Viscosité dynamique	$Pa \cdot s$
$\nu$	Viscosité cinématique	$m^2/s$
$\rho$	Masse volumique	$kg/m^3$
$\delta$	Epaisseur de la couche limite	m
$\delta_t$	Epaisseur de couche limite thermique	-
$\tau$	Contrainte de cisaillement	-

**Indices**

'	Dérivation
$\infty$	Condition à l'infini amont
w	Condition à la paroi

**Abréviations**

EDO	Equation différentielle ordinaire
-----	-----------------------------------

# **Introduction générale**

# Introduction générale

La mécanique des fluides est une partie de science qui étudie le comportement des fluides au repos et en mouvement.

La dynamique des écoulements rotatifs, leurs équations fondamentales et leurs applications pratiques ont été résumées dans un livre de Childs [13]. Une excellente monographie a été publiée par Shevchuk [8], qui comprend la formulation du transfert de chaleur par convection dans diverses configurations d'écoulement rotatif. Méthodes intégrales, techniques autosimilaires et les approches analytiques pour traiter le disque rotatif ont également été décrites brièvement dans cette monographie.

De nombreux résultats nouveaux associés au système de Von Karman ont été présentés. Dans le livre de Schlichting [14], il est cité que "le flux secondaire qui accompagne la rotation près d'une paroi solide peut être clairement observé dans une tasse à thé : après que la rotation ait été générée par une agitation vigoureuse et de nouveau après que le flux ait été laissé à lui-même pendant un certain temps". Peu de temps, le champ d'écoulement radial vers l'intérieur près du fond se formera. Son existence peut être déduite du fait que les feuilles de thé se déposent en un petit tas près du centre au fond.

Comme mentionné ci-dessus, la compréhension de l'écoulement de la couche limite d'un disque rotatif est importante tant d'un point de vue scientifique qu'industriel. Cependant, la nature exacte du processus de transition laminaire turbulente pour l'écoulement à disque rotatif n'est pas encore totalement comprise. En particulier, la mesure dans laquelle l'instabilité absolue affecte le processus de transition laminaire turbulente reste à déterminer.

L'objectif de ce travail est d'étudier numériquement un écoulement de stagnation centré sur d'un disque chauffé en rotation, et ce en examinant les structures dynamique et thermique de l'écoulement de couche limite qui se présente sur la surface plane de disque.

Dans le premier chapitre, nous présentons des généralités sur les notions fondamentales relatives et une description de la couche limite dynamique et thermique, suivi par une synthèse bibliographique des différents travaux antérieurs sur disque chauffé en rotation.

Deuxième chapitre, nous commençons par la présentation de problème physique, ensuite nous définissons les hypothèses simplificatrices, et formuler les équations gouvernantes ainsi que les conditions aux limites associées. Enfin, nous établirons les équations gouvernantes sous forme adimensionnelle et définir les groupements adimensionnels caractérisant le phénomène.

Dans le dernier chapitre nous présentons la méthode numérique par laquelle nous résoudrons le problème étudié, utilisant la méthode de Runge Kutta d'ordre quatre, largement connue (utilisée pour résoudre les équations différentielles ordinaires), ainsi que le choix de la méthode de la résolution et son application qui se termine par la procédure numérique suivie sous le logiciel MATLAB. En suite la présentation des différents résultats obtenus par la simulation numérique, et pour finir on termine notre travail par une conclusion générale.

**Chapitre I**  
**Généralités et revue**  
**bibliographique**

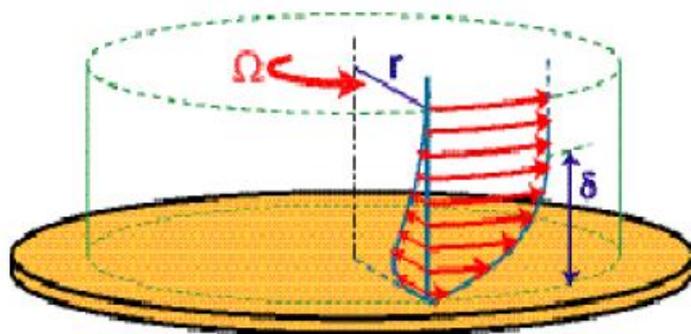
# Généralités et revue bibliographique

## I.1 Introduction :

Dans ce chapitre, nous allons présenter des notions de base dans lequel s'inscrit ce mémoire. Nous allons commencer par quelques définitions et concepts de la couche limite. Ainsi que les revues et les synthèses bibliographiques sur les études menées par nos prédécesseurs dans le domaine.

## I.2 Généralités sur les couches limites :

La zone de fluide ralenti par le frottement sur la paroi porte le nom de couche limite, et joue un rôle clé en mécanique des fluides (Figure 1). Son épaisseur, notée  $\delta$ , est la distance sur laquelle la rotation imposée  $\Omega$  est diffusée sous l'effet de la viscosité dans les couches intermédiaires du fluide. Dans le cas idéalisé d'un fluide en rotation au-dessus d'une paroi infinie, on peut montrer que  $\delta = \sqrt{\nu/\Omega}$  (Où  $\nu$  est la viscosité cinématique du fluide), qui est une constante sur toute la surface du disque, et dans laquelle n'intervient pas en particulier la distance  $r$  à l'axe de rotation. On parle alors de solution auto similaire, c'est-à-dire que le profil de vitesse reste identique à lui-même par changement d'échelle de notre problème.



**Figure 1 :** Le mouvement d'un fluide se trouve freiné au voisinage d'une paroi immobile, sur une épaisseur de l'ordre de  $\delta$  (épaisseur de couche limite).

Notons ici que, selon la situation que l'on cherche à décrire,  $\Omega$  pourra désigner soit la vitesse angulaire du fluide, de la paroi, ou plus généralement la vitesse relative de l'un par rapport à l'autre. Dans le cadre de cette description auto similaire, puisque l'épaisseur de la couche limite est la seule échelle de longueur du problème, on doit s'attendre à ce que tous les phénomènes physiques interviennent sur des distances caractéristiques de l'ordre de  $\delta$ .

### I.3 Les couches limites dynamique et thermique :

Un écoulement incident sur une paroi chauffée sera principalement caractérisé par le développement d'une couche limite dynamique (en vitesse) et d'une couche limite thermique (en température).

#### I.3.1 Couche limite dynamique :

Lorsqu'un fluide se déplace sur un obstacle, les champs de vitesse et de pression sont perturbés par ce dernier. La couche limite est la zone de fluide contiguë à la paroi (ou bien, on peut dire qu'il s'agit d'une zone d'interface entre le corps et le fluide), dans laquelle se produit l'accommodation entre la vitesse nulle en paroi et la pleine vitesse locale du fluide libre. De nombreuses propriétés de l'écoulement (frottement, transfert thermique et présence éventuelle de décollements) dépendent de cette couche limite. On distingue deux types de couche limite dynamique couche limite laminaire et couche limite turbulente.

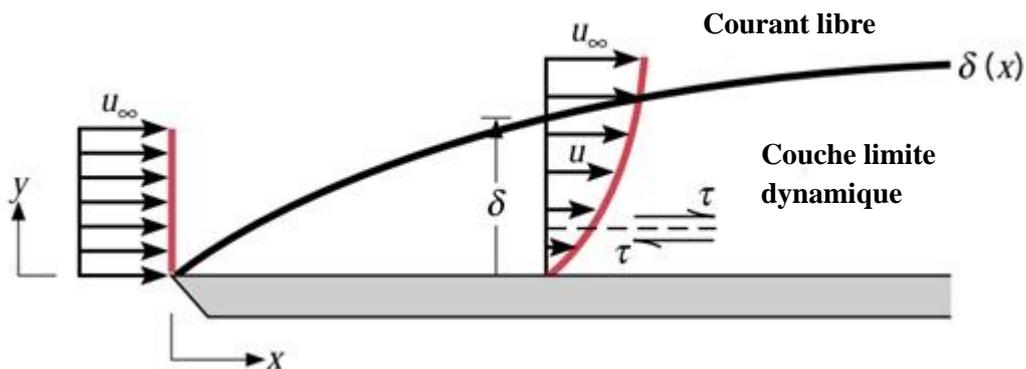
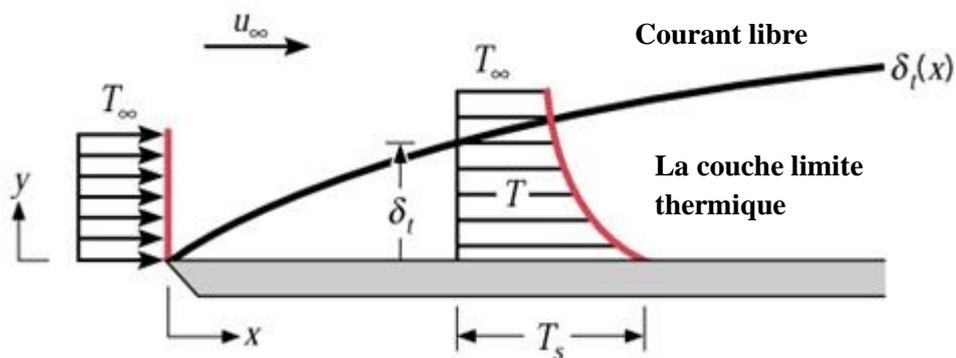


Figure 2: développement d'une couche limite dynamique. [13]

### I.3.2 La couche limite thermique :

La couche limite thermique ne se développe pas au sein d'un écoulement de fluide, de température  $T_\infty$ , s'écoule sur une paroi à température  $T_w$ , des échanges thermiques s'établissent. Les particules du fluide s'échauffent ou se refroidissent au contact de la paroi. Ces particules échangent de la chaleur de proche en proche avec leurs voisines et un gradient de température se forme. L'épaisseur  $\delta_t$  de la couche limite thermique est conventionnellement définie comme étant la distance à la paroi pour laquelle le rapport :

$$[(T_w - T(\delta t))/(T_w - T_\infty)] = 0.99$$



**Figure 3 :** Évolution de la couche limite thermique [13]

Dans le cas où ces deux phénomènes se présentent de manière simultanée, il existe un nombre adimensionnel, le nombre de Prandtl  $Pr$  caractérisant le fluide et défini par  $Pr = \frac{\nu}{a}$ , traduisant le rapport entre la diffusion visqueuse et la diffusion thermique, qui permet de lier les épaisseurs des deux couches limites :

- $Pr \ll 1$  dans ce cas la chaleur se diffuse plus rapidement que la quantité de mouvement donc l'épaisseur de la couche limite thermique sera plus grande que celle de la couche limite dynamique  $\delta \ll \delta_t$
- $Pr \gg 1$  dans ce cas l'écoulement se caractérise par une diffusion de la quantité de mouvement beaucoup plus importante que la diffusion de la chaleur  $\delta_t \ll \delta$

$Pr \approx 1$  les deux épaisseurs sont du même ordre de grandeur. [14]

## I.4 Paramètres caractéristiques de la couche limite :

Épaisseur de couche limite :

La couche limite peut être définie par les types d'épaisseurs suivants :

### I.4.1 Épaisseur de la couche limite $\delta$ :

On définit conventionnellement l'épaisseur de la couche limite  $\delta$  comme la distance à la paroi telle que  $U/U_\infty = 0.99$

### I.4.2 Épaisseur de déplacement $\delta_1$ :

L'épaisseur de déplacement  $\delta_1$  caractérise la perte de débit massique au travers d'une section de la couche limite par rapport au cas de l'écoulement de fluide parfait incompressible [14]

$$\delta_1 = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{u_\infty}\right) dy \quad (1)$$

### I.4.3 Épaisseur de quantité de mouvement $\delta_2$

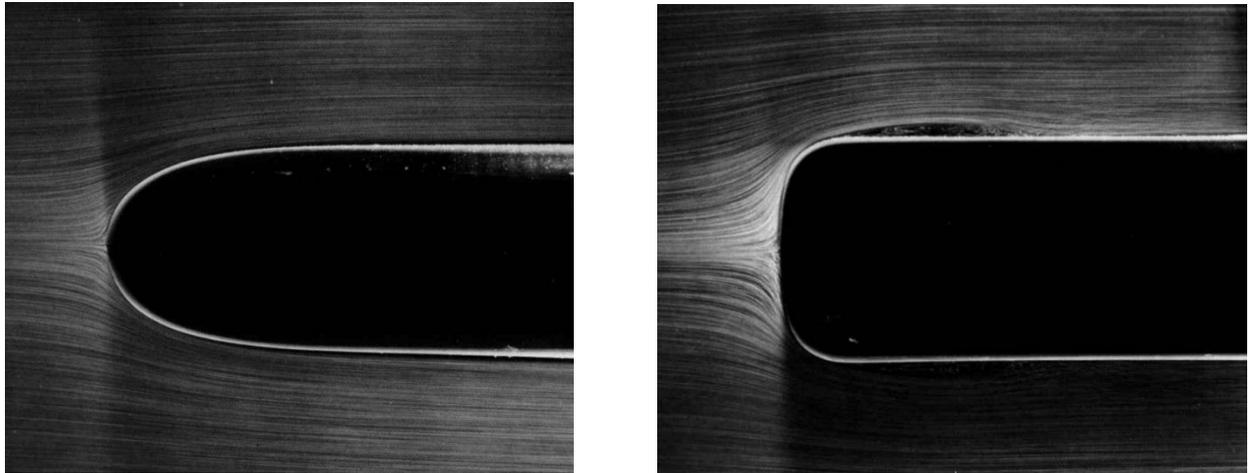
L'épaisseur de quantité de mouvement  $\delta_2$  caractérise la perte de quantité de mouvement dans la couche limite par rapport au cas d'écoulement de fluide parfait [14] :

$$\delta_2 = \int_0^\delta \frac{u}{u_\infty} \left(1 - \frac{u}{u_\infty}\right) dy \quad (2)$$

## I.5 Revue bibliographique sur les écoulements sur des disques en rotation

**Hiemenz[1]** : Les écoulements bidimensionnels au point de stagnation sur une paroi plane sont des problèmes d'un intérêt considérable pour de nombreuses applications de la mécanique des fluides, ainsi que pour l'ingénierie et la science. Hiemenz [1] est le premier qu'a étudié l'écoulement au voisinage de point de stagnation, il a simplifié les équations de Navier-Stokes gouvernant l'écoulement en une seule équation différentielle ordinaire de 3eme ordre, cet écoulement est semblable à l'écoulement non visqueux, en supposant que suffisamment loin de la paroi, en raison des non-linéarités dans l'équation différentielle réduite, aucune solution

analytique n'est disponible et l'équation non linéaire est habituellement résolue numériquement sous réserve de conditions aux limites à deux points, dont l'une est prescrite à l'infini.



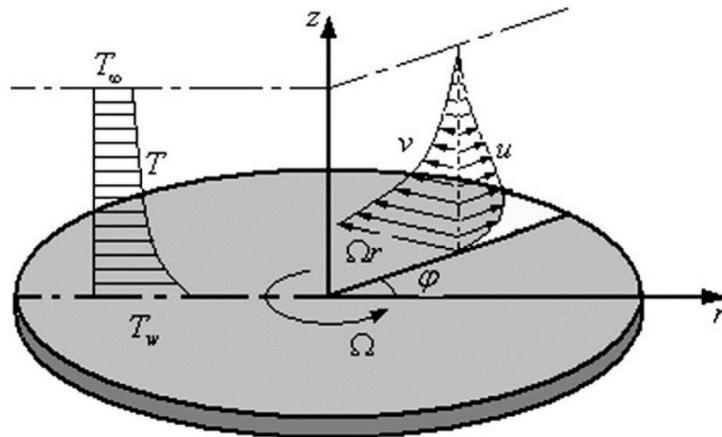
**Figure 4:** Représentation de stagnation ou point d'arrêt (solution de Hiemenz) [2]

**Stewartson et Gill et Del Casal [4] :** Ont étudié la théorie de fonctionnement du transfert de chaleur par convection à partir d'une plaque horizontale et a rapporté la présence de solutions analogues à une plaque isotherme presque infinie immergée dans l'air. Ils ont déduit les premières conditions d'existence d'un flux thermique de couche limite sur une plaque plane horizontale.

**Fabien et al [6] :** Ont effectué une étude expérimentale sur un jet laminaire axisymétrique impactant une plaque plane horizontale chauffée et dont la température est maintenue fixe à l'aide d'un système d'asservissement. Ils ont analysé la couche limite cinématique et thermique du fluide, distance à l'axe du jet et les effets de flottabilité.

**Millsaps et Pohlhausen [7]** Une solution exacte du problème de transfert de chaleur pour un écoulement laminaire d'un fluide visqueux sur un disque rotative est donnée sous forme adimensionnelle. La solution est explicitement donnée pour une température constante en régime permanent pour une variété de nombres de Prandtl.

**Chunying Ming et al [8]** : ont traité de l'écoulement constant et du transfert de chaleur d'un fluide visqueux incompressible à loi de puissance sur un disque infini en rotation. En supposant que la conductivité thermique suit la même fonction que la viscosité, les équations régissant la couche limite sont transformées en un ensemble d'équations différentielles ordinaires par transformation de similarité de Karman. Le problème de la valeur limite à deux points non linéaires correspondants a été résolu par la méthode multi-tir. Les résultats numériques ont indiqué que les paramètres de l'indice de loi de puissance et du nombre de Prandtl ont des effets significatifs sur les champs de vitesse et de température. L'épaisseur de la couche limite décroît avec l'indice de loi de puissance. Le pic de la vitesse radiale change légèrement avec l'indice de loi de puissance. Les valeurs proches de la limite sont affectées de manière spectaculaire par l'épaisseur de la couche limite.

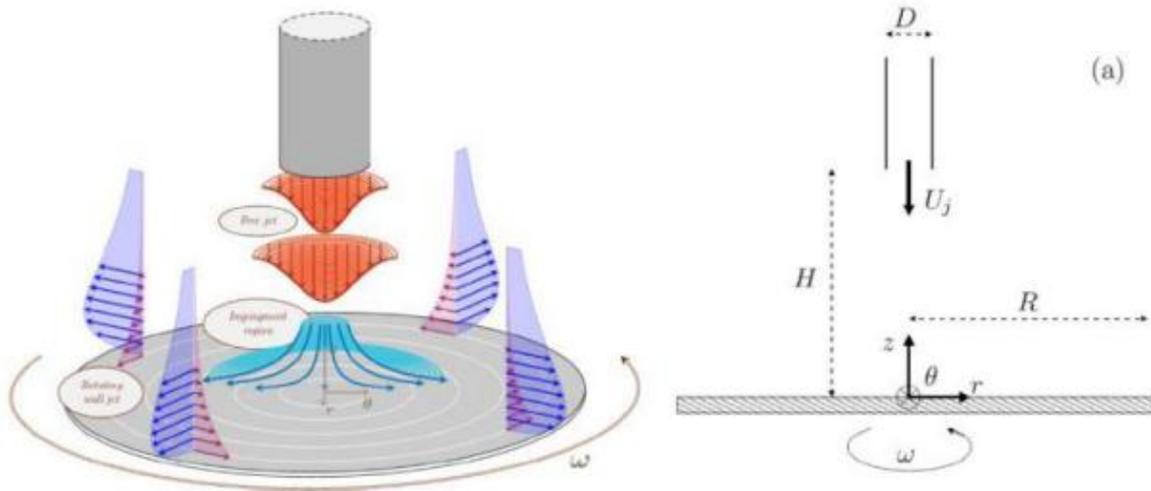


**Figure 5:** Couche limite d'un disque rotatif.[8]

**Huda Mohammed Alotaibi et al, [9]** : Un examen des résultats les plus importants pour l'impact des jets sur la cible en rotation est présenté, l'accent est mis sur le transfert de chaleur et la dynamique d'écoulement dans ces jets. Ces configurations de jets sont rencontrées dans de nombreuses applications industrielles. Un nombre important d'études de recherche portant sur des études computationnelles et expérimentales sont passées en revue. Différents paramètres influencent le flux et améliorent le transfert de masse et d'énergie dans plusieurs configurations de chaleur telles que ; nombre de Reynolds (Re), géométrie de la buse, espacement entre la sortie du jet et la plaque d'impact, l'angle d'impact du jet et le régime d'écoulement à la sortie du jet. Il existe quelques études qui traitent du transfert de chaleur d'un écoulement heurtant un disque en rotation en raison de la complexité de la structure de l'écoulement et des défis liés à la conduite d'une enquête expérimentale approfondie. La plupart des études présentent des profils de coefficients de transfert de chaleur, de vitesse moyenne et de taux de turbulence de l'écoulement incident. De nombreux chercheurs ont signalé que le LES peut prédire les données

de transfert de chaleur et de champ d'écoulement pour différents angles d'impact afin d'étudier le mécanisme de rétroaction entre la buse et la plaque.

**Wang [10]** a étudié le problème de l'écoulement de stagnation sur une plaque en

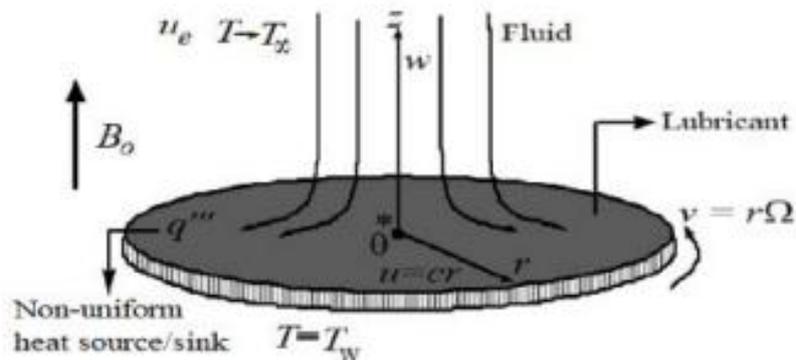


**Figure 6:** Impactant sur une région différente du disque en rotation.[9]

rétrécissement et obtient deux solutions pour certaines valeurs du rapport des vitesses de rétrécissement de la surface et de l'écoulement externe.

**Usman, Waqar Khan et al [11]** : Le phénomène de transfert de chaleur est bénéfique et applicable dans l'ingénierie, les industries et les technologies processus. La production d'énergie à l'aide de ressources bon marché joue un rôle pivot et renouvelable dans le développement industriel des pays. En raison d'une importante performance du transfert de chaleur, le flux de glissement constant et le transfert de chaleur de l'hyperbolique tangent fluide sur une surface lubrifiante du disque rotatif étirable est étudié. Les effets du MHD, rayonnement non linéaire et source/puits de chaleur non uniforme soumis à des conditions aux limites non linéaires sont inclus dans les équations de mouvement et d'énergie. En raison de la lubrification, une fine couche d'un fluide de loi de puissance est produite à la surface du disque. Comme la couche lubrifiante est mince, les conditions interfaciales sont appliquées à la surface entre le fluide et le lubrifiant. Le gouvernement les équations aux dérivées partielles non linéaires (EDP) ont été converties en différentielles ordinaires équations (ODE), qui sont résolues numériquement à l'aide de la méthode de la boîte de Keller. Les retombées des paramètres

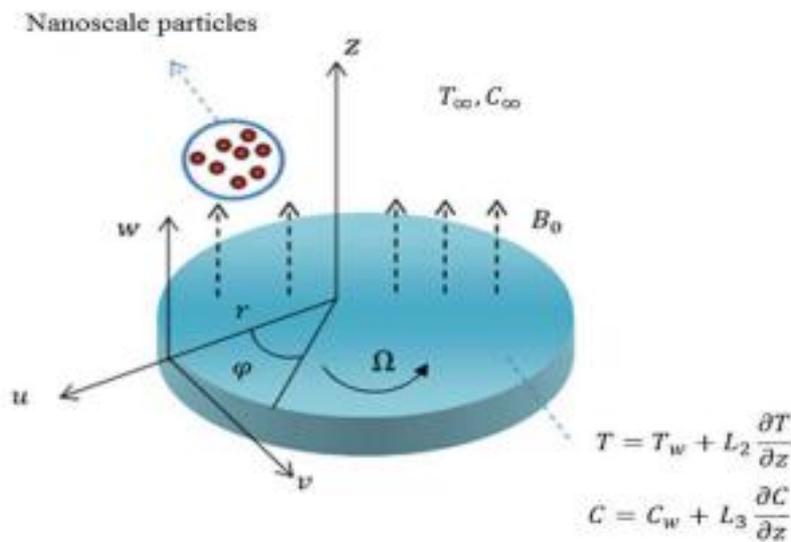
pertinents sur les distributions sans dimension de la vitesse et de la température sont délibérées. Les forces de traînée de surface et les taux de transfert de chaleur sont calculés, et les effets des paramètres qui les régissent sont examinés. Avec l'amélioration dans le slip à l'interface et le nombre de Weissenberg, les vitesses radiale et azimutale augmentent près du disque, alors qu'ils observent deux tendances différentes pour l'indice de loi de puissance. De plus, la température augmente pour le rayonnement paramètre, et cette escalade est importante pour le rayonnement non linéaire



**Figure 7:** La géométrie du flux. [11]

**M. Mustafa, 2017 [15] :** Dans son article, le problème de Von Karman du disque rotatif infini est étendu au cas où l'espace au-dessus du disque rugueux est équipé d'un nano fluide électriquement conducteur. Le modèle de Buongiorno est utilisé pour incorporer le mouvement brownien et les effets de thermophorèse dus aux nanoparticules. Le processus de transfert de masse s'accompagne d'une condition de flux normal nul. De plus, le mécanisme de transfert de chaleur est inspecté dans des conditions de saut de température plus générales. Des solutions de similitude précises sont développées pour une gamme complète de coefficients de glissement au moyen d'une procédure de prise de vue standard. En outre, une routine MATLAB basée sur la collocation est utilisée pour trouver les solutions. L'impact des paramètres sur les champs d'écoulement est représenté en traçant des graphiques. Il est prédit que les distributions de vitesse sont inversement proportionnelles au paramètre de champ magnétique. L'effet de glissement de vitesse présente également une opposition au transport de quantité de mouvement et réduit l'épaisseur de la couche limite hydrodynamique. On constate également que le mouvement brownien a une influence négligeable sur le flux de chaleur au niveau du disque en

rotation. En outre, les épaisseurs de couche limite thermique et de concentration sont augmentées en raison de l'existence de la force thermophorétique. La vitesse axiale est négative en raison du mouvement descendant du fluide causé par la rotation du disque. L'analyse de la limite sans glissement peut également être récupérée en tant que cas particulier du présent modèle.



**Figure 8:** Configuration de flux.[15]

**Huda Mohammed Alotaibi et al, [16] :** Un examen des résultats les plus importants pour l'impact des jets sur la cible en rotation est présenté, l'accent est mis sur le transfert de chaleur et la dynamique d'écoulement dans ces jets. Ces configurations de jets sont rencontrées dans de nombreuses applications industrielles. Un nombre important d'études de recherche portant sur des études computationnelles et expérimentales sont passées en revue. Différents paramètres influencent le flux et améliorent le transfert de masse et d'énergie dans plusieurs configurations de chaleur telles que ; Nombre de Reynolds ( $Re$ ), géométrie de la buse, espacement entre la sortie du jet et la plaque d'impact, l'angle d'impact du jet et le régime d'écoulement à la sortie du jet. Il existe quelques études qui traitent du transfert de chaleur d'un écoulement heurtant un disque en rotation en raison de la complexité de la structure de l'écoulement et des défis liés à la conduite d'une enquête expérimentale approfondie. La plupart des études présentent des profils de coefficients de transfert de chaleur, de vitesse moyenne et

de taux de turbulence de l'écoulement incident. De nombreux chercheurs ont signalé que le LES peut prédire les données de transfert de chaleur et de champ d'écoulement pour différents angles d'impact afin d'étudier le mécanisme de rétroaction entre la buse et la plaque.

**E. Sparrow , J. L. Gregg[12] :** Les effets de l'injection ou de l'élimination de masse à la surface d'un disque rotatif sur le transfert de chaleur et sur le champ d'écoulement autour du disque sont étudiés. On considère les systèmes gazeux composés d'un ou de deux composants gazeux. Les solutions des équations qui gouvernent l'hydrodynamique, le transfert d'énergie et la diffusion de masse ont été obtenues sur toute la gamme des grandes vitesses d'aspiration aux grandes vitesses de soufflage. Les résultats sont donnés pour les distributions de vitesse, de température et de fraction de masse, ainsi que pour les exigences de transfert de chaleur, de transfert de masse et de couple. Les effets du transfert de masse sont discutés en détail. Il est montré que l'injection de fluide diminue fortement le transfert de chaleur à la surface.

## **I.6 Jet impactant**

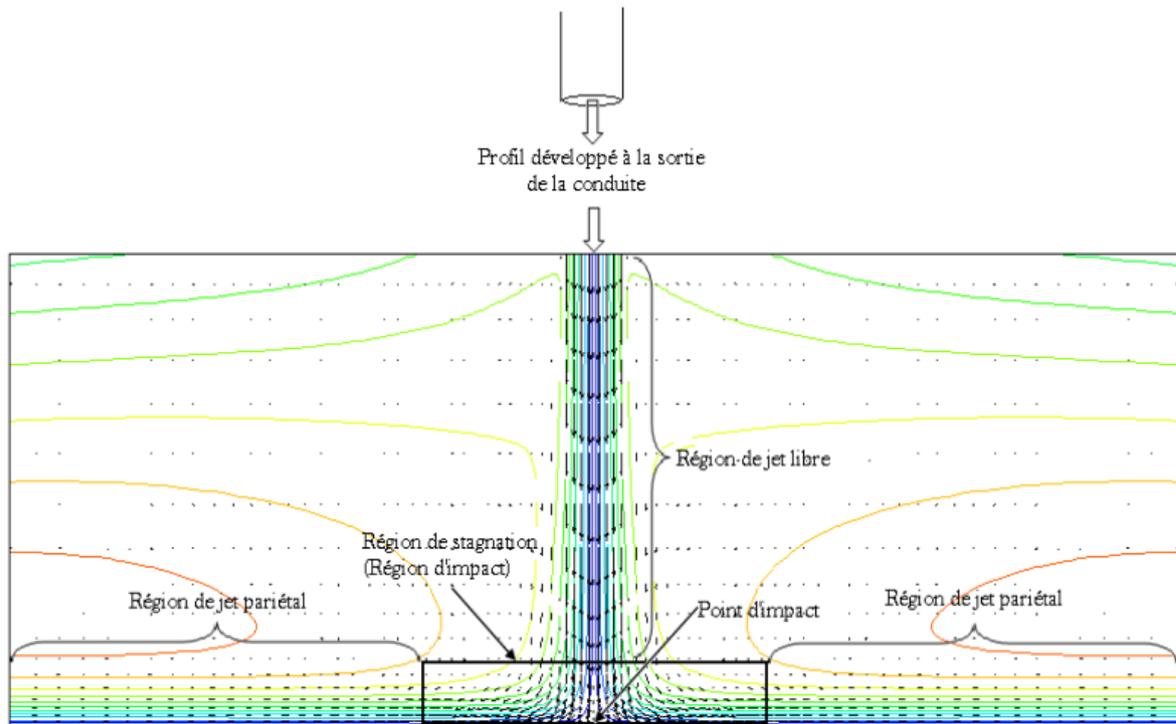
La technique des jets impactant se trouve dans nombreuses applications industrielles et les résultats de sa mise en place dépendent de nombreux paramètres.

Le choix de cette dernière est motivé par le fait d'assurer un meilleur transfert de chaleur et/ou de masse entre un fluide et une partie localisée d'une surface solide.

Ainsi de nombreuses études expérimentales et numériques ont été menées dans le but d'une meilleure compréhension des phénomènes physiques intervenant et régissant l'impact d'un jet

## I.7 Configuration d'un jet impactant :

En général, le jet impactant sur une paroi plane peut se décomposer en trois régions essentielles :



**Figure 9:** Structure d'un jet impactant sur une paroi plane.[17]

### a. Région de jet libre

Cette région est caractérisée par l'écoulement d'un jet rond turbulent, axisymétrique en moyenne. Il est possible d'atteindre une zone d'écoulement établi ZEF (Zone of Established Flow) cette dernière ne peut apparaître que lorsque la distance d'impact est suffisamment grande.

### b. Région de stagnation (région d'impact)

Cette région est caractérisée principalement par une forte diminution de la composante de vitesse axiale à l'amont du point de stagnation, une élévation importante de la pression au point d'arrêt, et une forte augmentation de la composante de vitesse radiale en aval du point d'impact.

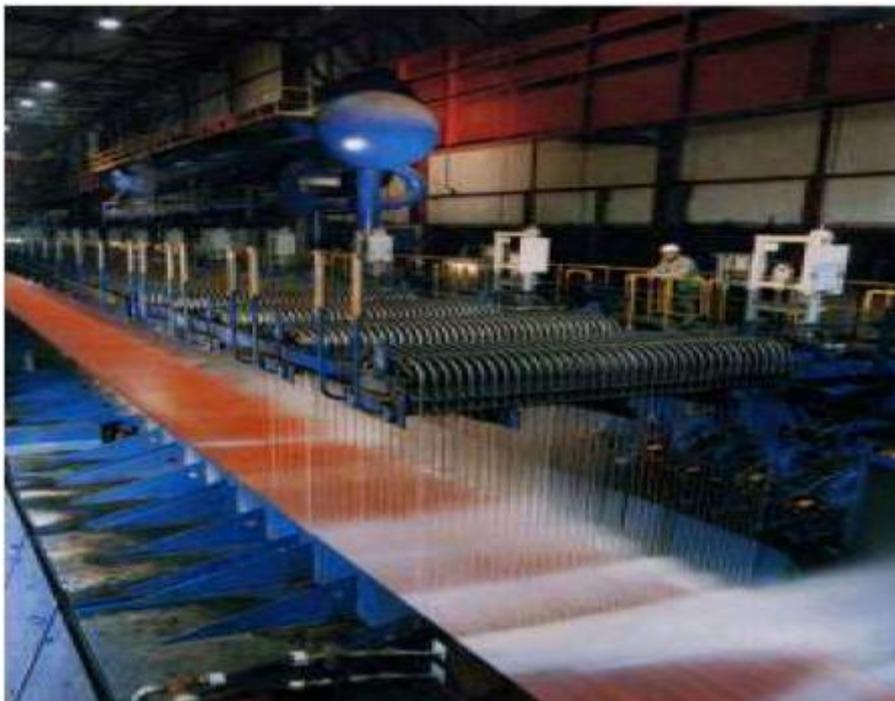
### c. Région de jet pariétal

Cette région est caractérisée par le développement et l'épaississement d'un jet pariétal, c'est à dire le long de la surface d'impact et dont la vitesse radiale maximale diminue.

## I.8 Applications des jets

Les jets impactant sont utilisés dans plusieurs applications industrielles parmi lesquelles processus de séchage, de refroidissement et de réchauffement. Par exemple, on peut citer :

- Découpe et refroidissement de nappes de verre en fusion.
- Evaporation de l'eau de la pâte à papier dans l'industrie papetière.
- Refroidissement de feuillets métalliques ou plastiques [17]
- Refroidissement de moteurs thermiques, circuits hydrauliques, chambres de combustion, aubes turbines et moteurs électriques de grande puissance destinés à une nouvelle génération de voitures électriques.
- Refroidissement de denrées alimentaires.
- Refroidissement de composants électronique



**Figure 10:** Refroidissement par jets d'eau [17].

**I.9 Conclusion :**

Dans ce chapitre, nous avons présenté les différentes notions primaires, des couches limites. Par suite nous avons présenté une synthèse bibliographique sur les études similaires à notre étude et les différents travaux effectués sur les écoulements sur disque chauffé en rotation.

# **Chapitre II**

## **Présentation du problème et formulation mathématique**

# Présentation du problème et formulation mathématique

## II.1 Introduction :

Dans ce chapitre, nous avons présentons le modèle physique et les hypothèses simplificatrices. Commence par l'écriture des équations sous leurs formes générales, ensuite on passera aux différents traitements de ces équations pour les adapter au cas étudié. De ce fait nous devons prendre en considération les hypothèses simplificatrices nécessaires ainsi que les conditions aux limites associées.

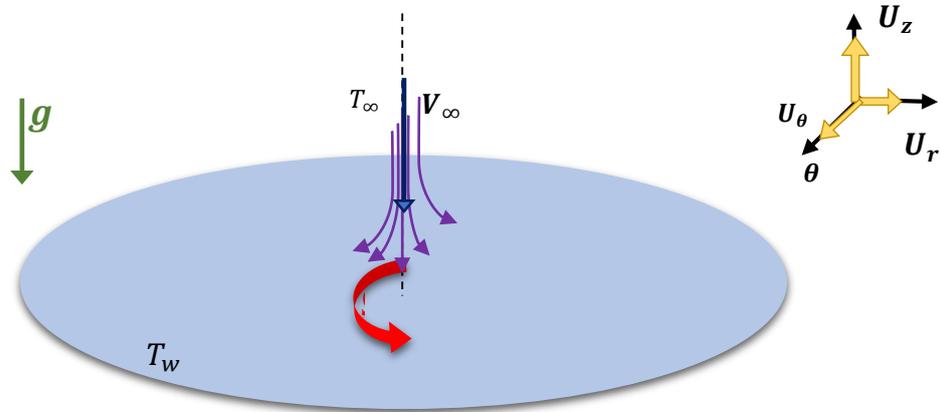
En outre, nous avons intéressé à la résolution des systèmes d'équations différentielles, ces dernières ne possèdent pas des solutions analytiques, dans le cas général, les descriptions mathématiques sont des moyens pour trouver des solutions approximatives aux solutions exactes. Ces équations sont classées en deux catégories : les équations différentielles avec des conditions initiales et les équations différentielles avec des conditions aux limites.

Dans ce chapitre, nous avons présenté la méthode de Runge-Kutta d'ordre quatre, la méthode utilisée pour résoudre le système d'équations différentielles ordinaires modélisant le problème physique étudié.

## II.2 Description du problème physique :

Dans cette étude, nous étudions l'écoulement de stagnation d'un jet de température  $T_\infty$  perpendiculairement sur un disque avec une vitesse  $V_\infty$ , celui-ci est en rotation avec une vitesse angulaire ( $\Omega$ ), chauffée avec une température uniforme  $T_w$  qui est différent de celle du fluide.

La variation des vecteurs vitesse se font selon  $(U_r, U_\theta, U_z)$  et les coordonnées selon  $(r, \theta, z)$ , comme il est schématisé sur la figure (6)



**Figure 11:** Schéma de principe de l'écoulement de stagnation centré sur un disque chauffé en rotation.

### II.3 Équations générales du mouvement

Le traitement du comportement dynamique du fluide fait appel aux équations du mouvement déduites des principes de conservation de la masse, et de la quantité de mouvement.

#### a. Conservation de masse

L'équation de conservation de la masse est donnée par :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (1)$$

#### b. Équations de conservation de quantité de mouvement :

Équations de bilan de la quantité de mouvement est donnée :

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{v} = F - \nabla \cdot P + \mu \vec{\nabla}^2 \vec{v} \quad (2)$$

**c. Projection des équations sur les axes (r, θ, z)****Équation de continuité :**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_r)}{\partial r} + \frac{U_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho U_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho U_z)}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

**d. Équations de quantité de mouvement (de Navier Stokes) :**

Équation de quantité de mouvement radiale:

$$\begin{aligned} \rho \left[ \frac{\partial U_r}{\partial t} + U_r \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{U_\theta}{r} \frac{\partial U_r}{\partial \theta} - \frac{U_\theta^2}{r} + U_z \frac{\partial U_r}{\partial z} \right] \\ = - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial(r U_r)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 U_r}{\partial z^2} \right] + \rho g_r \end{aligned} \quad (4)$$

Équation de quantité de mouvement azimutale (Équation de swirl )

$$\begin{aligned} \rho \left[ \frac{\partial U_\theta}{\partial t} + U_r \frac{\partial U_\theta}{\partial r} + \frac{U_\theta}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{U_r U_\theta}{r} + U_z \frac{\partial U_\theta}{\partial z} \right] \\ = - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial(r U_\theta)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U_\theta}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial U_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 U_\theta}{\partial z^2} \right] + \rho g_\theta \end{aligned} \quad (5)$$

Équation de quantité de mouvement axiale

$$\begin{aligned} \rho \left[ \frac{\partial U_z}{\partial t} + U_r \frac{\partial U_z}{\partial r} + \frac{U_\theta}{r} \frac{\partial U_z}{\partial \theta} + U_z \frac{\partial U_z}{\partial z} \right] \\ = - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial U_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2} \right] - \rho g_z \end{aligned} \quad (6)$$

$(U_r, U_\theta, U_z)$  sont respectivement les composantes dimensionnelles de vitesse radiale, axiale et azimutale.

$g$ : est l'accélération de la pesanteur.

$\rho$  : est la masse volumique du fluide.

**- Hypothèse simplificatrice :**

- L'écoulement de fluide et transfert de chaleur sont permanents ( $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ ) et le régime est laminaire ( $Re < 2000$ ).
- Le fluide est newtonien et incompressible ( $\rho = 0$ )
- Les propriétés thermophysiques du fluide ( $\mu, Cp, \rho, \beta$ ) sont constantes.
- L'écoulement est tridimensionnel ( $r, \theta, z$ ).
- Les variations de la masse volumique sont négligeables au niveau de tous les termes des équations de quantité de mouvement

**II.5 Simplification des équations en se basant sur les hypothèses :****a. Équation de continuité (ou de conservation de masse)**

L'équation de continuité pour les fluide incompressible est :

$$\frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{U_r}{r} + \frac{\partial U_z}{\partial z} = 0 \quad (7)$$

**b. Équations de quantité de mouvement (de Navier Stokes) :**

**Suivant r :** Équation de quantité de mouvement radiale :

$$\rho \left[ U_r \frac{\partial U_r}{\partial r} - \frac{U_\theta^2}{r} + U_z \frac{\partial U_r}{\partial z} \right] = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left[ \frac{\partial^2 U_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 U_r}{\partial z^2} - \frac{U_r}{r^2} \right] \quad (8)$$

**Suivant  $\theta$  :** Équation de quantité de mouvement axiale

$$\rho \left[ U_r \frac{\partial U_\theta}{\partial r} + \frac{U_r U_\theta}{r} + U_z \frac{\partial U_\theta}{\partial z} \right] = \mu \left[ \frac{\partial^2 U_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 U_\theta}{\partial z^2} - \frac{U_\theta}{r^2} \right] \quad (9)$$

**Suivant z :** Équation de quantité de mouvement azimutale (Équation de swirl)

$$\rho \left[ U_r \frac{\partial U_z}{\partial r} + U_z \frac{\partial U_z}{\partial z} \right] = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[ \frac{\partial^2 U_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2} \right] \quad (10)$$

### c. Équations d'énergie

Suivant **T** : Équation d'énergie

$$\rho C_p \left[ U_r \frac{\partial T}{\partial r} + U_z \frac{\partial T}{\partial z} \right] = \alpha \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] \quad (11)$$

$\rho$ ,  $C_p$  et  $\alpha$  sont respectivement la densité, la pression et la viscosité du fluide.

### d. Conditions aux limites

Les conditions aux limites sont :

$$\text{Pour } z = 0 \quad U_r = 0; \quad U_\theta = \Omega r; \quad U_z = 0$$

$$\text{Pour } z \rightarrow \infty \quad U_r = 0; \quad U_\theta = 0; \quad T = T_\infty$$

$$U_r = arF'(\eta); \quad U_\theta = \Omega r g(\eta); \quad U_z = -2\sqrt{av} F(\eta);$$

$$\eta = \sqrt{\frac{a}{v}} z; \quad \theta(\eta) = \frac{(T-T_\infty)}{(T_w-T_\infty)} \quad (12)$$

## II.6 Formulation adimensionnelle

Les expérimentales des écoulements sont souvent effectuées sur des modèles et les résultats sont montrés dans une forme sans dimensions, permettant ainsi des mesures échelonnées vers les conditions réelles des écoulements. La même approche peut être aussi entreprise dans des études numériques. Les équations gouvernantes peuvent être transformées à la forme sans dimensions en employant la normalisation appropriée. En introduisant les variables adimensionnelles.

**Équation de continuité :**

$$\frac{\partial(arF')}{\partial r} + \frac{arF'}{r} + \frac{\partial(-2\sqrt{av}F)}{\partial z} = 0$$

$$aF' + aF' - 2\sqrt{av}F'. \sqrt{\frac{a}{v}} = 0$$

$$2F' - 2F' = 0 \quad (\text{Équation de continuité est vérifiée}) \quad (13)$$

## II.6.2 Équations de quantité de mouvement (Navier Stokes)

Selon  $r$  :

$$\left[ arF' \frac{\partial(arF')}{\partial r} - \frac{(\Omega rg)^2}{r} + (-2\sqrt{av}F) \frac{\partial(arF')}{\partial z} \right]$$

$$= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left[ \frac{\partial^2(arF')}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial(arF')}{\partial r} + \frac{\partial^2(\Omega rg)}{\partial z^2} - \frac{(arF')}{r^2} \right]$$

$$\left[ arF' \cdot arF' - \frac{(\Omega rg)^2}{r} + (-2\sqrt{av}F) \cdot arF'' \sqrt{\frac{\bar{a}}{v}} \right]$$

$$= a^2 r + \nu \left[ 0 + \frac{1}{r^2} arF' + arF''' \sqrt{\frac{\bar{a}}{v}} \sqrt{\frac{\bar{a}}{v}} - \frac{1}{r^2} arF' \right]$$

$$\left[ a^2 F'^2 + \Omega^2 g^2 - 2a\sqrt{av} \cdot \sqrt{\frac{\bar{a}}{v}} FF'' \right] = a^2 + \nu \left[ arF'''' \cdot \frac{a}{v} \right]$$

$$F'^2 + \left( \frac{\Omega^*}{a} \right)^2 g^2 - 2FF'' - 1 = F''''$$

$$\Omega = \left( \frac{\Omega^*}{a} \right)$$

$$F'^2 + \Omega^2 g^2 - 2FF'' - 1 = F'''' \quad (14)$$

Selon  $\theta$  :

$$\left[ arF' \frac{\partial(\Omega rg)}{\partial r} + \frac{(arF')(\Omega rg)}{r} + (-2\sqrt{av}F) \frac{\partial(\Omega rg)}{\partial z} \right]$$

$$= \nu \left[ \frac{\partial^2(\Omega rg)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\Omega rg)}{\partial r} + \frac{\partial^2(\Omega rg)}{\partial z^2} - \frac{(\Omega rg)}{r^2} \right]$$

$$\left[ arF' \cdot \Omega g - \frac{(arF')(\Omega rg)}{r} + (-2\sqrt{av}F) \cdot \Omega r g' \sqrt{\frac{\bar{a}}{v}} \right]$$

$$= \nu \left[ 0 + \frac{1}{r^2} r \Omega g + \sqrt{\frac{\bar{a}}{v}} \Omega r g'' \sqrt{\frac{\bar{a}}{v}} - \frac{1}{r^2} \Omega r g \right]$$

$$[\Omega F' g + F' g - 2\Omega F g'] = \nu \left[ \Omega g'' \frac{1}{v} \right]$$

$$2F' g - 2F g' = g'' \quad (15)$$

### II.6.3 Équations d'énergie

$$\rho C_p \left[ -2\sqrt{av} \sqrt{\frac{a}{v}} F \theta' \right] = \alpha \left[ \theta'' \sqrt{\frac{a}{v}} \sqrt{\frac{a}{v}} \right]$$

$$\rho C_p \left[ -2\sqrt{\frac{v}{a}} \sqrt{\frac{a}{v}} F \theta' \right] = \alpha \left[ \frac{1}{v} \theta'' \right]; \quad v = \frac{\mu}{\rho}$$

$$-2F \theta' C_p = \frac{k}{\mu} \theta''$$

$$\theta'' = -2 \frac{\mu C_p}{k} F \theta'$$

$$\theta'' = -2PrF\theta' \tag{16}$$

Telle que

$$Pr = \frac{\mu C_p}{\alpha}; \text{ (Nombre de Prandtl)}$$

#### -Équations adimensionnelles :

$$\left. \begin{aligned} F''' - F'^2 + 2FF'' + \Omega^2 G^2 + 1 &= 0 \\ G'' - 2F'G + 2FG' &= 0 \\ \theta'' + 2PrF\theta' &= 0 \end{aligned} \right\} \tag{17}$$

#### - Conditions aux limites :

$$\eta = 0, \quad F' = 0, \quad G = 1, \quad F = 0, \quad \theta = 1$$

$$\eta \rightarrow \infty, \quad F' = 1, \quad G = 0, \quad F = 0, \quad \theta = 0$$

#### - Nombre de Nusselt :

Est un nombre adimensionnel utilisé pour caractériser les transferts thermiques entre un fluide et une paroi, appelé transfert convectif.

On le définit de la manière suivante :

$$Nu = \frac{h L_c}{k}$$

$$h = \frac{q}{T_w - T_\infty}$$

$$q = -k \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right) = -k(T_w - T_\infty) \left( \frac{a}{\nu} \right)^{\frac{1}{2}} \theta'$$

$$Nu = -\theta' \tag{18}$$

$k$  : Conductivité thermique

$L_c$  : longueur caractéristique.

$h$  : Coefficient de transfert de chaleur

$q$  : Taux de transfert de chaleur par unité de surface

### - Coefficient de frottement :

Le coefficient de frottement est défini comme suit

$$C_f = \frac{\tau_c}{\rho \frac{V_\infty^2}{2}} \tag{29}$$

$\tau_c$  Représente la contrainte de cisaillement à la paroi

$$\tau_r = \mu \left( \frac{\partial U_u}{\partial z} \right)_{z=0} = \rho \nu a Re_r^{\frac{1}{2}} F''(0), \quad \tau_\theta = \mu \left( \frac{\partial U_\theta}{\partial z} \right)_{z=0} = \rho \nu Re_\Omega^{\frac{1}{2}} G'(0) \tag{20}$$

Avec  $\mu$  représente la viscosité dynamique.

## Résolution numérique

### II.8 Méthode d'Euler [18]:

La méthode d'Euler est une procédure numérique du premier ordre pour résoudre des équations différentielles ordinaires (ODE) avec une valeur initiale donnée.

La méthode d'Euler est utile car les équations différentielles apparaissent fréquemment en physique, en chimie et en économie, mais nous ne pouvons pas généralement résoudre ce dernier explicitement, par contre nous pouvons toujours trouver des coordonnées approximatives de leurs solutions.

Elle s'écrit de la façon suivante :

$$f' = F(x, f) \quad (21)$$

Le passage au domaine discret se fait par un développement en série de Taylor de la solution  $f(x_{i+1})$  au voisinage de  $x = x_i$ , généralement on arrête le développement à un ordre qui dépend de la précision voulue. Si on fait un développement d'ordre deux, on écrit

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + (x_{i+1} - x_i) \frac{df(x_i)}{dx} + \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2} \frac{d^2f(x_i)}{dx^2} \quad (22)$$

On pose  $(x_{i+1} - x_i) = \Delta x$

$$\text{Donc } f_{i+1} = f_i + \Delta x \left( \frac{df}{dx} \right)_i + \varepsilon(\Delta x^2)$$

Avec  $\varepsilon(\Delta x^2)$  est appelée erreur de troncature, et elle est bornée, ce qui est équivalent à écrire  $f_{i+1} = f_i + \Delta x \left( \frac{df}{dx} \right)_i$

On obtient le schéma d'Euler

$$f_{i+1} = f_i + \Delta F(f_i, x_i) \quad (23)$$

## II.9 Méthodes de Runge-Kutta [18]:

Les techniques de Runge-Kutta sont des schémas numériques à un pas qui permettent de résoudre les équations différentielles ordinaires. Elles font parties des méthodes les plus populaires de part leur facilité de mise en œuvre et leur précision. C'est Carle Runge et Martin Kutta qui, au début du XX<sup>e</sup> siècle, ont inventé ces méthodes.

Les méthodes de Runge-Kutta (RK) sont très utilisées en pratique et correspondent à la généralisation de la méthode d'Euler. Elles permettent d'obtenir la précision d'une approche de série de Taylor sans nécessiter le calcul de dérivées plus élevées. De nombreuses variantes existent, mais toutes peuvent être exprimées sous la forme généralisée d'équation.

$$y_{i+1} = y_1 + h\Phi(x_i, y_i, h) \quad (24)$$

Où  $\Phi(x_n, y_n, h)$  est appelée une fonction d'incrément, qui peut être interprétée comme une pente représentative sur l'intervalle. La fonction d'incrément peut être écrite sous forme générale comme :  $\Phi = a_1k_1 + a_2k_2 + a_3k_3 + \dots + a_nk_n$

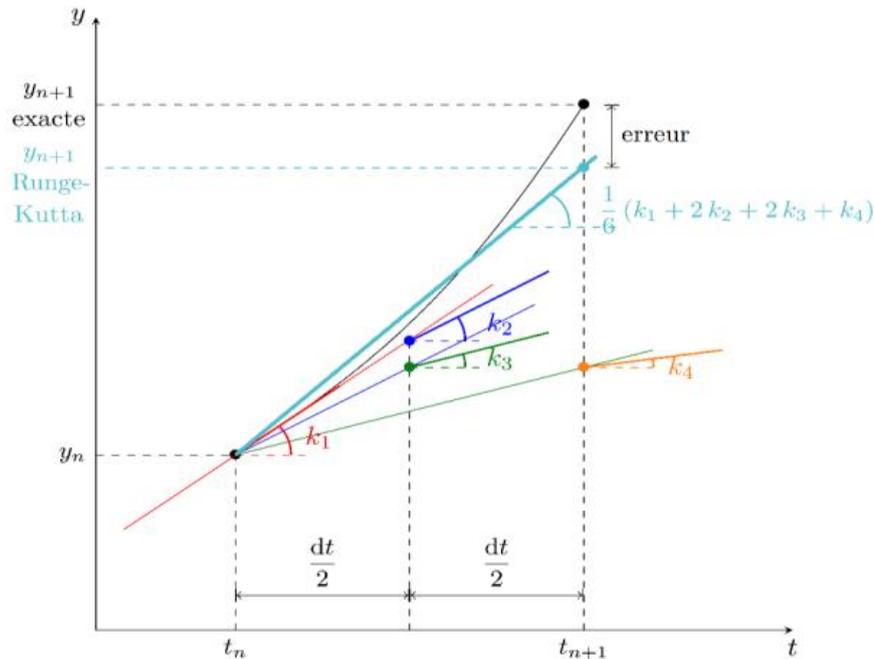
### II.9.1 Méthodes de Runge-Kutta d'ordre 4 [19]:

Les méthodes (R-K) les plus populaires sont du quatrième ordre. Dans la méthode classique Runge-Kutta d'ordre quatre, les dérivées sont évaluées en quatre points, une fois à chaque fin et deux fois au milieu de l'intervalle.

$$\left. \begin{array}{l} y(t=0) = y_0 \\ k_1 = f(t_0, y_0)dt \\ k_2 = f\left(t_0 + \frac{dt}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}\right)dt \\ k_3 = f\left(t_0 + \frac{dt}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}\right)dt \\ k_4 = f(t_0 + dt, y_0 + k_3)dt \\ y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ \dots \end{array} \right\} \quad (25)$$

Il y a donc quatre coefficients à calculer (méthode d'ordre 4, il existe également la méthode (RK2) qui correspondent à l'évaluation de 4 pentes à des instants différents entre  $t$  et  $t + dt$  (une évaluation en  $t$ , deux évaluations en  $t + dt/2$ , une évaluation en  $t + dt$  .

Voici un graphique qui montre le lien entre les différents coefficients  $k$  :



**Figure 12** Méthode Runge-Kutta d'ordre 4[19].

On calcule le coefficient  $k_1$  (qui correspond à l'unique coefficient de la méthode d'Euler), celui nous permet de trouver l'ordonnée du point où l'on évalue  $k_2$  (tracé), son abscisse étant égale à  $t_n + dt/2$ . Le coefficient  $k_2$  permet de trouver l'ordonnée du point où l'on évalue  $k_3$  (tracé), l'abscisse restant inchangée. On évalue une dernière fois la pente, coefficient  $k_4$ , en un point d'abscisse  $t_{n+1}$  et dont l'ordonnée est donnée par le coefficient  $k_3$  (tracé).

La pente retenue pour l'évaluation de  $y_{n+1}$  est une pondération des pentes évaluées précédemment (tracé).

## II.10 Algorithme de résolution :

EDO d'ordre supérieur la résolution d'équations différentielles ordinaires de degré  $n > 1$  est basée sur le même principe. Une telle équation peut s'écrire :

$$y^{(n)} = f(y^{(n-1)}, \dots, y'', y', x) \quad (26)$$

Pour la résoudre, on construit un vecteur qui contient toutes les dérivées de  $y$  d'ordre supérieurs :

$0 \leq m \leq n - 1$ . Le vecteur dérivé contient alors toutes les dérivées de  $f$  d'ordre  $1 \leq m \leq n$

$$\vec{Y} = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} \quad \vec{Y}' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ y^{(3)} \\ \vdots \\ y^{(n)} \end{pmatrix}$$

L'équation d'ordre n peut alors s'écrire sous la forme suivante :

$$\vec{Y}' = \vec{F}(\vec{Y}) \quad \text{Avec}$$

$$\vec{F}(\vec{Y}) = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ y^{(3)} \\ \vdots \\ f(y^{(n-1)}, \dots, y'', y', x) \end{pmatrix} \quad (27)$$

## II.11 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté le problème traité (étude d'un écoulement de stagnation centré sur un disque chauffé en rotation) sous forme des équations mathématiques, ainsi que les conditions aux limites sont posées et les équations gouvernantes du problème sont mises sous formes adimensionnelles, tel que la résolution de problème analytiquement avec l'utilisation de la méthode de Runge Kutta d'ordre quatre.

Pour la résolution des équations lié à notre problématique (sujet d'étude), ainsi que l'algorithme de résolution sous MATLAB, nous entamerons les résultats dans le chapitre suivant.

# **Chapitre III**

## **Résultats et discussion**

## Résultats et discussion

### III.1 Introduction :

Les résultats présentés dans ce chapitre sont obtenus pour un écoulement de stagnation centré sur un disque chauffé en rotation, les résultats numériques présentés dans ce chapitre sont obtenus en utilisant logiciel MATLAB et la méthode numérique (méthode de Runge- Kutta d'ordre 4)

### III.2 : Résultats :

	$\Omega = 0$	$\Omega = 3$	$\Omega = 6$	$\Omega = 9$
$F''$	1,3126	3,3658	8,0056	14,1878

**Tableau 1 :** Résultats obtenus pour  $F''$  pour diverses valeurs de  $\Omega$ .

	$\Omega = 0$	$\Omega = 3$	$\Omega = 6$	$\Omega = 9$
$G'$	-1,0745	-1,3048	-1,6400	-1,9400

**Tableau 2:** Résultats obtenus pour  $G'$  pour diverses valeurs de  $\Omega$ .

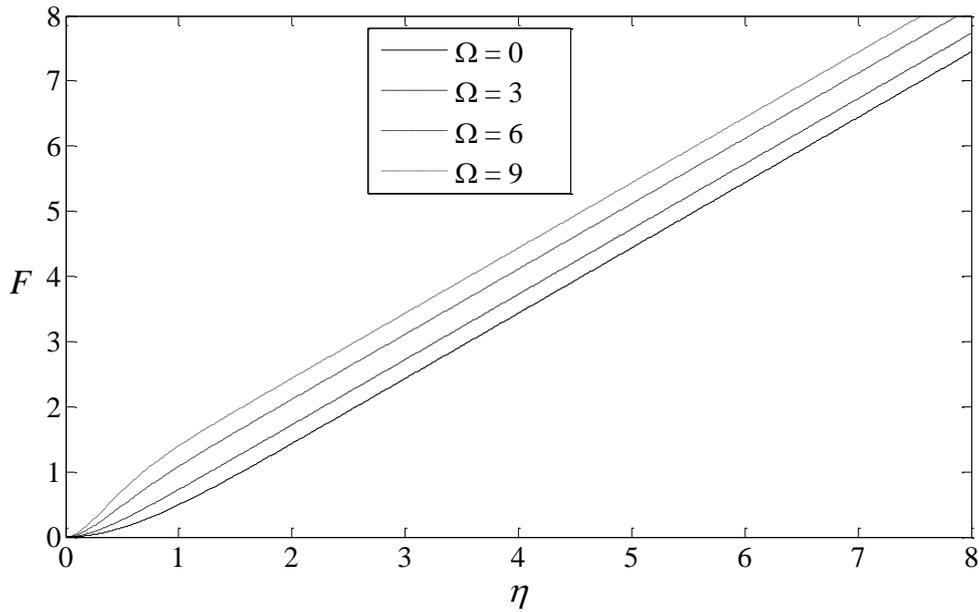
	$Pr$	$\Omega = 0$	$\Omega = 3$	$\Omega = 6$	$\Omega = 9$
$-\theta'$	7	1,5450	1,9470	2,5140	3,0132

**Tableau 3:** Résultats obtenus pour  $-\theta'$  pour diverses valeurs de  $\Omega$  et pour  $Pr = 7$ .

	$\Omega$	$Pr = 1$	$Pr = 3$	$Pr = 6$	$Pr = 9$
$-\theta'$	0	1,3126	3,3658	8,0056	14,1878

**Tableau 4 :** Résultats obtenus pour  $-\theta'$  pour diverses valeurs de  $Pr$  et pour  $\Omega = 0$ .

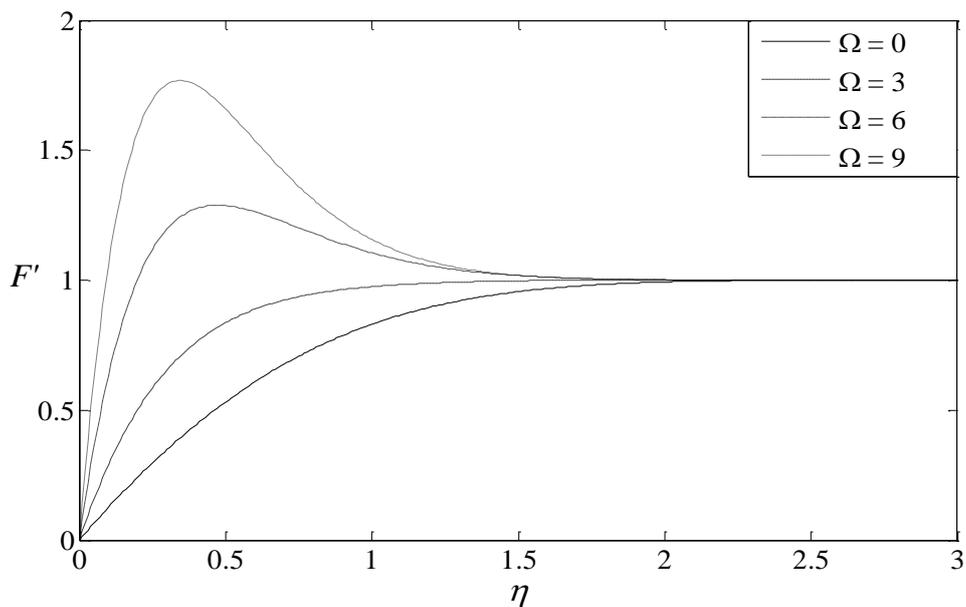
### L'effet de rotation de disque $\Omega$ sur le profile vitesse $F$ :



**Figure 13:** l'effet de paramètre de rotation  $\Omega$  sur la vitesse  $F(\eta)$

La figure (7) montre La variation de profile de vitesse  $F$  en fonction de  $(\eta)$  pour diverses valeurs paramètre de vitesse de rotation  $\Omega$  [0, 3, 6, 9], on observe que les forces passé par 0 et augmente progressive en fonction des coordonnées de la couche limite dynamique. Ce qui montre que les forces de poussée sont nulles à la paroi et augmentent progressivement à force que le disque tourne.

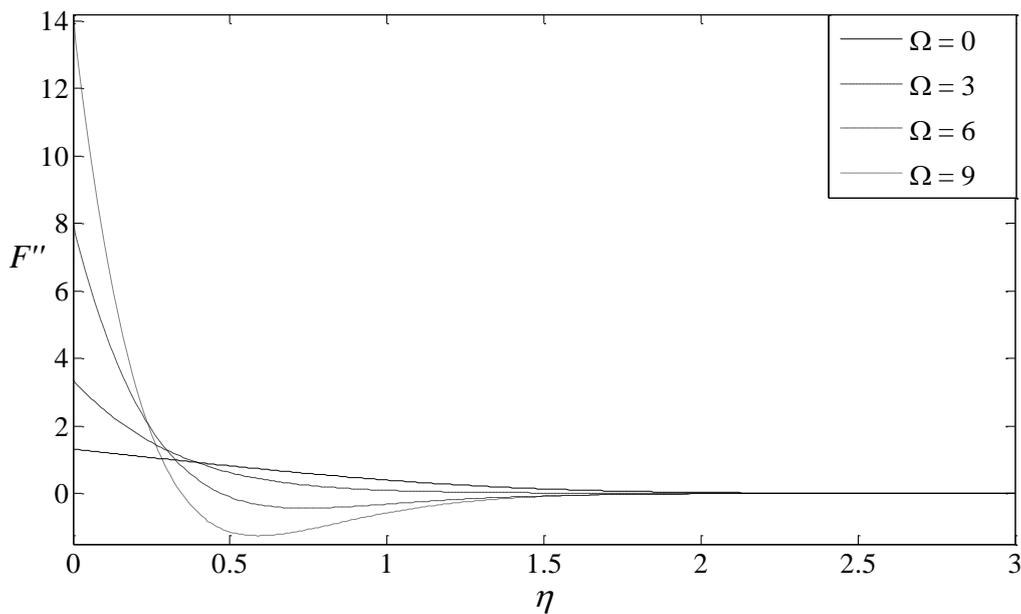
### L'effet de rotation de disque $\Omega$ sur le profile vitesse $F'$ :



**Figure 14:** l'effet de paramètre de rotation  $\Omega$  sur la vitesse  $F'(\eta)$

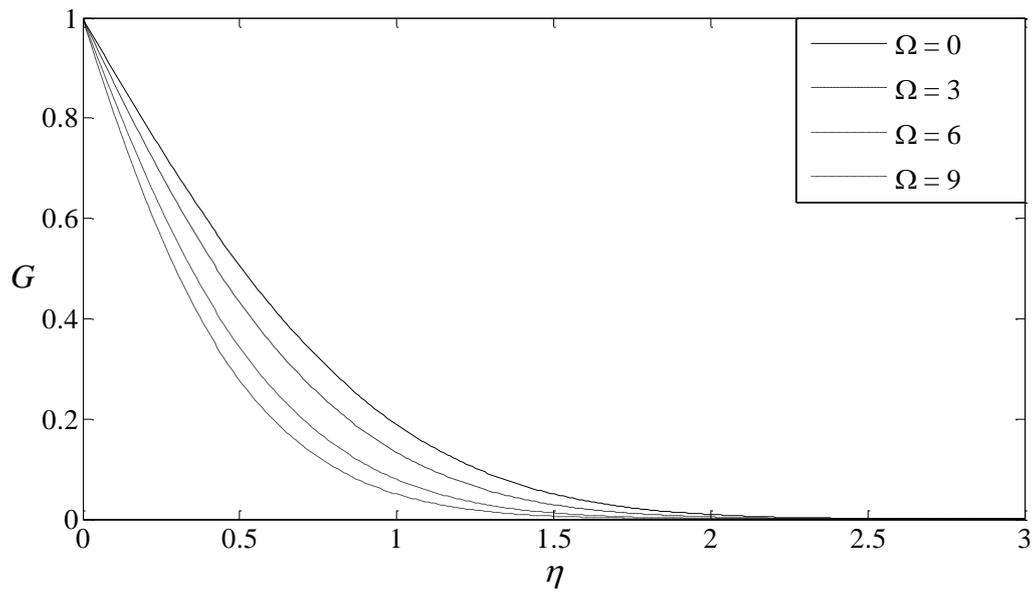
La figure (8) montre la variation de profile de vitesse  $F'$  en fonction de  $(\eta)$  pour diverses valeurs paramètre de vitesse de rotation  $\Omega$  [0, 3, 6, 9], on remarque que l'augmentation de paramètre de rotation  $\Omega$  conduit à l'augmentation de l'épaisseur de la couche limite dynamique augmente de façon monotone jusqu'à la vitesse finie, lorsque  $\Omega$  est supérieur à 3, il y a un dépassement de cette vitesse. Ce dépassement, qui est progressivement plus grand pour un  $\Omega$  plus grand, est due aux forces centrifuges du disque en rotation.

### L'effet de rotation de disque $\Omega$ sur le profile vitesse $F''$ :



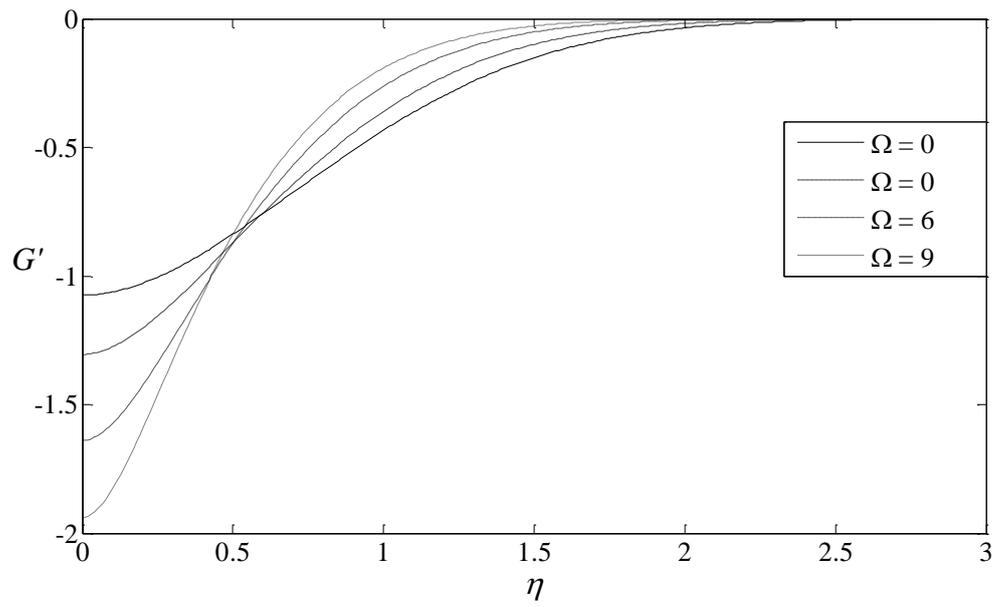
**Figure 15:** l'effet de paramètre de rotation  $\Omega$  sur la vitesse  $F''(\eta)$

On peut voir sur la Figure (9) présente la variation de profile de vitesse  $F'$  en fonction de  $(\eta)$  pour diverses valeurs paramètre de vitesse de rotation  $\Omega$  [0, 3, 6, 9], on observe l'augmentation du paramètre de rotation  $\Omega$  provoque la réduction de l'épaisseur de la couche limite et atteint son maximum près du disque à  $\eta = 0.5$  après elle montre une diminution progressive et converge vers 0 à l'infini.

**L'effet de rotation de disque  $\Omega$  sur le profil vitesse  $G$  :****Figure 16:** l'effet de paramètre de rotation  $\Omega$  sur la vitesse  $G(\eta)$ 

La figure (10) présente la vitesse azimutale  $G$  en fonction de  $(\eta)$ , pour diverses valeurs de nombre du paramètre de vitesse de rotation  $\Omega$  (0 ,3,6 ,9), on observe le profil de vitesse azimutale induit par les forces centrifuges diminue avec l'augmentation de la vitesse de rotation ce qui prouve que le fluide s'échappe de la surface de mouvement du fluide vers l'extérieur à travers la surface du disque.

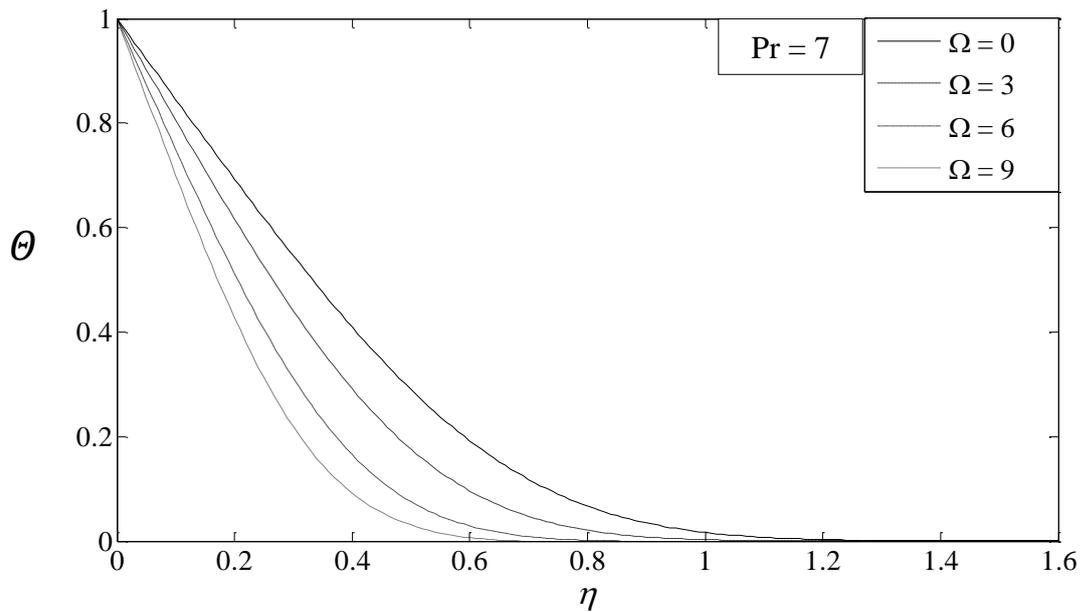
**L'effet de rotation de disque  $\Omega$  sur le profil vitesse  $G'$  :**



**Figure 17:** l'effet de paramètre de rotation  $\Omega$  sur la vitesse  $G'(\eta)$

La figure (11) présente la vitesse azimutale  $G'$  en fonction de  $(\eta)$ , pour diverses valeurs de nombre du paramètre de vitesse de rotation  $\Omega$  (0 ,3,6 ,9), on observe le profil de vitesse azimutale induit par les forces centrifuges augmente avec l'augmentation de  $(\eta)$ , et on observe aussi que l'épaisseur de la couche limite diminue avec l'augmentation de nombre du paramètre de vitesse de rotation  $\Omega$ .

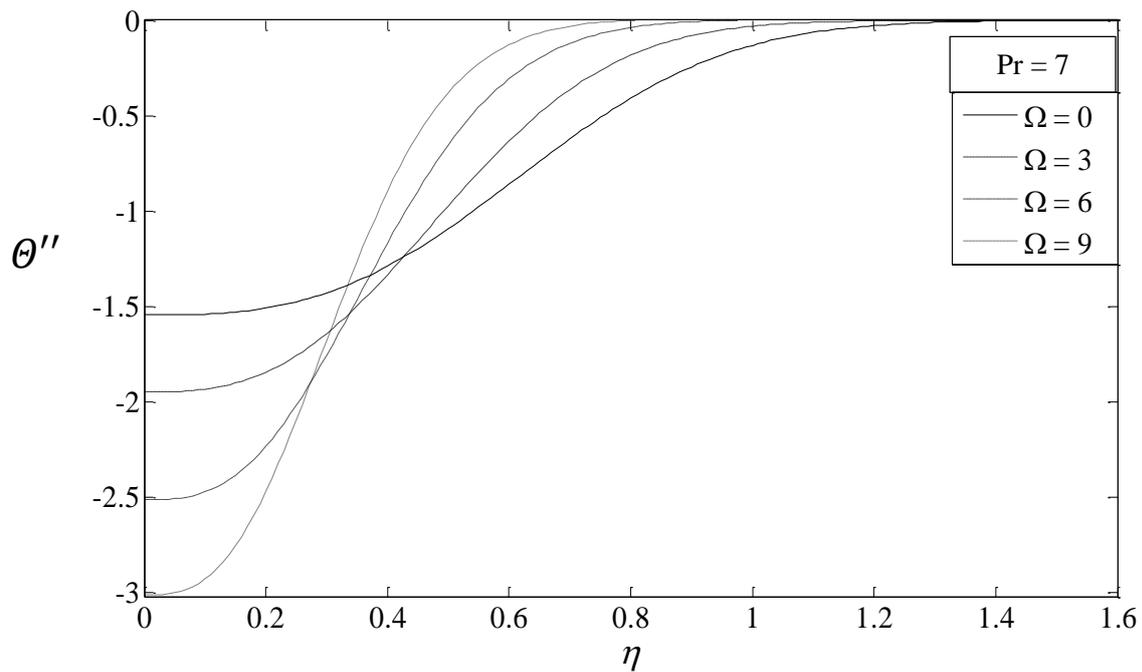
**L'effet de rotation de disque  $\Omega$  sur le gradient de température  $\theta$  avec  $Pr=7$  :**



**Figure 18:** Effet de la vitesse de rotation  $\Omega$  sur le gradient de température  $\theta(\eta)$

La Figure (12) montre la variation  $\theta'$  en fonction de  $(\eta)$  pour différentes valeurs du paramètre de vitesse de rotation  $\Omega$  (0 ,3,6 ,9) pour un nombre de Prandtl  $Pr=7$ , On observe sur cette figure que le gradient de température en un point diminue avec l'augmentation de  $\Omega$ , jusqu'à atteindre la valeur 0.

L'effet de rotation de disque  $\Omega$  sur le gradient de température  $\theta''$  avec  $Pr=7$  :

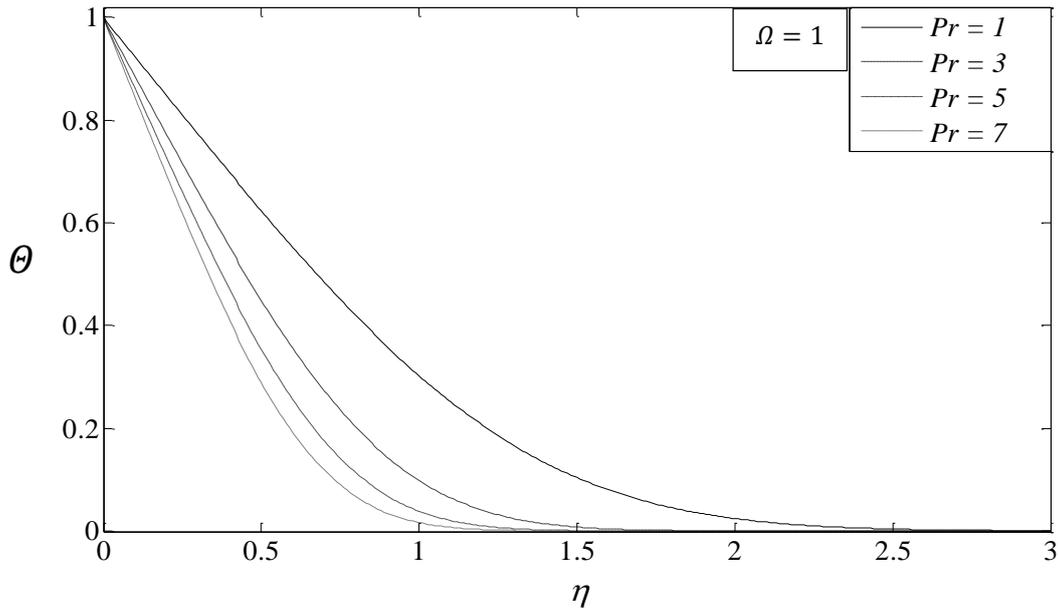


**Figure 19:** Effet de la vitesse de rotation  $\Omega$  sur le gradient de température  $\theta''(\eta)$

La figure (13) présente l'évolution de gradient de température en fonction de ( $\eta$ ) pour diverses valeurs de paramètre de rotation  $\Omega$  (0, 3, 6, 9), on observe que le gradient de température augmente avec l'augmentation de ( $\eta$ ) et on observe aussi que l'épaisseur de la couche limite diminue avec l'augmentation de vitesse de rotation  $\Omega$ .

### III.2.1 Caractéristiques thermiques :

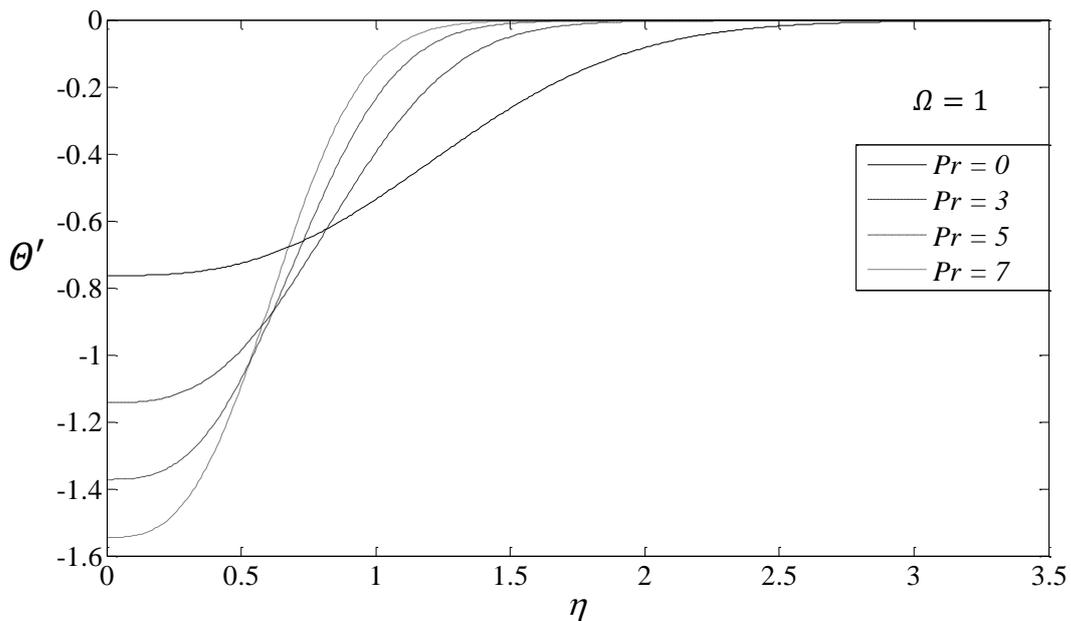
**L'effet de nombre de Prandtl  $Pr$  sur le gradient de température  $\theta$  avec  $\Omega = 1$  :**



**Figure 20:** Effet du nombre de Prandtl ( $Pr$ ) sur le gradient de température  $\theta(\eta)$ .

La figure (14) présente la variation du profil de température ( $\theta'$ ) en fonction de ( $\eta$ ), pour diverses valeurs nombre de Prandtl  $Pr$  (1, 3, 5,7), avec paramètre de vitesse de rotation ( $\Omega = 0$ ), on remarque que la température adimensionnelle ( $\theta'$ ) diminue avec l'augmentation de ( $\eta$ ), et que l'épaisseur de couche limite thermique se rétrécît avec l'augmentation de nombre de Prandtl.

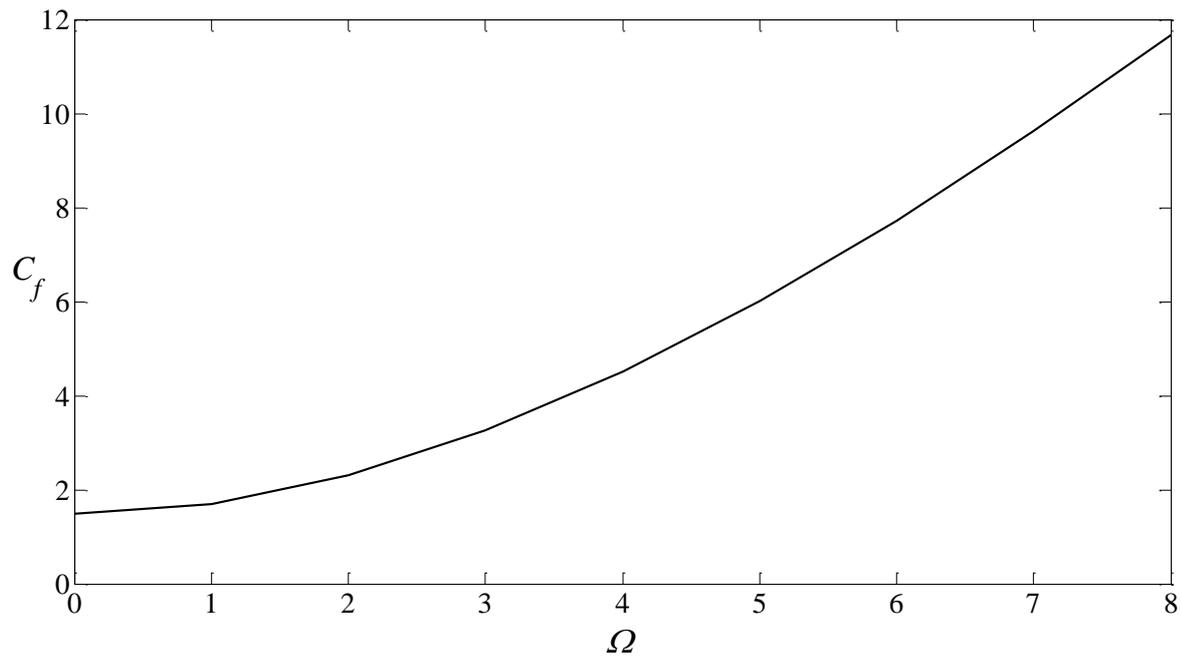
**L'effet de nombre de Prandtl  $Pr$  sur le gradient de température  $\theta''$  avec  $\Omega = 1$  :**



**Figure 21:** Effet du nombre de Prandtl ( $Pr$ ) sur le gradient de température  $\theta''(\eta)$ .

L'évolution de gradient de température en fonction de  $(\eta)$ , pour diverses valeurs de nombre de Prandtl  $Pr$  (1, 3, 5, 7) avec un paramètre de vitesse de rotation ( $\Omega = 0$ ), est présentée sur la figure (15), on observe que le gradient de température augmente avec l'augmentation de  $(\eta)$  et on observe aussi que l'épaisseur de la couche limite diminue avec l'augmentation de nombre de Prandtl.

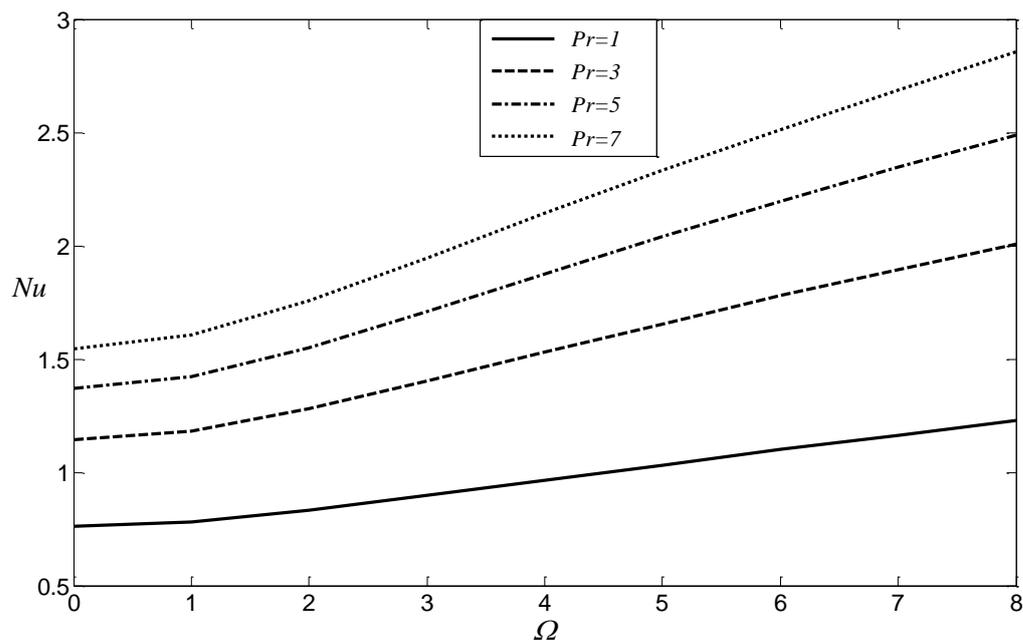
L'effet de paramètre de rotation  $\Omega$  sur le coefficient de frottement  $C_f = F''(0)$  :



**Figure 22:** Le coefficient de frottement ( $C_f$ ) pour différentes valeurs de  $\Omega$ .

La figure (16) montrée la variation de coefficient de frottement  $C_f$  en fonction de vitesse de rotation ( $\Omega$ ), Le coefficient de frottement augmente au fur et à mesure que la vitesse de rotation  $\Omega$  augment.

**Le nombre de Nusselt pour différent variable de Pr et  $\Omega$  :**



**Figure 23:** Le nombre de Nusselt (Nu) pour différentes valeurs de  $\Omega$ .

La figure (17) présente la variation du nombre de Nusselt ( $Nu$ ) en fonction de la vitesse de rotation ( $\Omega$ ), pour diverses valeurs du nombre de Prandtl ( $Pr$ ), on remarque que le nombre de Nusselt local augmente avec l'augmentation de  $\Omega$  et de  $Pr$ .

### III.3 Conclusion :

Dans ce chapitre, on a présenté les comportements d'une couche limite dynamique et thermique pour un écoulement de stagnation centré sur d'un disque chauffé en rotation.

Les profils des vitesses et des températures sont tracés en fonction de ( $\eta$ ) pour voir les effets de nombre de Prandtl ( $Pr$ ) et le paramètre de vitesse de rotation de disque ( $\Omega$ ), sur la structure de la couche limite, ainsi pour présenter l'évolution de nombre de Nusselt ( $Nu$ ) et de coefficient de frottement ( $C_f$ ) en fonction du paramètre de vitesse de rotation de disque ( $\Omega$ ), les résultats obtenus à propos de cette étude sont analysés et discutés. Il est vérifié que l'épaisseur d'une couche limite varie avec la variation des paramètres ( $Pr$ ) et ( $\Omega$ ) et le taux de transfert de chaleur augmente avec l'augmentation de Nusselt ( $Nu$ ).

# **Conclusion générale**

## Conclusion générale

L'objectif principal de ce travail est l'analyse du comportement de la couche limite sous l'influence de plusieurs paramètres sur un disque chauffé en rotation. L'étude fait partie d'un axe de recherche très important.

On a étudié l'écoulement de couche limite qui se développe autour d'un disque chauffé en rotation, on le retrouve dans différents procédés industriels comme l'électrochimie, les équipements médicaux, les technologies de transformation des aliments, etc.

Dans la première partie, les équations de conservation de la quantité de mouvement et conservation de l'énergie ont été posées, ensuite les équations sont réduites à un système d'équations différentielles ordinaires, qui se présente sous forme d'un problème aux valeurs limites. Ces équations sont résolues numériquement en utilisant la méthode de Runge-Kutta d'ordre quatre,

Pour notre étude nous avons varié une gamme de paramètres, le nombre de Prandtl ( $Pr$ ), et le paramètre de la vitesse de rotation ( $\Omega$ ), pour étudier leurs effets sur les champs dynamiques et le coefficient de frottement ( $C_f$ ) et champs thermiques et le nombre de Nusselt ( $Nu$ ).

En premier lieu, nous avons examiné l'influence de paramètre de vitesse ( $\Omega$ ) sur les caractéristiques dynamiques et thermiques, pour une gamme de valeurs  $\Omega(0,3,6,9)$ , et fixé le nombre de Prandtl ( $Pr = 7$ ), avec un paramètre de source de chaleur constante  $B = 10$ , nous avons constaté que :

- L'épaisseur de la couche limite dynamique est proportionnelle aux paramètres de vitesse de rotation  $\Omega$ , dans le profil de vitesse ( $F, F'$ ) présenté en fonction de ( $\eta$ ).
- L'épaisseur de la couche limite dynamique diminue avec l'augmentation de vitesse de rotation, dans le profil de vitesse azimutale présenté en fonction de ( $\eta$ ).

- Les gradient de température diminue avec l'augmentation de ( $\eta$ ) et on observe aussi que l'épaisseur de la couche limite thermique diminue avec l'augmentation de vitesse de rotation  $\Omega$ .

Deuxième lieu, nous avons examiné influence de la variation du nombre de Prandtl sur les caractéristiques thermiques, pour une gamme de valeurs Pr (1,3 ,5,7), nous avons constaté que l'épaisseur de la couche limite thermique diminue avec l'augmentation de vitesse de rotation  $\Omega$ .

L'évolution de nombre de Nusselt (Nu) et le coefficient de frottement ( $C_f$ ) avec divers paramètres (Pr) en fonction du paramètre de vitesse de rotation ( $\Omega$ ), il montre que :

- Le nombre de Nusselt augmente avec l'augmentation de paramètre de la vitesse de rotation ( $\Omega$ ) et de Pr.
- Le coefficient de frottement augmente avec l'augmentation de vitesse de rotation  $\Omega$  .

# **Références bibliographiques**

## Références bibliographiques

- [1] K. Hiemenz, Die grenzschicht an einem in den gleichformigen flussigkeitsstrom eingetauchten geraden kreiszylinder, *Dinglers J.* 326 (1911)321–324.
- [2] Photos van dyke, An Album of fluid motion, Parabolic 1982, Ecoulement de point d'arrêt.
- [3] Florent Ravelet, Bifurcations globales hydrodynamiques et magnétohydrodynamiques dans un écoulement de von Kármán turbulent, Thèse de doctorat, Groupe Instabilités et Turbulence Service de Physique de l'Etat condensé CEA Saclay, 2005.
- [4] K. Stewartson, On the free convection from a horizontal plate, *Z. Angew. Math. Phys. (ZAMP)* 9a (1958) 276–282.
- [5] W.N. Gill, D.W. Zeh, E.D. Casal, Free convection on a horizontal plate, *Z. Angew. Math. Phys. (ZAMP)* 16 (1965) 539–541.
- [6] Fabien Candelier, Philippe Bournot, Philippe Caminat, Zakaria Ghrab. Etude expérimentale d'un jet laminaire impactant une plaque plane chauffée. *JITH 2007*, Aug 2007, Albi, France. 5 p. hal00156724.
- [7] K.Millsaps, K. Pohlhausen, 1952, Heat transfer by laminar flow from a rotating disk, *J. Aeronaut.Sci.*, 19, pp. 120–126.
- [8] Chunying Ming, Liancun Zheng, Xinxin Zhang, Mars 2011, Flux constant et transfert de chaleur du fluide de loi de puissance sur un disque en rotation, *communications internationales en transfert de chaleur et de masse*, Volume 38, Numéro 3, Pages 280-284.
- [9] Huda Mohammed Alotaibi, Mouhammad El Hassan, Hassan Hasan Assoum, Kamel Abed Meraim, Anas Sakout, September 2020, A review paper on heat transfer and flow dynamics in subsonic circular jets impinging on rotating disk, 2020 7th International Conference on Power and Energy Systems Engineering (CPESE 2020), 26–29, Fukuoka, Japan, *Energy Reports* 6 (2020) 834–842.

- [10] C.Y. Wang, Stagnation flow towards shrinking sheet, *Int. J. Non linear Mech.* 43 (2008) 377-382.
- [11] Usman, Waqar Khan, Irfan Anjum Badruddin, Abuzar Ghaffari, Hafiz Muhammad Ali, (2021), Heat transfer in steady slip flow of tangent hyperbolic fluid over the lubricated surface of a stretchable rotatory disk. *Case Studies in Thermal Engineering* 24, 100825.
- [12] Sparrow, Ephraim M. and J. L. Gregg. "Mass Transfer, Flow, and Heat Transfer About a Rotating Disk." *Journal of Heat Transfer-transactions of The Asme* 82 (1960): 294-302.
- [13] Childs, P. R. N. 2011, *Rotating Flow* (Elsevier, Amsterdam).
- [14] H. Schlichting, 1979, *Boundary-layer theory*, McGraw-Hill Book Company
- [15] M. Mustafa, 2017, Écoulement de nano fluide MHDP sur un disque en rotation avec effets de glissement partiel : modèle de Buongiorno, *journal international du transfert de chaleur et de masse*, Pages 1910-1916.
- [16] Derdouri Amina, Mars 2014, Etude par la programmation d'un jet rond turbulent impactant une plaque plane circulaire, Université Constantine 1
- [17] Gradeck Miche.29 juin 2005. PR 2.3 Refroidissement diphasique, Rapport d'activité, Laboratoire d'Energétique et de Mécanique Théorique et Appliquée 2 avenue de la forêt de Haye BP 160 54504 Vandoeuvre Cedex, France.
- [18] J-P. Demailly Analyse numérique et équations différentielles Paris, EDP sciences, 2006.
- [19] Benamara.r, Maouche.r, Etude d'un écoulement induit par la rotation d'un disque chauffé, octobre 2021, Université Abderrahmane MIRA Bejaia.

## **Résumé**

### **Etude d'un écoulement de stagnation centré sur un disque chauffé en rotation**

Le travail réalisé dans ce mémoire a pour objectif de comprendre l'écoulement de stagnation sur le centre d'un disque chauffé en rotation. Pour cela nous avons présenté des différentes formules mathématiques, ainsi que les hypothèses simplificatrices, (Navier-Stokes et d'énergie). Puis nous avons passé à la résolution numérique de ces équations à l'aide de la méthode Runge-Kutta d'ordre quatre, qui permet de résoudre le système d'équations différentielles ordinaires et modélisant le problème physique étudié, prenant en considération l'influence des différents paramètres à savoir le nombre de Prandtl, et le paramètre de la vitesse de rotation,

**Mots clés : Disque tournant, Couche limite, écoulement de stagnation**

---

## **Abstract**

### **Study of a stagnation flow centered on a rotating heated disk**

The work carried out in this thesis aims to understand the stagnation flow on the center of a heated disk in rotation. For this we have presented the different mathematical formulas, as well as the simplifying assumptions, (Navier-Stokes and energy). Then we moved to the numerical resolution of these equations using the Runge-Kutta method of order four, which allow to solve the system of ordinary differential equations and modeling the physical problem studied, taking into account the influence of the various parameters namely the Prandtl number, and the parameter of the rotation speed.

**Key words: Rotating disc, Boundary layer, Stagnation flow**