

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique



UNIVERSITE ABDERRAHMANE MIRA BEJAIA
FACULTE DES SCIENCES EXACTES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Mémoire de fin d'études

Présenté par :

MAY YAAQOUB

Pour l'obtention du Diplôme de

MASTER en Mathématiques

Option : Analyse Mathématique

Thème

Résolution numérique des équations de Saint-Venant

1D : Application à la rupture d'un barrage

Soutenu le **07 juillet 2022** devant le jury composé de :

Présidente	ZEROUATI Halima	Professeur
Encadrante	TOUNSI Hassina	M.C.B à l'université de Bejaia
Co-encadreur	BOUHMILA Fatah	M.C.A à l'université de Bejaia
Examineur	BERREKSI Ali	Professeur
Examinatrice	MEDJBAR Sonia	M.C.B à l'université de Bejaia

Promotion : Juillet 2022

Résumé :

Le travail présenté dans ce mémoire est relatif à la modélisation et à la simulation du phénomène de la rupture du barrage, qui est régi par les équations de Saint Venant et à la résolution numérique de ces équations par la méthode des différences finies (schéma de Lax, qui est explicite et un schéma implicite que nous avons développé).

Le but est de déterminer de manière la plus précise possible le comportement de l'eau (hauteur et vitesse) près du barrage, en amont et en aval directement après la rupture et l'effet des différents paramètres sur l'écoulement, notamment l'effet du pas de discrétisation, de la hauteur d'eau initiale et l'effet du nombre de Courant. Les résultats obtenus ont montré que l'application du schéma de Lax aux équations de Saint-Venant donne de bons résultats par rapport à ceux obtenus expérimentalement par W.E.S.

Mots clés : *Rupture d'un barrage ; Saint-Venant ; Différences finies ; Schéma de Lax ; Schéma implicite ; Simulation numérique.*

Abstract:

The work presented in this paper is related to the modelling and simulation of the phenomenon of dam break, which is governed by the equations of Saint Venant and the numerical resolution of these equations by the finite difference method (Lax scheme, which is explicit and an implicit scheme that we have developed).

The aim is to determine as precisely as possible the behavior of the water (height and velocity) near the dam, upstream and downstream directly after the failure and the effect of the various parameters on the flow, in particular the effect of the discretization step, of the initial water height and the effect of the current number. The results obtained showed that the application of the Lax scheme to the Saint-Venant equations gives good results compared to those obtained experimentally by W.E.S.

Key words : *Dam break ; Saint Venant ; Finite difference ; Lax scheme ; Implicit scheme ; Numerical simulation*

REMERCIEMENTS

CE TRAVAIL N'A PU ÊTRE MENÉ À BIEN QU'AVEC LE SOUTIEN DE PLUSIEURS PERSONNES QUE JE VOUDRAIS, À TRAVERS CES QUELQUES LIGNES, REMERCIER DU FOND DU CŒUR.

JE TIENS À EXPRIMER MES VIFS REMERCIEMENTS ENVERS MES ENCADREURS M. **F. BOUHMLA** ET MADAME **H. TOUNSI** POUR LE TEMPS QU'ILS M'ONT CONSACRÉ, POUR LES CONSEILS ET LES ENCOURAGEMENTS QUI M'ONT ÉTÉ PRÉCIEUX.

JE TIENS À REMERCIER AUSSI ET CHALEUREUSEMENT M. **A. BERREKSI** DE M'AVOIR FOURNI DES IDÉES ET DE PRÉCIEUX CONSEILS.

J'EXPRIME MA VIVE GRATITUDE À MADAME **H. ZEROUATI**, POUR L'HONNEUR QU'ELLE ME FAIT EN PRÉSIDENTANT LE JURY.

MES REMERCIEMENTS VONT AUSSI À MLE. **S. MEDJBAR** POUR AVOIR ACCEPTÉ D'EXAMINER CE MÉMOIRE.

JE REMERCIE AUSSI M. **A. BERREKSI**, POUR AVOIR ACCEPTÉ D'EXAMINER CE TRAVAIL.

MES REMERCIEMENTS S'ÉTENDENT ÉGALEMENT À TOUS MES ENSEIGNANTS DURANT LES ANNÉES DES ÉTUDES.

ENFIN, JE TIENS À REMERCIER TOUS CEUX QUI, DE PRÈS OU DE LOIN, ONT CONTRIBUÉ À LA RÉALISATION DE CE TRAVAIL.

Dédicaces

**Je dédie ce modeste travail à ma petite et à ma grande
famille.**

Nomenclature

A : Section transversale (m^2)
 A_m : Section mouillée (m^2)
 ΔA : Variation de surface (m^2)
 b : Largeur en surface du canal (m)
 B : Largeur à la surface libre du canal (m)
 C : Célérité d'onde (m/s^2)
 C_f : Coefficient de frottement
 C_n : Nombre de Courant
 C_w : Célérité d'onde absolue (m/s)
 D_h : Profondeur hydraulique (m)
 f_c : Facteur de Coriolis
 F_r : Nombre de Froude
 F_f : Force de frottement
 F_p : Force de pression
 F_{p1} : Force de pression dirigée vers l'aval
 F_{p2} : Force de pression dirigée vers l'amont
 F_{p3} : Force de pression dirigée vers l'amont
 g : Accélération de la pesanteur (m/s^2)
 h : Profondeur (m)
 L : Longueur du canal (m)
 n : Coefficient de rugosité de Manning
 P_a : Pression atmosphérique
 P_g : Force de gravité
 P_{gx} : Composante de la force de gravité suivant x
 P_m : Périmètre mouillé (m)
 P_p : Pression
 Q : Débit d'écoulement (m^3/s)
 R_r : Nombre de Reynolds
 R_h : Rayon hydraulique
 S_0 : Pente de fond du canal
 S_f : Pente de la surface libre
 t : temps
 Δt : Temps d'incrément
 U : Composante de la vitesse de l'écoulement suivant la direction x

\bar{V}_x^+, \bar{V}_x^- : Valeurs approchées des dérivées spatiales, prédiction B
 $\tilde{V}_x^+, \tilde{V}_x^-$: Valeurs approchées des dérivées spatiales, prédiction A
 \hat{V}_x^+, \hat{V}_x^- : Valeurs approchées des dérivées spatiales, corrigées de A ou B
 ρ : La masse volumique du fluide
 τ : Force de frottement par unité du surface
 Δx : Pas de discrétisation spatial

Liste des figures

1.1	Section transversale d'un canal naturel	10
1.2	Canaux artificiels	11
1.3	Éléments géométriques d'une section d'un canal	11
1.4	Schéma d'un écoulement permanent	13
1.5	Schéma d'un écoulement non permanent	13
1.6	Schéma d'un écoulement uniforme	13
1.7	Schéma d'un écoulement non uniforme	14
1.8	Schéma des écoulements permanents, uniformes et variés	14
1.9	Les régimes d'écoulement	16
1.10	Schéma d'une onde dans un canal	17
1.11	Représentation schématique des deux valeurs de l'onde (cas fluvial)	18
1.12	Représentation schématique des deux valeurs de l'onde (cas torrentiel)	18
1.13	Représentation schématique des deux valeurs de l'onde (cas critique)	18
2.1	Élément de fluide isolé	22
2.2	Forces agissant sur un élément de fluide	23
2.3	Écoulement en eau peu profonde - système de coordonnées	26
2.4	Écoulement en eau peu profonde -Distribution de la vitesse-	27
3.1	Équation de Bürger, $u_0(x)$ monotone croissante	37
3.2	Relation de Rankine-Hugoniot: séparation du domaine en deux composantes connexes Ω_-, Ω_+ par une courbe de discontinuité Γ	39
4.1	Définition d'un domaine discrétisé	46
4.2	Organigramme de calcul	57
5.1	Hauteur d'eau en fonction du temps en $x = -30.5m$ et $n = 0.009$	60
5.2	Hauteur d'eau en fonction du temps en $x = -30.5m$ et $n = 0.05$	60
5.3	Hauteur d'eau en fonction du temps $x = 0m$ et $n = 0.009$	61
5.4	Hauteur d'eau en fonction du temps $x = 0m$ et $n = 0.009$	61
5.5	Hauteur d'eau en fonction du temps $x = 24.2m$ et $n = 0.009$	62
5.6	Profil de vitesse en $x = -30.5m$ et $n = 0.009$	63
5.7	Profil de vitesse en $x = 0m$ et $n = 0.009$	63
5.8	Profil de vitesse $x = 24.2m$ et $n = 0.009$	64
5.9	Effet du pas spatial	65
5.10	Effet du pas spatial	66

5.11 Effet du nombre de Courant	66
5.12 Effet du nombre de Courant	67
5.13 Effet de la hauteur initiale	67
5.14 Effet de la hauteur initiale	68

Table des matières

Introduction générale	7
1 Généralités sur les écoulements	9
1.1 Introduction	9
1.2 Définition de l'écoulement à surface libre	9
1.3 Les canaux	10
1.3.1 Définition	10
1.3.2 Types des canaux	10
1.4 Géométrie des canaux	11
1.5 Les types d'écoulements dans les canaux	12
1.5.1 Variabilité dans le temps	12
1.5.2 Variabilité dans l'espace	13
1.6 Régimes d'écoulement	15
1.7 Onde de gravité	16
1.8 Écoulement avec onde	17
1.9 Présentation des équations de Saint-Venant pour les écoulements filaires	19
1.10 Conclusion	19
2 Formulation mathématique	20
2.1 Introduction	20
2.2 Hypothèses de base	20
2.3 Établissement des équations de mouvement	21
2.3.1 Par la méthode des bilans en volumes finis	21
2.3.2 Par intégration des équations de Navier Stokes suivant la profondeur	24
2.4 Conclusion	33
3 Existence et unicité des solutions des lois de conservation	34
3.1 Introduction	34
3.2 Solutions classiques du problème de Cauchy	34
3.2.1 Cas linéaire	35
3.2.2 Cas non-linéaire	35
3.3 Solutions faibles	37
3.4 Solutions entropiques	40
3.5 Résultats d'existence et d'unicité	43
3.6 Propriétés mathématiques des équations de Saint-Venant	43

3.6.1	Matrice Jacobienne	44
3.6.2	Solution analytique des équation de Saint-Venant	44
4	Résolution Numérique	45
4.1	Introduction	45
4.2	Description de la méthode des différences finies	45
4.3	Approximation des dérivées par différences finies	46
4.3.1	Schéma explicite	46
4.3.2	Schéma implicite	47
4.4	Analyse de l'approximation	47
4.4.1	Erreur de troncature	47
4.4.2	La consistance d'un schéma aux différences finies	47
4.4.3	La stabilité	47
4.4.4	La convergence	47
4.5	Schémas aux différences finies couramment utilisées	47
4.5.1	Les schémas implicites	47
4.5.2	Les schémas explicites	48
4.5.3	Comparaison des schémas explicites et implicites	51
4.6	Discrétisation des équations de Saint-Venant par le schéma de Lax	52
4.6.1	Discrétisation de l'équation de continuité	52
4.6.2	Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement	52
4.6.3	Condition de stabilité	53
4.7	Discrétisation des équations de Saint-Venant par un schéma implicite que nous avons proposé	54
4.7.1	Discrétisation de l'équation de continuité	54
4.7.2	Discrétisation de l'équation de la quantité de mouvement	55
4.8	Conditions initiales et conditions aux limites	55
4.8.1	Conditions initiales	55
4.8.2	Conditions aux limites	56
4.9	Organigramme de calcul pour le schéma de Lax	57
5	Validation Numérique	58
5.1	Introduction	58
5.2	Validation du modèle	58
5.3	Résultats et Interprétations	59
5.3.1	Profil et analyse de la hauteur d'eau	59
5.3.2	Interprétation des résultats	59
5.3.3	Étude du profil des vitesses	62
5.4	Effet des différents paramètres sur l'écoulement	64
5.4.1	Effet du pas de la discrétisation spatiale	64
5.4.2	Effet du nombre de Courant	65
5.4.3	Effet de la hauteur initiale	65
5.5	Conclusion	68
	Conclusion générale	69
	Références Bibliographiques	70

Introduction générale

Les barrages ont plusieurs fonctions : régulation des cours d'eau, irrigation des cultures, alimentation en eau des villes, production d'énergie électrique, retenue des rejets de mines ou de chantiers, activité touristique, lutte contre les incendies,...etc.

Nous nous intéressons dans ce travail au phénomène de rupture de barrage. Techniquement, cela correspond à une destruction partielle ou totale de l'ouvrage, ce qui entraîne la formation d'une onde de submersion, celle-ci engendre une élévation brutale du niveau d'eau à l'aval, voire un gigantesque torrent. Cette rupture se produit lorsque la structure cède du fait de catastrophes naturelles (séisme, mouvement de terrain, crue,...etc), ou résulte de défaillances humaines (mauvaise conception, négligence, sabotage,...etc).

Même si les épisodes de rupture accidentelle de barrage restent peu fréquentes, néanmoins chaque occurrence engendre de graves conséquences humaines, environnementales et techniques.

Le caractère accidentel et imprévisible de ce type de phénomènes nécessite la connaissance de l'évolution de l'onde de rupture dans le temps, à l'aval de l'ouvrage, ainsi que la variation de la hauteur d'eau suivant l'axe de la propagation de l'onde. Vu la difficulté, voire l'impossibilité de résoudre analytiquement les équations régissant les écoulements à surface libre (Equations de Saint-Venant); il devient plus que nécessaire d'établir les schémas de discrétisations numériques pour la simulation des solutions de ces systèmes.

Nous avons tenté dans ce mémoire, de donner un bref aperçu sur les différents schémas de discrétisation numériques, notamment les méthodes des différences finies et leurs variantes. L'objectif principal étant de comprendre et d'analyser l'effet des différentes variables et paramètres de l'écoulement dans le processus de simulation des solutions des systèmes de Saint-Venant, notamment en une dimension d'espace (1D). Pour cela nous avons opté pour le cas test : rupture de barrage (rupture totale et instantanée).

Pour ce faire, nous avons d'abord, passé en revue des généralités sur les différents paramètres caractéristiques des écoulements à surface libre, ainsi que la forme et la nature des canaux qui les contiennent. Aussi, un aperçu sur la notion d'onde de gravité et les écoulements avec onde a été donné dans le premier chapitre. Les équations de Saint-Venant pour les écoulements filaires ont été présentées à la fin de ce chapitre.

Dans le second chapitre, nous avons présenté les différentes étapes permettant d'établir les équations régissant les écoulements à surface libre (Equations de Barré de Saint-Venant). Pour cela

nous avons procédé par deux méthodes : la méthode des bilans en volumes finis, via les principes de conservation de la masse et la conservation de la quantité de mouvement. La deuxième méthode consiste en l'intégration des équations de Navier Stokes sur la profondeur, en considérant un certain nombre d'hypothèses simplificatrices.

Les questions de l'existence et l'unicité des solutions des systèmes de Saint-Venant restent posées; ce qui nous amène à consacrer le troisième chapitre pour l'analyse théorique des problèmes aux lois de conservation, et aux notions de la solution faible et faible entropique. Nous terminons ce chapitre par donner les propriétés mathématiques des équations de Saint-Venant.

Mis à part quelques modèles dans le cas scalaire, la résolution directe des équations de Saint-Venant reste très complexes. Cette difficulté a été signalée, depuis longtemps par Galilée (1564-1642) : "je me suis heurté, dit-il , à moins de difficultés dans la découverte du mouvement des corps céleste, malgré leur éloignement étonnant que dans les recherches sur le mouvement de l'eau courante qui se produit , cependant, sous nos yeux". Les méthodes numériques constituent, alors l'ultime recours pour la simulation des solutions approchées du système en question. A cet effet, le quatrième chapitre a été dédié à la présentation de méthodes aux différences finies, explicites et implicites, et quelques schémas connus pour traiter les problèmes d'écoulement, ainsi que la discrétisation des équations de Saint-Venant par le schéma de Lax et par le schéma que nous avons proposé.

Nous présentons, dans le dernier chapitre, les résultats numériques pour la résolution approchée du système modélisant une rupture de barrage, obtenus par le schéma de Lax. Une comparaison est faite avec les résultats expérimentaux obtenus par " Waterways Experiment Station" pour une série d'expériences de rupture de barrage. Nous y analyserons l'effet des différents paramètres sur l'écoulement, notamment l'effet du pas de discrétisation spatiale, de la hauteur d'eau initiale, ainsi que l'incidence du nombre de Courant.

Enfin, nous terminons par une conclusion générale qui résume les principaux résultats obtenus dans ce modeste travail.

Chapitre 1

Généralités sur les écoulements

1.1 Introduction

L'hydraulique est très présente dans le domaine de l'environnement. En effet, elle a une place déterminante dans la compréhension, l'analyse et le diagnostic des réseaux d'adduction d'eau potable, des stations de traitement, des réseaux d'assainissement et des rivières. De plus, le contrôle de ces systèmes nécessite une instrumentation qui oblige le concepteur et l'exploitant à une connaissance poussée du fonctionnement hydraulique de ces ouvrages.

L'hydraulique traite, entre autre, des écoulements dans les canaux artificiels et naturels ayant une surface libre soumise à la pression atmosphérique.

Dans ce chapitre, nous essayons de donner une vue générale sur les différents types de canaux, les caractéristiques et la classification des écoulements à surface libre. Nous abordons notamment quelques notions fondamentales nécessaires à l'étude des écoulements à surface libre, puis nous soulignerons plus spécifiquement les divers types d'écoulements.

1.2 Définition de l'écoulement à surface libre

Un écoulement à surface libre est un écoulement dont la surface libre est soumise à la pression atmosphérique.

Un écoulement à surface libre désigne un écoulement avec une interface libre entre l'air et l'eau, comme dans un canal, par opposition à un écoulement en charge, où cette interface est absente dans une conduite sous pression par exemple.

Les écoulements à surface libre s'observent dans les rivières, dans les canaux, les fossés, les noues, mais également dans les conduites fermées avant que celles-ci ne soient pleines. Dans le cas des conduites fermées, et contrairement aux écoulements en charge qui occupent la section entière de la conduite, les écoulements à surface libre n'en occupent qu'une partie. Ils sont donc plus difficiles à étudier car à un même débit peuvent correspondre une infinité de couples vitesse moyenne - section mouillée. La détermination de la ligne d'eau nécessite de connaître à la fois les caractéristiques physiques des biefs concernés mais également les conditions hydrauliques dans lesquels s'effectue l'écoulement (variations spatiales et temporelles du débit).

L'écoulement à surface libre fait partie de l'écoulement gaz-liquide ou liquide-liquide. La modélisation de ce type d'écoulement nécessite un découpage du domaine global de calcul en deux sous domaines non miscibles séparés par une interface bien définie qui présente la surface libre [6, 12].

Le premier est constitué d'un volume d'eau et le deuxième, situé dans la partie supérieure du domaine d'étude, est rempli d'air. Ces écoulements sont régis par les équations de Saint-Venant.

1.3 Les canaux

1.3.1 Définition

On appelle canal un système de transport dans lequel l'eau s'écoule et dont la surface libre est soumise à la pression atmosphérique.

Cependant nous distinguons deux types de canaux: prismatiques et non prismatiques. En effet lorsque la section, la pente de fond, et la rugosité d'un canal sont constantes, le canal est dit prismatique, sinon il est non prismatique.

1.3.2 Types des canaux

Les canaux sont classés en deux catégories suivant leurs propriétés géométriques et hydrauliques :

Les canaux naturels

Les canaux naturels sont les cours d'eau qui existent naturellement sur terre, tels que les ruisselets, les rivières, les fleuves et les estuaires. Les propriétés géométriques et hydrauliques des canaux naturels sont généralement assez irrégulières. L'application de la théorie hydraulique ne donne que des résultats approximatifs obtenus moyennant certaines hypothèses (Figure 1.1).

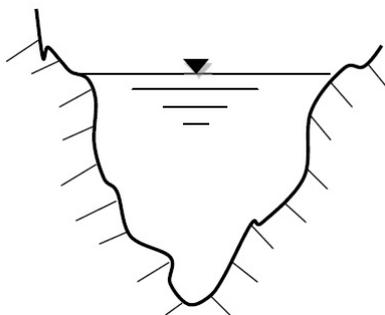


Figure 1.1: Section transversale d'un canal naturel

Les canaux artificiels

Ce sont des cours d'eau réalisés par l'homme tels que les galeries, les tuyaux de drainages, ...etc. Autrement dit, c'est des ouvrages utilisés dans la pratique hydrotechnique et d'aménagement des eaux. Les propriétés géométriques et hydrauliques des canaux artificiels sont généralement assez régulières. L'application de la théorie hydraulique donne alors des résultats satisfaisants (Figure 1.2).

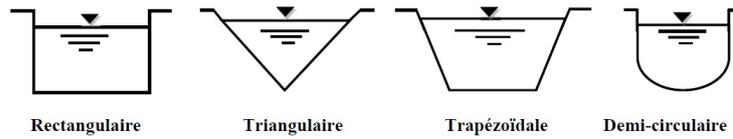


Figure 1.2: Canaux artificiels

1.4 Géométrie des canaux

Un canal à surface libre est composé des éléments géométriques définis dans le tableau (1.1) et la Figure (1.3) ci-dessous [12] :

- La section transversale A .
- La section mouillée A_m .
- Le périmètre mouillé P_m .
- Le rayon hydraulique R_h qui est le rapport de la section mouillée et le périmètre mouillé :

$$R_h = \frac{A_m}{P_m} \quad (1.1)$$

- La largeur en surface du canal, notée B , est la distance séparant les berges opposées (ou point de contact air-liquide).
- La profondeur hydraulique D_h (le rapport de la section mouillée A_m et la largeur en surface B).

$$D_h = \frac{A_m}{B} \quad (1.2)$$

- La profondeur h , appelée aussi hauteur ou tirant d'eau.
- La pente de la surface libre (piézométrique) S_f .
- La pente de fond du canal S_0 .

La valeur de la pente du fond dépend essentiellement de la topographie et de la constitution du terrain. Cette pente généralement faible, peut être exprimée par :

$$S_0 = \tan \alpha = \sin \alpha \quad (1.3)$$

Avec α : L'inclinaison de la paroi du fond.

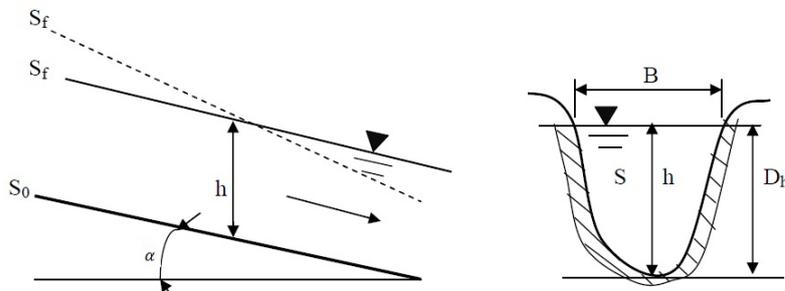
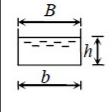
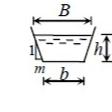
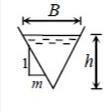
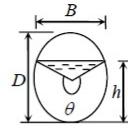
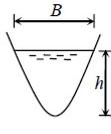


Figure 1.3: Éléments géométriques d'une section d'un canal

Table 1.1: Éléments géométriques pour différents types des canaux

					
	Rectangle	Trapèze	Triangle	Cercle	Parabole
Surface A_m	bh	$(b + mh)h$	mh^2	$\frac{1}{8}(\theta - \sin\theta)D^2$	$\frac{2}{3}Bh$
Périmètre mouillé P_m	$b + 2h$	$b + 2h\sqrt{1 + m^2}$	$2h\sqrt{1 + m^2}$	$\frac{1}{2}\theta D$	$B + \frac{8}{3}h^2$
Rayon hydraulique R_h	$\frac{bh}{b + 2h}$	$\frac{(b + mh)h}{b + 2h\sqrt{1 + m^2}}$	$\frac{mh}{2\sqrt{1 + m^2}}$	$\frac{1}{4}\left[1 - \frac{\sin\theta}{\theta}\right]D$	$\frac{2B^2h}{3B^2 + 8h^2}$ *
Largeur B	b	$b + 2mh$	$2mh$	$\frac{(\sin\theta/2)D}{2\sqrt{h(D-h)}}$	$\frac{3A}{2h}$
Profondeur hydraulique D_h	h	$\frac{(b + mh)h}{b + 2mh}$	$\frac{1}{2}h$	$\left[\frac{\theta - \sin\theta}{\sin\theta/2}\right]\frac{D}{8}$	$\frac{2}{3}h$

1.5 Les types d'écoulements dans les canaux

L'écoulement de l'eau dans un lit ouvert est dit à surface libre, il a lieu sous l'action des forces de gravité et est caractérisé par une présence obligatoire d'une surface libre du courant.

Il faut souligner que l'écoulement de l'eau libre est un phénomène beaucoup plus complexe que l'écoulement en charge parce qu'une telle surface entraîne des variations des sections liquides suivant la longueur du courant même en présence d'obstacles insignifiants. Les écoulements peuvent être répartis suivant plusieurs paramètres comme le temps, l'espace, la viscosité,...etc. Cette répartition donne les différents types suivants [9, 16] :

- Permanent ou non permanent si le paramètre est le temps.
- Uniforme ou non uniforme si le paramètre est l'espace.
- Torrentiel ou fluvial selon Froude.
- Laminaire ou turbulent selon Reynolds.

On s'intéressera aux paramètres temps et espace dans la suite de la présente étude.

1.5.1 Variabilité dans le temps

Écoulement permanent

Le mouvement est permanent si les vitesses moyennes V et ponctuelle, v , ainsi que la profondeur h ou D_h restent invariables dans le temps en grandeur et en direction (Figure 1.4). Par conséquent, le débit est constant ($Q = V * A_m$) [12].

Écoulement non permanent

Le mouvement est non permanent si la profondeur, $D_h(t)$, ainsi que les autres paramètres varient avec le temps (Figure 1.5).

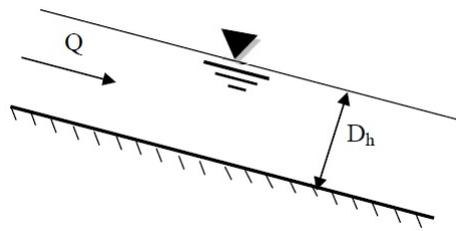


Figure 1.4: Schéma d'un écoulement permanent

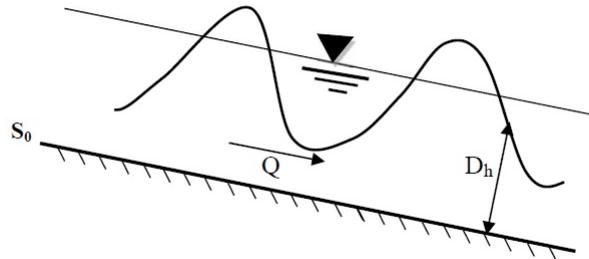


Figure 1.5: Schéma d'un écoulement non permanent

1.5.2 Variabilité dans l'espace

Écoulement uniforme

Le mouvement est uniforme si la profondeur, D_h , ainsi que les autres paramètres restent invariables dans les différentes sections du canal. La ligne de la pente du fond est donc parallèle à la ligne de la surface libre et l'on a : $S_f = S_0$. On le rencontre généralement dans les canaux artificiels (Figure 1.6) [8, 12].

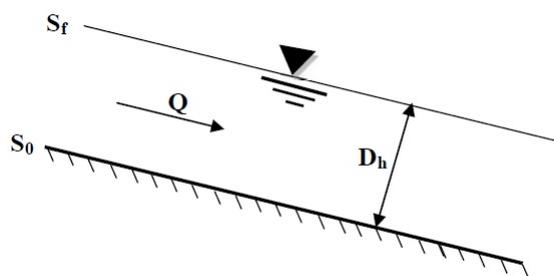


Figure 1.6: Schéma d'un écoulement uniforme

Écoulement non uniforme ou varié

- Le mouvement est non-uniforme ou varié si les paramètres caractérisant l'écoulement changent d'une section à l'autre. La pente de la surface libre diffère de celle du fond $S_0 \neq S_f$ (Figure 1.7).

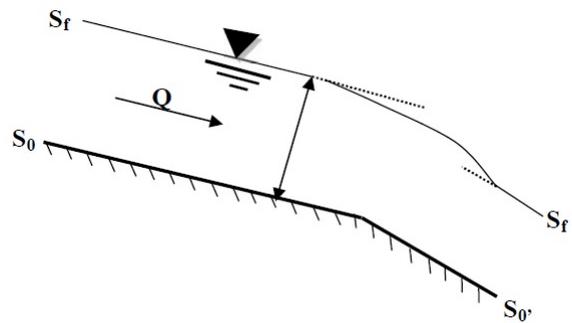


Figure 1.7: Schéma d'un écoulement non uniforme

- Un écoulement non-uniforme peut être accéléré ou décéléré suivant que la vitesse croît ou décroît dans le sens du mouvement.
- Lorsque le mouvement est graduellement varié, la profondeur ainsi que les autres paramètres varient lentement d'une section à l'autre.
- Lorsque le mouvement est rapidement varié, les paramètres caractérisant l'écoulement changent brusquement, parfois avec des discontinuités. Cela se manifeste en général au voisinage d'une singularité, telle qu'un seuil, un rétrécissement, un ressaut hydraulique ou une chute brusque (Figure 1.8), [8, 12].

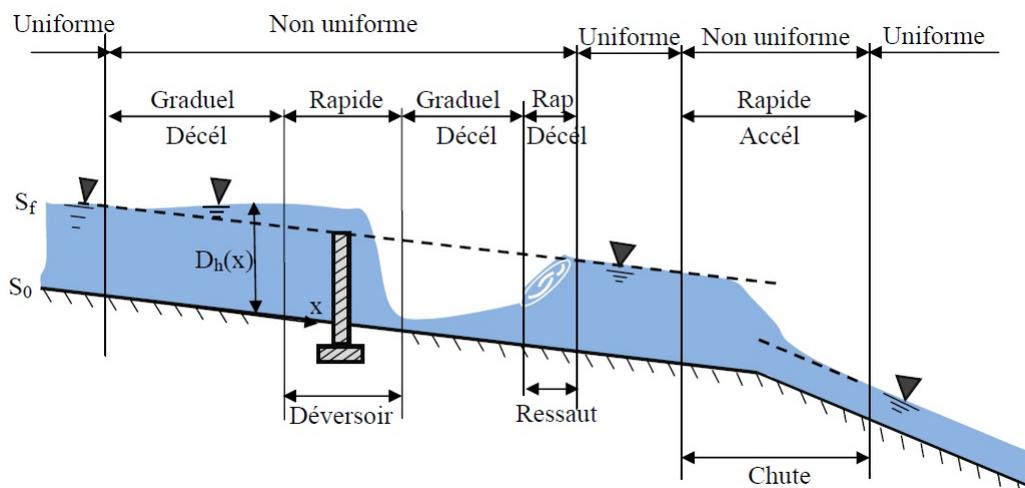
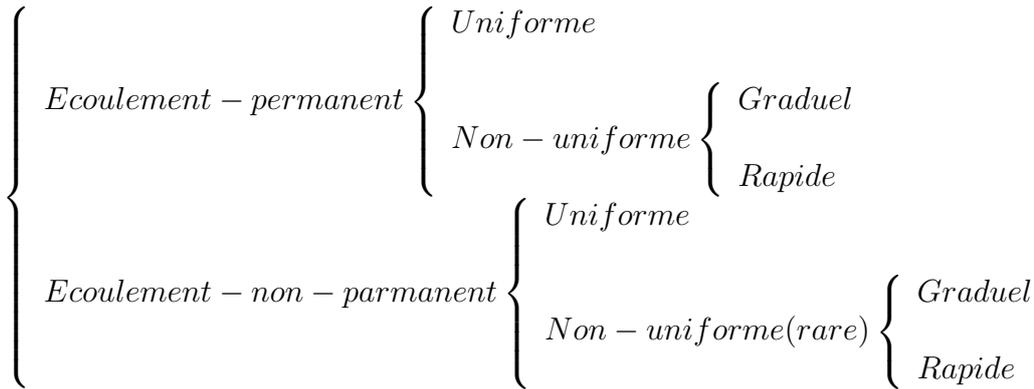


Figure 1.8: Schéma des écoulements permanents, uniformes et variés

Ainsi, les types d'écoulement qu'on peut rencontrer en hydraulique peuvent être résumés comme suit [12] :



1.6 Régimes d'écoulement

L'écoulement d'un fluide réel dans un canal à surface libre engendre les forces suivantes [12] :

- Forces d'inerties.
- Forces de gravité.
- Forces de frottements (viscosité et rugosité).

- Le nombre de Froude est défini comme étant le rapport entre les forces de gravité et les forces d'inerties, il est donné par la formule suivante:

$$F_r = \frac{V_c}{C} \quad (1.4)$$

Où :

V_c : la vitesse d'écoulement (m/s)

C : célérité d'une onde de gravité (m/s), avec:

$$C = \sqrt{gD_h} \quad (1.5)$$

g : accélération de gravité (m^2/s)

Le classement des écoulements se fait en fonction du nombre de Froude " F_r ", par conséquent:

- Écoulement fluvial $F_r < 1$,
 - Écoulement torrentiel $F_r > 1$,
 - Écoulement critique $F_r = 1$.
- Le nombre de Reynolds caractérise la turbulence. C'est le rapport entre les forces d'inerties et les forces de viscosité. Dans le cas des écoulements en canaux, R_e est donné par :

$$R_e = \frac{R_h U}{\nu} \quad (1.6)$$

Où :

U : vitesse moyenne de l'écoulement,

ν : viscosité cinématique.

Les expériences avec différents canaux artificiels montrent que l'écoulement est turbulent dès que

le nombre de Reynolds atteint des valeurs de deux milles (2000).

Dans la pratique, on ne rencontre en général que des écoulements turbulents, souvent rugueux.

- Écoulement laminaire : $R_e < 500$
- Transition $500 < R_e < 2000$
- Écoulement turbulent : $R_e > 2000$

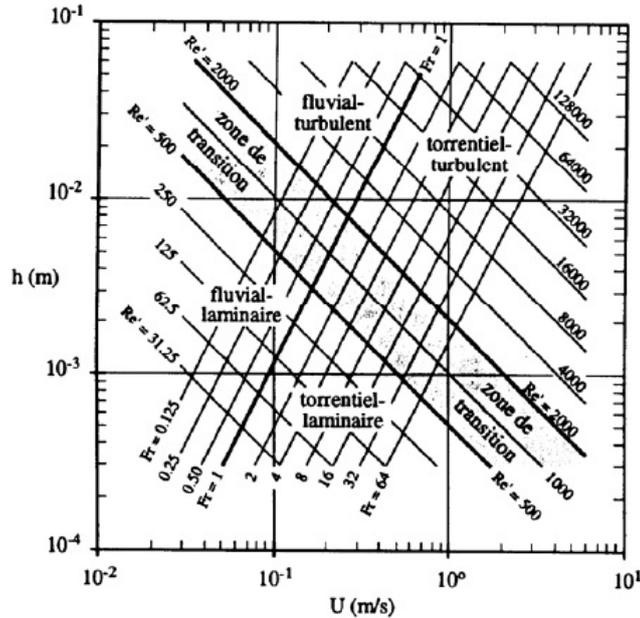


Figure 1.9: Les régimes d'écoulement

1.7 Onde de gravité

Dans un canal, un écoulement non uniforme dans le temps se manifeste par une onde de gravité à la surface libre (Figure 1.10). La théorie hydrodynamique pour les ondes de faible amplitude, donne pour la vitesse apparente de propagation, également appelée célérité d'une intumescence [12] :

$$C^2 = \frac{gL}{2\pi} \tanh h \left(\frac{2\pi h}{L} \right) \quad (1.7)$$

où, h représente la hauteur d'eau.

la célérité ne dépend pas de la hauteur d'onde h . Cette formule dépend de :

1. Pour les ondes courtes ou ondes de grande profondeur ($\frac{L}{H} < 1$), on a :

$$C^2 = \frac{gL}{2\pi} \quad (1.8)$$

2. Pour les ondes longues ou ondes de faible profondeur ($\frac{L}{H} > 1$), on a :

$$C^2 = gh \quad (1.9)$$

3. Pour une section quelconque, on a :

$$C^2 = gD_h \quad (1.10)$$

selon cette expression de C , la célérité peut avoir deux valeurs égales en valeur absolue. Cela indique tout simplement que la propagation de l'onde peut s'effectuer dans deux directions opposées X^+ et X^- .

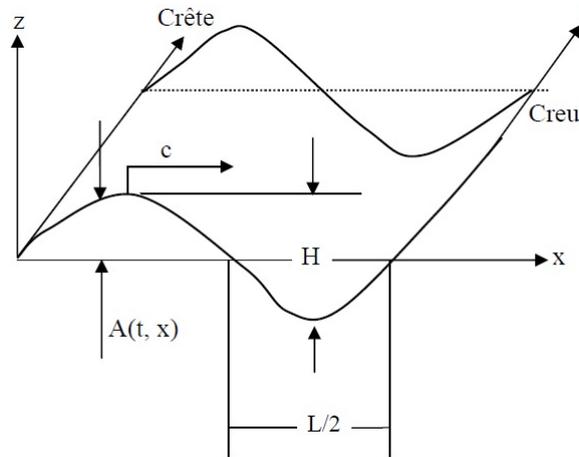


Figure 1.10: Schéma d'une onde dans un canal

1.8 Écoulement avec onde

La formule (1.9) a été démontrée par Lagrange pour un canal rempli d'eau au repos.

Elle reste valable aussi pour le cas où l'eau est plus au moins en mouvement, l'onde se superpose à ce courant.

La célérité absolue d'onde C_w , pour un écoulement dans un canal ayant une vitesse moyenne V , est:

$$C_w = V \pm \sqrt{gD_h} = V \pm C \quad (1.11)$$

Pour un canal de section rectangulaire :

$$C_w = V \pm \sqrt{gh} = V \pm C \quad (1.12)$$

La célérité absolue, C_w , qui est la vitesse par rapport au sol, a évidemment deux valeurs:

$$C'_w = V + C \quad (1.13)$$

$$C''_w = V - C \quad (1.14)$$

On distingue trois cas:

1. $V < C$, l'onde avec la célérité, C'_w , se propage vers l'aval et l'onde avec la célérité, C''_w , se propage vers l'amont, c'est le "**régime fluvial**" (Figure 1.11).

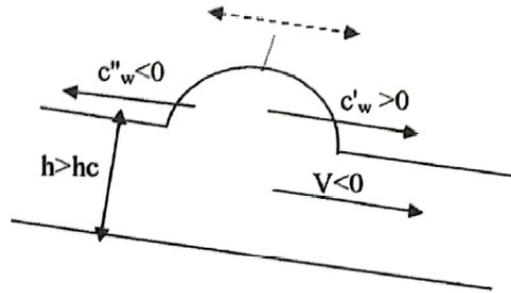


Figure 1.11: Représentation schématique des deux valeurs de l'onde (cas fluvial)

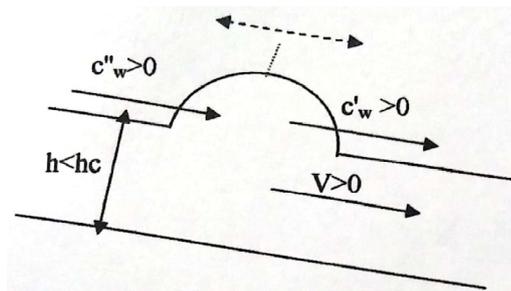


Figure 1.12: Représentation schématique des deux valeurs de l'onde (cas torrentiel)

2. $V > C$, l'onde avec la célérité, C'_w , et l'onde avec la célérité, C''_w , se propagent vers l'aval, c'est le "**régime torrentiel**" (Figure 1.12).
3. Dans le cas où la vitesse du courant, V , et la célérité d'onde, C , sont égales ($V = C = \sqrt{gh_c}$), alors l'écoulement est en "**régime critique**", avec h_c représente la profondeur critique (Figure 1.13).

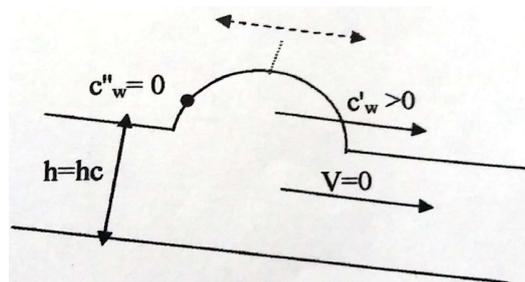


Figure 1.13: Représentation schématique des deux valeurs de l'onde (cas critique)

1.9 Présentation des équations de Saint-Venant pour les écoulements filaires

Les équations de Saint-Venant sont utilisées pour modéliser les écoulements à surface libre. C'est en 1871, dans un rapport de l'académie des sciences sur les équations de Navier-Stokes que, Adhémar Barré de Saint-Venant, ingénieur des Ponts et Chaussées, publie pour la première fois ces équations. Elles sont obtenues à partir des équations de Navier-Stokes à l'aide de quelques hypothèses simplificatrices. Dans le cas homogène et en 1D d'espace sont données par:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial hu}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(hu^2 + \frac{gh^2}{2} \right) = 0 \end{cases} \quad (1.15)$$

Où g désigne la gravité.

Il est possible d'ajouter plusieurs termes sources à ce système selon le phénomène étudié.

1.10 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté les différents types d'écoulements à surface libre, ainsi que les paramètres hydrauliques qui caractérisent chaque régime d'écoulement. Nous avons terminé ce chapitre par la présentation des équations de Saint-Venant pour les écoulements filaires.

Chapitre 2

Formulation mathématique

2.1 Introduction

L'étude mathématique des écoulements à surface libre en régime transitoire n'est pas une discipline scientifique récente. Elle a débuté depuis 200 ans lors de l'essor de l'ensemble des théories mécaniques, avec les travaux de Laplace en 1776 et de Lagrange vers 1781 sur la propagation des ondes à la surface des canaux. Dès 1871, Barré de Saint-Venant a formulé mathématiquement, par un système d'équations aux dérivées partielles, le mouvement des eaux à surface libre pouvant faire l'objet d'une description filaire. Depuis lors, ces équations servent de base aux modèles mathématiques d'écoulement à surface libre en rivière, en canaux et en réseau d'assainissement.

2.2 Hypothèses de base

Les formulations mathématiques, étant une schématisation de la réalité qui permet de calculer les grandeurs qui l'intéressent, ne peuvent avoir lieu qu'après avoir fixé auparavant un certain nombre d'hypothèses [1, 14].

Les divers éléments d'un modèle mathématique sont :

- Un domaine de l'espace où l'on va calculer des écoulements et une représentation de la topographie des fonds.
- Un système d'équations à résoudre dans ce domaine accompagné de conditions aux limites qui représentent l'interaction entre domaine modélisé et l'extérieur à ce domaine (amont-aval).
- Une discrétisation et une méthode de résolution.

Les principales hypothèses simplificatrices pour le cas des écoulements à surface libre dans un canal sont :

- Écoulement unidimensionnel.

- Liquide incompressible ($\rho = \text{Constante}$).
- La pente du canal est faible telle que: $\sin \alpha = \tan \alpha$ et $\cos \alpha = 1$.
- Le canal est à section transversal rectangulaire.
- Distribution hydrostatique des pressions
- Répartition uniforme des vitesses transversales.
- Les pertes de charge par frottement d'un écoulement non permanent peuvent être calculées en utilisant les formules d'un écoulement permanent uniforme.
- Les contraintes tangentielles au fond du canal sont prépondérantes sur les autres contraintes. Dans notre cas d'étude nous intéresserons au cas test : rupture de barrage. Nous supposons en plus que :
- La rupture est totale et instantanée du barrage

2.3 Établissement des équations de mouvement

Rappelons que les équations de Barré de Saint-Venant sont basées sur les deux principes suivants:

- Principe de conservation de la masse.
- Principe de conservation de la quantité de mouvement.

et proviennent par ailleurs de l'intégration sur la profondeur des équations tridimensionnelles de Navier Stokes [18].

2.3.1 Par la méthode des bilans en volumes finis

Équation de continuité

C'est l'équation qui traduit le principe de la conservation de la masse. Ce dernier permet d'établir une relation entre certaines caractéristiques du fluide et ses mouvements indépendamment des causes qui les provoquent.

Ainsi la masse fluide reste constante tout au cours de l'écoulement, autrement dit il n'y a ni apport extérieur, ni prélèvement de masse[7].

Considérons le mouvement d'une masse liquide suivant un axe ox (Figure 2.1). Calculons la variation de la masse liquide, entre les deux sections (1) et (2):

- à $t = 0$, il entre par la face "abdc" un volume élémentaire:

$$V_1 = Audt \tag{2.1}$$

- à $t = t + dt$, il sort par la face "a'b'd'c'":

$$V_2 = \left(A + \frac{\partial A}{\partial x} dx \right) \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) dt \tag{2.2}$$

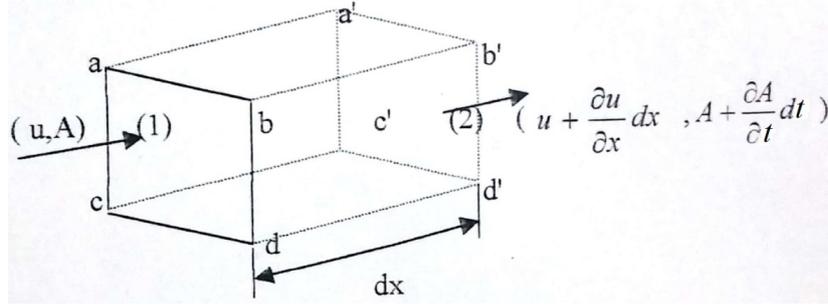


Figure 2.1: Élément de fluide isolé

La variation de volume qu'on note ΔV n'est autre que la différence entre le volume entrant et celui sortant, en négligeant les termes de second ordre, on aura:

$$\Delta V = -A \frac{\partial u}{\partial x} dx dt - u \frac{\partial A}{\partial x} dx dt \quad (2.3)$$

De même, la variation de surface:

$$\Delta A = \left(A + \frac{\partial A}{\partial t} dt \right) - A = \frac{\partial A}{\partial t} dt \quad (2.4)$$

Nous avons:

$$\Delta V = \Delta A dx = \frac{\partial A}{\partial t} dt dx \quad (2.5)$$

De l'équation (2.3) et l'équation (2.5) on obtient:

$$-A \frac{\partial u}{\partial x} dx dt - u \frac{\partial A}{\partial x} dx dt = \frac{\partial A}{\partial t} dt dx \quad (2.6)$$

En divisant par $dx dt$ les deux membres de l'équation (2.6) on aura:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + A \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial A}{\partial x} = 0 \quad (2.7)$$

C'est l'équation de conservation de la masse.

Pour le cas d'un canal rectangulaire l'équation (2.7) s'écrit:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + h \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (2.8)$$

Équation de conservation de la quantité de mouvement

Les équations dynamiques s'obtiennent en appliquant le principe de conservation de la quantité de mouvement qui établit une relation entre les caractéristiques du fluide, celle de ses mouvements et les causes qui les produisent, c'est-à-dire les forces [7].

Soit un élément de surface élémentaire d'épaisseur dx en mouvement suivant l'axe ox (Figure 2.2)

Selon l'hypothèse faite sur l'inclinaison du fond du canal, $\sin \alpha = \tan \alpha$ et $\cos \alpha = 1$, donc le canal peut être supposé horizontal sans que les calculs soient erronés.

Les forces agissant sur l'élément fluide sont:

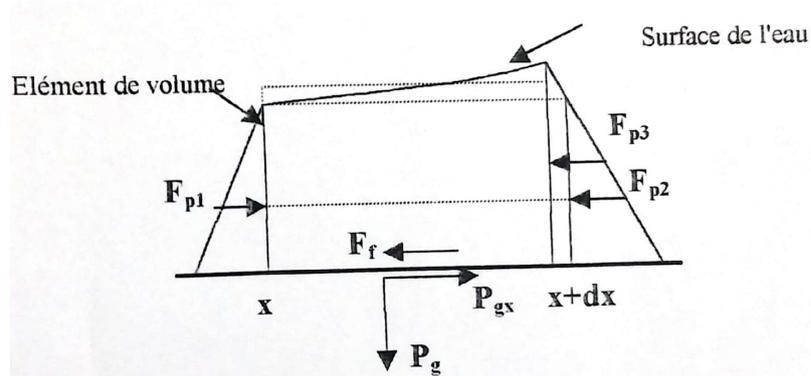


Figure 2.2: Forces agissant sur un élément de fluide

- Forces de volume ou d'inertie

$$P_{gx} = \rho g dx A \sin \alpha \quad (2.9)$$

- Forces de pression

- En x :

$$F_{P1} = AP_P$$

- En $x + dx$:

$$F_{P2} + F_{P3} = - \left(P_P + \frac{\partial P_P}{\partial x} dx \right) A$$

Avec, $P_P = \rho gh$: est la pression hydrostatique
d'où: la force de pression totale sera:

$$F_P = - \frac{\partial P_P}{\partial x} dx A \quad (2.10)$$

- Forces de frottement

$$F_f = -\tau P_m dx \quad (2.11)$$

avec:

P_m : Périmètre mouillé.

τ : Force de frottement par unité de surface.

En appliquant la relation fondamentale de la dynamique, nous aurons:

$$\sum F_{ext} = m \frac{du}{dt} = \rho A dx \frac{du}{dt} \quad (2.12)$$

Et on a:

$$\sum F_{ext} = \rho g dx A \sin \alpha - \frac{\partial P_P}{\partial x} dx A - \tau P_m dx \quad (2.13)$$

Des deux équations (2.12) et (2.13) on obtient:

$$\frac{du}{dt} = g \sin \alpha - g \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\tau P_m}{\rho A} \quad (2.14)$$

La définition de la dérivée particulaire nous permet d'écrire :

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.15)$$

En égalisant les deux équations (2.14) et (2.15) il vient:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} - g \sin \alpha + \frac{\tau P_m}{\rho A} = 0 \quad (2.16)$$

Par hypothèse : $\sin \alpha = \tan \alpha = S_0$: Pente du fond du canal.

L'expression $\frac{\tau P_m}{\rho A}$, divisé par g , soit $\frac{\tau P_m}{g \rho A}$, est appelée frottement de résistance de fond, ou pente énergétique notée S_f . Elle est déterminée par des formules empiriques telles que celle de Manning donnée par:

$$Q = \frac{1}{n} A R_h^{\frac{2}{3}} S_f^{\frac{1}{2}} \quad (2.17)$$

n : Coefficient de rugosité de Manning.

L'équation (2.16) s'écrit alors:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} - g(S_0 - S_f) = 0 \quad (2.18)$$

C'est l'équation de la quantité de mouvement ou équation dynamique pour un écoulement non permanent et non uniforme dans un canal découvert.

Les équations (2.7) et (2.18) représentent la paire d'équation connue sous le nom du chercheur français **Barré de Saint-Venant**.

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial t} + A \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial A}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} - g(S_0 - S_f) = 0 \end{cases} \quad (2.19)$$

Pour un canal à section transversale rectangulaire, l'équation (2.19) sera:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial hu}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(hu^2 + \frac{gh^2}{2} \right) = gh(S_0 - S_f) \end{cases} \quad (2.20)$$

2.3.2 Par intégration des équations de Navier Stokes suivant la profondeur

L'intégration des équations de Navier Stokes suivant la profondeur, se fait en tenant compte de quelques hypothèses simplificatrices connues comme étant les hypothèses classiques de Saint Venant, et qui seront citées au fur et à mesure de l'établissement des équations du mouvement.[4]

Équations de Navier Stokes

Les équations tridimensionnelles de Navier Stokes s'écrivent comme suit:

- **Équation de conservation de la masse**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.21)$$

- **Équation de la quantité de mouvement**

- **Suivant x :**

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} + \frac{\partial(uw)}{\partial z} = f_c v - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) \quad (2.22)$$

- **Suivant y :**

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(vv)}{\partial y} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{\partial(vw)}{\partial z} = f_c u - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) \quad (2.23)$$

- **Suivant z :**

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial(uw)}{\partial x} + \frac{\partial(vw)}{\partial y} + \frac{\partial w^2}{\partial z} = f_c w - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) \quad (2.24)$$

Où, x et y sont des coordonnées horizontales, z est la coordonnée verticale, t est le temps, ρ est la masse volumique, u , v et w sont les composantes de la vitesse suivant x , y et z respectivement, τ_{xx} , τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yy} , τ_{yz} , τ_{zz} sont les contraintes dans le fluide, et f_c représente le paramètre de Coriolis. Dans le cas d'un écoulement de faible profondeur (presque horizontal), qui est représenté par la figure (2.3), la vitesse verticale w est faible, et par suite l'accélération est négligeable, donnant ainsi l'équation d'une distribution hydrostatique des pressions [4]:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \quad (2.25)$$

En supposant par ailleurs que la masse volumique ρ est constante le long de la profondeur (fluide incompressible), l'équation (2.25) a une solution analytique de la forme:

$$P = p_a + \rho g(h_2 - z) \quad (2.26)$$

Où, p_a et h_2 sont la pression atmosphérique et l'élévation de la surface libre.

La substitution de l'équation (2.26) dans les équations du mouvement (2.22) et (2.23) et en tenant compte de l'hypothèse d'un fluide incompressible, on aura le système d'équations ci-dessous, donnant l'équation de continuité et les équations de la quantité de mouvement suivant x et y respectivement:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} + \frac{\partial(uw)}{\partial z} = f_c v - g \frac{\partial h_2}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(vv)}{\partial y} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{\partial(vw)}{\partial z} = -f_c u - g \frac{\partial h_2}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) \quad (2.29)$$

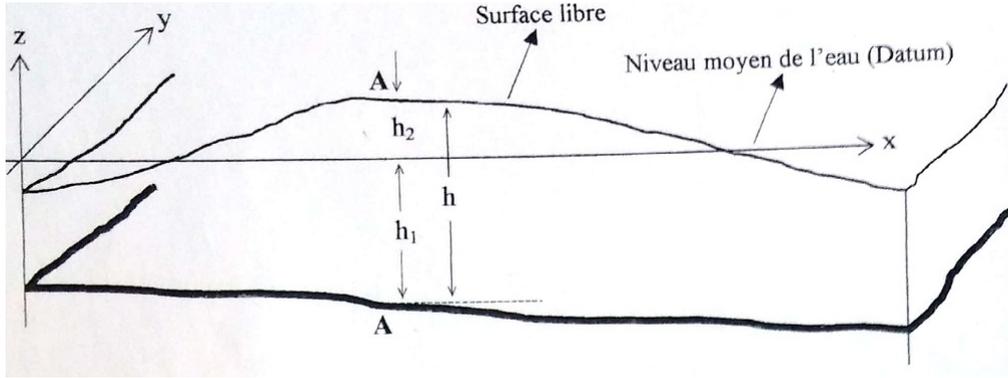


Figure 2.3: Écoulement en eau peu profonde - système de coordonnées

Intégration des équations de Navier Stokes suivant la profondeur

L'intégration des équations de Navier Stokes (2.27), (2.28) et (2.29) donnent les équations de Barré de Saint Venant qui gouvernent les écoulements bidimensionnels en régime non permanent à surface libre, et, ceci sur la base de quelques hypothèses simplificatrices.

L'intégration sur la profondeur de ces équations, se fait en utilisant la "**Règle de Leibniz**" des intégrales, donnée ci-après:

La règle de Leibniz s'écrit pour une quantité scalaire:

$$\int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} Q(x, y) dy = \frac{\partial}{\partial x} \int_{a(x)}^{b(x)} Q(x, y) dy - Q(x, b(x)) \frac{\partial b(x)}{\partial x} + Q(x, a(x)) \frac{\partial a(x)}{\partial x} \quad (2.30)$$

Elle permet d'inverser le signe somme et l'opérateur dérivé dans la situation où les bornes d'intégration dépendent de la variable par rapport à laquelle se fait la dérivation. Elle est appelée aussi, "Règle de dérivation sous le signe somme".

En considérant par ailleurs, les conditions cinématiques à la surface et au fond:

- * Au niveau de la surface libre ($z = h_2$), la vitesse verticale w peut être donnée comme la dérivée totale de l'élévation de la surface par rapport au temps:

$$w(h_2) = \frac{Dh_2}{dt} = \frac{\partial h_2}{\partial t} + u(h_2) \frac{\partial h_2}{\partial x} + v(h_2) \frac{\partial h_2}{\partial y} \quad (2.31)$$

- * La même chose au niveau du fond ($z = -h_1$)

$$w(-h_1) = \frac{Dh_1}{dt} = u(-h_1) \frac{\partial h_1}{\partial x} + v(-h_1) \frac{\partial h_1}{\partial y} \quad (2.32)$$

Sachant que la profondeur h_1 ne varie pas avec le temps.

Par ailleurs, pour un écoulement non visqueux (La condition de non glissement est appliquée), nous avons alors:

$$u(-h_1) = 0 \quad (2.33)$$

$$v(-h_1) = 0 \quad (2.34)$$

Et aussi par continuité:

$$w(-h_1) = 0 \quad (2.35)$$

• Intégration de l'équation de la masse

Pour un fluide incompressible on a:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.36)$$

L'intégration se fera entre le fond ($-h_1$) et la surface libre (h_2), d'où:

$$\int_{-h_1}^{h_2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dz = \int_{-h_1}^{h_2} \frac{\partial u}{\partial x} dz + \int_{-h_1}^{h_2} \frac{\partial v}{\partial y} dz + \int_{-h_1}^{h_2} \frac{\partial w}{\partial z} dz \quad (2.37)$$

En utilisant la règle de Leibniz, nous aurons:

$$\begin{aligned} \int_{-h_1}^{h_2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dz &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_{-h_1}^{h_2} u dz - u(h_2) \frac{\partial h_2}{\partial x} + u(-h_1) \frac{\partial(-h_1)}{\partial x} \right) + \\ &\quad \left(\frac{\partial}{\partial y} \int_{-h_1}^{h_2} v dz - v(h_2) \frac{\partial h_2}{\partial y} + v(-h_1) \frac{\partial(-h_1)}{\partial y} \right) + (w(h_2) - w(-h_1)) \end{aligned} \quad (2.38)$$

En tenant compte des conditions cinématiques citées précédemment, il vient:

$$\int_{-h_1}^{h_2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dz = \frac{\partial h_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h_1}^{h_2} u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h_1}^{h_2} v dz \quad (2.39)$$

Étant donné que les vitesses u et v sont inconnues et sont non uniformes (Figure 2.4), il est nécessaire d'introduire à ce stade la notion des vitesses moyennes [4].

L'écoulement est moyennement permanent, d'où, les vitesses moyennes sont définies comme suit:

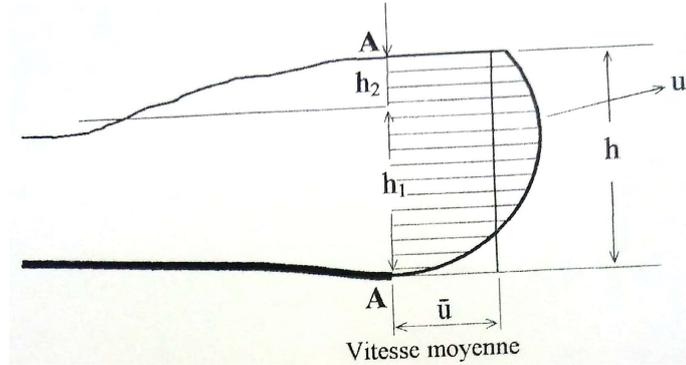


Figure 2.4: Écoulement en eau peu profonde -Distribution de la vitesse-

$$\bar{u} = \frac{1}{h} \int_{-h_1}^{h_2} u dz \quad (2.40)$$

$$\bar{v} = \frac{1}{h} \int_{-h_1}^{h_2} v dz \quad (2.41)$$

$$\bar{w} = \frac{1}{h} \int_{-h_1}^{h_2} w dz \quad (2.42)$$

Par conséquent il vient:

$$\int_{-h_1}^{h_2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dz = \frac{\partial h_2}{\partial t} + \frac{\partial(h\bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial(h\bar{v})}{\partial y} \quad (2.43)$$

D'où nous aurons:

$$\frac{\partial h_2}{\partial t} + \frac{\partial(h\bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial(h\bar{v})}{\partial y} = 0 \quad (2.44)$$

Sachant que $h = h_1 + h_2$, alors $h_2 = h - h_1$, par suite:

$$\frac{\partial h_2}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial h_1}{\partial t} \quad (2.45)$$

Comme h_1 ne varie pas avec le temps alors : $\frac{\partial h_1}{\partial t} = 0$, ce qui donnera:

$$\frac{\partial h_2}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial t} \quad (2.46)$$

Finalement on obtient:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(h\bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial(h\bar{v})}{\partial y} = 0 \quad (2.47)$$

- **Intégration des équations dynamiques**

- a) **Intégration de la première équation dynamique**

L'équation s'écrit:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} + \frac{\partial(uw)}{\partial z} = f_c v - g \frac{\partial h_2}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) \quad (2.48)$$

Posons:

$$A = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} + \frac{\partial(uw)}{\partial z} \quad (2.49)$$

$$B = \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \quad (2.50)$$

$$\int_{-h_1}^{h_2} A dz = \int_{-h_1}^{h_2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} + \frac{\partial(uw)}{\partial z} \right) dz \quad (2.51)$$

$$\int_{-h_1}^{h_2} A dz = \int_{-h_1}^{h_2} \frac{\partial u}{\partial t} dz + \int_{-h_1}^{h_2} \frac{\partial u^2}{\partial x} dz + \int_{-h_1}^{h_2} \frac{\partial(uv)}{\partial y} dz + \int_{-h_1}^{h_2} \frac{\partial(uw)}{\partial z} dz \quad (2.52)$$

L'application de la règle de Leibniz donne:

$$\begin{aligned} \int_{-h_1}^{h_2} A dz &= \left(\frac{\partial}{\partial t} \int_{-h_1}^{h_2} u dz - u(h_2) \frac{\partial h_2}{\partial t} + u(-h_1) \frac{\partial(-h_1)}{\partial t} \right) + \\ &\quad \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_{-h_1}^{h_2} u^2 dz - u^2(h_2) \frac{\partial h_2}{\partial x} + u^2(-h_1) \frac{\partial(-h_1)}{\partial x} \right) + \\ &\quad \left(\frac{\partial}{\partial y} \int_{-h_1}^{h_2} uv dz - u(h_2)v(h_2) \frac{\partial h_2}{\partial y} + u(-h_1)v(-h_1) \frac{\partial(-h_1)}{\partial y} \right) + \\ &\quad (u(h_2)w(h_2) - u(-h_1)w(-h_1)) \end{aligned} \quad (2.53)$$

La prise en compte des conditions cinématiques, conduit à:

$$\int_{-h_1}^{h_2} A dz = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-h_1}^{h_2} u dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h_1}^{h_2} u^2 dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h_1}^{h_2} uv dz \quad (2.54)$$

Introduisons à présent la notion de vitesse moyenne:[4]

$$u = u - \bar{u} + \bar{u} = [(u - \bar{u}) + \bar{u}] \quad (2.55)$$

$$u^2 = (u - \bar{u})^2 + \bar{u}^2 + 2\bar{u}(u - \bar{u}) \quad (2.56)$$

$$(u - \bar{u})(v - \bar{v}) = uv - u\bar{v} - \bar{u}v + \bar{u}\bar{v} \quad (2.57)$$

D'où :

$$uv = (u - \bar{u})(v - \bar{v}) + u\bar{v} + \bar{u}v - \bar{u}\bar{v} \quad (2.58)$$

En remplaçant les termes u^2 et uv dans l'équation (2.54), on aura:

$$\begin{aligned} \int_{-h_1}^{h_2} A dz = & \frac{\partial}{\partial t} \int_{-h_1}^{h_2} u dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h_1}^{h_2} [(u - \bar{u})^2 + \bar{u}^2 + 2\bar{u}(u - \bar{u})] dz + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h_1}^{h_2} [(u - \bar{u})(v - \bar{v}) + u\bar{v} + \bar{u}v - \bar{u}\bar{v}] dz \end{aligned} \quad (2.59)$$

Par application de la règle de Leibniz, développement et réarrangement, on obtient:

$$\int_{-h_1}^{h_2} A dz = \frac{\partial(h\bar{u})}{\partial t} + \frac{\partial(h\bar{u}\bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial(h\bar{u}\bar{v})}{\partial y} \quad (2.60)$$

Passons maintenant à l'intégration du second membre de l'équation (2.48):

Posons:

$$A_1 = f_c v - g \frac{\partial h_2}{\partial x} + \frac{1}{\rho} B \quad (2.61)$$

Intégrons le terme B correspondant aux contraintes dans le fluide

$$\int_{-h_1}^{h_2} B dz = \int_{-h_1}^{h_2} \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} dz + \int_{-h_1}^{h_2} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dz + \int_{-h_1}^{h_2} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz \quad (2.62)$$

En appliquant la règle d'intégration de Leibniz, il vient:

$$\begin{aligned} \int_{-h_1}^{h_2} B dz = & \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h_1}^{h_2} \tau_{xx} dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h_1}^{h_2} \tau_{xy} dz - \left(\tau_{xx}(h_2) \frac{\partial h_2}{\partial x} + \tau_{xy}(h_2) \frac{\partial h_2}{\partial y} - \tau_{xz}(h_2) \right) \\ & + \left(\tau_{xx}(-h_1) \frac{\partial(-h_1)}{\partial x} + \tau_{xy}(-h_1) \frac{\partial(-h_1)}{\partial y} - \tau_{xz}(-h_1) \right) \end{aligned} \quad (2.63)$$

Les termes entre parenthèses peuvent être interprétés comme étant les composantes du tenseur de l'effort dans les plans de la surface libre et du fond.

L'intégration du second membre de l'équation (2.48) permet d'avoir:

$$\int_{-h_1}^{h_2} A_1 dz = f_c h \bar{v} - gh \frac{\partial h_2}{\partial x} + \frac{1}{\rho} (\tau_{wx} - \tau_{bx}) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (h T_{xx}) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} (h T_{xy}) \quad (2.64)$$

Où τ_{wx} et τ_{bx} sont respectivement les contraintes du vent et du fond suivant x . T_{xx} et T_{xy} représentent les contraintes effectives définies comme suit [4]:

$$T_{xx} = \frac{1}{h} \int_{-h_1}^{h_2} \left(2\rho\nu \frac{\partial u}{\partial x} - \rho \overline{u'u'} - \rho(u - \bar{u})^2 \right) dz \quad (2.65)$$

$$T_{xy} = \frac{1}{h} \int_{-h_1}^{h_2} \left(\rho\nu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \rho \overline{u'v'} - \rho(u - \bar{u})(v - \bar{v}) \right) dz \quad (2.66)$$

Dans lesquelles ν , u' et v' sont respectivement la viscosité dynamique et les vitesses fluctuantes. Les contraintes du vent sont fonction de la vitesse du vent, alors que les contraintes du fond suivant x sont généralement données par:

$$\tau_{bx} = \frac{\rho g}{C^2} \bar{u} \sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2} \quad (2.67)$$

avec, C est le coefficient de Chezy.

Finalement l'intégration sur la profondeur de l'équation (2.48) donne:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(h\bar{u})}{\partial t} + \frac{\partial(h\bar{u}\bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial(h\bar{u}\bar{v})}{\partial y} = f_c h \bar{v} - gh \frac{\partial h_2}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \tau_{wx} - \frac{g}{C^2} \bar{u} \sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2} \\ + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (hT_{xx}) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} (hT_{xy}) \end{aligned} \quad (2.68)$$

b) Intégration de la deuxième équation dynamique

Il s'agit de :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{\partial(vw)}{\partial z} = -f_c u - g \frac{\partial h_2}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) \quad (2.69)$$

L'intégration suivant la profondeur de l'équation (2.69) se fait de la même manière que pour la première équation dynamique, il en résulte :

$$\begin{aligned} \frac{\partial(h\bar{v})}{\partial t} + \frac{\partial(h\bar{u}\bar{v})}{\partial x} + \frac{\partial(h\bar{v}\bar{v})}{\partial y} = -f_c h \bar{u} - gh \frac{\partial h_2}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \tau_{wy} - \frac{g}{C^2} \bar{v} \sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2} \\ + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (hT_{xy}) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} (hT_{yy}) \end{aligned} \quad (2.70)$$

Quelques auteurs ont introduit la notion de la viscosité turbulence ε pour une profondeur constante h , afin de prendre en compte les termes des contraintes effectives comme suit:

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x} (hT_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y} (hT_{xy}) \right) = \varepsilon h \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right) \quad (2.71)$$

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x} (hT_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y} (hT_{yy}) \right) = \varepsilon h \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} \right) \quad (2.72)$$

Notons que les équations de Saint Venant, énoncées pour la première fois en 1971, s'écrivent principalement en fonction du tirant d'eau h et des deux vitesses moyennes u et v suivant x et y

respectivement. dorénavant nous utiliserons les même notations que Saint Venant au lieu de \bar{u} et \bar{v} . Ainsi, le système d'équations modélisant les écoulements à surface libre comme suit [4]:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y} = 0 \quad (2.73)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial(hu^2)}{\partial x} + \frac{\partial(huv)}{\partial y} = f_c hv - gh \frac{\partial h_2}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \tau_{wx} - \frac{g}{C^2} u \sqrt{u^2 + v^2} \\ + \varepsilon h \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (2.74)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(hv)}{\partial t} + \frac{\partial(huv)}{\partial x} + \frac{\partial(hv^2)}{\partial y} = -f_c hu - gh \frac{\partial h_2}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \tau_{wy} - \frac{g}{C^2} v \sqrt{u^2 + v^2} \\ + \varepsilon h \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (2.75)$$

Les différents termes apparaissant dans les équations dynamiques de Saint Venant correspondent respectivement:

- à l'accélération locale de l'écoulement, c'est-à-dire, la variation locale de la quantité de mouvement avec le temps;
- au transport de la quantité de mouvement par convection, en d'autres termes, c'est l'accélération spatiale;
- à la force de Coriolis;
- à la composante du poids et au gradient de pression;
- à la contrainte du vent;
- au frottement Eau-Sol;
- aux contraintes effectives.

En négligeant les termes du second ordre et la force de Coriolis et en supposant d'une part, que les contraintes tangentielles au fond sont prépondérantes sur les autres contraintes, et d'autre part, que les pertes de charge générales sont les mêmes que dans le cas d'un mouvement uniforme de même profondeur, on aboutira aux équations ci-dessous:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y} = 0 \quad (2.76)$$

$$\frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial(hu^2)}{\partial x} + \frac{\partial(huv)}{\partial y} = -gh \frac{\partial h_2}{\partial x} - \frac{g}{C^2} u \sqrt{u^2 + v^2} \quad (2.77)$$

$$\frac{\partial(hv)}{\partial t} + \frac{\partial(huv)}{\partial x} + \frac{\partial(hv^2)}{\partial y} = -gh \frac{\partial h_2}{\partial y} - \frac{g}{C^2} v \sqrt{u^2 + v^2} \quad (2.78)$$

Avec : (2.76), (2.77) et (2.78) représentent respectivement l'équation de la conservation de la masse, la première équation dynamique et la deuxième équation dynamique.

Le coefficient de Chezy C est lié au coefficient de rugosité de Manning par la relation:

$$C = \frac{1}{n} R_h^{\frac{1}{6}} \quad (2.79)$$

Pour un Canal à section transversale rectangulaire de largeur B , le rayon hydraulique est donné par:

$$R_h = \frac{Bh}{B + 2h} \quad (2.80)$$

De plus, puisque le canal est symétrique, le rayon hydraulique devient:

$$R_h = \frac{bh}{b + h} \quad (2.81)$$

Avec : $B = 2b$

Sachant que : $h = h_1 + h_2$, donc

$$\frac{\partial h_2}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial h_1}{\partial x} \quad (2.82)$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial h_1}{\partial y} \quad (2.83)$$

La substitution des équations (2.79) et (2.82) dans l'équation (2.77) donnera:

$$\frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial(hu^2)}{\partial x} + \frac{\partial(huv)}{\partial y} = -gh \frac{\partial h}{\partial x} + gh \left(\frac{\partial h_1}{\partial x} - \frac{n^2}{h} \left(\frac{b+h}{bh} \right)^{1/3} u \sqrt{u^2 + v^2} \right) \quad (2.84)$$

D'autre part, il évident de voir que:

$$gh \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(g \frac{h^2}{2} \right) \quad (2.85)$$

L'équation (2.84) devient alors:

$$\frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(hu^2 + g \frac{h^2}{2} \right) + \frac{\partial(huv)}{\partial y} = gh \left(\frac{\partial h_1}{\partial x} - \frac{n^2}{h} \left(\frac{b+h}{bh} \right)^{1/3} u \sqrt{u^2 + v^2} \right) \quad (2.86)$$

Posons:

$$S_{fx} = \frac{n^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}} \left(\frac{b+h}{bh} \right)^{1/3} \quad (2.87)$$

$$S_{0x} = \frac{\partial h_1}{\partial x} = \sin \alpha_x \quad (2.88)$$

S_{fx} , S_{0x} et α_x sont respectivement la pente énergétique, la pente du fond et l'angle d'inclinaison du fond suivant la direction longitudinale x .

d'où l'équation (2.86) aura la forme :

$$\frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(hu^2 + g \frac{h^2}{2} \right) + \frac{\partial(huv)}{\partial y} = gh(S_{0x} - S_{fx}) \quad (2.89)$$

De la même façon l'équation (2.78) devient:

$$\frac{\partial(hv)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}(hv^2 + g\frac{h^2}{2}) + \frac{\partial(huv)}{\partial x} = gh(S_{0y} - S_{fy}) \quad (2.90)$$

Avec:

$$S_{fy} = \frac{n^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}} \left(\frac{b+h}{bh} \right)^{1/3} \quad (2.91)$$

$$S_{0y} = \frac{\partial h_1}{\partial y} = \sin \alpha_y \quad (2.92)$$

S_{fy} , S_{0y} et α_y sont respectivement la pente énergétique, la pente du fond et l'angle d'inclinaison du fond suivant la direction longitudinale y . En récapitulatif, l'intégration sur la profondeur des équations de Navier Stokes donne le système d'équations du mouvement bidimensionnels en régime non permanent de Jean Claude Barré de Saint Venant qui s'écrit comme suit:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(hu^2 + g\frac{h^2}{2}) + \frac{\partial(huv)}{\partial y} = gh(S_{0x} - S_{fx}) \\ \frac{\partial(hv)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}(hv^2 + g\frac{h^2}{2}) + \frac{\partial(huv)}{\partial x} = gh(S_{0y} - S_{fy}) \end{cases} \quad (2.93)$$

Dans le cas d'un écoulement unidimensionnel en régime non permanent le système (2.93) devient:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(hu^2 + g\frac{h^2}{2}) = gh(S_0 - S_f) \end{cases} \quad (2.94)$$

2.4 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons montré les différentes étapes permettant d'aboutir au système d'équation de Barré de Saint-Venant. Pour cela nous avons procédé par deux manière :

- ♠ Par la méthode des bilans en volumes finis.
- ♠ Par l'intégration des équations de Navier Stokes suivant la profondeur.

Chapitre 3

Existence et unicité des solutions des lois de conservation

3.1 Introduction

Le système d'équations de Saint-Venant est un système strictement hyperbolique obéissant aux lois de conservations.

Ce type de système, notamment dans le cas non linéaire n'admettent pas en générale de solutions au sens classique. Les questions liées à l'existence et à l'unicité restent encore posées.

En général le problème de l'unicité est réglé par la notion de la solution faible entropique.

Dans ce chapitre nous exposerons quelques résultats d'existences et d'unicités aux lois de conservations déjà démontrés dans la littérature [2].

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u(x, t)) = 0 \quad (3.1)$$

Ici:

$$u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$$

est un scalaire représentant la quantité conservée, et

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

s'appelle la fonction flux pour (3.1). Généralement les fonctions flux sont régulières.

3.2 Solutions classiques du problème de Cauchy

Afin de simplifier l'exposé de cette section, on se placera ici dans le cas scalaire et en dimension 1 d'espace. On s'intéresse donc aux solutions de la loi de conservation suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (3.2)$$

On va chercher les solutions classiques de cette équation. Une solution classique de ce problème est une solution de classe C^1 pour tout $t > 0$ et qui satisfait l'équation (3.2) point par point [2].

3.2.1 Cas linéaire

Examinons d'abord le cas le plus simple où le flux f est donné par $f(u) = cu$ avec c constant. On a alors une équation d'advection linéaire où la vitesse d'advection est c . La forme quasi-linéaire de cette équation est donnée par :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (3.3)$$

La matrice jacobienne est un scalaire égal à, $f'(u) = c$, les valeurs propres (ou encore vitesses caractéristiques) se réduisent à c qui est par hypothèse constante. On a donc ici, une seule courbe caractéristique, courbe intégrale solution de l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dx(t)}{dt} = f'(u(x(t), t)) = c \quad (3.4)$$

La courbe caractéristique est donc une droite dont la pente est égale à c . elle est de la forme $x(t) = ct + cst$. Montrons que la solution de (3.3) est constante le long de cette droite. Supposons u est régulière :

$$\frac{du}{dt}(x(t), t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x(t), t) + \frac{\partial u}{\partial x}(x(t), t) \frac{dx(t)}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t}(x(t), t) + c \frac{\partial u}{\partial x}(x(t), t) = 0$$

à présent il est possible de déterminer de façon unique la solution de (3.3) en tout point de l'espace (x, t) , puisqu'elle est constante sur les droites d'équation $x - ct = cst$, il suffit de tracer en chaque point (x, t) , l'unique caractéristique qui passe par ce point et de trouver son intersection avec l'axe des x ou encore avec la droite $t = 0$. Désignons ce point par x_0 :

$$u(x, t) = u_0(x_0) = u_0(x - ct) \quad (3.5)$$

3.2.2 Cas non-linéaire

Prenons comme exemple l'équation de Burgers non visqueuse dont le flux est donné par : $f(u) = \frac{u^2}{2}$, la condition initiale $u_0(x)$ est indéfiniment différentiable et bornée. .

Nous allons procéder par la méthode des caractéristiques pour calculer u . La forme quasi- linéaire de cette équation scalaire est la suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (3.6)$$

La matrice jacobienne est un scalaire égal à $f'(u) = u$, les valeurs propres (ou encore vitesses caractéristiques) se réduisent à u . On a donc ici aussi une seule courbe caractéristique, courbe intégrale solution de l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dx(t)}{dt} = f'(u(x(t), t)) = u(x(t), t) \quad (3.7)$$

ou encore sous forme paramétrique :

$$\begin{cases} t = s \\ x = x(s) \\ \frac{dx}{ds} = u(x(s), s) \end{cases} \quad (3.8)$$

Le long de cette courbe la solution de (3.6) est constante. En effet, on a par définition :

$$\frac{du}{ds}(s, x(s)) = \frac{\partial u}{\partial t}(s, x(s)) \frac{dt}{ds} + \frac{\partial u}{\partial x}(s, x(s)) \frac{dx}{ds}(s) = 0 \quad (3.9)$$

Or d'après (3.6) on a si u est régulière: $\frac{\partial u}{\partial t} = -u \frac{\partial u}{\partial x}$, donc (3.9) est équivalent à :

$$\left[\frac{dx}{ds}(s) - u(s, x(s)) \right] \frac{\partial u}{\partial x}(s, x(s)) = 0 \quad (3.10)$$

et finalement (3.10) est identiquement vérifiée si :

$$\frac{dx}{ds} = u(s, x(s)) \quad (3.11)$$

On en déduit que la solution de (3.6), lorsqu'elle est régulière, est constante le long des courbes dont l'équation est donnée par (3.11). Les courbes caractéristiques sont encore dans ce cas des droites d'équations $x - ut = cst$. En effet, l'équation différentielle (3.8) qui définit la courbe caractéristique n'est fonction que de u or comme on l'a vu dans (3.11) u est constant sur celle-ci, donc (3.8) définit bien une équation de droite.

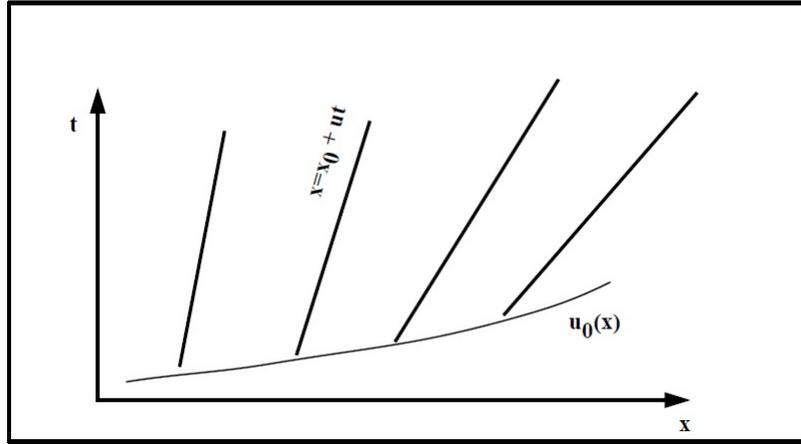
De la même façon que précédemment, pour trouver la solution classique de (3.6) en tout point de l'espace (x, t) , il suffit à partir de l'unique droite caractéristique qui passe par ce point et dont l'équation est $x - ut = cte$ de trouver l'intersection de cette droite avec la droite $t = 0$, soit x_0 ce point, on a alors $x - ut = x_0$, comme u est constant sur cette droite, on obtient

$$u(x, t) = u_0(x_0) = u_0(x - ut) \quad (3.12)$$

C'est une équation algébrique implicite à résoudre. posons $g(x, t, u) = u - u_0(x - ut)$, trouver une solution de (3.12) revient à trouver le point fixe de $g(x, t, u)$, c'est à dire le u qui vérifie $g(x, t, u) = 0$. Une condition suffisante pour pouvoir exprimer u au moins localement en fonction de x et de t est d'après le théorème des fonctions implicites $\frac{\partial g}{\partial u} \neq 0$, ce qui donne:

$$tu'_0(x - ut) + 1 \neq 0 \quad (3.13)$$

Si $u_0(x)$ est une fonction croissante monotone, cette dernière condition (3.13) est vérifiée quel que soit $t \geq 0$. On pourra donc en résolvant (3.12) trouver une solution classique de(3.6). Géométriquement les courbes caractéristiques issues de la droite $t = 0$ forment alors un faisceau de droites divergent et celles ci ne peuvent pas focaliser (Figure 3.1). On peut encore interpréter cela en disant que l'information venant de la gauche va moins vite que celle venant de la droite et donc ne peut pas la rattraper.


 Figure 3.1: Équation de Burgers, $u_0(x)$ monotone croissante

Remarque 3.1 Comme on l'a vu sur cet exemple, les courbes caractéristiques sont des courbes le long desquelles l'information contenue dans la donnée initiale se propage et la pente de ces courbes correspond localement à la vitesse de propagation de l'information.

Les solutions classiques telles qu'on les a définies ne suffisent pas pour résoudre le problème (3.2), on est obligé de se tourner vers des solutions plus générales que l'on appellera **solutions faibles**. Ces dernières sont des solutions au sens des **distributions** qui ne seront donc plus forcément continues en tout point mais simplement continues par morceau. Ce choix est tout à fait cohérent avec la physique de ce type de problème. En effet, dans le domaine de la mécanique des fluides une onde de choc n'est ni plus ni moins qu'un point de discontinuité séparant deux zones où la solution est continue [2].

3.3 Solutions faibles

Revenons au problème

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases} \quad (3.14)$$

Pour simplifier l'analyse et les notations, on se placera dans le cadre $d = 1$, en gardant à l'esprit que les prochains développements se généralisent en dimension supérieure [2].

Définition 3.1 Soit $u_0 \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R})$. On dit que u est **solution faible** de (3.14) sur $\mathbb{R} \times [0, T[$ si $u \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R} \times]0, T[)$ et

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \left(u \frac{\partial \Phi}{\partial t} + f(u) \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) dx dt + \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \Phi(x, 0) dx = 0, \quad \forall \Phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times [0, T]).$$

Remarque 3.2 :

- Si $T = +\infty$, on dit que la solution est globale sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$
- Dans la définition $\text{Supp}(\Phi) \subset \mathbb{R} \times [0, T[$ et non pas $\text{Supp}(\Phi) \subset \mathbb{R} \times]0, T[$, sinon la condition initiale ne serait pas prise en compte à travers le terme:

$$\int_{\mathbb{R}} u_0(x) \Phi(x, 0) dx$$

Proposition 3.1 *Si u est régulière, alors u est solution faible si et seulement si u est solution classique.*

Démonstration :

Supposons u régulière. Pour tout $\phi \in D(\mathbb{R} \times [0, T[)$, on a :

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \left(u \frac{\partial \Phi}{\partial t} + f(u) \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) dx dt + \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \Phi(x, 0) dx \\ = \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) \right) \Phi dx dt + \int_{\mathbb{R}} (u_0(x) - u(x, 0)) \Phi(x, 0) dx. \end{aligned} \quad (3.15)$$

\Leftarrow) Supposons que u soit solution classique. Alors le membre de droite dans l'égalité précédente est nul pour toute fonction $\Phi \in D(\mathbb{R} \times [0, T[)$. Ceci implique la nullité du membre de gauche, et donc u est solution faible.

\Rightarrow) Supposons que u soit solution faible. Cette fois, le membre de gauche est nul pour tout $\Phi \in D(\mathbb{R} \times [0, T[)$. En particulier, pour tout $\Phi \in D(\mathbb{R} \times]0, T[)$, on a :

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) \right) \Phi dx dt = 0$$

ce qui implique: $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t > 0$. Par suite, on a $\int_{\mathbb{R}} (u_0(x) - u(x, 0)) \Phi(x, 0) dx = 0$ pour tout $\Phi \in D(\mathbb{R} \times [0, T[)$, et donc:

$$\int_{\mathbb{R}} (u_0(x) - u(x, 0)) \psi(x, 0) dx = 0, \quad \forall \psi \in D(\mathbb{R}) \quad (3.16)$$

Par conséquent $u_0(x) = u(x, 0)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, ce qui permet de conclure que u est solution régulière de (3.14). □

La définition précédente donne la possibilité de considérer des solutions faibles discontinues. Cependant, ces solutions n'admettent pas n'importe quelle discontinuité. Le théorème qui suit précise les conditions que doit vérifier une solution faible régulière de part et d'autre d'une courbe régulière de discontinuité.

Théorème 3.1 *Soit $u \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R} \times]0, T[)$ de classe C^1 en dehors d'une courbe régulière Γ séparant $\mathbb{R} \times]0, T[$ en deux composantes connexes Ω_- et Ω_+ . Alors il s'agit d'une solution faible si et seulement si:*

- *C'est une solution régulière dans Ω_- et Ω_+ .*
- *Le long de Γ , les sauts $[u]$ de u et $[f(u)]$ de $f(u)$ sont reliés par la relation de **Rankine Hugoniot**:*

$$n_t [u] + n_x [f(u)] = 0 \quad (3.17)$$

où $\vec{n} = (n_x, n_t)$ est un vecteur unitaire normal à Γ qui pointe vers la droite ($n_x > 0$).

Démonstration

□

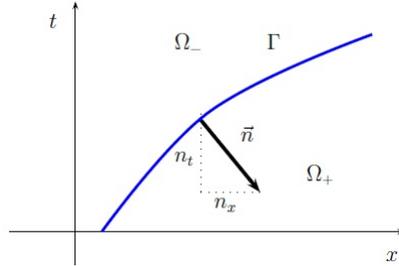


Figure 3.2: Relation de Rankine-Hugoniot: séparation du domaine en deux composantes connexes Ω_- , Ω_+ par une courbe de discontinuité Γ .

Remarque 3.3 Comme f est de classe C^1 , si u est bornée (à valeurs dans un intervalle $[a, b]$ par exemple), alors il existe $M > 0$ tel que pour tout $u \in [a, b]$, on a $|f(u)| \leq M|u|$. Alors, par la relation (3.17), en tout point $(x, t) \in \Gamma$, on a :

$$|n_t(x, t)| \leq M|n_x(x, t)| \quad (3.18)$$

Si la courbe est définie par l'ensemble des points du plan $M(x, t)$ tels que $\Gamma(x, t) = 0$, la normale au point (x, t) est donnée par $\vec{n} = (n_x, n_t)^t = \nabla \Gamma(x, t)$. Or \vec{n} , la normale au point (x, t) , étant un vecteur unitaire, la relation (3.18) assure que $\frac{\partial}{\partial x} \Gamma(x, t) \neq 0$. Une application directe du théorème des fonctions implicites assure que $\Gamma(x, t) = 0 \Leftrightarrow x = X(t)$, avec $X'(t) = -\frac{n_t}{n_x}$. La relation (3.17) s'écrit alors:

$$[f(u)] = X'(t)[u] \quad (3.19)$$

Exemple 3.1 Équation de Burgers. On considère à nouveau l'équation :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) = 0$$

On cherche une solution sous la forme:

$$u(x, t) = \begin{cases} u_L & \text{si } x < \sigma t \\ u_R & \text{si } x > \sigma t \end{cases}$$

Avec $u_L, u_R \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}$ c'est à dire une discontinuité entre deux états constants se propageant à une vitesse constante σ . La relation (3.19) donne:

$$\left(\frac{u_R^2}{2} \right) - \left(\frac{u_L^2}{2} \right) = \sigma(u_R - u_L) \Rightarrow \sigma = \frac{u_L + u_R}{2}$$

La solution est donc un choc se propageant à vitesse $\sigma = \frac{u_L + u_R}{2}$.

Le principal problème avec l'introduction de solutions faibles est que l'on perd l'unicité des solutions. Par exemple, si l'on revient à l'équation de Burgers avec la condition initiale $u(x, 0) = 0$,

on peut aisément vérifier que pour tout $s > 0$, la fonction

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -2s, \\ -2s & \text{si } -2s < x < 0, \\ 2s & \text{si } 0 < x < 2s \\ 0 & \text{si } x > 2s, \end{cases}$$

est solution faible. On démontre ainsi qu'il y a une infinité (non dénombrable) de solutions faibles. Nous allons voir que l'on peut récupérer l'unicité des solutions à travers le concept de solution entropique.

3.4 Solutions entropiques

On cherche un critère qui va permettre de sélectionner l'unique solution physique parmi toutes les solutions faibles. Les lois de conservation du type $\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$ sont souvent des approximations de lois du type [2] :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3.20)$$

où l'on a négligé le terme de diffusion $\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (viscosité physique). On peut considérer que les **bonnes** solutions faibles sont celles qui sont limites de solutions u_ε de (3.20) lorsque ε tend vers 0. Il semble donc pertinent d'identifier une information propre aux solutions de (3.20) qui persiste lors du passage à la limite $u_\varepsilon \mapsto u$.

Soit $E : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction convexe de classe C^2 (on a donc $E'' > 0$). En multipliant (3.20) par $E'(u_\varepsilon)$:

$$E'(u_\varepsilon) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + E'(u_\varepsilon) f'(u_\varepsilon) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} = \varepsilon E'(u_\varepsilon) \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2}$$

puis en définissant $F(u)$ telle que $F'(u) = E'(u) f'(u)$, on obtient:

$$\frac{\partial}{\partial t} E(u_\varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x} F(u_\varepsilon) = \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} (E(u_\varepsilon)) - \varepsilon \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} \right)^2 E''(u_\varepsilon) \quad (3.21)$$

et donc:

$$\frac{\partial}{\partial t} E(u_\varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x} F(u_\varepsilon) - \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} (E(u_\varepsilon)) \leq 0$$

Cette forme conservative nous permet d'espérer passer à la limite dans une forme faible. Formellement, en passant à la limite $\varepsilon \mapsto 0$.

$$\frac{\partial}{\partial t} E(u) + \frac{\partial}{\partial x} F(u) \leq 0.$$

Définition 3.2 Soit E une fonction strictement convexe de \mathbb{R} dans \mathbb{R} de classe C^1 . On dit que E est une **entropie** de l'équation $\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$ s'il existe une fonction F de \mathbb{R} dans \mathbb{R} de classe C^1 telle que $F' = E' f'$. La fonction F est appelée **flux d'entropie**

Remarque 3.4 Cette définition s'étend aux fonctions E qui sont seulement continues. Dans ce cas, on peut définir un flux F via l'introduction de suites régularisantes.

Définition 3.3 Soit $u \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R} \times]0, T[)$. On dit que c'est une **solution entropique** du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (3.22)$$

si pour toute entropie continue convexe E associée à un flux F , on a :

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} (E(u) \frac{\partial \Phi}{\partial t} + F(u) \frac{\partial \Phi}{\partial x}) dx dt + \int_{\mathbb{R}} E(u_0(x)) \Phi(x, 0) dx \geq 0, \quad \forall \Phi \in D(\mathbb{R} \times [0, T]), \Phi \geq 0.$$

La notion de solution entropique contient la notion de solution faible :

Proposition 3.2 Soit $u \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R} \times]0, T[)$ une solution entropique de (3.22), avec $u_0 \in L^\infty$. Alors u est solution faible de (3.22).

Démonstration

Supposons que u et u_0 soient à valeurs dans un intervalle borné $[a, b] \in \mathbb{R}$. Écrivons l'inégalité d'entropie pour $E(u) = |u - a|$.

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\mathbb{R}} ((u - a) \frac{\partial \Phi}{\partial t} + (f(u) - f(a)) \frac{\partial \Phi}{\partial x}) dx dt + \int_{\mathbb{R}} (u_0(x) - a) \Phi(x, 0) dx \geq 0 \\ & \Rightarrow \int_0^T \int_{\mathbb{R}} (u \frac{\partial \Phi}{\partial t} + f(u) \frac{\partial \Phi}{\partial x}) dx dt + \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \Phi(x, 0) dx \\ & - \left(a \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial \Phi}{\partial t} dx dt + f(a) \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx dt + a \int_{\mathbb{R}} \Phi(x, 0) dx \right) \geq 0 \end{aligned}$$

on a :

$$a \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial \Phi}{\partial t} dx dt + f(a) \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx dt + a \int_{\mathbb{R}} \Phi(x, 0) dx = 0$$

d'où :

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} (u \frac{\partial \Phi}{\partial t} + f(u) \frac{\partial \Phi}{\partial x}) dx dt + \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \Phi(x, 0) dx \geq 0. \quad (a)$$

Un calcul analogue impliquant $E(u) = |b - u|$ donne l'inégalité dans l'autre sens. On obtient :

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} (u \frac{\partial \Phi}{\partial t} + f(u) \frac{\partial \Phi}{\partial x}) dx dt + \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \Phi(x, 0) dx \leq 0. \quad (b)$$

De (a) et (b) on aura :

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} (u \frac{\partial \Phi}{\partial t} + f(u) \frac{\partial \Phi}{\partial x}) dx dt + \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \Phi(x, 0) dx = 0, \quad \forall \Phi \in D(\mathbb{R} \times [0, T]), \Phi \geq 0.$$

Pour étendre ce résultat à $\Phi \in D(\mathbb{R} \times [0, T])$ quelconque, on écrit $\Phi = \Phi_+ - \Phi_-$, avec $\Phi_+ = \frac{|\Phi| + \Phi}{2} \geq 0$ et $\Phi_- = \frac{|\Phi| - \Phi}{2} \geq 0$, et on conclut avec la linéarité de l'intégrale

Remarque 3.5

- Les inégalités d'entropie pour les seules fonctions de la forme $E(u) = |u - k|$ suffisent à obtenir toutes les inégalités d'entropie. Nous ne démontrerons pas ce résultat ici.
- La définition des solutions entropiques introduit de l'irréversibilité : si $u(x, t)$ est une solution faible entropique sur $\mathbb{R} \times [0, T[$, alors $v(-x, T - t)$ est solution faible de

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(v) = 0, \\ v(x, 0) = u(x, -T), \end{cases} \quad x \in \mathbb{R} \quad (3.23)$$

mais ce n'est pas une solution entropique, car on a $\frac{\partial E(u)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} F(u) \geq 0$ au sens faible (sauf si bien sûr ces inégalités sont des égalités).

Théorème 3.2 Soit $u \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R} \times]0, T[)$ de classe C^1 en dehors d'une courbe régulière Γ . Alors u est solution faible entropique si et seulement si :

- C'est une solution classique
- Le long de Γ on a l'inégalité :

$$\sigma[E(u)] \geq [F(u)] \quad (3.24)$$

pour toute entropie E et flux associé F , avec $\sigma = -\frac{n_t}{n_x}$ et \vec{n} qui pointe vers la droite ($n_x > 0$).

Proposition 3.3 Si f est strictement convexe, l'inégalité d'entropie au sens faible pour une seule entropie strictement convexe E suffit à obtenir toutes les inégalités d'entropie. En particulier, la condition de choc entropique est équivalente à $u^- > u^+$ le long de toute courbe de discontinuité Γ .

Exemple 3.2 Revenons à l'équation de Bürger :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) = 0$$

avec des solutions faibles de la forme :

$$u(x, t) = \begin{cases} u_L & \text{si } x < \sigma t \\ u_R & \text{si } x > \sigma t \end{cases}$$

Avec $\sigma = \frac{u_L + u_R}{2}$. D'après le résultat précédent, on sait déjà que la solution est entropique si et seulement si $u_L > u_R$. On peut vérifier ce résultat directement, en revenant à (3.24), avec par exemple $E(u) = u^2$ et $F(u) = \frac{2}{3}u^3$. On a

$$\begin{aligned} -\sigma[E(u)] + [F(u)] \leq 0 &\Leftrightarrow -\frac{u_L + u_R}{2}(u_R^2 - u_L^2) + \frac{2}{3}(u_R^3 - u_L^3) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{6}(u_R^3 - u_L^3) \leq 0. \end{aligned}$$

Cette inégalité est vérifiée ssi $u_L > u_R$.

3.5 Résultats d'existence et d'unicité

Commençons par introduire l'espace fonctionnel des fonctions à variation bornée. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R} . Pour $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, on définit la **variation totale** de u par [2]:

$$TV_{\Omega}(u) = \sup \left\{ \int_{\Omega} u \operatorname{div}(\varphi), \varphi \in C_c^1(\Omega)^d, \|\varphi\|_{L^{\infty}(\Omega)^d} \leq 1 \right\}.$$

Définition 3.4 Une fonction $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ est dite à **variation bornée** sur Ω si $TV_{\Omega}(u) < \infty$. On note :

$$BV(\Omega) = \{u \in L^1_{loc}(\Omega), TV_{\Omega}(u) < \infty\} \quad (3.25)$$

Nous admettrons les trois résultats fondamentaux suivants:

Théorème 3.3 Pour toute donnée initiale $u_0 \in L^{\infty}(\mathbb{R}^d)$, il existe une unique solution entropique de (3.14) $u \in L^{\infty}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+) \cap C^0([0, T], L^1_{loc}(\mathbb{R}^d))$.

Théorème 3.4 Soit $u_0 \in (L^{\infty} \cap L^1 \cap BV)(\mathbb{R}^d)$. Alors il existe une solution faible entropique u du problème (3.14), avec $u \in L^{\infty}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+) \cap C^0([0, T], L^1_{loc}(\mathbb{R}^d))$ pour tout $T > 0$. Cette solution vérifie les estimations suivantes:

- i) $\|u(\cdot, t)\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^d)} \leq \|u_0\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^d)} \quad p.p, t \geq 0.$
- ii) $u(\cdot, t) \in BV(\mathbb{R}^d)$ et $TV(u(\cdot, t)) \leq TV(u_0) \quad p.p, t \geq 0.$
- iii) $\|u(\cdot, t) - u(\cdot, s)\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq C TV(u_0)|t - s|$, avec $t, s \geq 0.$
- iiii) $\int_{\mathbb{R}^d} u(x, t) dx = \int_{\mathbb{R}^d} u_0(x) dx \quad p.p, t \geq 0.$

Théorème 3.5 Unicité (Kruzkov)

Soient u et v deux solutions entropiques de donnée initiale u_0 et v_0 dans $(L^{\infty} \cap L^1 \cap BV)(\mathbb{R}^d)$. On pose $M = \max_{|\lambda| \leq \|u\| \leq \|v\|_{L^{\infty}}} |f'(\lambda)|$. Alors, pour tout $R > 0$ et tout $t \geq 0$:

$$\int_{x \leq R} |u(x, t) - v(x, t)| dx \leq \int_{|x| \leq R + Mt} |u_0(x) - v_0(x)| dx. \quad (3.26)$$

3.6 Propriétés mathématiques des équations de Saint-Venant

Pour l'étude des propriétés mathématiques du système de Saint-Venant, ce dernier peut s'écrire sous la forme **conservative** ou sous une forme **compacte** suivante :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = S(U) \quad (3.27)$$

Avec U vecteur des variables conservatives et $F(U)$ le flux tels que:

$$U = \begin{pmatrix} h \\ hu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ Q \end{pmatrix}, \quad F(U) = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + g\frac{h^2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q \\ \frac{Q^2}{h} + g\frac{h^2}{2} \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

Dans notre cas $S(u)$ est le terme source qui s'écrit:

$$S(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ S_0 - S_f \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

3.6.1 Matrice Jacobienne

On va donc commencer par examiner les équations avec $S(U) = 0$: on veut résoudre le problème sans terme sources:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = 0 \quad (3.30)$$

On a : $\frac{\partial F(U)}{\partial x} = \frac{\partial F(U)}{\partial U} * \frac{\partial U}{\partial x}$

D'où :

$$\frac{\partial F(U)}{\partial x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ gh - u^2 & 2u \end{pmatrix} * \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} h \\ Q \end{pmatrix} = J(U) * \frac{\partial U}{\partial x}$$

La matrice Jacobienne $J(U)$ a deux valeurs propres λ_1 et λ_2 . Calculons les valeurs propres de la matrice jacobienne. On obtient facilement les valeurs suivantes :

$$\lambda_1 = u + \sqrt{gh}$$

$$\lambda_2 = u - \sqrt{gh}$$

On voit donc que ces valeurs propres ou vitesse caractéristiques sont réelles, le système est donc strictement (les valeurs propres sont réelles et distinctes) hyperbolique en (x,t) . Les surfaces caractéristiques sont ici des courbes de $\mathbb{R} * \mathbb{R}^+$. Elle sont définies par les équations différentielles ordinaires suivantes :

$$\begin{cases} dx = \lambda_1(u, h)dt \\ dx = \lambda_2(u, h)dt \end{cases} \quad (3.31)$$

3.6.2 Solution analytique des équation de Saint-Venant

Les équations de Saint-Venant n'admettent pas de solution analytique dans le cas général. Surtout en présence du terme source correspondant au frottement du lit. Les équations de Saint-Venant présentent, dans le cas mono-dimensionnel d'un canal prismatique rectangulaire, une solution analytique connue sous le nom de la solution de **Ritter**.

Cette solution analytique de Stocker (1957) concerne l'écoulement transitoire dans un canal prismatique horizontal à section rectangulaire de largeur, $B = 10m$ et de longueur $L = 2Km$. Le lit du canal est lisse, donc il n'y a pas d'effet de frottement sur l'écoulement. La vanne se trouve au milieu du canal et à l'instant $t = 0$, la vanne est totalement enlevée et l'eau se relâche sous forme de deux vagues, l'une se dirige vers l'amont et l'autre vers l'aval.

Les conditions initiales de l'écoulement sont formées d'un débit partout nul dans le canal, et d'une hauteur d'eau discontinue au niveau de la vanne. La hauteur à l'amont du seuil est fixée à $h_{amont} = 20m$, et la hauteur à l'aval varie pour changer la nature de l'écoulement (fluvial/torrentiel).

Lors de l'ouverture brutale de la vanne, nous observons une onde de raréfaction se propageant vers l'amont de la vanne et une onde de choc se propageant vers l'aval.

Chapitre 4

Résolution Numérique

4.1 Introduction

Grâce aux avancées notables des calculateurs et leur implication dans la résolution des équations aux dérivées partielles d'une part, et les progrès de l'analyse numérique d'autre part, on assiste à un développement dans toutes les branches des sciences physiques.

Par manque de solution analytique d'un problème donné, il est nécessaire de chercher une solution numérique, donc il suffit d'étudier le problème, d'identifier sa nature et enfin appliquer la méthode numérique convenable.

Diverses méthodes numériques ont été par la suite développées dans ce contexte, parmi ces méthodes on peut citer :

- Méthode des différences finies;
- Méthode des éléments finis;
- Méthode des caractéristiques;
- Méthode des volumes finis.

Le choix de la méthode à appliquer se base sur la nature et la complexité du phénomène à étudier. Dans notre cas il est préférable d'appliquer la méthode des différences finies, car elle est adaptée pour les problèmes unidimensionnels selon le constat fait par certains chercheurs [15, 17].

4.2 Description de la méthode des différences finies

Les méthodes de résolution par différences finies sont actuellement les plus utilisées. Il existe différentes méthodes de résolution en fonction des schémas numériques mis en œuvre. La méthode de résolution par différences finies consiste à remplacer les opérateurs différentiels par des opérateurs algébriques (basés sur des intervalles de temps et d'espace Δt et Δx), établis à partir du développement de **Taylor**, puis on résout le système d'équations algébriques ainsi obtenu en tenant compte des conditions initiales et aux limites [5, 10].

L'utilisation de la méthode des différences finies nécessite d'abord l'identification d'un nombre fini de points dans le domaine espace-temps considéré (Figure 4.1)

Ces points sont appelés nœuds et en ces nœuds les approximations de la solution exacte seront

calculées.

La distance entre ces points est appelée **pas de discrétisation**.

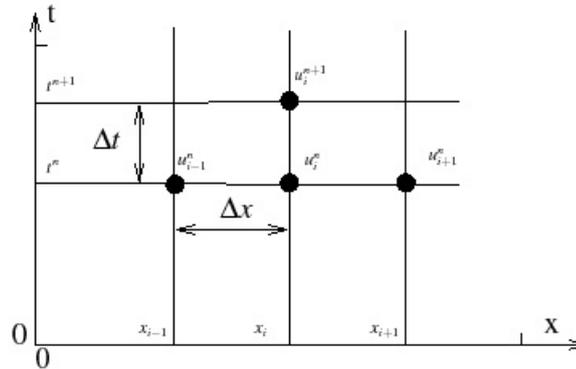


Figure 4.1: Définition d'un domaine discrétisé

4.3 Approximation des dérivées par différences finies

Cette approximation repose sur les développements de Taylor des fonctions continues et dérivables. Lorsque le pas de temps et d'espace sont petits, le développement limité est proche de la valeur exacte. Selon l'emploi de ces développements, on obtient des expressions différentes qui génèrent trois types de schémas (centré, progressif et régressif).

On présente ci-dessous ces schémas, dans le but d'approximer la première dérivée :

1. Schéma progressif :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i^j = \frac{u_{i+1}^j - u_i^j}{\Delta x} + o(\Delta x) \tag{4.1}$$

1. Schéma régressif :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i^j = \frac{u_i^j - u_{i-1}^j}{\Delta x} + o(\Delta x) \tag{4.2}$$

Les deux schémas précédents sont d'ordre un. On introduit maintenant le schéma d'ordre deux qui est dit centré :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i^j = \frac{u_{i+1}^j - u_{i-1}^j}{2\Delta x} + o(\Delta x^2) \tag{4.3}$$

Ainsi, la classification par rapport au temps fait ressortir deux grandes familles de schémas :

4.3.1 Schéma explicite

Un schéma est dit **explicite** si chaque valeur approchée de la solution au temps $t + \Delta t$ et au point x est écrite en fonction de la solution précédente au temps t , cette valeur est explicitement fonction des valeurs connues (déjà calculées), et s'obtient directement pour chaque x [15].

4.3.2 Schéma implicite

Un schéma est dit **implicite** si chaque valeur approchée de la solution au temps $t + \Delta t$ et au point x est écrite en fonction de la solution précédente au temps t et des valeurs voisines au temps $t + \Delta t$. Il s'agit donc d'une liaison implicite entre toutes les valeurs au temps $t + \Delta t$ qui se résout globalement [15].

Remarque 4.1 *La dérivée par rapport au temps est toujours discrétisée selon le schéma :*

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i^j = \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t} + o(\Delta t) \quad (4.4)$$

4.4 Analyse de l'approximation

4.4.1 Erreur de troncature

L'erreur de troncature résulte du fait qu'on a tronqué le développement en série de Taylor de la fonction u .

L'erreur de troncature par pas est la différence entre la valeur calculée et la valeur exacte, en supposant qu'au pas précédent la valeur calculée et la valeur exacte étaient identiques [17, 19].

4.4.2 La consistance d'un schéma aux différences finies

Le schéma aux différences finies est dit consistant si l'erreur de consistance (ou de troncature) tend **uniformément** vers 0 lorsque les pas Δt et Δx tendent indépendamment vers 0,

4.4.3 La stabilité

Un schéma aux différences finies est dit stable si les petites erreurs ne sont pas amplifiées avec les itérations temporelles successives. L'instabilité numérique peut avoir une cause d'origine physique, c'est le cas lorsque le phénomène n'est pas correctement modélisé (problème mal-posé).

4.4.4 La convergence

Un schéma est dit convergent lorsque la solution de l'équation aux différences se rapproche de la vraie solution de l'équation aux dérivées partielles ayant les mêmes conditions initiales et aux limites lorsque la dimension des mailles de discrétisation diminue. Généralement, un schéma consistant est stable et également convergent [17, 19].

4.5 Schémas aux différences finies couramment utilisés

4.5.1 Les schémas implicites

Les schémas numériques implicites les plus utilisés pour résoudre les problèmes d'évolutions, sont le schéma de **Preissman** et celui de **Beam** et **Warming**

Schéma de Preissman

Il a été largement utilisé pour l'analyse des courants de surface libre instable. L'algorithme de ce schéma est donné par [11].

$$U_t = \frac{1}{\Delta t} [(U_i^{j+1} + U_{i+1}^{j+1}) - (U_i^j + U_{i+1}^j)] \quad (4.5)$$

$$F_x = \frac{1}{\Delta x} [\theta (F_{i+1}^{j+1} - F_i^{j+1}) + (1 - \theta) (F_{i+1}^j - F_i^j)] \quad (4.6)$$

$$S = \frac{\theta}{2} (S_i^{j+1} + S_{i+1}^{j+1}) + \frac{1 - \theta}{2} (S_i^j + S_{i+1}^j) \quad (4.7)$$

Où : U_t , F_x et S forment les vecteurs de l'équation écrite sous la forme conservative du système donné par :

$$U_t + F_x + S = 0 \quad (4.8)$$

Schéma Beam et Warming

Dans ce schéma la forme conservative du système peut être résolue par l'approximation de la forme générale suivante[15].

$$U^{j+1} = U^j + \Delta t \left[\frac{\theta_1}{1 + \theta_2} \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)^{j+1} + \frac{1 - \theta_1}{1 + \theta_2} \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)^j + \frac{\theta_2}{1 + \theta_2} \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)^{j-1} \right] \quad (4.9)$$

Où : θ_1 et θ_2 sont des paramètres du schéma.

(j) et $(j - 1)$ sont deux niveaux de temps connus et $(j + 1)$ est le niveau de temps inconnu.

4.5.2 Les schémas explicites

Dans la mécanique des fluides plusieurs schémas explicites sont utilisés pour le traitement des problèmes de nature hyperboliques, appelés aussi schémas de type **Prédicteur Correcteur** [3]. Un schéma de ce type comporte un algorithme qui donne les valeurs approchées des résultats recherchés et un autre qui représente la solution supposée réelle du problème. On citera trois types de ces schémas.

Schéma de MacCormack

Le principe de ce schéma est de discrétiser les équations de bases en deux séquences, une de prédiction et une autre de correction. Le but est de calculer les valeurs des variables de l'écoulement au pas de temps $(j + 1)$ sachant que les valeurs sont connues au pas de temps précédent (j)

L'algorithme de ce schéma est donné par :

- **Algorithme de prédiction**

$$U_i^* = U_i^j - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_i^j - F_{i-1}^j) - \Delta t S_i^j \quad 2 \leq i \leq n \quad (4.10)$$

- **Algorithme de correction**

$$\hat{U}_i = U_i^* - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1}^* - F_i^*) - \Delta t S_i^* \quad 1 \leq i \leq n - 1 \quad (4.11)$$

- **La solution** au temps $(j + 1)$ est donnée :

$$U_i^{j+1} = \frac{1}{2} (U_i^j + \bar{U}_i) \quad (4.12)$$

Où : Δt : est le pas de temps

Δx : est le pas d'espace

Les indices (i) et (j) indiquent respectivement les valeurs des variables au point (i, j) dans le plan (x, t) , avec les coordonnées x_i et t_j où :

$$x_i = (i - 1)\Delta x \quad i = 1, 2, \dots$$

$$t_j = (j - 1)\Delta t \quad j = 1, 2, \dots$$

Schéma de Lambda

Ce schéma consiste à discrétiser les équations de bases en deux étapes, l'une de prédiction et l'autre de correction, puis on aura l'étape de la solution.

L'algorithme de ce schéma est donné par [17].

- **Algorithme de prédiction**

$$\bar{V}_x^+ = \frac{2V_i^j - 3V_{i-1}^j + V_{i-2}^j}{\Delta x} \quad (4.13)$$

$$\bar{V}_x^- = \frac{V_{i+1}^j - V_i^j}{\Delta x} \quad (4.14)$$

- **Algorithme de correction**

$$\hat{V}_x^- = \frac{-2\bar{V}_i + 3\bar{V}_{i+1} - \bar{V}_{i+2}}{\Delta x} \quad (4.15)$$

$$\hat{V}_x^+ = \frac{\bar{V}_i - \bar{V}_{i-1}}{\Delta x} \quad (4.16)$$

- **La solution**

$$V_i^{j+1} = \frac{1}{2} (V_i^j + \hat{V}_i) \quad (4.17)$$

Schéma de Gabutti

Après avoir testé le schéma de **Lambda**, **Gabutti** remarqua que celui-ci ne donne pas assez de bons résultats et ne peut pas par conséquent être utilisé dans tous les cas.

Pour corriger cette insuffisance, Gabutti proposa un schéma dit **Schéma de Gabutti** qui est d'un côté similaire à celui de **Lambda**, dans la procédure de développement des équations, qui doivent être écrites sous une forme non conservative et qui utilise largement la théorie des caractéristiques, mais d'un autre côté diffère de celui-ci dans l'approximation des dérivées partielles par différences finies.

Le Schéma de Gabutti qui est d'ordre deux, à la particularité d'effectuer deux étapes de prédiction et une étape de correction, l'algorithme de ce schéma est donné par [11].

• **Algorithme de prédiction**

1. partie A :

$$\tilde{V}^+ = \frac{V_i^j - V_{i-1}^j}{\Delta x} \quad \lambda_i > 0 \quad (4.18)$$

$$\tilde{V}^- = \frac{V_{i+1}^j - V_i^j}{\Delta x} \quad \lambda_i < 0 \quad (4.19)$$

2. partie B :

$$\bar{V}_x^+ = \frac{2V_i^j - 3V_{i-1}^j + V_{i-2}^j}{\Delta x} \quad \lambda_i > 0 \quad (4.20)$$

$$\bar{V}_x^- = \frac{-2V_i^j + 3V_{i+1}^j - V_{i+2}^j}{\Delta x} \quad \lambda_i < 0 \quad (4.21)$$

• **Algorithme de correction**

$$\hat{V}_x^+ = \frac{\tilde{V}_i - \tilde{V}_{i-1}}{\Delta x} \quad \lambda_i > 0 \quad (4.22)$$

$$\hat{V}_x^- = \frac{\tilde{V}_{i+1} - \tilde{V}_i}{\Delta x} \quad \lambda_i < 0 \quad (4.23)$$

• **La solution**

$$V_i^{j+1} = \frac{1}{2} \left(V_i^j + \bar{V}_i + \hat{V}_i - \tilde{V}_i \right) \quad (4.24)$$

Notons que les λ_i ne sont autre que les valeurs propres de la matrice jacobienne définie précédemment.

Schéma de Lax

Dans ce schéma, les dérivées partielles et les coefficients h , u et S_f des équations étudiées sont estimées comme suit :

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{h_{i+1}^j - h_{i-1}^j}{2\Delta x} \quad (4.25)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{h_i^{j+1} - h^*}{\Delta t} \quad (4.26)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1}^j - u_{i-1}^j}{2\Delta x} \quad (4.27)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_i^{j+1} - u^*}{\Delta t} \quad (4.28)$$

Tel que :

$$h^* = \frac{1}{2} (h_{i-1}^j + h_{i+1}^j) \quad (4.29)$$

$$u^* = \frac{1}{2} (u_{i-1}^j + u_{i+1}^j) \quad (4.30)$$

$$S_f^* = \frac{1}{2} (S_{i-1}^j + S_{i+1}^j) \quad (4.31)$$

4.5.3 Comparaison des schémas explicites et implicites

Une comparaison entre les deux schémas nécessite au préalable une étude des différents schémas. Selon la comparaison faites par certains chercheurs, on retient les avantages et les inconvénients suivants [13].

- La méthodes explicite exige une condition de stabilité sur le pas de temps tandis que la méthode implicite ne nécessite aucune.
- La souplesse de programmation offerte par la méthode explicite est beaucoup meilleur que celle offerte par la méthode implicite.
- L'économie de calcul est beaucoup plus importante pour un schéma implicite car il n'y a aucune restriction sur le pas de temps.
- La méthode explicite est recommandée dans le cas de problèmes de discontinuité.

Dans ce qui suit, on s'intéressera plus particulièrement à la méthode de **Lax** et à une autre méthode **implicite** que nous avons proposé.

4.6 Discrétisation des équations de Saint-Venant par le schéma de Lax

Nous avons vu aux chapitres précédents que le phénomène de la rupture de barrage est régi par le système d'équations de Saint-Venant donné par :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(hu^2 + g\frac{h^2}{2}) = gh(S_0 - S_f) \end{cases}$$

En remplaçant les dérivées partielles dans les équations de Saint Venant par des approximations aux différences finies données par le schéma de Lax il vient :

4.6.1 Discrétisation de l'équation de continuité

L'équation de continuité est donnée par :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + h \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (4.32)$$

D'où :

$$\frac{h_i^{j+1} - h^*}{\Delta t} + h^* \frac{u_{i+1}^j - u_{i-1}^j}{2\Delta x} + u^* \frac{h_{i+1}^j - h_{i-1}^j}{2\Delta x} = 0 \quad (4.33)$$

Multiplions les deux membres de l'équation (4.33) par Δt on obtient :

$$h_i^{j+1} = h^* - h^* \frac{\Delta t}{2\Delta x} (u_{i+1}^j - u_{i-1}^j) - u^* \frac{\Delta t}{2\Delta x} (h_{i+1}^j - h_{i-1}^j) \quad (4.34)$$

Avec :

$$h^* = \frac{1}{2} (h_{i-1}^j + h_{i+1}^j) \quad (4.35)$$

$$u^* = \frac{1}{2} (u_{i-1}^j + u_{i+1}^j) \quad (4.36)$$

4.6.2 Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement

L'équation de quantité de mouvement s'écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = g(S_0 - S_f) \quad (4.37)$$

D'où :

$$\frac{u_i^{j+1} - u^*}{\Delta t} + u^* \frac{u_{i+1}^j - u_{i-1}^j}{2\Delta x} + g \frac{h_{i+1}^j - h_{i-1}^j}{2\Delta x} = g(S_0 - S_f) \quad (4.38)$$

Multiplions les deux membres de l'équation (4.38) par Δt on obtient :

$$u_i^{j+1} - u^* + u^* \frac{\Delta t}{2\Delta x} (u_{i+1}^j - u_{i-1}^j) + g \frac{\Delta t}{2\Delta x} (h_{i+1}^j - h_{i-1}^j) = g\Delta t(S_0 - S_f) \quad (4.39)$$

Par conséquent :

$$u_i^{j+1} = u^* - u^* \frac{\Delta t}{2\Delta x} (u_{i+1}^j - u_{i-1}^j) - g \frac{\Delta t}{2\Delta x} (h_{i+1}^j - h_{i-1}^j) + g\Delta t(S_0 - S_f) \quad (4.40)$$

Où :

$$h^* = \frac{1}{2} (h_{i-1}^j + h_{i+1}^j) \quad (4.41)$$

$$u^* = \frac{1}{2} (u_{i-1}^j + u_{i+1}^j) \quad (4.42)$$

D'après l'équation (2.17) on a :

$$Q = \frac{1}{n} A R_h^{\frac{2}{3}} S_f^{\frac{1}{2}} \quad (4.43)$$

D'où :

$$S_f = \frac{n^2 Q^2}{A^2 R_h^{4/3}} = \frac{n^2 A^2 u^2}{A^2 R_h^{4/3}} = \frac{n^2 u^2}{R_h^{4/3}} \quad (4.44)$$

Avec :

$$R_h = \frac{bh}{b + 2h} \quad (4.45)$$

D'où:

$$(R_h)_i^{j+1} = \frac{bh_i^{j+1}}{b + 2h_i^{j+1}} \quad (4.46)$$

Donc :

$$(S_f)_i^j = \frac{n^2 u_i^j u_i^j}{((R_h)_i^{j+1})^{4/3}} \quad (4.47)$$

4.6.3 Condition de stabilité

La stabilité du schéma numérique de **Lax** est assurée par l'application du critère de (C.F.L) (Courant-Friedrichs-Lewy).

Pour les schémas explicites, cette dernière s'annonce de la façon suivante : **Le pas de temps Δt doit être telle qu'une onde se propageant à une vitesse C ne parcourt pas plus d'un pas d'espace en un pas de temps.** Ce critère se traduit par :

$$\Delta t = \frac{C_n \Delta x}{\max\{|u| + C\}} \quad (4.48)$$

Avec, C est la vitesse de l'onde définie par :

$$c = \sqrt{\frac{g A}{B}} \quad (4.49)$$

C_n : La valeur du nombre de Courant

A : Section transversale de l'écoulement

B : Largeur du fond du canal

La valeur minimale de Δt qui satisfait l'équation est déterminée à la fin de calcul pour une étape de temps donnée, cette valeur est utilisée comme un pas de temps dans le calcul de la prochaine étape.

Notons qu'il est possible d'accroître la précision de la solution en choisissant un pas de discrétisation en temps et en espace plus petit, mais il est moins pénalisant si on réduit seulement le pas de temps.

4.7 Discrétisation des équations de Saint-Venant par un schéma implicite que nous avons proposé

En remplaçant les dérivées partielles dans les équations de Saint Venant par des approximations d'un schéma **implicite centré** données ci-dessous :

1. Pour l'équation de continuité, nous avons utilisé les approximations suivantes:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i^j = \frac{u_{i+1}^j - u_{i-1}^j}{2\Delta x} \quad (4.50)$$

$$\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)_i^{j+1} = \frac{h_i^{j+1} - h_i^j}{\Delta t} \quad (4.51)$$

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)_i^{j+1} = \frac{h_{i+1}^{j+1} - h_{i-1}^{j+1}}{2\Delta x} \quad (4.52)$$

2. Pour l'équation de la quantité de mouvement, nous avons utilisé les approximations suivantes:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i^{j+1} = \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t} \quad (4.53)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i^{j+1} = \frac{u_{i+1}^{j+1} - u_{i-1}^{j+1}}{2\Delta x} \quad (4.54)$$

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)_i^j = \frac{h_{i+1}^j - h_{i-1}^j}{2\Delta x} \quad (4.55)$$

4.7.1 Discrétisation de l'équation de continuité

L'équation de continuité est donnée par :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + h \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (4.56)$$

$$\frac{h_i^{j+1} - h_i^j}{\Delta t} + h_i^j \frac{u_{i+1}^j - u_{i-1}^j}{2\Delta x} + u_i^j \frac{h_{i+1}^{j+1} - h_{i-1}^{j+1}}{2\Delta x} = 0 \quad (4.57)$$

Multiplions les deux membres de l'équation (4.33) par Δt on obtient :

$$h_i^{j+1} - h_i^j + \frac{\Delta t}{2\Delta x} h_i^j (u_{i+1}^j - u_{i-1}^j) + \frac{\Delta t}{2\Delta x} u_i^j (h_{i+1}^{j+1} - h_{i-1}^{j+1}) = 0 \quad (4.58)$$

D'où :

$$-\frac{1}{2} u_i^j h_{i-1}^{j+1} + h_i^{j+1} + \frac{1}{2} u_i^j h_{i+1}^{j+1} = h_i^j \left(1 + \frac{1}{2} u_{i-1}^j - \frac{1}{2} u_{i+1}^j \right) \quad (4.59)$$

4.7.2 Discrétisation de l'équation de la quantité de mouvement

L'équation de quantité de mouvement s'écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = g(S_0 - S_f) \quad (4.60)$$

D'où :

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t} + u_i^j \frac{u_{i+1}^{j+1} - u_{i-1}^{j+1}}{2\Delta x} + g \frac{h_{i+1}^j - h_{i-1}^j}{2\Delta x} = g(S_0 - S_f) \quad (4.61)$$

Multiplions les deux membres de l'équation (4.33) par Δt on obtient :

$$u_i^{j+1} - u_i^j + \frac{\Delta t}{2\Delta x} u_i^j (u_{i+1}^{j+1} - u_{i-1}^{j+1}) + g \frac{\Delta t}{2\Delta x} (h_{i+1}^j - h_{i-1}^j) = g(S_0 - S_f) \quad (4.62)$$

D'où :

$$-\frac{1}{2} u_i^j u_{i-1}^{j+1} + u_i^{j+1} + \frac{1}{2} u_i^j u_{i+1}^{j+1} = \frac{g}{2} (h_{i-1}^{j+1} - h_{i+1}^{j+1}) + u_i^j + g(S_0 - S_f) \quad (4.63)$$

Avec :

$$S_f = \frac{n^2 u^2}{R_h^{4/3}} \quad (4.64)$$

Où :

$$R_h = \frac{bh}{b + 2h} \quad (4.65)$$

D'où :

$$(R_h)_i^{j+1} = \frac{bh_i^{j+1}}{b + 2h_i^{j+1}} \quad (4.66)$$

Donc :

$$(S_f)_i^{j+1} = \frac{n^2 u_i^{j+1} u_i^{j+1}}{((R_h)_i^{j+1})^{4/3}} \quad (4.67)$$

4.8 Conditions initiales et conditions aux limites

4.8.1 Conditions initiales

- En amont du barrage

$$\begin{cases} h_i^0 = \frac{h_0}{L} (x_i - x_0) \\ u_i^0 = 0 \end{cases} \quad (4.68)$$

Avec L est la longueur du barrage.

- En aval du barrage

$$\begin{cases} h_i^0 = 0 \\ u_i^0 = 0 \end{cases} \quad (4.69)$$

4.8.2 Conditions aux limites

- En amont et en aval du barrage

$$\begin{cases} h_0^t = 0 \\ u_0^t = 0 \end{cases} \quad (4.70)$$

- La condition de symétrie (au site du barrage $x = 0$), les conditions ont été définies par **Ritter**, il a proposé la solution suivante : lorsque $t = 0^+$ alors $h = \frac{4}{9}h_0$ [17].

4.9 Organigramme de calcul pour le schéma de Lax

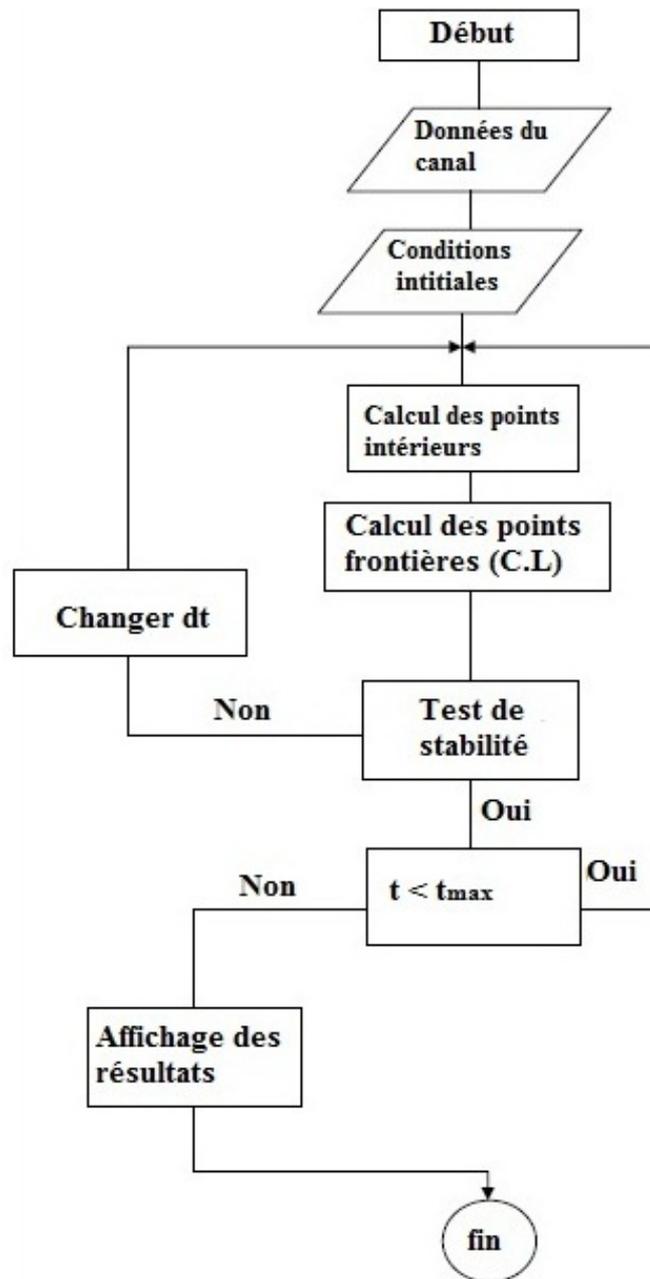


Figure 4.2: Organigramme de calcul

Chapitre 5

Validation Numérique

5.1 Introduction

Nous rappelons que le phénomène de rupture de barrage est régi par les équations unidimensionnels (1D) de Saint-Venant avec terme source donné ci-après:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial hu}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(hu^2 + \frac{gh^2}{2} \right) = gh(S_0 - S_f) \end{cases} \quad (5.1)$$

5.2 Validation du modèle

Pour la validation numérique du modèle (5.1), nous utiliserons les données et les paramètres d'entrée de **Waterways Experiment Station W.E.S**[17].

Il a été développé dans cette station américaine une série d'expériences analysant la rupture de barrage dans un canal horizontal rectangulaire en plexiglas.

Le modèle (5.1) modélise le phénomène de la rupture de barrage dans un canal rectangulaire avec pente et rugosité du fond. Les paramètres d'entrée du programme d'approximation de la solution sont:

- 122 *m* de longueur.
- 1.22 *m* de largeur.
- $S_0 = 0.005$ d'inclinaison.
- 0.305 *m* de hauteur initiale au site du barrage.
- Le nombre de Manning (0.009 et 0.05).
- Le barrage est en milieu du canal.

Dans ce qui suit nous effectuerons plusieurs simulations de la hauteur d'eau et de la vitesse, et en faisant varier les paramètres d'entrée tels que : le pas de la discrétisation spatial, le nombre de Courant, le nombre de Manning et la hauteur initiale.

5.3 Résultats et Interprétations

5.3.1 Profil et analyse de la hauteur d'eau

Les figures (5.1), (5.2), (5.3), (5.4) et (5.5) donnent le profil de la hauteur d'eau mesurée expérimentalement et les hauteurs déterminées numériquement par le schéma de Lax et par le schéma implicite donnés au chapitre précédent, pour les différents points, $x = -30.5 m$, $x = 0 m$ et $x = 24.2 m$ à partir de la position du barrage et pour un nombre de Manning $n = 0.009$ et $n = 0.05$

- Les premiers instants après la rupture du barrage, il se produit une surélévation du niveau d'eau au voisinage du site du barrage (Figure 5.3 et Figure 5.4). Après quelques instants de la rupture, la diminution de la hauteur d'eau est graduellement amorcée.
- Loin du site du barrage ($x = -30.5m$), le niveau d'eau reste constant pendant un certain temps. Quelques instants plus tard, il se produit une diminution de la hauteur d'eau (Figure 5.1 et Figure 5.2).
- Le niveau d'eau dans la partie aval $x = 24.2m$, le niveau d'eau reste constant ($h = 0$). Quelque instants après, il se produit une élévation du niveau d'eau, par la suite au cours du temps, la diminution de la hauteur d'eau est graduelle (Figure 5.3).
- Lorsque le nombre de Manning ou le coefficient de rugosité du lit augmente, il se produit un freinage des particules d'eau, par conséquent la variation de la hauteur d'eau sera plus lente.
- Les courbes obtenues par les trois modèles présentent les mêmes allures aux différentes sections. Cependant ils présentent des décalages plus ou moins importants (le schéma implicite que nous avons proposé présente des décalages importants par rapport au schéma de Lax).

5.3.2 Interprétation des résultats

Les décalages entre les résultats théoriques et expérimentaux (W.E.S), s'expliquent par l'imperfection de la théorie. En effet, pour établir les équations mathématiques, il a fallu poser un certain nombre d'hypothèses simplificatrices. Le développement des équations, l'imposition des conditions aux limites et la discrétisation des équations présentent des erreurs. Tandis que l'expérience intègre la réalité qui régie l'écoulement.

cependant, les courbes tracées à l'aide du schéma de Lax sont proches des résultats de W.E.S.

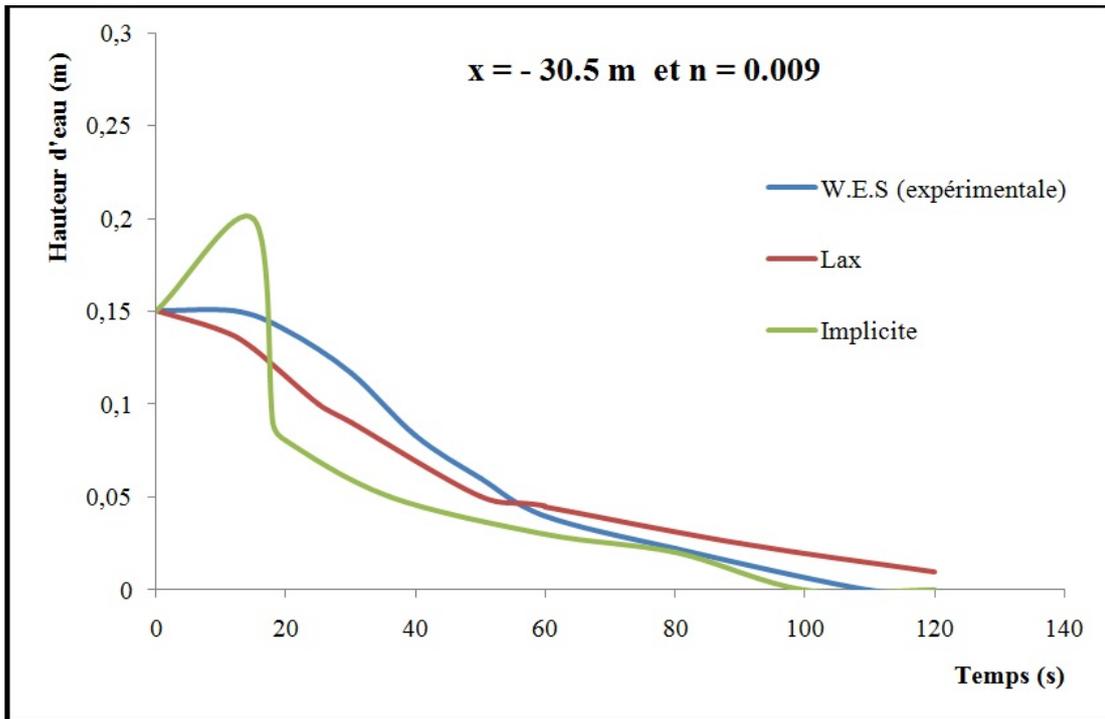


Figure 5.1: Hauteur d'eau en fonction du temps en $x = -30.5m$ et $n = 0.009$

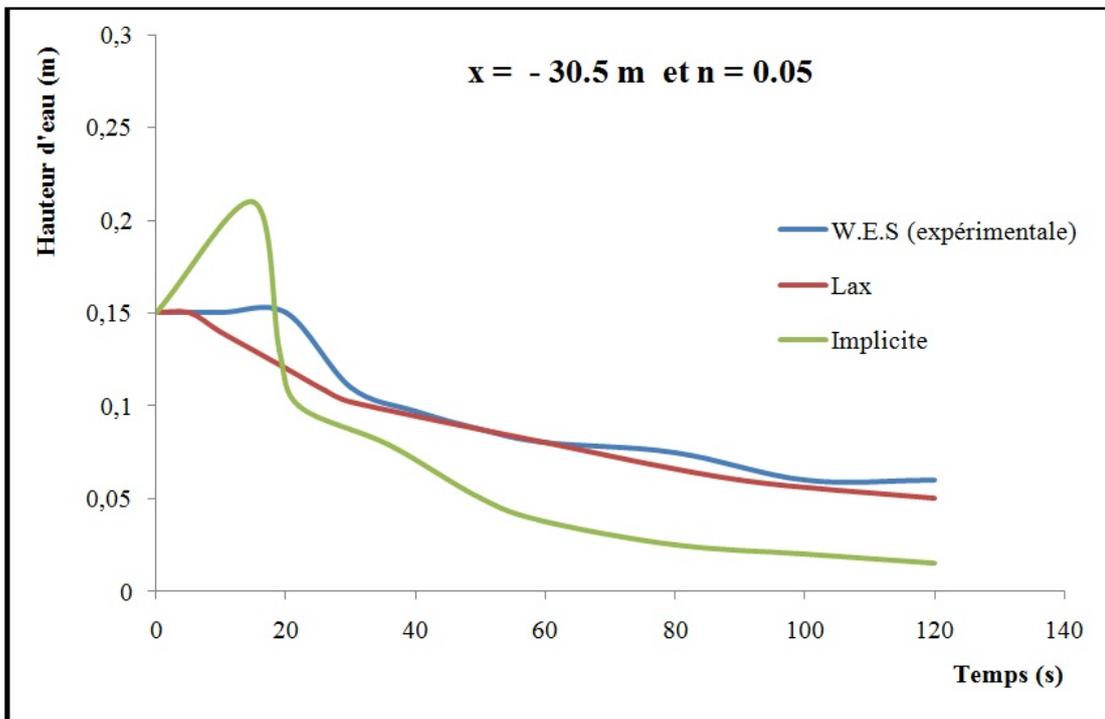


Figure 5.2: Hauteur d'eau en fonction du temps en $x = -30.5m$ et $n = 0.05$

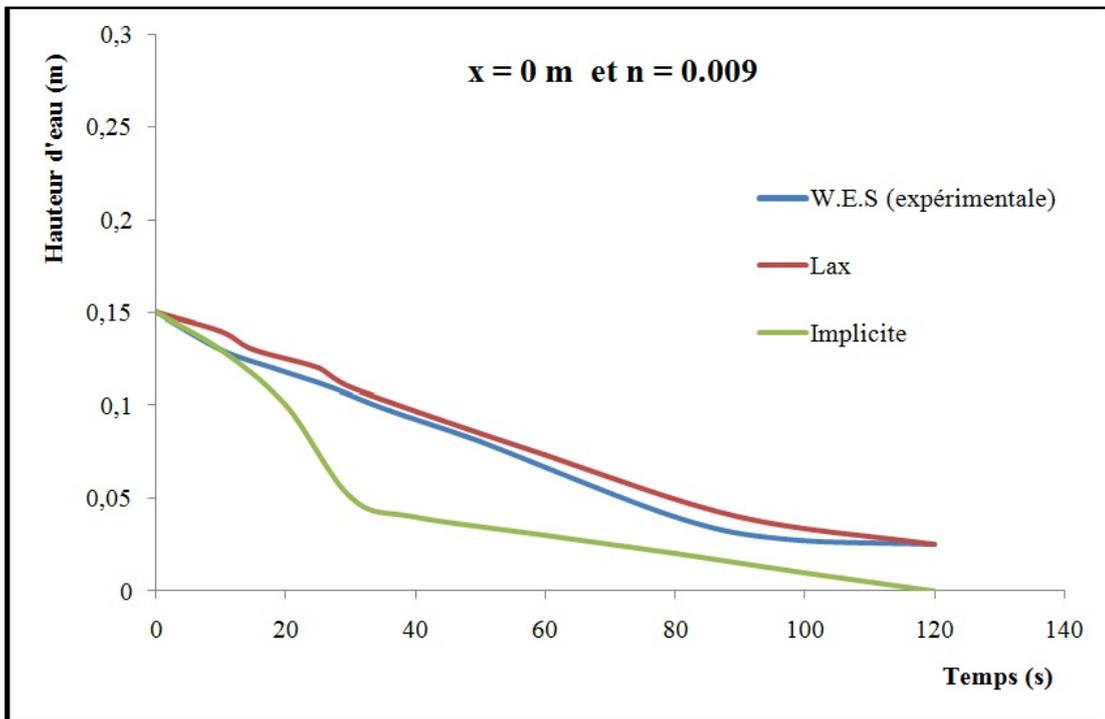


Figure 5.3: Hauteur d'eau en fonction du temps $x = 0m$ et $n = 0.009$

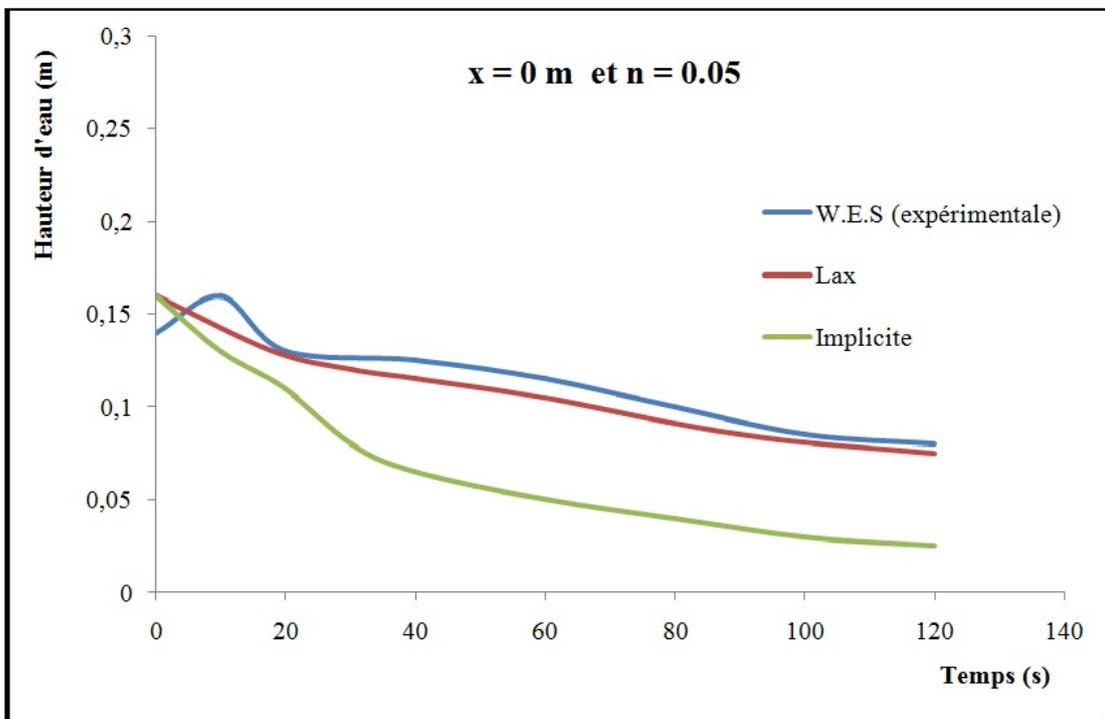


Figure 5.4: Hauteur d'eau en fonction du temps $x = 0m$ et $n = 0.009$

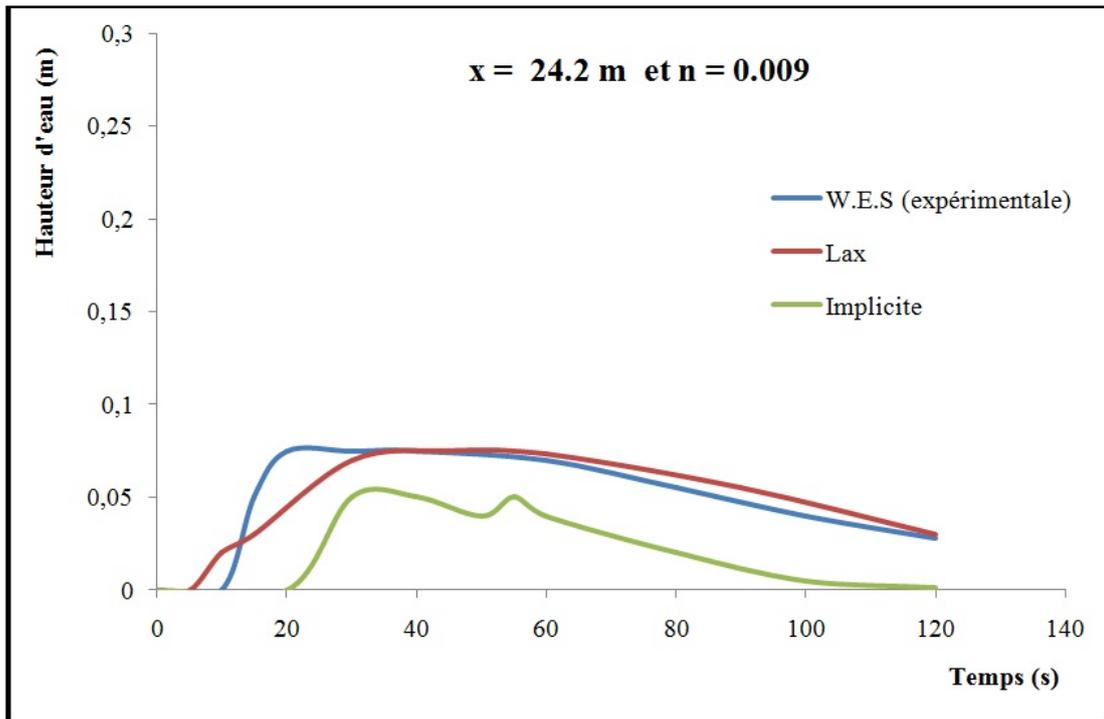


Figure 5.5: Hauteur d'eau en fonction du temps $x = 24.2m$ et $n = 0.009$

5.3.3 Étude du profil des vitesses

Les figures (5.6), (5.7) et (5.8) représentent l'évolution des vitesses d'écoulement d'eau après la rupture à différentes sections.

- L'allure de ces courbes montre que la vitesse augmente le long du canal. Ceci s'explique simplement par l'inclinaison du canal, plus on va vers l'aval, plus la vitesse d'écoulement devient importante. Cependant son augmentation est assez lente en fonction du temps, ce qui est d'ailleurs en commun accord avec la condition de Ritter : "la vitesse dans une section donnée est indépendante du temps" [3].
- L'augmentation brusque de la vitesse en aval est principalement due à l'arrivée du front d'onde sur le lit initialement sec. Par la suite, on constate une variation lente similaire à la section amont.

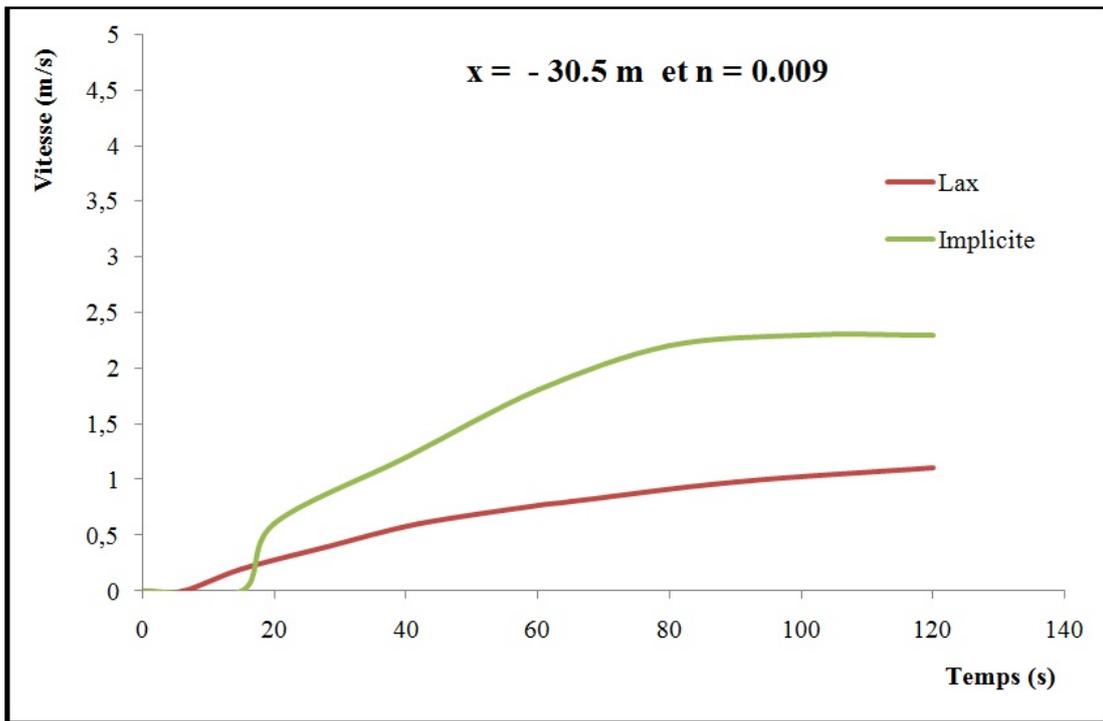


Figure 5.6: Profil de vitesse en $x = -30.5m$ et $n = 0.009$

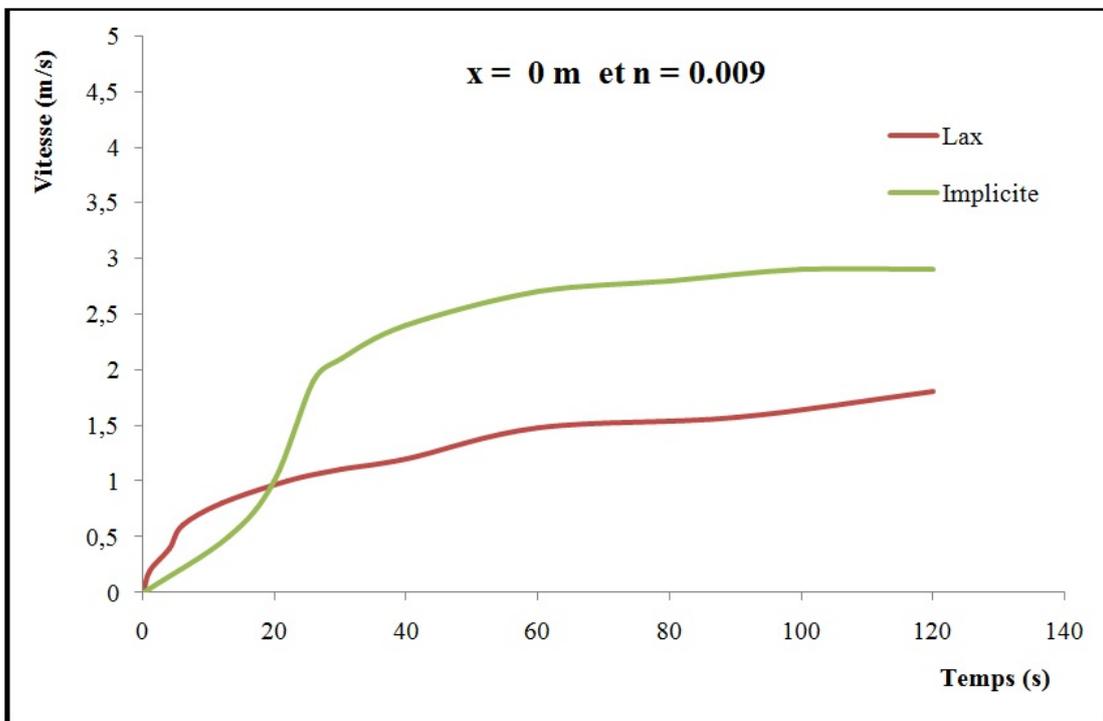


Figure 5.7: Profil de vitesse en $x = 0m$ et $n = 0.009$

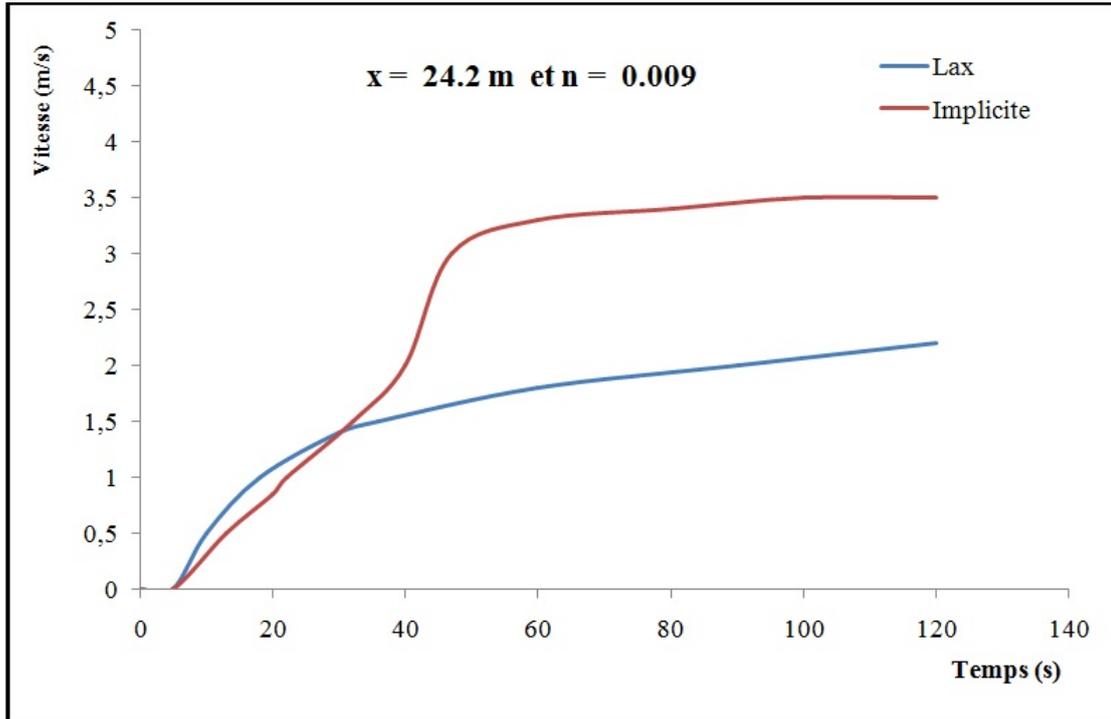


Figure 5.8: Profil de vitesse $x = 24.2m$ et $n = 0.009$

5.4 Effet des différents paramètres sur l'écoulement

Après validation numérique de la solution du système (5.1), par le schéma de Lax, nous allons à présent analyser l'effet des paramètres: Δx , C_n , h_0 .

5.4.1 Effet du pas de la discrétisation spatiale

Dans le but de vérifier si, l'instabilité des résultats peut être liée au pas de discrétisation spatiale, nous nous proposons d'étudier son influence sur deux sections, l'une en amont et l'autre en aval. Les figures (5.9) et (5.10) montrent que l'effet du pas spatial Δx est presque négligeable. Cependant plus il est grand, plus les itérations se font rapidement d'où un gain énorme en temps. Lorsque le pas spatial croît, le pas de temps aussi croît, ce qui fait que le rapport $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ reste presque constant. Les données utilisées sont: $\Delta x = 1$, $\Delta x = 3$ et $\Delta x = 6$, pour deux sections donnée l'une en $x = -19 m$ et l'autre en $x = 17 m$.

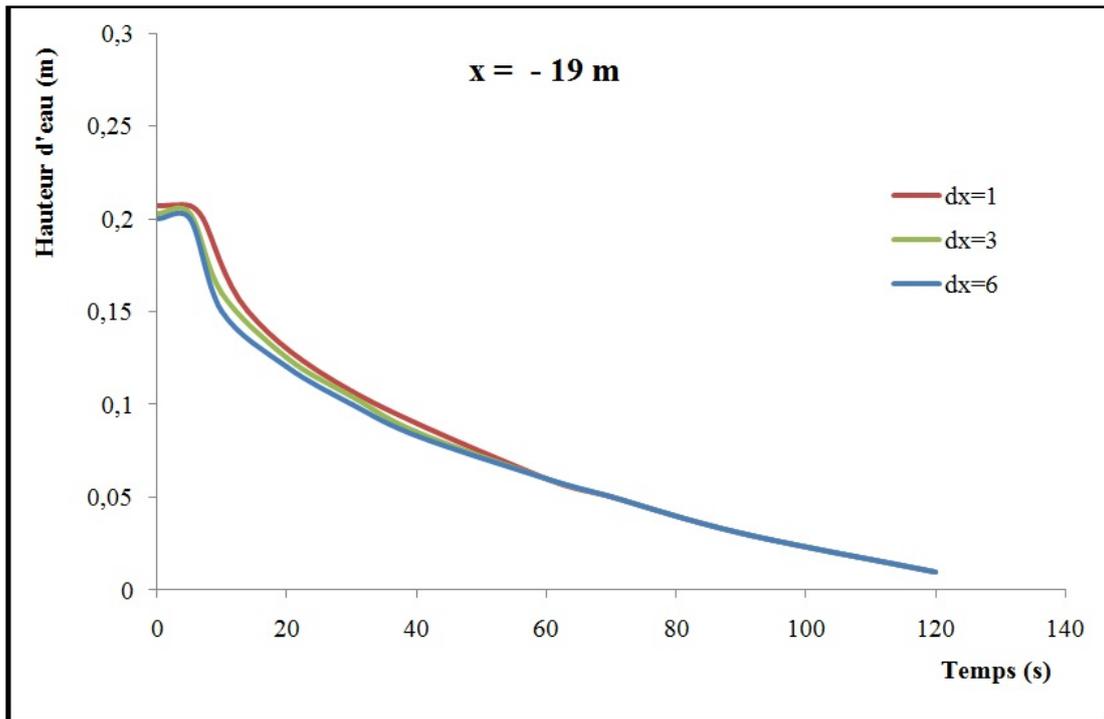


Figure 5.9: Effet du pas spatial

5.4.2 Effet du nombre de Courant

Le nombre de courant joue un rôle très important dans la stabilité des schémas explicites.

Les figures (5.11) et (5.12) montrent que pour une section donnée, plus le nombre de courant est proche de l'unité, plus les résultats ont tendance à s'approcher des résultats expérimentaux. Par ailleurs plus ce nombre augmente, plus les fluctuations sont grandes. Ceci est dû au fait que ce nombre n'intervient que dans la condition de stabilité. Le pas de temps devient alors plus important.

Nous déduisons donc que l'augmentation du pas de temps conduit à d'énormes fluctuations des résultats.

Les données utilisées sont: $C_n = 0.6$, $C_n = 0.95$ et $C_n = 2$, pour deux sections données l'une en amont $x = -19 \text{ m}$ et l'autre en aval $x = 17 \text{ m}$.

5.4.3 Effet de la hauteur initiale

Les figures (5.13) et (5.14) montrent l'effet de la hauteur initiale sur l'écoulement lors d'une rupture brusque et instantanée d'un barrage. Les courbes ne coïncident en aucun moment. Elle gardent la même allure durant tout le temps.

Ceci nous permet d'affirmer tout simplement que si on garde inchangé les autres paramètres, plus la profondeur d'eau est assez élevée, plus le temps de vidange sera lent.

Les données utilisées sont: $h_0 = 0.305 \text{ m}$, $h_0 = 0.6 \text{ m}$ et $h_0 = 1 \text{ m}$, pour deux sections donnée l'une en amont $x = -19 \text{ m}$ et l'autre en aval $x = 17 \text{ m}$.

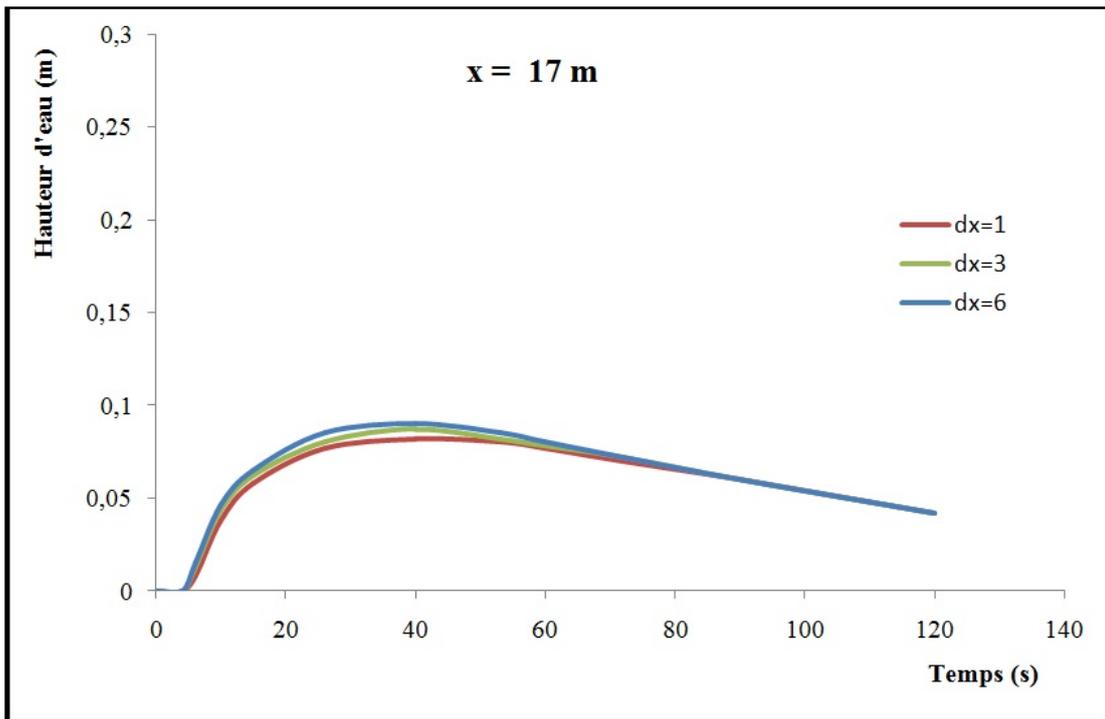


Figure 5.10: Effet du pas spatial

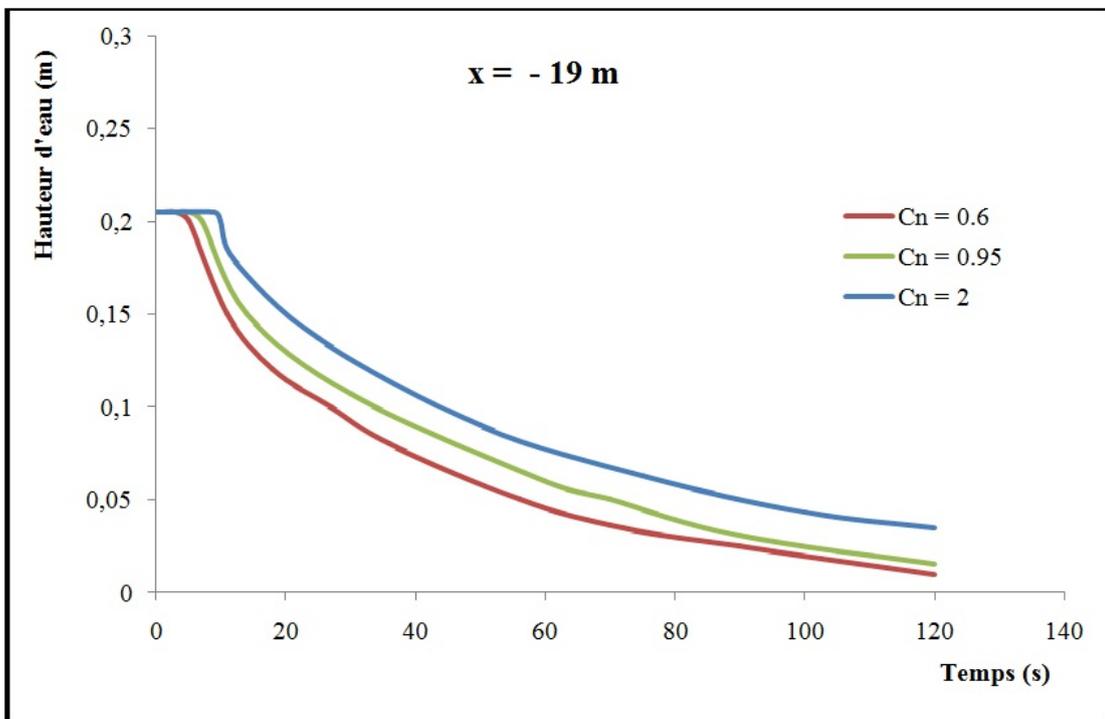


Figure 5.11: Effet du nombre de Courant

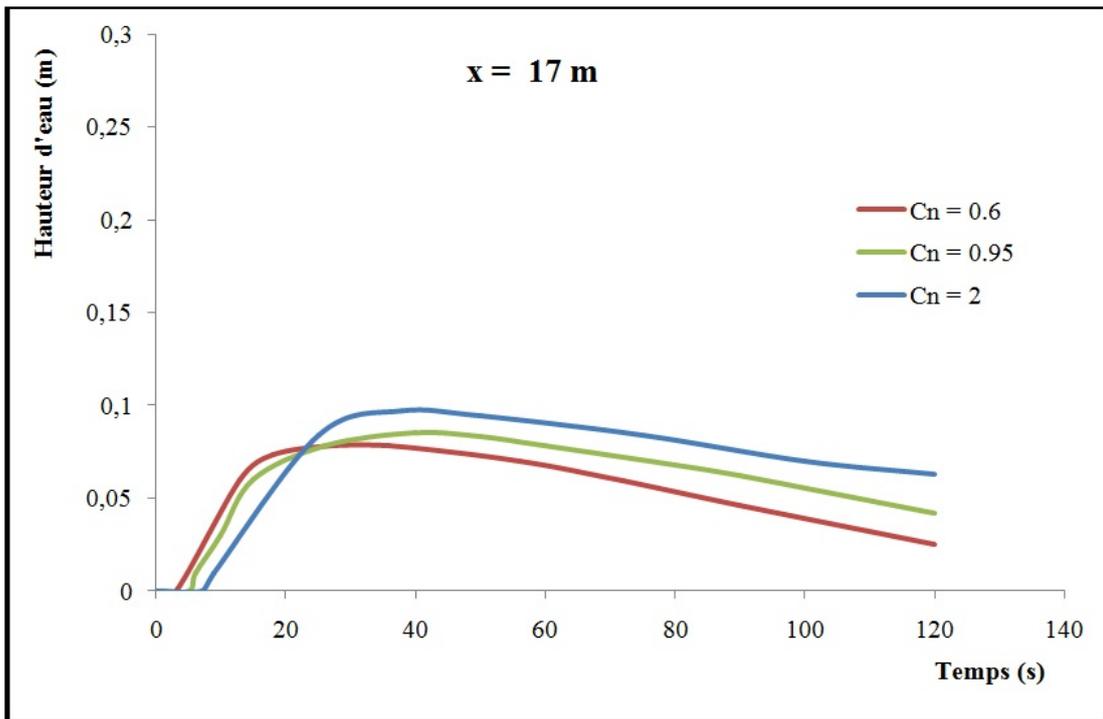


Figure 5.12: Effet du nombre de Courant

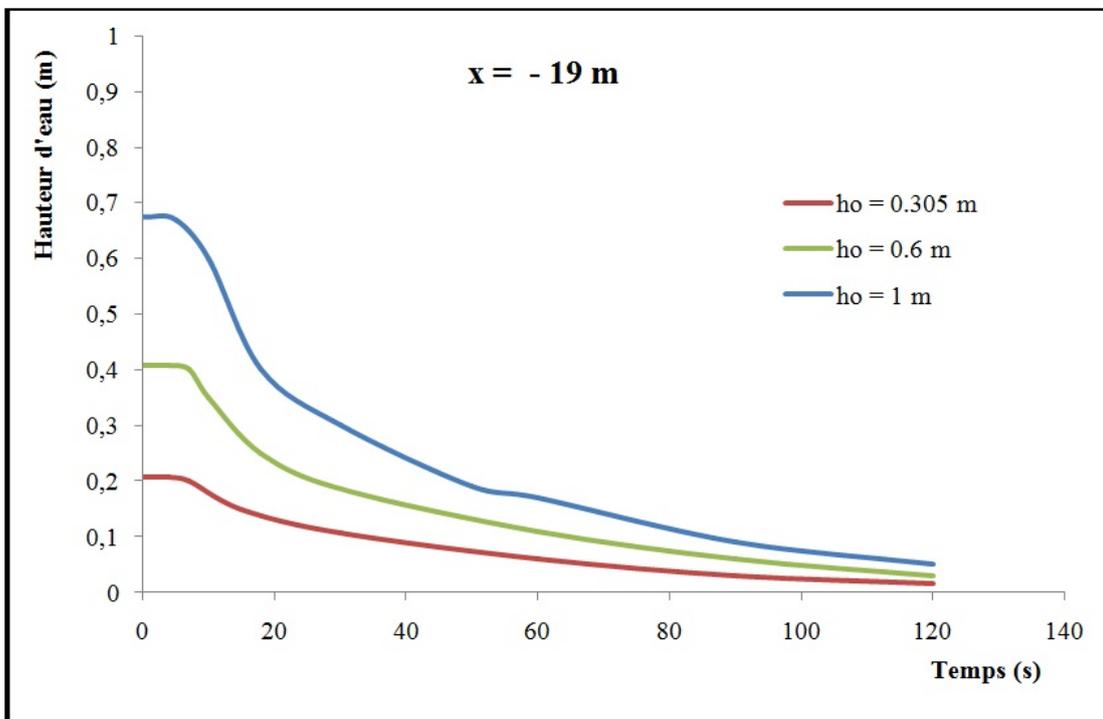


Figure 5.13: Effet de la hauteur initiale

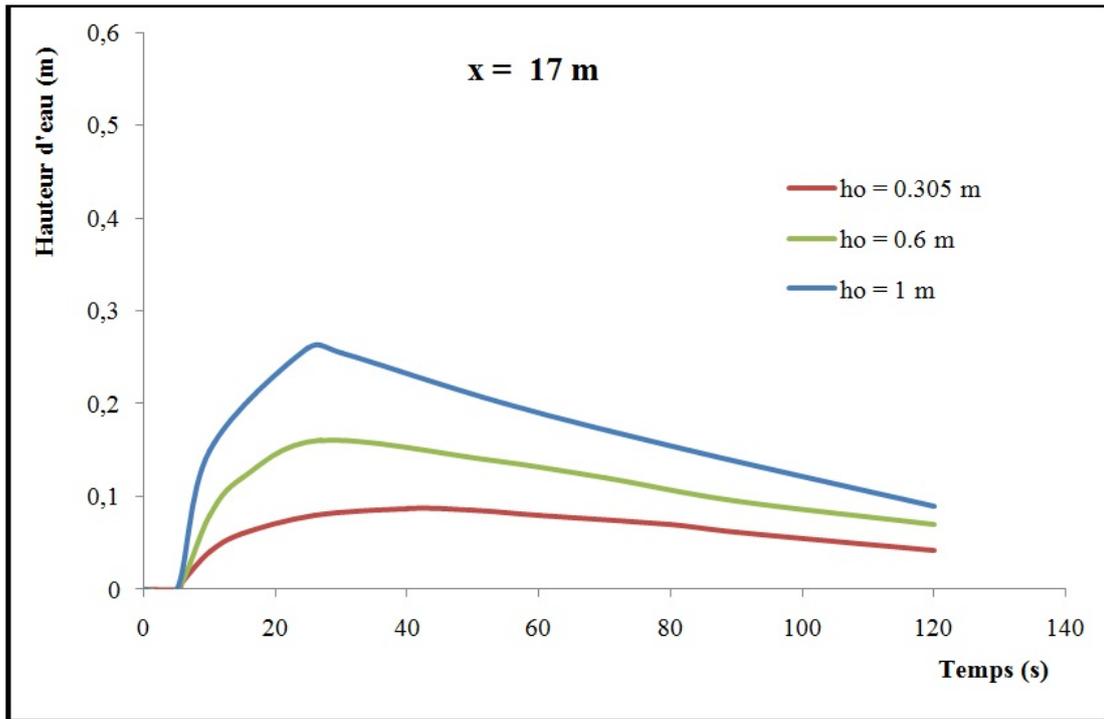


Figure 5.14: Effet de la hauteur initiale

5.5 Conclusion

La validation du modèle a été doublement vérifiée pour deux valeurs du nombre de Manning. Les applications faites dans ce travail concernent les canaux prismatiques rectangulaire. Les analyses effectuées prouvent la fiabilité du modèle de Lax. Après validation, une analyse de l'impact des différents paramètres a été effectuée. Le modèle ou le schéma de Lax est approprié pour l'étude du phénomène de rupture du barrage, par contre le schéma implicite que nous avons proposé donne des résultats moins bons par rapport aux résultats obtenus par le schéma de Lax. A travers cette étude, nous déduisons que pour ce modèle, les meilleurs résultats sont obtenus pour un pas de discrétisation faible et pour un nombre de Courant inférieur à l'unité.

Conclusion générale

Ce travail se veut une modeste contribution à la modélisation des écoulements à surface libre en eaux peu profondes. Ce type de phénomènes est régi par les modèles de Saint-Venant. Ces équations sont déduites, par intégration des équations de Navier Stokes suivant la profondeur, en adoptant certaines hypothèses et approximations simplificatrices. De nos jours, l'approximation numérique des équations de Saint-Venant est d'une très grande importance dans le domaine de la simulation des écoulements en hydrodynamique fluviale et maritime, ainsi que la prédiction de catastrophes naturelles telle que la rupture de barrage.

Le travail présenté dans ce mémoire est relatif à la modélisation du phénomène de rupture de barrage, qui est régi par les équations de Saint-Venant, ainsi qu'à la résolution numérique de ces équations par la méthode des différences finies (schéma de Lax, qui est explicite et un schéma implicite que nous avons proposé). Le but étant de déterminer de manière la plus précise possible le comportement de l'eau (hauteur et vitesse) près du barrage, en amont et en aval directement après la rupture. L'occasion aussi d'analyser l'effet des différents paramètres sur l'écoulement, notamment l'effet du pas de discrétisation, de la hauteur d'eau initiale et l'effet du nombre de Courant.

Vu l'instabilité que les schémas aux différences finies explicites présentent, la condition de Courant Friedrich Lewy (C.F.L) a été utilisée pour assurer la stabilité du schéma de Lax, par contre les schémas aux différences finies implicites sont inconditionnellement stables.

Les résultats obtenus ont montré que :

- L'application du schéma de Lax aux équations de Saint-Venant (rupture de barrage) a donné des résultats proches de ceux obtenus expérimentalement par W.E.S.
- Les meilleurs résultats sont obtenus pour un pas de discrétisation faible et pour un nombre de Courant inférieur à l'unité.
- Le nombre de Courant joue un rôle très important dans la stabilité des schémas explicites.
- Plus le nombre de Courant est proche de l'unité, plus les résultats ont tendance à s'approcher des résultats expérimentaux. Par ailleurs plus ce nombre est grand, plus les fluctuations sont grandes.
- Le schéma implicite proposé donne des résultats moins bons par rapport au schéma de Lax. Le perfectionnement de ce schéma peut faire l'objet d'un autre sujet d'étude.

Références Bibliographiques

- [1] **AMRANE, A. R , AMGHAR, K.** "Etude des écoulements à surface libre brusquement variés en présence d'obstacle", Mémoire de fin d'étude, Université A. Mira, Bejaia, 2000.
- [2] **ARNAUD, D , KHALED, S.** "Cours de l'université Claude Bernard Lyon1".
- [3] **BENATSOU, H , BOUZID, M. K.** "Analyse d'un écoulement instationnaire", Projet de fin d'études, E. N. Polytechnique, Alger, 1992.
- [4] **BERREKSI, A.** "Modélisation et simulation numérique des écoulements non permanents dans des canaux à ciel ouvert". Thèse de doctorat, E.N.Polytechnique d'Alger, 2012. 147pages.
- [5] **BERTRAND, KRAJE WSKI.** " Modélisation des écoulements en réseau d'assainissement", 2006.
- [6] **CARLIER, M.** "Hydraulique générale et appliquées". Eyrolles éditeur. Paris, 1980.
- [7] **CARLIER, M.** "Hydraulique générale et appliquées". Eyrolles éditeur. Paris, 1972.
- [8] **CHANSON, H.**"Environmental Hydraulics of Open Channel Flows", Elsevier Butterworth-Heinemann.
- [9] **CHOW, V.T.** "Open-channel hydraulic", Ed, Eyrolles, Paris.
- [10] **COULOUVRAT, F. , MARCHIANO, R.** "Méthodes numérique en acoustique", Université Pierre et Marie Curie, Paris.
- [11] **FENNEMA, R. J , CHAUDHRY, M. H.** "Simulation of one-dimentional dam-break flows", Journal of Hydraulic Research, Vol. 25, No. 1, pp. 41-51, 1987.
- [12] **GRAF, W. H , ALTINAKAR, M. S.** "Hydraulique fluviale, Tom 2: Écoulement et phénomènes de transport dans les canaux à géométrie simple", Édition Presse polytechnique et Université Romandes, Lausanne, 2000.
- [13] **HANIF,M.C.** "Applied hydraulic transients", Second edition, New York.
- [14] **HUNT, B.** "Une solution sans viscosité de l'onde de rupture d'un barrage", Journal of hydraulic research, Vol. 25, No. 3, pp. 313-326, 7987.

- [15] **IKNI, T.** "Simulation numérique des écoulements à surface libre dans des canaux à géométrie variable en utilisant le schéma de Beam et Warming", Mémoire de magister, Université A. Mira, Bejaia, 2002.
- [16] **LAMAGAT .J. P, Seytoux, H. J. M , ALBERGEL. J.** "Analyse de temps de propagation des crues", Hydro Consult International.
- [17] **TRAORE, S. , DIALO, S.** "Étude d'un écoulement transitoire à surface libre: Onde de rupture d'un barrage", Mémoire de fin d'étude, Université A. Mira, Bejaia, 2001.
- [18] **WALTER, H. G , ALTINAKAR, M. S.** "Hydrodynamique: une introduction", Édition Presse polytechnique et Université Romandes, Lausanne, 1998.
- [19] **ZOUAOUI. D.** "Simulation numérique des écoulements à surface libre avec onde", Projet de fin d'études, E. N. Polytechnique, Alger.