

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Abderrahmane Mira de Béjaïa

Faculté des Science Exactes

Département de Mathématiques

Mémoire de Fin de Cycle

En vue de l'obtention du diplôme de Master

Option: Probabilités Statistique et Applications

Thème

Approximation de la Densité Dans Un Modèle De Files D'attente Avec Vacances

Via les Séries de Taylor

Réalisé par:

Mlle. BARKA Nora.

Encadré par:

M. OUAZINE Sofiane.

Devant le jury composé de:

Présidente Mme. BOURAINE LOUIZA

Examinatrice Mme. BACHI KATIA

2021/2022

Remerciements

Au terme de ce travail, j'adresse mes remerciements à **Allah** le tout puissant de m'avoir donné le courage et la motivation et la puissance pour pouvoir mener ce travail à terme.

J'exprime mes remerciements d'abord à **M.OUAZINE SOFIANE**, mon encadreur qui a proposé ce sujet et pour ses précieux conseils et orientations tout au long de la réalisation de ce mémoire.

Je remercie **Mme. BOURAINE LOUIZA**, qui m'a fait l'honneur de présider ce jury.

Mes remerciements à **Mme. BACHI KATIA**, pour avoir accepté de juger ce travail.

Je remercie **M. Boumzayed Yacine** et **M. Chamlal Rezki** , pour leurs aides.

Enfin, merci à tous mes enseignants et mes profs dès le primaire jusqu'au l'université, merci à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Dédicas

Je dédie ce modeste travail à:

À mes chères parents, mon très chère père et ma chère mère que Dieu l'accueille dans son vaste paradis.

À mes chères soeurs: Nadjat et Dahbia.

À mes chers frères: Ibrahim et Amer.

À mes beaux-frères: Morad et A.Malek.

À mes belles-souers: Siham et Sameh.

À mes petit(es): A.Mohamed, Sidra, Jana et Takwa.

À mes chers amis(es) ma deuxième famille, en particulier amis(es) d'Amizor.

À mes amis(es) étrangères, en particulier: Palestiniens(nes), Polisario .

Sans oubliée les deux promotions M2 MA et M2 PSA.

À tous mes reconnaissances.

À...

Merci à tous.

Table de matières

Introduction générale	8
1 Files d'attente	10
1.1 Processus stochastique	11
1.1.1 Chaînes de Markov (C.M)	11
1.1.2 Propriétés fondamentales	12
1.1.3 Classification des états d'une chaîne de Markov	13
1.2 Système de files d'attente classiques [17]	14
1.2.1 Description du modèle d'attente classique:	15
1.2.2 Analyse mathématique d'un système d'attente	17
1.2.3 Type de modèles	17
1.2.4 Caractéristiques d'un système de file d'attente	19
1.2.5 Modèles d'attente avec vacances	20
1.2.6 Modèle d'attente M/G/1/N avec vacances	23
2 Approximation de la densité via le développement en séries de Taylor	26
2.1 Développement en séries de Taylor d'une fonction réelle à plusieurs variables réelles	27
2.1.1 Fonction de classe C^n	27
2.1.2 Différentiabilité	27
2.1.3 Formule de Taylor à l'ordre n	28
2.1.4 Application des développements en séries de Taylor sur les chaînes de Markov	28
2.1.5 Reste du développement en séries de Taylor	32
2.2 Approximation de la densité via le développement en séries de Taylor	32

3	Approximation de la densité dans un modèle de file d'attente avec vacances via les séries de Taylor.	35
3.1	Description du modèle M/M/1/N avec vacances	36
3.2	Approximation de la densité du modèle M/M/1/N avec vacances via le développement de Taylor dans le cas général	38
3.2.1	Calcul des dérivées de la distribution stationnaire	39
3.3	L'approximation de la densité pour le modèle M/M/1/N avec vacances	40
3.3.1	Cas unidimensionnel:	40
3.3.2	Cas de deux variables	47
	Conclusion générale	56

Table de figures

1. Représentations d'un système d'attente classique	15
2. Comparaison des résultats du développement en séries de Taylor et de simulation pour l'approximation de la densité dans le cas unidimensionnel.....	42
3. Comparaison des résultats du développement en séries de Taylor et de simulation pour l'approximation de la densité dans le cas de deux variables.....	49

Table de tableaux

1. L'espérance et la variance approchée par Taylor	46
--	----

Introduction générale

Des problèmes d'ordre divers sont posés par les chercheurs des systèmes complexes, afin de les résoudre, en appliquant des méthodes d'approximation qui simplifient les systèmes complexes. Lors de l'approximation, il est important d'avoir une idée sur l'erreur commise sur les caractéristiques de système. Cette problématique est importante dans l'analyse de certains types de systèmes complexes. Parmi les outils, les plus puissants, d'analyse de ces systèmes sont les chaînes de Markov, qui sont bien adaptées à l'étude des systèmes de files d'attente.

Les origines des files d'attente datent du début du XX-ème siècle par les travaux des deux mathématiciens: Erlang avec ses travaux sur les réseaux téléphoniques et le russe Markov avec la création des modèles markovien. En 1909, les bases de la théorie des files d'attente sont lancées, grâce à l'article d'Erlang, "The theory of probabilities and telephone conversations" [23]. Depuis ces premiers travaux, plusieurs articles et ouvrages sur le sujet sont publiés [4,17,33,24], de plus, les modèles de files d'attente sont reconnus largement comme outils puissants pour l'analyse et l'optimisation des performances des systèmes à flux discret, tels que les systèmes de transports, les systèmes informatiques, les systèmes de production, etc.... En outre, l'analyse stochastique nous permet d'avoir une structure conventionnelle de formulation et résolution des modèles de file d'attente.

Dans les systèmes de file d'attente, on trouve très peu de systèmes qui ont une solution simple où des résultats analytiques sont exploitables. Mais, dans ce cas, la complexité des formules analytiques ne permet pas de les exploiter dans la pratique. Pour cela, il est important de développer des méthodes d'approximation pour calculer numériquement les mesures de performance de tel systèmes, en particulier leurs densité. Ces méthodes, se reposent sur le principe de l'analyse

de perturbation, qui consiste à étudier l'impact de la variabilité des paramètres du modèle sur la variabilité de sortie. Parmi les méthodes les plus rencontrés en littérature, on cite celle de développement en séries de Taylor des chaînes de Markov [25].

L'objet de ce mémoire est d'approximer la densité d'un modèle d'attente avec vacances via le développement en séries de Taylor [14]. Pour cela, on calcule un nombre fini de dérivées d'ordre supérieur de la distribution stationnaire, ces dérivées nous permettent d'obtenir la caractéristique de performance comme une fonction du paramètre d'intérêt. Ainsi, la sensibilité de la distribution stationnaire relative à la chaîne de Markov développée est exprimée en fonction de sa matrice fondamentale. Ce développement peut s'appliquer sur plusieurs types de modèles de files d'attente, et sous des contextes différents. Dans ce travail on s'intéresse au modèle d'attente avec vacances.

L'application des développements en séries de Taylor dans le cadre d'analyse des performances des systèmes stochastiques a été introduite pour la première fois par Zazanis [28] et Cong [27]. Puis, plusieurs chercheurs se sont intéressés à cette recherche, tels que Heidergott et Hordjik [9], B.Baynet [4], Kleinrock [24], Ouazine et Abbas [26], etc....

Ce mémoire est organisé en trois chapitres, une conclusion générale et une bibliographie.

⊇ Le premier chapitre, comprend des concepts généraux sur les systèmes de files d'attente et une synthèse bibliographique concernant les files d'attente avec vacances.

⊇ Dans le second chapitre, on définira l'approximation de la densité d'un modèle d'attente, puis, on présentera quelques généralités sur le développement en séries de Taylor sur les chaînes de Markov, en fin, on parlera sur l'approximation de la densité d'un modèle d'attente via le développement en séries de Taylor .

⊇ Le dernier chapitre, est consacré à l'application de la méthode étudiée au chapitre précédent, où on approxime la distribution stationnaire du modèle d'attente $M/G/1/N$ avec vacances via le développement en séries de Taylor pour deux cas: pour une variable et pour deux variables.

⊇ Le travail s'achève par une conclusion générale mettant l'accent sur les perspectives et les directions des recherches induites par les résultats obtenus dans ce travail.

Chapter 1

Files d'attente

Introduction

Nous avons tous attendu au moins une fois dans une file d'attente dans divers domaines d'activité soit à les hôpitaux, les stations-services, restaurants universitaires, etc.... Ces phénomènes sont caractérisés par la théorie des files d'attente. Cette théorie a été introduite afin de trouver les solutions optimales de gestion des phénomènes d'attente. Son étude mathématique constitue un champ d'application important des processus stochastiques.

Dans ce chapitre, on introduit d'abord une classe très importante de processus stochastique: chaînes de Markov, puis on présentera quelques concepts de base et les éléments essentiels relatifs au formalisme de files d'attentes, ensuite, on donnera une description générale et détaillée des systèmes d'attente classique et avec vacances, on terminera par une étude sur le modèle d'attente M/G/1 avec vacances.

Par la suite, nous rappelons une classe très importante de processus stochastiques: les chaînes de Markov, qui est un domaine de recherche pour plusieurs chercheurs, on cite: [4, 17, 33].

1.1 Processus stochastique

Un processus stochastique est une suite de variables aléatoires (v.a) réelles qui sont indexées par le temps $X_t, t \in T$, avec T l'ensemble de temps [17].

Le processus stochastique peut être considéré comme une fonction du temps dont la valeur à chaque instant dépend de l'issue d'une expérience aléatoire.

L'ensemble de temps notée T peut être discret ou continu.

L'ensemble des valeurs que peut prendre le processus à chaque instant est appelé espace d'états, il est noté E , et peut être discret (fini ou infini) ou continu.

Par conséquent, on distingue quatre types de processus:

1. Processus à temps discret et à espace d'état discret (chaines de Markov).
2. Processus à temps continu et à espace d'état discret (processus de Poisson).
3. Processus à temps discret et à espace d'état continu.
4. Processus à temps continu et à espace d'état continu.

A ce stade, on définira l'outil principal de modélisation de files d'attente les Chaînes de Markov.

1.1.1 Chaînes de Markov (C.M)

Un processus stochastique à temps discret, ou à temps continue $\{(X_t)_{t \in T}\}$, et à espace d'états discret (fini ou infini) est une chaîne de Markov. Le processus de Markov est un processus stochastique possédant la propriété de Markov: l'information utile pour la prédiction du futur est entièrement contenue dans l'état présent du processus et ne dépend pas des états antérieurs (il vérifie la propriété d'absence de mémoire). Autrement dit, Un processus stochastique $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans l'espace mesurable (E, ξ) est markovien si et seulement s'il vérifie la propriété suivante (la propriété de Markov):

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall i_0, i_1, \dots, i, j \in \xi$, telle que $P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i) > 0$;

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-2} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = P\{X_{n+1} = j | X_n = i\} \quad (1.1)$$

définition 1.1.1.

Nous appelons la probabilité conditionnelle:

$$P(X_n = j | X_{n-1} = i), i, j \in E,$$

la probabilité de transition de l'état i à l'état j , notée par $P_{ij}(n)$.

1.1.2 Propriétés fondamentales

Définition 1.1.2.

Si P_{ij} ne dépend pas de n ($P_{ij}(n) = P_{ij}$), $\forall n$, on dit que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **homogène** dans le temps. La matrice de transition est une matrice carrée stochastique, $P = (P_{ij})_{i,j \in E}$ vérifient les deux conditions:

1. Positivité de leurs éléments: $P_{ij} \geq 0, \forall i, j \in E$.
2. Somme des éléments de chaque lignes est 1: $\sum_{j \in E} P_{ij} = 1, \forall i \in E$.

Probabilité de transition à n étapes:

La probabilité qu'une chaîne de Markov passe de l'état i à j en n transition est:

$$P_{ij}^{(n)} = P\{X_n = j | X_0 = i\}, n \geq 1. \quad (1.2)$$

Plus général, le système matriciel s'écrit sous forme d'équations de CHAPMAN-KOLMOGROV:

$$P_{ij}^{(n)} = \sum_{k \in E} P_{ik}^{(n-1)} P_{kj}, \quad (1.3)$$

avec $P^{(n)} = (P_{ij}^{(n)})$, $P^{(n)} = P^n$, cette condition est nécessaire et n'est pas suffisante pour qu'une suite de variables aléatoires soit une chaîne de Markov.

Loi de probabilité d'une chaîne de Markov:

Définition 1.1.3.

La probabilité qu'une chaîne de Markov se retrouve dans l'état j après n étapes, si elle se trouve actuellement dans l'état i , est donnée par l'élément (i, j) de la matrice P^n , ($P^{(n)} = P^n$).

On appelle distribution de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ le vecteur $\pi(n) = (\pi_1(n), \pi_2(n), \dots)$, avec $\sum_{i \in E} \pi_i(n) = 1$ et soit $\pi(0)$ sa distribution initiale et $\pi_i(n) = P(X_n = i)$. D'après la formule des probabilités totales on a:

$$\pi_k(n) = \sum_{i \in E} P_i(0)P_{ik}^{(n)}, \quad (1.4)$$

en mention matricielle $\pi(n) = \pi(0)P^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

1.1.3 Classification des états d'une chaîne de Markov

Définition 1.1.4.

On dit que i communique avec j ($i \leftrightarrow j$), si on peut atteindre l'état j à partir de l'état i , et vice versa.

Deux états i et j d'une chaîne de Markov **communiquent**, s'ils existent $m, n \geq 0$ tels que $P_{ij}^{(m)} > 0$ et $P_{ji}^{(n)} > 0$.

La relation définie sur E par ($i \leftrightarrow j$) entre i et j est une relation d'équivalence.

Nous pouvons utiliser cette propriété pour partitionner E en classes de communication, qui sont des ensembles disjoints de l'espace d'états, et chaque état donné communique avec chaque autre état dans la même classe de communication.

Définition 1.1.5.

- Une chaîne de Markov est **irréductible**, si l'espace d'états E est réduit à une seule classe de communication.

- L'état $i \in E$ est **récurrent** si partant de i , on y revient presque sûre en temps fini, i.e. $P(T_i < +\infty / X_0 = i) = 1$.

- L'état $i \in E$ est **transitoire** dans le cas contraire, autrement dit, avec une probabilité strictement positif, on peut quitter sans jamais y revenir, i.e. $P(T_i = +\infty / X_0 = i) > 0$.

Définition 1.1.6:(La périodicité)

Un état i est dite périodique de période $d(i)$, si le temps de retour à i , $T_i = \inf\{n \geq 1, X_n = i\}$, sont $d(i)$ -périodique. On écrit: $d(i) = PGCD\{n \geq 1 : P_{ii}^{(n)} > 0\}$.

Remarque:

- si $d(i) = 1$ on dit que i est apériodique.
- Une chaîne de Markov récurrente apériodique est dite **ergodique**.

Définition 1.1.7.(Distribution stationnaire)

Soit (X_n) une C.M sur E , une distribution $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n)$ sur E est une distribution stationnaire de X_n , si $\pi = \pi P$, avec $\sum_{j \in E} \pi_j = 1$.

De plus, si $\pi(0)$ est un vecteur initial des probabilités, alors:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi(i)P^n = \pi, \quad (1.5)$$

où $\pi(i) > 0, \forall i \in E$, et $\pi > 0$, la solution unique.

Nous avons rappeler brièvement les propriétés principales des chaînes de Markov, par la suite nous introduisons les concepts généraux des systèmes de file d'attente.

1.2 Système de files d'attente classiques [17]

Une file d'attente, ou une queue, est un système stochastique et peut être résumé comme suit: des clients arrivent à un certain endroit et réclame un certain service.

Voici une représentation graphique d'une file d'attente classique (figure 1.1):

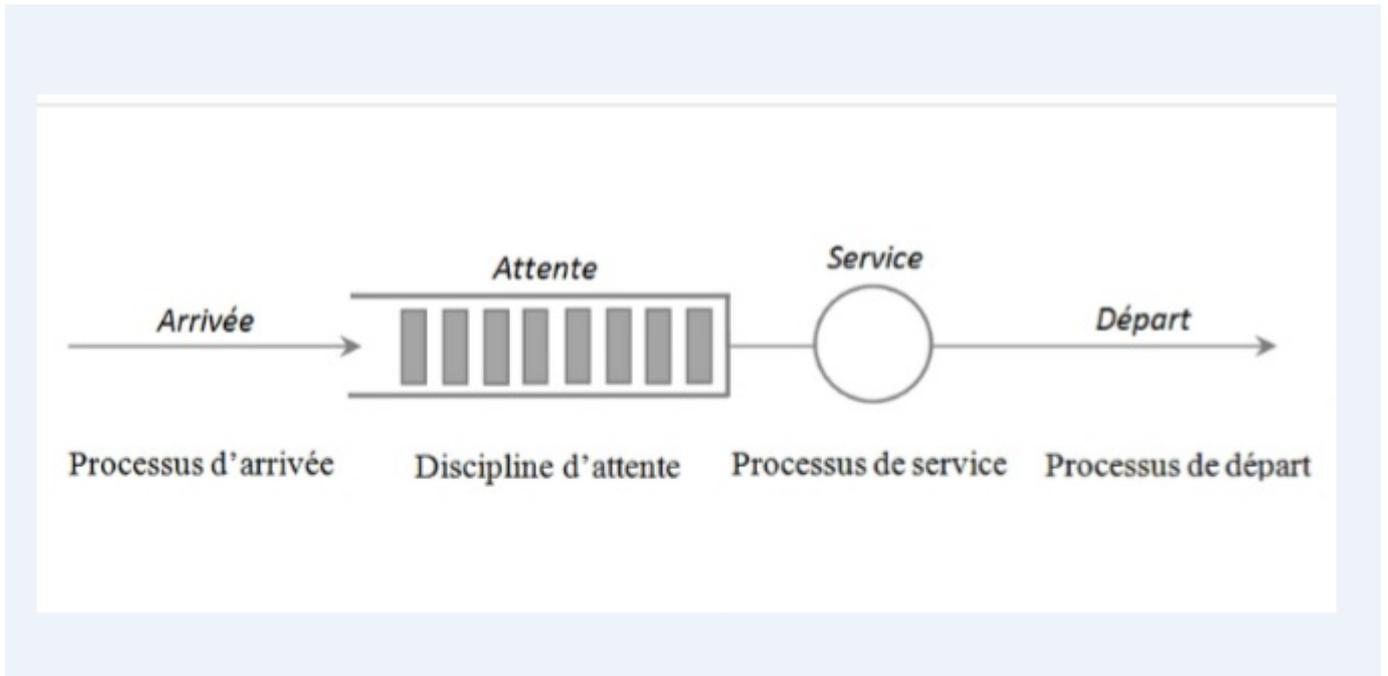


Figure 1.1: Système d'attente classique.

L'objectif de la théorie des systèmes d'attente est d'étudier les structures et de calculer des valeurs caractéristiques permettant de décrire les performances d'un tel système.

1.2.1 Description du modèle d'attente classique:

Un phénomène d'attente peut être décrit comme un système composé d'un espace d'attente, une ou plusieurs stations de service, et des clients arrivent, attendent, se font servir selon une règle dite politique ou discipline de service et quittent le système.

On identifie un système de file d'attente par:

La nature stochastique du processus des inter-arrivées: qui est défini par la distribution des intervalles séparant deux arrivées consécutives.

Processus de service: qui est défini par la distribution du temps aléatoire de service.

Nombre de serveurs: le nombre S de stations de service qui sont montées en parallèle.

Capacité de système(N): si $N < \infty$, alors on a $(N - S)$ places d'attente, donc il y aura une perte de clients.

Discipline de service: une fois que le serveur libre, il choisit un client de la file suivant une politique ou discipline adoptée au sein de système.

Les principales disciplines de service sont:

FIFO (First In First Out):premier arrivé premier servi.

LIFO (laste In First Out):dernier arrivé premier servi.

FIRO (First In Random Out): service dans un ordre aléatoire.

RR (Rond Robin)(cyclique) Tous les clients de la file d'attente entrent en service à tour de rôle, effectuant une quantité de service appelée Quantum (Q) et sont replacés dans la file, jusqu'à fin de service.

PS (Processor Sharing): cas limite de la discipline RR lorsque le quantum tend vers zéro.

On suppose que les variables aléatoires introduites sont indépendantes.

1.2.1.1 Notation de Kendall

Pour la classification des systèmes d'attente, on a la notation de **Kendall**: $A/B/S(N/K/D_s)$, où:

A : Distribution des inter-arrivées .

B : Distribution de service.

S : Nombre de serveurs en parallèle.

N : Capacité de système.

K : Population source.

D_s : Discipline de service.

La liste suivante résume les distributions usuelles rencontrées dans la modélisation des systèmes de files d'attente ainsi que les symboles associés.

M : distribution exponentielle.

G : distribution générale.

H : distribution hyper exponentielle.

D : cas déterministe.

E_k : distribution d'Erlang d'ordre k .

Remarque 1.2.1. Lorsque les trois derniers éléments ne sont pas précisés, ils sont pris par défaut comme suit:

$$N = +\infty; K = +\infty; D_s = FIFO.$$

1.2.2 Analyse mathématique d'un système d'attente

L'étude d'un système de file d'attente se fait généralement par l'introduction d'un processus stochastique aléatoire, définie de façon appropriée. On s'intéresse principalement au processus stochastique $(X_t)_{t \geq 0}$: "nombre de clients dans le système à l'instant t ".

Ainsi, on s'intéresse à déterminer:

- Le régime transitoire du processus stochastique, défini par:

$$P_n(t) = P(X(t) = n).$$

- Le régime stationnaire du processus stochastique, défini par:

$$P_n = \lim_{t \rightarrow \infty} P_n(t) = P(X = n); (n = 1, 2, \dots).$$

1.2.3 Type de modèles

1. Modèles markoviens

Ils caractérisent les systèmes dans lesquels les deux quantités stochastiques principales qui sont le temps des inter-arrivées et la durée de service sont des variables aléatoires indépendantes exponentiellement distribuées (modèle d'attente M/M/1). La propriété d'absence de mémoire de la loi exponentielle facilite l'étude de ces modèles. L'étude mathématique de tels systèmes se fait par l'introduction d'un processus stochastique approprié. Ce processus est souvent le processus $\{X(t), t \geq 0\}$ défini comme étant le nombre de clients dans le système à l'instant t . L'évolution temporelle du processus markovien $\{X(t), t \geq 0\}$ est complètement défini grâce à la propriété d'absence de mémoire.

2. Modèles non markoviens

Le modèle est non markovien si on a l'absence de l'exponentialité ou plutôt lorsque l'on s'écarte de l'hypothèse d'exponentialité de l'une des deux quantités stochastiques: le temps des inter-

arrivées et la durée de service, ou en prenant en compte certaines spécificités des problèmes par introduction des paramètres supplémentaires. La combinaison de tous ces facteurs rend l'étude mathématique du modèle très délicate, voire impossible. On essaye alors de se ramener à un processus de Markov judicieusement choisi avec l'une des méthodes d'analyse suivantes:

Méthode des étapes d'Erlang

Son principe est d'approcher toute loi de probabilité ayant une transformée de Laplace rationnelle par une loi de Cox (mélange de lois exponentielles), cette dernière possède la propriété d'absence de mémoire par étapes.

Méthode de chaîne de Markov induite

Cette méthode, élaborée par Kendall [33], est souvent utilisée. Elle consiste à choisir une séquence d'instantanés $1, 2, \dots, n$ (déterministes ou aléatoires) telle que la chaîne induite $\{X(n), n \geq 0\}$ soit markovienne et homogène.

Méthode des variables auxiliaires

Elle consiste à compléter l'information sur le processus $\{X(t), t \geq 0\}$ de telle manière à lui donner le caractère markovien. Ainsi, on se ramène à l'étude du processus $\{X(t), A(t_1), A(t_2), \dots, A(t_n)\}$. Les variables $A(t_k)$, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ sont dites auxiliaires.

Méthode des événements fictifs

Le principe de cette méthode est d'introduire des événements fictifs qui permettent de donner une interprétation probabiliste aux transformées de Laplace et aux variables aléatoires décrivant le système étudié.

Simulation

C'est un procédé d'imitation artificielle d'un processus réel donné sur ordinateur. Elle permet d'étudier les systèmes d'attente les plus complexes, de prévoir leurs comportements et de calculer leurs caractéristiques. Les résultats obtenus ne sont qu'approximatifs, mais peuvent être utilisés avec une bonne précision. Cette technique se base sur la génération de variables aléatoires suivant

les lois gouvernant le système.

1.2.4 Caractéristiques d'un système de file d'attente

On note:

λ le taux d'arrivée des clients. Cela signifie que l'espérance de la durée séparant deux arrivées successives est: $\mathbb{E}(X) = 1/\lambda$.

μ le taux de service des clients. Cela signifie que l'espérance de la durée de service est: $\mathbb{E}(Y) = 1/\mu$.

L'intensité du trafic s'exprime de la manière suivante:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\mathbb{E}(Y)}{\mathbb{E}(X)},$$

où X la loi des inter-arrivées et Y la loi de service.

La distribution stationnaire du processus stochastique introduit les mesures de performance suivantes:

- ◇ L : nombre moyen de clients dans le système de file d'attente;
- ◇ L_q : nombre moyen de clients dans la file;
- ◇ W : temps moyen de séjour d'un clients dans le système;
- ◇ W_q : temps moyen d'attente d'un clients dans la file;

Ces valeurs sont liées par les relations suivantes:

◆ $L = \lambda_e W$;

◆ $L_q = \lambda_e W_q$;

qui sont appelées "formules de Little"

◆ $L = L_q + \lambda_e/\mu$.

◆ $W = W_q + 1/\mu$;

où, λ_e : taux effectif d'entrée dans le système, ($\lambda_e < \lambda$)

Ces formules sont applicables si et seulement si, $\rho = \lambda/\mu < 1$.

1.2.5 Modèles d'attente avec vacances

Dans les files d'attente classiques les serveurs sont toujours disponibles, mais dans des nombreux cas de pratique des systèmes de file d'attente les serveurs peuvent devenir indisponible pour une période de temps pour diverses raisons. Cette période d'absence de serveur peut signifier que le serveur travaille une tâche supplémentaire pour améliorer l'efficacité du système, ou simplement faire une pose.

Comme, les serveurs prennent des vacances, ça rend les modèles de file d'attente plus réaliste et flexible dans l'étude des file d'attente dans le monde réel. Ce genre de files d'attente ont attiré l'attention de beaucoup de chercheurs (voir B. T.Doshi, Steve Fuhrmann et cooper, et Ouazine et Abbas [3,5,14]) et devenu un domaine de recherche actif. Ils ont été largement étudiés en réseaux de leurs application dans les réseaux informatiques, système de communication, système en raison de fabrication, etc.....

1.2.5.1 Politiques de vacances

Les modèles de file d'attente avec vacances se distinguent des modèles classiques par l'existence d'un paramètre supplémentaire. Ces modèles se compose de trois parties: Processus d'arrivée, processus de service, la discipline de la file d'attente [29], et un processus de vacances gouverné par une politique de vacances (partie supplémentaire par rapport aux modèles d'attente classique). cette politique peut se caractériser par trois règles:

1. Règle du début des vacances:

Cette règle détermine quand le serveur démarre ses vacances. Il y a deux types majeurs de service, exhaustif et non-exhaustif. Dans le premier cas, le serveur ne peut pas prendre des vacances jusqu'à ce que le système devient vide. Pour le second cas, le serveur peut prend des vacances même lorsque le système n'est pas vide. Dans les systèmes multi-serveurs, une règle semi-exhaustif peut être employée si certains serveurs prennent des vacances.

2. Règle de fin de vacances:

Cette règle détermine quand le serveur reprend le service. Il y a deux politiques importantes:

les vacances multiples et les vacances simples. la première politique, elle exige au serveur de continuer ses vacances jusqu'à ce qu'il trouve au moins un client présent dans le système à l'instant d'accomplissement de vacances. Par contre, pour les vacances simples le serveur prend seulement une vacance à la fin de chaque période d'activité. après ces vacances simples, le serveur sert les clients qui sont en attente, si le système est vide, le serveur prend une autre vacance.

Plus générale, on a la politique de seuil (également appelée la N-politique).

Dans les systèmes multi-serveurs, en dehors des règles de démarrage et d'arrêt, il y a d'autres caractéristiques de la politique de vacances. Par exemple, tous les serveurs peuvent prendre des vacances ensemble (des vacances synchrones), ou les serveurs peuvent prendre des vacances individuellement et indépendamment (des vacances asynchrones).

3. Distribution de la durée de vacances:

On suppose que les vacances de serveur sont des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées (i.i.d) avec une fonction de répartition générale. Cependant, quelques modèles de vacances exigent différents types de vacances et suivent différentes distributions.

Exemples:

Voici les cas particuliers suivants:

- ◆ Système d'attente avec pannes: dans ces systèmes avec panne actives et réparation, les périodes de panne ou de réparation peuvent être aussi comme des période de vacances.
- ◆ Système d'attente avec rappels: dans ce cas la période d'oisiveté du serveur peut être considérée comme une période de vacances [30].
- ◆ Système de fiabilité: les processus dont les systèmes informatiques, systèmes de communication et les systèmes de production, exécutent en plus de leurs fonctions primaires des tâches de tests et maintenance préventive qui permettent principalement de préserver le système contre les pannes et de prévoir une haute fiabilité de celui-ci. Ces périodes peuvent aussi être considérées comme des vacances du serveur [3].

Exemple d'application(Mélange d'opérations de "commande" et de "stockage"):

Une installation de fabrication flexible est principalement utilisée pour produire des produits

personnalisés. Quand il y a pas de clients reliquats, le commutateur d'installation produit une variété d'articles en stock. En raison du coût de basculement considérable entre "commande" et de "stockage", l'installation n'est pas reconfigurée pour traiter les commandes des clients jusqu'à ce que le nombre de commandes soit supérieur à un niveau prévu. Une fois que de le commutateur d'installation revient à nouveau pour servir des clients, le service est exhaustif.

Dans ce système, l'opération "commande" est un service de file d'attente et l'opération "stockage" peut être la modélisation des vacances du serveur.

1.2.5.2 Décomposition stochastique dans les modèles avec vacances

Dans un système de files d'attente avec vacances, les performances de système peuvent être décomposées en somme de deux quantités. L'une de ces dernières correspond aux systèmes classiques sans vacances, et l'autre quantité la performance dû aux vacances. Ces quantités montrent l'effet des vacances sur les performances du système. Pour un système de file d'attente qui a atteint le régime stationnaire, on note $L^{(v)}, W^{(v)}$ les performances du système lors des vacances seulement, et $L^{(b)}, W^{(b)}$ les performances du système sans vacances.

D'où, les décompositions stochastiques peuvent être écrites comme suit:

$$\begin{aligned} L &= L^{(b)} + L^{(v)}; \\ W &= W^{(b)} + W^{(v)}; \\ L(z) &= L^{(b)}(z)L^{(v)}(z); \\ W^*(s) &= W^{(b)*}(s) + W^{(v)*}(s); \end{aligned}$$

où L et W nombre moyen de clients dans le système et le temps moyen d'attente dans le système, respectivement.

1.2.6 Modèle d'attente M/G/1/N avec vacances

Le modèle de file d'attente M/G/1 avec vacance est l'un des modèles les plus étudiés. On a beaucoup de résultats en littérature au sujet de ce modèle. En fait, ce modèle a été analysé intensivement par plusieurs chercheurs tel que, Bharat T. Doshi et Teghrem, [3,32] qui ont introduit la politique de vacances pour les modèles d'attente avec vacances, Steve W. Fuhrmann et R.B. Cooper [5], Li et Tian [12] qui ont analysé la file M/G/1 avec vacances, on trouve aussi D.P. Gaver et Jr. [6], et H. Takagi [31].

Description du modèle

Considérons la file d'attente M/G/1/N telle que le flue des inter-arrivées est poissonien de taux λ , et le temps de service est une variable aléatoire générale Y , qui se caractérise soit par sa densité f , soit par ses moments: $m_k = E(Y^k) = \int_0^{\infty} t^k f(t) dt$, ou par sa transformé de Laplace: $\beta^*(s) = E(e^{-sY}) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$, aussi par le carré du coefficients de variation: $CV^2 = \frac{var(Y)}{m^2}$, où $m = E(Y)$.

Dans les systèmes d'attente avec vacances, le serveur commence les vacances à chaque fois que la file d'attente se vide, et s'il y a des clients qui arrivent pendant la période de vacances, le serveur continue de fonctionner à un rythme inférieur.

La période de vacances-travail est une période de fonctionnement réduite. A un instant d'achèvement de service, si y a des clients le serveur reviendra au niveau de fonctionnement normal. Sinon, il commence une autre congé après la fin du première.

Les notions utilisées dans ce modèle sont les suivantes:

(1). Les temps normaux de service pendant la période d'activité ont la fonction de distribution de probabilité suivante:

$$s_b(x) = 1 - \exp \left\{ - \int_0^x \mu_b(t) dt \right\}, \quad (1.6)$$

avec moyenne $1/\mu_b$.

(2). Les temps normaux de service pendant la période des vacances ont la fonction de distribution de probabilité suivante:

$$s_v(x) = 1 - \exp \left\{ - \int_0^x \mu_v(t) dt \right\}, \quad (1.7)$$

avec moyenne $1/\mu_v$.

(3). Le temps de vacances est distribué de façon exponentielle avec un taux θ .

A un instant d'achèvement de service, si un client arrive pendant la période de vacance le serveur reviendra au fonctionnement d'un niveau normal, sinon, il continue les vacances.

(4). Il y a au plus N clients dans la file d'attente (avec celle de service).

(5). Les temps des inter-arrivées et de service et les période de vacances sont indépendants les uns des autres.

(6). La discipline de service est: le premier arrivée, le premier servi (FIFO).

Soit $X = \{X_t : t > 0\}$ une chaîne de Markov à espace d'états fini $E = \{0, 1, \dots, N\}$. Soit $P = (P_{ij})$, $i, j \in E$ la matrice des probabilités de transition de la chaîne de Markov X . P est une matrice stochastique.

Alors pour le modèle $M/G/1/N$ avec vacances étudié on a:

$$P = \begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} & \dots & P_{0,N-1} & 1 - \sum_{k=0}^{N-1} P_{0k} \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1,N-1} & 1 - \sum_{k=0}^{N-1} P_{1k} \\ 0 & P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2,N-1} & 1 - \sum_{k=0}^{N-1} P_{2k} \\ 0 & 0 & P_{32} & \dots & P_{3,N-1} & 1 - \sum_{k=0}^{N-1} P_{3k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & P_{N,N-1} & 1 - P_{N-2,N-1} \end{pmatrix},$$

où ses composants sont donnée par:

$$P_{00} = \frac{\lambda}{(\lambda + \theta)} \int_0^{\infty} e^{-(\lambda + \theta)t} dS_v(t) + \frac{\theta}{\lambda + \theta}.$$

Pour $1 \leq j \leq N - 1$:

$$P_{0j} = \frac{\lambda}{(\lambda+\theta)} \int_0^{\infty} \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-(\lambda+\theta)t} dS_v(t) + \frac{\lambda}{(\lambda+\theta)} \int_0^{\infty} \frac{(\lambda t)^{j-1}}{(j-1)!} e^{-(\lambda+\theta)t} \theta [1 - S_v] dt.$$

Les valeurs de P_{ij} pour $i > 0$ sont données par:

$$P_{ij} = \begin{cases} \int_0^{\infty} \frac{(\lambda t)^{(j-i+1)}}{(j-i+1)!} e^{-\lambda t} dS_b(t) & , \quad i-1 \leq j \leq N-2 \quad \text{et} \quad 1 \leq i \leq N-1. \\ 1 - \sum_{k=i-1}^{N-2} P_{ik} & , \quad j = N-1, \quad \text{et} \quad 1 \leq i \leq N-1. \\ 0 & , \quad j < i-1, \end{cases}$$

Conclusion

Dans ce chapitre, on a fait une étude sur les file d'attente et on a présenté les concepts principaux du modèle, puis on a effectués une synthèse bibliographie sur les modèles avec vacances. Pour pallier les difficultés rencontrées pendant l'étude de ces modèles, plusieurs auteurs ont affectés différents études et ils ont tenté de développer des méthodes approximatives d'analyse de ce type de modèle.

Parmi les principales approches développées dans les dernière études, on trouve l'approche des développements en série de Taylor des chaînes de Markov. L'étude de cette approche, est l'objet du prochain chapitre.

Chapter 2

Approximation de la densité via le développement en séries de Taylor

Introduction

L'approximation est une représentation imprécise ayant toutefois un lien étroit avec la quantité ou l'objet qu'elle reflète: approximation d'un nombre, d'une solution d'un problème, d'une fonction mathématique, etc.....

L'approximation d'une densité, où on a une fonction non connue, est de trouver une fonction approximatif à partir de certains paramètres donnés. comme, dans le cas d'une distribution stationnaire non connue d'un système de file d'attente, on la calcule à l'aide de certains performances (tels que la matrice des probabilités de transitions, la matrice fondamentale)...etc.

Pour réaliser cette approximation, on a plusieurs méthodes tel que le développement en séries de Taylor [26].

Ce dernier aboutit souvent à l'approximation d'une fonction au voisinage d'un point d'intérêt, dont l'expression analytique de cette fonction n'existe pas ou elle est difficile à manipuler, mais les dérivées successives de cette dernière sont connues au point d'intérêt. Pour cette raison, le développement en séries de Taylor, nous assure une approximation polynômial de la fonction con-

sidérée au voisinage du point considéré.

Dans ce chapitre, nous rappelons d'abord, des concepts sur les développement en séries de Taylor, Puis on présentera la méthode d'approximation de la densité via le développement en séries de Taylor .

2.1 Développement en séries de Taylor d'une fonction réelle à plusieurs variables réelles

Les séries de Taylor permettent de représenter les fonctions de plusieurs variables sous formes polynomiale. Dans cette section on présentera les développement en séries de Taylor relatifs au cas des fonctions réelles à plusieurs variables réelles [18],[21].

2.1.1 Fonction de classe C^n

Définition 2.1.1.

On dit qu'une fonction, définie dans un ouvert V de \mathbb{R}^p , est de classe C^n sur V , si elle admet des dérivées partielles jusqu'à l'ordre n continues sur V .

2.1.2 Différentiabilité

Théorème 2.1.1.

Si une fonction d'un ouvert V de \mathbb{R}^p dans une partie U de \mathbb{R} admettant des fonctions dérivées partielles d'ordre 1 définies dans V et continues en un point M_0 de V , alors f est différentiable en M_0 .

2.1.3 Formule de Taylor à l'ordre n

Définition 2.1.2.

Considérons une boule ouverte B de \mathbb{R}^p centrée en a et f une fonction à valeurs réelles, possédant des dérivées d'ordre $(n+1)$ continues en chaque point. Alors pour tout $x \in B$:

$$f(x) = \sum_{|\alpha|=0}^n \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha f(a)}{\partial x^\alpha} (x-a)^\alpha + R_n(a, x); \quad (2.1)$$

tels que:

$$\alpha = |\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_p|$$

$$\text{et } R_n(a, x) = \sum_{|\alpha|=n+1}^{\infty} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha f(a)}{\partial x^\alpha} (x-a)^\alpha.$$

Exemple 2.1.1 On considère L le nombre moyen de clients dans le système d'attente $M/G/1$, comme une fonction à deux variables λ et μ :

$$L(\lambda, \mu) = \left\{ \lambda \beta_1 + \frac{\lambda^2}{1-\frac{\lambda}{\mu}} \frac{\beta_2}{2} \right\},$$

avec, Y : Durée de service.

$$\beta_1 = E(Y), \text{ et } \beta_2 = E(Y^2).$$

En utilisant deux paramètres de perturbation Δ_1 (correspondant à λ) et Δ_2 (correspondant à μ).

La représentation polynomiale sous forme du polynôme de Taylor à l'ordre 3 est donnée par:

$$L(\lambda + \Delta_1, \mu + \Delta_2) \simeq L(\lambda, \mu) + \frac{\partial L}{\partial \lambda}(\lambda, \mu) \Delta_1 + \frac{\partial L}{\partial \mu}(\lambda, \mu) \Delta_2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2}(\lambda, \mu) \Delta_1^2 + \frac{\partial^2 L}{\partial \mu^2}(\lambda, \mu) \Delta_2^2 + 2 \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial \mu}(\lambda, \mu) \Delta_1 \Delta_2 \right) + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 L}{\partial \lambda^3}(\lambda, \mu) \Delta_1^3 + \frac{\partial^3 L}{\partial \mu^3}(\lambda, \mu) \Delta_2^3 + 3 \frac{\partial^3 L}{\partial \lambda^2 \partial \mu}(\lambda, \mu) \Delta_1^2 \Delta_2 + 3 \frac{\partial^3 L}{\partial \lambda \partial \mu^2}(\lambda, \mu) \Delta_1 \Delta_2^2 \right)$$

2.1.4 Application des développements en séries de Taylor sur les chaînes de Markov

Dans cette section, on discute le développement multivarié de la série de Taylor [13],[14], pour approximer la densité la distribution stationnaire de la chaîne de Markov, en raison des incertitudes dans les paramètres d'entrée du modèle. ce qui est équivalent au résultat de théorème suivante:

Théorème 2.1.1

Soit $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^m$. Supposons que Q_θ est les éléments partiellement différentiables par rapport à θ_i , $1 \leq i \leq m$. De plus, supposons que toutes les dérivées partielles d'ordre $|i|$ sont continues par rapport à θ , alors π_θ est $|i|$ -fois différentiable au point θ , et les $|i|^{\text{ème}}$ dérivées partielles de la distribution stationnaire π_θ sont donnés par:

$$d^i \pi_\theta = \sum_{|k| < |i|} \binom{i}{k} d^k \pi_\theta d^{i-k} Q_\theta Z_\theta, \quad (2.2)$$

où i et k sont deux multi-indices.

Z_θ La matrice fondamentale de la chaîne de Markov.

Ce résultat est équivalent au théorème suivante, qui établit la formule de $i^{\text{ème}}$ dérivée de la distribution stationnaire π_θ par rapport à θ , avec $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m)$. Ce théorème était le principal résultat obtenue dans [31].

Théorème 2.1.2.

Supposons que toutes les composantes de la matrice de probabilités de transition P_θ sont de classe C^k par rapport à θ , où θ est point intérieur d'un certain intervalle Θ . Alors, la $i^{\text{ème}}$ dérivée de la distribution stationnaire π_θ , d'une chaîne de Markov ergodique à temps discret et à espace d'états fini, par rapport au paramètre θ est donnée par:

$$\frac{d^i}{d\theta^i} \pi_\theta = \pi_\theta^{(i)} = \sum_{m=0}^{i-1} \binom{i}{m} \pi_\theta^{(m)} P_\theta^{(i-m)} Z_\theta, \quad (2.3)$$

où $P_\theta^{(n)}$ (respectivement $\pi_\theta^{(n)}$) est la matrice (resp. le vecteur) dont ses composantes sont les dérivées $n^{\text{ème}}$ de P_θ (resp. π) par rapport à θ .

Ce théorème a été démontré par S. Ouazine et K. Abbas [14]. Un résultat équivalent à celui énoncé ci-dessus a été établi, en 2003, par Heidergott et Hordijk [9]. Ce résultat consiste à obtenir la sensibilité de la distribution stationnaire en fonction de la matrice de déviation D_θ ; tel que:

$$D_\theta = Z_\theta - \Pi_\theta.$$

Exemple 2.1.2 La série de Taylor au troisième ordre autour du point $(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2)$ est donnée comme

suit:

$$\begin{aligned} \pi_{\bar{\theta}_1 + \sigma_1 \epsilon_1, \bar{\theta}_2 + \sigma_2 \epsilon_2} &= \pi(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2) + \frac{\partial \pi}{\partial \theta_1} \sigma_1 \epsilon_1 + \frac{\partial \pi}{\partial \theta_2} \sigma_2 \epsilon_2 \\ &+ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 \pi}{\partial \theta_1^2} \sigma_1^2 \epsilon_1^2 + 2 \frac{\partial^2 \pi}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} \sigma_1 \epsilon_1 \sigma_2 \epsilon_2 + \frac{\partial^2 \pi}{\partial \theta_2^2} \sigma_2^2 \epsilon_2^2 \right] \\ &+ \frac{1}{6} \left[\frac{\partial^3 \pi}{\partial \theta_1^3} \sigma_1^3 \epsilon_1^3 + 3 \frac{\partial^3 \pi}{\partial \theta_1^2 \partial \theta_2} \sigma_1^2 \epsilon_1^2 \sigma_2 \epsilon_2 + 3 \frac{\partial^3 \pi}{\partial \theta_1 \partial \theta_2^2} \sigma_1 \epsilon_1 \sigma_2^2 \epsilon_2^2 + \frac{\partial^3 \pi}{\partial \theta_2^3} \sigma_2^3 \epsilon_2^3 \right] + R(3, \epsilon_1(\omega), \epsilon_2(\omega)), \end{aligned}$$

où, $R(3, \epsilon_1(\omega), \epsilon_2(\omega))$ est le reste de la série de Taylor.

Les résultats des théorème (2.1.1 et 2.1.2) est donné par le théorème suivant.

Théorème 2.1.3.[28]

Soit $\theta \in \Theta$ et soit $\Theta_0 \subset \Theta$ un intervalle ouvert contenant θ . Supposons que les composantes de la matrice de probabilité de transition P_θ sont n fois dérivable par rapport au paramètre θ . Alors, la dérivée $i^{\text{ème}}$ de la distribution stationnaire π_θ par rapport au paramètre θ est donnée par:

$$\pi_\theta^{(i)} = \pi_\theta K_\theta(i), \quad (2.4)$$

où

$$K_\theta(i) = \sum_{\substack{1 \leq m \\ l_i \leq i \\ l_1 + \dots + l_m = i}} \frac{i!}{l_1! \dots l_m!} \prod_{i=1}^m \left(P_\theta^{(i)} D_\theta \right). \quad (2.5)$$

Dans la suite, on présente une approche numérique [9,14,15] pour calculer la distribution stationnaire π_θ en quelques valeurs de θ et on montre comment cette distribution stationnaire peut être calculer, dans le cas où le paramètre de contrôle θ change dans un certain intervalle. Spécifiquement, on approchera $\pi_{\theta+\Delta}$ par un polynôme en fonction Δ . Ainsi, par supposition que les probabilités de transition $P_\theta(i, j)$ sont suffisamment régulières par rapport à θ (la condition de théorème 2.1.2), alors la distribution stationnaire $\pi_{\theta+\Delta}$ peut être approchée par un polynôme de Taylor, donné sous la forme suivante:

$$\pi_{\theta+\Delta} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Delta^i}{i!} \pi_\theta^{(i)}, \quad (2.6)$$

où $\pi_\theta^{(i)}$ est la dérivée $i^{\text{ème}}$ de π_θ par rapport à θ . Pour $n \geq 0$, on appelle:

$$P_i(\epsilon) = \sum_{i=0}^n \frac{\Delta^i}{i!} \pi_\theta^{(i)}. \quad (2.7)$$

L'approximation de Taylor d'ordre n de $\pi_{\theta+\Delta}$ en θ ,

$$T_\theta(i, \Delta) = \frac{\Delta^i}{i!} \pi_\theta^{(i)}. \quad (2.8)$$

La représentation explicite des dérivées de la distribution stationnaire π_θ [15] d'ordre inférieur est donnée par le théorème suivant:

Théorème 2.1.4.

On suppose que tout les composants de P_θ soient des fonctions de $C^n(\Omega)$. Alors, les dérivées partielles de la distribution stationnaire π_θ d'une chaîne de Markov ergodique, par rapport à θ sont données comme suit:

$$D^h \pi_\theta = \sum_{|i_1, i_2, \dots, i_m| < n} C_{h_1}^{i_1} \dots C_{h_m}^{i_m} \left(\frac{\partial^{(i_1 + \dots + i_m)} \pi_\theta}{\partial \theta^{(i_1, \dots, i_m)}} \right) \left(\frac{\partial^{(h_1 - i_1 + \dots + h_m - i_m)} P_\theta}{\partial \theta^{(h_1 - i_1, \dots, h_m - i_m)}} \right) Z_\theta,$$

où $\|h\|_1 = n$.

Exemple: voici les dérivées d'une distribution stationnaire pour $i = 1, 2, 3$:

$$\pi'_\theta = \pi_\theta P'_\theta Z_\theta, \quad (2.9)$$

et

$$\pi_\theta^{(2)} = \pi_\theta P_\theta^{(2)} Z_\theta + 2\pi_\theta P'_\theta Z_\theta (P'_\theta Z_\theta)^2; \quad (2.10)$$

La seconde dérivée peut être écrite comme suit:

$$\pi_\theta^{(2)} = \pi_\theta P_\theta^{(2)} Z_\theta + 2\pi'_\theta P'_\theta Z_\theta;$$

de la même façon, on obtient la troisième dérivée:

$$\pi_\theta^{(3)} = \pi_\theta P_\theta^{(3)} Z_\theta + 3\pi_\theta^{(2)} P'_\theta Z_\theta + 3\pi'_\theta P_\theta^{(2)} Z_\theta. \quad (2.11)$$

2.1.5 Reste du développement en séries de Taylor

Le reste $r_\theta(n, \Delta)$ présenté ci-dessous peut être exprimé sous la forme de Lagrange comme suit:

$$r_\theta(n, \Delta) = \int_0^\Delta \frac{x^n}{n!} \pi_{\theta+x}^{(n+1)} dx. \quad (2.12)$$

Le reste de développement de Taylor est approché en considérant la dérivée $\pi_{\theta+x}^{(n+1)}$ comme fonction de θ , et par la suite est approchée par un polynôme, tout en tronquant sa série de Taylor.

Considérons le développement en Taylor de la dérivée $\pi_{\theta+x}^{(n+1)}$ au voisinage de θ :

$$\pi_{\theta+x}^{(n+1)} \simeq \sum_{j=0}^m \frac{x^j}{j!} \sum_{l=0}^{n+j} \binom{n+1+j}{l} \pi_\theta^{(l)} P_\theta^{(n+1+j-l)} Z_\theta. \quad (2.13)$$

Cette expression est la troncature de la série de Taylor à l'ordre m de la dérivée $\pi_{\theta+x}^{(n+1)}$.

En substituant cette dernière dans la formule de reste on obtient:

$$r_\theta(n, \Delta) \simeq \sum_{j=0}^m \frac{\Delta^{n+1+j}}{n!j!(n+1+j)} \sum_{l=0}^{n+j} \binom{n+1+j}{l} \pi_\theta^{(l)} P_\theta^{(n+1+j-l)} Z_\theta. \quad (2.14)$$

On peut utiliser (2.16) comme approximation du reste du développement en séries de Taylor, afin d'approcher le reste $r_\theta(n, \Delta)$.

2.2 Approximation de la densité via le développement en séries de Taylor

Dans cette partie, nous approximons la fonction de densité de probabilité pour les composantes d'une distribution stationnaire $\pi_\theta(i)$ d'un modèle d'attente avec vacances à plusieurs variables (où θ_i sont les paramètres de vacances).

On considère $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_m)$ un vecteur de variables aléatoires conjointement continues de la fonction de densité f , le paramètre θ_i est une variable aléatoire, qui s'écrit de la manière suivante:

$$\theta_i = \bar{\theta}_i + \sigma_{\theta_i} \epsilon_i, \epsilon_i \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1), \quad (2.15)$$

où, $\bar{\theta}_i$ est la moyenne de paramètre θ_i , σ_{θ_i} est leur écart type, et ϵ_i v.a. représentes le bruits blancs.

Dans le cas où la forme analytique de la distribution stationnaire π_i est inconnu, on ne peut pas calculer sa densité, même si elle est connu mais il est très difficile de trouver son inverse, dans ce cas on remplace l'expression de $\pi(\theta_i)$ par le polynôme de Taylor de degré k $P_i(\epsilon)$.

$$\pi_i(\theta) \simeq P_i(\epsilon) = \sum_{|h| \leq n} \frac{1}{h_1! \dots h_m!} D^h \pi_i(\bar{\theta}) \sigma^h \epsilon^h. \quad (2.16)$$

Pour estimer la densité de la distribution stationnaire π_i , on procède ainsi:

D'abord, on construisons une fonction dérivable $g : \mathbb{R}^> \rightarrow \mathbb{R}^>$, par la suite, on considérant le vecteur aléatoire $Y = g(\epsilon_1, \dots, \epsilon_m) = (P_i(\epsilon), g_2(\epsilon), \dots, g_m(\epsilon))$. Comme g est continûment dérivable, il existe une partition finie $(A_i)_{1 \leq i \leq d}$ de l'ensemble $\{x = (x_1, \dots, x_m) : f_\epsilon(x_1, \dots, x_m) > 0\}$.

La densité de Y peut être calculée par cette formule:

$$f_Y(y) = \sum_{i=1}^d 1_{B_i(y)} f_\epsilon \circ g^{-1}(y) \frac{1}{|J_g(g^{-1}(y))|}, \quad (2.17)$$

où, $J_g(g^{-1}(y))$ est le jacobien de la transformée inverse de g au point y. Pour trouver la fonction de densité estimée de π_i , il suffit de calculer la fonction de densité marginale comme suit:

$$f_\pi(y_1) = \int \dots \int_{\mathbb{R}^{>-k}} f_{(Y_1, \dots, Y_n)}(y_1, \dots, y_m) dy_2 \dots dy_m. \quad (2.18)$$

Par la suite, en particulier, pour le cas unidimensionnel, on considère la distribution stationnaire comme une fonction de paramètre θ , on utilisant une méthode connue de transformation de variables aléatoires, indiquée dans la théorème suivant [26], pour déterminer les fonction de densité $\pi_\theta(i)$, pour $i=0, \dots, N-1$.

Théorème 2.2.1.

Considérons la variable aléatoire X de fonction de densité de probabilité $f_X(x)$ et une fonction dérivable g. La fonction de densité de probabilité de la variable aléatoire $Y=g(X)$, est donnée par:

$$f_Y(y) = \sum_{i=1}^r \frac{f_X(x_i)}{g'(x_i)}, \quad (2.19)$$

avec $g'(x_i) = \left. \frac{dg}{dx} \right|_{x=x_i} \neq 0$.

où x_1, x_2, \dots, x_r sont les r racines réelles de l'équation $y=g(x)$.

Dans ce travail, pour trouver la fonction de densité $f_{\pi_{\theta}(i)}(\cdot)$, la fonction $\pi_{\theta}(i)$ est approchée par un polynôme de Taylor d'ordre 3:

$$\pi_{\theta}(i) = \pi_{\bar{\theta}+\sigma\epsilon}(i) = \pi_{\bar{\theta}}(i) + \sum_{j=1}^k \sigma^j \frac{\pi_{\bar{\theta}}^{(j)}(i)}{j!} \epsilon^j = P_i(\epsilon). \quad (2.20)$$

En applique (2.16), $f_{\pi_{\theta}(i)}$ peut s'obtenir:

$$f_{\pi_{\theta}(i)}(y) = \sum_{j=1}^r \frac{f_{\epsilon}(\epsilon(j))}{|P'_i(\epsilon_j)|}, \quad (2.21)$$

où $\epsilon_1, \dots, \epsilon_r$ sont les solutions réelles de l'équation polynomiale $y = P_i(\epsilon)$.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une méthodes numérique d'approximation de la densité d'une distribution stationnaire d'un modèle d'attente, qui est basée sur un développement en séries de Taylor. Par la suite, cette approche fera l'objet d'une application sur les systèmes de files d'attente avec vacances.

Chapter 3

Approximation de la densité dans un modèle de file d'attente avec vacances via les séries de Taylor.

Introduction

Dans ce chapitre, on applique l'approche du développement en séries de Taylor, afin d'approximer la densité de certains modèles de file d'attente. Les coefficients du développement de Taylor sont exprimés en fonction de la matrice de déviation de la chaîne de Markov décrivant l'état du modèle d'attente étudié. Plus spécifiquement, on applique cette méthode sur un modèle de file d'attente avec vacances (M/G/1/N). Cette application sera réalisée pour un système à une variable et un système à deux variables. Tel que, dans le modèle d'attente avec vacances, on effectue l'étude pour un système à une variable par rapport à θ (paramètre de vacances), et par rapport à θ (θ) et λ (λ taux des inter-arrivées) pour le système de deux variables, où ces paramètres sont considérés comme des variables aléatoires indépendantes, puis on effectue une comparaison sur les résultats obtenus entre cette méthode et la méthode de simulation de Kernel.

Dans les prochaines sections, nous présenterons le chemin et les principales étapes et conditions pour appliquer la méthode de développement en séries de Taylor, afin d'avoir une approche algo-

rithmique pour l'approximation de la densité pour le modèle d'attente étudié.

3.1 Description du modèle M/M/1/N avec vacances

Dans cette partie, on considère le modèle d'attente M/M/1/N avec vacances, qui est un domaine de recherches de plusieurs chercheurs, comme: Bharat et Doshi [3], Gong [27], Takagi [31] et Ouazin et Abbas [34].

Considérons le modèle d'attente M/M/1/N qui est un cas particulier du modèle M/G/1/N (étudié en premier chapitre), tel que le flux de service est poissonien, de taux μ . Les notions utilisées dans ce modèle sont les suivantes:

(1). Les temps de service pendant la période d'activité ont la fonction de distribution de probabilité suivante:

$$s_b(x) = 1 - e^{-\mu_b x}, \quad (3.1)$$

avec moyenne $1/\mu_b$.

(2). Les temps de service pendant la période des vacances ont la fonction de distribution de probabilité suivante:

$$s_v(x) = 1 - e^{-\mu_v x}, \quad (3.2)$$

avec moyenne $1/\mu_v$.

(3). Le temps de vacances est distribué de façon exponentielle avec un taux θ .

(4). Il y a au plus N clients dans la file d'attente (avec celle de service).

(5). Les temps des inter-arrivées et de service et les période de vacances sont indépendants les uns des autres.

(6). La discipline de service est: le premier arrivée, le premier servi (FIFO).

Soit $X = \{X_n: n > 0\}$ une chaîne de Markov à espace d'états fini $E = \{0, 1, \dots, N\}$. Soit $P = (P_{ij}), i, j \in E$.

La matrice des probabilités de transition de la chaîne de Markov X . P est une matrice stochastique.

Alors pour le modèle $M/M/1/N$ avec vacances étudié on a:

$$P = \begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} & \dots & P_{0,N-1} & 1 - \sum_{k=0}^{N-1} P_{0k} \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1,N-1} & 1 - \sum_{k=0}^{N-1} P_{1k} \\ 0 & P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2,N-1} & 1 - \sum_{k=0}^{N-1} P_{2k} \\ 0 & 0 & P_{32} & \dots & P_{3,N-1} & 1 - \sum_{k=0}^{N-1} P_{3k} \\ \ddots & \ddots & \dots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & P_{N,N-1} & 1 - P_{N,N-1} \end{pmatrix},$$

où ses composants sont donnée par:

$$P_{00} = \frac{\lambda\mu_v}{(\lambda+\theta)(\lambda+\theta+\mu_v)} + \frac{\theta}{\lambda+\theta}.$$

Pour $1 \leq j \leq N - 1$:

$$P_{0j} = \frac{\lambda^{j+1}\mu_v + \lambda^j\theta(\theta + \lambda + \mu_v)}{(\lambda+\theta)(\lambda+\theta+\mu_v)^{j+1}}.$$

Les valeurs de P_{ij} pour $i > 0$ sont données par:

$$P_{ij} = \begin{cases} \frac{\lambda^{j-i+1}\mu_b}{(\lambda+\mu_b)^{j-i+2}}, & i-1 \leq j \leq N-1 \text{ et } 1 \leq i \leq N-1 \\ 1 - \sum_{k=i-1}^{N-1} P_{ik}, & j = N-1, \text{ et } 1 \leq i \leq N-1. \\ 0, & j < i-1, \end{cases}$$

avec, λ : taux des inter-arrivées.

θ : taux de vacances.

μ_b : Les temps de service pendant la période d'activité.

μ_v : Les temps de service pendant la période des vacances.

n : la dimension de la matrice des probabilités de transition.

Soit $P^{(k)} = \frac{dP^{(k)}}{d\theta^k}$ la $k^{\text{ème}}$ dérivée de la matrice des probabilités P , donc, on a:

$$P^{(k)} = \begin{pmatrix} P_{00}^{(k)} & P_{01}^{(k)} & P_{02}^{(k)} & \dots & P_{0,N-2}^{(k)} & -\sum_{k=0}^{N-2} P_{0k} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \ddots & \ddots & \dots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Comme la distribution du modèle est difficile à calculer, on l'approxime par le développement en séries de Taylor.

3.2 Approximation de la densité du modèle M/M/1/N avec vacances via le développement de Taylor dans le cas général

Dans cette partie, on approxime la densité de la distribution stationnaire du modèle d'attente M/M/1/N, puisque sa distribution stationnaire est inconnue, alors, on utilise une méthode approximative qui est le développement en séries de Taylor pour les chaînes de Markov.

Pour réaliser cette approche, on calcule, d'abord, les dérivées d'ordre supérieur de la distribution stationnaire qui sont exprimées en fonction de la matrice fondamentale. Ces dérivées représentent les coefficients de polynôme de Taylor en fonction de bruit ϵ .

Considérons $X = \{X_n, n \geq 0\}$ une chaîne de Markov à états fini E , avec $E = \{0, 1, \dots, N\}$. Soit $P = P_{ij}, i, j \in E$ la matrice de probabilité de transition de la C.M X , on a P est une matrice stochastique.

Soit π la distribution stationnaire de la chaîne de Markov X (supposons qu'elle est unique), tel que: $\pi = (\pi(0), \pi(1), \dots, \pi(N))$, avec $\pi P = \pi$, et $\pi e = 1$ (e est un vecteur unitaire).

Dans cette étude on considère que π est une fonction de Θ , avec $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_m)$, où chaque composant θ_i , $i = 1, \dots, m$, est un paramètre de la matrice de transition P , d'où, on note P_Θ et π_Θ . On s'intéresse à obtenir des dérivées d'ordre supérieur de la distribution stationnaire par rapport au vecteur Θ . Une fois ces dérivées sont calculées, on approchera le polynôme $P_i(\epsilon)$ par un polynôme de Taylor à un ordre r , où ses coefficients sont exprimés en fonction de la matrice fondamentale notée D_θ associée à la chaîne de Markov X . Comme P_Θ est irréductible alors la matrice $D_\theta = (I - P_\theta + \Pi_\theta)^{-1}$, avec $\Pi_\theta = e\pi_\theta$, existe.

3.2.1 Calcul des dérivées de la distribution stationnaire

Définition[34]

Soit $f \in C^n(\omega)$, ω est un ouvert de R^m .

Afin de calculer les dérivées supérieures dans le cas de plusieurs variables, on introduisons la multi-index $h = (h_1, \dots, h_m)$, où $\forall i = 1, \dots, m$, $h_i > 0$. Son ordre est $|h| = h_1 + \dots + h_m = n$, on a pour tout h donné, on définit:

$$D^h f = \frac{\partial^n f}{\partial^{h_1} \theta_1 \partial^{h_2} \theta_2 \dots \partial^{h_m} \theta_m} = \partial^{h_1} \theta_1 \partial^{h_2} \theta_2 \dots \partial^{h_m} \theta_m f.$$

Par la suite, on exprime les dérivées supérieures de la distribution stationnaire en fonction de la matrice fondamentale par rapport au vecteur $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_m)$ [34].

Par la suite, on applique cette approche pour les cas particuliers: cas à un seul paramètre et un cas à deux paramètres (indépendants).

3.3 L'approximation de la densité pour le modèle M/M/1/N avec vacances

Dans cette section, on approxime la densité par le développement en séries de Taylor pour: le cas d'un seul paramètre et le cas de deux paramètres.

3.3.1 Cas unidimensionnel:

On considère dans cette section, que la distribution stationnaire de la chaîne de Markov X est en fonction de θ (taux de vacance), donc θ est une variable aléatoire, s'écrit sous cette forme: $\theta = \bar{\theta} + \sigma\epsilon$, où $\epsilon \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$, où $\bar{\theta}$ est la moyenne de θ et σ son écart-type et ϵ une variable aléatoire.

Dans les cas dont la distribution stationnaire de ce modèle est inconnu ou difficile à calculer, on l'approxime par la méthode de développement en séries de Taylor, où les coefficients du polynôme de Taylor sont en fonction de la distribution stationnaire et ses dérivées qui sont exprimées aussi, en fonction de la matrice fondamentale et les dérivées de la matrice des probabilités, puis on applique la théorème 2.4.5.

Dans la suite, on présentera les principales étapes de l'algorithme qui permet d'approximer la densité du modèle M/M/1/N avec vacances via les séries de Taylor.

Algorithme.01. Approximation de la densité d'un modèle d'attente unidimensionnel.

Entrées: écart-type(σ), taux des inter-arrivées(λ), taux de vacances (θ), le temps de service pendant la période d'activité (μ_b), le temps de service pendant les vacances (μ_v), la taille de la matrice P(n) et l'ordre de dérivées(k).

Sorties: le graphe de la densité approximer.

Début

1. Calculer la matrice des probabilités de transition P .
2. Calculer le distribution stationnaire π de P .
3. Calculer les dérivées successives de la distribution stationnaire π .
4. Donner un vecteur Y , tel que $Y=[0:\text{pas}:1]$.

Pour $i=1$ à longueur Y

1. Calculer le vecteur (on l'appel epsi) qui contient les racines réelles de l'équation 1 par rapport à ϵ .

Pour $j=1$ à longueur(eps))

1. Calculer DP la dérivé de polynôme P .
2. Ecrire f la densité de ϵ ($\epsilon \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$), en fonction du ϵ_i .
3. Calculer g la somme du rapport f par la valeur absolue de DP.

Fin pour

Fin pour

5. Tracer le graphe de la fonction g par rapport à Y

Fin.

Pour effectuer l'exécution numérique, on considère le modèle d'attente M/M/1/N avec vacances, de capacité fini $n=4$, où on pose: $\sigma=0.5$, $\lambda=2$, $\theta=1$, $\mu_b=2$, $\mu_v=3$, $k=1, \dots, 5$.

En outre, on compare l'approche obtenue par la méthode de développement en séries de Taylor par la méthode de simulation de Kernel pour la taille ($nn=1000$) les figures suivantes représentent la densité de $f_{\pi_i}(\cdot)$ calculer par les deux méthodes.

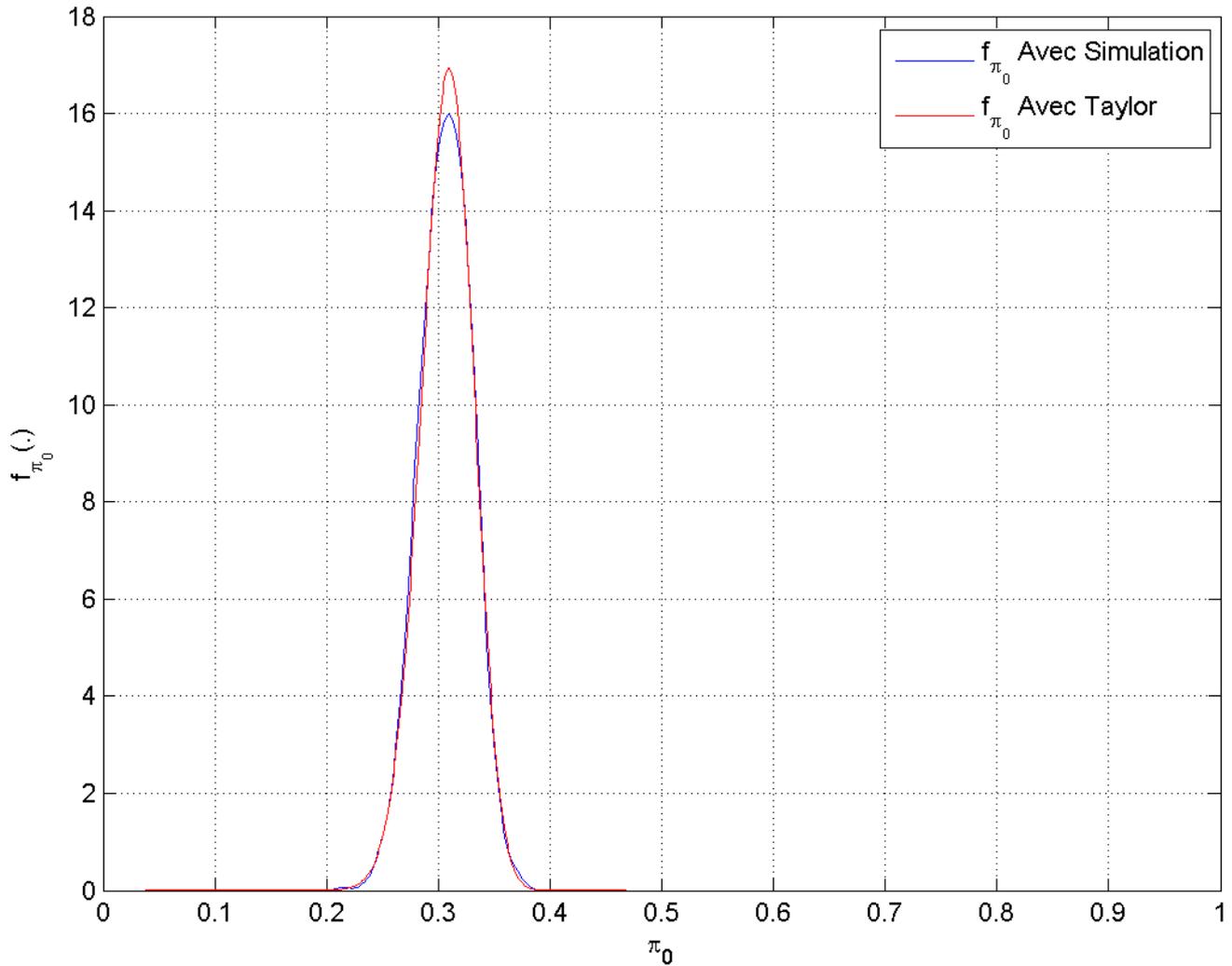


figure 2.1. Comparaison des densités obtenues avec la méthode de Taylor et simulation de π_0 .

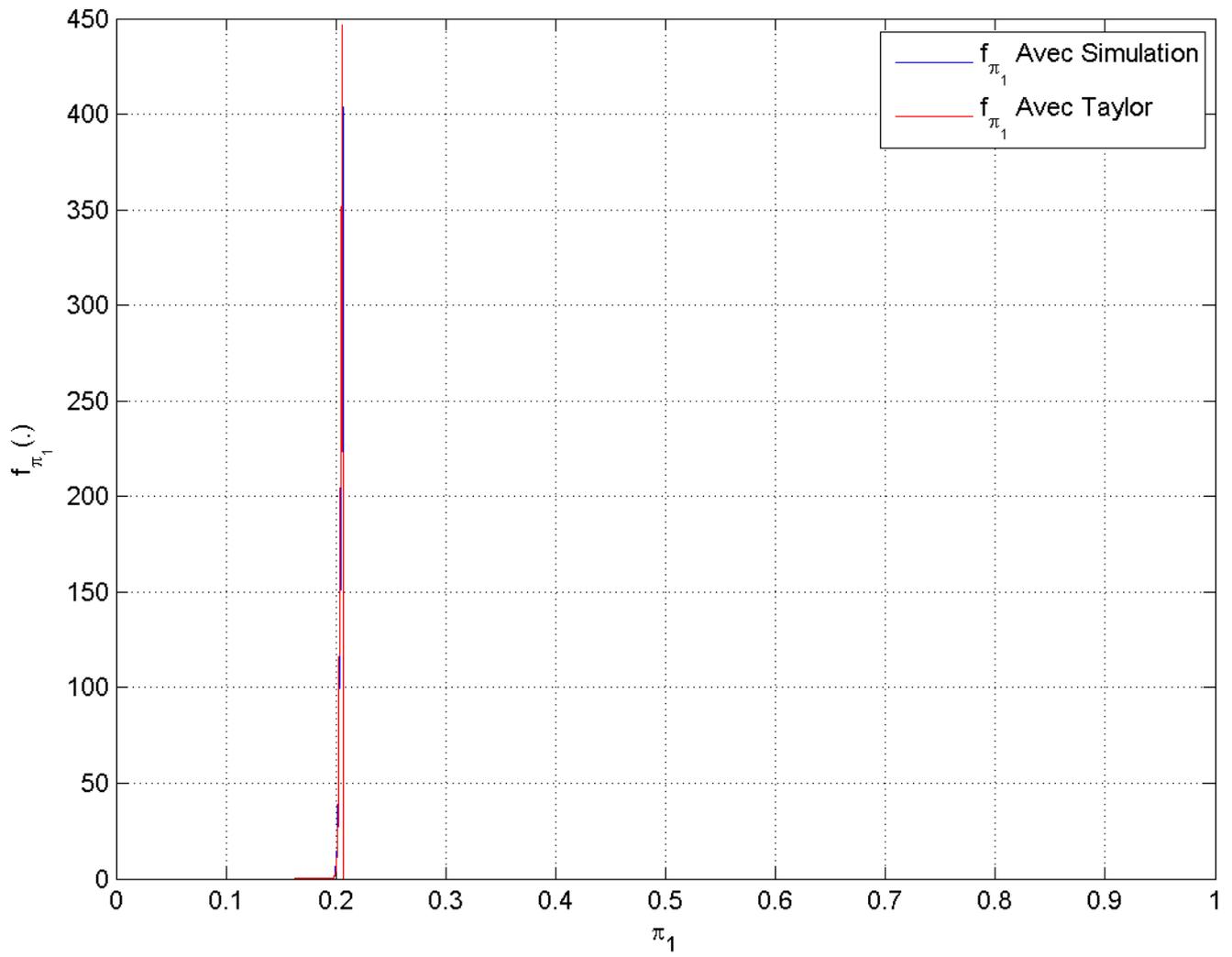


figure 2.2. Comparaison des densités obtenues avec la méthode de Taylor et simulation de π_1 .

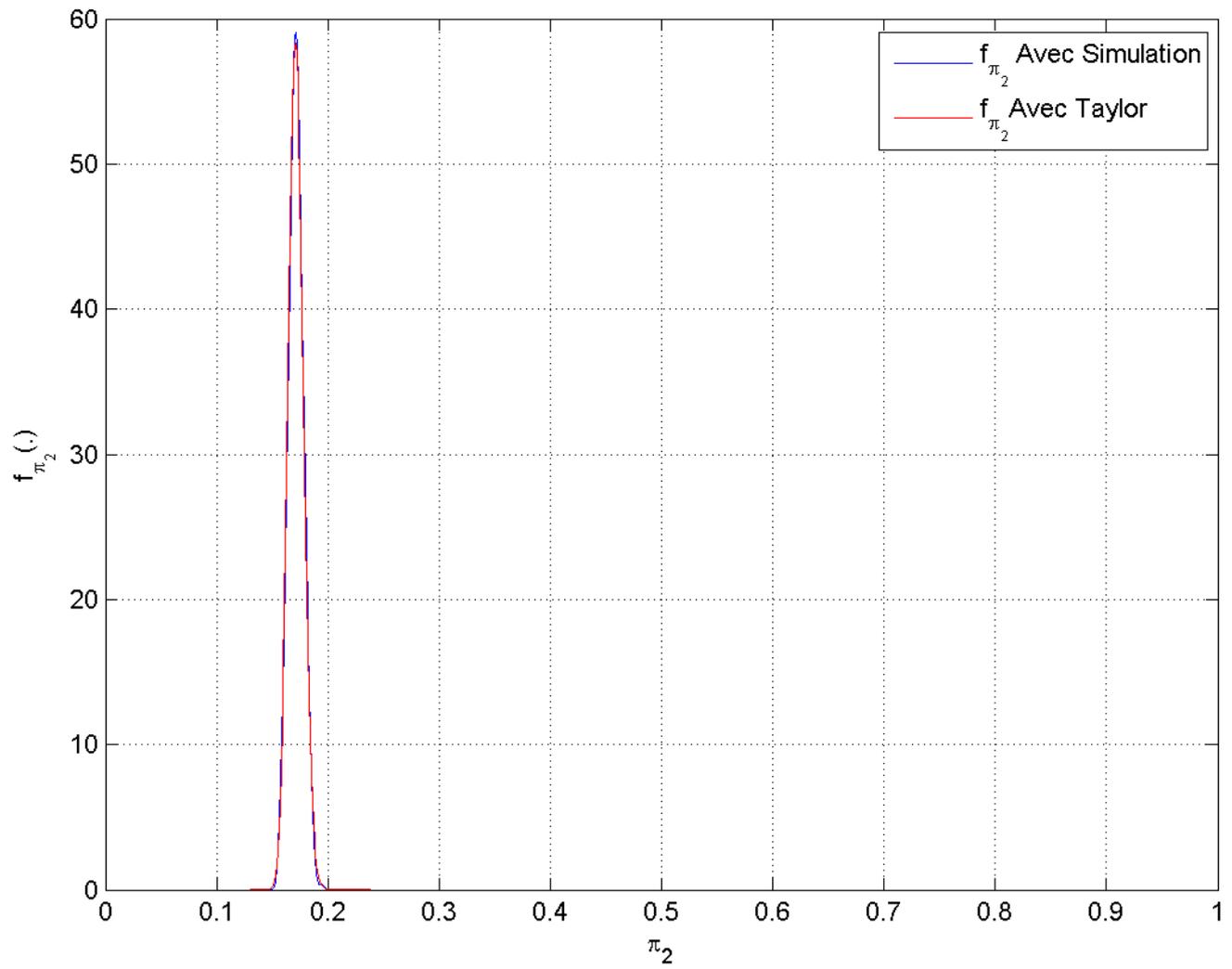


figure 2.3. Comparaison des densités obtenues avec la méthode de Taylor et simulation de π_2 .

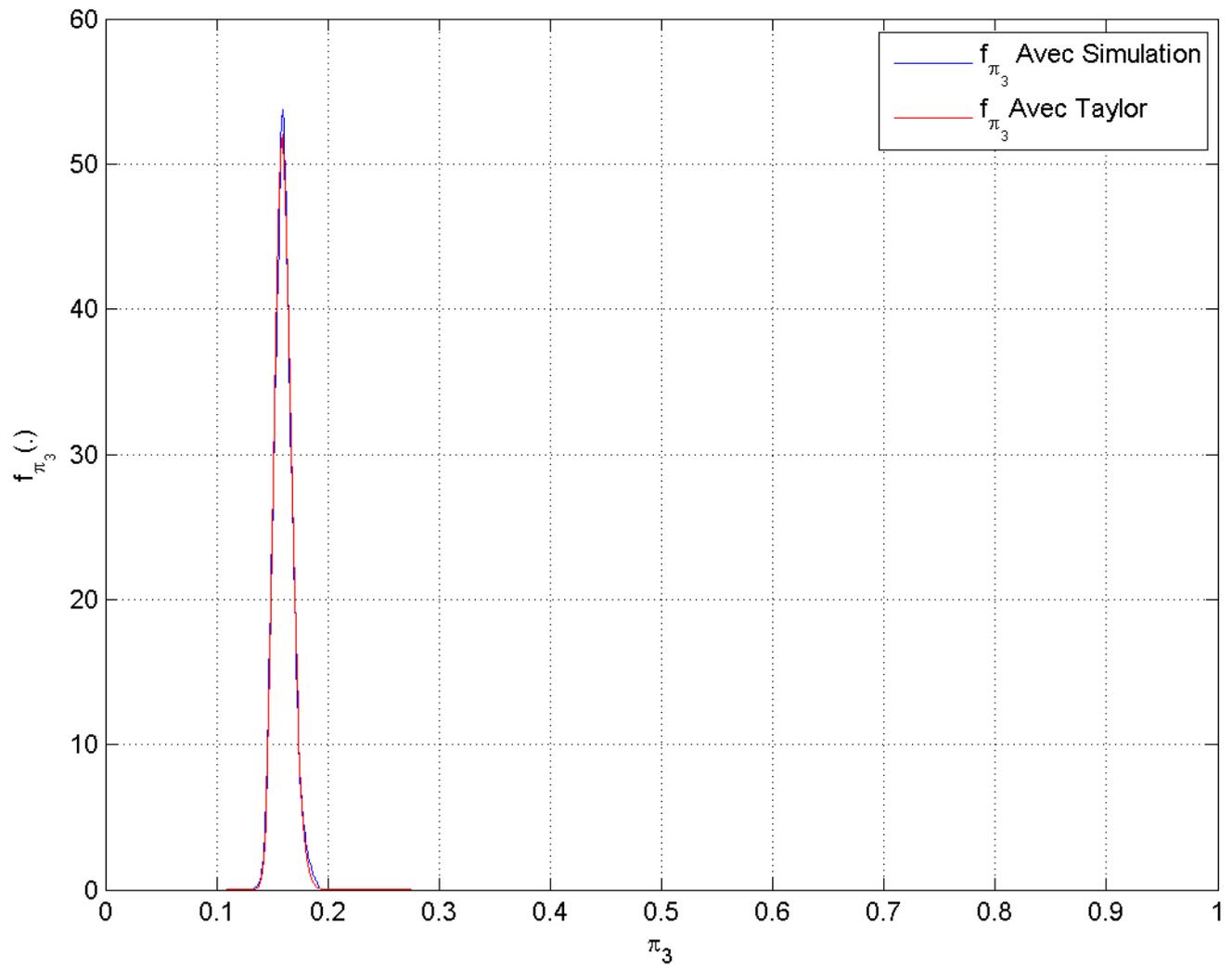


figure 2.4. Comparaison des densités obtenues avec la méthode de Taylor et simulation de π_3 .

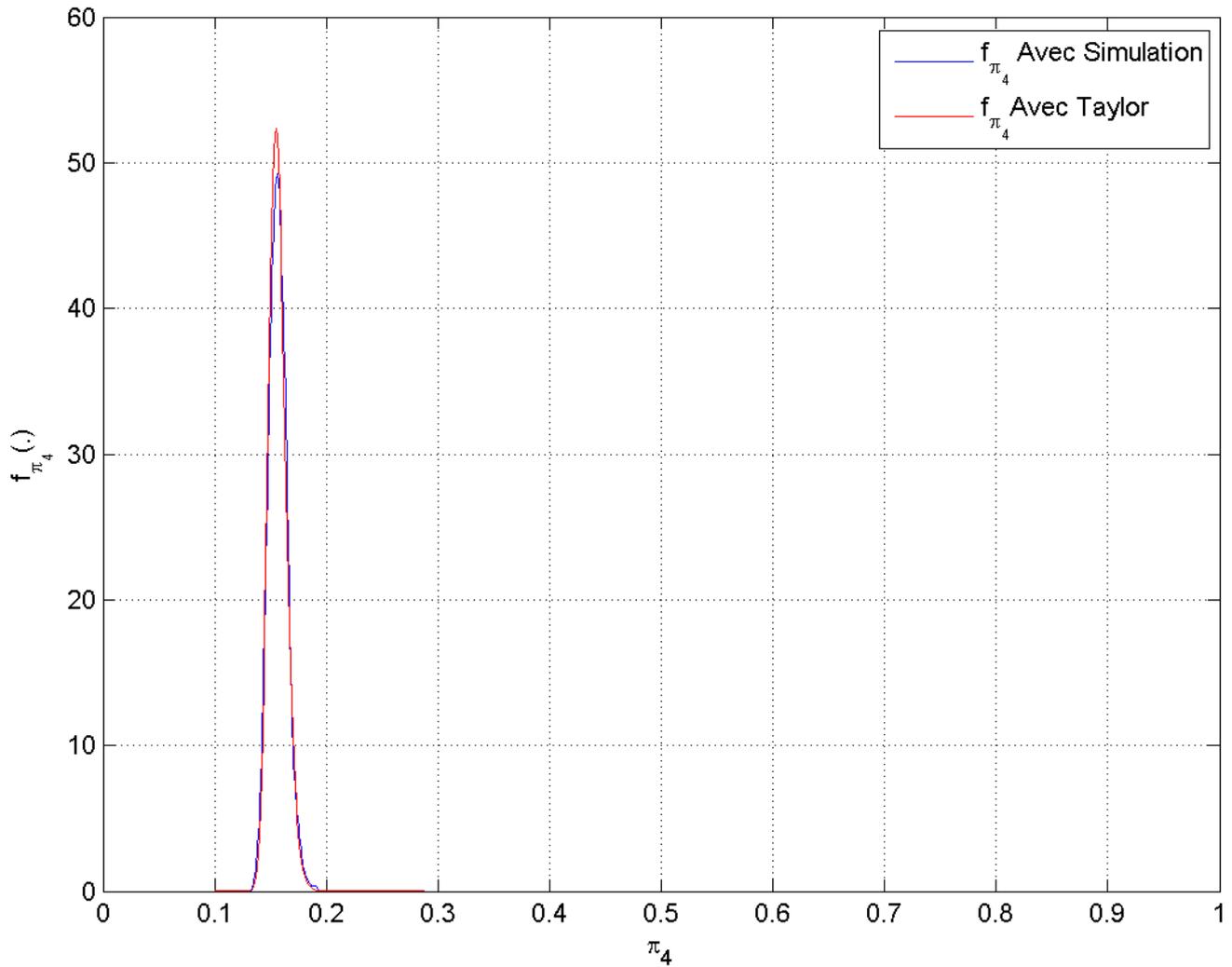


figure 2.5. Comparaison des densités obtenues avec la méthode de Taylor et simulation de π_4 .

Par la suite on présente l'espérance et la variance de chaque π_i , $i=0,1,\dots,4$ approché par le développement en séries de Taylor.

Esperance	0.3072	0.2050	0.1713	0.1601	0.1564
Variance	5.6183e-04	7.9646e-06	4.6577e-05	6.1255e-05	6.1929e-05

La comparaison des résultats numériques obtenus montre que l'approximation de densité, d'espérance et de variance pour π_i , $i=0,1,\dots,4$, sont proches aux résultats obtenus par la simulation, ce qui valide l'approche basée sur le développement en séries de Taylor.

Les résultats obtenus si-dessus ne concernent que le cas d'une variable, dans la suite on étudie le cas où on a deux variables aléatoires.

3.3.2 Cas de deux variables

Dans ce cas, on considère qu'on a deux variables aléatoires, le taux des inter-arrivées λ , et le taux de vacances θ , c'est à dire ils sont représentés de cette façon:

$$\lambda = \bar{\lambda} + \sigma_{\lambda}\epsilon_1, \epsilon_1 \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1), \text{ et}$$

$$\theta = \bar{\theta} + \sigma_{\theta}\epsilon_2, \epsilon_2 \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1),$$

où $\bar{\lambda}$ est la moyenne de λ et σ_{λ} est son écart-type, $\bar{\theta}$ la moyenne de taux de vacances θ et σ_{θ} son écart-type, ϵ_1, ϵ_2 sont des variables aléatoires indépendantes.

Alors, dans ce cas on considère que P est en fonction de λ et θ , donc π l'est aussi. D'où on s'intéresse à obtenir des dérivées partielles de la distribution stationnaire, par conséquent, on calcule celles de la matrice des probabilités de transition, par rapport à λ et θ . Afin d'approcher le polynôme $P_i(\epsilon)$ par le développement en séries de Taylor, dont ses coefficients sont exprimées en fonction de la matrice fondamentale associée à la chaîne de Markov X .

Pour approximer la densité, on suit l'algorithme suivant:

Algorithme.02. Approximation de la densité pour un modèle d'attente dans le cas de deux variables.

Entrées: écart-type de λ (σ_{λ}), écart-type de θ (σ_{θ}), taux des inter-arrivées (λ), taux de vacances (θ), le taux de service pendant le travail (μ_b), le temps de service pendant les vacances (μ_v), size de $P(n)$ et l'ordre de dérivées (k).

Sorties: le graphe de la densité approximer.

Début

1. Calculer la matrice des probabilités de transition P .
2. Calculer le distribution stationnaire π de P .
3. calculer la matrice fondamentale de P .
4. Calculer les dérivées successives de la matrice des probabilité par rapport à λ puis par rapport à θ .
5. Calculer les dérivées successives de la distribution stationnaire π par rapport à λ puis par rapport à θ .
6. Donner un vecteur X , tel que $X=[0:\text{pas}:1]$ puis on distingue sa longueur.
7. Donner un vecteur Y , tel que $Y=[\lambda + \theta - c: \text{pas} : \lambda + \theta + c]$, avec c un constant, puis on distingue sa longueur.

8. On calcule la matrice Jacobien puis on calcule son determinant et son inverse.

Pour $i=1$ à longueur de X

Pour $j=1$ à longueur de Y

1. Calculer la matrice qui contient en première ligne la différence entre $X(i)$ et π pour un k fixé, et on second ligne calculer la différence entre $Y(j)$ et λ et θ .
2. Calculer le produit de l'inverse de la matrice jacobien et la matrice(1.).
3. Calculer le rapport de la densité de la loi normale par le déterminant jacobien.

Fin pour

Fin pour

9. Calculer la marginale de rapport précédent(3.) par rapport à λ et θ .
10. Tracer le graphe du X par rapport à la marginale(9.).

Fin.

On effectue l'exécution numérique pour un modèle de capacité fini $n=4$, et des paramètres: $\lambda=1$, $\theta=2$, $\mu_v=2$, $\mu_b=3$, $\sigma_\lambda=0.01$, $\sigma_\theta=0.01$, et pour $k=1, \dots, 5$.

Pour montre la validation de l'approche de l'approximation par le développement en série de Taylor pour la densité de modèle M/G/1/N avec vacances, on compare les résultats obtenus par la méthode de simulation de Kernel, qui sont engendrée dans quelques figures suivantes:

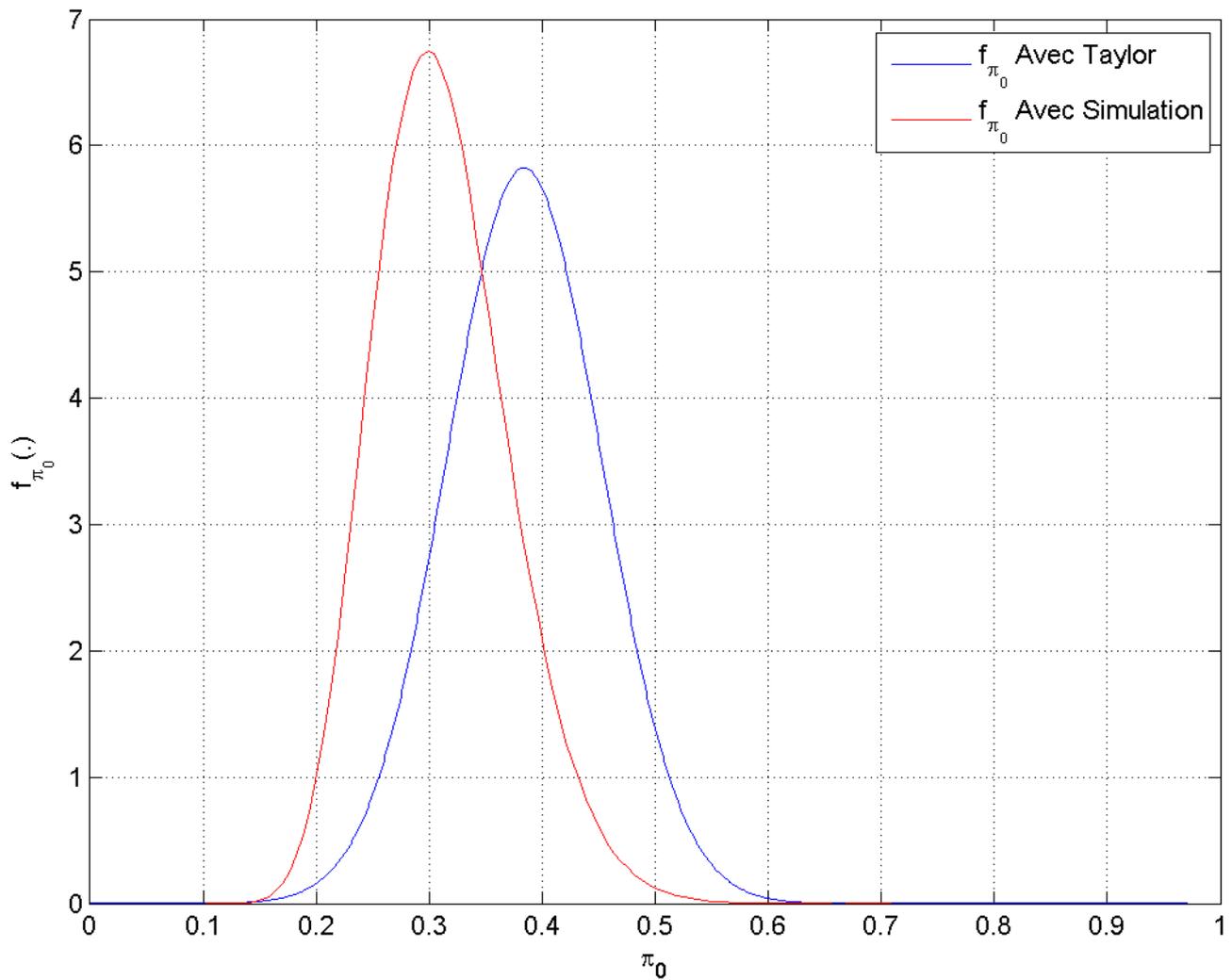


figure 2.1. Comparaison des densités obtenues avec la méthode de Taylor et simulation de π_0 .

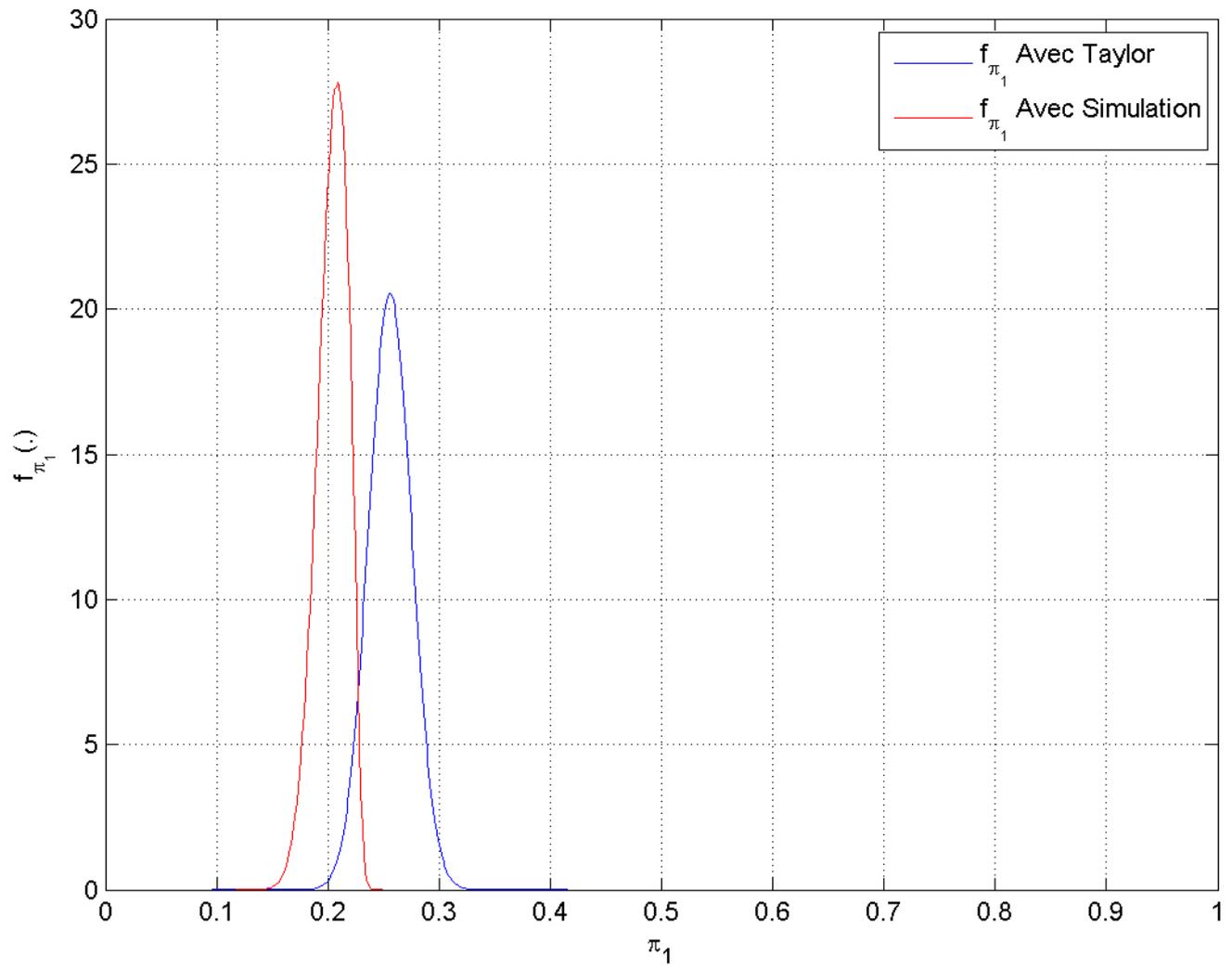


figure 2.2. Comparaison des densités obtenues avec la méthode de Taylor et simulation de π_1 .

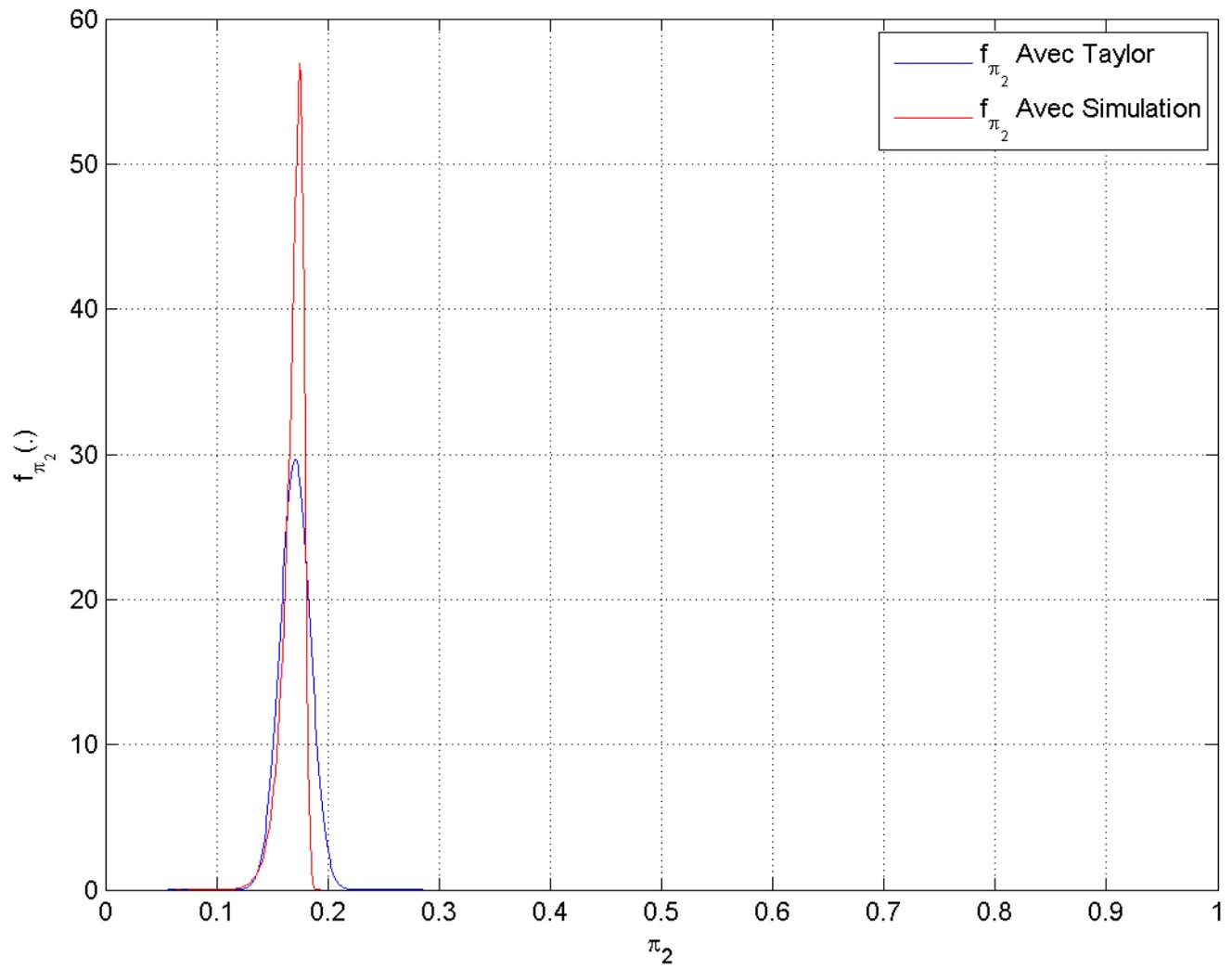


figure 2.3. Comparaison des densités obtenues avec la méthode de Taylor et simulation de π_2 .

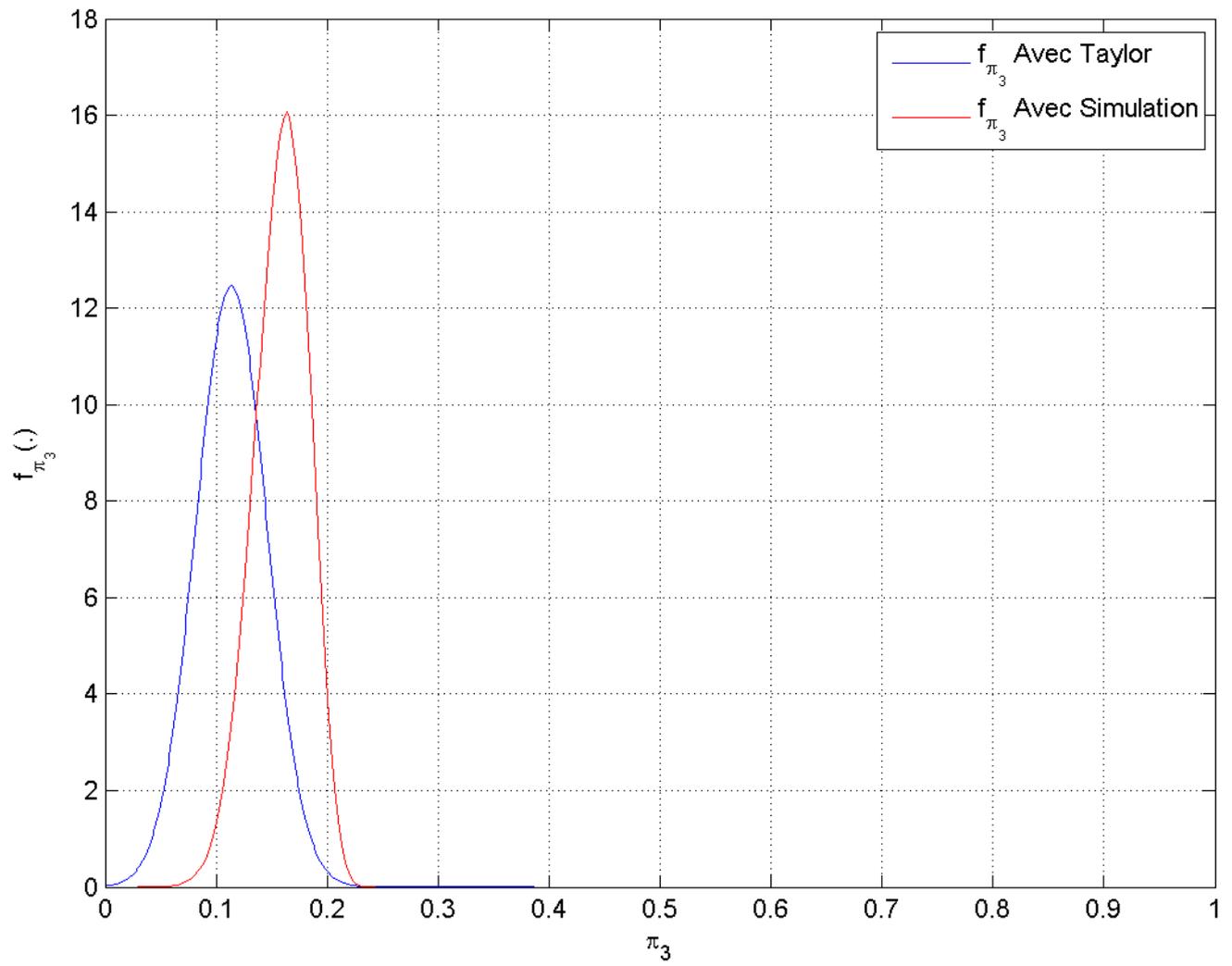


figure 2.4. Comparaison des densités obtenues avec la méthode de Taylor et simulation de π_3 .

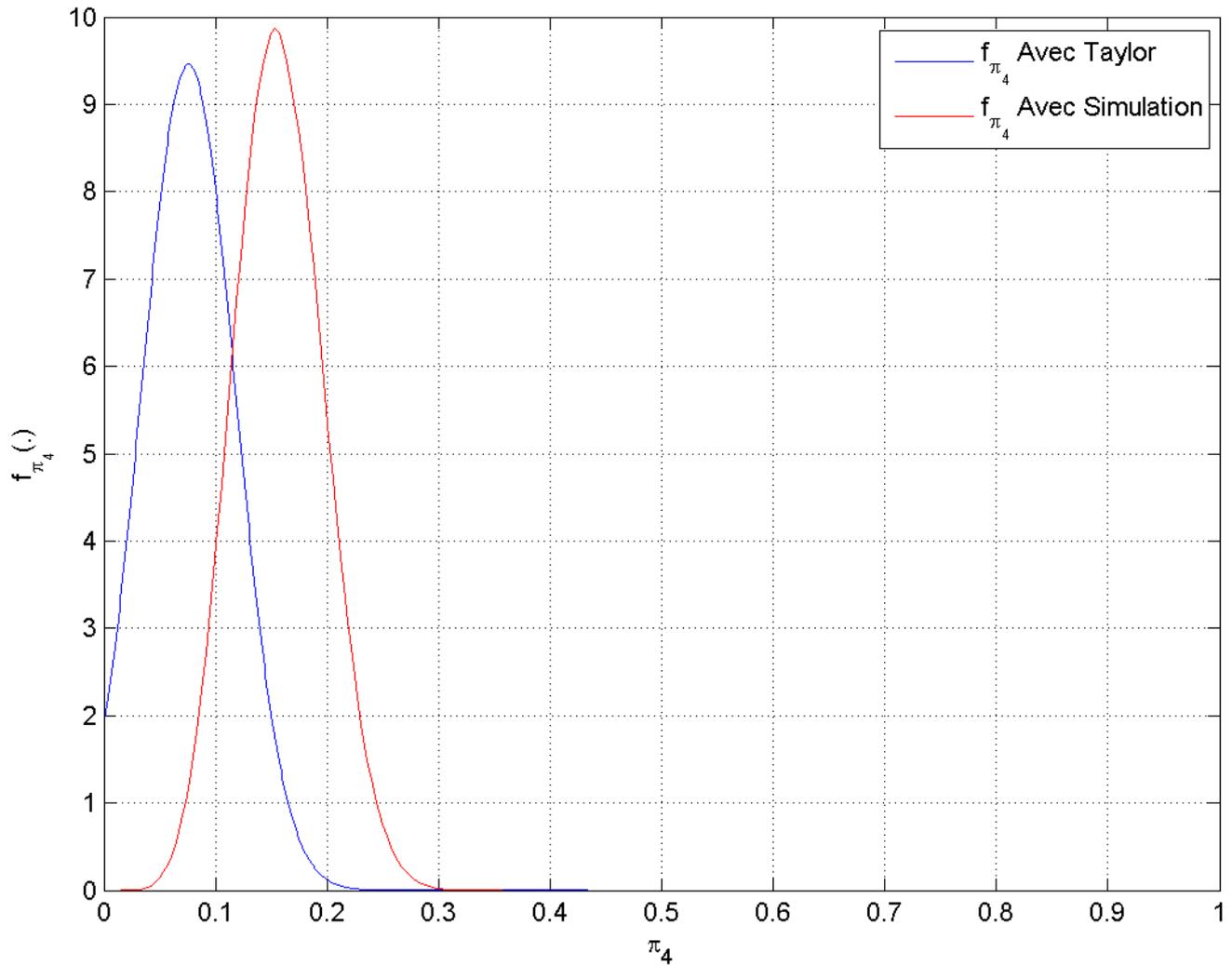


figure 2.5. Comparaison des densités obtenues avec la méthode de Taylor et simulation de π_4 .

Les représentations graphiques représentées ci-dessus, montrent que les approximations de densité pour π_i , $i=0,1,\dots,4$ sont presque proches aux résultats obtenus par la méthode du simulation, comme la méthode de simulation est moins précise lorsque on aura plus de variables alors ceci explique la différence entre les deux graphes obtenus.

Ces résultats valident l'approche basée sur le développement en séries de Taylor.

Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté une méthode numérique d'approximation de la densité du modèle d'attente $M/G/1/N$ avec vacances, à capacité fini, qui est le développement de séries de Taylor. Les résultats obtenus pour un système à une variable ainsi à deux variables, et ils sont comparés à ceux de la simulation de Kernel.

Conclusion générale

L'analyse des performances de nombreux systèmes réels conduit à la formalisation et l'étude des files d'attente. La complexité de ces systèmes induit généralement des modèles difficiles à traiter analytiquement ainsi la résolution est complexe avec des solutions qui ne sont pas faciles à interpréter. Afin de pallier cette difficulté, on fait recours à des méthodes d'approximation dont les algorithmes sont en constante évolution vers des résultats exacts.

Parmi les méthodes d'approximation, on a celle de développement en séries de Taylor, qui est flexible et applicable à une large gamme des systèmes de files d'attente. Cette méthode est devenue un outil important dans l'analyse des systèmes qui sont modélisés par les chaînes de Markov. Cette approche permet d'évaluer les performances des systèmes à l'aide d'une fonction polynômiale.

Ce travail consiste à approximer la densité des modèles d'attente via le développement en séries de Taylor. Particulièrement, on a appliqué cette approche pour le modèle d'attente M/G/1/N avec vacances. En effet, on a calculé les dérivées d'ordre supérieur de la distribution stationnaire, associée à la chaîne de Markov induite. Ces dérivées sont exprimées en fonction de la matrice fondamentale de cette chaîne.

Dans ce mémoire, on a initialisé l'étude par une présentation des chaînes de Markov et les files d'attente et leurs concepts principales, on a présenté le système d'attente M/G/1/N avec vacances. Par la suite, on a défini l'approximation de la densité des modèles d'attente, par le développement

en séries de Taylor pour les chaîne de Markov. Enfin, on a appliqué cette approche sur le modèle M/G/1/N avec vacances pour le cas d'une seul variable, et en cas de deux variables. Ainsi, on a caractérisé son espérance et sa variance. Les résultats obtenus sont confrontés à ceux de la simulation de Kernel.

Les résultats obtenus dans ce travail ouvre plusieurs perspectives de recherche importantes. Parmi ces perspectives, on cite:

1. Généraliser l'application de cette approche pour analyser des autres modèles de files d'attente.
2. Approximer la densité des modèles d'attente via le développement de Taylor pour le cas multidimensionnels.
3. Généraliser l'application de cette approche pour analyser des modèles à plusieurs variables dépendantes.
4. Penser à calculer les espérances et variances conditionnelles, dans le cas multi-dimensionnel.

Bibliographie

- [1] S. Albin, *Analyzing M/M/1 queues with perturbations the arrival process*, Journal of the Operational Research Society 35, pp. 303-309, 1984.

- [2] K. Bachi, K. Abbas, and B. Heidergott, *Statistical taylor series expansion: An approach for epistemic uncertainty propagation in markov reliability models*, RAIRO-Operations Research, 55:S593–S624, 2021.

- [3] J. L. Barlow, *Stable computation with the fundamental matrix of a markov chain*, SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, 22(1):230–241, 2000.

- [4] B. Baynet, *Théorie des files d'attente: des chaînes de Markov aux réseaux à forme Produit*, Hermes Sciences Publication, Paris, 2000.

- [5] Bharat T. Doshi, *Queueing systems with vacations a survey*, Queueing systems, 1(1):29–66, 1986.

- [6] M. Boualem, N. Djellab and D.Aïssani, *Approche régénérative de la file d'attente M/G/1 avec rappels classiques et vacances exhaustives du serveur*, Journal européen des systèmes automatisés 45.1-3, pp.253-267, 2011.

- [7] A. Dufetel, *Analyse*, Vuibert, 2011.

- [8] A. Erlang, *Solution of some problems in theory of probabilities of significance in automatic telephone exchanges*, Elektroteknikeren 13, pp. 5-13, 1917.
- [9] D. P. Gaver J. *A waiting line with interrupted service, including priorities*, Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological), 24(1):73–90, 1962.
- [10] D. E Goldberg and P. Segrest, *Finite markov chain analysis of genetic algorithms*, In Proceedings of the second international conference on genetic algorithms, volume 1, page 1, 1987.
- [11] W.B. Gong, J.K. and Hu, *The Maclaurin series of the GI/G/1 queues*, Journal of Applied Probability 29, pp. 184-276, 1992.
- [12] W. K. Grassmann, M. I Taksar, and D. P Heyman, *Regenerative analysis and steady state distributions for markov chains*, Operations Research, 33(5):1107–1116, 1985.
- [13] D. Gross and C. Harris, *Fundamentals of Queueing theory*, Wiley, 1985.
- [14] B. Heidergott and A. Hordijk, *Taylor series expansions for stationary markov chains*, Advances in Applied Probability, 35(4):1046–1070, 2003.
- [15] D. P Heyman and A. Reeves, *Numerical solution of linear equations arising in markov chain models*, ORSA Journal on Computing, 1(1):52–60, 1989.
- [16] D. G Kendall, *Stochastic processes occurring in the theory of queues and their analysis by the method of the imbedded markov chain*, The Annals of Mathematical Statistics, pages 338–354, 1953.

- [17] D. Kendall, *Stochastic processes occurring in theory of queues and their analysis by the method of imbedded markov chain*, Annals of Mathematical Statics 24, pp. 338-554, 1953.
- [18] L. Kleinrock, *Queuing Systems Theory and Applications*, volume: 1, 2, John Wiley and Sons, 1975/1976.
- [19] J. Li and N. Tian, *The M/M/1 queue with working vacations and vacation interruptions*, Journal of Systems Science and Systems Engineering, 16(1):121–127, 2007.
- [20] D.Medjadi, M.Boukra et A.Djadane, *Analyse mathématique*, université Biskra, 2011.
- [21] J.C. L.J. Mineau, *Analyse 2*, article universitaire, 1997.
- [22] T. J. Ott, *On the m/g/1 queue by additional inputs*, Journal of Applied Probability, 21(1):129–142, 1984.
- [23] A. Ouaqqa *Analyse fonctions d'une à plusieurs variables réelles*, université de Picardie Jules Verne, France, 2007, p.29-45/56.
- [24] S. Ouazine, K. Abbas, *Approche des développement en séries de Taylor pour l'approximation fonctionnelle des systèmes et réseaux des files d'attente*, 2016.
- [25] S. Ouazine and K. Abbas, *Development of computational algorithm for multiserver queue with renewal input and synchronous vacation*. Applied Mathematical Modelling, 40(2):1137–1156, 2016.

- [26] S. Ouazine and K. Abbas, *A functional approximation for retrial queues with two way communication*, Annals of Operations Research, 247(1):211–227, 2016.
- [27] S.Ouazine, K. Abbas, *Numerical Approaches for parametric Uncertainty Analysis of Queues with two Way communication* , 2015.
- [28] A. Ruegg, *Processus stochastiques*, volume 6, PPUR presses polytechniques, 1989.
- [29] Steve, W. Fuhrmann and R.B. Cooper, *Stochastic decompositions in the M/G/1 queue with generalized vacations*, Operations research, 33(5):1117–1129, 1985.
- [30] H. Takagi, *Queueing Analysis, A foundation of Performance Evaluation*, volume:1, Elsevier Science Publishers B.V, Amesterdam, The Netherlands, 1991.
- [31] B. Taylor, *B. Methodus incrementorum directa et Inversa*, London, 1715.
- [32] A. Tranco, *Mathématiques Eco-Gestion*, universitea din Bucuresti, 2010.
- [33] J. Jr. Teghem, *Control of the service process in a queueing system*, European Journal of Operations Research 23, pp.141-158, 1986.
- [34] M.A. Zazanis, *Analyticity for Poisson driven stochastic systems*, Advances in Applied Probability 24, pp. 532-541, 1992.

Résumé

Dans ce mémoire, nous développons une nouvelle approche basée sur les développements en séries de Taylor des chaînes de Markov, pour approximer la densité d'un modèle de File d'attente avec vacances.

Nous avons obtenu les dérivées d'ordre supérieur de la distribution stationnaire, associé aux chaînes de Markov ergodiques, en fonction de sa matrice fondamentale. En particulier, nous avons approximée la densité du modèle de file d'attente M/G/1/N par le développement en séries de Taylor, pour deux cas différentes: cas unidimensionnel et cas de deux variables. Ainsi, sur la base de cette approche, nous avons conçu un nouvel algorithme, permettant d'approximer numériquement l'espérance et la variance de chaque composante de la distribution stationnaire pour le cas d'un seul paramètre. Une validation des résultats numériques obtenus à été également réaliser par l'application de la méthode de la simulation de Kernel.

Mots clé: Système de file d'attente, file d'attente avec vacances, chaînes de Markov, Matrice fondamentale, Développement en séries de Taylor, Approximation de la densité, simulation de Kernel.

Abstract

In this thesis, we develop a new approach based on developments in Taylor series of Markov chains, to approximate the density of a queue model with vacation.

We obtained the higher order derivatives of the stationary distribution, associated with the chains ergodic Markov sequences, as a function of its fundamental matrix. In particular, we approximated the density of the M/G/1/N waiting time model by the series expansion of Taylor, for two different cases: case of one variable and case of two variables. Thus, based on this approach, we have designed a new algorithm, allowing to approximate numerically the expectation and variance of each component of the stationary distribution for the case of a single parameter. A validation of the numerical results obtained was also carried out by application of the kernel simulation method.

Keywords: Expectation system, Expectation with vacations, Markov chains, Matrix fundamental, Development in Taylor series, Approximation of the density, Simulation of Kernel.