

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**

**MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR**

**ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**UNIVERSITE ABDERRAHMANE MIRA BEJAIA**

**FACULTE DE TECHNOLOGIE**

**DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE**

**MEMOIRE**

Présenté pour l'obtention du diplôme de

**MASTER**

Filière : Génie Mécanique

Spécialité : Construction Mécanique

Par :

**Nom prénom**

**REDJAI Mohyiddine**

**OUCHIHA Madani**

**Thème**

---

**Sur la torsion des cylindres hyper-élastiques : Loi de  
comportement et variable torsion**

---

Soutenu le 29 septembre 2022 devant le jury composé de:

Pr H. BECHIR

Président

Dr S. BOUZIDI

Encadrant

Dr. M. METHIA

Examineur

**Année Universitaire 2021-2022**

---

## Remerciements

*Dieu merci*

*Nos remerciements à Mme BOUZIDI, de nous avoir proposé ce sujet et pour son soutien et sa disponibilité.*

*Nous tenons à remercier les membres de jury pour nous avoir fait l'honneur d'évaluer notre travail.*

*Nous remercions vivement Mr SAHALI et Mr BRAHIMI pour leurs soutiens et leurs aides lors de la rédaction de ce mémoire.*

*A travers ce mémoire, Nous Adressons notre reconnaissance à tous les enseignants qui ont contribué à notre formation.*

*Nous adressons un grand merci à nos parents qui nous ont soutenus en toutes circonstances.*

*En fin, Nous tenons à remercions toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail.*

# **Sommaire**

# Sommaire

Introduction.....	2
I.1 Généralités sur les élastomères [1] .....	2
I.2 Production du caoutchouc naturel [2] .....	3
I.3 Classifications des élastomères [3] .....	4
I.3.1 Les élastomères à usage général .....	4
I.3.2 Les élastomères a usage spéciaux .....	5
I.3.3 caoutchoucs à usage très spéciaux .....	5
I.4 Les propriétés des élastomères.....	5
I.4.1 Propriété mécanique.....	5
I.4.1.1 Elasticité non linéaire [4] .....	5
I.4.1.1.2 Incompressibilité [5] .....	6
I.4.1.1.3 Viscoélasticité [6] .....	6
I.4.1.1.4 Vieillissement [7].....	7
I.4.2 Propriétéschimiques [7] .....	7
I.4.3 Propriétésphysiques [7].....	8
I.5 Conclusion .....	8
Introduction .....	9
II.1 Rappels de la mécanique des milieux continus en grandes déformations .....	9
II.1.1 Cinématique [8] .....	9
II.1.3 Description des déformations [9].....	10
Description lagrangienne.....	11
II.1.4 Description des contraintes [10] .....	11
II.2 Equationsd'équilibre[11].....	13
II.2.1 Configurationactuelle .....	14
II.2.2 Configuration de référence : .....	14
II.3 Modélisation de Comportement hyper élastique [9] .....	14
<b>II.3.1</b> Loi de comportement hyper élastique [12] .....	15
II.3.2 Les modèles hyper-élastique.....	15
II.3.2.1 Modèle de Mooney-Rivlin (1940) [13] .....	15
II.3.2.2 Modèle de Mooney-Rivlin (1948) [13] .....	16

II-3-2.3	Modèle d'ogden (1972) [12]	16
II.3.2.4	Modèle néo-Hookéen (1943)[12]	16
II.3.2.5	Modèle du tube étendu (1999) [12]	17
<i>II.3.2.6</i>	Modèle de Gent (1996) [12]	17
II.3.2.7	Modèle de Yeoh (1990) [12]	17
II.4	Conclusion	17
	Introduction	18
III.1	Etude analytique	18
III.1.1	Formulation du problème	18
III.1.2	Loi de comportement d'un milieu incompressible	19
III.1.3	Contrainte équivalente de Von-Mises	23
III.1.4	Calcul de la force axiale et du moment résultant	24
III.2	Etude Numérique	24
III.2.1	Hypothèse de quasi-incompressibilité	24
III.2.2	Construction du modèle numérique	25
III.2.2.1	Choix du modèle de comportement	25
III.2.2.2	Présentation de la géométrie	25
<i>III.2.2.3</i>	Le maillage	26
III.2.2.4	Chargements et conditions aux limites	27
III.2.3	Résultats de la simulation numérique	28
III.2.4	Comparaison des contraintes analytique et numérique	52
III.2.5	Discussions des résultats	55
	Conclusion	56
	Conclusion générale	58

# **Listes des figures**

# LISTE DES FIGURES

<b>Figure I.1 Production</b> du caoutchouc naturel .....	3
<b>Figure I.2</b> : Récolte du latex.....	4
<b>Figure I.3</b> : Hévéa brasiliensis.....	4.
<b>Figure I.4:</b> Courbe de traction à rupture d'un élastomère.....	6
<b>Figure I. 5:</b> Fluage et relaxation d'un matériau soumis à une sollicitation au temps $t_0$ ...	7
<b>Figure I.6:</b> Les chaînes macromoléculaires sont liées entre elles par des liaisons covalentes et des ponts soufre.....	8
<b>Figure II.1</b> : configuration initiale et déformée.....	10
<b>FigureII.2:</b> Conditions aux limites dans les configurations référence et actuelle.....	13
<b>Figure III.1:</b> Représentation du cylindre circulaire plein de section constante .....	18
<b>Figure III. 2</b> : Modèle étudié .....	25
<b>Figure III.3:</b> Modèle maillé.....	26
<b>Figure III.4</b> : Chargements et conditions aux limites.....	26
<b>Figure III.5</b> : Distribution des contraintes de Von Mises pour $\alpha = 20^\circ$ .....	27
<b>Figure III.6</b> : Distribution des contraintes de cisaillement $\sigma_{\theta z}$ suivant la trajectoire pour $\alpha = 20^\circ$ .....	28
<b>Figure III.7</b> : Distribution des contraintes radiales $\sigma_{rr}$ suivant la trajectoire pour $\alpha = 20^\circ$ .....	28
<b>Figure III.8</b> : Distribution des contraintes tangentielles $\sigma_{\theta\theta}$ suivant la trajectoire pour $\alpha = 20^\circ$ .....	31
<b>Figure III.9:</b> Distribution des contraintes axiales $\sigma_{zz}$ suivant la trajectoire pour $\alpha = 20^\circ$ .....	31

<b>Figure III.10:</b> Distribution des contraintes Von Mises suivant la trajectoire $\mathcal{L}$ pour $\alpha=20^\circ$ et $\lambda=1.4$ .....	32
<b>Figure III.11:</b> Distribution des contraintes de cisaillement $\sigma_{\theta z}$ suivant la trajectoire $\mathcal{L}$ pour $\alpha=20^\circ$ et $\lambda=1.4$ .....	32
<b>Figure III.12:</b> Distribution des contraintes radiales $\sigma_{rr}$ suivant la trajectoire $\mathcal{L}$ pour $\alpha=20^\circ$ et $\lambda=1.4$ .....	33
<b>Figure III.13:</b> Distribution des contraintes tangentielles $\sigma_{\theta\theta}$ suivant la trajectoire $\mathcal{L}$ pour $\alpha=20^\circ$ et $\lambda=1.4$ .....	33
<b>Figure III.14:</b> Distribution des contraintes axiales $\sigma_{zz}$ suivant la trajectoire $\mathcal{L}$ pour $\alpha=20^\circ$ et $\lambda=1.4$ .....	34
<b>Figure III.15:</b> Distribution des contrainte de Von Mises suivant la trajectoire $\mathcal{L}$ pour $\alpha = 45^\circ$ .....	34
<b>Figure III.16:</b> Distribution des contraintes de cisaillement $\sigma_{\theta z}$ suivant la trajectoire $\mathcal{L}$ pour $\alpha = 45^\circ$ .....	35
<b>Figure III.17:</b> Distribution des contraintes radiales $\sigma_{rr}$ suivant la trajectoire $\mathcal{L}$ pour $\alpha = 45^\circ$ .....	35
<b>Figure III.18:</b> Distribution des contraintes tangentielles $\sigma_{\theta\theta}$ suivant trajectoire $\mathcal{L}$ pou $\alpha=45^\circ$ .....	36
<b>Figure III.19:</b> Distribution des contraintes axiales $\sigma_{zz}$ suivant la trajectoire $\mathcal{L}$ pour $\alpha = 45^\circ$ .....	36
<b>Figure III.20:</b> Distribution des contraintes Von Mises pour $\alpha=45^\circ$ et $\lambda=1$ .....	37
<b>Figure III.21:</b> Distribution des contraintes de cisaillement $\sigma_{\theta z}$ suivant la trajectoire $\mathcal{L}$ pour $\alpha=45^\circ$ et $\lambda=1.4$ .....	37
<b>Figure III.22:</b> Distribution des contraintes radiales $\sigma_{rr}$ suivant la trajectoire $\mathcal{L}$ pour $\alpha=45^\circ$ et $\lambda=1.4$ .....	38
<b>Figure III.23:</b> Distribution des contraintes tangentielles $\sigma_{\theta\theta}$ suivant la trajectoire $\mathcal{L}$ pour $\alpha=45^\circ$ et $\lambda=1.4$ .....	38
<b>Figure III.24:</b> Distribution des contraintes axiales $\sigma_{zz}$ suivant la trajectoire $\mathcal{L}$ pour $\alpha=45^\circ$ et $\lambda=1.4$ .....	39
<b>Figure III.25:</b> Distribution des contraintes de Von Mises suivant la trajectoire $\mathcal{L}$ pour $\alpha=75^\circ$ .....	39
<b>Figure III.26:</b> Distribution des contraintes de cisaillement $\sigma_{\theta z}$ suivant la trajectoire $\mathcal{L}$ pour $\alpha=75^\circ$ .....	40
<b>Figure III.27:</b> Distribution des contraintes radiales $\sigma_{rr}$ suivant la trajectoire	

$\mathcal{L}$ pour $\alpha=75^\circ$ .....	40
<b>Figure III.28</b> : Distribution des contraintes tangentielles $\sigma_{\theta\theta}$ suivant la trajectoire $\mathcal{L}$ pour $\alpha=75^\circ$ .....	41
<b>Figure III.29</b> : Distribution des contraintes axiales $\sigma_{zz}$ suivant la trajectoire $\mathcal{L}$ pour $\alpha=75^\circ$ .....	41
<b>Figure III.30</b> : Distribution des contraintes de Von Mises suivant la trajectoire $\mathcal{L}$ pour $\alpha=75^\circ$ et $\lambda=1.4$ .....	42
<b>Figure III.31</b> : Distribution des contraintes de cisaillement $\sigma_{\theta z}$ suivant la trajectoire $\mathcal{L}$ pour $\alpha=75^\circ$ et $\lambda=1.4$ .....	42
<b>Figure III.32</b> : Distribution des contraintes radiales $\sigma_{rr}$ suivant la trajectoire $\mathcal{L}$ pour $\alpha=75^\circ$ et $\lambda = 1.4$ .....	43
<b>Figure III.33</b> : Distribution des contraintes tangentielles $\sigma_{\theta\theta}$ suivant la trajectoire $\mathcal{L}$ pour $\alpha=75^\circ$ et $\lambda = 1.4$ .....	43
<b>Figure III.34</b> : Distribution des contraintes axiales $\sigma_{zz}$ suivant la trajectoire $\mathcal{L}$ pour $\alpha=75^\circ$ et $\lambda = 1.4$ .....	44
<b>Figure III.35</b> : Evolution des contraintes en fonction du Rayon (R) $\alpha = 20^\circ$ et $\lambda=1$ .....	45
<b>Figure III.36</b> : Evolution des contraintes en fonction du Rayon (R) $\alpha = 45^\circ$ et $\lambda=1$ .....	45
<b>Figure III.37</b> : Evolution des contraintes en fonction du Rayon (R) pour $\alpha = 75^\circ$ et $\lambda = 1$ .....	46
<b>Figure III.38</b> : Evolution des contraintes en fonction du Rayon (R) pour $\alpha = 20^\circ$ et $\lambda = 1.4$ .....	46
<b>Figure III.39</b> : Evolution des contraintes en fonction du Rayon (R) pour $\alpha = 45^\circ$ et $\lambda=1.4$ .....	47
<b>Figure III.40</b> : Evolution des contraintes en fonction du Rayon (R) pour $\alpha = 75^\circ$ et $\lambda=1.4$ .....	47

# **Nomenclature**

# Nomenclature

$(\mathbf{C}_0)$	: Configuration initiale ;
$(\mathbf{C}_t)$	: Configuration actuelle ;
$(\Omega_0)$	: Volume occupé par le solide dans la configuration initiale ;
$(\Omega)$	: Volume occupé par le solide dans la configuration actuelle ;
$\vec{d\mathbf{X}}$	: Vecteur élémentaire dans la configuration initiale ;
$\vec{d\mathbf{x}}$	: Transformation de $d\mathbf{1}$ dans la Configuration actuelle ;
$\bar{\mathbf{F}}$	: Opérateur gradient de la transformation
$\bar{\mathbf{F}}^T$	: Transposé opérateur gradient de la transformation
$\bar{\mathbf{C}}$	: Tenseur des déformations Green-Lagrange droit ;
$\bar{\mathbf{E}}$	: Tenseur des déformations Green-Lagrange ;
$\bar{\mathbf{B}}$	: Tenseur des déformations Green-Lagrange gauche ;
$\bar{\mathbf{A}}$	: Tenseur des déformations d'Euler-Almansi ;
$\bar{\boldsymbol{\sigma}}$	: Tenseur des contraintes de Cauchy ;
$\bar{\boldsymbol{\pi}}$	: Premier Tenseur de Poila-Kirchhoff (P.K.1) ;
$\bar{\mathbf{S}}$	: Deuxième Tenseur de Poila-Kirchhoff (P.K.2) ;
$\bar{\mathbf{I}}$	: Tenseur d'identité ;
$\mathbf{W}$	: Potentiel élastique ;

$\mu_0$  : Module de cisaillement du matériau ;

D : Module d'incompressibilité de matériau ;

$I_1$  : Premier invariant du tenseur des déformations de Green-Lagrange gauche  $\mathbf{B}$  ;

$I_2$  : Premier invariant du tenseur des déformations de Green-Lagrange gauche  $\mathbf{B}$  ;

P : Pression hydrostatique ;

$\nu$  : Coefficient de Poisson ;

$\alpha$  : Angle de torsion ;

$\lambda$  : Extension ;

$\psi$  : Angle de torsion unitaire.

**INTRODUCTION**

**GENERALE**

## Introduction générale

Les progrès dans le domaine de la science des matériaux ont conduit à une utilisation de plus en plus importante des matériaux tels que les élastomères, communément appelés caoutchoucs. Ces derniers représentent souvent une alternative aux matériaux métalliques, en raison de leur faible masse, de coûts de production réduits, de facilité de mise en forme. Pour cela, ils sont très employés dans de nombreux secteurs industriels.

Notre travail consiste à calculer les distributions des contraintes dans un cylindre plein constitué d'un matériau hyper-élastique soumis à une sollicitation composée torsion - extension. Pour cela nous avons divisé ce travail en trois chapitres.

Le premier chapitre est consacré à des généralités sur les élastomères (définition, classification et propriétés des élastomères).

Le deuxième chapitre sera consacré à définir quelques lois de comportement hyper élastique en rappelant brièvement les notions de la MMC (mécanique des milieux continus) utiles dans le cadre de ce mémoire.

Dans le chapitre trois, nous aborderons notre problématique qui s'articule autour de trois points principaux :

Dans une première étape, nous allons résoudre l'équation d'équilibre dans le cadre du modèle simplifié de Mooney-Rivlin incompressible. Ainsi, les contraintes sont obtenues analytiquement.

Ensuite, ces contraintes sont calculées en utilisant la méthode des éléments finis pour un matériau de type Mooney-Rivlin quasi – incompressible.

Puis, nous allons procéder à la comparaison des résultats obtenus à partir des solutions analytique et numérique afin de valider le modèle numérique.

Enfin, nous terminons ce travail par une conclusion générale.

**Chapitre I**  
**Généralités sur les**  
**élastomères**

## **Introduction**

Les matériaux élastomères sont présents dans de nombreuses applications de la vie quotidienne et occupent une place de choix dans l'industrie comme par exemple l'automobile, l'aéronautique ou encore le génie civil.

Dans ce chapitre introductif on présentera des notions générales sur des élastomères et leurs propriétés chimiques, physiques et mécaniques

### **I.1 Généralités sur les élastomères [1]**

Les élastomères, font partie de la famille des polymères, qui sont constitués de longues chaînes de molécules (macromolécule) réparties dans toutes les directions de l'espace, linéaire. Ces chaînes sont reliées entre elles par des points de réticulation, des enchevêtrements, vu leur structure amorphe et pour des températures supérieures à leurs températures de vitreuse, il supporte de très grandes déformations, presque totalement réversibles, le terme élastomère désigne ainsi tous les caoutchoucs synthétiques, c'est-à-dire les substances macromoléculaires possédant l'élasticité dite caoutchoutique. En effet, l'étude des propriétés physiques des polymères en fonction de la température, indique l'existence de plusieurs états de la matière :

- **Etat de transition** : à ce stade, on est en présence de polymère linéaire Thermoplastique de type cellulosique, polyesters, polyvinyles, etc. Il s'agit comme son nom l'indique d'une phase de transition significative de l'état quasi-fragile à un état de grande déformabilité.
- **Etat vitreux** : cet état caractérise généralement les verres organiques qui présentent une très faible déformabilité.
- **Etat caoutchoutique** : les élastomères sont caractéristiques de cet état. Ils possèdent une grande déformabilité et un comportement visqueux.
- **Etat d'écoulement** : le polymère, bien qu'encore solide, se comporte comme un fluide non-newtonien quasi-incompressible fortement visqueux.

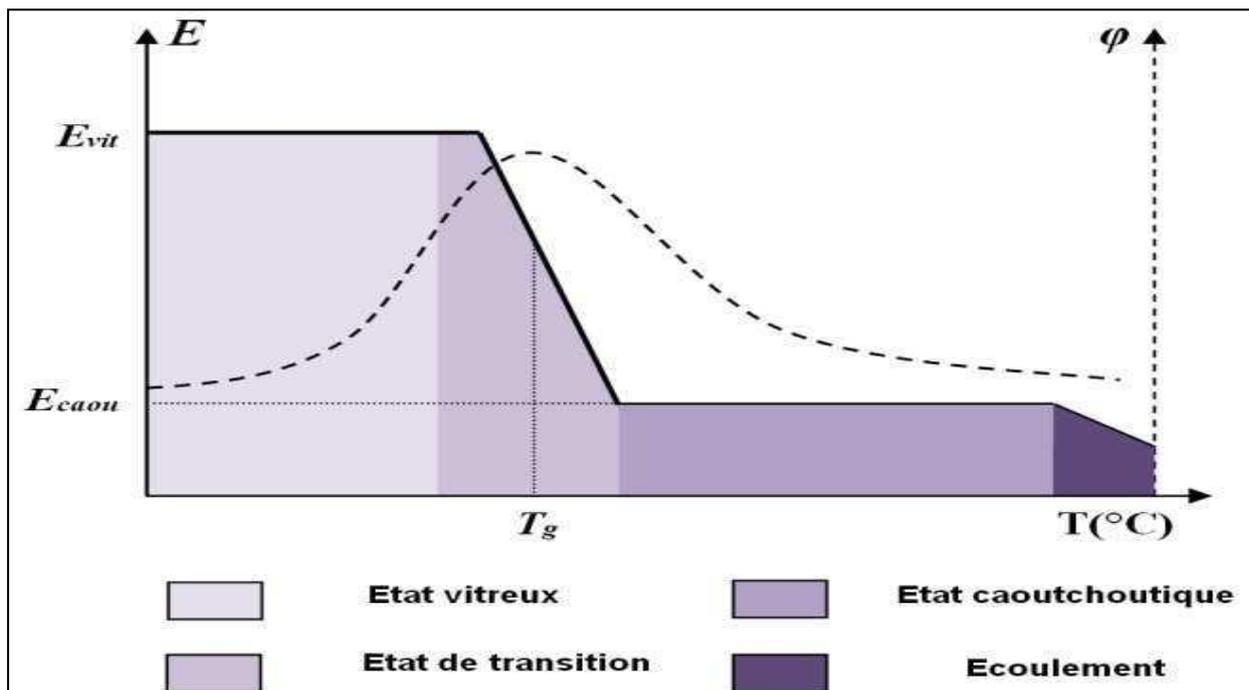


Figure 0I.0.1 : Production du caoutchouc naturel [2]

## I.2 Production du caoutchouc naturel [2]

Le caoutchouc naturel est un poly-isoprène naturel de microstructure supérieure à 90% cis1.4 provenant d'un arbre *hevea-brasiliensis*, originaire de bassin de l'Amazon et implanté en Asie du sud-est et en Afrique. La saignée fournit un latex qui donne le caoutchouc sec après coagulation à l'acide.

Le caoutchouc naturel présente une large distribution de masse moléculaire et une proportion importante de macromolécules de masse moléculaire élevées, en partie responsables du très bon niveau de ses propriétés mécaniques.



Figure I.2 : Récolte du latex

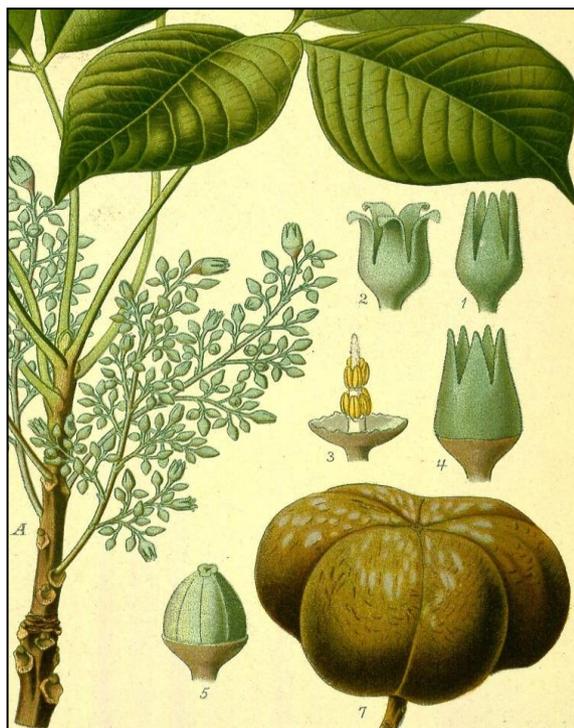


Figure I.3 : Hévéa brasiliensis

### I.3 Classification des élastomères [3]

On compte une vingtaine de familles d'élastomères et dans certaines de ces familles dix à vingt grades différents. C'est-à-dire que les méthodes actuelles de polymérisation permettent, de plus en plus, la fabrication de produits sur mesure répondant à la fois aux problèmes de mise en œuvre et aux propriétés recherchées.

La classification courante consiste à séparer les caoutchoucs en trois catégories :

#### I .3.1 Les élastomères à usage général

Ils sont caractérisés par leurs propriétés élastiques, Il s'agit essentiellement des caoutchoucs naturel ou synthétique (NR ou IR), des copolymères de butadiène styrène (SBR) et les polybutadiènes (BR). Ils sont utilisés pour diverses applications dans l'industrie automobile telles que les pneumatiques, supports moteurs, balais d'essuie-glaces ; ou pour le bâtiment (étanchéité de toitures, câblerie, adhésifs, tuyaux...) ; ou encore pour gants de ménage et chirurgie, tétines, préservatifs, tapis de sol...

**I.3.2 Les élastomères à usage spéciaux**

Qui sont les copolymères ou ter-polymères d'éthylène propylène et diène (EPM et EPDM), les copolymères d'iso-butylène isoprène, chlorés ou bromés (IIR, BIIR, CIIR), Les copolymères de butadiènes acrylonitrile (NBR), et les polychloroprènes (CR), Pour des applications requérant des propriétés particulières telles que la résistance aux liquides agressifs (solvants, acides, huiles...), Une stabilité vis-à-vis des hautes et basses températures et une bonne tenue au vieillissement. Ils sont utilisés dans divers secteurs d'activités (industrie pharmaceutique, nucléaire, automobile, aéronautique...)

**I.3.3 Caoutchoucs à usage très spéciaux**

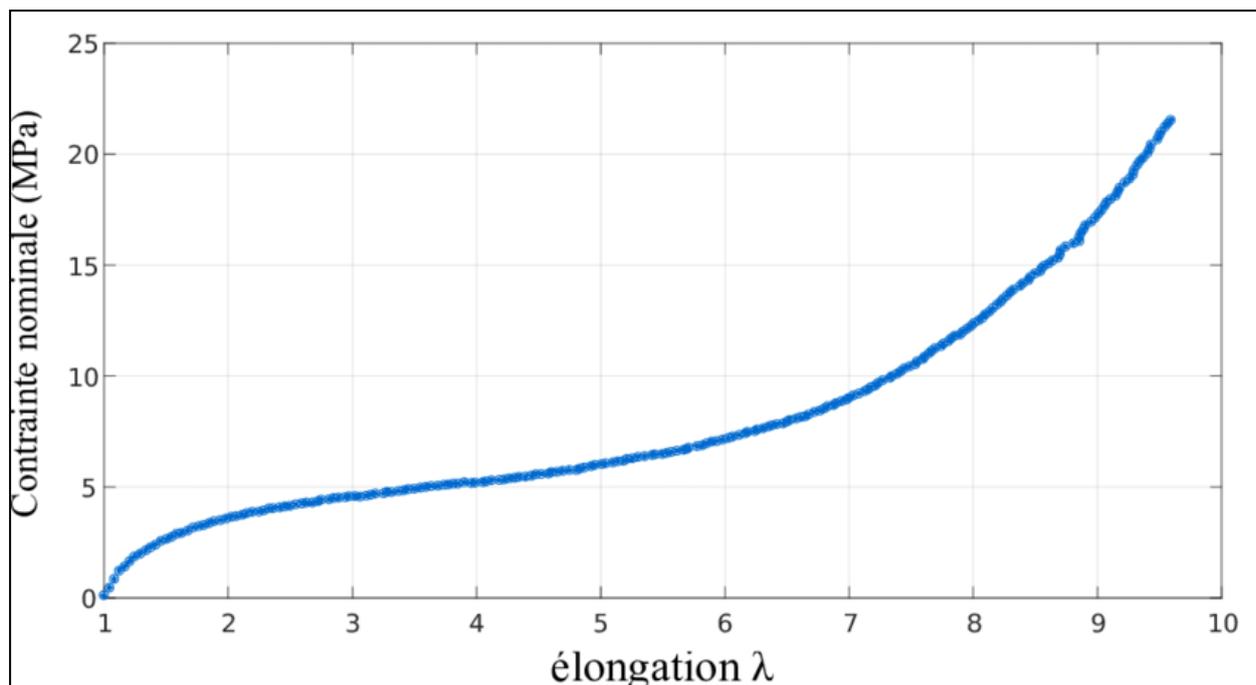
On peut citer les caoutchoucs de silicone (VMQ, FVMQ), les élastomères fluorés (FKM), les polyéthylènes chlorés et chlorosulfonés (CM, CSM), les polyacrylates (ACM), les copolymères éthylène acétate de vinyle (EVM) et l'éthylène acrylate de méthyle (AEM), les caoutchoucs nitrile hydrogènes (HNBR) et les caoutchoucs d'épichlorhydrines (CO, ECO, GECO), les polyuréthanes malaxables (AU, EU), présentent d'excellentes tenues chimiques et thermique, essentiellement utilisés en industrie aéronautique et spatiale, ainsi que dans l'industrie chimique.

**I.4 Les propriétés des élastomères****I.4.1 Propriété mécanique****I .4.1.1 Elasticité non linéaire [4]**

Les élastomères sont caractérisés par une capacité à supporter les grandes déformations de façon réversible. La (Figure I.4) représente la courbe de traction à rupture d'un élastomère. La courbe contrainte-déformation est non-linéaire montrant trois zones distinctes de comportement :

Aux faibles déformations l'énergie apportée est utilisée pour rompre les liaisons faibles (Van der Waals...) entre les chaînes ; cela se traduit par la courbure initiale de la courbe contrainte-déformation (10 –25%).

Les déformations moyennes où l'énergie apportée sert au dés enchevêtrement des chaînes macromoléculaires (25–400%).



**Figure I.4** : Courbe de traction à rupture d'un élastomère

#### I.4.1.1.2 Incompressibilité [5]

La troisième caractéristique bien connue du comportement des élastomères est l'incompressibilité. Il est convenu de considérer que des sollicitations ne faisant pas intervenir de pressions hydrostatiques (trop importants), la déformation du matériau se fait sans variation de volume. En fait, cette caractéristique est une idéalisation de la réalité, puis qu'on montre expérimentalement que les élastomères sont compressibles.

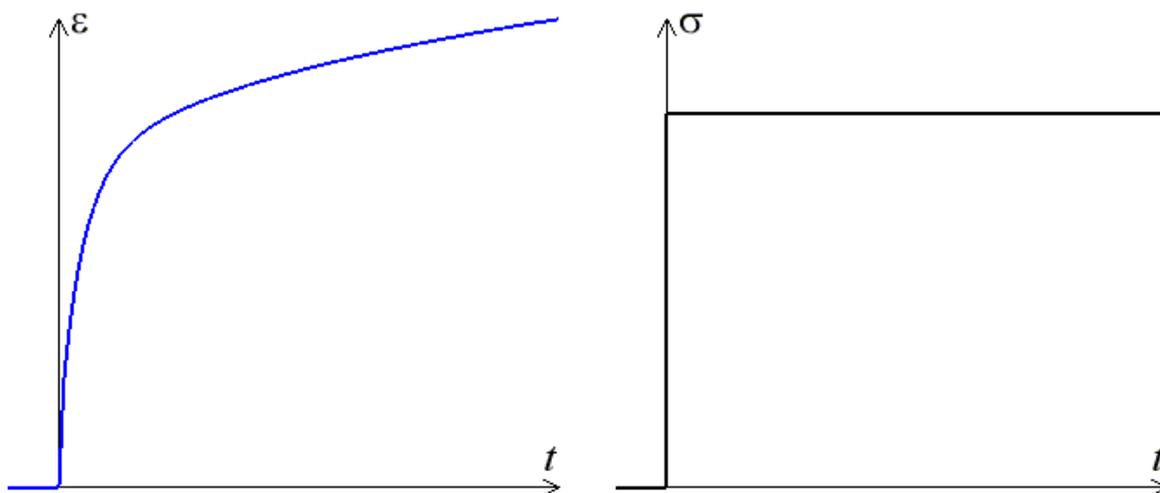
La prise en compte de l'hypothèse d'incompressibilité des caoutchoucs (sous les conditions définies précédemment) est très intéressante du point de vue analytique et notamment pour le dépouillement des mesures expérimentales. En revanche, d'un point de vue numérique (méthodes des éléments finis), elle pose certaines difficultés qui sont bien identifiées.

#### I .4.1.1.3 Viscoélasticité [6]

La deuxième propriété bien connue des matériaux élastomères est leur caractère viscoélastique. Classiquement, ce phénomène est mis en évidence par deux essais bien connus :

Les essais de relaxation et de fluage. Dans les cas de la relaxation, on impose au matériau un niveau constant de déformation et on observe la relaxation des contraintes (la diminution) au cours du temps.

Le fluage consiste à imposer une contrainte et mesurer les déformations qui en découlent.



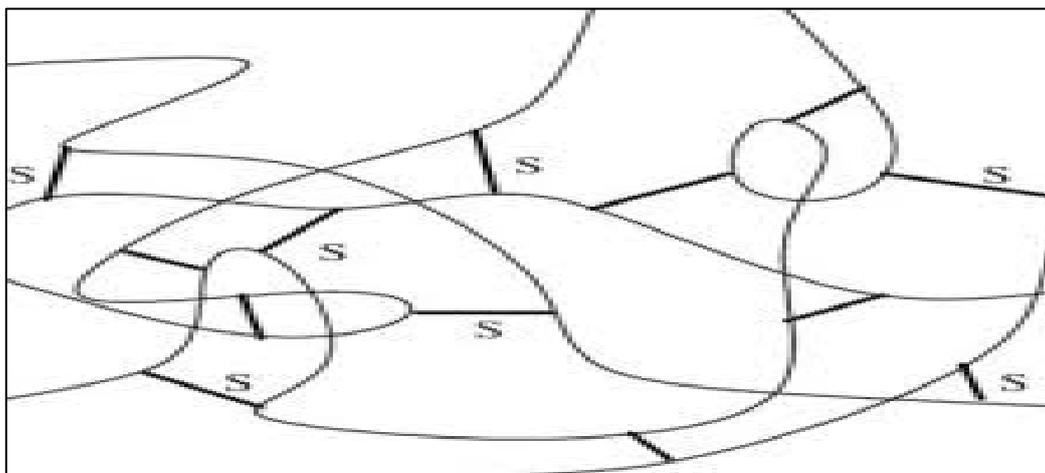
**Figure 0.5** : Fluage et relaxation d'un matériau soumis à une sollicitation au temps  $t_0$

#### I.4.1.1.4 Vieillessement

L'environnement peut être à l'origine des dégradations physico-chimique de la structure des élastomères. En conséquence, le comportement mécanique devient fragile ou rigide, entraînant en général de la rigidification et la fragilisation du matériau [7].

### I .4.2 Propriétés chimiques

Les élastomères sont constitués de chaînes carbonées liées entre elles par des liaisons physiques (enchevêtrements) et chimiques (type liaisons covalentes) appelées aussi points de réticulation. La cohésion du matériau est assurée par les nœuds de réticulation : c'est ce qu'on appelle l'état caoutchoutique. Les propriétés mécaniques restent stables jusqu'à ce que la Température soit suffisamment importante [7].



**Figure I.6** : Les chaînes macromoléculaires sont liées entre elles par des liaisons covalentes et des ponts soufre

**I.4.3 Propriétés physiques**

Les élastomères appartiennent à la famille des hauts polymères. Macroscopiquement, ils se présentent sous forme de macromolécules constituées de longues chaînes de polymères, linéaires ou ramifiées, enchevêtrées les unes dans les autres. Compte-tenu de leur structure amorphe et pour des températures supérieures à leur température de transition vitreuse, les élastomères se caractérisent par une grande déformabilité et une haute élasticité caoutchoutique [7].

**I.5 Conclusion**

Les élastomères présentent un comportement très complexe mettant en jeu de nombreux phénomènes tels que la capacité à supporter de grandes déformations, la viscoélasticité et l'endommagement.

**Chapitre II :**

**Modélisation du**

**comportement**

**hyper-élastique des**

**élastomères**

### Introduction

Ce chapitre fait le point sur les modélisations fréquemment proposées pour rendre compte des aspects de comportement macroscopique des élastomères décrits dans le chapitre précédent. Nous donnons un bref rappel sur la mécanique des milieux continus en grandes déformations. Ensuite, on présentera quelques modèles théoriques du comportement hyper-élastique des élastomères qui sont proposés dans la littérature.

## II.1 Rappels de la mécanique des milieux continus en grandes déformations

### II.1.1 Cinématique

Dans le cadre des transformations finies, il est important de distinguer la configuration initiale et la configuration actuelle (déformée). Le mouvement d'une particule d'un milieu continu peut être décrit soit dans la configuration lagrangienne, soit dans la configuration eulérienne. Les coordonnées lagrangiennes (ou matérielles) sont celles qui définissent la position du point matériel  $P$  ( $X_1$  ;  $X_2$  et  $X_3$ ) du milieu continu ( $\Omega$ ), le repérage se faisant dans la configuration initiale (ou non déformée). Les coordonnées eulériennes (ou spatiales) sont celles qui définissent la position du point matériel  $p$  ( $x_1$  ;  $x_2$  et  $x_3$ ) du milieu continu à l'instant courant, le repérage se faisant dans la configuration actuelle (ou déformée). Notons que dans le cas d'une transformation infinitésimale, les deux configurations sont confondues [8].

### II.1.2 Description du mouvement [9]

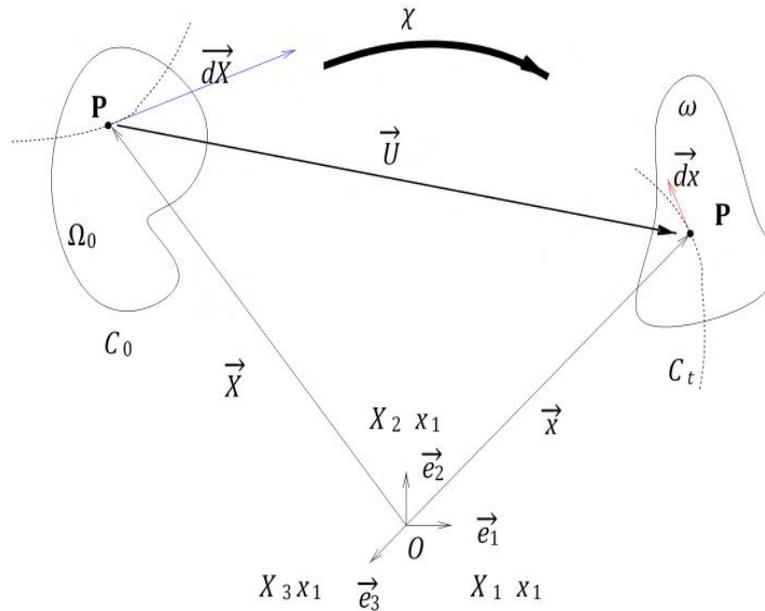
Soit un solide déformable  $S$ , évoluant dans un repère  $R$ . L'ensemble des particules  $p$  constituant le solide déformable occupe, à chaque instant, un ensemble de positions dans l'espace voire figure (II.1). C'est la configuration du système à l'instant  $t$ . Nous utiliserons le même repère pour la configuration initiale et la configuration déformée.

On note ( $C_0$ ) la configuration initiale (ou le solide  $S$  occupe le volume  $\Omega_0$ ), et ( $C_t$ ) la configuration actuelle à l'instant  $t$  (ou déformée), où le solide  $S$  occupe le volume  $\omega$ .

Le vecteur position de la particule  $P \in S$  à l'instant initial est noté  $\vec{X}$ . On note  $\vec{x}$  le vecteur position de cette particule à l'instant  $t$ .

Le mouvement du milieu continu est défini par la donnée de la fonction vectorielle :

$$X : \begin{cases} C_0 \rightarrow C_t \\ \vec{X} \rightarrow \vec{x} = x(\vec{X}; t) \end{cases} \quad (\text{II.1})$$



**Figure II.1** : Configuration initiale et déformée

L'équation II.1 définit la transformation faisant passer de la configuration de référence ( $C_0$ ) à la configuration ( $C_t$ ). Pour caractériser la déformation au voisinage de la particule, on introduit l'application linéaire tangente au mouvement, ou tenseur tangent (voir figure (II.1)). Considérons un Vecteur  $\vec{x}$  dans la configuration initiale, son transformé dans la configuration actuelle S'obtient par la relation (II.2) :

$$\vec{dx} = \mathbf{F} \vec{dX} \quad (\text{II.2})$$

### II .1.3 Description des déformations [9]

Pour caractériser les changements de forme entre les configurations ( $C_0$ ) et ( $C_t$ ), il faut caractériser les variations de longueur et les variations d'angle, soit, en fait, les variations de produit scalaire. On forme donc le produit scalaire de deux vecteurs matériels  $\vec{dx}$  et  $\vec{dy}$  et on examine sa variation en fonction des vecteurs initiaux  $\vec{dX}$  et  $\vec{dY}$ . Selon la configuration privilégiée, plusieurs mesures des déformations sont possibles :

#### Description lagrangienne

En configuration lagrangienne, on introduit le tenseur de Cauchy Green droit  $\mathbf{C} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$  symétrique et défini positif, qui caractérise les dilatations. Dans le cas où le milieu ne subit aucune transformation,  $\mathbf{C} = \mathbf{I}$ .

Le tenseur de déformation de Green Lagrange, purement lagrangien, symétrique, relie à C par

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) \quad (\text{II.3})$$

### Description eulérienne

De la même manière dans la configuration actuelle on introduit le tenseur de Cauchy Green gauche  $\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$ , symétrique et défini positif. Le tenseur de déformation associé, lié à la différence de produit scalaire, est le tenseur d'Euler-Almansi  $\mathbf{A}$  :

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1}) \quad (\text{II.4})$$

#### II.1.4 Description des contraintes [10]

On introduit les tenseurs des contraintes usuels de la théorie des grandes déformations le tenseur des contraintes de Cauchy,  $\boldsymbol{\sigma}$  (eulérien) est défini par :

$$\vec{\mathbf{t}} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{\mathbf{n}} \quad (\text{II.5})$$

$\mathbf{t}$  est le vecteur contrainte (effort mesuré par unité de surface définie instantanément) s'appliquant sur l'élément de surface  $ds$  de la configuration initiale de normale extérieure  $\vec{\mathbf{n}}$ . On peut lier la force élémentaire  $\vec{\mathbf{d}}f$  de la configuration actuelle à l'élément d'aire  $ds$  de la configuration initiale, par la relation suivante :

$$\vec{\mathbf{d}}f = \vec{\mathbf{T}} ds \quad (\text{II.6})$$

Il s'agit alors d'une description mixte. Le vecteur  $\vec{\mathbf{T}}$  représente le vecteur contraint de Piola Kirchhoff 1 (ou vecteur de Boussinesq). Le tenseur de contrainte associé est le premier tenseur de Piola-Kirchhoff  $\boldsymbol{\pi}$  qui n'est ni lagrangien ni eulérien (tenseur hybride), tel que :

$$\vec{\mathbf{d}}f = \vec{\mathbf{T}} ds = \boldsymbol{\pi} \vec{\mathbf{N}} ds \quad (\text{II.7})$$

$\boldsymbol{\pi}$  N'est pas symétrique.

Pour avoir un tenseur complètement défini en fonction des variables lagrangiennes, on transporte la force  $\vec{\mathbf{d}}f$  agissant sur le volume actuel vers la configuration initiale non déformée

$$\vec{\mathbf{d}}f_0 = \mathbf{F}^{-1} \vec{\mathbf{d}}f \quad (\text{II.8})$$

$\vec{\mathbf{d}}f_0$  est une force fictive agissant sur la surface initiale. Le tenseur de Piola Kirchhoff 2 est alors défini par :

$$\vec{\mathbf{d}}f_0 = \mathbf{S} \vec{\mathbf{N}} \cdot ds \quad (\text{II.9})$$

## Chapitre II Modélisation du comportement hyper-élastique des élastomères

$S$  est un être mathématique sans signification physique, mais il présente la particularité d'être symétrique.

Les trois tenseurs des contraintes sont reliés par la relation suivante :

$$J\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{F}^T = \mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{F}^T \quad (\text{II.10})$$

$$\boldsymbol{\pi} = \mathbf{F} \mathbf{S} \quad (\text{II.11})$$

$$J = \det \mathbf{F} \quad (\text{II.12})$$

$J$  : Jacobienne de la transformation présentée.

En conclusion : On a rassemblé les différents tenseurs de contraintes et de déformations dans les deux configurations initiale et actuelle dans le tableau suivant :

**Tableau II.1** Récapitulatif des différents tenseurs de contraintes et de déformations dans les deux configurations initiales et actuelle

	Configuration ( $C_0$ ) initiale (libre de contraintes)	Configuration actuelle ( $C_t$ )
Tenseurs des déformations	<p><b>C</b> : Tenseur des dilatations de Green-Cauchy droit, symétrique.</p> <p><b>E</b> : Tenseur des Déformations de Green-Lagrange, symétrique.</p>	<p><b>B</b> : Tenseur des déformations de Green-Cauchy gauche, symétrique.</p> <p><b>A</b> : Tenseur des déformations d'Euler-Almansi, symétrique.</p>
Tenseurs des contraintes	<p><b>S</b> : Tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff 2, symétrique.</p>	<p><math>\boldsymbol{\sigma}</math> : Tenseur des contraintes de Cauchy, symétrique.</p>

II.2 Equations d'équilibre [11]

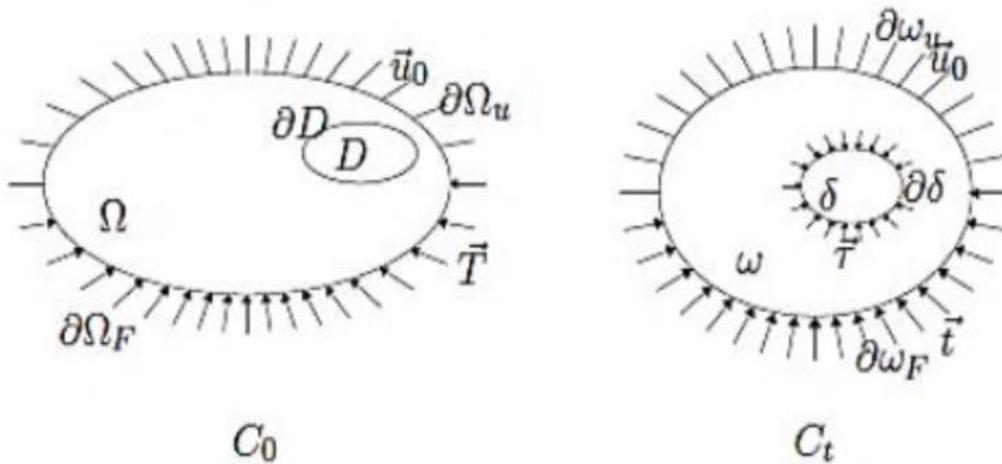


Figure II.2 : Conditions aux limites dans les configurations de référence et actuelle

On définit la configuration actuelle  $C_t$  :

$\omega$ , le domaine occupé par le solide dans cette configuration ;

$\partial\omega$  : sa surface ;

$\partial\omega_u$  et  $\partial\omega_f$  respectivement les sous domaines de  $\partial\omega$  sur lesquels on applique un déplacement imposé  $\vec{u}_0$  ou une densité surfacique de force par unité de surface déformée

$$(\partial\omega_u \cup \partial\omega_f = \partial\omega \text{ et } \partial\omega_u \cap \partial\omega_f = \emptyset)$$

$\delta$  un élément de volume dans la configuration déformée;

Et les efforts de cohésion exercés à travers l'élément de surface  $\partial\delta$ .

Dans la configuration de référence  $\Omega$ ,  $\partial\Omega$ ,  $\partial\omega$ ,  $\partial\omega_f$ ,  $D$  et  $\partial D$  sont respectivement les transportés de  $C_t$  vers  $C_0$  par l'intermédiaire de  $\omega$ ,  $\partial\omega$ ,  $\partial\omega_u$ ,  $\partial\omega_f$ ,  $\delta$ , et  $\partial\delta$ .

$\vec{T}$  est la densité surfacique de force exprimé dans  $C_0$ .

II.2.1 Configuration actuelle

L'écriture de la conservation de la quantité de mouvement, traduisant la configuration actuelle, l'équilibre du sous-domaine  $\partial\delta$  s'écrit :

$$\int_{\partial\delta} \vec{t} ds + \int_{\delta} p \vec{f} dv = \vec{0} \tag{II.14}$$

où  $\rho$  est la masse volumique dans la configuration actuelle,  $f$  la densité massique de force. On obtient dans la configuration actuelle, en utilisant le théorème de la divergence, après avoir l'équation  $\sigma$  :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \sigma + \rho_0 \vec{f} &= \vec{0} && \text{Sur } \omega ; \\ \sigma \cdot \vec{n} &= \vec{T} && \text{Sur } \partial\omega_F ; \\ \vec{u} &= \vec{u}_0 && \text{Sur } \partial\omega_u. \end{aligned} \tag{II.15}$$

### II .2.2 Configuration de référence

L'équilibre peut aussi être exprimé dans la configuration de référence. On note  $\partial u$  et  $\partial F$  les images respectives de  $\partial\omega_u$  et  $\partial\omega_F$  par l'application  $\chi^{-1}$ .

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \pi + \rho_0 \vec{f} &= \vec{0} \text{ sur } \Omega; \\ \pi \cdot \vec{N} &= \vec{T} \text{ sur } \partial\omega_F; \\ \vec{u} &= \vec{u}_0 \text{ sur } \partial\omega_u. \end{aligned} \tag{II.16}$$

### II.3 Modélisation de Comportement hyper élastique [9]

Un matériau est élastique si le tenseur des contraintes de Cauchy à l'instant  $t$  dépend uniquement de l'état de déformation à ce même instant, ainsi la contrainte ne dépend pas du chemin suivi par la déformation, mais par contre le travail fourni par cette contrainte dépend généralement du chemin suivi. Un matériau élastique est dit hyper élastique si le tenseur des contraintes dérive d'une fonction d'énergie du matériau. Ceci implique que le travail mis en jeu pour aller d'un état de déformation à un autre ne dépend pas du chemin suivi. Pour écrire une loi de comportement hyper élastique, on postule ainsi l'existence d'une énergie libre  $w$  définie par unité de volume dans la configuration de référence.

#### II. 3. 1Loi de comportement hyper élastique [12]

Dans l'approche phénoménologique, le matériau est considéré comme un solide continu. Le comportement du matériau est régi par une relation non linéaire liant les contraintes et les déformations. Ces contraintes sont obtenues par dérivation d'un potentiel de déformation, noté  $W$ .

La contrainte dérive de la densité d'énergie de déformation par la relation suivante :

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2\mathbf{B} \frac{\partial W}{\partial I_1} - 2 \frac{\partial W}{\partial I_2} \mathbf{B}^{-1} \quad (\text{II.17})$$

Où  $p$  est la pression hydrostatique. On peut écrire l'hypothèse d'isotropie, les densités d'énergie de déformation  $W$  sont alors écrites en fonction des élongations principales  $\lambda_1, \lambda_2$  et  $\lambda_3$  qui sont les valeurs propres du tenseur  $\mathbf{C}$  (ou très souvent à partir des invariants  $I_1, I_2$  et  $I_3$  du tenseur des dilatations de Cauchy-Green  $\mathbf{B}$  (ou  $\mathbf{C}$ ). Les invariants s'expriment de la manière suivante :

$$\begin{cases} I_1 = \text{trace} \mathbf{B} \\ I_2 = \frac{1}{2} [\text{trace} \mathbf{B}^2 - (\text{trace} \mathbf{B})^2] \\ I_3 = \det \mathbf{B} \end{cases} \quad (\text{II.18})$$

On suppose l'existence du potentiel élastique  $W$ , qui est défini comme l'énergie volumique de déformation rapporté au volume initial.

Pour un matériau isotrope, l'énergie volumique de déformation  $W$  ne dépend que des trois invariants :  $I_1(\mathbf{C})$ ,  $I_2(\mathbf{C})$  et  $I_3(\mathbf{C})$  du tenseur de Green-Cauchy droite  $\mathbf{C}$ , soit :

$$W = W(I_1, I_2, I_3).$$

Il existe bon nombre de modèles hyper-élastique dans la littérature, nous allons présenter les modèles fréquemment implémentés dans les codes de calculs par éléments finis.

### II.3.2 Les modèles hyper-élastique

#### II.3.2.1 Modèle de Mooney-Rivlin (1940) [13]

Mooney-Rivlin fut le premier à proposer un modèle hyper-élastique pour les élastomères.

Après avoir étudié les réponses en traction et en cisaillement des élastomères, il propose forme phénoménologique pour l'énergie de déformation :

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) \quad (\text{II.19})$$

Ce modèle reste loin le plus pour sa simplicité et sa capacité à refléter convenablement le comportement des élastomères pour des niveaux de déformation allant jusqu'à 100%

#### II.3.2.2 Modèle de Mooney-Rivlin (1948) [13]

Le potentiel est défini par la relation :

$$W = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M C_{ij} (I_1 - 3)^i (I_2 - 3)^j, C_{00} = 0. \quad (\text{II.20})$$

### II-3-2.3 Modèle d'ogden (1972) [12]

C'est l'un des modèles le plus utilisé pour la très grande déformation. Sa formulation consiste à remplacer les exposants entiers du développement de Rivlin par une série de puissances réelles des extensions principales, ces exposants réels deviennent alors des paramètres matériels à identifier. A la différence des formulations précédente en invariants, le modèle d'Ogden s'écrit donc en termes d'extensions principale :

$$W = \sum_{n=1}^n \frac{\mu_n}{\alpha_n} \left( \lambda_1^{\alpha_n} + \lambda_2^{\alpha_n} + \lambda_3^{\alpha_n} \right) \quad (\text{II.21})$$

Où les constantes  $(\mu_n; \alpha_n)_{i=1, \dots, n}$  sont les paramètres matériaux.  $\lambda_1; \lambda_2$  et  $\lambda_3$  Sont-elles valeurs propres du tenseur de dilatation de Green-Cauchy.

### II.3.2.4 Modèle néo-Hookéen (1943) [12]

Le modèle hyper-élastique isotrope et incompressible le plus simple est le modèle NéoHookéen, ce modèle admet un unique paramètre matériel  $C_{10}$ . Il permet d'avoir une bonne corrélation pour des niveaux de déformation modères (jusqu'à 50%).

$$W = c_{10}(I_1 - 3) \quad \text{avec} \quad \frac{\mu_0}{2} = C_{10} \quad (\text{II.22})$$

### II.3.2.5 Modèle du tube étendu (1999) [12]

Le dernier modèle présenté ici est proposé par Kaliske et Heinrich. Sa formulation repose sur la physique des réseaux polymères, et notamment sur les modèles dits « tubes » qui permettent de décrire le mouvement des chaînes polymères dans un réseau réticulé. Le modèle du tube étendu intègre assez simplement des résultats issus de la physique des polymères dans le cadre hyper-élastique. Ainsi, les auteurs proposent une densité d'énergie de déformation, alliant une fonction du premier invariant  $I_1$  et une fonction de type Ogden, qui entre parfaitement dans le cadre mécanique tridimensionnel :

$$W = \frac{G_c}{2} \left[ \frac{(1-\delta^2)(I_1-3)}{1-\delta^2(I_1-3)} \right] + Ln \left[ 1 - \delta^2(I_1 - 3) \right] + 2 \frac{G_e}{\beta^2} (\lambda_1^{-\beta} \lambda_2^{-\beta} - 3) \quad (\text{II.23})$$

Où les constantes,  $\delta; \beta$  et  $G_e$  sont des paramètres matériaux.

### II.3.2.6 Modèle de Gent (1996) [12]

Le potentiel élastique à la forme suivante :

$$W = -\frac{\mu_0}{2} J_m \text{Ln} \left( 1 - \frac{I_3 - 3}{J_m} \right) \quad (\text{II.24})$$

### II.3.2.7 Modèle de Yeoh (1990) [12]

A partir des considérations expérimentales, Yeoh (1990) a proposé un modèle hyper élastique pour les caoutchoucs chargés au noir de Carbone.

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{20}(I_2 - 3)^2 + C_{30}(I_3 - 3)^3 \quad (\text{II.29})$$

## II.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté brièvement quelques résultats essentiels du formalisme de grandes déformations puis nous avons rappelé quelques modèles de comportement hyper-élastique des élastomères.

**Chapitre III**  
**Etude de la torsion des**  
**cylindres hyper-élastiques**

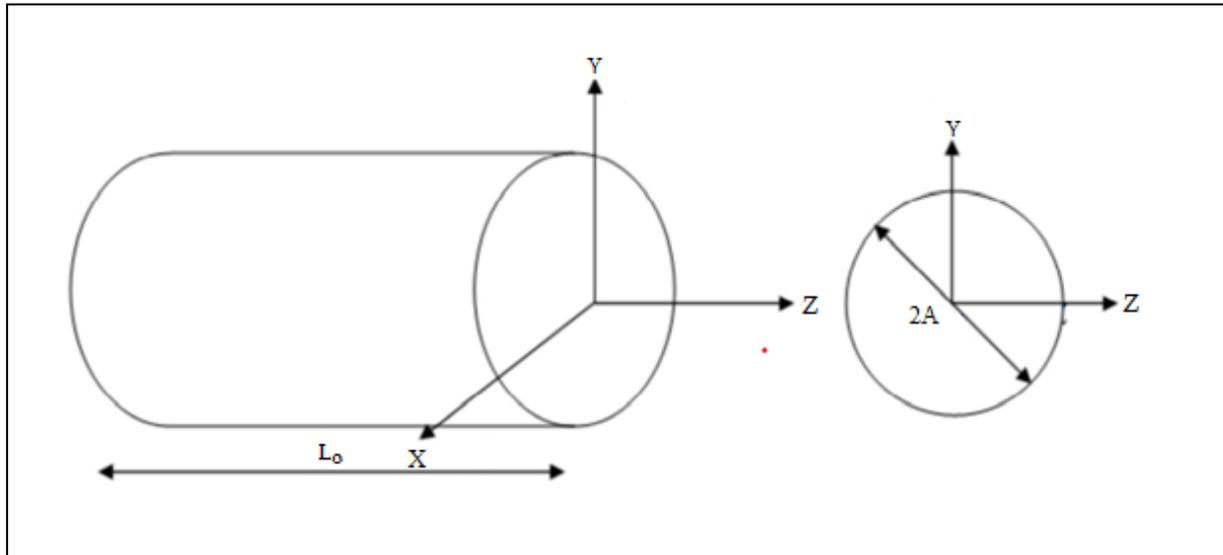
## Introduction

Dans ce chapitre, nous allons étudier théoriquement et numériquement la distribution des contraintes dans un cylindre plein en élastomère soumis à une sollicitation composée de torsion et extension. Le modèle de Mooney-Rivlin a été considéré dans l'étude. Une comparaison des résultats de l'étude théorique et numérique a été effectuée à la fin du chapitre.

### III.1 Etude analytique

#### III.1.1 Formulation du problème

On considère un cylindre de longueur initial  $L_0$ , et de rayon initial  $A$ , tel qu'il est montré sur la figure (III.1).



**Figure III.1** : Représentation du cylindre circulaire plein de section constante

La symétrie du problème impose d'utiliser les coordonnées cylindriques, soit un point  $M (R, \Theta, Z)$  dans la configuration de référence (non déformée) qui se déplace sous l'effet des sollicitations imposées et qui occupe la position  $m (r, \theta, z)$  dans la configuration actuelle (ou déformée), on peut écrire la relation cinématique suivante [14]

Notre cas étudié est l'extension-torsion, on prend la relation suivante :

$$\begin{cases} r = R/\sqrt{\lambda} \\ \theta = \Theta + \sqrt{\lambda}g(Z) \\ z = \lambda Z \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

Ici, l'angle de torsion est supposé une fonction quelconque de Z.

### III.1.2 Loi de comportement d'un milieu incompressible

On suppose que le potentiel hyper-élastique dépend des invariants  $I_1, I_2$ , c'est-à-dire :

$$W = W(I_1, I_2)$$

Le milieu est supposé incompressible,  $I_3 = 1$ .

En coordonnées cylindriques, l'opérateur gradient de la transformation  $\mathbf{F}$  s'exprime :

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial R} & \frac{1}{R} \frac{\partial r}{\partial \theta} & \frac{\partial r}{\partial Z} \\ \frac{r \partial \theta}{\partial R} & \frac{r}{R} \frac{\partial \theta}{\partial \theta} & \frac{r \partial \theta}{\partial Z} \\ \frac{\partial z}{\partial R} & \frac{1}{R} \frac{\partial \theta}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial Z} \end{pmatrix} \quad (\text{III.2})$$

Le tenseur de contrainte de Cauchy est exprimé par :

$$\boldsymbol{\sigma} = -p \mathbf{1} + 2 \frac{\partial W}{\partial I_1} \mathbf{B} - 2 \frac{\partial W}{\partial I_2} \mathbf{B}^{-1}$$

$$\text{On pose : } \frac{\partial W}{\partial I_1} = W_1 \text{ et } \frac{\partial W}{\partial I_2} = W_2$$

Ce qui donne :

$$\boldsymbol{\sigma} = -p \mathbf{1} + 2W_1 \mathbf{B} - 2W_2 \mathbf{B}^{-1} \quad (\text{III.3})$$

De l'équation (III.1) le gradient de la transformation  $\mathbf{F}$  est donné par :

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} & Rg'(Z) \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad (\text{III.4})$$

De l'équation (III.4) on obtient :

$$\mathbf{F}^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} & 0 \\ 0 & Rg'(Z) & \lambda \end{pmatrix} \quad (\text{III.5})$$

Pour cette transformation, le tenseur des dilatations de Cauchy-Green gauche  $\mathbf{B}$  est égal à :

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} & Rg'(Z) \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} & 0 \\ 0 & Rg'(Z) & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} + [Rg'(z)]^2 & \lambda Rg'(z) \\ 0 & \lambda Rg'(z) & \lambda^2 \end{pmatrix} \quad (\text{III.6})$$

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -Rg'(Z) \\ 0 & -Rg'(Z) & \lambda^{-2} + \lambda^{-1}(Rg'(z))^2 \end{pmatrix} \quad (\text{III.7})$$

Les invariants des contraintes de Cauchy Green-droit (ou gauche) sont :

$$I_1 = \text{trace } \mathbf{B} = 2\lambda^{-1} + \lambda^2 + (Rg'(z))^2 \quad (\text{III.8})$$

$$I_2 = \lambda^{-1}(Rg'(z))^2 + 2\lambda + \lambda^{-2} \quad (\text{III.9})$$

A partir de l'équation (III.2), les composantes non nulles du tenseur des contraintes de Cauchy sont les suivantes :

$$\sigma_{rr} = -p + 2w_1\lambda^{-1} - 2w_2\lambda \quad (\text{III.9a})$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -p + 2w_1[\lambda^{-1} + (Rg'(z))^2] - 2w_2\lambda \quad (\text{III.9b})$$

$$\sigma_{zz} = -p + 2w_1\lambda^2 - 2w_2[\lambda^{-2} + \lambda^{-1}(Rg'(z))^2] \quad (\text{III.9c})$$

$$\sigma_{\theta z} = 2w_1[\lambda Rg'(z)] - 2w_2[-Rg'(z)] \quad (\text{III.9d})$$

En projetant dans la base de coordonnées cylindriques, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{III.10.a})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{III.10.b})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{III.10.c})$$

On remplace les équations (III.9) dans les équations (III.10), on obtient :

$$\frac{\partial P}{\partial r} = -2w_1 [Rg'(z)]^2 \quad (\text{III.11.a})$$

$$\frac{\partial P}{\partial \theta} = 2r(w_1 \lambda R + w_2 R) g''(z) \quad (\text{III.11.b})$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -4w_2 \lambda^{-1} R^2 g'(z) g''(z) \quad (\text{III.11.c})$$

On a :  $\frac{\partial P}{\partial \theta} = 0$  ce qui implique que  $g''(z) = 0$  et par conséquent  $\frac{\partial P}{\partial z} = 0$ .

La pression hydrostatique ne dépend que de r, c'est-à-dire  $P = P(r)$ .

De l'équation (III.10.a) ; on peut écrire que :

$$\int_r^a d\sigma_{rr} = \int_r^a 2w_1 \frac{[Rg'(z)]^2}{r} dr$$

$$\sigma_{rr} = f(\theta, z) + w_1 \lambda [g'(z)]^2 (r^2 - a^2) \quad (\text{III.12})$$

De l'équation (III.9.a) on en déduit l'expression de la pression hydrostatique P :

$$P(r) = 2w_1 \lambda^{-1} - 2w_2 \lambda + w_1 \lambda [g'(z)]^2 (r^2 - a^2) - f(\theta, z)$$

Mais  $\frac{\partial P}{\partial \theta} = \frac{\partial P}{\partial z} = 0$ .

Alors  $f(\theta, z) = \text{constante} = -\sigma_0$

La pression hydrostatique et les composants du tenseur des contraintes de Cauchy sont donnés par :

$$P(r) = 2w_1\lambda^{-1} - 2w_2\lambda + w_1\lambda[g'(z)]^2(r^2 - a^2) + \sigma_0 \quad (\text{III.13})$$

$$\sigma_{rr} = w_1\lambda[g'(z)]^2(r^2 - a^2) - \sigma_0 \quad (\text{III.14.a})$$

$$\sigma_{\theta\theta} = w_1\lambda[g'(z)]^2(r^2 - a^2) + 2w_1[Rg'(z)]^2 - \sigma_0 \quad (\text{III.14.b})$$

$$\sigma_{zz} = 2w_1(\lambda^2 - \lambda^{-1}) + 2w_2(\lambda - \lambda^{-2}) - 2w_2\lambda^{-1}[Rg'(z)]^2 + w_1\lambda[Rg'(z)]^2(r^2 - a^2) - \sigma_0 \quad (\text{III.14.c})$$

$$\sigma_{\theta z} = 2w_1[\lambda Rg'(z)] - 2w_2[-Rg'(z)] \quad (\text{III.14.d})$$

Soit :  $g'(z) = \lambda^{1/2}\tau$  c'est-à-dire  $g(z) = \lambda^{1/2}\tau Z$

$$\sigma_{rr} = w_1[\lambda\tau]^2(r^2 - a^2) - \sigma_0 \quad (\text{III.15.a})$$

$$\sigma_{\theta\theta} = w_1[\lambda\tau]^2(3r^2 - a^2) - \sigma_0 \quad (\text{III.15.b})$$

$$\sigma_{zz} = 2w_1(\lambda^2 - \lambda^{-1}) + 2w_2(\lambda - \lambda^{-2}) - 2w_2\lambda[r\tau]^2 + w_1[\lambda\tau]^2(r^2 - a^2) - \sigma_0 \quad (\text{III.15.c})$$

$$\sigma_{\theta z} = 2(w_1\lambda + w_2)r\lambda\tau \quad (\text{III.15.d})$$

Cas particulier  $\lambda = 1$

$$\sigma_{rr} = w_1\tau^2(r^2 - a^2) - \sigma_0$$

$$\sigma_{\theta\theta} = w_1\tau^2(3r^2 - a^2) - \sigma_0$$

$$\sigma_{zz} = -2w_2[r\tau]^2 + w_1\tau^2(r^2 - a^2) - \sigma_0$$

$$\sigma_{\theta z} = 2(w_1 + w_2)r\tau$$

Si le potentiel hyper-élastique est exprimé en fonction des invariants  $I_i$ , ( $i=1., 2$ ), et que la dérivée de  $W$  par rapport à  $I_i$ , ( $i=1., 2$ ) sont des constantes c'est-à-dire  $\frac{\partial W}{\partial I_i} = w_i = \text{cst}$ , alors la seule possibilité de la transformation est lorsque  $g''(z) = 0$ , en d'autres termes  $g'(z) = \text{cst}$ , ou bien  $g(z) = \sqrt{\lambda}\tau Z$  où  $\tau = \text{cst}$ . Dans ce cas, la contrainte radiale sur la surface extérieure peut être soit nulle ou bien constante.

### III.1.3 Contrainte équivalente de Von-Mises

L'expression de la contrainte équivalente de Von-Mises est donnée par la relation suivante :

$$\langle \sigma_E \rangle = \sqrt{\frac{3}{2} \sigma_D : \sigma_D} \quad (\text{III.16})$$

Où  $\sigma_D$  est le déviateur du tenseur des contraintes donné par la relation suivante :

$$\sigma_D = \sigma - \frac{1}{3} \text{trace}(\sigma) \mathbf{I} \quad (\text{III.17})$$

Dans le cas étudié, la contrainte équivalente de Von-Mises se réduit à l'expression suivante :

$$\langle \sigma_E \rangle = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2 + (\sigma_{rr} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{\theta\theta})^2 + 6(\sigma_{\theta z})^2]} \quad (\text{III.18})$$

Il est clair que la contrainte de Von Mises ne dépend pas de  $\sigma_0$

### III.1.4 Calcul de la force axiale et du moment résultant

La force axiale et le moment appliqué sont exprimés par les relations suivantes :

$$F_z = \int_0^{2\pi} \int_0^a \sigma_{zz} r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^a [2w_1(\lambda^2 - \lambda^{-1}) + 2w_2(\lambda - \lambda^{-2}) - 2w_2\lambda[r\tau]^2 + w_1[\lambda\tau]^2(r^2 - a^2) - \sigma_0] r dr d\theta \quad (\text{III.19})$$

$$M = \int_0^{2\pi} \int_0^a \sigma_{\theta z} r^2 dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^a [2(w_1\lambda + w_2)\lambda\tau] r^3 dr d\theta \quad (\text{III.20})$$

A partir de l'équation (III.19), on déduit l'expression de la force résultante :

$$F_z = 2\pi w_1 \left( \lambda^{\frac{3}{2}} - \lambda^{-\frac{3}{2}} \right) a^2 - \pi w_2 \lambda^{\frac{1}{2}} \tau^2 a^4 + \pi w_1 (\lambda\tau)^2 a^3 \left( \frac{2}{3} \lambda - \lambda^{-\frac{1}{2}} \right) + \sigma_0$$

L'équation du moment appliqué est déterminée à partir de l'équation (III.20):

$$M = \pi(w_1\lambda + w_2)\tau\lambda a^2 \quad (\text{III.22})$$

## III.2 Etude Numérique

### III.2.1 Hypothèse de quasi-incompressibilité

La plupart des codes éléments finis donne le potentiel hyper-élastique( $W$ ) de la manière suivante :

$$W = W(I_1, I_2) + \frac{1}{D} (J - 1)^2 \quad (\text{III.23})$$

où  $I_1$  et  $I_2$  sont les invariants modifiés du tenseur de Green-Cauchy droit (ou gauche) et  $D$  le tenseur ....

On a :

$$I_1 = J^{-\frac{2}{3}} I_1 \quad (\text{III.24})$$

$$I_2 = J^{-\frac{4}{3}} I_2 \quad (\text{III.25})$$

$$\text{Et } D = \frac{2}{k_0} = \frac{3(1-2\nu)}{\mu(\nu+1)} \quad (\text{III.26})$$

où  $k_0$  est le module de compressibilité.

Dans toute notre étude, nous avons supposé que le matériau est incompressible  $I_3 = 1$  et afin de comparer entre les résultats analytiques et les résultats numériques, nous avons supposé que le coefficient de Poisson  $\nu_0 = 0.4998$ .

Alors  $D = 0.0015 \text{ MPa}^{-1}$

### III.2.2 Construction du modèle numérique

#### III.2.2.1 Choix du modèle de comportement

Nous avons choisi le modèle de Mooney-Rivlin à deux paramètres implémentés dans le code de calcul éléments finis dont le potentiel hyper-élastique est défini par

$$W = W(I_1, I_2) = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) + \frac{1}{D} (J - 2)^2 \quad (\text{III.27})$$

W est l'énergie de déformation par unité de volume,  $C_{10}$  et  $C_{01}$  sont les paramètres du matériau.

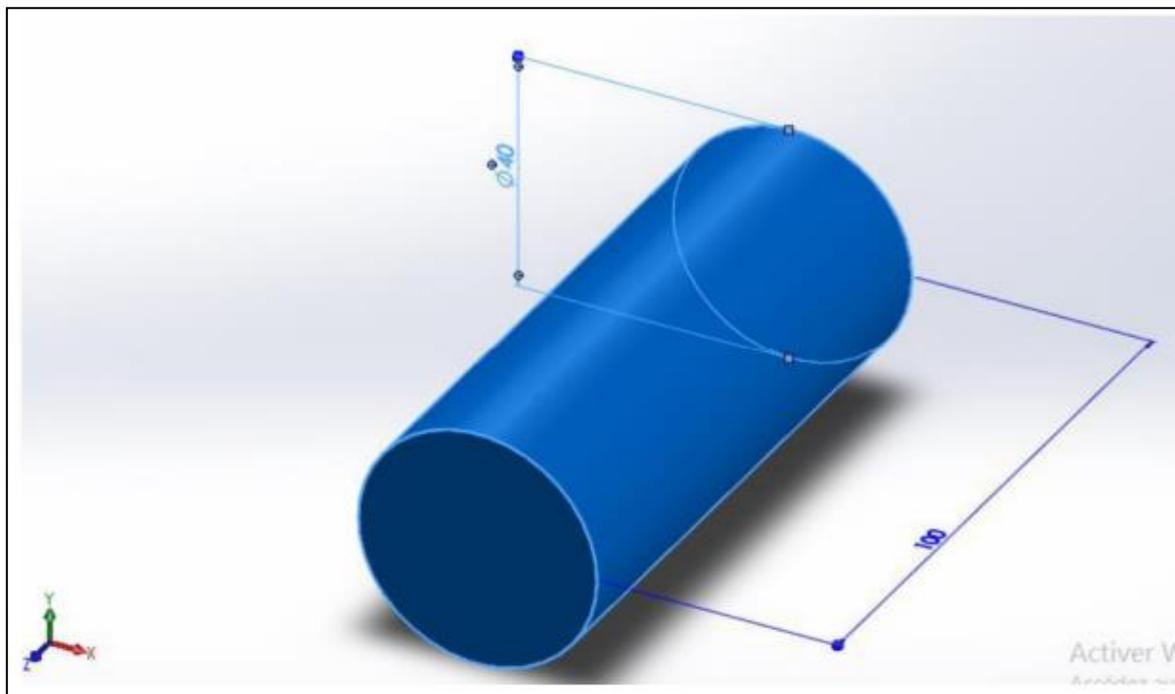
On pose :  $w_1 = C_{10}$  et  $w_2 = C_{01}$

où  $\mu = 2(C_{10} + C_{01})$  est le module de cisaillement.

### III.2.2.2 Présentation de la géométrie

Pour valider un modèle numérique, on doit nous servir de la solution analytique, afin de construire un modèle éléments finis.

Le cylindre est de rayon A et de longueur  $L_0$ , les dimensions sont exprimées en millimètres dans la figure



**Figure III.2** : Modèle étudié

### III.2.2.3 Le maillage

Un maillage est la discrétisation spatiale d'un milieu continu, ou aussi une modélisation géométrique d'un domaine par des éléments finis.

Nous avons considéré une modélisation 3D avec un maillage de type linéaire et une taille d'élément de 4 mm

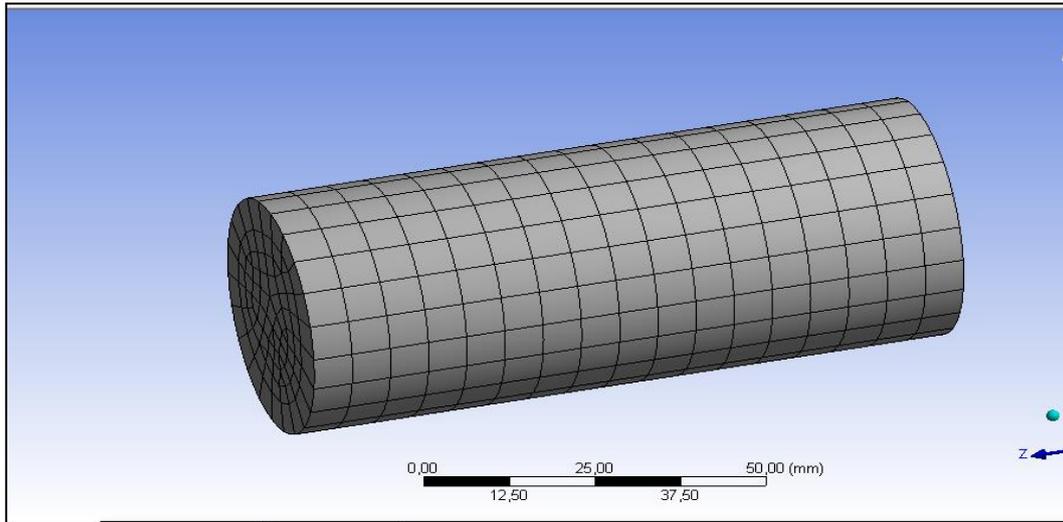


Figure III.3 : Modèle maillé

#### III.2.2.4 Chargements et conditions aux limites

On a réalisé une simulation numérique d'un essai de torsion-extension, Nous avons bloqué tous les nœuds du modèle situé dans le plan  $(xz)$  par l'application d'un encastrement au niveau d'extrémité  $z=0$ . Nous avons appliqué un chargement imposé sous forme d'un déplacement suivant la direction de l'axe du cylindre  $(oz)$  et d'une rotation d'angle  $\alpha$  qui varie suivant l'axe  $e_\theta$ .

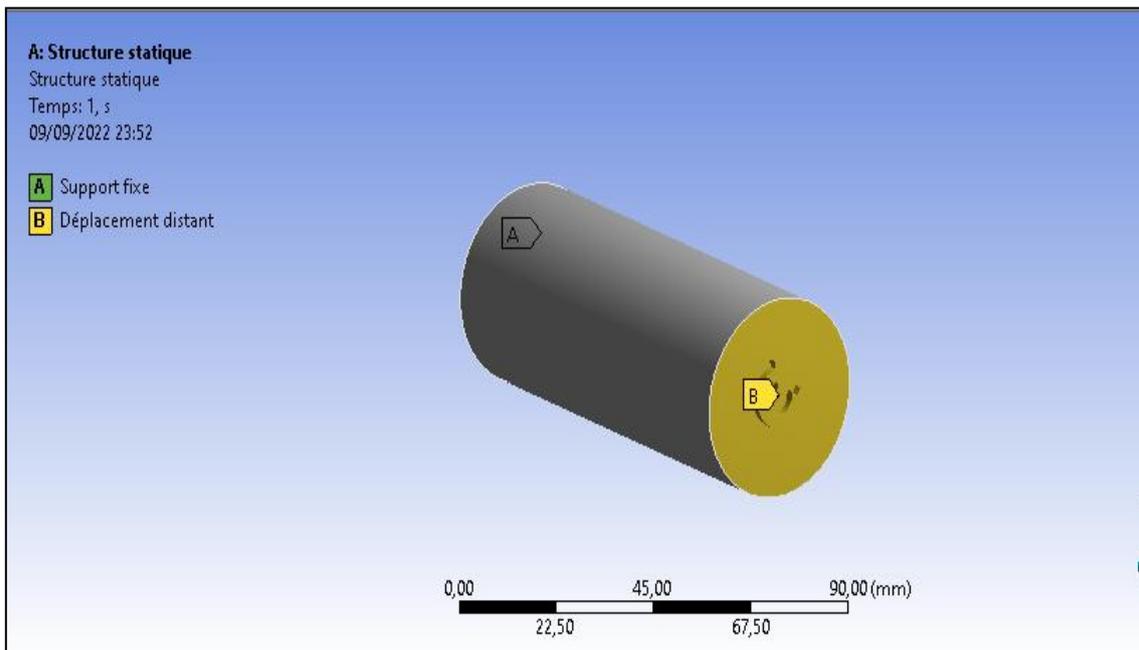


Figure 0.4 : Chargements et conditions aux limites.

### III.2.3 Résultats de la simulation numérique

Pour cette simulation, nous avons utilisé les paramètres identifiés à partir de l'essai de traction sur le Latex, ces paramètres sont donnés dans la publication de Marckmann [7] soit :  $C_{10} = 0.162$  MPa et  $C_{01} = 0.0059$  MPa.

Nous allons déterminer numériquement la distribution des contraintes sur une surface circulaire du cylindre située à une extrémité  $Z = L$ .

Ensuite, nous allons examiner la distribution des contraintes suivant une trajectoire quelconque  $\mathcal{L}$  (r varie de 0 à  $a = \frac{A}{\sqrt{\lambda}}$ ).

Les résultats obtenus pour les différentes valeurs d'angles  $\alpha$  et d'extension sont donnés sur les figures (Figure III.5) jusqu'à (Figure III.34)

Pour  $\alpha = 20^\circ$

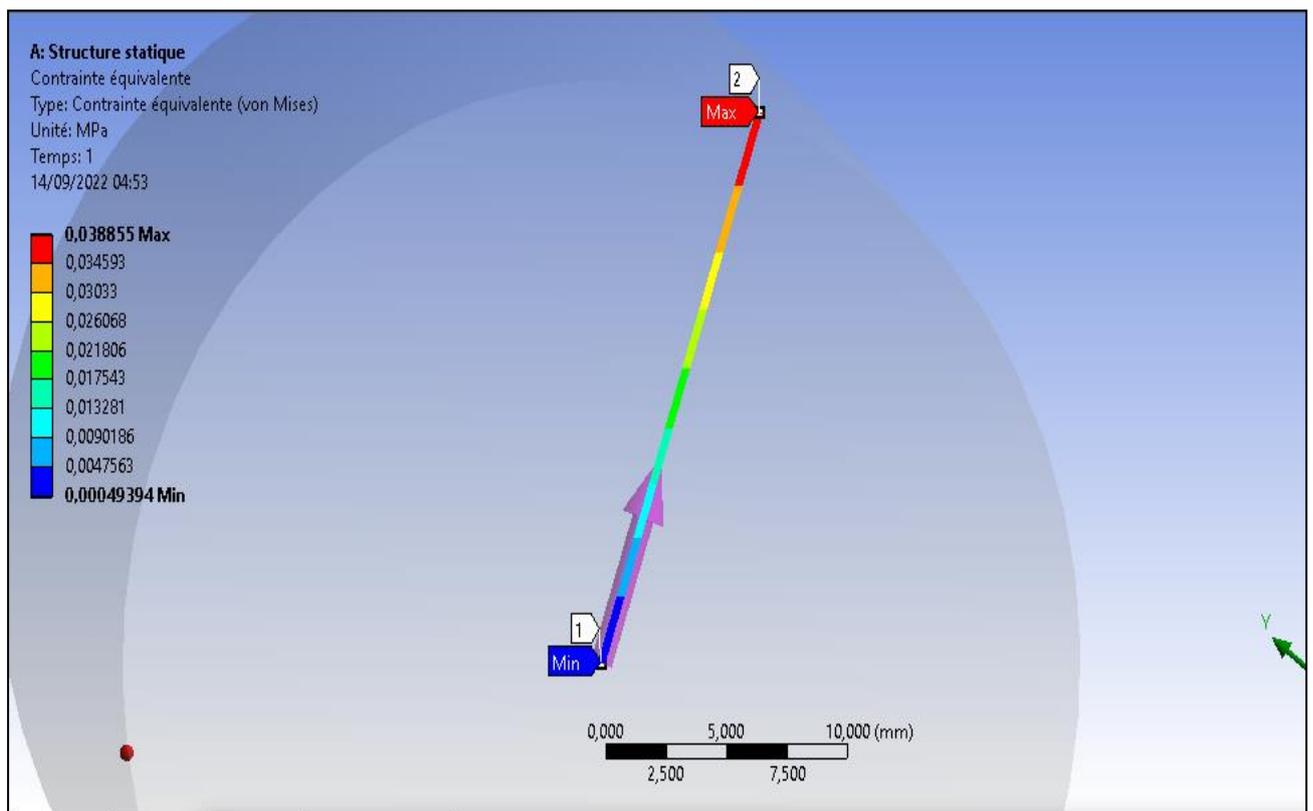


Figure 0.5 : Distribution des contraintes de Von Mises pour  $\alpha = 20^\circ$

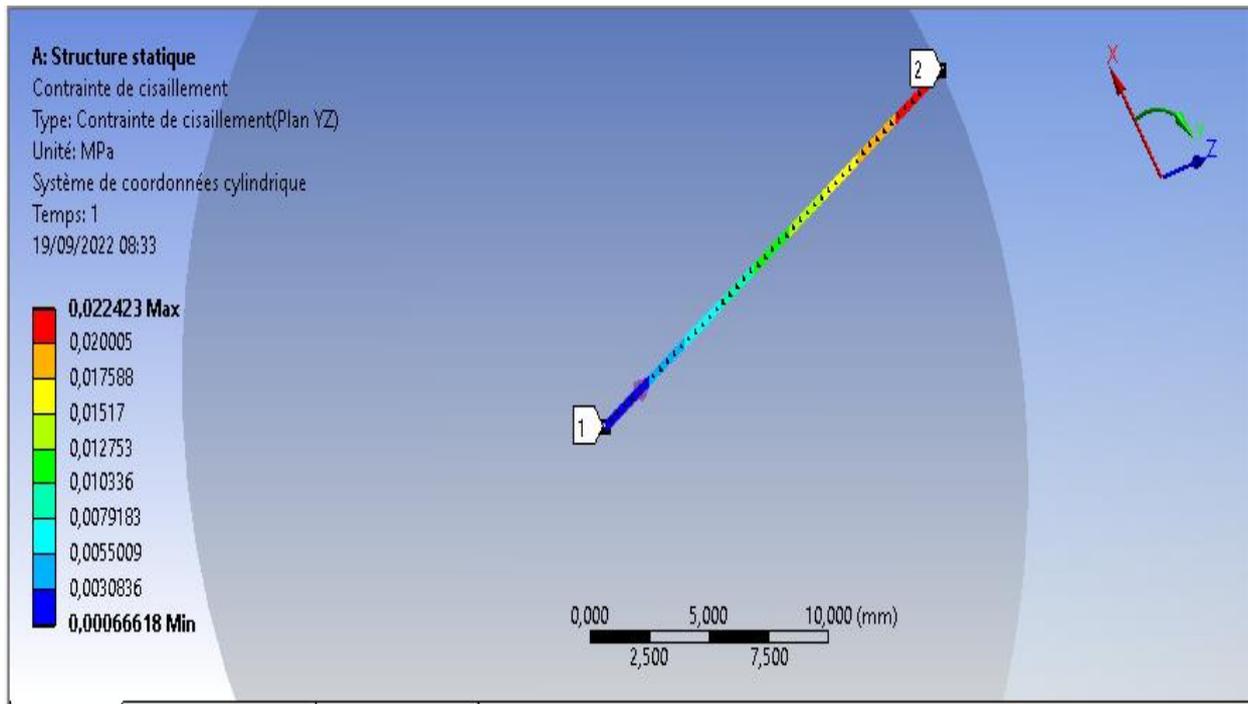


Figure 0.6 : Distribution des contraintes de cisaillement  $\sigma_{\theta z}$  suivant la trajectoire pour  $\alpha = 20^\circ$

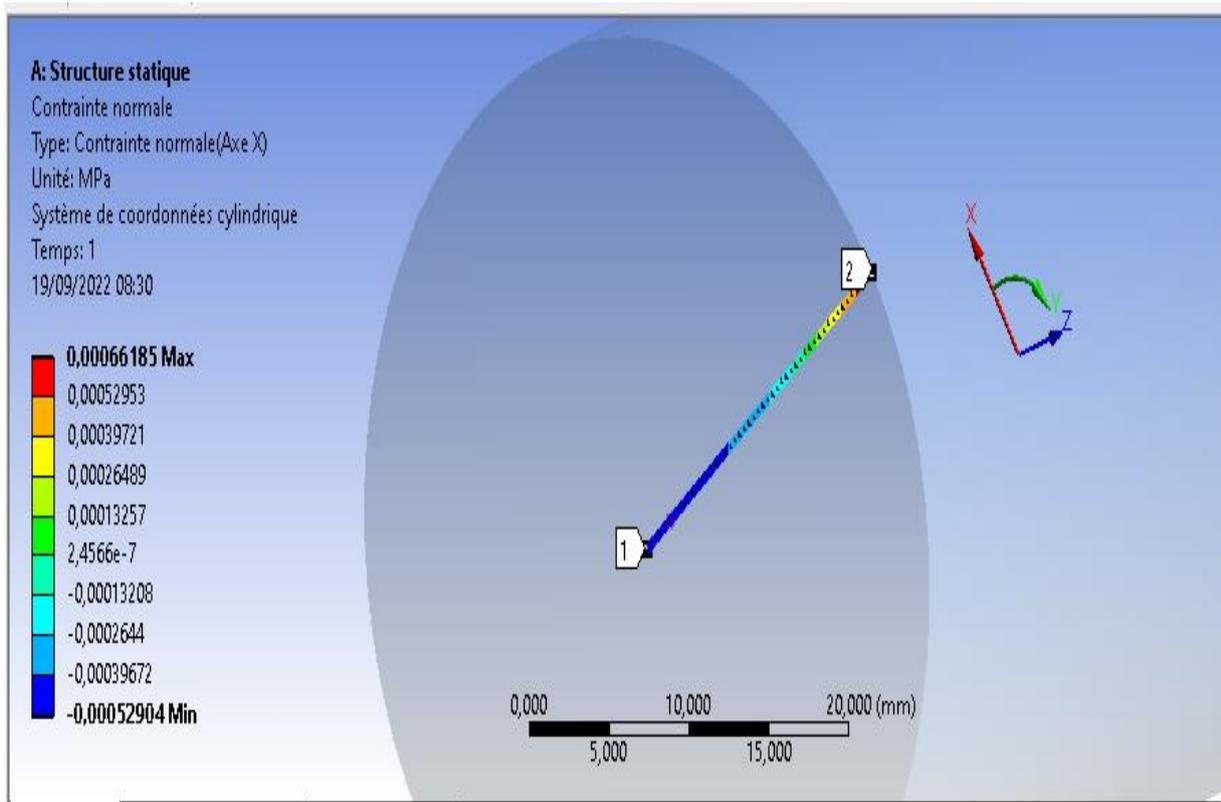
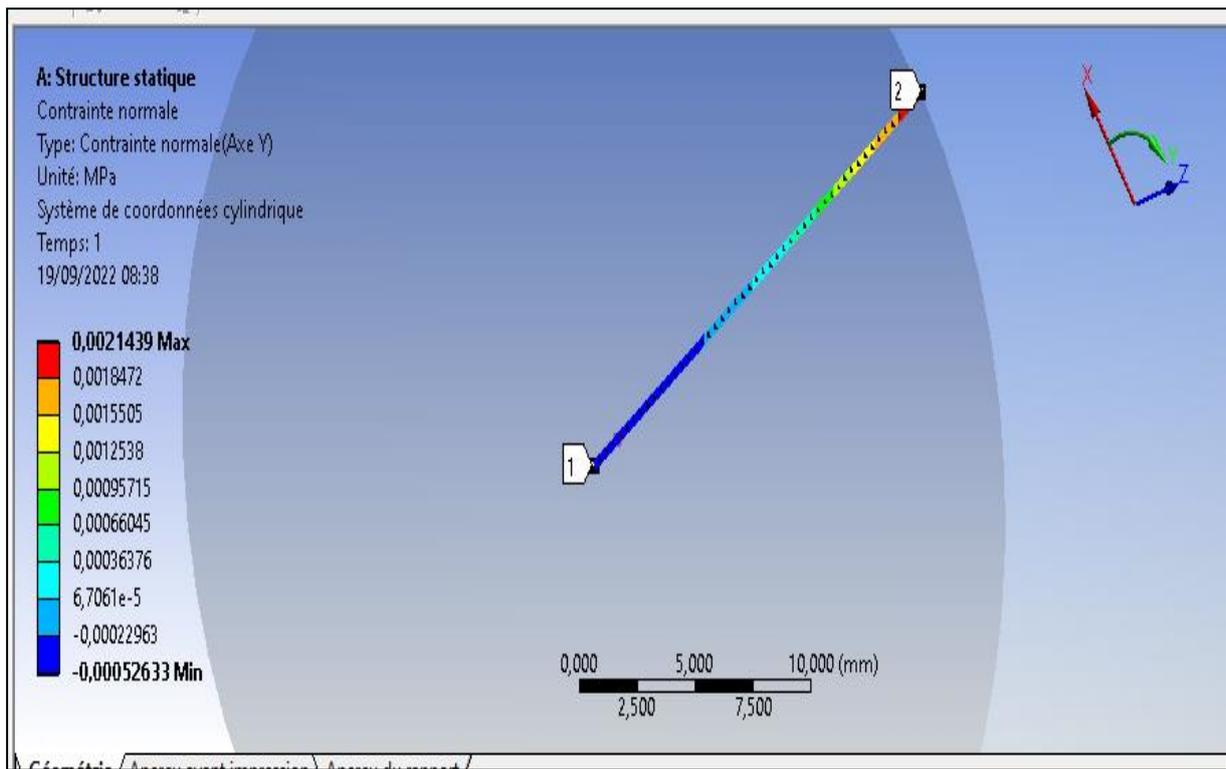
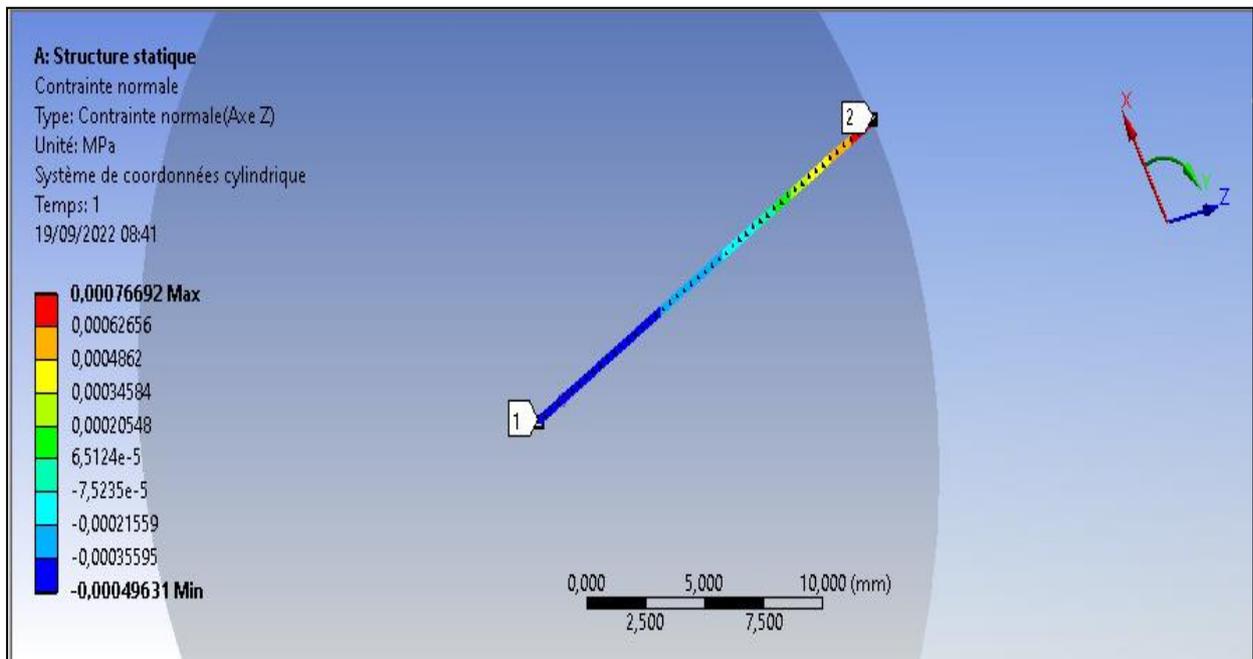


Figure 0.7 : Distribution des contraintes radiales  $\sigma_{rr}$  suivant la trajectoire pour  $\alpha = 20^\circ$

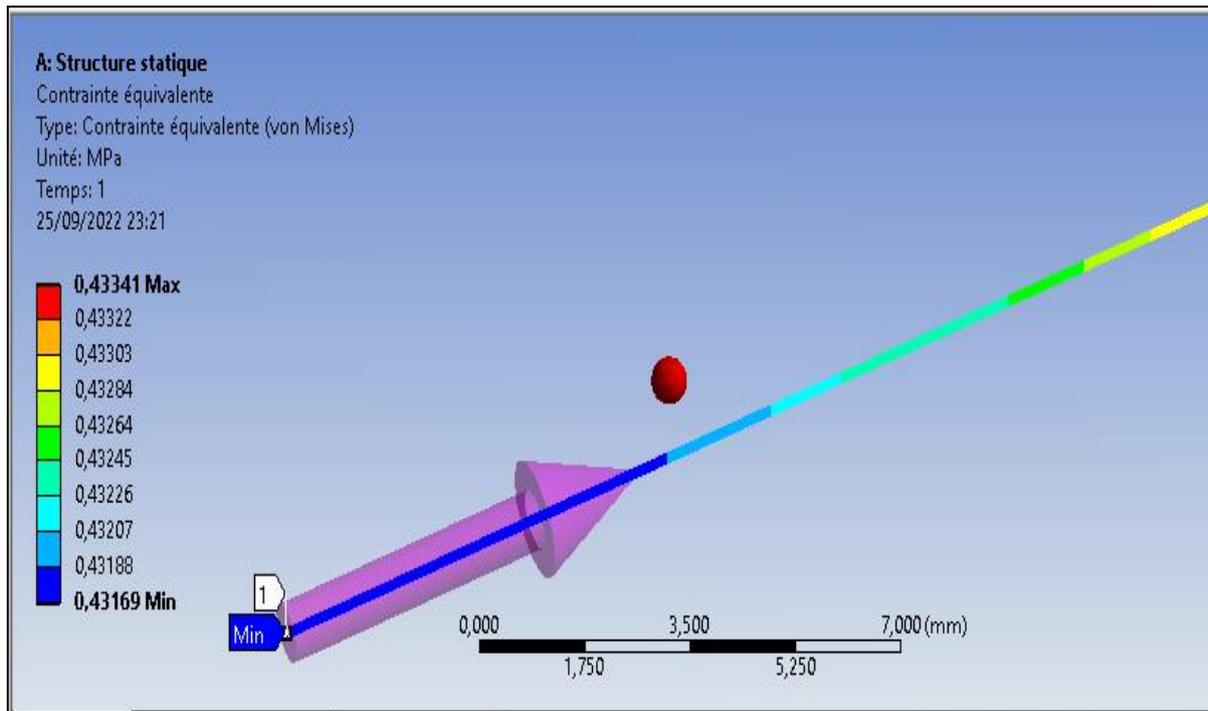


**Figure 0.8** : Distribution des contraintes tangentielles  $\sigma_{\theta\theta}$  suivant la trajectoire pour  $\alpha = 20^\circ$

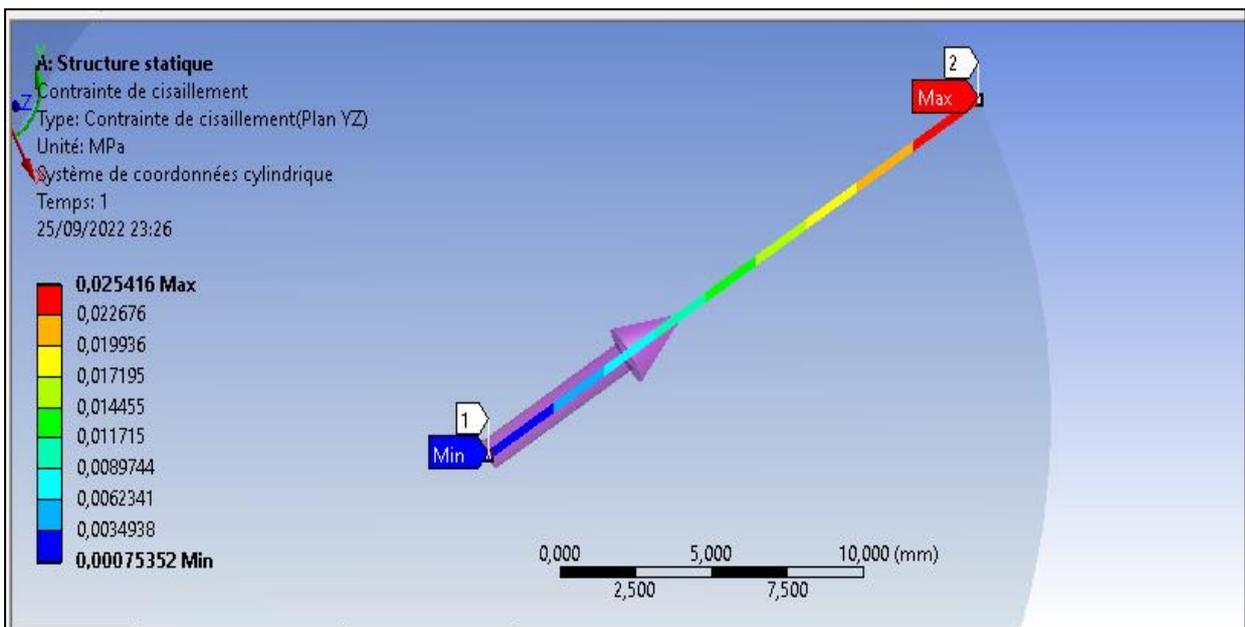


**Figure 0.9** : Distribution des contraintes axiales  $\sigma_{zz}$  suivant la trajectoire pour  $\alpha = 20^\circ$

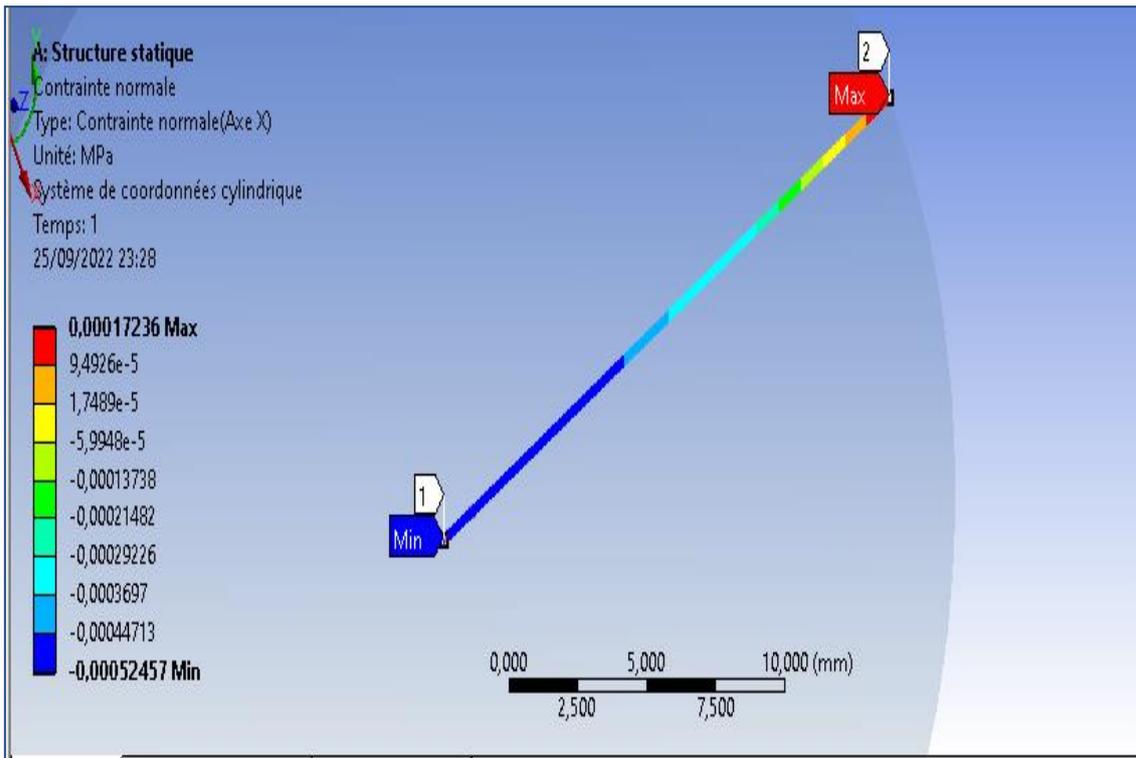
**Pour  $\alpha = 20^\circ$  et une élongation de  $\lambda = 1.4$**



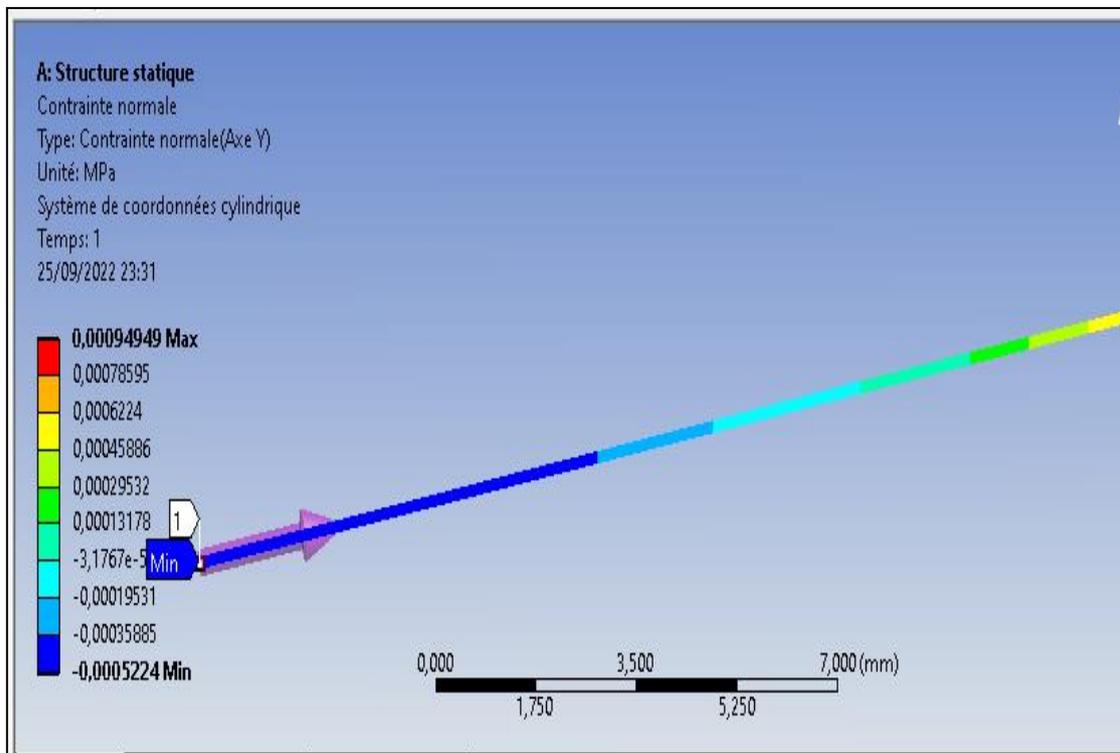
**Figure 0.10** : Distribution des contraintes Von Mises suivant la trajectoire L pour  $\alpha=20^\circ$  et  $\lambda=1.4$



**Figure 0.11** : Distribution des contraintes de cisaillement  $\sigma_{0z}$  suivant la trajectoire L pour  $\alpha = 20^\circ$  et  $\lambda = 1.4$



**Figure 0.12** : Distribution des contraintes radiales  $\sigma_{rr}$  suivant la trajectoire  $\mathcal{L}$  pour  $\alpha = 20^\circ$  et  $\lambda = 1.4$



**Figure 0.13** : Distribution des contraintes tangentielles  $\sigma_{\theta\theta}$  suivant la trajectoire  $\mathcal{L}$  pour  $\alpha = 20^\circ$  et  $\lambda = 1.4$

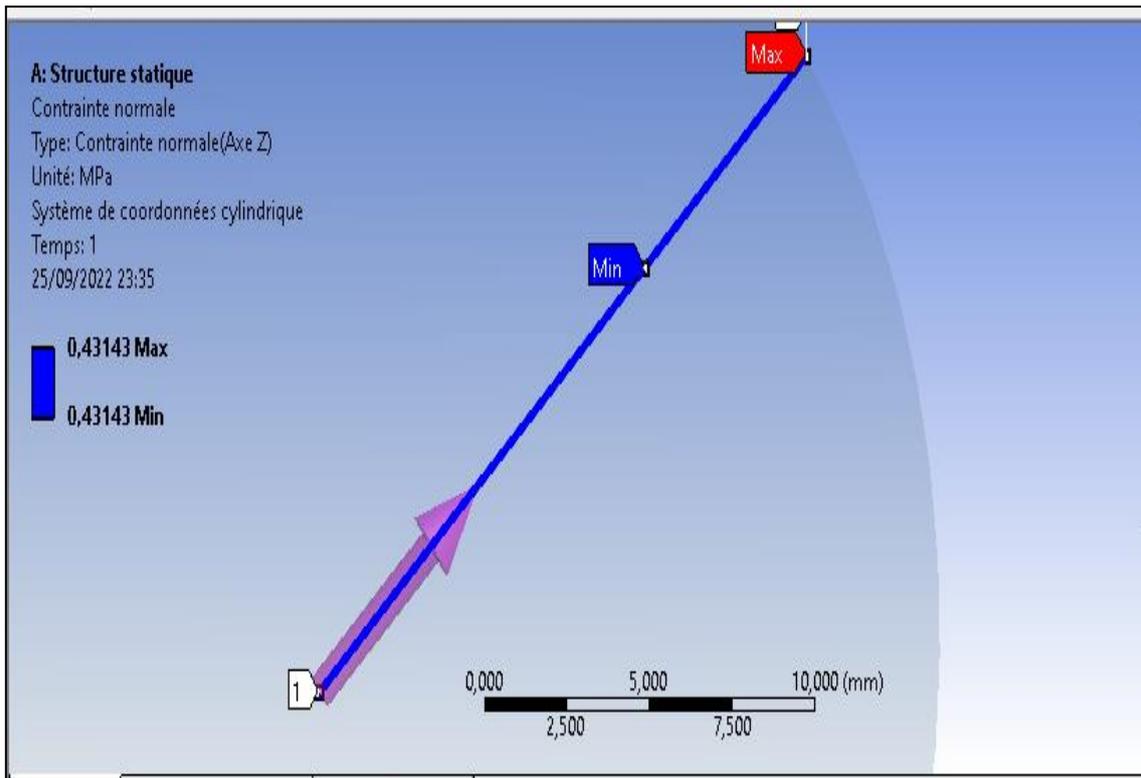


Figure 0.14 : Distribution des contraintes axiales  $\sigma_{zz}$  suivant la trajectoire  $\mathcal{L}$  pour  $\alpha = 20^\circ$  et  $\lambda=1.4$

Pour un angle de torsion  $\alpha = 45^\circ$

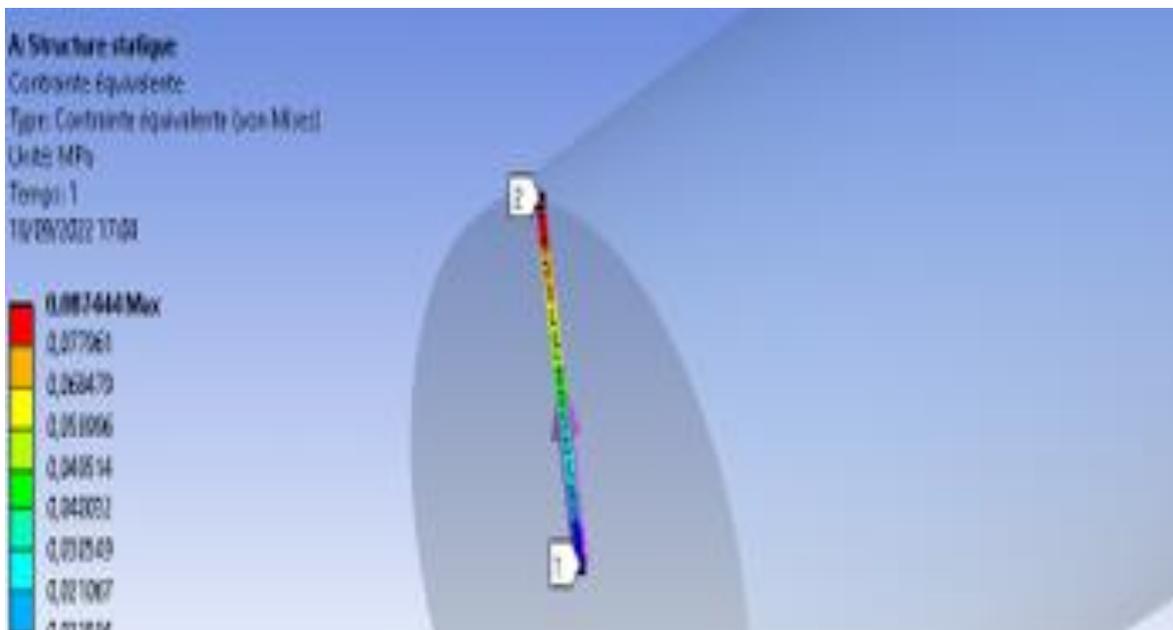


Figure III. 15: Distribution des contraintes de Von Mises suivant la trajectoire  $\mathcal{L}$  pour  $\alpha = 45^\circ$

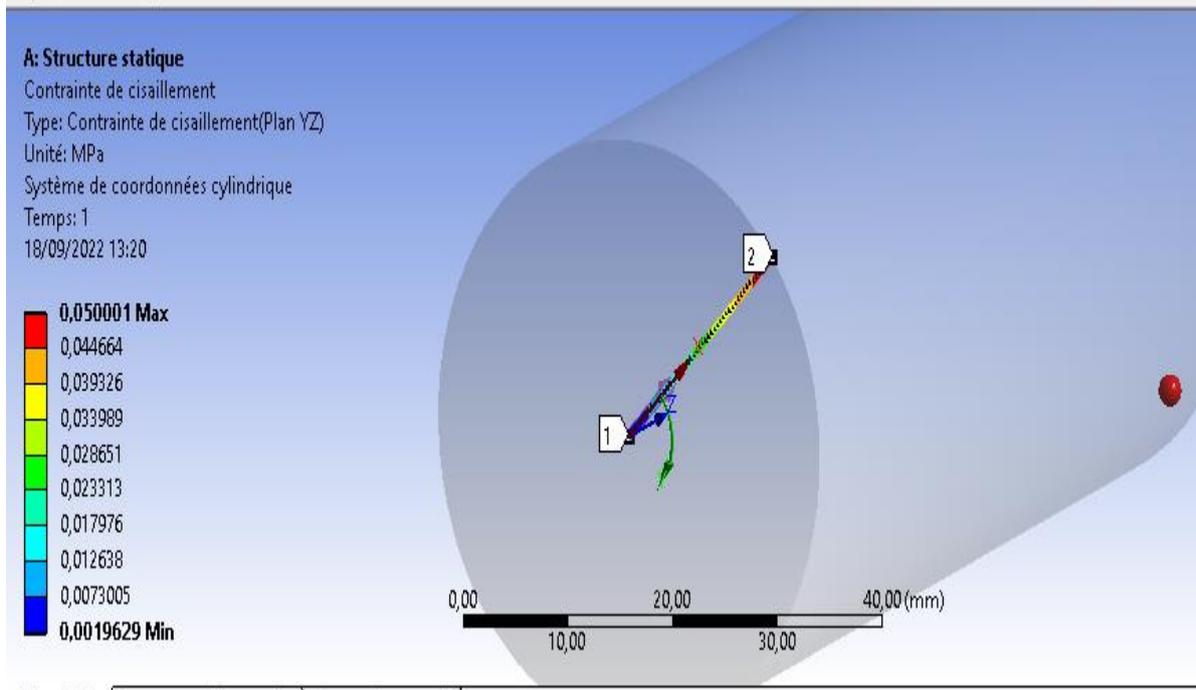


Figure III.16: Distribution des contraintes de cisaillement  $\sigma_{\theta z}$  suivant la trajectoire  $\mathcal{L}$  pour  $\alpha = 45^\circ$

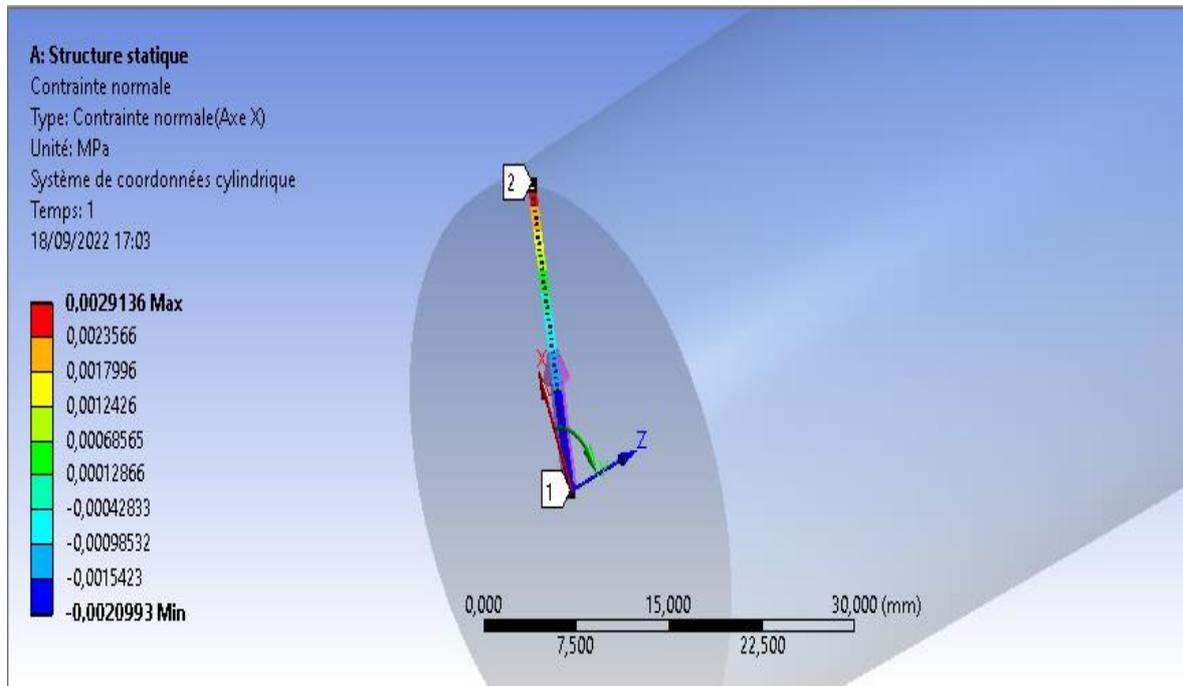


Figure III.17: Distribution des contraintes radiales  $\sigma_{rr}$  suivant la trajectoire  $\mathcal{L}$  pour  $\alpha = 45^\circ$

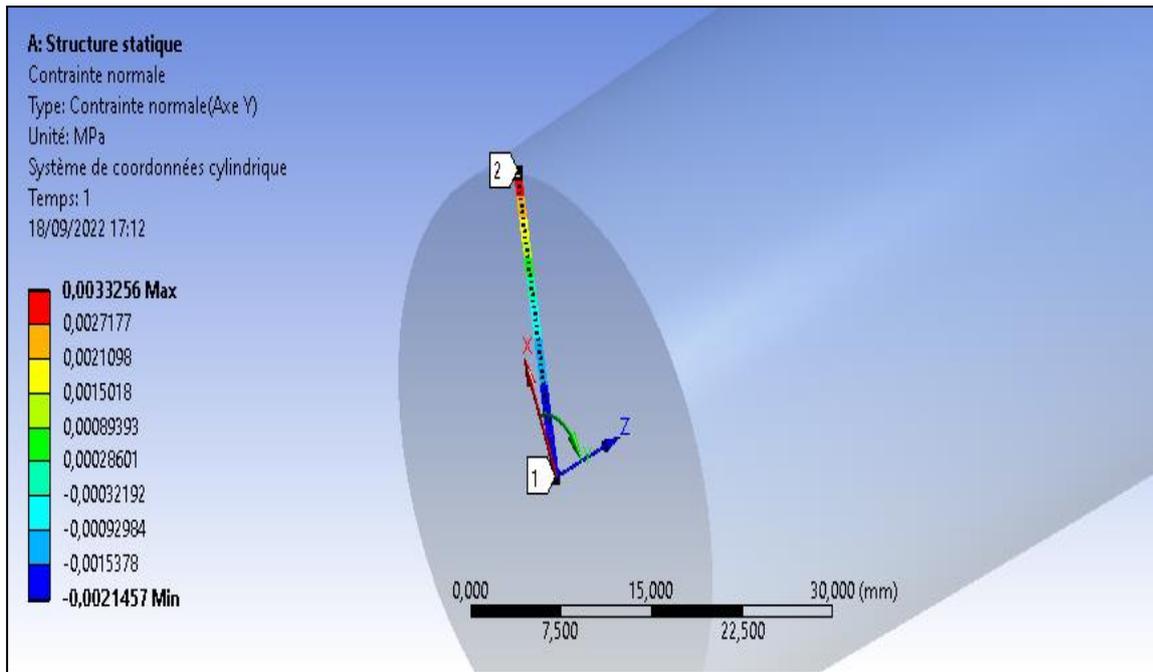


Figure III.18: Distribution des contraintes tangentielles  $\sigma_{\theta\theta}$  suivant trajectoire  $\mathcal{L}$  pour  $\alpha=45^\circ$

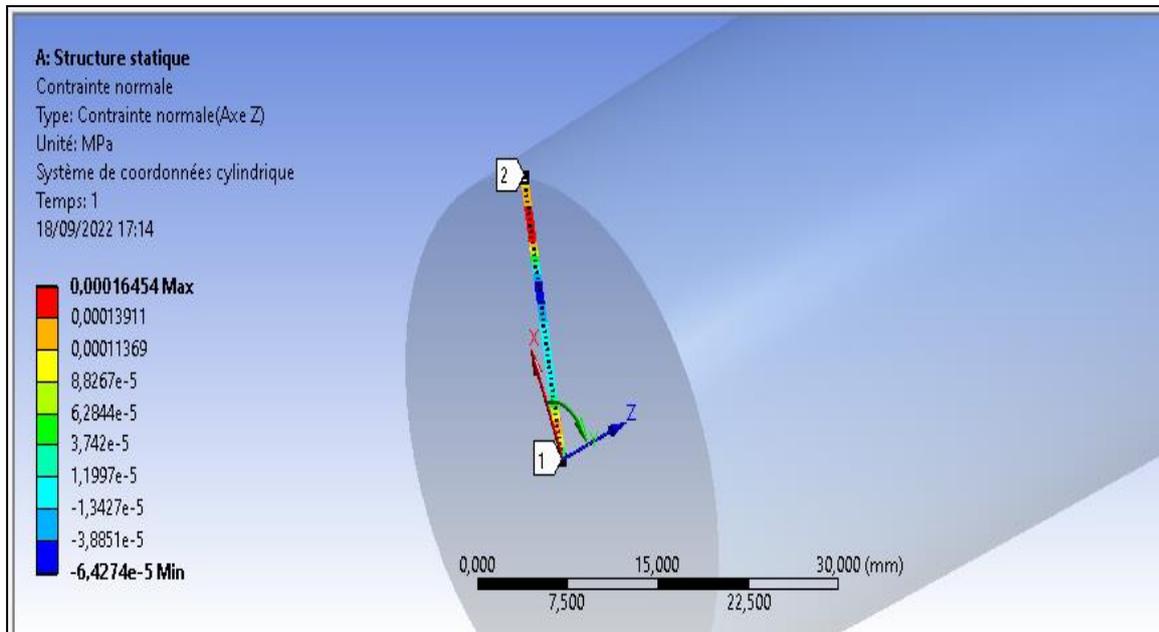


Figure III.19: Distribution des contraintes axiales  $\sigma_{zz}$  suivant la trajectoire  $\mathcal{L}$  pour  $\alpha = 45^\circ$   
 Pour un angle  $\alpha = 45^\circ$  et une élongation de  $\lambda = 1.4$

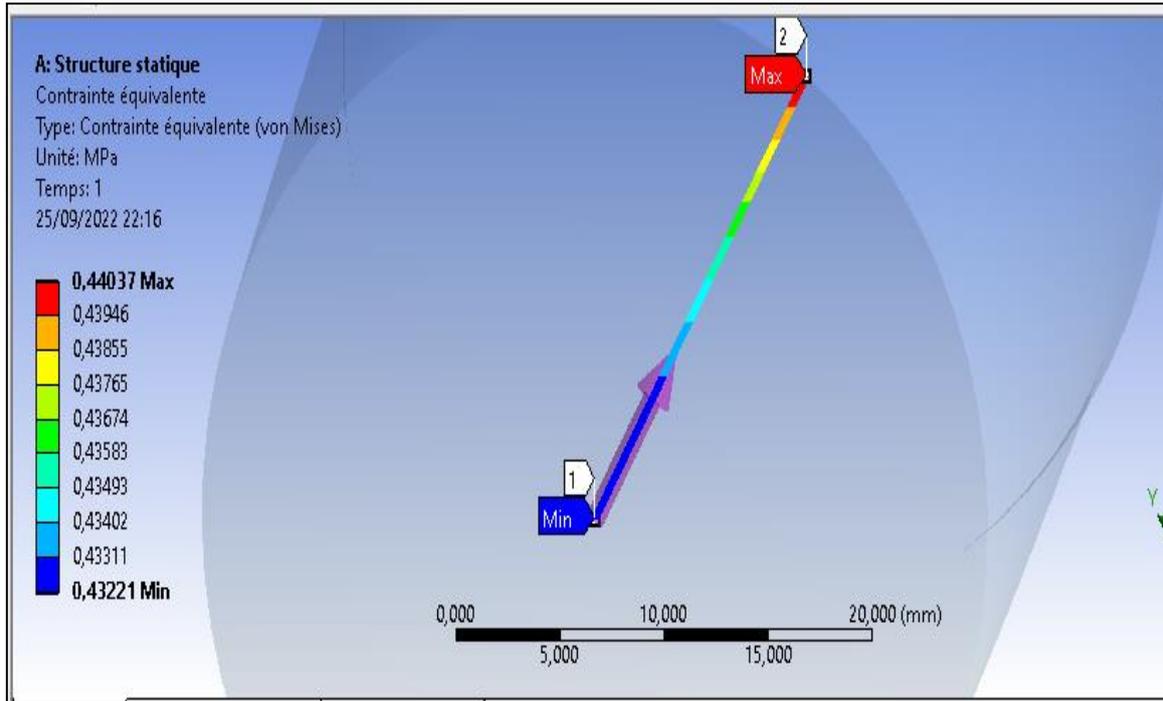


Figure III.20: Distribution des contraintes Von Mises suivant la trajectoire  $\mathcal{L}$  pour  $\alpha=45^\circ$  et  $\lambda=1.4$

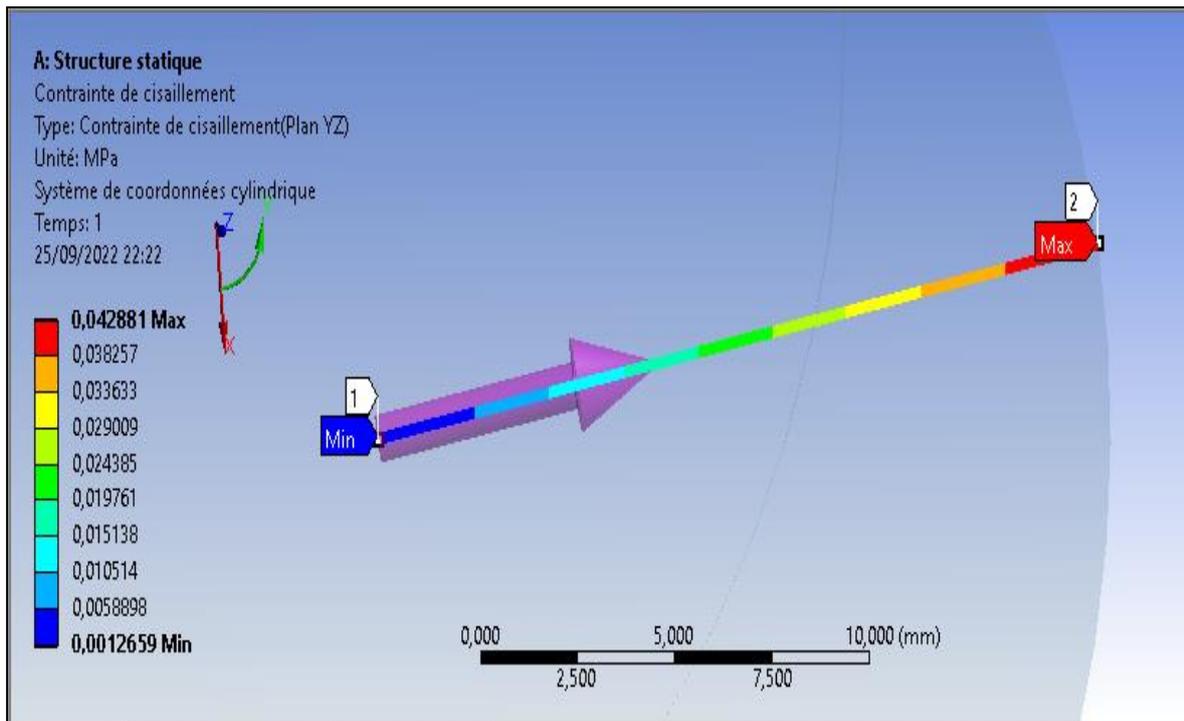


Figure III.21: Distribution des contraintes de cisaillement  $\sigma_{\theta z}$  suivant la trajectoire  $\mathcal{L}$  pour  $\alpha=45^\circ$  et  $\lambda=1.4$

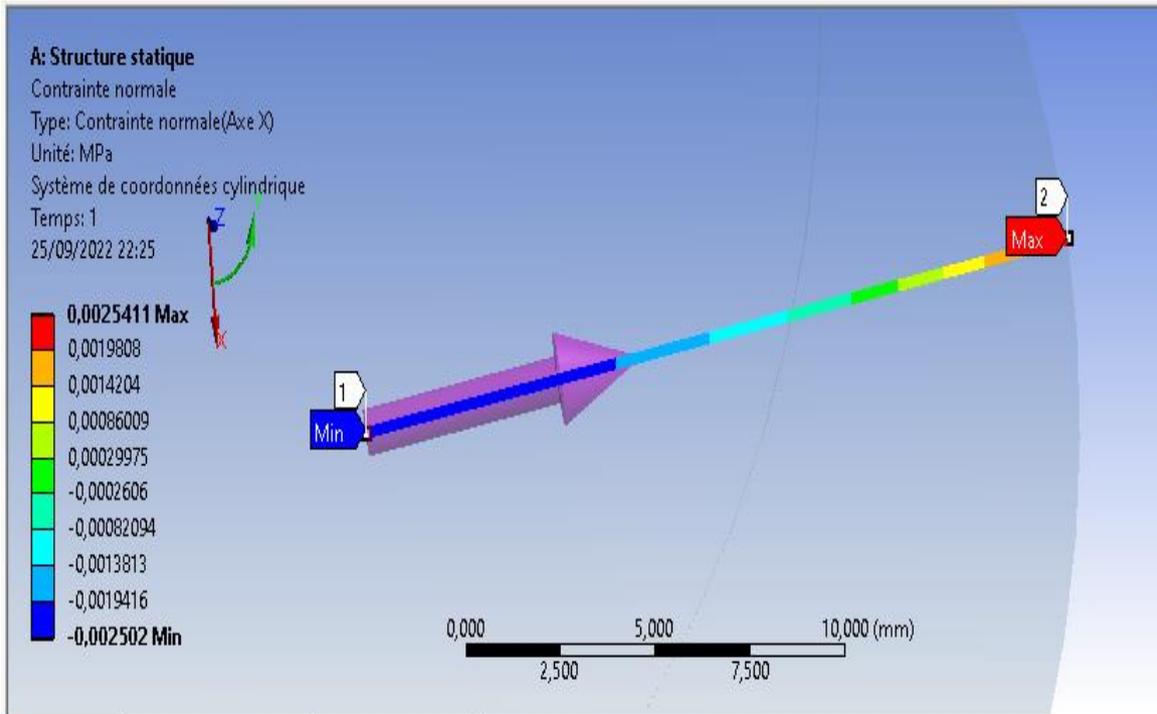


Figure III.22: Distribution des contraintes radiales  $\sigma_{rr}$  suivant la trajectoire  $\mathcal{L}$  pour  $\alpha=45^\circ$  et  $\lambda=1.4$

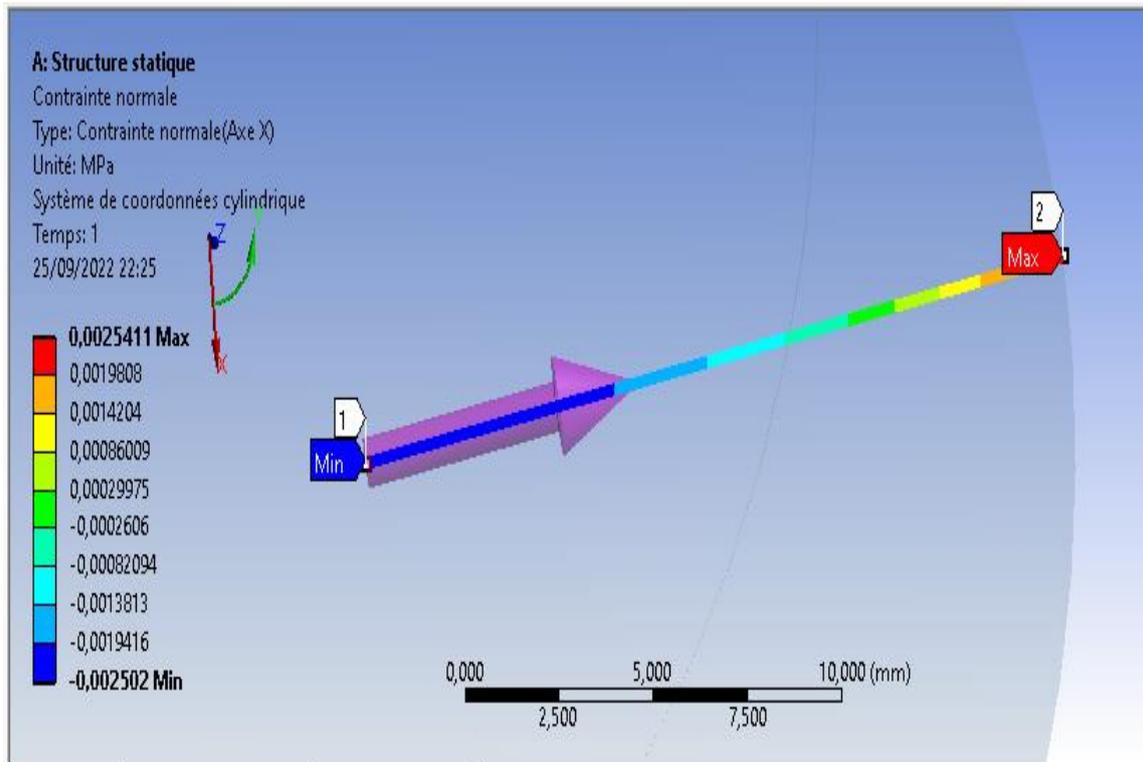
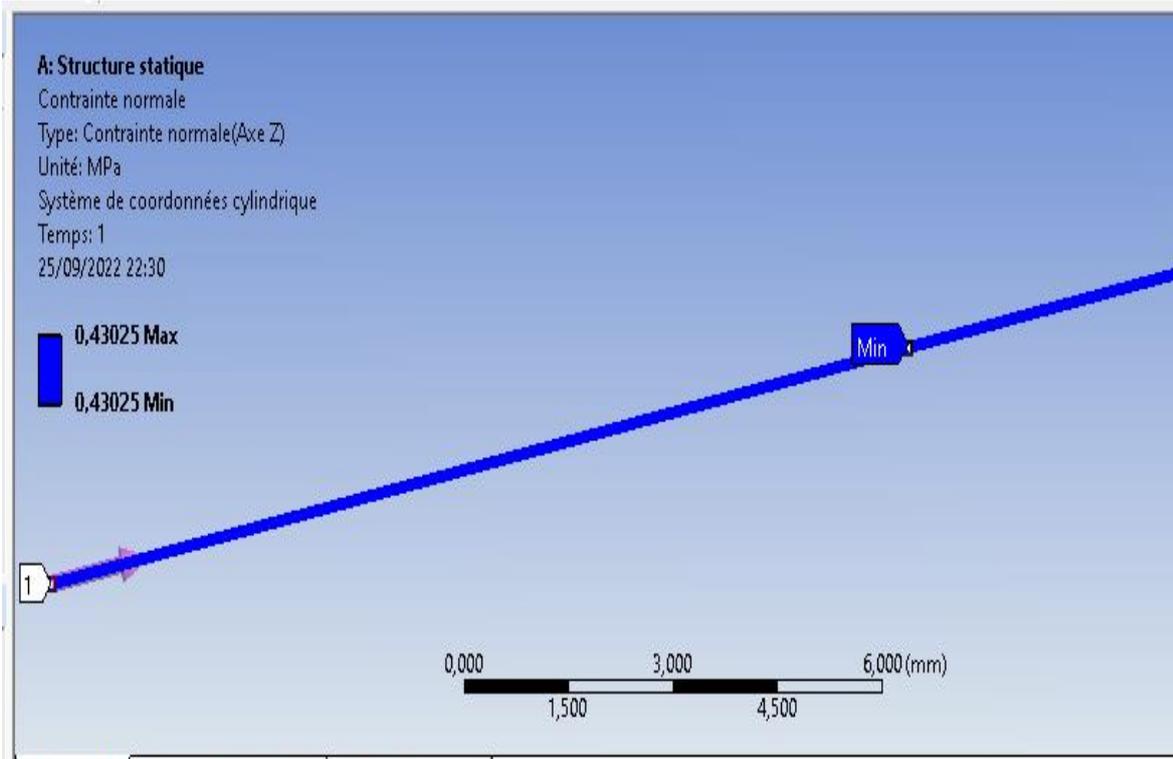
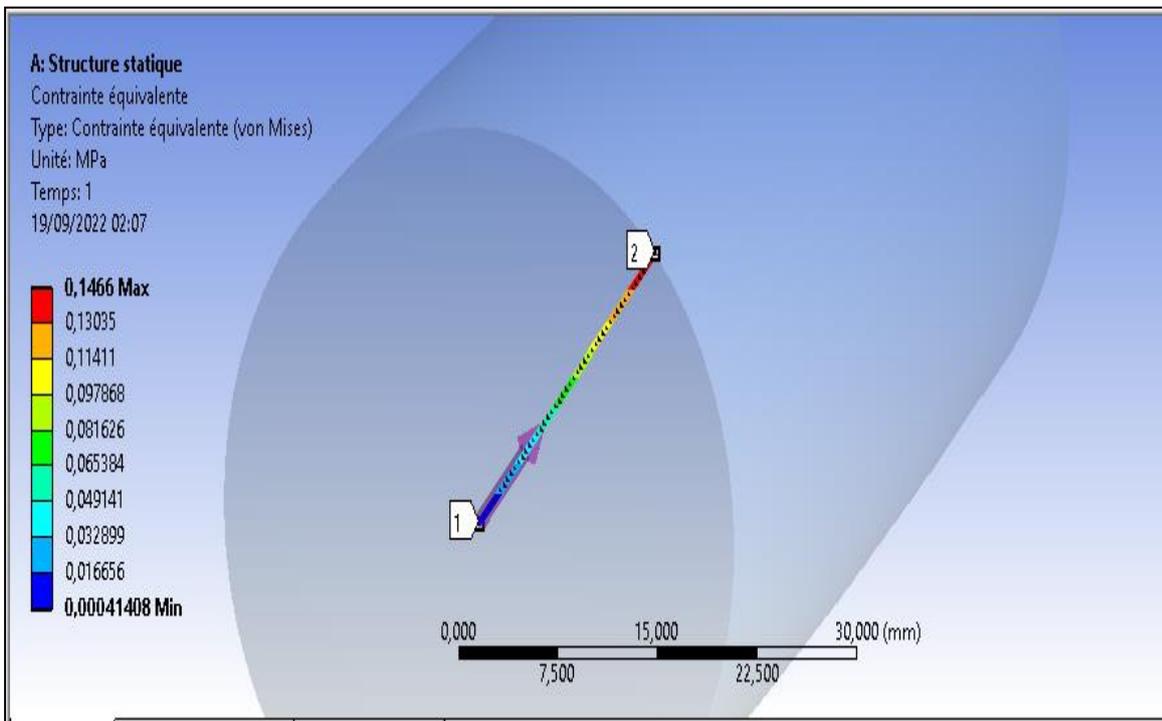


Figure III.23: Distribution des contraintes tangentielles  $\sigma_{\theta\theta}$  suivant la trajectoire  $\mathcal{L}$  pour  $\alpha=45^\circ$  et  $\lambda=1.4$



**Figure III.24:** Distribution des contraintes axiales  $\sigma_{zz}$  suivant la trajectoire  $\mathcal{L}$  pour  $\alpha = 45^\circ$  et  $\lambda=1.4$

Pour une rotation d'angle  $\alpha = 75^\circ$



**Figure III.25:** Distribution des contraintes de Von Mises suivant la trajectoire  $\mathcal{L}$  pour  $\alpha=75^\circ$

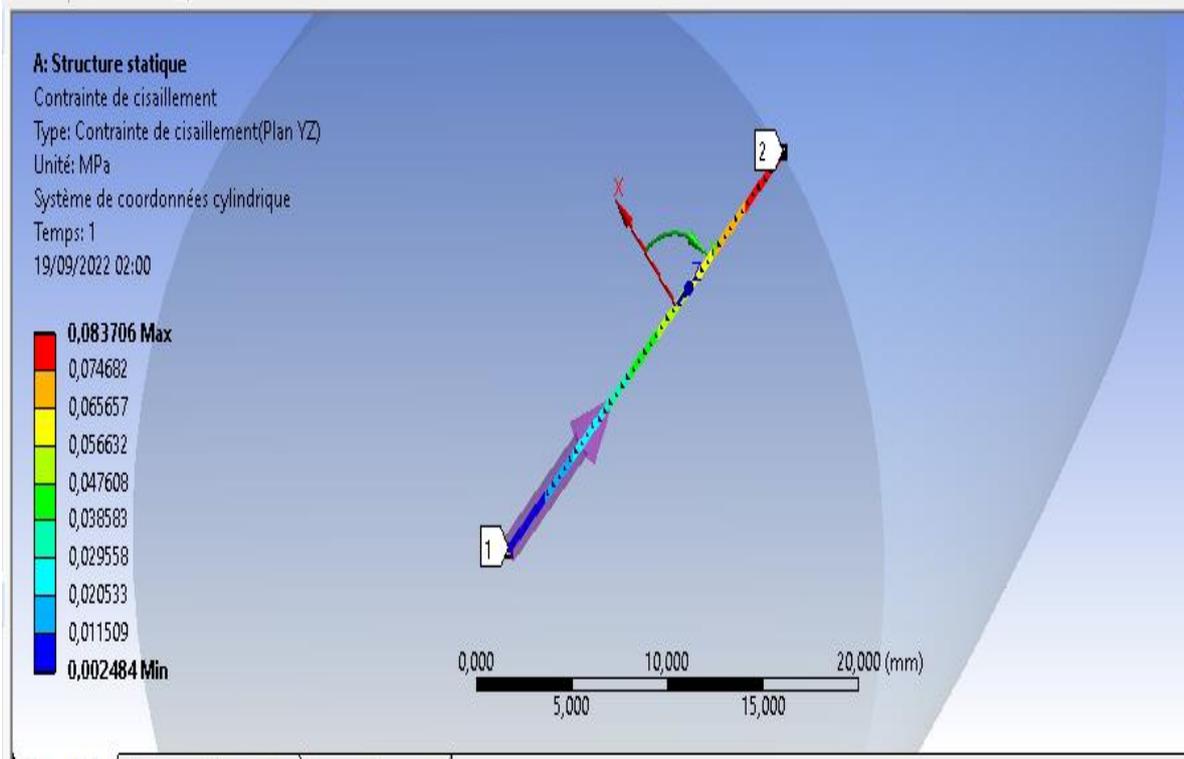


Figure III.26: Distribution des contraintes de cisaillement  $\sigma_{\theta z}$  suivant la trajectoire  $\mathcal{L}$  pour  $\alpha=75^\circ$

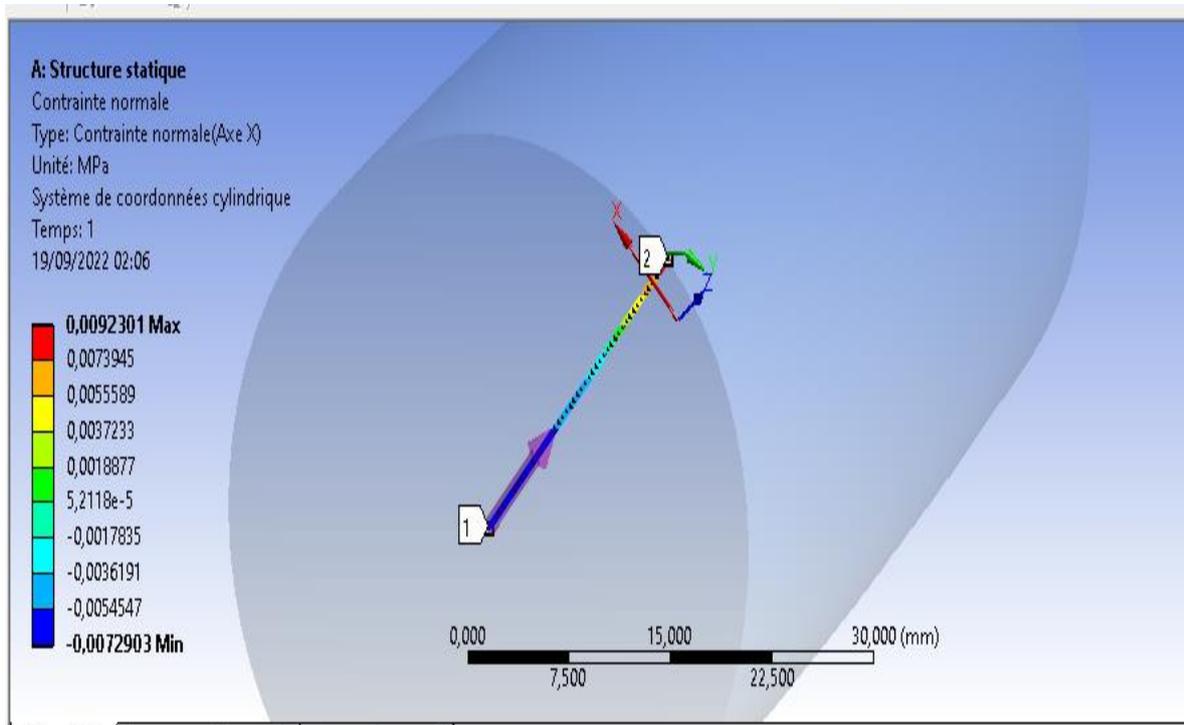


Figure III.27: Distribution des contraintes radiales  $\sigma_{rr}$  suivant la trajectoire  $\mathcal{L}$  pour  $\alpha=75^\circ$

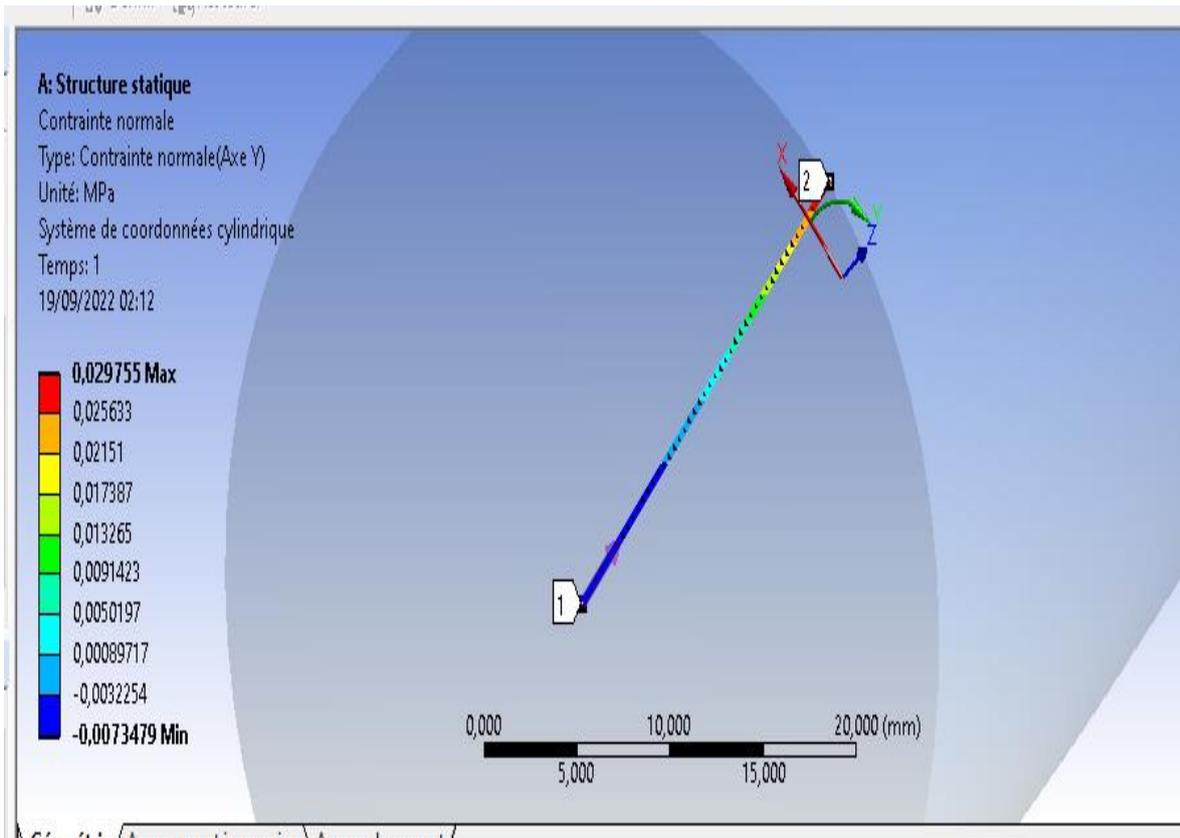


Figure III.28 : Distribution des contraintes tangentielles  $\sigma_{\theta\theta}$  suivant la trajectoire  $\mathcal{L}$  pour  $\alpha=75^\circ$

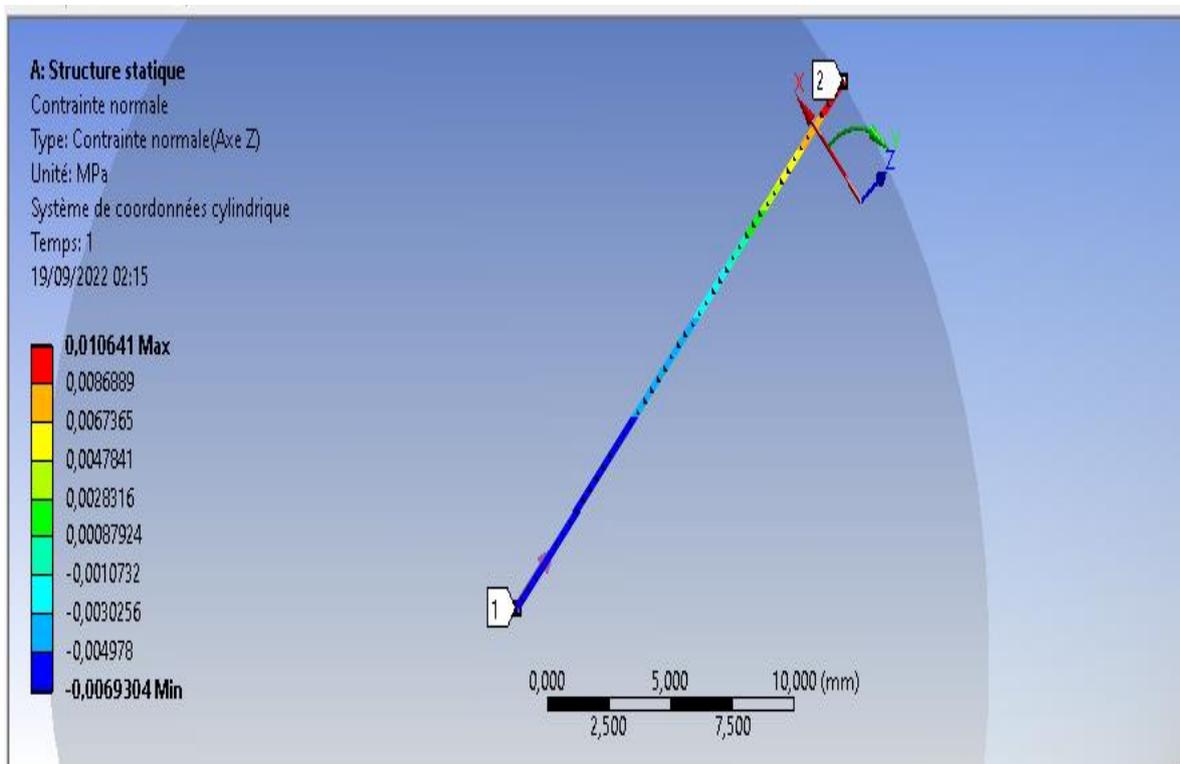


Figure III.29: Distribution des contraintes axiales  $\sigma_{zz}$  suivant la trajectoire  $\mathcal{L}$  pour  $\alpha=75^\circ$

Pour un angle  $\alpha = 75^\circ$  et une élongation de  $\lambda = 1.4$

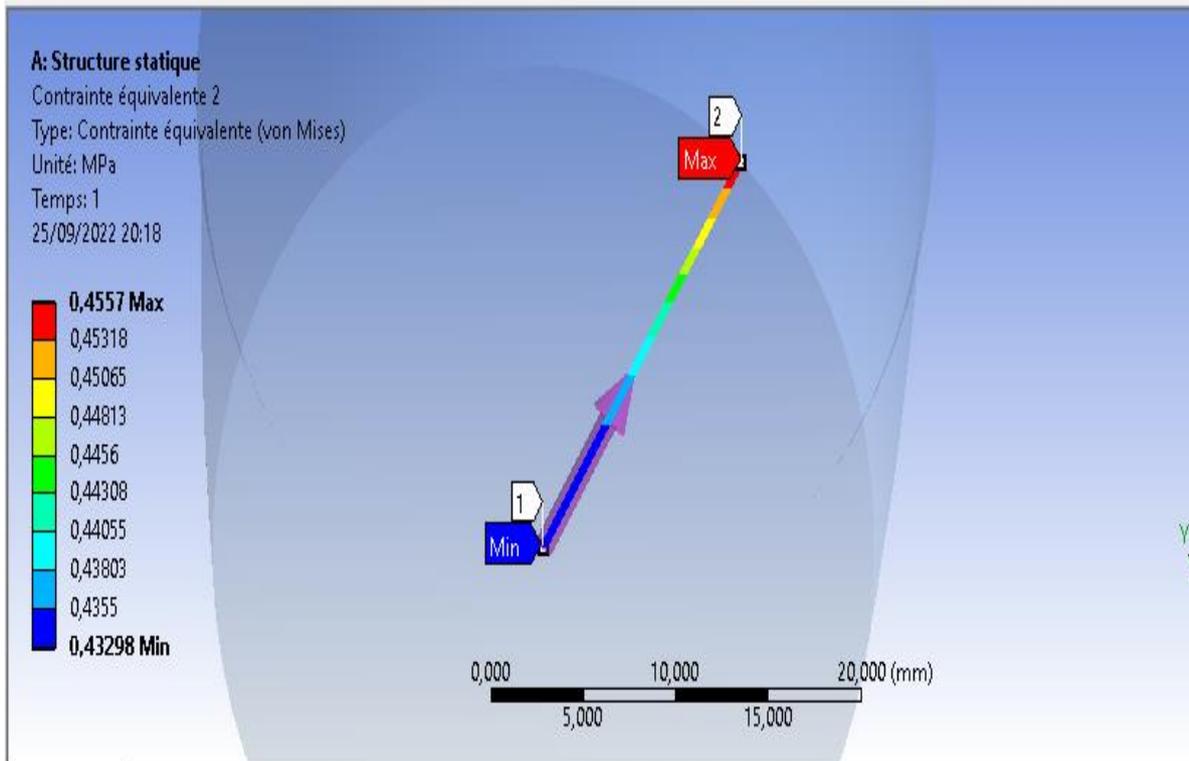


Figure III.30: Distribution des contraintes de Von Mises suivant la trajectoire  $\mathcal{L}$  pour  $\alpha=75^\circ$  et  $\lambda=1.4$

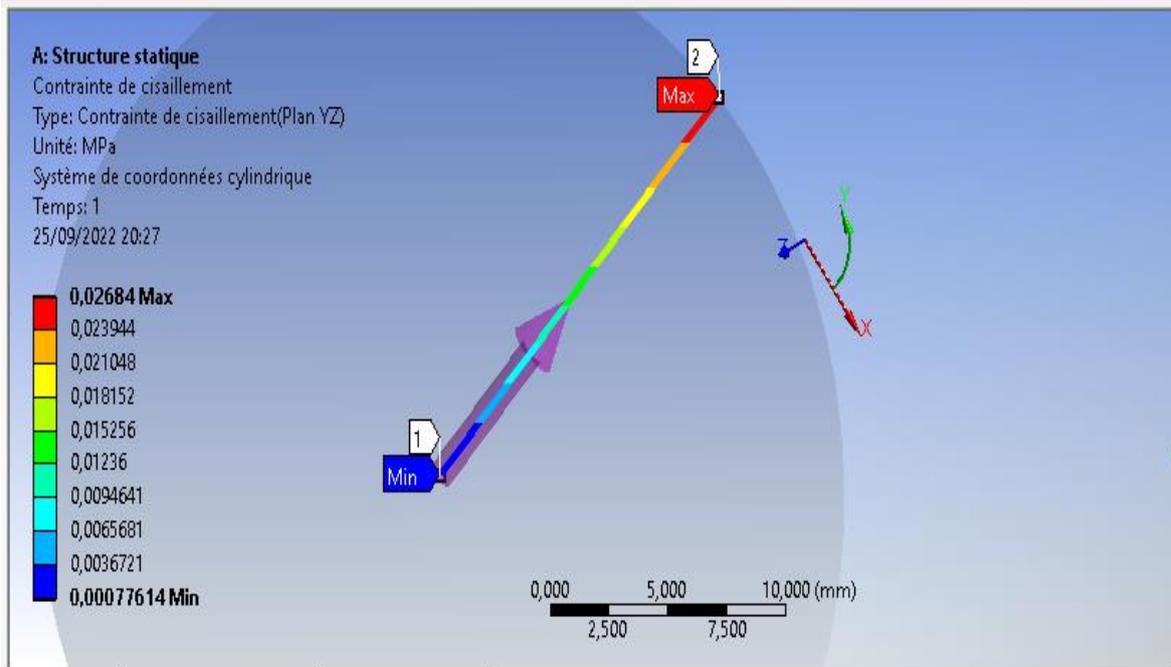
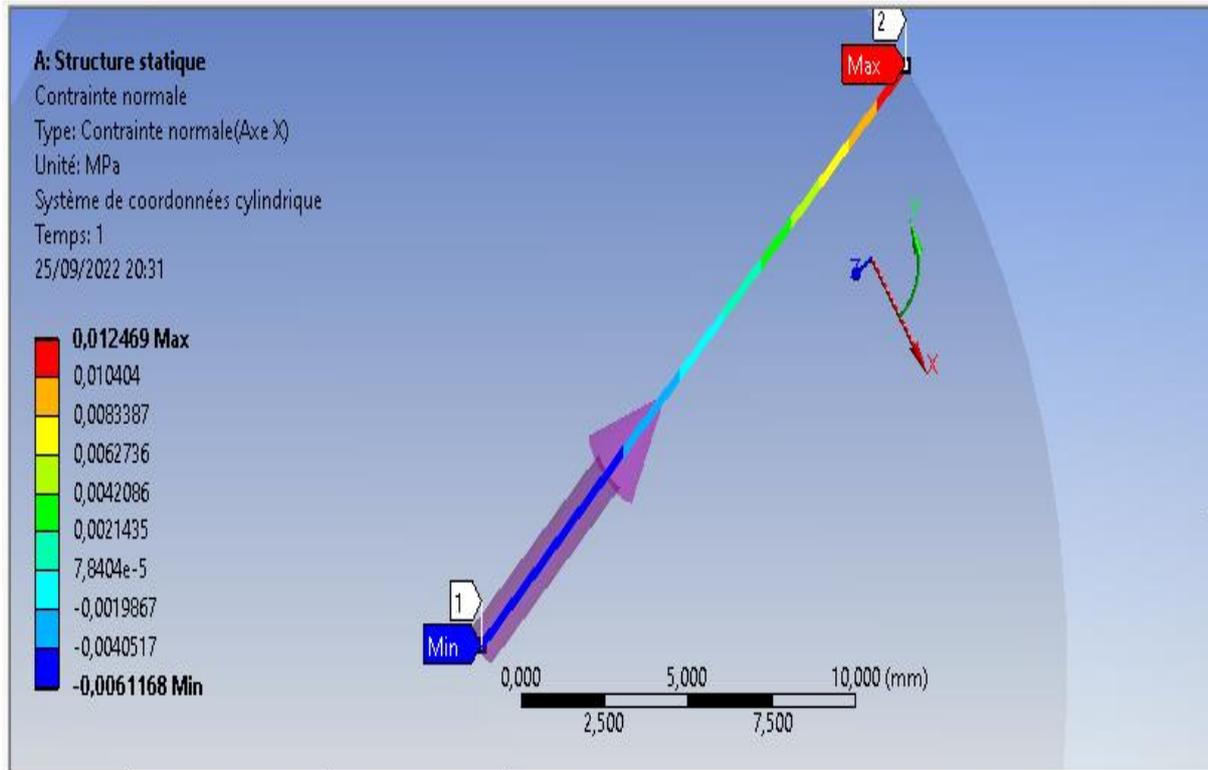
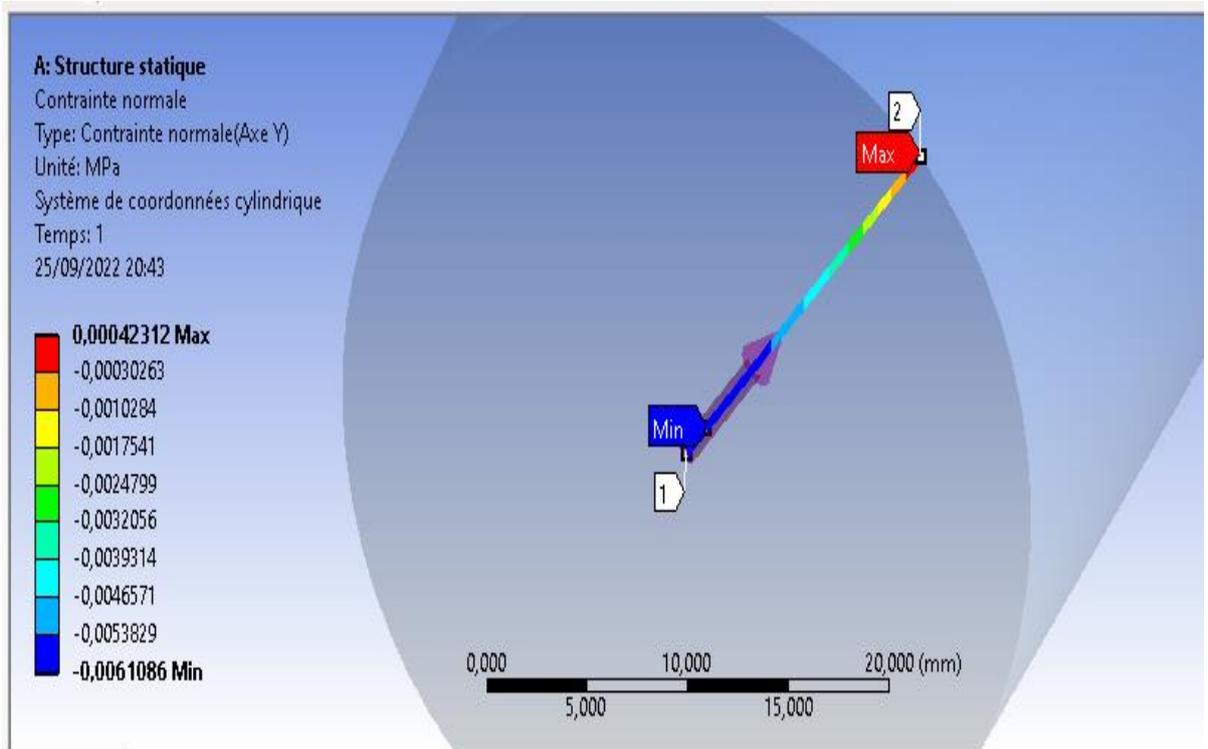


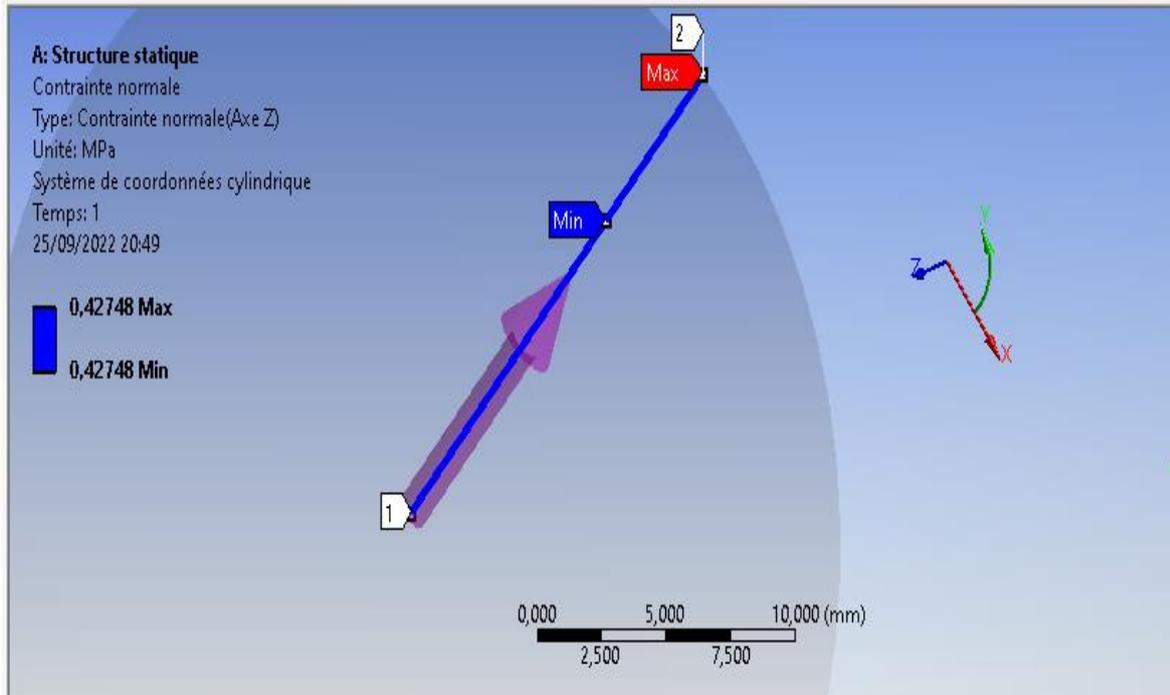
Figure III.31: Distribution des contraintes de cisaillement  $\sigma_{\theta z}$  suivant la trajectoire  $\mathcal{L}$  pour  $\alpha=75^\circ$  et  $\lambda=1.4$



**Figure III.32:** Distribution des contraintes radiales  $\sigma_{rr}$  suivant la trajectoire  $\mathcal{L}$  pour  $\alpha=75^\circ$  et  $\lambda = 1.4$



**Figure III.33:** Distribution des contraintes tangentielles  $\sigma_{\theta\theta}$  suivant la trajectoire  $\mathcal{L}$  pour  $\alpha=75^\circ$  et  $\lambda = 1.4$

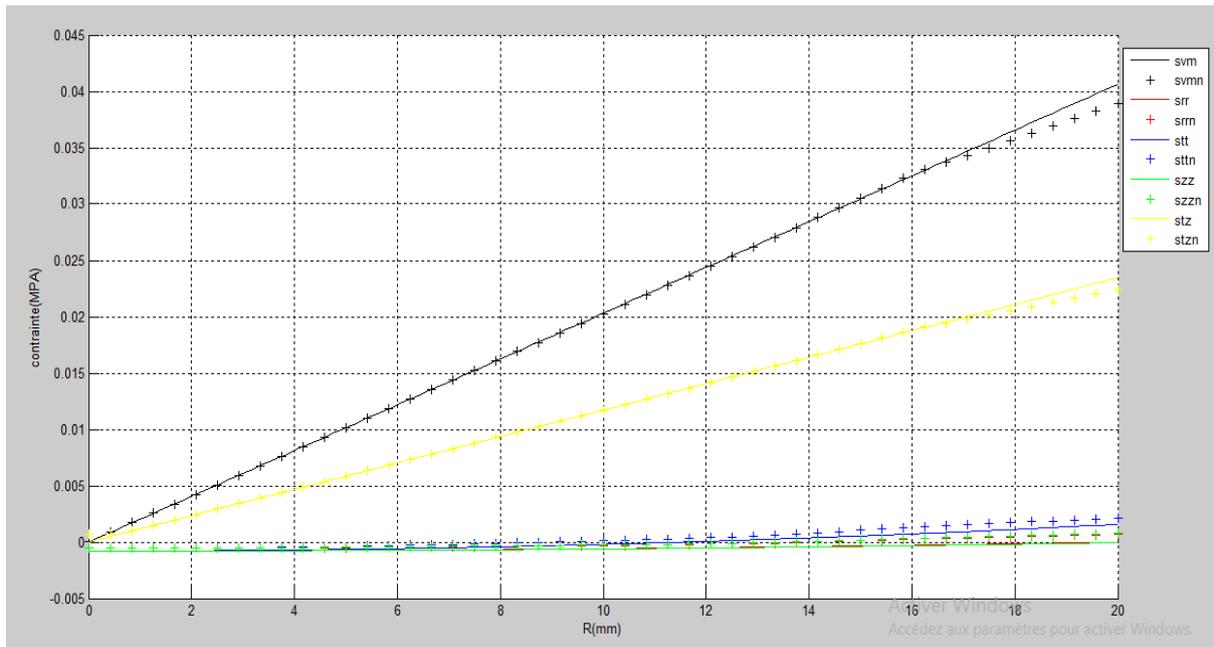


**Figure III.34:** Distribution des contraintes axiales  $\sigma_{zz}$  suivant la trajectoire  $\mathcal{L}$  pour  $\alpha=75^\circ$  et  $\lambda = 1.4$

### III.2.4 Comparaison des contraintes analytique et numérique

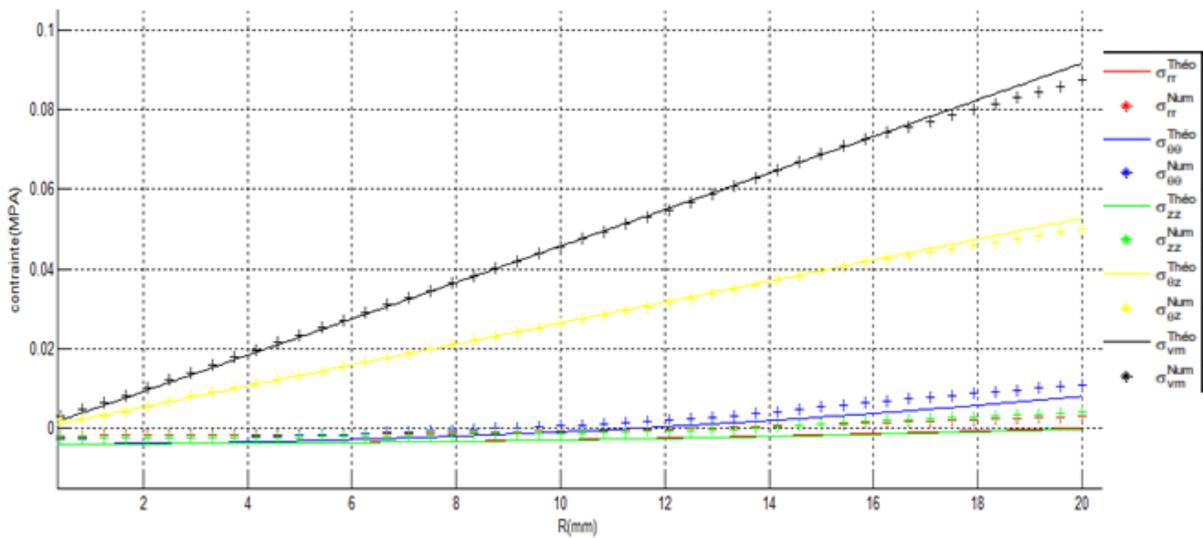
Dans cette étape, Nous allons comparer les contraintes ( $\sigma_{vm}$ ,  $\sigma_{\theta z}$ ,  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{\theta\theta}$ ,  $\sigma_{zz}$ ) suivant la trajectoire  $\mathcal{L}$  obtenues analytiquement avec celle de calcul élément finis, en présentant des courbes de contraintes en fonction de rayon.

**Pour  $\lambda = 1$  et  $\alpha = 20$  :**



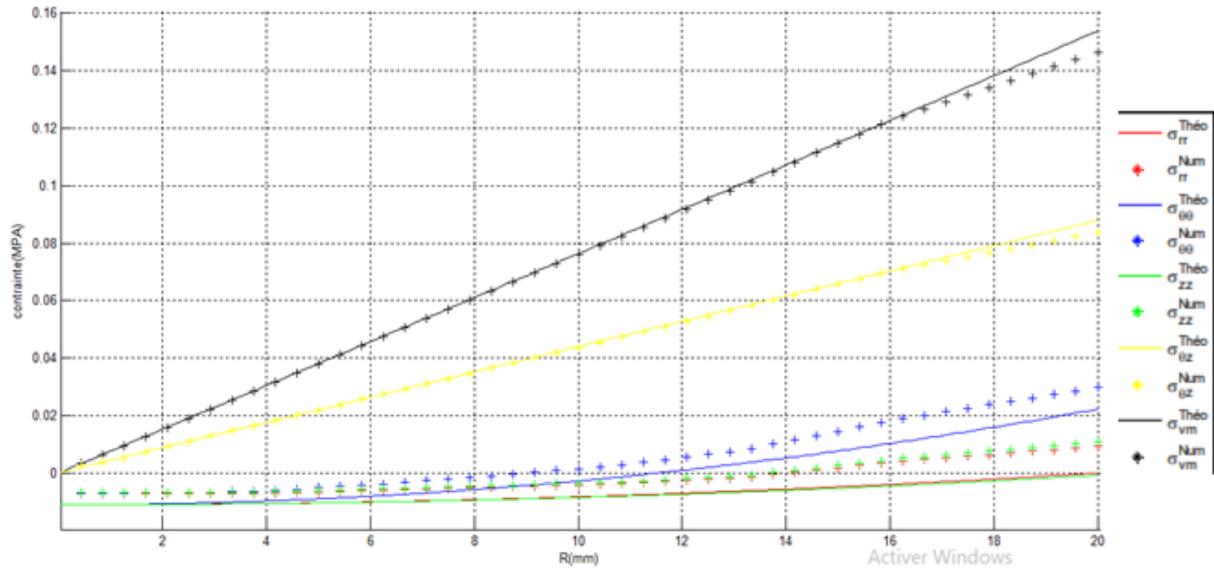
**Figure III.35 :** Evolution des contraintes en fonction du Rayon (R)

**Pour  $\lambda = 1$  et  $\alpha = 45$  :**



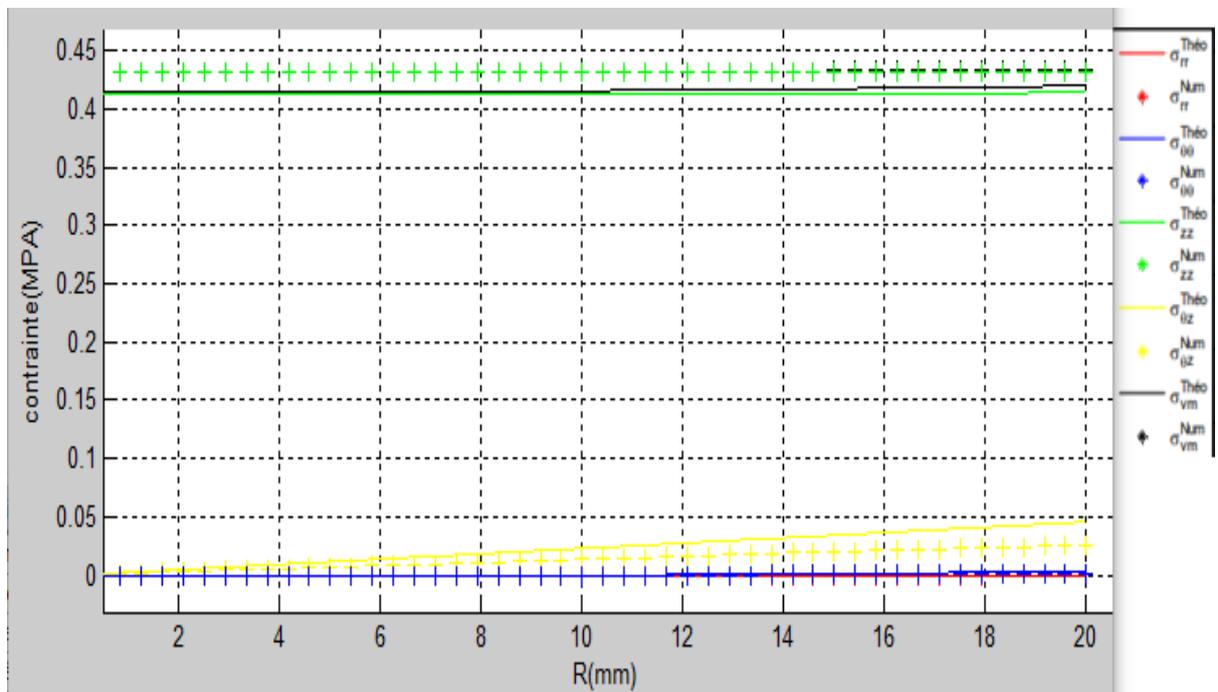
**Figure III.36 :** Evolution des contraintes en fonction du Rayon (R)

**Pour  $\lambda = 1$  et  $\alpha = 75$  :**



**Figure III.37 :** Evolution des contraintes en fonction du Rayon (R)

**Pour  $\lambda = 1.4$  et  $\alpha = 20$  :**



**Figure III.38 :** Evolution des contraintes en fonction du Rayon (R)

Pour  $\lambda = 1.4$  et  $\alpha = 45$  :

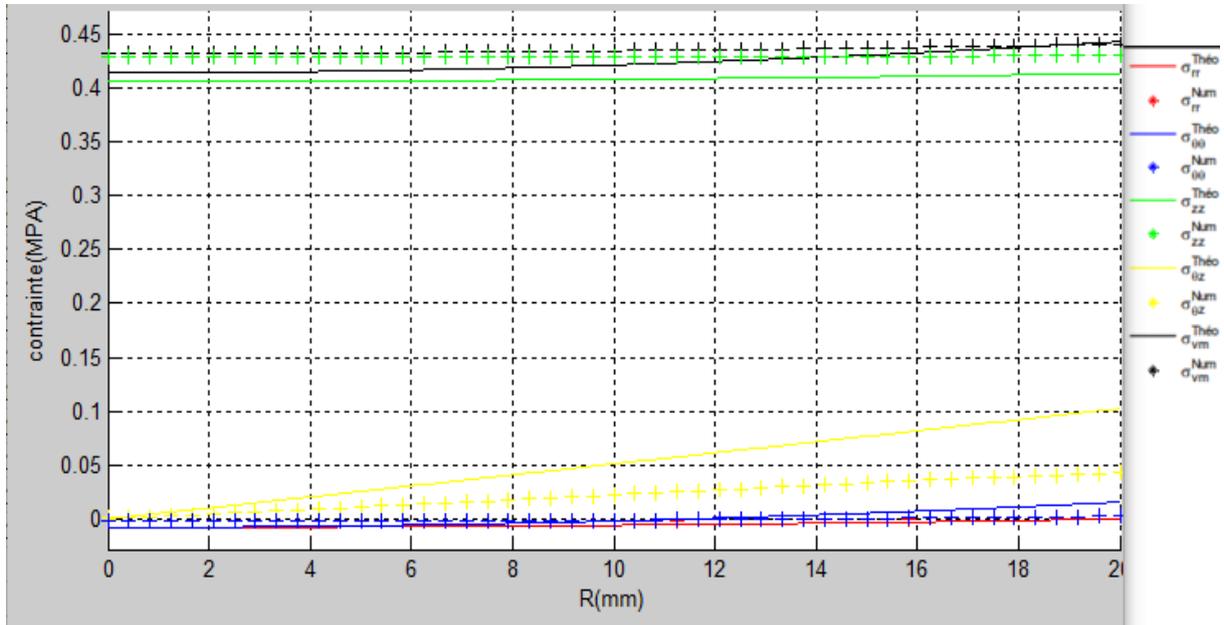


Figure III.39 : Evolution des contraintes en fonction du Rayon (R)

Pour  $\lambda = 1.4$  et  $\alpha = 75$  :

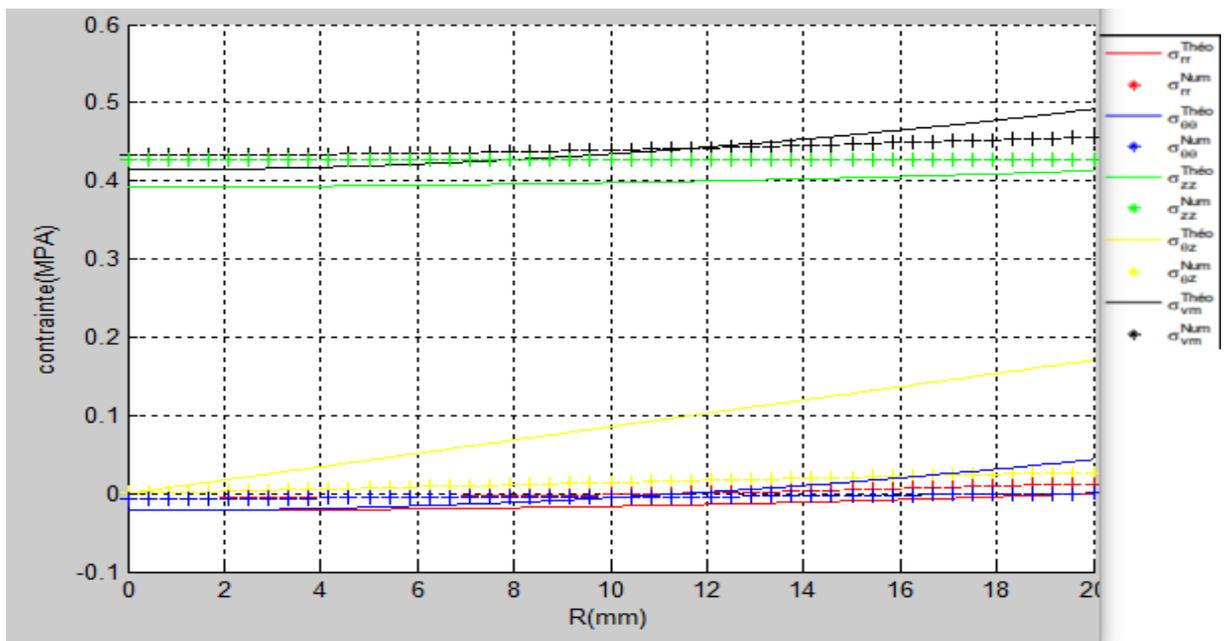


Figure III.40 : Evolution des contraintes en fonction du Rayon (R)

### III.2.5 Discussions des résultats

D'après les résultats trouvés, on remarque que les contraintes de Von Mises sont maximales sur la surface extérieure du cylindre.

On voit que la distribution des contraintes de Von Mises est uniforme pour une valeur fixée de rayon  $r$ .

Les contraintes radiales et circonférentielles sont presque nulles, par contre les contraintes de cisaillement augmentent légèrement le long d'une trajectoire.

Les contraintes augmentent avec l'augmentation de l'angle de torsion  $\alpha$ .

On constate que dans le cas de la torsion pure ( $\lambda=1$ ), les contraintes  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{\theta\theta}$  et  $\sigma_{zz}$  sont très faibles, contrairement à la contrainte de cisaillement  $\sigma_{\theta z}$  qui augmente légèrement.

On constate que dans le cas de torsion-traction, les contraintes de Von Mises et axiale  $\sigma_{zz}$  sont très proches et elles sont presque constantes.

### Conclusion

Nous avons fait une étude analytique et numérique de la distribution des contraintes dans un cylindre hyper-élastique, soumis à des sollicitations : torsion et torsion-traction.

Nous avons trouvé une bonne concordance entre les résultats analytiques et numériques. Lors de l'essai de torsion, on constate que les contraintes de Von-Mises et du cisaillement varient linéairement, pour des valeurs importantes, avec l'angle de torsion.

Dans le cas de traction-torsion, les contraintes de Von-Mises et axiales sont presque constantes le long d'une trajectoire, et les autres sont presque nulles.

# **Conclusion**

## **générale**

**Conclusion générale**

La torsion des cylindres hyper-élastiques constitue un mode de déformation non-homogène. Ce travail s'inscrit dans le cadre de l'étude analytique et numérique de la torsion d'un cylindre hyper-élastique.

Dans la première partie, nous avons démontré que dans le cas où le potentiel hyper-élastique  $W$  dépend des deux premiers invariants du tenseur de Cauchy Green, et si  $\frac{\partial W}{\partial I_i} = cst$ , la variable torsion doit être une fonction linéaire de  $Z$ , c'est-à-dire  $g(Z) = \lambda^{\frac{1}{2}} \tau Z$ .

Dans la deuxième partie, nous avons étudié analytiquement et numériquement la torsion-extension d'un cylindre hyper élastique, dans le but de déterminer les contraintes en considérant le modèle de comportement incompressible de Mooney-Rivlin à deux paramètres.

# **REFERENCES**

# **BIBLIOGRAPHIQUES**

---

**Références**

- [1] A. Boukamel, «Modélisations mécaniques et numériques des matériaux et structures en élastomères,» *semantic scholar*, 05 Octobre 2006.
- [2] I. E. Patrick Combette, Physique des polymères Tome 1 : structure, emploi, fabrication., vol. 1, Centre ville Montreal, Quebec: Presses internationales Polytechnique, 2005, p. 217.
- [3] F. K. Christian Huetz de Lamps, «universalis.fr,» [En ligne]. Available: [https://www.universalis.fr/encyclopedie/elastomeres-caoutchoucs/#i\\_0](https://www.universalis.fr/encyclopedie/elastomeres-caoutchoucs/#i_0). [Accès le 2022].
- [4] G. Chagnon, «Modélisation de l'effet Mullins dans les élastomères,» *Thèse de doctorat. Ecole Centrale de Nantes; Université de Nantes*, 2003.
- [5] B. H. e. a. Iabbassen Youcef, «Analyse critique des différentes approches de l'effet Mullins : Tentative de prise en compte de l'effet visqueux.,» *Thèse de doctorat. Universié de bejaia.*, p. 47, 2008.
- [6] E. Verron, «Modélisation du comportement des structures et des matériaux,» *Mémoire d'habilitation à diriger des recherches. L'Ecole Centrale de Nantes*, 2003.
- [7] Y. G. M. J.-L. S. Michel Fontanille, Chimie et physico-chimie des polymères, Paris: DUNOD, 2002.
- [8] Bouzidi.S, «Modelisation micro mecanique du comportement hyper elastique des elastomeres composites.,» *Thèse de doctorat. Université de Béjaia-Abderrahmane Mira.*, 2006.
- [9] S. Patricia, «Modélisation et identification du comportement non linéaire des cales en caoutchou,» *Thèse de doctorat. École Centrale de Lyon.*, 2003.
- [10] C. Jean, Mécanique des milieux continus: aide-mémoire, Paris: Dunod, 2001.
- [11] S. Meo, «Modélisation numérique du comportement mécanique de structures en élastomère: de l'élasticité à la thermo-visco-hyperélasticité,» *Thèse de doctorat. Université de la Méditerranée-Aix-Marseille II.*, 2000.

- [12] R.W.Ogden, P.Chadwick, «On the deformation of solid and tubular cylinders of incompressible isotropic elastic material,» *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 20, n° 12, pp. 77-90, 1972.
- [13] G. Marckmann, «Contribution à l'étude des élastomères et des membranes soufflées,» *Thèse de doctorat. Ecole Centrale de Nantes (ECN); Université de Nantes.*, 2004.
- [14] D.A.Warne. P.G.Warne.Torsion in nonlinearly elastic incompressible circular cylinders. *International journal of Non-linear Mechanics*

**Résumé :**

Les progrès dans le domaine de la science des matériaux ont conduit à une utilisation de plus en plus importante des matériaux tels que les élastomères, communément appelés les caoutchoucs, Ces matériaux supportent des grandes déformations réversibles.

Ce travail concerne une étude de la torsion-extension d'un cylindre en élastomère, le modèle choisi est le modèle Mooney-Rivlin, nous avons montré que le champ de contraintes dépend fortement d'angle de torsion.

**Abstract**

Progress in the field of materials science has led to an increasingly important use of materials such as elastomers, commonly called rubbers. These materials withstand large reversible deformations.

This work concerns a study of the torsion-extension of an elastomer cylinder, the model chosen is the Mooney-Rivlin model, we have shown that the stress field depends strongly on the angle of torsion