

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université A.MIRA-BEJAIA



Faculté de Technologie  
Département de Génie Mécanique  
Laboratoire de Mécanique, Matériaux et Energétique (L2ME)

**THÈSE**  
**EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME DE**  
**DOCTORAT**

**Domaine : Sciences et Technologies      Filière : Génie Mécanique**  
**Spécialité : Energétique**

Présentée par  
**CHEFFAR Louiza**

*Thème*

**Etude numérique des écoulements pulsés de fluides Newtoniens et Non-Newtoniens thixotropes. Application biomédicale.**

**Soutenue le : 21/05/2023**

**Devant le Jury composé de :**

**Nom et Prénom**

**Grade**

**Mr BERREKSI Ali**

Professeur

Univ. de Bejaia

Président

**Mr BENSLIMANE Abdelhakim**

MCA

Univ. de Bejaia

Rapporteur

**Mr BOUAZIZ Mohamed Nadjib**

Professeur

Univ. de Medea

Examineur

**Mr SAFI Brahim**

Professeur

Univ. de Boumerdes

Examineur

**Mr SAHI Adel**

MCA

Univ. de Bejaia

Examineur

**Année Universitaire : 2022/2023**

## Remerciements

*Je remercie tout d'abord Dieu tout puissant de m'avoir donné le courage, la force et la patience pour accomplir ce travail.*

*Par la suite, Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à mon directeur de thèse Monsieur BENSILIMANE Abdelhakim. Il a toujours été disponible, à l'écoute de mes questions, et s'est toujours intéressé à l'avancée de mes travaux. Les nombreuses discussions que nous avons eues ainsi que ses conseils sont pour beaucoup dans le résultat final de ce travail. Sa capacité d'analyse et son enthousiasme m'ont montré que le monde de la recherche pouvait être un univers passionnant. Enfin, ses nombreuses relectures et corrections de cette thèse ont été très appréciables. Cette thèse lui doit beaucoup. Qu'il soit assuré de ma profonde gratitude.*

*J'adresse aussi mes remerciements les plus sincères au Professeur BERREKSI Ali pour l'honneur qui il m'a fait de présider ce jury de soutenance.*

*J'adresse également mes remerciements les plus chaleureux à monsieur SAHI adel, professeur BOUAZIZ Mohamed Nadjib et professeur SAFI Brahim pour l'intérêt que vous avez bien voulu porter à mon travail en acceptant de faire partie de ce jury.*

*A tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail, qu'ils trouvent ici la traduction de ma profonde reconnaissance.*

## **Dédicaces**

*Je dédie ce travail à :*

*Mes très chers parents. J'espère qu'ils trouveront dans ce travail toute  
ma reconnaissance et tout mon amour.*

*Mes frères et mes sœurs Sofiane, Youcef, Amine, Karima et Linda.*

*Mon très cher mari REDJAL Amer et toute sa famille.*

*Tous mes amis (es).*

## Table de matière

<b>Remerciements</b>	<b>i</b>
<b>Dédicaces</b>	<b>ii</b>
<b>Table de matière</b>	<b>iii</b>
<b>Liste des figures</b>	<b>ix</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>xiv</b>
<b>Nomenclature</b>	<b>xv</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>Chapitre I : Etude bibliographique</b>	<b>6</b>
<b>I.1. Introduction</b> .....	6
<b>I.2. Intérêt et objectif de l'étude</b> .....	6
<b>I.3. Rhéologie du sang</b> .....	7
<b>I.3.1. Composition du sang</b> .....	8
<b>I.3.2. Propriétés rhéologique du sang</b> .....	9
<b>I.3.2.1. Viscosité du sang</b> .....	10
<b>I.3.2.1.1. Taux de cisaillement</b> .....	10
<b>I.3.2.1.2. Hématocrite</b> .....	12
<b>I.3.2.1.3. Déformabilité des hématies</b> .....	12
<b>I.3.2.1.4. Diamètre du tube</b> .....	13
<b>I.3.2.2. Vaisseaux sanguins</b> .....	13
<b>I.3.2.2.1. Artères</b> .....	14
<b>I.3.2.2.2. Artérioles</b> .....	14
<b>I.3.2.2.3. Capillaires</b> .....	15
<b>I.3.2.2.4. Veinules</b> .....	15
<b>I.3.2.2.5. Veines</b> .....	15

<b>I.3.2.3.</b> Pression artérielle .....	16
<b>I.3.2.3.1.</b> Pression systolique ( $P_s$ ).....	16
<b>I.3.2.3.2.</b> Pression diastolique ( $P_d$ ).....	17
<b>I.3.2.3.3.</b> Pression différentielle ( $P_p$ ).....	17
<b>I.3.2.3.4.</b> Pression artérielle moyenne ( $P_m$ ).....	17
<b>I.3.2.4.</b> Débit cardiaque.....	18
<b>I.3.2.5.</b> Fréquence Cardiaque.....	18
<b>I.4.</b> Synthèse bibliographique.....	18
<b>I.4.1.</b> Etude hémorhéologique .....	18
<b>I.4.2.</b> Etude hémodynamique.....	26
<b>I.5.</b> Conclusion .....	37
<b>Chapitre II : Rhéologie des fluides complexes</b>	<b>38</b>
<b>II.1.</b> Introduction .....	39
<b>II.2.</b> Notions fondamentales de la mécanique des fluides.....	39
<b>II.2.1.</b> Equations gouvernantes.....	39
<b>II.2.1.1.</b> Conservation de la masse.....	40
<b>II.2.1.2.</b> Conservation de la quantité de mouvement .....	40
<b>II.2.2.</b> Tenseur des contraintes .....	41
<b>II.2.3.</b> Tenseur des taux de déformation.....	42
<b>II.2.4.</b> Tenseur des taux de rotation.....	43
<b>II.3.</b> Rhéologie .....	44
<b>II.4.</b> Courbe rhéologique.....	44
<b>II.5.</b> Principaux types de comportement .....	45
<b>II.5.1.</b> Comportement newtonien .....	45
<b>II.5.2.</b> Comportement non-newtonien .....	48
<b>II.5.2.1.</b> Fluides non-newtoniens indépendants du temps.....	48

II.5.2.1.1. Fluides rhéofluidifiants ou pseudoplastiques .....	49
II.5.2.1.2. Fluides rhéoépaississants ou dilatants .....	49
II.5.2.1.3. Fluides à seuil.....	50
II.5.2.2. Modèles rhéologiques des fluides indépendants du temps .....	51
II.5.2.2.1. Modèle de la loi de Puissance ou d'Ostwald de Waele.....	51
II.5.2.2.2. Modèle de Carreau .....	52
II.5.2.2.3. Modèle de Cross.....	53
II.5.2.2.4. Modèle d'Ellis .....	54
II.5.2.2.5. Modèle de Bingham.....	54
II.5.2.2.6. Modèle Herschel-Bulkley .....	55
II.5.2.2.7. Modèle de casson .....	56
II.5.2.3. Fluides non-newtoniens dépendants du temps.....	56
II.5.2.3.1. Fluides viscoélastiques.....	57
II.5.2.3.1.1. Viscoélasticité linéaire.....	57
II.5.2.3.1.2. Modèles viscoélastiques linéaire .....	58
II.5.2.3.1.3. Régime dynamique.....	62
II.5.2.3.1.4. Viscoélasticité non-linéaire .....	64
II.5.2.3.1.5. Modèles viscoélastiques non-linéaire .....	64
II.5.2.3.2. Fluides thixotropes .....	66
II.5.2.3.2.1. Modèles thixotropes .....	67
II.6. Conclusion.....	69
<b>Chapitre III : Formulation du problème physique</b>	<b>70</b>
III.1. Introduction .....	71
III.2. Description physique du problème .....	72
III.2.1. Géométrie du problème physique .....	72

<b>III.3.</b> Mise en équation.....	73
<b>III.3.1.</b> Principe de la conservation de la masse.....	73
<b>III.3.2.</b> Principe de la conservation de la quantité du mouvement.....	74
<b>III.4.</b> Formulation mathématique du problème.....	75
<b>III.4.1.</b> Equation de continuité .....	75
<b>III.4.2.</b> Equation de conservation de quantité de mouvement.....	75
<b>III.4.3.</b> Hypothèses simplificatrices .....	75
<b>III.4.4.</b> Ecoulement sanguin pulsé newtonien sous accélération périodique externe .....	76
<b>III.4.4.1.</b> Formulation mathématique dimensionnelle .....	76
<b>III.4.4.2.</b> Formulation mathématique adimensionnelle .....	78
<b>III.4.5.</b> Ecoulement sanguin pulsé thixotrope sous accélération périodique externe .....	79
<b>III.4.5.1.</b> Formulation mathématique dimensionnelle .....	79
<b>III.4.5.2.</b> Formulation mathématique adimensionnelle .....	82
<b>III.4.6.</b> Ecoulement sanguin pulsé thixotrope sous accélération périodique externe et champs magnétique uniforme.....	83
<b>III.4.6.1.</b> Formulation mathématique dimensionnelle .....	84
<b>III.4.6.2.</b> Formulation mathématique adimensionnelle .....	88
<b>III.4.7.</b> Solution analytique de Womersley pour un fluide newtonien .....	90
<b>III.5.</b> Conclusion .....	93
<b>Chapitre IV : Méthode des différences finies</b>	<b>95</b>
<b>IV.1.</b> Introduction.....	96
<b>IV.2.</b> Méthode des différences finies.....	96
<b>IV.3.</b> Principe de résolution.....	97
<b>IV.4.</b> Modélisation mathématique et simulation numérique.....	97
<b>IV.5.</b> Notation indicielle.....	97
<b>IV.6.</b> Maillage (grille de calcul).....	98

IV.7. Développement en série de Taylor .....	99
IV.8. Construction des schémas pour la dérivée d'ordre un et deux .....	99
IV.8.1. Schéma explicite .....	100
IV.8.2. Schéma implicite .....	101
IV.8.3. Schéma de Crank-Nicolson .....	101
IV.8.4. Schéma de Duffor Frankel .....	102
IV.9. Erreur de troncature ou erreur de consistance .....	102
IV.10. Notions de stabilité .....	103
IV.10.1. Stabilité d'un problème physique.....	103
IV.10.2. Stabilité d'un problème mathématique .....	103
IV.10.3. Stabilité d'une méthode numérique .....	103
IV.10.4. Erreurs dues à la discrétisation.....	104
IV.10.5. Convergence.....	104
IV.11. Résolution numérique .....	104
IV.11.1. Discrétisation du problème .....	105
IV.12. Conclusion .....	105
<b>Chapitre V : Résultats et discussion</b>	<b>106</b>
V.1. Introduction .....	107
V.2. Indépendance du maillage .....	107
V.3. Validation de la solution du code de calcul.....	108
V.4. Présents résultats .....	110
V.4.1. Ecoulement sanguin pulsé newtonien sous accélération périodique externe .....	110
V.4.1.1. Paramètres utilisés.....	111
V.4.1.2. contrainte de cisaillement à la paroi.....	112
V.4.1.3. Vitesses adimensionnelle au centre.....	113
V.4.1.4. Profil de vitesse adimensionnelle.....	116

V.4.2. Ecoulement sanguin pulsé thixotrope sous accélération périodique externe .....	117
V.4.2.1. Paramètres utilisés.....	118
V.4.2.2. Contrainte de cisaillement à la paroi.....	119
V.4.2.3. Vitesses adimensionnel au centre .....	122
V.4.2.4. Profil de vitesse.....	124
V.4.3. Ecoulement sanguin pulsé thixotrope sous accélération périodique externe et champs magnétique uniforme.....	126
V.4.3.1. Paramètres utilisés.....	127
V.4.3.2. Contrainte de cisaillement à la paroi.....	128
V.4.3.3. Vitesses adimensionnel au centre .....	129
V.4.3.4. Profil de vitesse.....	131
V.5. Conclusion.....	132
<b>Conclusion générale et perspectives</b>	<b>135</b>
<b>Références bibliographiques</b>	<b>137</b>
<b>Annexe A</b>	
<b>AnnexeB</b>	
<b>Annexe C</b>	

## Liste des figures

<b>Figure I.1.</b> Composition de l'illustration du sang .....	8
<b>Figure I.2.</b> L'évolution schématique de la viscosité en fonction de taux de cisaillement .....	10
<b>Figure I.3.</b> Viscosité du sang en fonction d'hématocrite .....	12
<b>Figure I.4.</b> L'effet de la viscosité apparente du sang sur le rayon du tube .....	13
<b>Figure I.5.</b> Vaisseaux sanguin du système circulatoire.....	14
<b>Figure I.6.</b> Cheminement du sang.....	15
<b>Figure I.7.</b> Pression artérielle systémique.....	16
<b>Figure I.8.</b> Géométrie de l'écoulement .....	20
<b>Figure I.9</b> Géométrie du problème physique .....	21
<b>Figure I.10.</b> Modèle tridimensionnel d'un sous-ensemble du droit ACM .....	22
<b>Figure I.11.</b> Géométrie du problème. ....	23
<b>Figure I.12.</b> Illustration du microcanal sténosé .....	26
<b>Figure I.13</b> Géométrie de l'écoulement .....	27
<b>Figure I.14.</b> Géométrie de l'écoulement dans un vaisseau .....	28
<b>Figure I.15.</b> Géométrie de l'artère cathétérisée .....	29
<b>Figure I.16.</b> Géométrie du modèle de bifurcation tridimensionnel. (a) vue globale ; (b) vue de face à la direction z ; (c) vue de face à la direction y .....	31
<b>Figure I.17.</b> Géométrie d'une sténose axialement non symétrique .....	31
<b>Figure I.18.</b> Géométrie de l'artère sténosée .....	32
<b>Figure I.19.</b> Géométrie de l'artère .....	32
<b>Figure I.20.</b> Géométrie de l'écoulement .....	33

<b>Figure I.21.</b> Schéma d'un écoulement régulier et bidimensionnel d'un fluide thixotrope ou anti-thixotrope dans un canal symétrique à variation lente .....	35
<b>Figure I.22.</b> Écoulement axisymétrique instationnaire d'un fluide thixotrope .....	35
<b>Figure I.23.</b> Schéma décrivant la géométrie d'un tube rétréci .....	36
<b>Figure I.24.</b> Schéma d'un vaisseau sanguin avec sténose .....	37
<b>Figure I.25.</b> Schéma de l'écoulement magnétohydrodynamique du sang à travers une artère poreuse .....	37
<b>Figure I.26.</b> Géométrie du modèle d'écoulement .....	38
<b>Figure II.1.</b> Composantes du tenseur des contraintes .....	41
<b>Figure II.2.</b> Dépendance de la contrainte de cisaillement par rapport au taux de cisaillement (courbe d'écoulement) d'un fluide .....	45
<b>Figure II.3.</b> Cisaillement simple entre deux plaques parallèles .....	46
<b>Figure II.4.</b> Comportement newtonien .....	47
<b>Figure II.5.</b> Rhéogramme des différents comportements. (a) : fluide rhéofluidifiant; (b) : fluide rhéoépaississant ; (c) : fluide à seuil .....	50
<b>Figure II.6.1.</b> L'élément élastique, le ressort.....	58
<b>Figure II.6.2.</b> L'élément visqueux, l'amortisseur.....	58
<b>Figure II.7.</b> Schéma du modèle de Maxwell.....	60
<b>Figure II.8.</b> Schéma du modèle de Kelvin-Voigt.....	61
<b>Figure II.9.</b> L'évolution de $G'$ et $G''$ en fonction de $\omega$ .....	63
<b>Figure III.1.</b> Géométrie du problème physique .....	72
<b>Figure IV.1.</b> Maillage par la méthode des différences finies .....	98
<b>Figure IV.2.</b> Schéma explicite .....	100
<b>Figure IV.3.</b> Schéma implicite .....	100
<b>Figure IV. 1.</b> Schéma de Crank-Nickolson .....	101

**Figure V.1.** Indépendance du profil de vitesse à la taille du maillage :  $B1=6.6$ ,  $B2 = 0$ ,  $H = 0$ ,  $\mu_r = 1$  et  $\omega_r = 1$  à  $t=0.25$  .....108

**Figure V.2.** Comparaison entre la solution obtenue par le schéma aux différences finies et les résultats existants de Womersley [28] : **a)** Profils de vitesse adimensionnelle et **b)** Vitesse au centre adimensionnelle.....109

**Figure V.3.** Contrainte de cisaillement à la paroi adimensionnelle en fonction du temps adimensionnel : **a)** Effet de la constante adimensionnelle  $\alpha$  et gradient de pression  $B1$ . **b)** Accélération du corps  $B2$ . **c)** Rapport de pression. **d)** Fréquence d'accélération périodique externe  $f_b$ . .....112

**Figure V.4.** Vitesse adimensionnelle au centre du tube à  $r=0$  en fonction du temps adimensionnel : **a)** Effet de la constante adimensionnelle  $\alpha$  et gradient de pression  $B1$ . **b)** Accélération du corps  $B2$ . **c)** Rapport de pression. **d)** Fréquence d'accélération périodique externe  $f_b$ . .....115

**Figure V.5.** Profils de Vitesse adimensionnelle en fonction du rayon adimensionnel : **a)** Effet de la constante adimensionnelle  $\alpha$  et gradient de pression  $B1$ . **b)** Accélération du corps  $B2$ . **c)** Rapport de pression. **d)** Fréquence d'accélération périodique externe  $f_b$  .....116

**Figure V.6.** Contrainte de cisaillement à la paroi adimensionnelle en fonction du temps adimensionnel : **a)** Effet du comportement non newtonien ( $\mu_r$ ) et du gradient de pression ( $B1$ ), **b)** Accélération du corps ( $B2$ ), **c)** Rapport de pression. **d)** Fréquence d'accélération périodique externe  $f_b$ . .....20

**Figure V.7.** Vitesse au centre adimensionnelle ( $r = 0$ ) en fonction du temps adimensionnel: **a)** Effet du comportement non newtonien ( $\mu_r$ ) et du gradient de pression ( $B1$ ), **b)** Accélération du corps ( $B2$ ), **c)** Rapport de pression. **d)** Fréquence d'accélération périodique externe  $f_b$ .....123

**Figure V.8.** Profils de vitesse adimensionnelle en fonction de la position radiale adimensionnelle :**a)** Effet du comportement non newtonien ( $\mu_r$ ) et du gradient de pression ( $B1$ ), **b)** Accélération du corps ( $B2$ ), **c)** Rapport de pression. **d)** Fréquence d'accélération périodique externe  $f_b$ . .....125

**Figure V.9.** Contrainte de cisaillement à la paroi adimensionnelle en fonction du temps adimensionnel : **a)** Effet du comportement non newtonien ( $\mu_r$ ), **b)** Effet de l'accélération du corps (B2) et **c)** Effet du champ magnétique (H). .....128

**Figure V.10.** Vitesse au centre adimensionnelle en fonction du temps adimensionnel : **a)** Effet du comportement non newtonien ( $\mu_r$ ), **b)** Effet de l'accélération du corps (B2) et **c)** Effet du champ magnétique (H). .....130

**Figure V.11.** Profils de vitesse adimensionnelle en fonction du rayon adimensionnel : **a)** Effet du comportement non newtonien ( $\mu_r$ ), **b)** Effet de l'accélération du corps (B2) et **c)** Effet du champ magnétique (H). .....131

## **Liste des tableaux**

<b>Tableau V.1.</b> Paramètres utilisés dans le cadre de la première étude .....	111
<b>Tableau V.2.</b> Paramètres utilisés dans le cadre de la seconde étude .....	119
<b>Tableau V.3.</b> Paramètres utilisés dans le cadre de la troisième étude .....	127

## Nomenclature

Symboles	Définition	Unité (SI)
A	Surface	m <sup>2</sup>
A <sub>g</sub>	L'amplitude de l'accélération du corps	-
B	Champ magnétique	T
B <sub>0</sub>	Champ magnétique uniforme	T
B <sub>1</sub>	Champ magnétique induit	T
C1, C2, C3	Constantes d'intégrations	-
E	Champ électrique	V.m <sup>-1</sup>
F	Forces	N
f <sub>b</sub>	Fréquence de l'accélération du corps	Hz
f <sub>p</sub>	Fréquence de gradient de pression	Hz
G	Module de Young	Pa
G'	Module de conservation	Pa
G''	Module de perte	Pa
G*	Module complexe	-
$\bar{I}$	Tenseur unitaire	-
J	Densité du courant électrique	A.m <sup>-2</sup>
J'	Complaisance élastique du ressort	Pa <sup>-1</sup>
J <sub>0</sub>	Fonction de Bessel d'ordre-zéro de 1ère espèce	-
k	Consistance	-
R	Rayon	m
p	Pression	Pa
P <sub>0</sub>	Pression systolique	Pa
P <sub>1</sub>	Pression diastolique	Pa
$\vec{V}(u_x, v_y, w_z)$	Vecteur vitesse en coordonnée cartésienne	-
$\vec{V}(u, v, w)$	Vecteur vitesse en coordonnée cylindrique	-
Y <sub>0</sub>	Fonction de Bessel d'ordre-zéro de 2ème espèce	-

## Symboles grecs

$\varphi$	L'angle de déphasage	°
$\gamma$	Déformation	-
$\kappa_a$	Taux de rétablissement (accumulation)	s <sup>-1</sup>
$\kappa_b$	Taux de décomposition	s <sup>-1</sup>
$\dot{\gamma}$	Taux de déformation	s <sup>-1</sup>
$\lambda$	Temps de relaxation	s
$\lambda_r$	Temps de retardation	s
$\mu$	Viscosité dynamique	Pa.s
$\mu_0$	Viscosité à faible taux de cisaillement (minimale)	Pa.s
$\mu_\infty$	Viscosité à grand taux de cisaillement (maximale)	Pa.s
$\nu$	Viscosité cinématique	m <sup>2</sup> .s <sup>-1</sup>
$\rho$	Masse volumique	kg.m <sup>-3</sup>

$\sigma$	Tenseur de contrainte de Cauchy	Pa
$\tau_0$	Contrainte seuil	Pa
$\mu_m$	Perméabilité magnétique	H.m <sup>-1</sup>

### **Indices et exposants**

a	Amortisseur
r	Ressort

### **Groupement adimensionnelle**

H	Nombre de Hartmann
$\xi$	Nombre de Womersley

# **Introduction générale**

## **Introduction générale**

Dans la vie quotidienne, nous rencontrons dans l'environnement qui nous entoure, une variété de fluides qui peuvent être identifiés les uns des autres en fonction de la façon dont ils répondent aux sollicitations extérieures. Les fluides newtoniens et les fluides non-newtoniens, deux classes majeures, ont été distingués par l'observation de leurs propriétés.

Un fluide newtonien, tels que l'eau ou l'huile, qui s'écoule avec le moins d'effort possible et maintient une résistance constante à l'écoulement (mesurée par sa viscosité), quelles que soient les variations de l'effort appliqué. En d'autres termes plus précis, ces fluides présentent une relation linéaire entre la contrainte de cisaillement et le taux de cisaillement, et le seul facteur de proportionnalité du fluide en question est sa viscosité. Toute déviation de ces règles est le signe d'un comportement non-newtonien.

Un fluide non newtonien présente une viscosité qui n'est plus constante à température et pression données, mais dont la courbe d'écoulement (contrainte de cisaillement en fonction du taux de cisaillement) est non linéaire ou ne passe pas par l'origine. Dans des circonstances appropriées, la viscosité dépend non seulement des conditions d'écoulement (géométrie, taux de cisaillement, etc.), mais également de l'histoire cinématique de l'élément fluide considéré. La description de ce comportement et leur interprétation en relation avec la structure microscopique du fluide constitue la discipline appelée rhéologie.

La rhéologie, définie comme la science de la déformation, est aujourd'hui reconnue comme un domaine d'étude scientifique important. Le comportement non newtonien et la rhéologie sont des sujets essentiellement interdisciplinaires par nature, et dont les domaines d'application sont également très vastes. La rhéologie fait appel à la chimie, à la physique, à la mécanique, aux mathématiques et à la biologie, qui lui fournissent des instruments de base, et se montre utile à chacune de ces disciplines.

La simulation numérique est aujourd'hui une technique très puissante qui couvre un large éventail d'applications industrielles et non-industrielles. Cette technique offre tous les avantages de la logique plus rapide, meilleure et moins coûteuse. La simulation numérique sert à étudier le fonctionnement et les propriétés d'un système et à en prédire l'évolution. Autrement dit, la simulation numérique permet de reproduire sur un ordinateur un phénomène physique complexe dont on souhaite étudier l'évolution. Elle repose sur la programmation de

modèles théoriques ou mathématiques, qui sont adaptés aux moyens numériques. Ces simulations numériques sont devenues incontournables pour la modélisation des systèmes naturels en physique, chimie et biologie pour lesquels les expériences sont difficiles, coûteuses, voire impossibles (*in vivo*).

Dans le cadre de l'étude des problèmes physiques tels que les écoulements de fluides newtoniens et non-newtoniens et leurs applications à l'écoulement sanguin; la modélisation mathématique est fondée sur les équations de conservation de la mécanique des fluides associées à celles de la conservation de la masse et de la conservation de la quantité de mouvement. Leurs résolutions sont rendues possibles grâce à l'utilisation de méthodes numériques appropriées au problème considéré. Parmi les méthodes les plus utilisées en, on citera notamment les différences finies (MDF), les éléments finis (MEF) et les volumes finis (MVF). Contrairement à la méthode des différences finies qui met en jeu des approximations des dérivées, les méthodes des volumes finis et des éléments finis exploitent des approximations d'intégrales. Ces différentes méthodes sont à l'origine de plusieurs programmes de calcul.

L'objet de cette thèse s'inscrit dans le cadre de la modélisation numérique et analytique de fluides newtoniens et non-newtoniens et leurs applications aux écoulements pulsés sanguins, qui font l'objet de larges investigations tant sur le plan expérimental que numérique. On s'est intéressé aux effets de certains facteurs dont le gradient de pression oscillant, le comportement du fluide (sang), l'accélération périodique externe et le champ magnétique. La connaissance approfondie ainsi que le contrôle de ce genre d'écoulement s'avère indispensables dans la maîtrise des principaux paramètres. L'étude des écoulements pulsés (périodique) est loin d'être nouvelle, car ces écoulements intéressent de très nombreux domaines tel que le domaine médical particulièrement le traitement des vaisseaux sanguins, afin d'appliquer les lois de la mécanique des fluides au mouvement sanguin. Pour cela nous avons élaboré un programme de calcul utilisant la méthode des différences finies permettant la résolution des équations aux dérivées partielles (EDP). Ceci en raison de l'importance de ces écoulements dans la biomécanique. En effet, trois études distinctes sont explorées, la première est dédiée à l'analyse théorique de l'écoulement pulsé sanguin dans les grands vaisseaux qui se comporte d'une manière newtonienne. La seconde concerne l'écoulement pulsé sanguin d'un fluide non newtonien de type thixotrope en présence d'une accélération périodique externe, alors que la troisième porte sur l'étude de l'écoulement sanguin développé

sous l'influence d'un champ magnétique transversal uniforme et une accélération périodique externe.

Le manuscrit de cette thèse est constitué de 5 chapitres :

Le premier présente une synthèse bibliographique des principaux travaux théoriques, expérimentaux et numériques traitant les écoulements sanguins pulsés, en absence ou en présence des effets de l'accélération périodique et du champ magnétique dans les artères, ainsi que les propriétés rhéologique générales du sang et les différentes géométries des vaisseaux sanguins.

Le second chapitre décrit l'ensemble de notions de base en mécanique des fluides, et de même un rappel sur la rhéologie et les différents modèles lois de comportement.

Le troisième chapitre est dédié à l'illustration et la description de différentes études appliquées aux écoulements pulsés sanguins. En effet, trois études distinctes sont explorées, la première est dédiée à l'étude de *l'écoulement sanguin pulsé newtonien sous accélération périodique externe*. La seconde concerne l'étude de *l'écoulement sanguin pulsé thixotrope sous accélération périodique externe*. Alors que la troisième porte sur l'étude de *l'écoulement sanguin pulsé thixotrope sous accélération périodique externe et champ magnétique uniforme*.

Le quatrième chapitre est consacré à la présentation de la méthode des différences finies adoptée pour la discrétisation des différentes équations émanant des différentes modélisations.

Le dernier chapitre illustre les interprétations des différents résultats numériques obtenus pour chacune des trois applications ciblées.

Nous terminerons par une conclusion générale.

**Chapitre I :**  
**Etude bibliographique.**

# Chapitre I

## Etude Bibliographique

### I.1. Introduction

Dans ce chapitre, les motivations et les principaux objectifs de cette thèse ont été présentées, afin d'apporter une meilleure compréhension de l'hémodynamique et l'hémorhéologie relatif aux écoulements sanguins, dans laquelle l'intérêt de la présente étude a été introduit. On s'intéresse aussi à exposer les propriétés rhéologique générales du sang ainsi que les différentes géométries des vaisseaux sanguins et les différentes forces mises en jeu dans les écoulements sanguins.

Ensuite, une étude bibliographique sur les principaux travaux théoriques, expérimentaux et numériques qui ont été réalisés pour l'étude des écoulements sanguins pulsés, en absence ou en présence des effets de l'accélération périodique et du champ magnétique dans les artères a été exposée.

Ce chapitre est séparé en deux parties, dont la première est consacrée à une étude hémorhéologique où on s'intéresse à l'application des propriétés rhéologiques du sang, qui ont été considérées classiquement par les scientifiques comme étant de l'étude de la viscosité du sang. La deuxième partie est réservée à une étude hémodynamique où on s'intéresse à l'application des lois de la mécanique des fluides au mouvement sanguin.

### I.2. Intérêt et objectif de l'étude

Les maladies cardiovasculaires représentent la première cause de décès dans le monde, étant responsables d'environ un décès sur trois [1]. Selon les dernières statistiques, aux États-Unis, environ 92,1 millions d'adultes vivent avec une forme de maladie cardiovasculaire, avec un coût total pour les soins de santé et la perte de productivité estimés à 329,7 milliards de dollars par an [2]. L'Algérie n'est pas épargnée, les maladies cardiovasculaires sont la première cause de mortalité avec un taux de 34% par an selon les chiffres de l'Institut National de la Santé Publique (INSP). Plus de 20% de ces décès sont dus à l'athérosclérose causée par l'hypercholestérolémie, un des facteurs de risque majeurs des maladies cardiovasculaires [3]. C'est ce qui explique l'énorme intérêt et les nombreux travaux de recherche portant sur la circulation sanguine, témoignage de nombreux ouvrages, même récents, qui traitent de ce sujet [4-6]. Les évolutions technologiques dans le domaine

cardiovasculaire ont été nombreuses depuis 1960 et la biomécanique a toujours joué un rôle central dans ces évolutions. Cependant, les évolutions de ces dernières années dans la simulation numérique, en biomatériaux et en biomécanique ouvrent la voie à de remarquables améliorations dans le dépistage et le traitement des patients, plaçant l'ingénierie dans la prise de décision en médecine et en chirurgie vasculaires et cardiaques. Le but de cette thèse s'inscrit dans le cadre d'une investigation numérique de l'écoulement sanguin instationnaire dans les artères compte tenu de sa caractéristique thixotrope entraînée par un gradient de pression oscillant, en présence d'accélération du corps et d'un champ magnétique uniforme. Ceci est très pertinent pour explorer davantage les méthodes de contrôle hémodynamique dans les artères malades.

L'objectif principal est de développer des méthodes et des outils numériques utiles dans le domaine de la rhéologie sanguine pour la communauté de la biomécanique. Cela pourrait être un enjeu important pour le traitement de certaines pathologies sanguines comme les sténoses artérielles, les anévrismes, l'athérosclérose et de présenter des bases scientifiques qui permettent de comprendre les enjeux de demain de la biomécanique cardiovasculaire.

### **I.3. Rhéologie du sang**

La rhéologie répond à la question de savoir comment un milieu continu réagit sous l'influence de forces extérieures. Cette partie traitera du comportement du sang lors de son écoulement dans les vaisseaux sanguins.

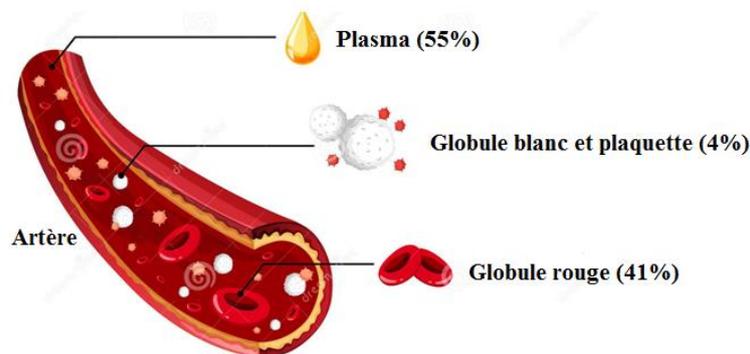
Le sang doit circuler au-dessus d'un taux limite pour pouvoir effectuer son travail de manière suffisamment efficace pour maintenir l'organisme en bonne santé. Ce taux de circulation est déterminé par la pression motrice générée par le cœur, par la résistance géométrique offerte par le système vasculaire et par les propriétés d'écoulement du sang.

Un des objectifs de la rhéologie du sang est l'analyse des effets directs que de nombreuses substances ont sur les propriétés mécaniques du sang, puis l'étude des conséquences que ces modifications ont sur les écoulements sanguins. Les cliniciens et les physiologistes, et donc les hydrodynamiciens, doivent commencer leur analyse par l'étude de ces propriétés d'écoulement du sang. Avant de les classer, décrivons brièvement les principales caractéristiques du sang.

### I.3.1. Composition du sang

Le sang est un tissu liquide qui circule à travers les vaisseaux sanguins. Les principaux composants du sang sont représentés dans la figure (I.1):

- le plasma (qui constitue environ 55% du volume sanguin),
- les globules rouges ou érythrocytes (environ 41% du volume sanguin),
- les globules blancs ou leucocytes,
- les plaquettes (ensemble, moins de 1% du volume sanguin).



**Figure I.1.** Composition de l'illustration du sang [7].

**-Plasma :** Le plasma représente la partie liquide du sang. Ce liquide est principalement composé d'eau (90%). En plus de l'eau, le plasma contient : Des protéines plasmatiques : albumine, protéines de la coagulation, les immunoglobulines correspondant aux anticorps, Des substances organiques : sodium, calcium, potassium, des substances inorganiques : hormones, nutriments.

**-Globules rouges ou hématies ou érythrocytes :** Sont les cellules impliquées principalement dans le transport de l'oxygène et du dioxyde de carbone. Les érythrocytes ne peuvent vivre qu'environ 120 jours dans la circulation. La taille des Globules Rouges (environ 8  $\mu\text{m}$ ) est légèrement supérieure à celle de certains petits capillaires. Lorsque le nombre de globules rouges s'élève au-dessus de la normale, la viscosité du sang augmente et la circulation sanguine peut ralentir. Inversement, lorsque le nombre d'érythrocytes baisse au-dessous de la normale, le sang s'éclaircit et circule rapidement.

**-Globules blancs ou leucocytes :** Ont un rôle de protection du corps contre l'invasion de microorganismes (composants cellulaires du système immunitaire de l'organisme). Il existe

cinq types de globules blancs : les neutrophiles (cellules phagocytaires circulantes), les lymphocytes (qui activent la production d'anticorps et tuent les cellules infectées), les basophiles (qui produisent de l'histamine en réponse à une infection) et les cellules), les monocytes (qui sont des macrophages qui monocytes (qui sont des macrophages tissulaires), et les éosinophiles (qui deviennent actifs dans les infections parasitaires). Ils sont beaucoup moins nombreux que les érythrocytes. Ainsi leur présence, du point de vue rhéologique, a peu d'importance dans les conditions physiologiques normales.

- **Plaquettes ou thrombocytes** : Interviennent dans le phénomène de coagulation sanguine et constituent 0,4% du volume sanguin. Les plaquettes ne sont pas des cellules complètes, mais des petits fragments de cellules. Une diminution du nombre de plaquettes entraîne des problèmes de coagulation du sang.

### **I.3.2. Propriétés rhéologiques du sang**

Avant d'analyser les caractéristiques d'un écoulement d'un fluide, il est indispensable de connaître ces propriétés rhéologiques. Le sang est une suspension très concentrée qui se dilue par cisaillement, ce qui signifie que l'augmentation du taux de cisaillement, qui dépend du rayon du vaisseau, entraîne une diminution de la viscosité.

Le comportement rhéologique du sang est étroitement lié au comportement des globules rouges. Ce comportement est newtonien quand les contraintes visqueuses sont assez fortes, mais il faut aussi que l'échelle des longueurs ne soit pas quelconque, ainsi le diamètre des conduites doit être bien plus grand que celui des globules rouges.

Il est maintenant bien établi que le sang se comporte comme un fluide non newtonien. L'écart par rapport à un fluide classique se manifeste de façon différente selon le régime d'écoulement.

#### ***I.3.2.1. Viscosité du sang***

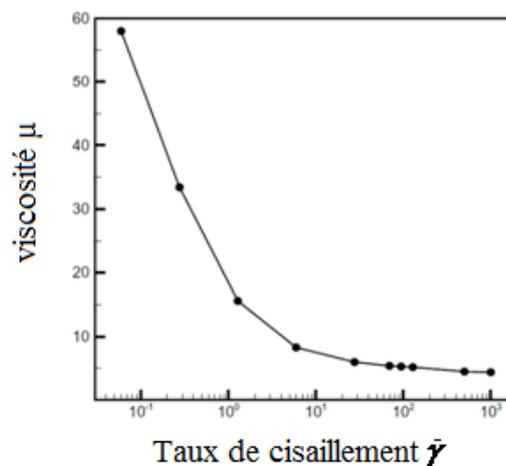
La viscosité du sang est l'une des propriétés du sang qui affecte le travail nécessaire pour faire circuler le sang dans les artères. Dans cette section, nous parlerons d'une technique plus précise pour décrire la viscosité du sang, qui explique certaines des caractéristiques rhéologiques du sang. Le sang est un fluide non newtonien, ce qui signifie que la viscosité du sang n'est pas une constante par rapport au taux de déformation par cisaillement. En plus de la vitesse de déformation, la viscosité du sang dépend également de la température et du

pourcentage volumique de sang constitué de globules rouges. La viscosité du sang est comprise entre 0,003 et 0,006 [Pa.s].

La viscosité du sang est une propriété dynamique, les paramètres hémorhéologique influençant la viscosité du sang sont : le taux de cisaillement, l'hématocrite, la température, la déformabilité des hématies, le diamètre du tube et les conditions d'écoulement et cela d'autant plus que le sang n'est pas un fluide homogène.

### ***1.3.2.1.1. Taux de cisaillement***

Le sang est un fluide non-newtonien, rhéofluidant (sa viscosité diminue avec l'augmentation de taux de cisaillement), avec des propriétés viscoélastiques (il est caractérisé par la présence d'un seuil d'écoulement en dessous duquel il ne s'écoule pas) et thixotropes (changement de ses propriétés visqueuses au cours du temps pour un cisaillement donné) [8].



**Figure I.2.** Evolution schématique de la viscosité en fonction du taux de cisaillement [8].

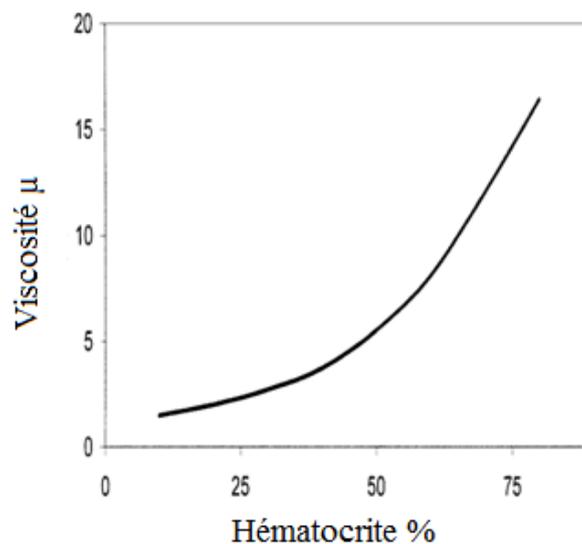
Dans la figure (I.2), le tracé de la viscosité apparente du sang en fonction du taux de déformation montre une viscosité élevée pour les faibles taux de déformation, en grande partie due à la formation de rouleaux de globules rouges. Cette viscosité diminue rapidement pour devenir presque constante pour des taux de cisaillements élevés. En fait, ce phénomène de viscosité élevée à faible taux de déformation ne sera important que dans des circonstances pathologiques à faible débit. Pour décrire les propriétés rhéologique du sang, il s'agira de soumettre ce fluide à différentes vitesses de cisaillement à l'aide d'un viscosimètre (ou à différentes contraintes de cisaillement à l'aide d'un rhéomètre). On trouve plusieurs types de viscosimètre. Pour le sang, les plus utilisés sont les suivants :

- **Viscosimètre de type couette** : constitué de deux cylindres coaxiaux l'un est mis en rotation avec la vitesse angulaire  $\omega$ . L'autre est entraîné par les forces de viscosité et est maintenu immobile par l'application d'un couple.
- **Viscosimètre cône plan** : constitué d'un plan dans lequel va être cisailé le sang grâce à un cône tournant à des vitesses croissantes.

D'autres types de viscosimètre peuvent être utilisés mais il faut vérifier qu'ils sont adaptés pour des fluides non-newtoniens.

### ***1.3.2.1.2. Hématocrite***

L'hématocrite est défini comme le pourcentage du volume du sang occupé par les globules rouges. L'hématocrite est un paramètre important qui affecte la capacité de transporter le sang. La viscosité du sang est liée à la valeur de l'hématocrite figure (I.3), la viscosité du sang augmente considérablement avec l'hématocrite.



**Figure I.3.** Viscosité du sang en fonction d'hématocrite [9].

Toutefois, un taux élevé d'hématocrite peut signifier une production excessive de cellules sanguines suite à des conséquences de maladies spécifiques. Mais cela peut également signifier une déshydratation, caractérisée par une perte d'eau du plasma sanguin. A l'inverse, un taux d'hématocrite faible peut être un signe d'anémie (manque de fer) ou d'hémorragie.

### ***1.3.2.1.3. La déformabilité des hématies (Globules Rouges)***

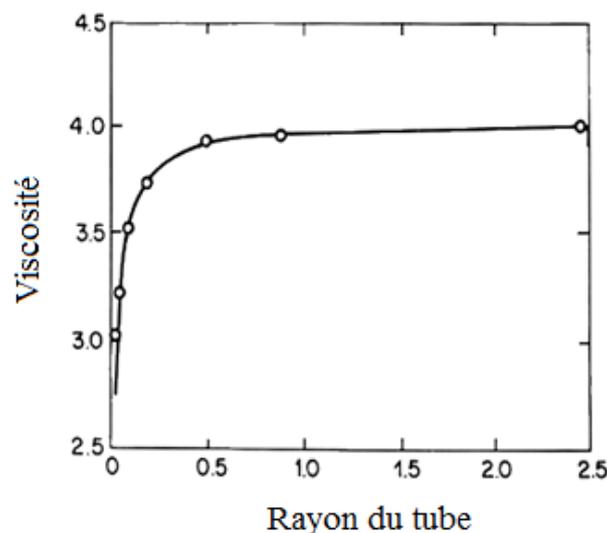
La déformabilité et la viscosité interne des hématies jouent un rôle très important dans la viscosité sanguine globale. A l'état normal la viscosité du sang est 3 fois plus grande que celle du plasma, mais en rigidifiant les hématies au moyen de drogues, on constate que la viscosité apparente du milieu augmente considérablement. Le sang ne se comporte pas comme une suspension de particules solides, mais plutôt comme une suspension de gouttes de liquide déformables. Cette déformabilité dépend des propriétés mécaniques de la goutte et de sa viscosité interne (hémoglobine).

Il est en tout cas remarquable que, même avec un hémocrite de 95%, le sang continu à se comporter comme un liquide.

### ***1.3.2.1.4. Diamètre du tube***

Comme on peut l'observer, dans les tubes de très petit diamètre, la viscosité apparente du sang a une valeur très faible (Figure I.4). La viscosité augmente avec l'augmentation du diamètre du tube et s'approche d'une valeur asymptotique pour des diamètres de tube supérieurs à environ 0,5mm. Cet effet de diminution de la viscosité dans les tubes de petit diamètre est appelé l'effet Fahraeus-Lindqvist [10].

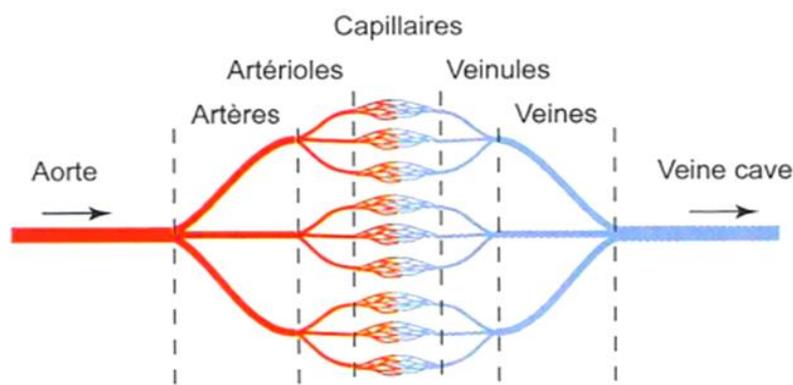
Ces facteurs sont tous affectés par divers états de santé et de maladie.



**Figure I.4.** Effet de la viscosité apparente du sang sur le rayon du tube [10].

### ***1.3.2.2. Vaisseaux sanguins***

La compréhension des propriétés mécaniques des vaisseaux sanguins est fondamentale pour comprendre l'hémodynamique. Les vaisseaux, sont un ensemble de conduites de taille variable où circule le sang. Ils forment une boucle fermée, comme un circuit, qui commence et se termine au niveau du cœur. Ils servent à acheminer le sang vers les organes et les tissus du corps (Figures I.5 et I.6). Le sang leur fournit l'oxygène et les nutriments dont ils ont besoin pour fonctionner. Les vaisseaux sanguins transportent également les déchets et le dioxyde de carbone loin des organes et tissus.



**Figure I.5.** Vaisseaux sanguin du système circulatoire.

Les vaisseaux sanguins sont constitués de :

#### ***1.3.2.2.1. Artères***

Les artères évacuent le sang du cœur et supportent les tensions artérielles les plus élevées en raison de leur parois élastique, mais ne transportent pas un grand volume de sang. À tout moment, seulement 10 à 15 % du sang du corps se trouve dans les artères. Elles se rétrécissent (reculent) passivement lorsque le cœur se détend entre les battements et aident ainsi à maintenir la tension artérielle. Les artères se ramifient en vaisseaux de plus en plus petits, devenant finalement de très petits vaisseaux appelés artériole.

#### ***1.3.2.2.2. Artérioles***

Les artérioles jouent un rôle clé dans la régulation du flux sanguin. Ils peuvent ajuster leur diamètre pour augmenter ou diminuer le flux sanguin vers une partie particulière du corps.

### ***1.3.2.2.3. Capillaires***

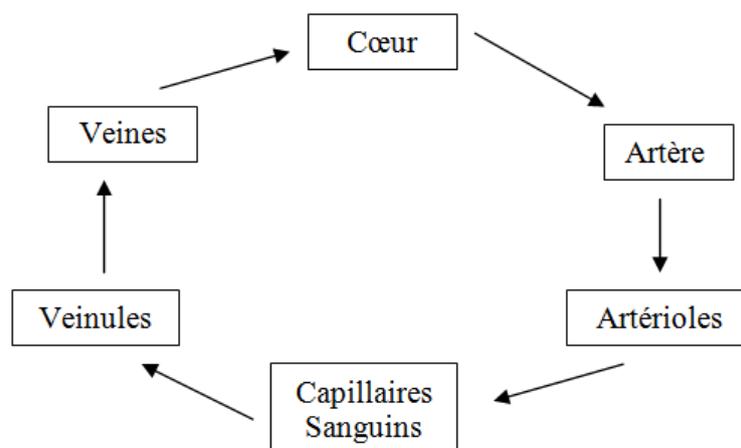
Les capillaires sont les canaux vasculaires dans lesquels se produisent principalement les échanges de matières. Ces minuscules vaisseaux sanguins ont des parois minces. L'oxygène et les nutriments du sang peuvent traverser les parois et pénétrer dans les organes et les tissus. Les capillaires évacuent également les déchets de vos tissus. Ils agissent comme un pont entre les artères (qui transportent le sang du cœur) et les veines (qui ramènent le sang vers le cœur).

### ***1.3.2.2.4. Veinules***

Les veines commencent par de minuscules vaisseaux appelés veinules et grossissent progressivement à mesure qu'elles se rapprochent du cœur. Les veinules reçoivent le sang des capillaires.

### ***1.3.2.2.5. Veines***

Contrairement aux artères, les veines ne doivent pas transporter de sang de haute pression, mais elles doivent ramener de grands volumes de sang désoxygéné vers le cœur. Des parois minces et moins élastiques les aident à gérer des volumes élevés et une faible pression. La plupart des veines ont des valves qui s'ouvrent et se ferment. Les valves contrôlent le flux sanguin et permettent au sang de circuler dans une seule direction. Environ 75 % du sang se trouve dans les veines.



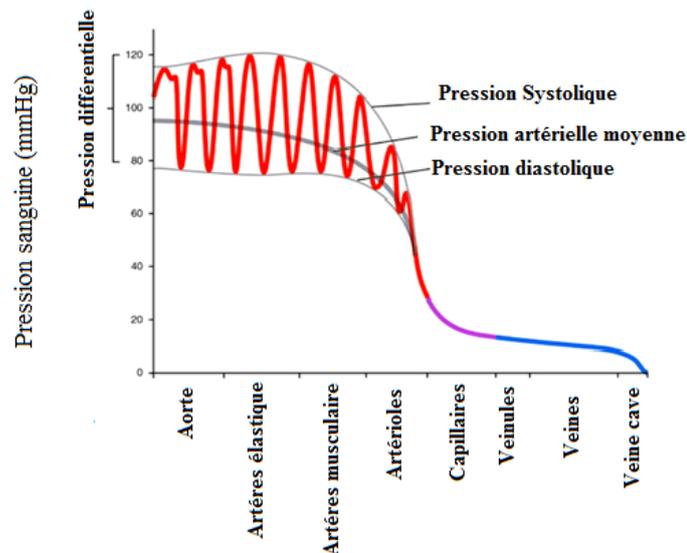
**Figure I.6.** Cheminement du sang.

### 1.3.2.3. Pression artérielle

Au passage du sang dans les vaisseaux sanguins, la paroi élastique de ces derniers, subit une force nommée pression ou tension artérielle. La pression artérielle fluctue à chaque battement cardiaque, selon le pompage du cœur :

- ❖ Augmente pendant la phase de vidange (systole ventriculaire).
- ❖ Diminue pendant la phase de remplissage (diastole ventriculaire).

La pression artérielle est un phénomène périodique qui comprend plusieurs éléments distincts à savoir : la pression systolique, diastolique, la pression différentielle (pulsé) et la pression artérielle moyenne (Figure I.7).



**Figure I.7.** Pression artérielle systémique.

La figure (I.7) montre les pressions systolique, diastolique, artérielle moyenne et pulsée dans les différents types de vaisseaux sanguins.

#### 1.3.2.3.1. Pression systolique ( $P_s$ )

La pression systolique est la pression artérielle mesurée pendant la période de contraction cardiaque. Selon la loi de Hagen-Poiseuille, elle dépend de trois facteurs: débit cardiaque, élasticité des grosses artères, viscosité du sang. La pression artérielle systémique chez le jeune adulte normal et en bonne santé est de 110 à 120mmHg en systolique.

### ***1.3.2.3.2. Pression diastolique ( $P_d$ )***

La pression diastolique correspond à la pression artérielle pendant la phase de relaxation cardiaque. Elle dépend de la vitesse du flux sanguin et donc de la résistance périphérique totale. Cela atteste de la résistance apportée par les vaisseaux au flux sanguin. C'est un bon indicateur de l'élasticité de la paroi artérielle. En diastolique, la pression artérielle systémique chez le jeune adulte normal et en bonne santé est 70 à 80mmHg en diastolique.

### ***1.3.2.3.3. Pression différentielle ( $P_p$ )***

La différence de pression entre la pression systolique et la pression diastolique est appelée « pression pulsée ». La pression différentielle, qui est détectée par les éléments des vaisseaux sanguins. La normale est, donc d'environ 40mmHg.

$$P_p = (P_s - P_d) \quad (\text{I.1})$$

### ***1.3.2.3.4. Pression artérielle moyenne ( $P_m$ )***

Les valeurs de pression artérielle oscillent entre une valeur maximale ( $P_s$ ) et une valeur minimale ( $P_d$ ). Les tensiomètres automatiques vous donnent une lecture de la pression artérielle systolique et diastolique. Beaucoup d'entre eux incluent également un petit nombre entre parenthèses sous ou à côté de votre lecture de tension artérielle standard. Ce nombre entre parenthèses est la pression artérielle moyenne. Cela peut être exprimé par la formule :

$$P_m = P_d + \frac{1}{3}(P_s - P_d) \quad (\text{I.2})$$

Par exemple, chez une personne dont la pression artérielle est de 120/80mmHg, la pression moyenne est de :

$$P_m = 80 + \frac{1}{3}(120 - 80) = 93.3\text{mmHg} \quad (\text{I.3})$$

### ***1.3.2.4. Débit cardiaque***

Le débit cardiaque est la quantité de sang éjectée à chaque contraction multiplié par la fréquence cardiaque en une minute. Le débit cardiaque normal chez l'adulte humain est d'environ **5,25 L/min**, soit environ le volume sanguin total. Cependant, cette valeur peut augmenter par augmentation de la fréquence lors d'un exercice physique.

### ***1.3.2.5. Fréquence cardiaque***

La fréquence cardiaque est le nombre de battements cardiaques par minute (par unité de temps). On estime chez l'adulte, au repos, une fréquence cardiaque normale est comprise entre 60 et 100 battements par minute (bpm).

## **I.4. Synthèse bibliographique**

### **I.4.1. Etude hémorhéologique**

L'hémorhéologie est d'abord une science fondamentale dont l'objet est l'étude des propriétés rhéologique du sang tout au long de l'arbre vasculaire, la nature de l'hémorhéologie et sa place dans l'ensemble des sciences ne sont pas toujours vues avec exactitude. Pareillement, l'hémorhéologie n'est pas l'application des techniques rhéologiques à l'étude du sang, mais elle est la rhéologie du sang et des vaisseaux sanguins, c'est-à-dire la science de l'écoulement du sang, de la déformation de ses éléments constitutifs et des diverses parties du système circulatoire. Une telle conception de l'hémorhéologie est évidemment beaucoup plus riche et beaucoup plus féconde, tant pour son propre développement que pour ses conséquences dans les autres domaines de la biologie. Classiquement, les scientifiques résument le domaine de la rhéologie sanguine comme étant l'étude de la viscosité du sang [11].

L'un des buts de l'hémorhéologie est l'analyse des effets directs de nombreuses substances sur les propriétés mécaniques du sang puis, l'étude des conséquences de ces modifications sur les écoulements sanguins. L'approfondissement des problèmes posés par un des grands domaines de la dynamique des fluides biologiques, l'hémorhéologie, montre la nécessité d'aborder ces problèmes comme des questions nouvelles et non pas comme un nouveau champ d'application de l'hydrodynamique classique. Il est bien connu que l'adéquation de l'écoulement sanguin pour répondre aux demandes métaboliques à travers les gros vaisseaux circulatoires dépend fortement des mécanismes de contrôle vasculaire. La mesure dans laquelle les propriétés rhéologiques du sang contribuent à la résistance de l'écoulement vasculaire, en particulier dans la microcirculation, est de plus en plus appréciée.

Plusieurs auteurs, comme **Chien et al. [12]** ont souligné que les facteurs hémorhéologiques ont été injustement sous-estimés jusqu'à présent, par rapport aux facteurs cardiaques ou vasculaires. En effet, La modélisation constitutive du sang joue un rôle essentiel en hémorhéologie et dans les études computationnelles utilisées pour comprendre les maladies cardiovasculaires. Cette dernière application est importante car il est bien connu que

les conditions pathologiques peuvent provoquer des changements dans les propriétés rhéologiques du sang (viscosité non-newtonienne, thixotropie et viscoélasticité) et les propriétés physico-chimiques du plasma, qui peuvent à leur tour influencer l'évolution de ces pathologies.

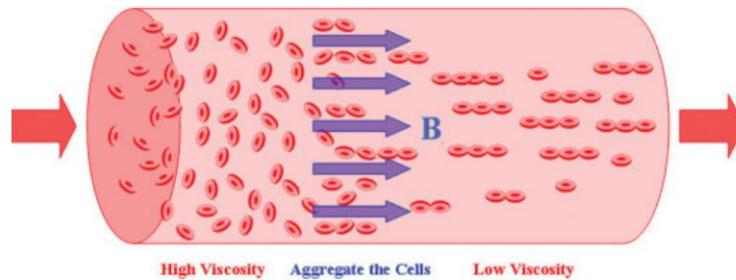
Plus récemment, des mesures rhéologiques ont été effectuées sur le sang par **Armstrong et al. [13]** et **Horner et al. [14]** qui ont montré que ce fluide est plus complexe qu'il n'y paraît. En effet, il est bien connu que sa composition en plasma, globules rouges et blancs (globules rouges et globules blancs), plaquettes, etc. fait du sang un fluide au comportement rhéologique complexe et le classe comme un fluide non newtonien présentant un cisaillement, limite d'élasticité et caractère thixotrope qui ajoute à la complexité du problème.

Par la suite, **Ameenuddin et al. [15]** ont proposé un nouveau modèle constitutif non-linéaire pour le sang avec une viscosité qui dépend du taux de cisaillement et de la fraction volumique des globules rouges ou RBCs (hématocrite). Le processus réversible d'agrégation-désagrégation des globules rouges (GR) est responsable du comportement d'amincissement par cisaillement du sang

Dans leur collaboration, **Frolov et al. [16]** ont observé que le comportement non-newtonien du sang avait un effet significatif sur les paramètres hémodynamiques. En effet, l'hémorhéologie, c'est-à-dire les caractéristiques rhéologiques du sang changent en même temps que la géométrie de l'écoulement qui avait un effet significatif sur les caractéristiques de l'écoulement. Leurs résultats montrent que l'ampleur et la distribution des paramètres hémodynamiques n'ont pas pu être négligées, c'est pourquoi la viscosité non newtonienne du sang devrait être prise en compte dans les futures études d'écoulement dans les artères cérébrales ainsi que dans d'autres artères et veines du système cardiovasculaire, où des taux de cisaillement inférieurs à  $100\text{s}^{-1}$  sont observés.

Par ailleurs, des tentatives ont été faites pour montrer que viscosité du sang est un facteur important dans les maladies cardiaques, et mettre en évidence l'effet du champ magnétique sur la viscosité sanguine des globules rouges. A ce titre, **Tao et Huang [17]** ont rapporté dans leur découverte que la viscosité du sang peut être réduite avec des champs magnétiques égaux ou supérieurs appliqués au sens de l'écoulement sanguin (Figure I.8). Ainsi, cette réduction de la viscosité n'affecte pas la fonction normale des globules rouges. En

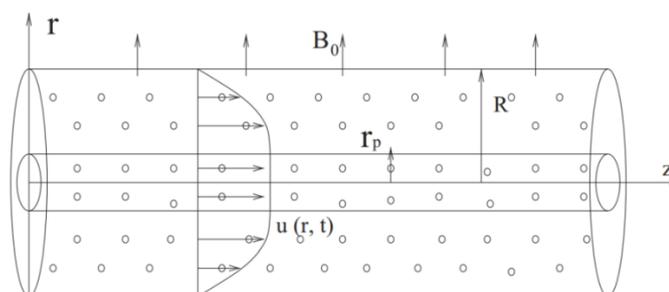
outre, la fraction volumique des globules rouges, c'est-à-dire l'hématocrite, est le principal facteur affectant la viscosité du sang.



**Figure I.8.** Géométrie de l'écoulement [17].

En effet, les résultats montrent que le plasma a une faible viscosité, la viscosité globale du sang augmente lorsque le pourcentage de cellules dans le plasma augmente, principalement en raison des globules rouges. Cette étude en magnéto-rhéologie fournit un moyen efficace de contrôler la viscosité du sang dans une plage sélectionnée.

En utilisant la méthode des différences finies, **Misra et Adhikary [18]** ont analysé l'écoulement pulsé d'un fluide plastique de Bingham en présence d'un champ magnétique appliqué de l'extérieur (Figure I.9). Les effets de la porosité, du champ magnétique et de la contrainte d'écoulement sur la vitesse, le débit volumétrique et la contrainte de cisaillement de la paroi ont été examinés. Ces effets ont été estimés numériquement. Les résultats de calcul pour l'écoulement du sang dans une artère malade indiquent que le débit volumétrique du sang (s'il est considéré comme un fluide plastique de Bingham) et la contrainte de cisaillement de la paroi sont augmentés lorsque la perméabilité de la paroi artérielle malade augmente. Par contre, la vitesse et le débit volumétrique du sang diminuent lorsque l'intensité du champ magnétique augmente.

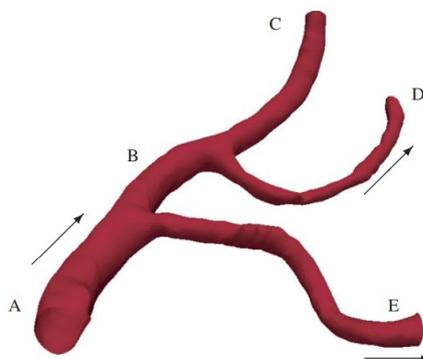


**Figure I.9.** Géométrie du problème physique [18].

L'étude présentée par **Lee et al. [19]** indique clairement l'importance des globules rouges (GR) pour décrire les propriétés hémorhéologiques du sang qui peut modifier la résistance à l'écoulement et la contrainte de cisaillement de la paroi dans les vaisseaux sanguins. Leurs résultats seront utiles pour comprendre les relations entre les profils de vitesse dans les vaisseaux sanguins et la viscosité du sang dans diverses conditions d'écoulement.

Dans une autre étude, **Dobbe et al. [20]** ont présenté les techniques disponibles pour mesurer la déformabilité des GR qui fournissent souvent une indication de la déformabilité moyenne. Ces globules rouges (RBC) doivent se déformer pour passer dans les plus petits capillaires de la microcirculation. Cette dernière peut être diminuée soit par une légère réduction de la déformabilité globale, soit par la présence d'une petite fraction de cellules rigides. Cette étude explore les distributions des GR d'individus sains et de cellules présentant des propriétés mécaniques anormales (drépanocytose, patients dialysés). Les distributions ont été mesurées à l'aide d'un rhéoscope automatisé, qui utilise des techniques avancées d'analyse d'image pour obtenir l'indice de déformabilité d'un grand nombre de cellules individuelles soumises à un écoulement de cisaillement simple. Les résultats montrent que la distribution de la déformabilité des GR est une représentation puissante pour établir les changements des propriétés mécaniques des GR. Les fractions de cellules hyper-déformables et l'écart type de la distribution sont d'excellents paramètres quantitatifs pour évaluer les altérations de la déformabilité des GR.

Il y a eu un intérêt croissant au cours des dernières années pour la comparaison des modèles de rhéologie sanguine utilisant des simulations de dynamique des fluides numérique (CFD) dans des domaines de calcul réalistes reconstruits à partir d'images médicales. Dans ce contexte, **Bernabeu et al. [21]** ont présenté un modèle géométrique du système vasculaire.

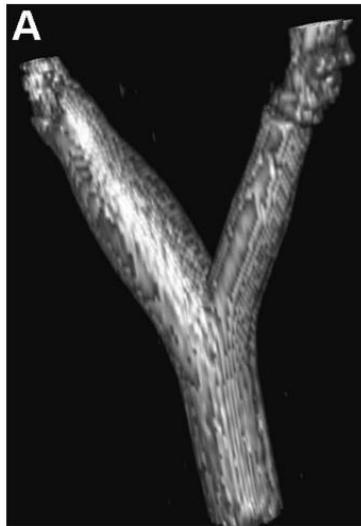


**Figure I.10.** Modèle tridimensionnel d'un sous-ensemble du droit ACM [21].

Il correspond à une section de l'ACM (l'artère cérébrale moyenne) droite au voisinage de l'artère carotide interne. Les principales caractéristiques géométriques du modèle sont (i) des vaisseaux de diamètre variable, (ii) deux bifurcations et (iii) la courbure des vaisseaux (Figure I.10).

Cette étude avait pour objectif d'évaluer l'impact du choix du modèle de rhéologie sanguine sur les estimations de la contrainte de cisaillement à la paroi du dans un modèle tridimensionnel à haute résolution de l'artère cérébrale moyenne (ACM). Les résultats montrent que, dans le modèle étudié, les différences entre la contrainte de cisaillement des parois prédite par un modèle newtonien et le célèbre modèle newtonien généralisé de Carreau-Yasuda ne sont significatives que si la pathologie vasculaire étudiée est associée à un seuil pathologique. Dans le cas contraire, ils n'observent aucune différence significative.

La méthode des éléments finis a été utilisée par **Box et al. [22]** pour résoudre les équations de continuité et de conservation de quantité de mouvement. Cette étude avait pour but d'étudier les effets de la viscosité sanguine non newtonienne, des variations de la contrainte de cisaillement à la paroi et du diamètre des vaisseaux sur les phénomènes de paroi dans un modèle de bifurcation carotidienne (Figure I.11).



**Figure I.11.** Géométrie du problème [22].

En modélisant la viscosité du sang total en fonction du taux de cisaillement par le modèle de Carreau-Yasuda, les résultats indiquent que les augmentations de débit ont un effet plus important sur la contrainte de cisaillement à la paroi. Une faible viscosité du plasma était

associée à une faible contrainte de cisaillement à la paroi, ce qui implique une contradiction, car une contrainte de cisaillement à la paroi élevée et une faible viscosité du plasma sont considérés comme des indicateurs d'un système sain. Les oscillations maximales de la contrainte de cisaillement à la paroi ont été trouvées aux bords de la région de recirculation.

Leur étude montre que les changements de débit et de diamètre ont une influence significative sur les valeurs de contrainte de cisaillement à la paroi, il en va de même pour la viscosité, mais dans une moindre mesure.

Les données actuelles suggèrent que l'écoulement sanguin est déterminé par des facteurs hémorhéologiques tels que la viscosité du sang, la déformabilité des érythrocytes (GR) et l'agrégation des érythrocytes. Une telle connaissance du comportement de l'écoulement sanguin microvasculaire promet d'être un avantage significatif pour les cliniciens qui s'occupent de patients présentant des altérations hémodynamiques. Dans ce contexte, **Hamlin et Benedik [23]** ont déterminé les concepts de base de l'hémorhéologie en hémodynamique microvasculaire, où ils ont approuvé que les propriétés rhéologiques du sang sont déterminantes de la résistance aux écoulements vasculaire dans des conditions dynamiques. Les altérations des paramètres rhéologiques du sang, telles que les propriétés mécaniques des érythrocytes et des leucocytes, augmentent considérablement la résistance microvasculaire à l'écoulement du sang et peuvent entraîner une altération de la perfusion des organes, et la connaissance du comportement de l'écoulement sanguin microvasculaire promet d'être une aide importante pour les cliniciens qui soignent des patients présentant des altérations hémodynamiques.

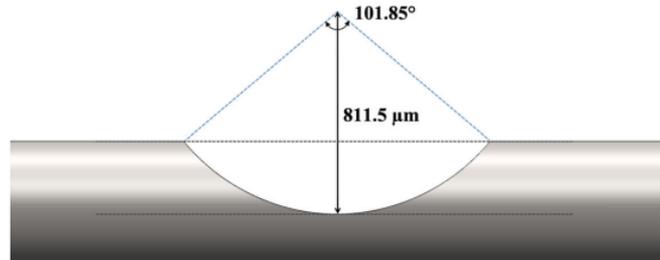
**Lowe et al. [24]** ont examiné les relations entre la viscosité du sang et ses principaux déterminants et les événements cardiovasculaires incidents (cardiopathie ischémique et accident vasculaire cérébral) dans le cadre d'une étude prospective portant sur un échantillon de population aléatoire de 1592 hommes et femmes âgés de 55 à 74 ans. Les associations de la viscosité sanguine et de l'hématocrite sont restées significatives pour les accidents vasculaires cérébraux, mais pas pour les événements totaux, tandis que les associations de la viscosité plasmatique et du fibrinogène sont restées significatives pour les événements totaux et pour les accidents vasculaires cérébraux. Ces résultats suggèrent que l'augmentation de la viscosité du sang peut être un mécanisme biologique plausible par lequel les augmentations de l'hématocrite et du fibrinogène peuvent favoriser les cardiopathies ischémiques et les accidents vasculaires cérébraux.

L'effet de la viscosité apparente relative du sang sur le diamètre du tube dans une conduite capillaire étroite, a été discuté par **Fahraeus et Lindqvist [10]**, où les auteurs ont démontré que la viscosité du sang n'est pas une quantité constante, mais elle dépend du diamètre du tube. En dessous d'un point critique à un diamètre d'environ 0,3 mm, la viscosité diminue fortement avec la réduction du diamètre du tube. Par conséquent, la résistance à l'écoulement du sang dans les artérioles (et dans les petites veines) est considérablement moindre que si l'écoulement sanguin suivait la loi de Poiseuille, c'est-à-dire se comportait comme un fluide en ce qui concerne sa viscosité. Ainsi, la viscosité particulière du sang permet au cœur de faire passer un volume donné de sang dans les artérioles à une pression beaucoup plus faible. Cette réduction de la viscosité apparente du sang, qui a été appelée effet **Fahraeus-Lindqvist**, est particulièrement pertinente si les mesures de la viscosité apparente doivent être appliquées à l'écoulement du sang dans le système vasculaire.

Dans le même axe de recherche, des descriptions quantitatives à la dépendance de la viscosité du sang par rapport à l'hématocrite dans les tubes de différents diamètres ont été étudié par **Pries et al. [25]**. Au terme de l'étude, il est montré que ces derniers paramètres sont nécessaires dans le développement de modèles hydrodynamiques de l'écoulement du sang dans la microcirculation. En outre, ils ont fourni des nouvelles données expérimentales afin d'obtenir un ensemble de données plus complet reliant la viscosité apparente du sang au diamètre des vaisseaux dans une gamme plus large d'hématocrites. A ce titre, leurs résultats confirment que le taux de cisaillement affecte faiblement la viscosité dans la gamme de taux de cisaillement existant dans la microcirculation et dans des conditions normales. La dépendance du sang vis-à-vis du taux de cisaillement est influencée par plusieurs facteurs supplémentaires, dont l'importance pour la perfusion microcirculatoire n'est pas facile à évaluer. Il a été démontré que l'augmentation de la viscosité dans un écoulement tubulaire à faible taux de cisaillement est fortement affectée par la sédimentation cellulaire et est encore compliquée par l'effet de la tendance à l'agrégation des érythrocytes (GR).

**Ha et al. [26]** ont étudié numériquement l'écoulement pulsé dépendant de la viscosité non newtonienne dans une géométrie sténosée (Figure **I.12**), c'est-à-dire le rétrécissement anormal d'un vaisseau qui bloque l'écoulement sanguin vers les tissus et entraîne la rupture de la plaque. Dans les petites artères dont le diamètre ne dépasse pas quelques centaines de micromètres, une telle sténose peut avoir des conséquences graves.

En outre, les résultats montrent qu'une viscosité élevée augmente la résistance à l'écoulement dans les vaisseaux sanguins. Cette étude pourrait être utile pour comprendre l'hémodynamique autour de la sténose, sur la base des caractéristiques hémorhéologiques dans des conditions pulsatiles.



**Figure I.12.** Illustration du microcanal sténosé [26].

#### I.4.2. Etude hémodynamique

L'hémodynamique ou la dynamique de l'écoulement sanguin, est la science des propriétés physiques de la circulation sanguine en mouvement dans le système cardiovasculaire. Cette discipline couvre un intérêt pour les chercheurs et scientifiques dans divers domaines scientifiques, biomécaniques et médicaux. En effet, la circulation sanguine est très complexe, elle dépend d'un grand nombre de paramètres, et fait appel à de nombreux domaines comme la mécanique des fluides, la biophysique et la résistance des matériaux pour évaluer le développement des maladies cardiovasculaires. Dans le système circulatoire (système de tuyaux qui a une géométrie particulière), le sang enrichi et quitte le cœur via une série d'artères, le diamètre de ces artères se rétrécit et les artères sont alors appelées des artérioles. Ces artérioles deviennent des capillaires et éventuellement des veinules, où le sang appauvri retourne vers le cœur grâce à des réseaux de veines.

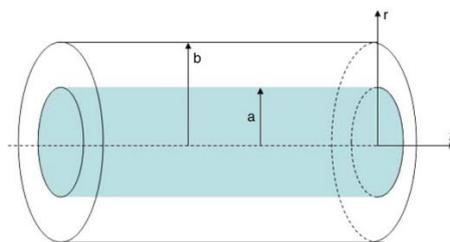
L'écoulement sanguin du système circulatoire répond aux exigences de la mécanique des fluides. Bien qu'il soit connu que le sang se comporte de manière newtonienne dans les gros vaisseaux, et il se comporte différemment dans les zones éloignées ou périphériques du réseau [27].

En effet, plusieurs recherches sur la dynamique de l'écoulement du sang, connues sous le nom de modélisation hémodynamique, ont été effectuées en considérant un modèle d'écoulement newtonien du sang avec différentes type de géométrie, on citera notamment

celle de **Womersley [28]**, qui dans son travail pionnier a présenté une solution exacte des équations du mouvement d'un fluide visqueux dans un tube circulaire sous un gradient de pression qui est une fonction périodique du temps. Depuis, ses résultats sont utilisés comme référence.

Par ailleurs, **Usha et Prema [29]** ont présenté un travail de recherche concernant le développement d'une méthode analytique pour la résolution des équations régissant l'écoulement pulsé du sang sous l'effet d'une accélération périodique. Il a considéré le sang comme un fluide à deux phases (biphasique), c'est-à-dire une suspension de cellules dans le plasma qui est considéré comme un fluide newtonien. Les vitesses du fluide et de la phase particulaire sont déterminées et les vitesses pulsatiles stables avec l'accélération du corps pour les deux cas sont déduites. Des expressions analytiques de la vitesse axiale pour la phase fluide et la phase particulaire, de l'accélération du fluide, de la contrainte de cisaillement de la paroi et du débit instantané ont été obtenues, à l'aide de la méthode de transformations finies de Hankel et de Laplace.

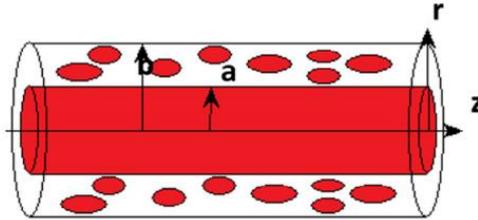
Par la suite, **Massoudi et Phuoc [30]** ont étudié l'écoulement pulsé du sang dans une artère, où les effets de l'accélération externes sont inclus. Ils ont supposé que le sang près du mur se comporte comme un fluide newtonien (la région périphérique) et dans la région centrale comme un liquide non-newtonien (Figure **I.13**). Les équations sont rendues adimensionnelles et résolues par la méthode des différences finies. Les effets de la nature non-newtonienne du sang, de l'accélération du corps  $A_g$ , de la fréquence  $f_b$ , de la composante constante du gradient de pression  $A_0$ , ont été étudiés.



**Figure I.13.** La géométrie de l'écoulement [30].

Dans une géométrie similaire, **Zaman et al. [31]** présentèrent une étude mathématique de l'écoulement sanguin pulsé à deux phases à travers un vaisseau en présence d'une accélération du corps (Figure **I.14**). Le sang dans la région centrale est modélisé en tenant en compte son caractère non-newtonien tandis que dans la région périphérique, il est décrit

comme un fluide newtonien. Les effets de l'accélération du corps sont également pris en compte dans cette étude. Les équations de continuité et de quantité de mouvement sont utilisées pour modéliser le problème proposé en termes d'équation aux dérivées partielles non linéaires. Cette équation ainsi que les conditions initiales et aux limites sont rendues adimensionnelles puis résolues numériquement à l'aide de la méthode des différences finies.



**Figure I.14.** La géométrie de l'écoulement dans un vaisseau [31].

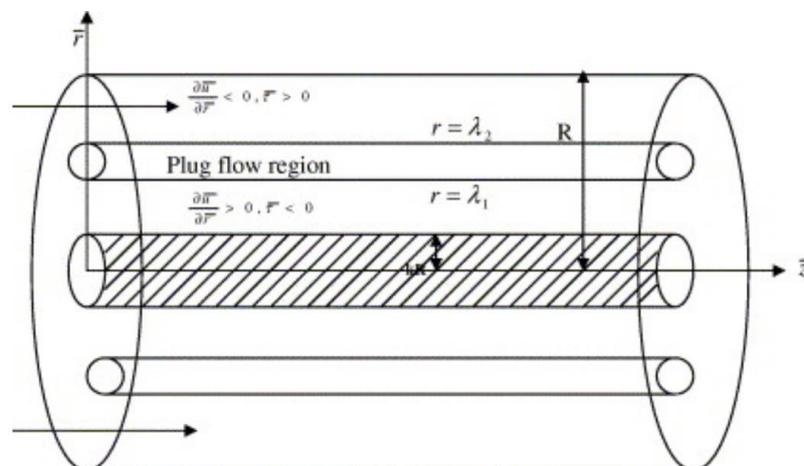
Leurs résultats montrent que le paramètre matériel du modèle Sisko a une plus grande influence sur l'écoulement sanguin dans l'artère coronaire par rapport à l'artère fémorale.

Différents modèles de comportement de fluides non-newtoniens ont été largement pris en compte par de nombreux auteurs pour prédire l'écoulement sanguin pulsé sous différentes hypothèses :

Parmi ces études, on citera celle de **Sud et Sekhon [32]** concernant une étude qui traite l'effet de l'accélération corporelle imposées de l'extérieur sur l'écoulement sanguin dans les artères. Le modèle mathématique de l'écoulement sanguin dans des artères est soumis à un gradient de pression pulsé ainsi qu'à l'accélération du corps. Les équations résultantes ont été résolues en utilisant la technique des transformées de Laplace. Des résultats numériques qui concernent les effets de l'accélération du corps sur les variables d'écoulement, à savoir le débit, la vitesse d'écoulement, l'accélération et la contrainte de cisaillement correspondant aux artères typiques de sujets humains ont été présentés. Par ailleurs, **Sud et Sekhon [33]** ont poursuivi leur travail, en proposant une autre méthode numérique pour résoudre l'écoulement sanguin à travers l'arbre artériel des mammifères soumis à une accélération périodique du corps. Les résultats indiquent clairement que l'accélération du corps n'affecte pas le débit du sang dans les artères dans les conditions normales. D'autre part, l'effet d'une accélération corporelle d'une amplitude donnée est plus important dans les grosses artères du système vasculaire humain et vice versa.

Suivant la même démarche, **Chaturani et Palanisamy [34]** ont étudié l'écoulement pulsé d'un fluide non-newtonien (loi de puissance) à travers des tubes circulaires rigides sous l'influence d'une accélération périodique du corps. Des solutions numériques ont été obtenues en utilisant la méthode des différences finies. L'interaction de la nature non newtonienne du fluide avec l'accélération du corps a été étudiée en utilisant les données physiologiques de deux cas particuliers (artères coronaires et fémorales). Leurs résultats numériques obtenus ont été comparés aux solutions analytiques (newtoniennes), et montrent clairement que le sang, est un fluide rhéofluidifiant (pseudoplastique). Dans le même contexte, **Chaturani et Palanisamy [35]** ont repris leur travail, en imposant une autre méthode numérique pour étudier l'écoulement pulsatile du sang à travers un tube rigide sous l'influence de l'accélération du corps. Les résultats indiquent que l'amplitude de l'accélération du corps diminue fortement lorsque le rayon du tube diminue (de l'aorte à l'artériole). Cette variation d'amplitude est très lente pour les écoulements sans accélération du corps.

Afin d'explorer, d'autres types de conditions aux limites, **Sankar et Hemalatha [36]** ont analysé les effets du cathétérisme et de la nature non-newtonienne du sang dans les petites artères ( $D < 100 \mu\text{m}$ ), en considérant le sang comme un fluide de type Herschel\_Bulkley (Figure I.15). La méthode de perturbation est utilisée pour résoudre le système d'équations différentielles implicite couplé non linéaire quasi-stationnaire résultant. Leurs objectifs montrent clairement l'intérêt de comprendre la mécanique des fluides de l'écoulement du sang dans une artère cathétérisée et de mettre en évidence dans la configuration de l'écoulement et d'estimer l'augmentation de la résistance à l'écoulement dans une petite artère en raison de la présence d'un cathéter.



**Figure I.15.** Géométrie de l'artère cathétérisée [36].

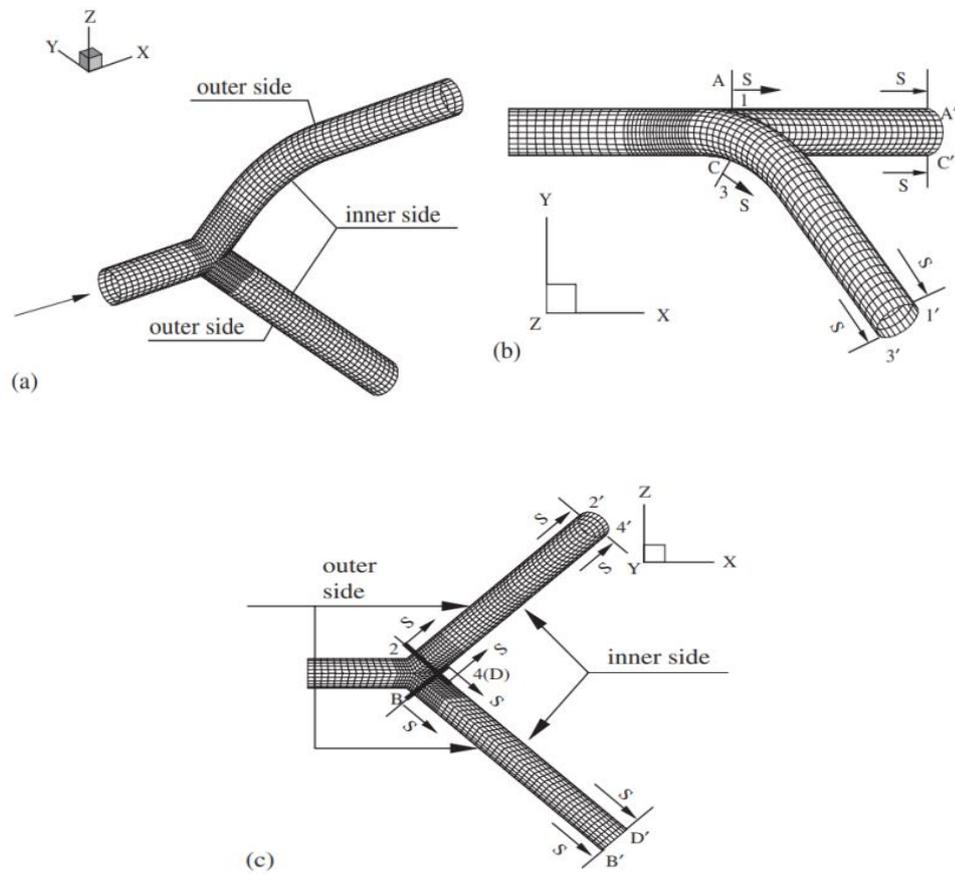
Dans une autre configuration, **Varshney et Katiyar [37]** ont développé un modèle mathématique pour étudier l'écoulement pulsé du sang à travers une artère conique sténosée sous l'influence d'une accélération externe périodique, en utilisant le modèle généralisé de loi de puissance. Les résultats numériques montrent que toutes les caractéristiques de l'écoulement, à savoir la vitesse, le débit, l'accélération du fluide et la contrainte de cisaillement à la paroi, sont affectées par le rétrécissement, la sévérité de la sténose, le gradient de pression et l'accélération périodique du corps. Il s'avère que le comportement non-newtonien est un facteur important et ne doit pas être négligé dans l'étude de l'écoulement du sang dans une artère.

Par la suite, **Sarifuddin et al. [38]** ont modélisé l'écoulement sanguin newtonien généralisé à travers des sténoses artérielles de formes différentes. Le modèle artériel est traité comme bidimensionnel et axisymétrique avec un contour de la sténose obtenu à partir d'un moulage tridimensionnel d'une artère légèrement sténosée. Leurs résultats ont apporté une amélioration en considérant la rhéologie newtonienne généralisée du sang avec une viscosité dépendant du cisaillement dans le domaine, conformément aux résultats expérimentaux selon lesquels la viscosité apparente du sang diminue lorsque le taux de cisaillement augmente.

On pense que l'hémodynamique joue un rôle important dans la localisation des maladies vasculaires dans les zones d'écoulement complexe des artères coronaires, carotides, abdominales et fémorales. Ces zones d'écoulement complexe sont souvent dues à des ramifications, des bifurcations et des courbures des artères. Dans ce contexte de nombreuses études ont été effectuées. Dans une étude numérique, **Chen et Yun Lu [39]** ont examiné l'écoulement pulsé d'un fluide non-newtonien dans un modèle de bifurcation (Figure I.16). En considérant le modèle de Carreau-Yasuda pour prendre en compte le comportement rhéofluidifiant du fluide sanguin. Les résultats montrent que les propriétés non-newtoniennes du sang et des vaisseaux sanguins jouent un rôle important dans l'effet hémodynamique. Elles affectent l'interaction entre l'écoulement et le vaisseau et peuvent donc jouer un rôle important dans la biologie et la physiopathologie vasculaires.

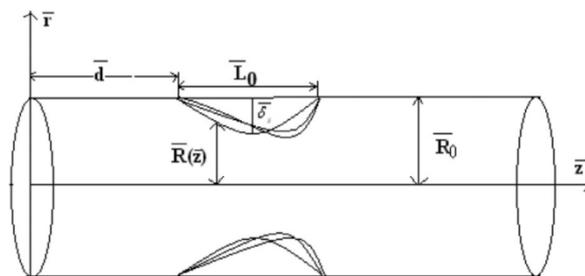
La méthode des différences finies et transformée de Laplace, ont été utilisés par **Misra et Pal [40]** dans l'objectif était de modéliser numériquement l'écoulement pulsé laminaire sous l'influence d'accélération corporelle imposée de l'extérieur. Un modèle mathématique est développé en traitant le sang comme un fluide non-newtonien. Des résultats ont été comparés avec les résultats obtenus numériquement et avec ceux des études précédentes.

L'accord dans les deux cas s'avère bon. Les résultats indiquent que toutes les caractéristiques instantanées de l'écoulement sont affectées par l'application de l'accélération du corps.



**Figure I.16.** Géométrie du modèle de bifurcation tridimensionnel. (a) vue globale ; (b) vue de face à la direction z ; (c) vue de face à la direction y [39].

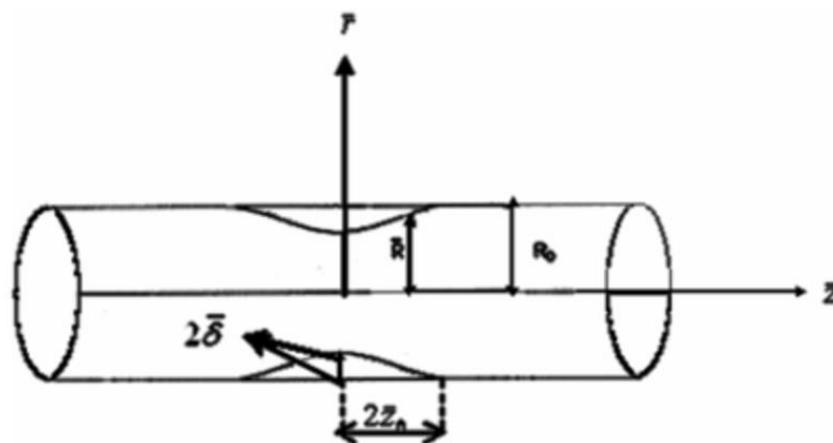
Afin d'explorer, d'autres types de conditions aux limites, **Siddiqui et al. [41]** ont attribué une approche biomécanique pour étudier l'effet de l'accélération du corps et de la vitesse de glissement à travers une artère sténosée (Figure I.17).



**Figure I.17.** Géométrie d'une sténose axialement non symétrique [41].

En considérant le sang comme un fluide non-newtonien de type de Bingham. Les résultats obtenus montrent que la viscosité et la contrainte de cisaillement à la paroi diminuent avec l'accélération du corps. Il est également constaté que la vitesse axiale et le débit augmentent mais que la viscosité diminue en raison du glissement de la paroi. Ce modèle permet de conclure que la vitesse de glissement joue un rôle très important dans la modélisation de l'écoulement sanguin dans une artère sténosée. Cette étude peut donc aider les professionnels de la santé à estimer la sévérité de la sténose et ses conséquences. Cette étude peut encore être étendue par l'introduction de plus de paramètres rhéologiques et physiques dans le cas de sténoses plus sévères. Enfin, la comparaison a été faite avec d'autres résultats existants pour justifier l'application du présent modèle.

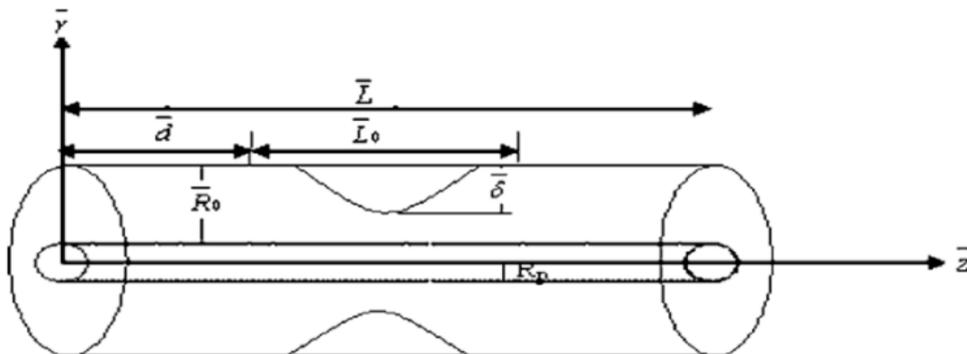
Par la suite, **Nagarani et Sarojamma [42]** ont repris la même configuration, mais avec une légère sténose et un écoulement symétrique, laminaire, entièrement développé où le sang qui s'écoule est considéré comme un fluide de Casson (Figure I.18). Cette étude a pour but d'étudier l'effet combiné de l'accélération du corps, de la sténose et de la contrainte seuil du fluide de Casson sur l'écoulement pulsé à travers un cylindre circulaire par la méthode de perturbation. Leurs résultats indiquent que la résistance à l'écoulement augmente considérablement en raison de la présence de la sténose et de la contrainte seuil d'écoulement. L'accélération du corps réduit la résistance à l'écoulement. À l'issue de l'étude, il a été conclu que, l'accélération du corps, le rayon de la sténose et la contrainte seuil du fluide sont des paramètres importants qui influencent l'écoulement qualitativement et quantitativement



**Figure I.18.** Géométrie de l'artère sténosée [42].

Suivant la même démarche, une étude similaire est entreprise par **Mishra et al. [43]** où ils ont analysé l'effet de la sténose symétrique à travers une artère pour un écoulement

pulsé. En considérant le sang est un fluide de type non newtonien indépendant du temps du modèle de Casson (Figure I.19).



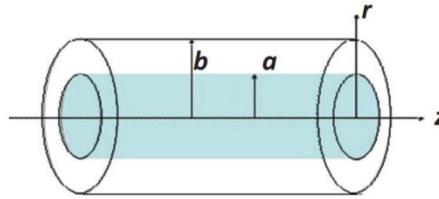
**Figure I.19.** Géométrie de l'artère [43].

Il a été approuvé que leur travail mets un accent sur l'importance des facteurs hydrodynamiques dans la compréhension de l'écoulement sanguin et des maladies athérosclérotiques. De ce fait, ce modèle pourrait être utile dans l'investigation des écoulements sanguins à travers des artères sténosées, en particulier au stade de la maladie, lorsque le sang n'est plus un fluide newtonien où il présente une contrainte d'écoulement. Cette dernière est également intéressante, car elle peut donner lieu à une fatigue et finalement à une perte d'élasticité et de perméabilité de la paroi du tube.

L'étude des écoulements pulsés de fluides non-newtoniens dépendants du temps, plus précisément le comportement thixotrope et viscoélastique du sang attire de nombreux chercheurs en raison de son grand intérêt pour la biomécanique. En effet, plusieurs auteurs ont concentré leurs études sur la compréhension des écoulements sanguins sous diverses conditions temporelles et aux limites.

A ce titre, on peut citer ; **Khabakhpasheva [44]** qui ont étudié expérimentalement l'écoulement pulsé d'un fluide viscoélastique dans un tube. Cette étude expérimentale a pour objet d'étudier en détail la relation entre les caractéristiques cinématiques et dynamiques des écoulements pulsés viscoélastiques non linéaires. Les profils de vitesse sur la section transversale d'un tube circulaire et les gradients de pression longitudinaux correspondants dans les conditions d'un écoulement oscillant et pulsé sans inertie d'une solution polymérique viscoélastique non linéaire ont été étudiés. Les résultats analysent clairement l'effet de la fréquence, de l'amplitude de la pulsation et de la valeur du gradient de pression moyen sur la variation du débit des fluides viscoélastiques.

Les travaux de **Zaman et al. [31]** et **Massoudi et Phuoc [30]** ont été repris par **Sajid et al. [45]**, avec la même géométrie, en incluant un modèle d'un fluide d'Oldroyd-B dépendant du temps.



**Figure I.20.** Géométrie de l'écoulement [45].

Le sang dans la région centrale est modélisé comme un fluide non-newtonien tandis que la région périphérique est supposée se comporter comme un fluide newtonien (Figure **I.20**). Ce nouveau modèle prédit les phénomènes de relaxation et de retardement dans un écoulement pulsé. Les résultats affichent graphiquement l'influence du paramètre pertinent sur diverses grandeurs physiques d'intérêt.

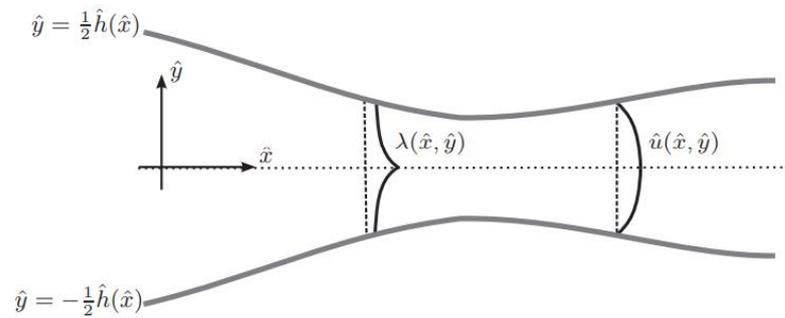
Récemment, **Anand et al. [46]** ont proposé un nouveau modèle pour décrire les caractéristiques rhéologiques du sang (à savoir rhéofluidification par cisaillement et viscoélasticité dépendant de la déformation) dans des écoulements stationnaire et instationnaire, respectivement. Cette étude a permis d'obtenir un ensemble de paramètres qui peuvent être utilisés pour caractériser l'écoulement sanguin dans une géométrie de tube coudé ainsi que dans des géométries 3D plus complexes susceptibles d'être rencontrées dans le système vasculaire humain. Cet ensemble de paramètres est particulièrement pertinent pour simuler l'écoulement dans un anévrisme spécifique à un patient, où il existe à la fois une large gamme de taux de cisaillement et des conditions d'écoulement pulsé. Tant qualitativement que quantitativement, la méthode à trois champs montre un excellent accord avec les résultats publiés sur différents problèmes de référence.

Cependant, le concept de thixotropie est présenté par les systèmes physiologiques et l'expérimentation rhéologique associée a déjà été largement étudiée par plusieurs auteurs :

**Barnes [47]** a présenté l'histoire de la thixotropie, ainsi qu'une description de la façon dont elle est comprise aujourd'hui dans diverses parties de la communauté scientifique. Différents exemples de systèmes thixotropes, théories mathématiques et modèles ont été développés pour décrire ce phénomène. Ensuite, pour évaluer l'état de la compréhension

théorique de la thixotropie, en particulier dans les systèmes viscoélastiques. Leurs résultats obtenus jusqu'à présent ne permettent pas de considérer la modélisation du comportement viscoélastique thixotropique comme un problème résolu. Et pour finir, il est très intéressant de noter que les efforts de calcul tels que la modélisation moléculaire seront très importants dans de telles études en raison du grand nombre de variables qui seraient assurées, tout comme l'introduction de la thixotropie dans les codes CFD.

Récemment, **Pritchard et al. [48]** ont présenté une formulation générale des équations qui gouvernent l'écoulement lent, régulier et bidimensionnel d'un fluide thixotrope ou anti-thixotrope dans un canal dont la largeur varie lentement (Figure **I.21**).

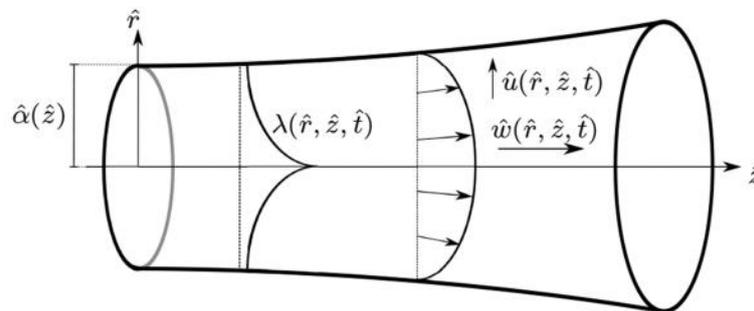


**Figure I.21.** Schéma d'un écoulement régulier et bidimensionnel d'un fluide thixotrope ou anti-thixotrope dans un canal symétrique à variation lente [48].

Des résultats analytiques et semi-analytiques ont été illustrés pour décrire le choix particulier des lois constitutives, y compris un modèle purement visqueux de Moore-Mewis-Wagner et un modèle viscoplastique régularisé de Houška. Leurs résultats permettent également de valider des descriptions de l'écoulement thixotrope en canal, moyennées en section transversale ou réduites d'une autre manière, qui constituent un premier pas vers des modèles de l'écoulement thixotrope dans les milieux poreux, et les utiliser pour expliquer pourquoi de telles descriptions peuvent être inadéquates.

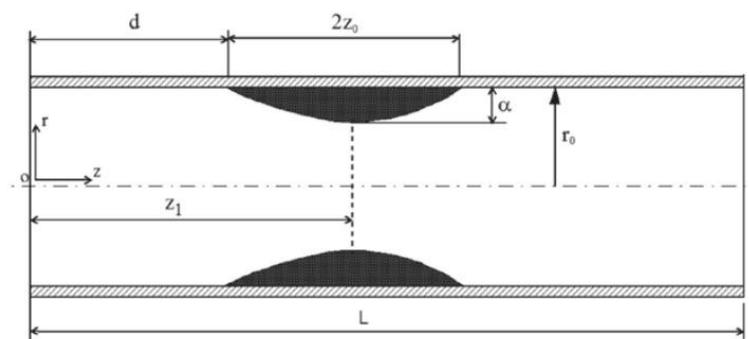
Par ailleurs, **Croudace et al. [49]** ont étudié l'effet thixotrope lorsque la structure mésoscopique interne modifie en fonction de la contrainte de cisaillement (taux de cisaillement) de manière à affecter les propriétés macroscopiques du fluide. Ils ont considéré un écoulement axisymétrique instationnaire d'un fluide incompressible thixotrope ou anti-thixotrope le long d'un tuyau cylindrique de rayon lentement variable, entraîné par un gradient de pression (Figure **I.22**). Les résultats indiquent que la gamme de comportements identifiés

jette un doute sur l'efficacité des approches de réduction de modèle qui postulent une structure d'écoulement transversale générique.



**Figure I.22.** Écoulement axisymétrique instationnaire d'un fluide thixotrope [49].

Par la suite, certains auteurs ont étudié l'écoulement pulsé des fluides thixotropes dans des géométries complexes à différentes conditions aux limites: on citera notamment les travaux de **Nezamidoost et al.** [50] qui ont mis un accent particulier sur l'écoulement à travers un canal rétréci (Figure I.23), qui possède une importance pratique dans l'industrie et la science médicale.

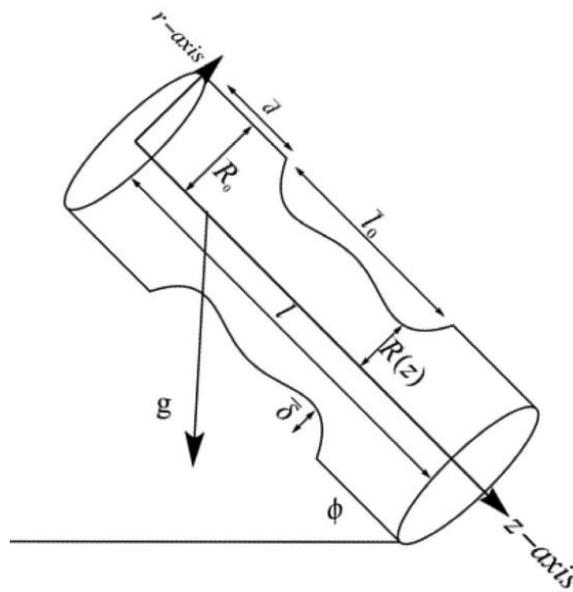


**Figure I.23.** Schéma décrivant la géométrie d'un tube rétréci [50].

Il a été constaté que le modèle de Moore, est le rapport entre la rupture (déstructuration) et l'accumulation (structuration) qui est le paramètre dominant affectant les caractéristiques de l'écoulement. D'autre part, l'amplitude de la pression pulsée ne devrait pas avoir d'effet significatif sur le profil de vitesse, mais elle affecte de façon marquée la distribution de la contrainte de cisaillement à la paroi dans la région rétrécie. En d'autres termes, la contrainte de cisaillement de la paroi augmente avec l'amplitude de la pression pulsatile.

Récemment, la modélisation biomagnétique du flux sanguin et la magnétohydrodynamique (MHD) du sang, c'est-à-dire l'étude de l'effet d'un champ magnétique imposé sur les caractéristiques du flux sanguin, a attiré l'attention de nombreux auteurs biomédicaux, compte tenu de l'importance des multiples domaines d'application de MHD. En effet, dans de nombreuses applications médicales, il a été établi que les champs magnétiques peuvent être utilisés comme technique non intrusive pour la régulation du sang et d'autres écoulements biophysiques.

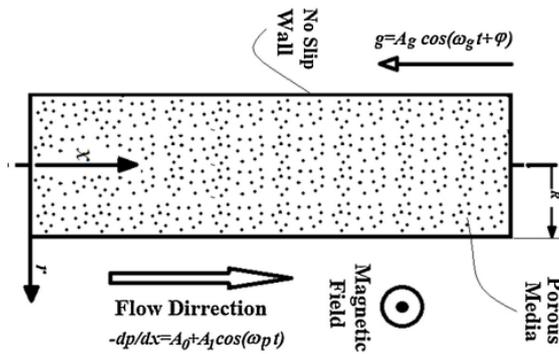
Plus récemment, **Abbas et al. [51]** ont présenté étude théorique et numérique pour résoudre le problème de l'écoulement du sang à travers un vaisseau sanguin artériel sténosé, sous l'action d'une accélération corporelle appliquée de l'extérieur et d'un gradient de pression périodique. Le sang est considéré comme un fluide électriquement conducteur (Figure I.24). Un schéma de différences finies est utilisé pour obtenir la solution du problème. Les résultats ont été tracés graphiquement pour analyser les effets des paramètres impliqués sur la vitesse du fluide, le débit, la contrainte de cisaillement de la paroi et la résistance à l'écoulement.



**Figure I.24.** Schéma d'un vaisseau sanguin avec sténose [51].

Leur étude révèle que le champ magnétique appliqué et l'accélération périodique du corps ont des effets considérables sur le champ d'écoulement.

Par la suite, l'écoulement magnétohydrodynamique pulsé instationnaires du sang à travers une artère poreuse sous l'effet d'une accélération périodique du corps imposée de l'extérieur (Figure I.25), a été examiné numériquement par **Akbarzadeh [52]**.

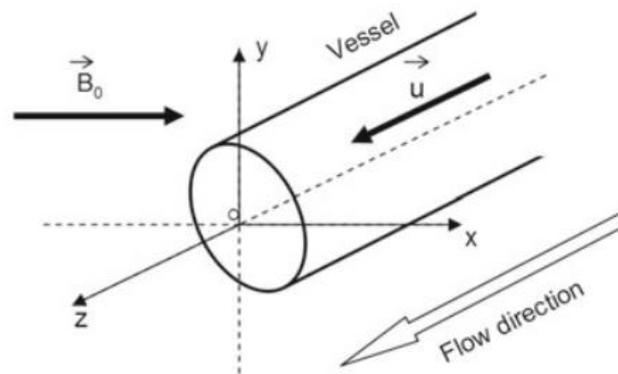


**Figure I.25.** Schéma de l'écoulement magnétohydrodynamique du sang à travers une artère poreuse [52].

En considérant le sang comme un fluide non-newtonien de troisième ordre, la méthode de perturbation a été utilisée pour résoudre les équations gouvernantes non linéaires et par conséquent, une expression analytique pour le profil de vitesse a été obtenue. Certaines conclusions ont été tirées à savoir : lorsque le paramètre de Womersley est faible, les forces visqueuses ont tendance à dominer l'écoulement, les profils de vitesse sont de forme parabolique, et la vitesse de la ligne centrale oscille en phase avec le gradient de pression d'entraînement. De plus, en augmentant le gradient de pression, la valeur moyenne du profil de vitesse augmente et l'amplitude de la vitesse reste constante.

Plusieurs applications biomédicales nécessitent une bonne connaissance de la physique de l'écoulement sanguin et de la propagation des impulsions de pression dans un vaisseau déformable, en présence d'un champ magnétique statique externe. Par conséquent, **Drochon [53]** a fourni une solution analytique pour l'écoulement sinusoïdal du sang dans un vaisseau élastique cylindrique exposé à un champ magnétique externe. Le vaisseau est représenté par une conduite cylindrique où le sang s'écoule le long de l'axe  $O_z$ , en présence d'un champ magnétique permanent transversal orienté dans la direction  $O_x$  (Figure **I.26**).

Il a été démontré que le champ magnétique externe a une influence sur les vitesses des ondes, sur les profils de vitesse du fluide, et sur les déplacements de la paroi. Ces effets deviennent détectables pour des valeurs élevées du nombre de Hartmann ( $H > 4$ , correspondant à  $B_0 > 36$  avec des données numériques se rapportant à de grandes artères humaines) et restent négligeables dans le contexte de l'imagerie par résonance magnétique.



**Figure I.26.** Géométrie du modèle d'écoulement [53].

## I.5. Conclusion

Suite à cette synthèse bibliographique, il est prévu que les aspects de l'hémodynamique et de l'hémorhéologie seront éventuellement couverts, allant de la rhéologie du sang et des vaisseaux sanguins et de la mécanique des écoulements sanguin dans les artères et les veines aux phénomènes très complexes de la microcirculation. Au même titre, nous constatons que la revue de la littérature est riche par les travaux accumulés au cours de ces dernières années et ayant conduit à une imposante bibliographie riche et spécialisée. Par conséquent, notre étude intitulée « *Etude numérique des écoulements pulsés de fluides Newtoniens et Non-Newtoniens thixotropes. Application biomédicale* » s'inscrit pleinement dans l'axe de développement souhaitable, en ce qui concerne le domaine biomédical, et propose d'étudier numériquement le phénomène physique lié à l'écoulement du sang d'un fluide Newtonien dans un canal biologique en considérant plusieurs paramètres. On traitera aussi, la caractéristique rhéologique qui dépend du temps de type thixotrope, le gradient de pression oscillant qui génère le mouvement, la force d'accélération périodique externe et la présence d'un champ magnétique uniforme (MHD), Ceci étant dicté par le besoin de comprendre les différents mécanismes ayant lieu particulièrement dans le domaine de la modélisation des écoulements sanguins à travers les artères. L'analyse des différents résultats doit permettre de concevoir de nouveaux travaux numériques nécessaires pour parvenir à une interprétation des résultats expérimentaux de la littérature.

**Chapitre II :**  
**Rhéologie des fluides complexes**

## Chapitre II

# Rhéologie des fluides complexes

### II.1. Introduction

La rhéologie est une branche de la physique qui étudie les déformations et les écoulements de la matière sous l'effet des contraintes qui leur sont appliquées en tenant compte du temps (ou vitesse d'application de contraintes). La science de la rhéologie reste un mystère pour la plupart des gens, et même pour certains scientifiques. L'écoulement non newtonien et la rhéologie sont des questions fondamentalement multidisciplinaires par nature et ont un large éventail d'applications [54].

Les fluides dits non-newtoniens, sont souvent rencontrés dans de nombreux domaines de la mécanique des fluides de l'ingénierie ainsi que dans les domaines biomédicaux, et présentent des caractéristiques intéressantes, utiles et même passionnantes, différentes de celles des fluides newtoniens.

Ce chapitre constitue une partie introductive essentielle à l'ensemble du travail réalisé. Il est nécessaire d'examiner d'abord quelques définitions clés et propriétés spécifiques. Une fois établis, elles seront utilisées pour construire des lois et des principes importants qui constituent le fondement de la mécanique des fluides. Pour commencer, nous allons définir ce que nous entendons par l'analyse des phénomènes de la mécanique des fluides qui est basée sur la résolution simultanée d'un certain nombre d'équations représentant certaines lois physiques à savoir : la conservation de masse et la conservation de quantité de mouvement. Ces équations sont valables pour tout fluide complexe ou non, qui seront utilisés tout au long de ce travail. Quelques notations et concepts de base tels que le vecteur vitesse et le tenseur des contraintes ont été introduites. Par la suite, les différentes lois de comportements et leurs modèles rhéologiques ont été aussi présentés.

### II.2. Notions fondamentales de la mécanique des fluides

#### II.2.1. Equations gouvernantes

Le mouvement du fluide est décrit à l'aide des équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement.

Dans ce qui suit, nous commencerons par établir les propriétés de base ou lois de conservation qui, à leur tour, impliquent plusieurs variables d'intérêt.

### II.2.1.1. Conservation de la masse

L'expression locale du principe de conservation de la masse peut s'écrire sous la forme suivante:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}) = 0 \quad (\text{II.1})$$

Où  $\rho$  est la masse volumique,  $t$  le temps et  $\vec{V}$  le vecteur vitesse. Cette équation est connue sous le nom de l'équation de continuité. Dans le cas où le fluide satisfait à la condition d'incompressibilité, c'est-à-dire que la masse volumique est constante dans l'espace et dans le temps, l'équation **II.1** se réduit alors :

$$\text{div}(\vec{V}) = 0 \quad (\text{II.2})$$

La divergence du champ de vitesse en coordonnées cartésiennes  $\nabla \cdot \vec{V}$  est définie comme suit :

$$\text{div}(\vec{V}) = \nabla \cdot \vec{V} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (\text{II.3})$$

Où  $(v_x, v_y, v_z)$  sont les composantes de la vitesse dans les directions  $(x, y$  et  $z)$ .

### II.2.1.2. Conservation de la quantité de mouvement

La conservation de la quantité de mouvement signifie que la quantité de mouvement de la matière ne peut être modifiée sans l'action d'une force. Si une force agit sur un corps, alors, selon la loi du mouvement de Newton, le taux de changement de la quantité de mouvement du corps est égal à la force. L'équation de mouvement peut être écrite localement sous la forme différentielle suivante:

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \nabla \cdot \overline{\overline{\sigma}} + \rho \vec{f} \quad (\text{II.4})$$

$\overline{\overline{\sigma}}$  est le tenseur de contrainte de Cauchy,  $\vec{f}$  désigne les forces de volume externes appliquée au fluide, et  $d/dt$  est la dérivée particulière où temporelle, donnée par la relation suivante:

$$\frac{d(\bullet)}{dt} = \frac{\partial(\bullet)}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)(\bullet) \quad (\text{II.5})$$

Le tenseur des contraintes est donné alors, par la relation suivante :

$$\overline{\overline{\sigma}} = -P\overline{\overline{I}} + \overline{\overline{\tau}} \quad (\text{II.6})$$

La résultante des forces extérieures  $\overline{\overline{f}}$ , peut être selon le problème étudié une force de gravité,  $\overline{\overline{f}} = \overline{\overline{G}}$  une force électromagnétique ( $\overline{\overline{f}} = \overline{\overline{j}} \wedge \overline{\overline{B}}$ ) ou toute autre force volumique s'appliquant sur le fluide en mouvement.

L'équation du mouvement peut alors s'écrire :

$$\rho \left( \frac{\partial \overline{\overline{V}}}{\partial t} + \left( \overline{\overline{V}} \cdot \overline{\overline{grad}} \right) \cdot \overline{\overline{V}} \right) = -\overline{\overline{\nabla}} p + \overline{\overline{\nabla}} \cdot \overline{\overline{\tau}} + \rho \overline{\overline{f}} \quad (\text{II.7})$$

Les équations ci-dessus (II.1) et (II.7) sont communément appelées équations de continuité et de quantité de mouvement. L'équation (II.7) est aussi appelée équation de Navier-Stokes pour les fluides incompressibles newtoniens. Les équations de continuité et de Navier-Stokes peuvent également être dérivées dans plusieurs systèmes de coordonnées spatiales et sont donc données en coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques dans les annexes (A, B, C).

## II.2.2. Tenseur des contraintes

L'état de contrainte en tout point du fluide est décrit par le tenseur des contraintes  $\overline{\overline{\sigma}}$ . Celui-ci se décompose en deux parties, selon l'équation II.6 :

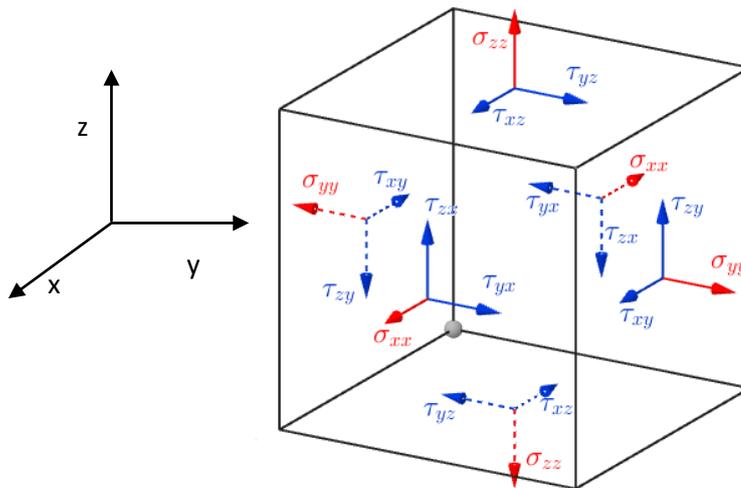


Figure II.1. Composantes du tenseur des contraintes.

1 Une partie isotrope, homogène à une pression :  $p\bar{I}$  ( $p$  : Pression hydrostatique,  $\bar{I}$  : Tenseur unitaire).

Une partie  $\bar{\tau}$ , qui contribue à la déformation du matériau et qui se rapporte aux contraintes de viscosité, d'élasticité, en rapport avec le fluide en mouvement.

Dans le cadre de la mécanique des milieux continus, les contraintes et les déformations sont représentées sous forme tensorielle. Dans un système de coordonnées cartésiennes (Figure II.1), le tenseur des contraintes  $\bar{\sigma}$  pour une particule fluide en mouvement représente alors, par :

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} \quad (\text{II.8})$$

Où :  $\sigma_{ii}$  sont les contraintes normales, et  $\sigma_{ij}$  sont les contraintes de cisaillement locale ( $i \neq j$ ).

Les composantes de la contrainte de cisaillement locale associées et normale peuvent être écrites de la manière suivante :

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right); \quad \sigma_{xx} = -p + \tau_{xx} = -p + 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} \quad (\text{II.9a, b})$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right); \quad \sigma_{yy} = -p + \tau_{yy} = -p + 2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} \quad (\text{II.10a, b})$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right); \quad \sigma_{zz} = -p + \tau_{zz} = -p + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (\text{II.11a, b})$$

Le tenseur des contraintes de cisaillement locales est symétrique :  $\tau_{ij} = \tau_{ji}$

Le tenseur des extra-contraintes (le déviateur des contraintes)  $\bar{\tau}$  est lié au tenseur des taux de déformation  $\bar{D}$  et permet d'aboutir à un classement des fluides.

### II.2.3. Tenseur des taux de déformation

Dans le contexte de l'étude des lois de comportement, un intérêt naturel est donc porté au tenseur des taux de déformation  $\bar{D}$ , et qui ne contient d'ailleurs que les mouvements de cisaillement relatifs. Dans un écoulement de fluide visqueux, les éléments fluides se déplacent

à des vitesses variables dans le domaine de l'écoulement. Le tenseur des taux de déformations, noté  $\overline{\overline{D}}$ , peut être exprimé par :

$$\overline{\overline{D}} = \frac{1}{2} \left[ \left( \overline{\overline{\nabla V}} \right) + \left( \overline{\overline{\nabla V}} \right)^T \right]; \quad D_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{II.12})$$

Où :  $\left( \overline{\overline{\nabla V}} \right) = \overline{\overline{L}}$  désigne le tenseur gradient de vitesse ; et  $\left( \overline{\overline{\nabla V}} \right)^T = \overline{\overline{L}}^T$  est la transposée du tenseur gradient de vitesse.

Le gradient de vitesse est défini comme suit :

$$\overline{\overline{L}} = \begin{pmatrix} L_{xx} & L_{xy} & L_{xz} \\ L_{yx} & L_{yy} & L_{yz} \\ L_{zx} & L_{zy} & L_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (\text{II.13})$$

Donc, suivant les équations (II.12) et (II.13), on admet l'expression tensorielle du tenseur taux de déformation  $\overline{\overline{D}}$  :

$$\overline{\overline{D}} = \frac{1}{2} (L + L^T) = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (\text{II.17})$$

#### II.2.4. Tenseur des taux de rotation

Le tenseur des taux de rotation noté  $\overline{\overline{W}}$ , est la partie antisymétrique du tenseur gradient de vitesse, soit :

$$\overline{\overline{W}} = \frac{1}{2} \left[ \left( \overline{\overline{\nabla V}} \right) - \left( \overline{\overline{\nabla V}} \right)^T \right]; \quad W_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_j} - \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{II.18})$$

Son expression tensorielle s'écrit comme :

$$\overline{\overline{W}} = \frac{1}{2}(L - L^T) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) & -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y}\right) & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(II.19)}$$

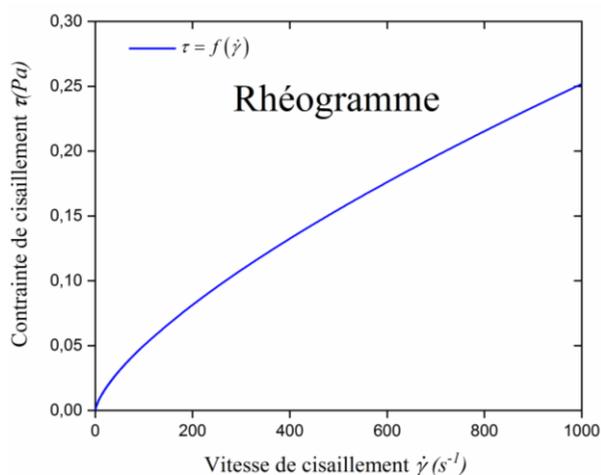
### II.3. Rhéologie

La rhéologie est la science des déformations et écoulements de la matière, des contraintes qui en résultent et des efforts qu'il faut appliquer pour les obtenir. Cette science repose sur les bases de la mécanique des milieux continus, dont l'objet est de déterminer les contraintes et les déformations en chaque point d'un milieu continu. Elle consiste à déterminer la relation qui relie la contrainte de cisaillement aux taux de déformation. Cette relation peut être linéaire ou non-linéaire dans le cas d'un fluide complexe. Ces fluides complexes dits aussi non-newtoniens sont caractérisés différemment, soit parce que la viscosité évolue en fonction de cisaillement soit parce qu'il apparaît des termes diagonaux dans le tenseur des contraintes qui sont le signe d'effets élastiques (viscoélasticité). Naturellement, en raison de la grande variété de comportements des fluides, il existe de nombreux modèles dont la complexité, la précision et la généralité varient [55].

Un objet ou un corps est dit déformé si sa forme ou sa taille est modifiée par l'action de forces appropriées sur lui. Si le degré de déformation change continuellement en fonction du temps, on dit que le corps s'écoule.

### II.4. Courbe rhéologique

La figure (II.2) est une représentation graphique (rhéogramme) du comportement rhéologique d'un fluide sous cisaillement, elle est obtenue à partir de rhéomètre. Cette illustration constitue une base de données nécessaire pour une modélisation mathématique, laquelle donnera lieu à un modèle rhéologique représentatif du comportement du fluide. Le rhéogramme décrit l'évolution de la contrainte de cisaillement en fonction de la vitesse de déformation à pression et température constantes.



**Figure II.2.** Dépendance de la contrainte de cisaillement par rapport au taux de cisaillement (courbe d'écoulement) d'un fluide.

## II.5. Principaux types de comportement

### II.5.1. Comportement newtonien

En 1687, Newton réalise une expérience simple démontrant l'influence de la viscosité des fluides sur sa mise en écoulement. L'expérience consiste à cisailier un matériau à l'état pâteux, fondu ou bien encore liquide entre deux plaques dont l'une est fixe et l'autre est animée d'un mouvement sous l'action d'une force  $F$ .

Considérons une couche mince d'un fluide contenue entre deux plans parallèles séparés par une distance  $h$ , comme le montre la figure (II.3). Maintenant, si dans des conditions stables, le fluide est soumis à un cisaillement par l'application d'une force  $F$  comme indiqué, celle-ci sera équilibrée par une force de friction interne égale et opposée dans le fluide.

Alors on assiste à un écoulement dit laminaire et une distribution de vitesse linéaire est obtenue en l'absence d'un gradient de pression, en régime permanent, entre la plaque fixe et la plaque mobile. La contrainte de cisaillement résultante est égale au produit du taux de cisaillement et de la viscosité du fluide. Dans ce cas simple, le taux de cisaillement peut être exprimé comme le gradient de vitesse dans la direction perpendiculaire à celle de la force de cisaillement, c'est-à-dire, que les couches fluide en contact avec les deux parois planes sont collées à ces dernières ; ce qui est connu sous l'hypothèse de non-glissement au niveau de la paroi. Cette absence de glissement est causée essentiellement par la viscosité du fluide. Cette dernière est synonyme de friction interne et est une mesure de la résistance à l'écoulement.

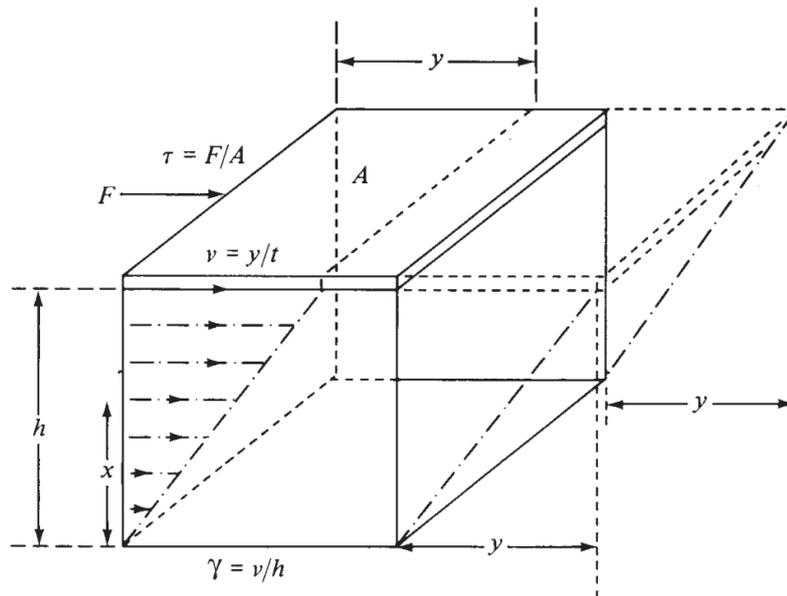
$$\frac{F}{A} = \tau_{yx} = \mu \left( -\frac{dv_x}{dy} \right) = \mu \dot{\gamma}_{yx} \quad (\text{II.22})$$

La force par unité de surface nécessaire pour produire le mouvement est  $F/A$  et est désignée par  $\tau$  [Pa] est proportionnelle au gradient de vitesse. La loi de Newton peut alors s'écrire comme :

$$\tau = \mu \dot{\gamma} \quad (\text{II.23})$$

Où  $\dot{\gamma}$  représente la vitesse de cisaillement [ $s^{-1}$ ] (ou taux de cisaillement) qui caractérise la variation de la vitesse entre les couches limites, elle s'écrit comme :

$$\dot{\gamma} = \frac{dv_x}{dy} \quad (\text{II.24})$$



**Figure II.3.** Cisaillement simple entre deux plans parallèles.

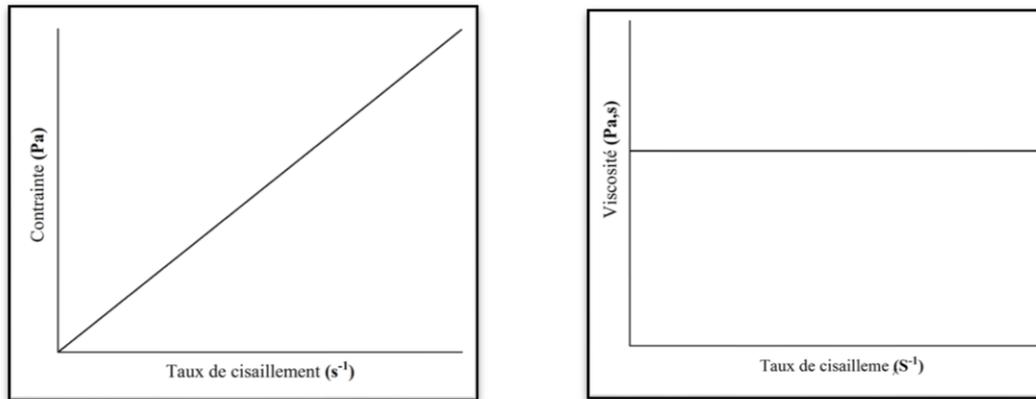
Dans ce cas du cisaillement simple, la constante de proportionnalité du fluide est appelée le coefficient de viscosité dynamique  $\mu$  [Pa.s], elle est donnée par :

$$\mu = \frac{\tau}{\dot{\gamma}} \quad (\text{II.25})$$

On parle d'un fluide newtonien quand la viscosité est constante quelle que soit la contrainte ou le taux de cisaillement appliquée. On peut alors définir dans ce cas la viscosité cinématique  $\nu$  [ $m^2.s^{-1}$ ], mesurée lorsque la force de gravité est le seul moteur de l'écoulement, elle est définie comme suit :

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (\text{II.26})$$

Les viscosités dynamiques et cinématiques sont très dépendantes de la température et indépendant de la contrainte appliquée et de la durée de cisaillement. Pour un liquide : elle diminue avec la température (La viscosité du fluide diminue à mesure que la température augmente), et pour un gaz : c'est l'inverse, la viscosité augmente avec la température.



**Figure II.4.** Comportement newtonien.

Le comportement newtonien est un comportement d'écoulement avec une relation linéaire simple entre la contrainte de cisaillement et le taux de cisaillement (Figure II.4). Cette relation est connue sous le nom de loi de Newton, dans laquelle la contrainte de cisaillement est égale au produit de la viscosité et du taux de cisaillement.

D'un point de vue plus général et en utilisant l'écriture sous forme tensorielle, l'état de contrainte d'un fluide Newtonien en mouvement est donné par :

$$\overline{\overline{\sigma}} = -p\overline{\overline{I}} + \overline{\overline{\tau}} \quad (\text{II.27})$$

Où  $p$  désigne la pression statique du fluide.

Pour un fluide incompressible :

$$\overline{\overline{\tau}} = 2\mu\overline{\overline{D}} \quad (\text{II.28})$$

Au final la loi de comportement d'un fluide Newtonien incompressible s'énonce simplement :

$$\overline{\overline{\sigma}} = -p\overline{\overline{I}} + 2\mu\overline{\overline{D}} \quad (\text{II.29})$$

Ici  $\overline{D} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$  est le tenseur des taux de déformation.

Le comportement newtonien dans les expériences menées à température et pression constantes présente les caractéristiques suivantes :

- Les seules contraintes créées par l'écoulement sont des contraintes de cisaillement.
- La viscosité ne dépend que de la nature du fluide, pour une température et pression donnée.
- La viscosité est indépendante du temps et du taux de cisaillement, et les contraintes s'annulent immédiatement lorsque l'écoulement s'arrête.

## II.5.2. Comportement non-newtonien

Dans le cas des fluides non-newtoniens, le concept de viscosité constante habituellement utilisé en mécanique des fluides pour caractériser les propriétés de cisaillement d'un fluide n'est pas tout à fait adéquat. Au lieu de cela, ils sont mieux étudiés à travers plusieurs autres propriétés rhéologiques liées aux tenseurs de vitesse de contrainte et de déformation dans de nombreuses conditions d'écoulement différentes qui sont mesurées à l'aide de différents appareils ou rhéomètres.

Un fluide non-newtonien est un fluide dont la courbe d'écoulement (contrainte en fonction du taux de cisaillement) est non linéaire, où la viscosité apparente n'est pas constante et qui dépend des conditions d'écoulement telles que la géométrie de l'écoulement, le taux de cisaillement, et parfois même de l'histoire cinématique de l'élément fluide considéré. Par conséquent, les fluides non-newtoniens peuvent être classés en quatre catégories principales à savoir:

- Fluides non-newtoniens indépendants du temps
- Fluides non-newtoniens dépendants du temps.

### II.5.2.1. Fluides non-newtoniens indépendants du temps

En rhéologie et de manière simple, un fluide non-newtonien correspond à un fluide dont la viscosité dépend du taux de cisaillement. La dépendance du taux de cisaillement est l'une des caractéristiques les plus importantes et les plus déterminantes des fluides non-newtoniens en général et des fluides indépendants du temps en particulier.

Dans cette section, nous présentons les trois catégories principales des fluides indépendants du temps :

- Fluides rhéofluidifiants ou pseudoplastiques
- Fluides rhéoépaississants ou dilatants
- Fluides à seuil

### ***II.5.2.1.1. Fluides rhéofluidifiants ou pseudoplastiques***

Le type le plus courant de comportement de fluide non-newtonien indépendant du temps et largement rencontré dans la pratique de l'ingénierie. Dans la grande majorité des cas, on a constaté que la viscosité diminuait avec l'augmentation du taux de cisaillement, donnant lieu à ce que l'on appelle généralement un comportement rhéofluidifiant.

Le graphe correspondant à la contrainte de cisaillement en fonction du taux de cisaillement est également donné à la figure (II.5a) où cette représentation apparaît plus intéressante au fur et à mesure que le taux de cisaillement augmente, la contrainte est inférieure à celle d'un fluide newtonien (figure II.4), c'est-à-dire que la viscosité diminue. Cependant, plus les fluides sont cisailés, plus ils s'écoulent facilement.

De nombreuses solutions de polymères présentent cette caractéristique. Une application pratique a été trouvée dans les peintures : le comportement rhéofluidifiant de la peinture lui permet de s'étaler facilement sur un mur car elle est soumise à un fort cisaillement par le pinceau et prévient la formation de gouttes car la viscosité croît considérablement lorsque le cisaillement diminue, c'est-à-dire lorsque le pinceau est retiré.

### ***II.5.2.1.2. Fluides rhéoépaississants ou dilatants***

Les fluides dilatants sont similaires aux fluides pseudoplastiques dans le sens où elle ne présente pas de limite d'élasticité, mais les caractéristiques de fluides dont la viscosité augmente lorsqu'ils sont fortement cisailés. Ce comportement est généralement appelé "épaississement par cisaillement", bien que le terme "dilatation" ait également été utilisé.

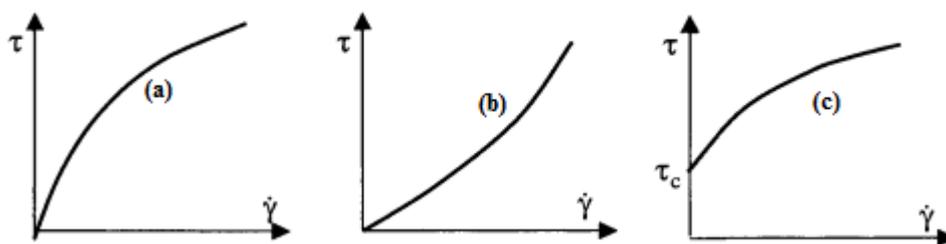
Nous verrons qu'il existe des cas (bien que peu nombreux) où la viscosité augmente avec le taux de cisaillement. Pour les matériaux qui s'épaississent par cisaillement, la forme générale de la courbe qui représente la variation de la contrainte de cisaillement en fonction de taux de cisaillement est illustrée à la figure (II.5b).

Il existe quelques exemples bien connus. Une solution est facile à réaliser (l'expérience de maïzena): il suffit de verser une petite quantité d'eau dans la farine, en mélangeant doucement jusqu'à ce que le mélange ait un aspect liquide. On peut alors aisément constater la dilatation du fluide. Lorsque nous posons notre main sur le mélange, elle s'enfonce doucement. Si maintenant on frappe la surface du mélange, on constate que la main ne s'enfonce pas, et que le mélange semble solide. On déduit de cette expérience que lorsqu'on applique une certaine contrainte sur le mélange, ici la force de notre main, il a tendance à se solidifier, c'est-à-dire que sa viscosité augmente.

### II.5.2.1.3. Fluides à seuil ou viscoplastique

C'est le type de comportement des fluides non-newtoniens dont la principale caractéristique est de pouvoir se déformer indéfiniment lorsqu'ils sont soumis à une contrainte supérieure à une valeur critique, sinon, ils se déforment de manière finie, comme des solides. Afin de décrire leur écoulement, à savoir leur réponse à une sollicitation, nous nous plaçons dans le cadre de la mécanique des milieux continus.

La dernière catégorie de fluides complexes est celle des fluides à seuil. Comme on peut le constater sur la figure (II.5c), le taux de cisaillement d'un tel fluide demeure nul tant que la contrainte n'a pas atteint une valeur critique appelée contrainte seuil. En-dessous du seuil, sa viscosité est infinie car la contrainte est non nulle alors que le taux de cisaillement est absolument nul. Ces fluides sont donc susceptibles de supporter une contrainte tout en résistant à l'écoulement.



**Figure II.5.** Rhéogramme des différents comportements. (a) : fluide rhéofluidifiant; (b) : fluide rhéoépaississant ; (c) : fluide à seuil [56].

### II.5.2.2. Modèles rhéologiques des fluides indépendants du temps

Les modèles rhéologiques permettent de modéliser le comportement des matériaux, autrement dit de simuler leur réponse à une contrainte mécanique.

Pour les fluides non newtoniens, puisque la viscosité dépend du taux de cisaillement, il est approprié de définir la viscosité apparente à un taux de cisaillement particulier, qui est le rapport entre la contrainte et le taux de déformation à ce point. Nombreux modèles empiriques, ont été conçus pour décrire les comportements rhéologiques les plus fréquemment rencontrés. Plusieurs modèles ont été proposés pour décrire correctement le comportement non-newtonien indépendant du temps. Le comportement général des fluides indépendants du temps peut être formulé comme suit :

$$\tau = f(\dot{\gamma}) \quad (\text{II.30})$$

#### II.5.2.2.1. Loi de puissance ou le modèle d'Ostwald de Waele

Cette loi permet de décrire une classe importante de fluides non-newtoniens purement visqueux. Un des caractères non-newtoniens le plus répandu est la variation de la viscosité avec la vitesse de cisaillement. Ce modèle est aussi appelé fluide d'Ostwald de Waele [54, 56-57], le comportement rhéologique de cette catégorie de fluide est décrit par une loi de puissance du type :

$$\tau = k\dot{\gamma}^n \quad (\text{II.31})$$

Ou, en termes de viscosité :

$$\mu = k\dot{\gamma}^{n-1} \quad (\text{II.32})$$

Où  $k$  est une mesure de la consistance de la substance de l'écoulement et  $n$  décrit la tendance d'un fluide à devenir plus ou moins visqueux avec un taux de cisaillement variable (indice de l'écoulement).

Lorsque  $n < 1$ , la viscosité diminue avec l'augmentation du cisaillement, ce qui est connu comme un comportement rhéofluidifiant (ou pseudoplastique). Lorsque  $n > 1$ , la viscosité augmente avec le cisaillement. Comportement rhéoépaississant (ou dilatant). Lorsque  $n = 1$ , la viscosité ne dépend plus du taux de cisaillement, on retrouve donc un comportement newtonien.

En notation tensorielle il est plus commode d'écrire :

$$\overline{\overline{\sigma}} = -p\overline{\overline{I}} + \overline{\overline{\tau}} \quad (\text{II.33})$$

Avec :

$$\overline{\overline{\tau}} = k \left| \overline{\overline{\dot{\gamma}}} \right|^{n-1} \overline{\overline{D}} \quad (\text{II.34})$$

$$\left| \overline{\overline{\dot{\gamma}}} \right| = \sqrt{2\overline{\overline{D}} : \overline{\overline{D}}} \quad (\text{II.35})$$

Où  $\left| \overline{\overline{\dot{\gamma}}} \right|$  est le deuxième invariant du tenseur des taux de déformation et  $k$  et  $n$  sont respectivement l'indice de consistance et l'indice d'écoulement.

### II.5.2.2.2. Modèle de Carreau

Lorsqu'il existe des écarts importants par rapport au modèle de loi de puissance à des taux de cisaillement très élevés et très faibles, il est nécessaire d'utiliser un modèle qui prend en compte les valeurs limites des viscosités  $\mu_0$  et  $\mu_\infty$  à des taux de cisaillement nuls et infinis, respectivement. Carreau [54, 56-57] a présenté le modèle de viscosité suivant :

$$\frac{\mu - \mu_\infty}{\mu_0 - \mu_\infty} = \left( 1 + (\lambda \dot{\gamma})^2 \right)^{(n-1)/2} \quad (\text{II.36})$$

Ce modèle prédit le comportement de fluide Newtonien  $\mu = \mu_0$  lorsque  $n = 1$  ou  $\lambda = 0$  ou les deux.

En notation tensorielle il est plus commode d'écrire :

$$\overline{\overline{\sigma}} = -p\overline{\overline{I}} + \overline{\overline{\tau}} \quad (\text{II.37})$$

Avec :

$$\overline{\overline{\tau}} = \mu \left( \left| \overline{\overline{\dot{\gamma}}} \right| \right) \overline{\overline{D}} \quad (\text{II.38})$$

Avec :

$$\mu \left( \left| \overline{\overline{\dot{\gamma}}} \right| \right) = \mu_\infty + (\mu_0 - \mu_\infty) \left( 1 + \left( \lambda \left| \overline{\overline{\dot{\gamma}}} \right| \right)^2 \right)^{(n-1)/2} \quad (\text{II.39})$$

$$\left| \overline{\overline{\dot{\gamma}}} \right| = \sqrt{2\overline{\overline{D}} : \overline{\overline{D}}} \quad (\text{II.40})$$

Où  $\left| \overline{\overline{\dot{\gamma}}} \right|$  est le deuxième invariant du tenseur des taux de déformation.

### II.5.2.2.3. Modèle de Cross

Dans le but de rectifier certaines faiblesses de la loi de puissance, cross [54, 56-57] a présenté le modèle plus complexe qui a été largement acceptée dans la littérature. Ce modèle de viscosité permet aux données d'être ajustées sur une gamme étendue de taux de cisaillement. Le modèle peut s'écrire comme suit :

$$\frac{\mu - \mu_{\infty}}{\mu_0 - \mu_{\infty}} = \frac{1}{(1 + (\lambda \dot{\gamma})^n)} \quad (\text{II.41})$$

Au taux de cisaillement élevé, la viscosité apparente est bien inférieure à la viscosité de cisaillement nulle et le modèle peut donc être approché comme suit :

$$\mu = \mu_{\infty} + \frac{\mu_0}{(\lambda \dot{\gamma})^n} \quad (\text{II.42})$$

Ce modèle se réduit au modèle newtonien lorsque  $k=0$ . De même, lorsque  $\mu \ll \mu_0$  et  $\mu \gg \mu_{\infty}$  se réduit au modèle de loi en puissance (équation II.31).

En notation tensorielle il est plus commode d'écrire :

$$\overline{\overline{\sigma}} = -p\overline{\overline{I}} + \overline{\overline{\tau}} \quad (\text{II.43})$$

Avec :

$$\overline{\overline{\tau}} = \mu \left( \left| \overline{\overline{\dot{\gamma}}} \right| \right) \overline{\overline{D}} \quad (\text{II.44})$$

La viscosité apparente correspondante est donnée par:

$$\mu \left( \left| \overline{\overline{\dot{\gamma}}} \right| \right) = \mu_{\infty} + \frac{\mu_0 - \mu_{\infty}}{\left( 1 + \left( \lambda \overline{\overline{\dot{\gamma}}} \right)^n \right)} \quad (\text{II.45})$$

Où:

$$\left| \overline{\overline{\dot{\gamma}}} \right| = \sqrt{2\overline{\overline{D}} : \overline{\overline{D}}} \quad (\text{II.46})$$

Où  $\left| \overline{\overline{\dot{\gamma}}} \right|$  est le deuxième invariant du tenseur des taux de déformation.

#### II.5.2.2.4. Modèle d'Ellis

Le modèle Ellis utilise la contrainte au lieu du taux de cisaillement comme variable indépendante. Le modèle d'Ellis est une illustration de la forme suivante :

$$\mu = \frac{\mu_0}{1 + \left( \frac{\tau}{\tau_{1/2}} \right)^{\alpha-1}} \quad (\text{II.47})$$

Où  $\mu_0$  est la viscosité de cisaillement nulle et les autres paramètres de l'expression, à savoir  $\alpha$  et  $\tau_{1/2}$ , sont déterminés à partir du meilleur ajustement des données sur la contrainte de cisaillement en fonction de la viscosité. Ici, pour l'effet pseudoplastique,  $\alpha$  doit être  $>1$ . Il est facile de voir qu'à une valeur très élevée de  $\tau_{1/2}$ , le modèle devient un modèle de fluide newtonien et à  $\frac{\tau}{\tau_{1/2}} \gg 1$ , le modèle devient un modèle de loi de puissance.

#### II.5.2.2.5. Modèle de Bingham

Le modèle de Bingham [54, 56-57] s'agit du modèle empirique le plus simple pour décrire le comportement rhéologique des fluides à seuils. En cisaillement simple, la contrainte suit la loi unidimensionnelle suivante :

$$\begin{cases} \tau = \tau_0 + \mu \dot{\gamma} & \tau \geq \tau_0 \\ \dot{\gamma} = 0 & \tau < \tau_0 \end{cases} \quad (\text{II.48})$$

En notation tensorielle il est plus commode d'écrire :

$$\overline{\overline{\sigma}} = -p \overline{\overline{I}} + \overline{\overline{\tau}} \quad (\text{II.49})$$

Avec :

$$\begin{cases} \overline{\overline{\tau}} = \left( \frac{\tau_0}{|\overline{\overline{\dot{\gamma}}}|} + \mu \right) \overline{\overline{D}} & \tau > \tau_0 \\ \overline{\overline{\dot{\gamma}}} = 0 & \tau \leq \tau_0 \end{cases} \quad (\text{II.50})$$

Dans ce cas, la viscosité apparente correspondante est donnée par :

$$\mu\left(\left|\dot{\gamma}\right|\right) = \frac{\tau_0}{\left|\dot{\gamma}\right|} + \mu \quad (\text{II.51})$$

Où:

$$\left|\dot{\gamma}\right| = \sqrt{2\overline{D:D}} \quad (\text{II.52})$$

Où  $|\dot{\gamma}|$  est le deuxième invariant du tenseur des taux de déformation.

### II.5.2.2.6. Modèle Herschel-Bulkley

Comme nous l'avons déjà mentionné, les comportements élémentaires non-newtoniens présentés ci-dessus sont généralement combinés de sorte que, par exemple, un fluide peut présenter un comportement rhéofluidifiant et avoir également une contrainte seuil d'écoulement. Le modèle empirique de Herschel-Bulkley combine la contrainte seuil avec la dépendance de la viscosité du taux de cisaillement. Le modèle d'Herschel-Bulkley est une simple généralisation du modèle plastique de Bingham.

Le modèle d'Herschel-Bulkley est décrit par la loi suivante :

$$\overline{\sigma} = -p\overline{I} + \overline{\tau} \quad (\text{II.53})$$

Avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{\tau} = \left( \frac{\tau_0}{\left|\dot{\gamma}\right|} + k \left|\dot{\gamma}\right|^{n-1} \right) \overline{D} \quad \tau > \tau_0 \\ \overline{\tau} = 0 \quad \tau \leq \tau_0 \end{array} \right. \quad (\text{II.54})$$

Dans ce cas, la viscosité apparente correspondante est donnée par :

$$\mu\left(\left|\dot{\gamma}\right|\right) = \frac{\tau_0}{\left|\dot{\gamma}\right|} + k \left|\dot{\gamma}\right|^{n-1} \quad (\text{II.55})$$

Où  $k$  est la consistance du fluide,  $n$  son indice d'écoulement et  $\tau_0$  la contrainte seuil. On notera que le modèle de Herschel-Bulkley peut facilement être modifié pour décrire les modèles précédemment cités.

### II.5.2.2.7. Modèle de Casson

Ce modèle est très répandu et appliqué lorsqu'il s'agit de fluides biologiques ou de denrées alimentaires. Le modèle d'Herschel-Bulkley est décrit par la loi suivante :

$$\overline{\sigma} = -p\overline{I} + \overline{\tau} \quad (\text{II.56})$$

Avec :

$$\begin{cases} \overline{\tau} = \frac{\left( \sqrt{\tau_0} + \sqrt{\mu \left| \overline{\dot{\gamma}} \right|} \right)^2}{\left| \overline{\dot{\gamma}} \right|} \overline{D} & \tau > \tau_0 \\ \overline{\dot{\gamma}} = 0 & \tau \leq \tau_0 \end{cases} \quad (\text{II.57})$$

Dans ce cas, la viscosité apparente correspondante est donnée par :

$$\mu \left( \left| \overline{\dot{\gamma}} \right| \right) = \frac{\left( \sqrt{\tau_0} + \sqrt{\mu \left| \overline{\dot{\gamma}} \right|} \right)^2}{\left| \overline{\dot{\gamma}} \right|} \quad (\text{II.58})$$

avec :  $\mu_\infty$  est la viscosité à gradient de cisaillement infinie [Pa.s] ;  $\mu_0$  est la viscosité à gradient de cisaillement nul [Pa.s] ;  $\lambda$  est le temps caractéristique[s] ;  $k$  est l'indice de consistance ;  $n$  est l'indice d'écoulement et  $\tau_0$  la contrainte seuil [Pa].

### II.5.2.3. Fluides non-newtoniens dépendant du temps

À ce jour, et implicitement, nous avons supposé qu'un taux de cisaillement donné entraîne une contrainte de cisaillement correspondante, dont la valeur ne change pas tant que la valeur du taux de cisaillement est maintenue. Ce n'est pas toujours le cas. La contrainte de cisaillement mesurée, et donc la viscosité, peut croître ou décroître avec le temps de cisaillement. Ces changements peuvent être réversibles ou irréversibles. Le comportement rhéologique varie non seulement avec la vitesse de cisaillement mais aussi avec le temps pendant lequel le fluide a été soumis au cisaillement.

Ces fluides sont très difficiles à modéliser. En effet, leurs viscosités apparentes ne dépendent pas seulement de la contrainte de cisaillement appliquée ou du taux de cisaillement, mais également de la durée ainsi que de leur histoire cinématique antérieure.

Suivant la réponse d'un matériau au cisaillement sur une période de temps, il est usuel de distinguer deux types de comportement des fluides en fonction du temps, à savoir la viscoélasticité et la thixotropie. Ces catégories seront envisagées en détail dans la section suivante.

### ***II.5.2.3.1. Fluides viscoélastiques***

Jusqu'à présent, les discussions sur les solides et les fluides se sont limitées à la déformation élastique ou à l'écoulement visqueux. Certains matériaux, citant par exemple les polymères, présentent à la fois une déformation élastique comme un solide de Hooke et un écoulement comme un fluide visqueux sous l'effet d'une force extérieure.

Le composant élastique d'un polymère résiste instantanément à la déformation et récupère entièrement la déformation élastique lorsque la force externe est inversée. Ainsi, l'élasticité réversible peut être définie par un module élastique ou une constante de ressort, une déformation qui varie linéairement avec la contrainte sans aucun décalage temporel, et la résistance du corps contre la force externe qui est la déformation élastique.

Il existe deux types de matériaux viscoélastiques : les liquides viscoélastiques et les solides viscoélastiques. Le liquide viscoélastique peut ramener complètement la contrainte à zéro après une longue période, tandis que le solide viscoélastique a une durée de vie définie. Les solides viscoélastiques auront une contrainte définie après un temps aussi long à déformation constante.

### ***II.5.2.3.2. Viscoélasticité linéaire***

La viscoélasticité linéaire est le domaine de la rhéologie consacré à l'étude des matériaux viscoélastiques soumis à de très petites déformations où les gradients de déplacement sont très faibles et où le régime d'écoulement peut être décrit par une relation linéaire entre la contrainte et le taux de déformation. En principe, la déformation doit être suffisamment faible pour que la structure du matériau ne soit pas perturbée par l'histoire de l'écoulement.

Les modèles viscoélastiques linéaires présentent plusieurs limites. Par exemple, ils ne peuvent pas décrire la dépendance de la vitesse de déformation de la viscosité ou des phénomènes de contrainte normale puisqu'il s'agit d'effets non linéaires. En raison de la restriction aux déformations infinitésimales, les modèles linéaires sont plus appropriés pour la

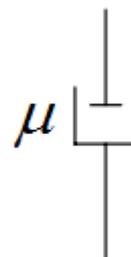
description des solides viscoélastiques que pour celle des fluides viscoélastiques. Plutôt que des fluides viscoélastiques. En dépit des limitations des modèles viscoélastiques linéaires viscoélastique et bien qu'ils soient moins intéressants pour l'étude de l'écoulement où le matériau est généralement sujet à de grandes déformations, ils sont très importants dans l'étude de la viscoélasticité pour plusieurs raisons. viscoélasticité pour plusieurs raisons :

- Ils sont utilisés pour caractériser le comportement des matériaux viscoélastiques aux petites déformations.
- Ils servent de motivation et de point de départ pour le développement de modèles non linéaires puisque ces derniers sont généralement des extensions des linéaires.
- Elles sont utilisées pour analyser les données expérimentales obtenues dans les expériences de petites déformations et pour interpréter les phénomènes viscoélastiques importants, au moins qualitativement.

### ***II.5.2.3.3. Modèles viscoélastiques linéaire***

L'étendue de la déformation sera considérée comme suffisamment petite pour que le module de Young ou le module de cisaillement soit indépendant de la déformation et donc que la contrainte élastique varie linéairement avec la déformation, et pour la partie visqueuse, la contrainte est proportionnelle à la vitesse de déformation et le rapport entre la contrainte et la vitesse de déformation est constante pour la petite déformation. Cela signifie que la viscoélasticité est considérée comme linéaire.

La viscoélasticité, comme son nom l'indique, est une généralisation de l'élasticité et de la viscosité. L'élément élastique linéaire idéal est le ressort. Lorsqu'on lui applique une force de traction, l'augmentation de la distance entre ses deux extrémités est proportionnelle à la force.



**Figure. II.6.1.** Élément élastique, le ressort. **Figure. II.6.2.** Élément visqueux, l'amortisseur.

Pour le solide élastique (ressort) : lorsque l'on supprime la force s'exerçant sur un corps, celui-ci revient en arrière à sa position d'équilibre. Ce comportement est bien modélisé par un ressort de constante  $G$ .

Selon la loi de Hooke :

$$\tau = G\gamma \quad (\text{II.59})$$

$G$  : le module de Young. La contrainte  $\tau$  est proportionnelle à la déformation  $\gamma$ .

Pour le fluide visqueux (amortisseur) : le fluide newtonien est modélisé par un amortisseur d'une viscosité  $\mu$ . On a la relation linéaire :

$$\tau = \mu\dot{\gamma} = \mu \frac{d\gamma}{dt} \quad (\text{II.60})$$

Apartir de l'équation de Newton, on peut écrire :

$$\frac{d\gamma(t)}{dt} = \frac{d\tau(t)}{\mu} \quad (\text{II.61})$$

Tenant compte des conditions initiales :

$$t < 0; \tau(t) = 0; \gamma(t) = 0 \quad (\text{II.62})$$

$$\gamma(t) = \frac{1}{\mu} \int_0^t \tau(t) dt \quad (\text{II.63})$$

La déformation croît linéairement avec le temps, le matériau s'écoule indéfiniment :

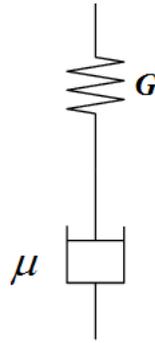
$$\gamma(t) = \frac{\tau_0}{\mu} t \quad (\text{II.64})$$

Les deux éléments sont représentés schématiquement dans les figures (II.6.1) et (II.6.2).

### a) Modèle de Maxwell

En viscoélasticité, les deux éléments peuvent être combinés en série. Cette combinaison est connue sous le nom d'élément de Maxwell et est illustrée à la figure II.7.

Le modèle de Maxwell, qui est l'association en série d'un solide élastique (ressort) et d'un fluide visqueux (amortisseur).



**Figure II.7.** Schéma du modèle de Maxwell.

Dans ce cas les contraintes se conservent et les déformations s'additionnent ; soit :

$$\gamma(t) = \gamma_r(t) + \gamma_a(t) \quad (\text{II.65})$$

$$\tau(t) = \tau_r(t) = \tau_a(t) \quad (\text{II.66})$$

$$\frac{d\gamma(t)}{dt} = \frac{d\gamma_r(t)}{dt} + \frac{d\gamma_a(t)}{dt} \quad (\text{II.67})$$

L'équation du mouvement du modèle de Maxwell est :

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{G} \frac{d\tau}{dt} + \frac{1}{\mu} \tau \quad (\text{II.68})$$

L'équation (II.68) n'est qu'une combinaison linéaire d'un comportement parfaitement élastique tel qu'indiqué dans la dérivée temporelle de la loi de Hooke et d'un comportement parfaitement visqueux tel qu'indiqué dans la loi de Newton.

Les propriétés viscoélastiques d'un matériau peuvent être déterminées par la connaissance de la fonction du fluage et relaxation :

- **Expérience du fluage :**

Le fluage est une déformation continue dans le temps d'un corps maintenu sous une contrainte constante. A partir d'un instant donné ( $t$ ), le modèle est soumis à une contrainte constante instantanée  $\tau_0$ , la déformation est reliée à la contrainte par la fonction du fluage :

$$\gamma(t) = f(t) \cdot \tau_0 \quad (\text{II.69})$$

La fonction du fluage pour les liquides de Maxwell :

$$f(t) = \frac{1}{G} + \frac{t}{\mu} = J + \frac{t}{\mu} \quad (\text{II.70})$$

Avec :  $J = \frac{1}{G}$  est la complaisance élastique du ressort.

- **Expérience de relaxation :**

Lorsqu'un corps est soudainement déformé et que la contrainte est maintenue, la contrainte dans le corps diminue avec le temps.

A partir d'un instant donné ( $t$ ), le modèle est soumis à une déformation constante  $\gamma_0$  :

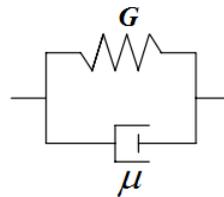
$$\tau(t) = g(t) \cdot \gamma_0 \quad (\text{II.71})$$

$$g(t) = G e^{-t/\mu} = G e^{-t/\lambda} \quad (\text{II.72})$$

Avec :  $\lambda = \frac{\mu}{G}$  est le temps de relaxation.

### b) Modèle de Kelvin-Voigt :

La combinaison des éléments élastique et visqueux en parallèle est connue sous le nom de modèle de Voigt (parfois appelé élément Kelvin ou Kelvin-Voigt) et est illustrée à la Figure II.8. Le modèle de Kelvin-Voigt, qui est l'association en parallèle d'un solide élastique (ressort) et d'un fluide visqueux (amortisseur).



**Figure II.8.** Schéma du modèle de Kelvin-Voigt.

Dans ce cas les déformations se conservent et les contraintes s'additionnent ; soit :

$$\gamma(t) = \gamma_r(t) = \gamma_a(t) \quad (\text{II.73})$$

$$\tau(t) = \tau_r(t) + \tau_a(t) \quad (\text{II.74})$$

L'équation du mouvement du modèle de Kelvin-Voigt est :

$$\tau = G\gamma + \mu\dot{\gamma} \quad (\text{II.75})$$

Ce modèle est généralement utilisé pour étudier les expériences de fluage car, comme nous le verrons bientôt, il ne peut pas être facilement appliqué à une expérience de relaxation.

- **Expérience de fluage**

Puisque la contrainte est une constante dans une expérience de fluage, la fonction du fluage pour un solide de Kelvin-Voigt :

$$f(t) = \frac{1}{G}(1 - e^{-t/\lambda}) = J(1 - e^{-t/\lambda}) \quad (\text{II.76})$$

- **Expérience de relaxation**

En se référant à l'équation constitutive (II.61), si la contrainte instantanée  $\tau_0$  et que la déformation est constante : la contrainte va diminuer lentement en raison de réarrangement des molécules, autrement dit, il faudrait une force infinie pour déformer instantanément l'élément visqueux (une déformation instantanée qui conduirait vers une contrainte infinie). La vitesse de déformation est donc nulle.

Par conséquent :

$$\tau_0 = G\gamma_0 \quad (\text{II.77})$$

Il en résulte que l'expérience de la relaxation est une expérience impossible à réaliser sur un élément de Kelvin-Voigt.

#### II.5.2.3.4. Régime dynamique

Pour un matériau viscoélastique, Si la déformation imposée est sinusoïdale et de faibles amplitude :

$$\gamma = \gamma_0 e^{i\omega t} \text{ ou bien : } \gamma = \gamma_0 \sin(\omega t) \quad (\text{II.78})$$

La réponse en contrainte est sinusoïdale avec un déphasage  $\delta$  par rapport à  $\gamma$  :

$$\tau = \tau_0 e^{i(\omega t + \delta)} \text{ ou bien : } \tau = \tau_0 \sin(\omega t + \delta) \quad (\text{II.79})$$

Donc,  $\tau$  et  $\gamma$  sont reliées par un module de cisaillement  $G^*$  :

$$\tau(t) = G^*(\omega)\gamma(t) \text{ Implique : } G^*(\omega) = \frac{\tau(t)}{\gamma(t)} \quad (\text{II.80})$$

Par conséquent, le module dépendant du temps peut être calculé comme suit :

$$G^* = \frac{\tau(t)}{\gamma(t)} = \frac{\tau_0 e^{i\omega t}}{\gamma_0 e^{i(\omega t + \delta)}} = \frac{\tau_0}{\gamma_0} e^{i\delta} = G^* \cos \delta + i G^* \sin \delta \quad (\text{II.81})$$

Avec :  $G^* = G' + iG''$ ; Où :  $G' = G^* \cos \delta$  et  $G'' = G^* \sin \delta$  ;

$G'$  et  $G''$  sont les parties réelles et imaginaires de  $G^*$ .

$G'$  : Module de conservation (l'énergie élastique restituée au cours du temps) (Storage modulus) ;

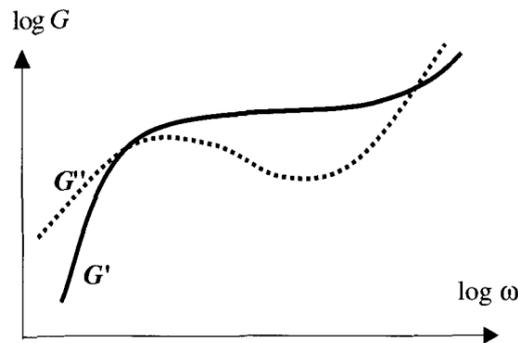
$G''$  : Module de perte (l'énergie dissipée par frottement visqueux au cours du temps) (loss modulus) ;

$G^*$  : Module de cisaillement ou rigidité (module complexe).

Le rapport entre  $G'$  et  $G''$  est appelé le facteur de perte et est donné par :

$$\mu = \tan \delta = \frac{G''}{G'} = \frac{G^* \sin \delta}{G^* \cos \delta} \quad (\text{II.82})$$

- Pour un solide élastique parfait :  $G'' = 0$  et le déphasage:  $\delta = 0^\circ$
- Pour un liquide visqueux :  $G' = 0$   $\delta = 90^\circ$



**Figure II.9.** L'évolution de  $G'$  et  $G''$  en fonction de  $\omega$  [56].

Nous constatons que les deux graphes  $G'$  et  $G''$  illustrés à la figure (II.9) montrent un point de croisement. Le déphasage  $\delta$  agit comme un indicateur important de la répartition entre les propriétés élastiques et visqueuses et qui dépend de la fréquence  $\omega$  : Il est évident de noter, lorsqu'un échantillon a un comportement plus élastique que visqueux (il présente une

fréquence supérieur à la fréquence de croisement), la valeur de déphasage est comprise entre  $0^\circ$  et  $45^\circ$  ; alors que si la valeur de déphasage est comprise entre  $45^\circ$  et  $90^\circ$ , l'échantillon a un comportement visqueux que élastique ( il présente une fréquence inférieure à la fréquence de croisement) [59].

### II.5.2.3.5. Viscoélasticité non-linéaire

La viscoélasticité non linéaire est le domaine de la rhéologie consacré à l'étude des matériaux viscoélastiques soumis à de grandes déformations. Elle est donc le sujet de premier intérêt pour l'étude de l'écoulement des fluides viscoélastiques. Les équations constitutives viscoélastiques non linéaires sont suffisamment complexes pour que très peu de problèmes d'écoulement puissent être résolus analytiquement. De plus, il semble qu'il n'existe pas d'équation constitutive différentielle ou intégrale suffisamment générale pour expliquer le comportement observé des systèmes soumis à de grandes déformations, mais suffisamment simple pour servir de base aux procédures de conception technique.

Le comportement viscoélastique combiné aux grandes déformations peut induire un ensemble de phénomènes particuliers, dont les plus connus sont le gonflement à la sortie de la filière, la présence de recirculation à l'entrée des contractions, l'effet Weissenberg.

Il existe un grand nombre d'équations rhéologiques proposées pour la description de la viscoélasticité non linéaire. Cependant, beaucoup de ces modèles sont des extensions ou des modifications d'autres modèles. Les deux modèles viscoélastiques non-linéaires les plus populaires sous forme différentielle sont le modèle de Maxwell à convection supérieure et le modèle d'Oldroyd-B. Dans la section suivante, nous présentons les modèles viscoélastiques sous forme différentielles.

### II.5.2.3.6. Modèles viscoélastiques non-linéaire

On peut définir une dérivation d'un tenseur par rapport à un repère qui se déforme en même temps que la matière. Nous en retenons la forme la plus générale d'une loi de comportement de type différentielle :

$$\frac{\overset{=}{\partial} \overset{=}{\tau}}{\overset{=}{\partial} t} = \frac{D \overset{=}{\tau}}{Dt} - \frac{\alpha - 1}{2} \left( \left( \overset{=}{\nabla} \overset{=}{V} \right)^T \cdot \overset{=}{\tau} + \overset{=}{\tau} \cdot \left( \overset{=}{\nabla} \overset{=}{V} \right) \right) - \frac{\alpha + 1}{2} \left( \left( \overset{=}{\nabla} \overset{=}{V} \right) \cdot \overset{=}{\tau} + \overset{=}{\tau} \cdot \left( \overset{=}{\nabla} \overset{=}{V} \right)^T \right) \quad (\text{II.83})$$

$\frac{\wp_\alpha}{\wp t}$  : Bitensorielle;  $\frac{D}{Dt}$  : Dérivée particulière par rapport au temps ; Pour  $\alpha = 1$  : la dérivée est dite sur-convectée ;  $\alpha = 0$  : La dérivée est dite de Jaumann ;  $\alpha = -1$  : La dérivée est sous-convectée.

### a) Modèle de Maxwell

La loi de type différentielle tridimensionnelle de Maxwell est donnée par :

$$\overline{\overline{\tau}} + \lambda \frac{\wp_\alpha \overline{\overline{\tau}}}{\wp t} = 2\mu \overline{\overline{D}} \quad (\text{II.84})$$

$\lambda$  : Est le temps caractéristique de relaxation.

### b) Modèle d'Oldroyd

La loi de type différentielle tridimensionnelle de Oldroyd est donnée par :

$$\overline{\overline{\tau}} + \lambda \frac{\wp_\alpha \overline{\overline{\tau}}}{\wp t} = 2\mu \left( \overline{\overline{D}} + \lambda_r \frac{\wp_\alpha \overline{\overline{D}}}{\wp t} \right) \quad (\text{II.85})$$

$\lambda$  et  $\lambda_r$  sont les temps de relaxation et de retard respectivement.

### c) Modèle d'Oldroyd-B

On posant  $\alpha = 1$  dans les équations (II.83) et (II.85), le modèle est dit d'Oldroyd sur-convectée :

$$\overline{\overline{\tau}} + \lambda \left( \frac{D\overline{\overline{\tau}}}{Dt} - (\overline{\overline{\nabla V}}) \cdot \overline{\overline{\tau}} - \overline{\overline{\tau}} \cdot (\overline{\overline{\nabla V}})^T \right) = 2\mu \left[ \overline{\overline{D}} + \lambda_r \left( \frac{D\overline{\overline{D}}}{Dt} - (\overline{\overline{\nabla V}}) \cdot \overline{\overline{D}} - \overline{\overline{D}} \cdot (\overline{\overline{\nabla V}})^T \right) \right] \quad (\text{II.86})$$

### d) Modèle Phan-Tien-Tanner sur-convectée (PTT)

$$\left( 1 + \varepsilon \frac{\lambda}{\mu_p} Tr(\overline{\overline{\tau}}) \right) \overline{\overline{\tau}} + \lambda \left( \frac{D\overline{\overline{\tau}}}{Dt} - (\overline{\overline{\nabla V}}) \cdot \overline{\overline{\tau}} - \overline{\overline{\tau}} \cdot (\overline{\overline{\nabla V}})^T \right) = 2\mu_p \overline{\overline{D}} \quad (\text{II.87})$$

### e) Modèle de Giesekus sur-convecté

$$\left( 1 + \varepsilon \frac{\lambda}{\mu_p} \overline{\overline{\tau}} \right) \overline{\overline{\tau}} + \lambda \left( \frac{D\overline{\overline{\tau}}}{Dt} - (\overline{\overline{\nabla V}}) \cdot \overline{\overline{\tau}} - \overline{\overline{\tau}} \cdot (\overline{\overline{\nabla V}})^T \right) = 2\mu \overline{\overline{D}} \quad (\text{II.88})$$

Où :

$\tau_s = 2\mu_s \overline{D}$  : est la contribution newtonienne.

$\tau_p + \lambda \frac{\partial \tau}{\partial t} = 2\mu_p \overline{D}$  : est la contribution non-newtonienne.

Avec :

$$\mu = \mu_s + \mu_p \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} \mu_s = \mu \frac{\lambda_r}{\lambda} \\ \mu_p = \mu \left( 1 - \frac{\lambda_r}{\lambda} \right) \end{array} \right. \quad (\text{II.89})$$

### II.5.2.3.2. Fluides thixotropes

Conformément à la définition admise, une diminution progressive de la viscosité sous l'effet d'une contrainte de cisaillement, puis un rétablissement progressif de la structure lorsque la contrainte est supprimée, sont appelés thixotropie. Le terme thixotrope a été introduit en termes de solidification de solutions concentrées, qui par la suite peut se liquéfier. En 1827 Peterfi [58] a démontré qu'une solidification peut apparaître répétitivement à une température et vitesse de cisaillement constante. En 1927, Bauer et Collins [59] ont définie qu'un système thixotropique est un système qui possède une dépendance temporelle, réversible et isotherme de la viscosité. En 1936, Goodeve [60] a élargi la définition de la thixotropie et la considère comme étant une diminution réversible et isotherme de la viscosité avec une augmentation de la vitesse de cisaillement.

Les fluides thixotropes présentent la particularité de se liquéfier par agitation, puis de reprendre plus ou moins rapidement leur consistance rigide et habituelle dès qu'on les laisse au repos. Un comportement thixotropique est observé après un long temps du repos, une contrainte étant brusquement appliquée et maintenue constante. La viscosité est une fonction décroissante de la durée d'écoulement, c'est-à-dire que la durée d'action de la contrainte après un temps de récupération est assez longue, le système retrouve son état initial.

L'application d'une contrainte constante :

- La viscosité est une fonction décroissante de la durée d'action de la contrainte.
- Elle croit jusqu'à sa valeur initiale lorsque la contrainte est annulée.
- la contrainte de cisaillement diminue de façon monotone.

Mewis et Wagner [61] présentent trois caractéristiques qui définissent essentiellement le comportement thixotrope, que nous citons ici exactement :

- il est basé sur la viscosité ;
- il implique une diminution en fonction du temps de la viscosité induite par l'écoulement ;
- l'effet est réversible.

Lorsque l'écoulement est arrêté. Ici, basé sur la viscosité implique que la thixotropie n'affecte pas l'élasticité ou la plasticité, ou toute autre propriété des fluides en dehors de la viscosité. Alors que cette définition de la thixotropie couvre essentiellement la diminution de la viscosité en fonction du temps, plus rarement, les fluides présentent moins souvent une augmentation progressive de la viscosité sous contrainte en fonction du temps suivie d'un rétablissement, généralement appelée anti-thixotropie ou rhéopexie. Un comportement rhéopécitieux caractérise par la formation progressive d'une structure.

Dans un fluide où la structure se reconstruit lentement, l'application d'une faible contrainte peut accélérer la formation de cette structure.

- La viscosité augmente avec le temps : pour une vitesse de cisaillement constante.
- À un taux de cisaillement constant, la contrainte de cisaillement augmente de façon monotone.
- Formation d'une structure progressive, par l'application d'une contrainte constante.
- Phénomène généralement irréversible.

#### ***II.5.2.3.2.1. Modèles thixotropes***

Dans l'évolution des modèles rhéologiques pour les liquides thixotropes, diverses approches ont été adoptées par les rhéologues pour décrire quantitativement les fluides thixotropes. En général, elles peuvent être classées dans les deux grandes catégories : approche phénoménologique et empirique.

Dans cette section, nous présentons les modèles rhéologiques thixotropes de manière générale on se basant sur le modèle que nous utilisons dans la suite de cette thèse. Il s'agit du modèle de Moore [62]. La thixotropie a été modélisée théoriquement en commençant par la viscosité en tant que fonction du paramètre structurel et de la vitesse de cisaillement, tandis que le paramètre structurel était exprimé comme une équation de vitesse dépendant du temps.

La forme mathématique générale de l'équation d'état d'un matériau thixotropique est donnée par :

$$\tau = \mu(\dot{\gamma}, \lambda) \quad (\text{II.90})$$

Cette équation relie la contrainte de cisaillement  $\tau$  au taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$  dans laquelle la viscosité  $\mu$  est une fonction de taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$  et du paramètre structurel  $\lambda$ .

$$\frac{d\lambda}{dt} = f(\dot{\gamma}, \lambda) \quad (\text{II.91})$$

### Modèle de Coussot :

Un modèle qui considère que la viscosité apparente est une fonction croissante du paramètre de structure  $\lambda$  est proposé par Coussot [63] :

$$\tau = \mu_0 (1 + \lambda^n) \dot{\gamma} \quad (\text{II.92})$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = \left( \frac{1}{T} \right) - \kappa_a \lambda \dot{\gamma} \quad (\text{II.93})$$

Où :  $\mu_0$  est la viscosité au taux de cisaillement infini lorsque  $\lambda$  tend vers zéro,  $n$  est un paramètre positif constant,  $1/T$  est le terme structurant, et le second terme de l'équation peut être associé au taux de déstructuration.

### Modèle de Moore :

Moore [62] a proposé le modèle suivant :

$$\frac{d\lambda}{dt} = \kappa_a (1 - \lambda) - \kappa_b \dot{\gamma} \lambda \quad (\text{II.94})$$

$$\tau = \mu_\infty \left( 1 + \left( \frac{\mu_0}{\mu_\infty} - 1 \right) \lambda \right) \dot{\gamma} \quad (\text{II.95})$$

Ce modèle représente l'influence de l'historique de la déformation sur la valeur immédiate de la viscosité.

### Modèle de Houska :

Le modèle thixotropique de Houska [64] a été utilisé pour prédire la relation cisaillement la relation contrainte de cisaillement-temps :

$$\frac{d\lambda}{dt} = \kappa_a (1 - \lambda) - \kappa_b \dot{\gamma}^n \lambda \quad (\text{II.96})$$

$$\tau = \tau_0 + \lambda \tau_1 + (k + \lambda \Delta k) \dot{\gamma}^n n \quad (\text{II.97})$$

$\tau_0$  la limite d'élasticité lorsque la structure se fend complètement;  $\tau_1$  la limite d'élasticité avec thixotropie;  $k$  le coefficient de consistance ;  $\Delta k$  le coefficient de consistance avec thixotropie ;  $n$  indice de comportement de la rhéologie ;  $\kappa_a$  constante de vitesse d'établissement de la structure ;  $\kappa_b$  .

## II.6. Conclusion

Dans cette partie du travail, les notions théoriques essentielles et les principes importants qui constituent le fondement de la mécanique des fluides ont été soigneusement examinés et présentés. Dans un premier temps, une formulation mathématique détaillée, complète et générale des équations de la mécanique des fluides a été élaboré. On a accentué sur la rhéologie des fluides complexes avec une étude générale de leur comportement rhéologique, leur classification et modèles en fonction des divers paramètres physiques.

Dans le chapitre suivant, nous passerons à étudier l'hémodynamique sanguine là où on s'intéresse à l'application des lois de la mécanique des fluides au mouvement sanguin, ce qui nous a permis d'aborder trois investigations complémentaires qui tournent autour de l'influence de différents paramètres sur l'étude de l'écoulement sanguin entraîné par un gradient de pression pulsé qui génère le mouvement axiale de l'écoulement à travers une artère.

**Chapitre III :**  
**Formulation mathématique**  
**du problème physique**

## Chapitre III

# Formulation mathématique du problème physique

### III.1. Introduction

Le système de circulation sanguine se compose du cœur jouant le rôle d'une pompe et d'un vaste système ramifié de vaisseaux contenant du sang, dont la fonction principale est le transport de l'oxygène, des nutriments et d'autres substances ainsi que de la chaleur dans tout le corps.

La nature des écoulements dans les vaisseaux sanguins est extrêmement complexe. Cela est dû essentiellement au fait que les canaux physiologiques forment des réseaux de géométries compliquées. L'écoulement sanguin a été très tôt considéré comme ayant une importance majeure en physiopathologie : pendant longtemps, le sang reste le fluide vital.

Ce chapitre est conçu comme une suite logique à une technique de modélisation de base du phénomène physique lié à l'écoulement du sang dans un canal biologique. Cette dernière est présentée par Womersley [28] dont l'article scientifique reste à ce jour une référence pour les chercheurs en mécanique des fluides appliquée aux écoulements sanguins. L'auteur, dans son travail, a présenté une résolution analytique d'un écoulement de sang tenant compte de l'aspect oscillatoire de l'écoulement. La distribution spatiale de la vitesse du sang dans la section transversale de l'artère est décrite par des fonctions mathématiques spéciales appelées fonctions de Bessel. La nature périodique variable du phénomène sera capturée par les fonctions harmoniques.

Dans le présent chapitre, Nous allons nous intéresser à la mise en place d'un modèle physique et proposer une résolution numérique qui peut être utilisée pour simuler l'écoulement du sang dans le système biologique.

En premier lieu, un bon point de départ est l'étude de l'écoulement dans les grands vaisseaux. Bien qu'il soit connu que le sang se comporte de manière newtonienne dans les gros vaisseaux, et il se comporte différemment dans les zones éloignées ou périphériques du réseau. D'autant plus, cet écoulement est pulsé par nature, et notre préoccupation est donc la

relation entre le gradient de pression variant périodiquement qui conduit l'écoulement et la vitesse sanguins instantanés.

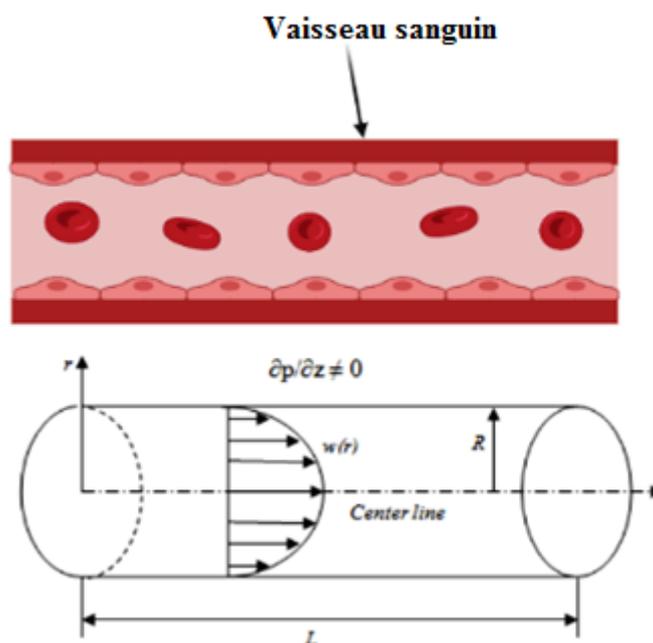
En deuxième phase, une analyse générale est dédiée à l'écoulement du sang dans les artères, en considérant sa caractéristique rhéologique non-newtonienne de type thixotrope dépendant du temps, entraînée par un gradient de pression oscillant en présence d'une accélération du corps.

En fin, nous nous proposons de fournir un modèle généralisé pour l'étude de l'écoulement du sang dans un environnement en présence d'un champ magnétique uniforme, bien évidemment en considérant le sang comme un fluide thixotrope entraîné par un gradient de pression oscillant sous accélération externe.

## III.2. Description physique du problème

### III.2.1 Géométrie du problème physique

Womersley [28] a publié un traité complet sur l'analyse théorique de l'écoulement du sang dans les artères. Ce modèle physique considère l'écoulement instationnaire d'un fluide newtonien incompressible à travers un tube cylindrique et obtenaient des expressions pour les profils de vitesse dans la section transversale du tube.



**Figure III.1.** Géométrie du problème [65].

Une telle géométrie est présentée sur la figure III.1. La figure illustre une vue schématique d'une conduite axisymétrique de section circulaire. Le domaine d'écoulement est représenté en coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ . La paroi est supposée indéformable.  $R$  désigne la valeur des rayons amont et aval de la conduite. L'adhérence à la paroi est considérée comme condition aux limites à la paroi avec des vitesses nulles et la condition de symétrie par rapport à l'axe  $z$  [65].

### III.3. Mise en équation

Cette phrase célèbre, "vous ne pouvez pas obtenir quelque chose à partir de rien", est la base de la conservation de la masse et de la quantité du mouvement. Elle signifie que les propriétés physiques d'un objet doivent être conservées pendant un processus ou une interaction.

#### III.3.1. Principe de la conservation de la masse

L'équation qui exprime la conservation de la masse pour un volume de contrôle matériel s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}) = 0 \quad (\text{III.1})$$

Où  $\rho$  est la masse volumique du fluide,  $\partial/\partial t$  est la dérivée partielle par rapport au temps, et  $\vec{V} = (u, v, w)$  est le vecteur vitesse en coordonnées cylindrique.

#### III.3.2. Principe de la conservation de la quantité du mouvement

Ce principe affirme que la quantité de mouvement totale d'un système fermé reste constante dans le temps, cela signifie que la quantité de mouvement d'un système ne peut pas être modifiée sans forces. La conservation de la quantité de mouvement linéaire est similaire à la conservation de la masse, elle peut être décrite comme suit :

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \rho \left[ \underbrace{\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}}_2 + \underbrace{(\vec{V} \cdot \text{grad})}_{3} \cdot \vec{V} \right] = \underbrace{\nabla \cdot \vec{\sigma}}_4 + \underbrace{\rho \vec{f}}_5 \quad (\text{III.2})$$

Les différents termes (1), (2) et (3) de l'équation III.2 représentent les accélérations totale, locale, et convective, le terme (4) représente la somme des forces hydrostatiques et visqueuses et le terme (5) représente la force externe appliquée au fluide.

$\overline{\sigma}$  est le tenseur de contrainte de Cauchy,  $\partial/\partial t$  est dérivée partielle par rapport au temps et  $d/dt$  est la dérivée particulaire où temporelle, donnée par :

$$\frac{d(\bullet)}{dt} = \frac{\partial(\bullet)}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)(\bullet) \quad (\text{III.3})$$

Le tenseur de contrainte de Cauchy est formulé comme :

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau} \quad (\text{III.4})$$

Ici  $p$  est la pression hydrostatique,  $\mathbf{I}$  est le tenseur d'identité et  $\boldsymbol{\tau}$  est extra-tenseur des contraintes qui peut être défini comme suit :

$$\boldsymbol{\tau} = \mu(A_1, \lambda)A_1 \quad (\text{III.5})$$

Où  $A_1$  est le premier tenseur de Rivlin-Ericksen donné par :

$$A_1 = \overline{\nabla \mathbf{V}} + \overline{\nabla \mathbf{V}}^T \quad (\text{III.6})$$

## III.4. Formulation mathématique du problème

### III.4.1. Equation de continuité

La projection de l'équation de la conservation de la masse (III.1) est donnée par la relation suivante:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r\rho u) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0 \quad (\text{III.7})$$

### III.4.2. Equation de conservation de quantité de mouvement

La projection de l'équation de la quantité de mouvement (III.2) sur les différents axes du repère cylindrique  $(r, \theta, z)$  donne:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v^2}{r} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + \rho f_r \\ \rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{uv}{r} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + 2 \frac{\sigma_{r\theta}}{r} + \rho f_\theta \\ \rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{zr}}{r} + \rho f_z \end{array} \right. \quad (\text{III.8})$$

### III.4.3. Hypothèses simplificatrices

Lors de notre étude, plusieurs hypothèses ont été adoptées afin de simplifier la formulation du modèle mathématique :

- Fluide homogène, isotrope, incompressible et laminaire.
- Le modèle décrit ci-dessus supposait une section transversale circulaire et une symétrie axisymétrique.
- Le fluide considéré est soumis à un gradient de pression oscillatoire dû à l'action de pompage du cœur qui génère le mouvement axial du fluide.
- Le fluide est soumis à des forces extérieures.
- Les composantes du vecteur vitesse pour un écoulement unidirectionnel laminaire dans une conduite cylindrique  $(r, \theta, z)$ .

#### III.4.4. Écoulement sanguin pulsé newtonien sous accélération périodique externe

Le corps humain est adapté aux changements des profils de vitesse et des distributions de vitesse sanguine dans une certaine mesure. Mais lorsque les changements de vitesse sont très importants et s'étendent sur une longue période de temps, il est prouvé que de tels changements de vitesse peuvent entraîner de graves effets physiologiques, pouvant parfois entraîner la mort.

Dans l'objectif de comprendre ces phénomènes et de palier à certaines pathologies un modèle mathématique d'un écoulement pulsé dépendant du temps a été développé en considérant le sang comme un fluide newtonien circulant dans un tube, avec un accent particulier sur le phénomène de l'écoulement pulsé sous accélération externe du corps.

##### III.4.4.1. Formulation mathématique dimensionnelle

Pour un écoulement unidirectionnel dans une conduite cylindrique, le vecteur vitesse est donné selon la relation suivante :

$$\vec{V} = (0, 0, w(r, t)) \quad (\text{III.9})$$

Après l'introduction des hypothèses données ci-dessus, on peut établir les différentes équations gouvernantes nécessaires à la résolution du problème comme suit:

##### **Equation de continuité :**

Le fluide (le sang) étant supposé incompressible, la relation (III.7) se réduit à:

$$\frac{\partial w(r, t)}{\partial z} = 0 \quad (\text{III.10})$$

**Equation de Navier-Stokes :**

Le tenseur taux de déformation s'écrira de la manière suivante :

$$\overline{\overline{D}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial w(r,t)}{\partial r} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial w(r,t)}{\partial r} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(III.11)}$$

Le tenseur des contraintes visqueuses peut s'écrire pour un fluide newtonien de la manière suivante :

$$\overline{\overline{\tau}} = 2\mu \overline{\overline{D}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu \frac{\partial w(r,t)}{\partial r} \\ 0 & 0 & 0 \\ \mu \frac{\partial w(r,t)}{\partial r} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(III.12)}$$

Le tenseur des contraintes de Cauchy est donné par la relation suivante :

$$\overline{\overline{\sigma}} = -p\overline{\overline{I}} + \overline{\overline{\tau}} = \begin{pmatrix} -p & 0 & \mu \frac{\partial w(r,t)}{\partial r} \\ 0 & -p & 0 \\ \mu \frac{\partial w(r,t)}{\partial r} & 0 & -p \end{pmatrix} \quad \text{(III.13)}$$

En supposant que l'écoulement est unidirectionnel et complètement développé dans la direction de l'écoulement (z), les équations de Navier- Stokes se réduisent à :

$$\begin{cases} -\frac{\partial p}{\partial r} = 0 \\ -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0 \\ \rho \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\tau_{rz}) + \rho f_z \end{cases} \quad \text{(III.14)}$$

L'écoulement sanguin dans le système cardiovasculaire est entraîné par un gradient de pression local pulsé dans le sens longitudinal de l'artère qui peut s'écrire comme suit :

$$-\frac{\partial p}{\partial z} = P_0 + P_1 \cos(\omega_p t) \quad \text{(III.15)}$$

Où  $-\partial p/\partial z$  est le gradient de pression produit par l'action de pompage du cœur,  $P_0$  est la composante constante (systolique) du gradient de pression,  $P_1$  est l'amplitude (diastolique) de la composante fluctuante,  $\omega_p$  est la fréquence d'impulsion.

L'écoulement dans le tube soit soumis à une accélération périodique  $G$  dans les directions axiales. Par conséquent,  $G$  peut être exprimé comme suit :

$$f_z = G(t) = A_g \cos(\omega_b t + \phi) \quad (\text{III.16})$$

Où  $A_g$  est l'amplitude de l'accélération du corps,  $\omega_b$  est la fréquence de l'accélération du corps, et  $\phi$  est l'angle de déphasage de  $G$  par rapport à l'action du cœur.

Avec :

$$\begin{aligned} \omega_p &= 2\pi f_p \\ \omega_b &= 2\pi f_b \end{aligned} \quad (\text{III.17})$$

En remplaçant les équations **III.15**, **16** et **17** dans l'équation **III.14**, l'équation de Navier-Stokes régissant l'écoulement sanguin dans les conditions ci-dessus peuvent être exprimées dans la direction ( $z$ ) comme suite:

$$\rho \frac{\partial w}{\partial t} = P_0 + P_1 \cos(\omega_p t) + \frac{\mu}{r} \frac{\partial (rw(r,t))}{\partial r} + \rho A_g \cos(\omega_b t + \phi) \quad (\text{III.18})$$

Les conditions initiales et aux limites correspondantes peuvent être données par:

**Condition initiale :**

À  $t=0$  le fluide est supposé au repos :

$$w(r,0)\Big|_{r=0} = 0 \quad (\text{III.19a})$$

**Conditions aux limites:**

Sur la paroi de la conduite :

$$\frac{\partial w(0,t)}{\partial r}\Big|_{r=0} = 0 \text{ à } r = R \quad (\text{Condition de non -glissement}) \quad (\text{III.19b})$$

Sur la ligne médiane (axe  $z$ ) :

$$w(R,t)\Big|_{r=R} = 0 \text{ à } r = 0 \quad (\text{Condition de symétrie}) \quad (\text{III.19c})$$

### III.4.4.2. Formulation mathématique adimensionnelle

L'adimensionnallisation ou la normalisation consiste à transformer les variables dépendantes et indépendantes en des variables sans dimensions, c'est-à-dire qu'elles seront normalisées par rapport à certaines dimensions caractéristiques. Cela permet de spécifier les conditions d'écoulement avec un nombre restreint de paramètres de façon à rendre la solution plus générale.

Afin de rendre les équations précédentes adimensionnelles, elles seront transformées par les variables réduites suivantes :

$$\widehat{r} = \frac{r}{R} \quad \widehat{t} = \frac{\omega}{2\pi} t \quad w = \frac{w}{U} \quad (\text{III.20})$$

L'équation de la quantité de mouvement adimensionnelle est donnée par la relation suivante :

$$\frac{\rho\omega_p R^2}{2\pi\mu} \left( \frac{\partial w}{\partial \widehat{t}} \right) = \frac{P_0 R^2}{\mu U} \left( 1 + \frac{P_1}{P_0} \cos 2\pi \widehat{t} \right) + \frac{\rho A_g R^2}{\mu U} \cos(2\pi\omega_r \widehat{t} + \phi) + \frac{1}{r} \frac{\partial(\widehat{r}w)}{\partial \widehat{r}} \quad (\text{III.21})$$

Les constantes sans-dimensions sont donnés par :

$$\alpha = \frac{\rho\omega_p R^2}{2\mu\pi} = \frac{\omega_p R^2}{2\pi\nu} = \frac{\xi^2}{2\pi}, \quad B_1 = \frac{P_0 R^2}{\mu U}, \quad B_2 = \frac{\rho A_g R^2}{\mu U}, \quad e = \frac{P_1}{P_0}, \quad \omega_r = \frac{\omega_b}{\omega_p} \quad (\text{III.22})$$

Nous obtiendrons la forme finale de l'équation quantité de mouvement adimensionnelle:

$$\alpha \frac{\partial w}{\partial \widehat{t}} = B_1 \left( 1 + \frac{P_1}{P_0} \cos 2\pi \widehat{t} \right) + B_2 \cos(2\pi\omega_r \widehat{t} + \phi) + \frac{1}{r} \frac{\partial(\widehat{r}w)}{\partial \widehat{r}} \quad (\text{III.23})$$

Les conditions aux limites et initiale sous forme adimensionnelle sont données par :

**Condition initiale :**

$$w(\widehat{r}, 0) \Big|_{\widehat{t}=0} = 0 \quad (\text{III.24a})$$

**Conditions aux limites:**

**Condition de symétrie**

$$\frac{\partial w(0, \widehat{t})}{\partial \widehat{r}} \Big|_{\widehat{r}=0} = 0 \quad (\text{III.24b})$$

**Condition de non- glissement :**

$$\widehat{w}(1, \widehat{t}) \Big|_{\widehat{r}=1} = 0 \quad (\text{III.24c})$$

### III.4.5. Écoulement sanguin pulsé thixotrope sous accélération périodique externe

Il est généralement admis que les fluides physiologiques présentent des propriétés non linéaires. En particulier, le sang considéré comme une suspension complexe n'obéit pas à la relation linéaire entre la contrainte de cisaillement et le taux de déformation et ne peut donc pas être modélisé par le fluide newtonien. En effet, le sang est bien connu comme un fluide au comportement non-newtonien rhéofluidifiant, à seuil et présente un caractère thixotrope qui ajoute à la complexité du problème.

Dans l'objectif de prendre en considération les caractéristiques rhéologiques complexes du sang, un modèle mathématique d'un écoulement pulsé dépendant du temps a été développé en considérant le sang comme un fluide rhéofluidifiant thixotrope circulant dans un tube, en présence d'une accélération périodique externe du corps. Le modèle physique consiste en un écoulement de fluides thixotropes obéissant au modèle de Moore.

#### III.4.5.1. Formulation mathématique dimensionnelle

Pour un écoulement unidirectionnel dans une conduite cylindrique, le vecteur vitesse est donné selon la relation suivante :

$$\vec{V} = (0, 0, w(r, t)) \quad (\text{III.25})$$

Après l'introduction des hypothèses données ci-dessus, on peut établir les différentes équations gouvernantes nécessaires à la résolution du problème comme suit:

#### Equation de continuité :

Le fluide (le sang) étant supposé incompressible, la relation (III.7) se réduit à:

$$\frac{\partial w(r, t)}{\partial z} = 0 \quad (\text{III.26})$$

#### Equation de Navier-Stokes :

Le tenseur taux de déformation s'écrira de la manière suivante :

$$\overline{\overline{D}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial w(r, t)}{\partial r} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial w(r, t)}{\partial r} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{III.27})$$

Le tenseur des contraintes visqueuses peut s'écrire pour un fluide newtonien de la manière suivante :

$$\overline{\overline{\tau}} = 2\mu(A_1, \lambda)\overline{\overline{D}} \quad (\text{III.28})$$

La viscosité apparente  $\mu$  pour le modèle de Moore [65] est donnée comme suit :

$$\mu(A_1, \lambda) = \mu_\infty + (\mu_0 - \mu_\infty)\lambda \quad (\text{III.29})$$

$\lambda(r, t)$  est le paramètre structural qui décrit l'état local de la microstructure du fluide,  $\mu_0$  et  $\mu_\infty$  décrit les viscosités asymptotiques, c'est-à-dire les viscosités maximale et minimale, respectivement. Notez que pour  $\mu_0 = \mu_\infty$  la viscosité apparente est réduite à celle du modèle de fluide newtonien.

D'où le tenseur des contraintes visqueuses aboutit à la relation suivante :

$$\overline{\overline{\tau}} = 2\mu(A_1, \lambda)\overline{\overline{D}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu_\infty \left(1 + \left(\frac{\mu_0}{\mu_\infty} - 1\right)\lambda\right) \frac{\partial w(r, t)}{\partial r} \\ 0 & 0 & 0 \\ \mu_\infty \left(1 + \left(\frac{\mu_0}{\mu_\infty} - 1\right)\lambda\right) \frac{\partial w(r, t)}{\partial r} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{III.30})$$

Le tenseur des contraintes de Cauchy est donné par la relation suivante :

$$\overline{\overline{\sigma}} = -p\overline{\overline{I}} + \overline{\overline{\tau}} = \begin{pmatrix} -p & 0 & \mu_\infty \left(1 + \left(\frac{\mu_0}{\mu_\infty} - 1\right)\lambda\right) \frac{\partial w(r, t)}{\partial r} \\ 0 & -p & 0 \\ \mu_\infty \left(1 + \left(\frac{\mu_0}{\mu_\infty} - 1\right)\lambda\right) \frac{\partial w(r, t)}{\partial r} & 0 & -p \end{pmatrix} \quad (\text{III.31})$$

En supposant que l'écoulement est unidirectionnel et complètement développé dans la direction (z), les équations de Navier- Stokes se réduisent à :

$$\begin{cases} -\frac{\partial p}{\partial r} = 0 \\ -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0 \\ \rho \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\tau_{rz}) + \rho f_z \end{cases} \quad (\text{III.32})$$

Comme présenté précédemment, dans le système cardiovasculaire, le mouvement du sang a une nature pulsatile en raison du gradient de pression local le long de la direction longitudinale de l'artère :

$$-\frac{\partial p}{\partial z} = P_0 + P_1 \cos(\omega_p t) \quad (\text{III.33})$$

Où  $-\partial p/\partial z$  est le gradient de pression,  $P_0$  est la moyenne du gradient de pression,  $P_1$  est l'amplitude (diastolique) de la fluctuation du gradient de pression,  $\omega_p = 2\pi f_p$  est la fréquence du gradient de pression imposé et  $f_p$  est la fréquence.

De plus, l'accélération externe ou l'accélération du corps est donnée :

$$f_z = G(t) = A_g \cos(\omega_b t + \varphi) \quad (\text{III.34})$$

Où  $A_g$ ,  $\omega_b$  et  $f_b$  sont l'amplitude, la pulsation et la fréquence, tandis  $\varphi$  est l'angle d'avance.

En remplaçant les équations (III.33) et (III.34) dans l'équation (III.32), la forme dimensionnelle de la composante (z) peut être réécrite comme suit :

$$\rho \frac{\partial w}{\partial t} = P_0 \left( 1 + \frac{P_1}{P_0} \cos(\omega_p t) \right) + \rho A_g \cos(\omega_b t + \varphi) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}) \quad (\text{III.35})$$

La contrainte de cisaillement  $\sigma_{rz}$  pour un fluide non-newtonien thixotrope obéissant au modèle de Moore peut être exprimée par :

$$\tau_{rz} = \mu_\infty \left( 1 + \left( \frac{\mu_0}{\mu_\infty} - 1 \right) \lambda \right) \frac{\partial w}{\partial r} \quad (\text{III.36})$$

L'équation de mouvement (III.35) ci-dessus est couplée à l'équation du paramètre structurel dépendant du temps, ce paramètre évolue en fonction d'une fonction structuration/déstructuration de sorte que :

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{\partial \lambda}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \lambda = \kappa_a (1 - \lambda) - \kappa_b \lambda |\dot{\gamma}| ; \quad \dot{\gamma} = \left[ \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{A}_1^2) \right]^{1/2} \quad (\text{III.37a, b})$$

Où  $\kappa_a$  et  $\kappa_b$  sont des constant matérielle de sorte que  $\kappa_a \equiv [1/s]$  décrit le taux de rétablissement du brownien et  $\kappa_b \equiv [-]$  représente le paramètre de déstructuration lié à la sensibilité de la structure au taux de cisaillement appliqué. Le taux de cisaillement  $\dot{\gamma} \equiv [1/s]$  est le deuxième invariant de  $A_1$ . En général,  $\lambda$  se situe dans la plage  $0 \leq \lambda \leq 1$ , où  $\lambda = 1$  dénote une microstructure non perturbée entièrement récupérée et  $\lambda = 0$  correspond à une microstructure complètement déstructurée.

Les conditions initiales et aux limites pertinentes associées au problème physique peuvent être résumées comme suit :

**Condition initiale :**

À  $t=0$  le fluide est supposé au repos :

$$w(r, 0) = 0 \quad \lambda(r, 0) = 1 \quad (\text{III.38a})$$

**Conditions aux limites:**

Sur la paroi de la conduite :

$$w(R, t) = 0 \text{ à } r=R \text{ (Condition de non glissement)} \quad (\text{III.38b})$$

Sur la ligne médiane (axes  $z$ ) :

$$\frac{\partial w(0, t)}{\partial r} = 0 \quad \frac{\partial \lambda(0, t)}{\partial r} = 0 \text{ à } r=0 \text{ (condition de symétrie)} \quad (\text{III.38c})$$

### III.4.5.2. Formulation mathématique adimensionnelle

Considérant les variables réduites basées sur les principales caractéristiques du problème telles que le rayon, la vitesse, la viscosité et pulsation :

$$\hat{r} = \frac{r}{R} \quad \hat{w} = \frac{w}{U} \quad \hat{t} = \frac{\omega_p}{2\pi} t \quad \hat{\tau}_{rz} = \frac{R}{\mu_\infty U} \tau_{rz} \quad (\text{III.39})$$

La forme dimensionnelle des équations gouvernantes (III.35) est exprimée sous sa forme adimensionnelle comme suit :

$$\gamma \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{t}} = B_1 (1 + e \cos(2\pi \hat{t})) + B_2 \cos(\omega_r \hat{t} + \varphi) + \frac{\partial}{\partial \hat{r}} (\hat{r} \hat{\tau}_{rz}) \quad (\text{III.40})$$

Avec:

$$\hat{\tau}_{rz} = (1 + (\mu_r - 1)\lambda) \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{r}} \quad (\text{III.41})$$

Et :

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \hat{t}} = K_a (1 - \lambda) - K_b \lambda \left| \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{r}} \right| \quad (\text{III.42})$$

Dans les équations ci-dessus, les constantes adimensionnelles sont données par :

$$\begin{aligned} U &= \frac{P_0 R^2}{\mu_\infty} & B_1 &= \frac{P_0 R^2}{\mu_\infty U} & B_2 &= \frac{\rho A_g R^2}{\mu_\infty U} & \gamma &= \frac{\rho R^2 \omega_p}{\mu_\infty 2\pi} \\ e &= \frac{P_1}{P_0} & \omega_r &= \frac{\omega_b}{\omega_p} & \mu_r &= \frac{\mu_0}{\mu_\infty} & K_a &= \frac{2\pi \kappa_a}{\omega_p} & K_b &= \frac{2\pi \kappa_b U}{\omega_p R} \end{aligned} \quad (\text{III.43})$$

Les conditions aux limites (III.38b et c) ainsi que la condition initiale (III.38a) sont également réécrite en fonction des variables réduites précédemment définies (III.43) :

**Condition initiale :**

À  $t=0$  le fluide est supposé au repos :

$$\hat{w}(\hat{r}, 0) = 0 \quad \lambda(\hat{r}, 0) = 1 \quad (\text{III.44a})$$

**Conditions aux limites:**

Sur la paroi de la conduite :

$$\hat{w}(1, \hat{t}) = 0 \text{ à } \hat{r} = 1 \text{ (condition de non-glissement)} \quad (\text{III.44b})$$

Sur la ligne médiane (axe z) :

$$\frac{\partial \hat{w}(0, \hat{t})}{\partial \hat{r}} = 0 \quad \frac{\partial \lambda(0, \hat{t})}{\partial \hat{r}} = 0 \text{ à } \hat{r} = 0 \text{ (condition de symétrie)} \quad (\text{III.44c})$$

### III.4.6. Ecoulement sanguin pulsé thixotrope sous accélération périodique externe et champ magnétique uniforme

L'écoulement visqueux magnétohydrodynamique (MHD) à travers les tuyaux joue un rôle important dans différents domaines de la science et de la technologie tels que l'industrie

pétrolière, la biomécanique, l'ingénierie du drainage et de l'irrigation, etc. Les recherches sur l'écoulement sanguin dans les artères sont d'une importance considérable dans de nombreuses maladies cardiovasculaires. L'écoulement sanguin pulsé à travers une artère a longtemps attiré l'attention des chercheurs en raison de sa grande importance dans les sciences médicales. Dans des conditions normales, le débit sanguin dans le système circulatoire humain dépend de l'action de pompage du cœur et cela produit un gradient de pression pulsé dans tout le réseau artériel.

### III.4.6.1. Formulation mathématique dimensionnelle

Pour un écoulement unidirectionnel dans une conduite cylindrique, le vecteur vitesse est donné selon la relation suivante :

$$\vec{V} = (0, 0, w(r, t)) \quad (\text{III.45})$$

Après l'introduction des hypothèses données ci-dessus, on peut établir les différentes équations gouvernantes nécessaires à la résolution du problème comme suit:

#### Equation de continuité :

Le fluide (le sang) étant supposé incompressible, la relation (III.7) se réduit à:

$$\frac{\partial w(r, t)}{\partial z} = 0 \quad (\text{III.46})$$

#### Equation de Navier-Stokes :

Le tenseur taux de déformation s'écrira de la manière suivante :

$$\overline{\overline{D}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial w(r, t)}{\partial r} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial w(r, t)}{\partial r} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{III.47})$$

Le tenseur des contraintes visqueuses peut s'écrire pour un fluide newtonien de la manière suivante :

$$\overline{\overline{\tau}} = 2\mu(A_1, \lambda)\overline{\overline{D}} \quad (\text{III.48})$$

La viscosité apparente  $\mu$  pour le modèle de Moore est donnée comme suit :

$$\mu(A_1, \lambda) = \mu_\infty + (\mu_0 - \mu_\infty) \lambda \quad (\text{III.49})$$

$\lambda(r, t)$  est le paramètre structurel qui décrit l'état local de la microstructure du fluide,  $\mu_0$  et  $\mu_\infty$  décrit les viscosités asymptotiques, c'est-à-dire les viscosités maximale et minimale, respectivement. Notez que pour  $\mu_0 = \mu_\infty$  la viscosité apparente est réduite à celle du modèle de fluide newtonien.

D'où le tenseur des contraintes visqueuses aboutit à la relation suivante :

$$\bar{\bar{\tau}} = 2\mu(A_1, \lambda) \bar{\bar{D}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu_\infty \left( 1 + \left( \frac{\mu_0}{\mu_\infty} - 1 \right) \lambda \right) \frac{\partial w(r, t)}{\partial r} \\ 0 & 0 & 0 \\ \mu_\infty \left( 1 + \left( \frac{\mu_0}{\mu_\infty} - 1 \right) \lambda \right) \frac{\partial w(r, t)}{\partial r} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{III.50})$$

Le tenseur des contraintes de Cauchy est donné par la relation suivante :

$$\bar{\bar{\sigma}} = -p \bar{\bar{I}} + \bar{\bar{\tau}} = \begin{pmatrix} -p & 0 & \mu_\infty \left( 1 + \left( \frac{\mu_0}{\mu_\infty} - 1 \right) \lambda \right) \frac{\partial w(r, t)}{\partial r} \\ 0 & -p & 0 \\ \mu_\infty \left( 1 + \left( \frac{\mu_0}{\mu_\infty} - 1 \right) \lambda \right) \frac{\partial w(r, t)}{\partial r} & 0 & -p \end{pmatrix} \quad (\text{III.51})$$

En supposant que l'écoulement est unidirectionnel et complètement développé dans la direction (z), les équations de Navier- Stokes se réduisent à :

$$\begin{cases} -\frac{\partial p}{\partial r} = 0 \\ -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0 \\ \rho \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}) + \rho f_z + (\vec{j} \wedge \vec{B}) \end{cases} \quad (\text{III.52})$$

Dans des conditions normales, l'écoulement sanguin dans le système circulatoire humain dépend de l'action de pompage du cœur, ce qui produit un gradient de pression dans tout le réseau artériel.

Le gradient de pression se compose également de deux composants, dont l'un est constant (non fluctuant) et l'autre est fluctuant (pulsé), Le gradient de pression est donné par :

$$-\frac{\partial p}{\partial z} = P_0 + P_1 \cos(\omega_p t) \quad \text{(III.53)}$$

Où  $P_0$  est la composante constante (systolique) du gradient de pression,  $P_1$  est l'amplitude (diastolique) de la composante fluctuante, et  $\omega_p$  est la fréquence d'impulsion.

Tenant compte de la présence la force du à la présence du champ magnétique, la force électromagnétiques s'appliquant sur le sang peuvent s'écrire de la manière suivante :

$$\vec{f}_m = \vec{j} \wedge \vec{B} \quad \text{(III.54)}$$

où  $B = \vec{B}_0 + \vec{B}_1$  est le champ magnétique total qui est la somme du champ magnétique uniforme  $\vec{B}_0$  et du champ magnétique induit  $\vec{B}_1$  (qui pourrait être ignoré en raison de la valeur réduite de la conductivité électrique du sang et ainsi justifier les écoulements magnétohydrodynamiques à petit nombre de Reynolds),  $\vec{j}$  est la densité de courant.

Afin de pouvoir exprimer les forces extérieures s'appliquant sur le fluide il est nécessaire de rappeler l'ensemble des équations de Maxwell données par les relations ci-dessous :

$$\begin{cases} \nabla \wedge \vec{B} = \mu_m \vec{j} \\ \nabla \wedge \vec{E} = 0 \\ \nabla \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{cases} \quad \text{(III.55)}$$

Où  $\mu_m$  est la perméabilité magnétique,  $\vec{B}$  and  $\vec{E}$  sont les champs magnétique et électrique.

La densité de courant électrique peut être écrite par la loi d'Ohm comme:

$$\vec{j} = \sigma (\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B}) \quad \text{(III.56)}$$

Où  $\sigma$  est la conductivité électrique. La force électromagnétique peut être exprimée par la force de Lorentz lors de l'application d'un champ magnétique uniforme  $\vec{B} = (0, B_0, 0)$  est donnée par :

$$\vec{j} \wedge \vec{B} = -\sigma B_0^2 \vec{V} \quad (\text{III.57})$$

$$\vec{j} \wedge \vec{B} = (\sigma (\vec{V} \wedge \vec{B})) \wedge \vec{B} = -\sigma B_0^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ w(r,t) \end{pmatrix} \quad (\text{III.58})$$

Où  $\sigma \vec{V}$  est la force électromagnétique,  $B_0^2$  est le champ magnétique uniforme appliqué, et  $w(r,t)$  est la composante du vecteur vitesse  $\vec{V}$  pour un écoulement unidirectionnel axial selon la direction  $z$ .

Au final la force électromagnétique devient :

$$\vec{f}_m = -\sigma B_0^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ w(r,t) \end{pmatrix} \quad (\text{III.59})$$

En tenant compte les hypothèses simplificatrices ci-dessus, les équations de continuité et l'équation de quantité de mouvement s'écrivent comme suite:

$$\frac{\partial w(r,t)}{\partial z} = 0 \quad (\text{III.60})$$

$$\rho \frac{\partial w(r,t)}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}) + \rho G(t) - \sigma B_0^2 w(r,t) \quad (\text{III.61})$$

L'accélération du corps est donnée par :

$$G_z(t) = A_g \cos(\omega_b t + \phi) \quad (\text{III.62})$$

$A_g$  est l'amplitude de l'accélération du corps, la fréquence d'accélération du corps,  $\phi$  l'angle de phase de l'accélération du corps  $G$  par rapport au gradient de pression et  $t$  est le temps.

L'équation déterminante du mouvement pour l'écoulement en coordonnées cylindriques est obtenue en substituant les équations **III.53**, **III.59** et **III.62** dans l'équation **III.52** et peut s'écrire comme suit :

$$\rho \frac{\partial w(r,t)}{\partial t} = P_0 \left( 1 + \frac{P_1}{P_0} \cos(\omega_p t) \right) + \rho A_g \cos(\omega_b t + \phi) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}) - \sigma B_0^2 w(r,t) \quad (\text{III.63})$$

La contrainte de cisaillement  $\sigma_{rz}$  pour un fluide thixotrope obéissant au modèle de Moore peut être exprimée par :

$$\sigma_{rz} = \mu_{\infty} \left( 1 + \left( \frac{\mu_0}{\mu_{\infty}} - 1 \right) \lambda \right) \frac{\partial w(r,t)}{\partial r} \quad (\text{III.64})$$

L'équation de mouvement ci-dessus (III.63) est couplée à l'équation des paramètres structurels dépendant du temps (voir les équations III.37a et b) :

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = \kappa_a (1 - \lambda) - \kappa_b \lambda \left| \frac{\partial w}{\partial r} \right| \quad (\text{III.65})$$

Les conditions initiales et aux limites pertinentes associées au problème physique peuvent être résumées comme suit :

**Condition initiale:**

A  $t = 0$  le fluide est supposé au repos :

$$w(r,0) = 0 \quad \lambda(r,0) = 1 \quad (\text{III.66a})$$

**Conditions aux limites:**

Sur la ligne médiane (axe z) :

$$\frac{\partial w(0,t)}{\partial r} = 0 \quad \frac{\partial \lambda(0,t)}{\partial r} = 0 \text{ à } r = 0 \text{ (condition de symétrie)} \quad (\text{III.66b})$$

Sur la paroi de la conduite :

$$w(R,t) = 0 \text{ à } r = R \text{ (condition non-glissement)} \quad (\text{III.66c})$$

### III.4.6.2. Formulation mathématique adimensionnelle

Nous remettons maintenant à l'échelle adimensionnelle les équations gouvernantes introduites dans la section III.4, à cette fin nous définissons les variables réduites basées sur les principales caractéristiques du problème telles que le rayon, la vitesse, le temps et la contrainte :

$$\hat{r} = \frac{r}{R} \quad \hat{w} = \frac{w}{U} \quad \hat{t} = \frac{\omega_p}{2\pi} t \quad \hat{\tau}_{rz} = \frac{R}{\mu_{\infty} U} \tau_{rz} \quad (\text{III.67})$$

La forme dimensionnelle des équations gouvernantes (III.63) est exprimée sous sa forme sans dimension comme suit :

$$\gamma \frac{\partial w}{\partial t} = B_1 \left(1 + e \cos(2\pi \hat{t})\right) + B_2 \cos(\omega_r \hat{t} + \varphi) + \frac{\partial}{\partial \hat{r}} \left(\hat{r} \hat{\tau}_{rz}\right) - H^2 w \quad (\text{III.68})$$

Avec:

$$\hat{\tau}_{rz} = (1 + (\mu_r - 1) \lambda) \frac{\partial w}{\partial \hat{r}} \quad (\text{III.69})$$

Et:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = K_a (1 - \lambda) - K_b \lambda \left| \frac{\partial w}{\partial \hat{r}} \right| \quad (\text{III.70})$$

Dans les équations ci-dessus, les constantes sans-dimensions sont données par :

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{P_0 R^2}{\mu_\infty U} & B_2 &= \frac{\rho A_g R^2}{\mu_\infty U} & \gamma &= \frac{\rho R^2 \omega_p}{\mu_\infty 2\pi} & H &= B_0 R \sqrt{\frac{\sigma}{\mu}} \\ e &= \frac{P_1}{P_0} & \omega_r &= \frac{\omega_b}{\omega_p} & \mu_r &= \frac{\mu_0}{\mu_\infty} & K_a &= \frac{2\pi \kappa_a}{\omega_p} & K_b &= \frac{2\pi \kappa_b U}{\omega_p R} \end{aligned} \quad (\text{III.71})$$

Les conditions aux limites et initiale sous forme adimensionnelle sont données par :

#### Condition initiale:

À  $t = 0$  le fluide est supposé au repos :

$$w(\hat{r}, 0) = 0 ; \quad \lambda(\hat{r}, 0) = 1 \quad (\text{III.72a})$$

#### Conditions aux limites:

Sur la ligne médiane (axe z) :

$$\frac{\partial w(0, \hat{t})}{\partial \hat{r}} = 0 ; \quad \frac{\partial \lambda(0, \hat{t})}{\partial \hat{r}} = 0 \text{ à } r = 0 \text{ (condition de symétrie)} \quad (\text{III.72b})$$

Sur la paroi de la conduite :

$$w(1, \hat{t}) = 0 \text{ à } r = R \text{ (condition de non-glissement)} \quad (\text{III.72c})$$

### III.4.5. Solution analytique de Womersley pour un fluide newtonien

En dynamique des fluides, on appelle un écoulement avec des variations périodiques un écoulement pulsé, ou un écoulement de Womersley. Les profils d'écoulement ont été déterminés pour la première fois par John R. Womersley (1907-1958) au cours de ses travaux sur l'écoulement du sang dans les artères [28].

Pour estimer l'écoulement à partir d'une pression pulsé dans des tubes rigides, nous commencerons par supposer un écoulement de fluide newtonien, uniforme, laminaire, à symétrie axiale, dans un tube (**Figure III.1**). Ce problème est similaire à celui de l'écoulement de Poiseuille, mais nous considérons maintenant un écoulement pulsé plutôt que régulier.

Les vaisseaux sanguins sont supposés être rigides et axisymétriques. Le profil de vitesse variant dans le temps dans un tube droit et rigide peut être résolu pour un écoulement pulsé en partant des équations de continuité et de Navier-Stokes en coordonnées cylindriques (**III.7** et **III.8**) pour l'écoulement instationnaire d'un fluide newtonien incompressible, dans la direction  $z$ , sans forces de d'accélération externes  $G=0$ . En supposant que l'écoulement est entièrement développé dans la direction ( $z$ ), les équations de Navier-Stokes se réduisent à :

$$\rho \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right) \quad (\text{III.73})$$

A partir de la projection axiale de l'équation de Navier-Stokes (**III.73**) pour un fluide newtonien, il est possible d'écrire la série de fourrier en utilisant des nombres complexes pour convertir les sinus et les cosinus en exponentielles, l'expression équivalente du gradient de pression entraînant l'écoulement pulsé serait la suivante :

$$\frac{dp}{dz} = \text{Re} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} P_n e^{i\omega t} \right] \quad (\text{III.74})$$

Où  $P_n$  est une constante représentant l'amplitude de chaque harmonique  $n$  du gradient de pression,  $\omega$  est la fréquence  $\omega=2\pi/T$ ,  $i$  est le nombre complexe unitaire (nombre imaginaire), et  $\text{Re}$  désigne la partie réelle d'un nombre complexe.

Chaque composante du gradient de pression axiale peut alors s'écrire comme suit :

$$\left. \frac{dp}{dz} \right|_n = P_n e^{i\omega t} \quad (\text{III.75})$$

La vitesse est également décomposé en série de Fourier, elle prendra alors une forme :

$$w(r) = \operatorname{Re} \left( \sum_{n=0}^{\infty} w(r, n) \right) ; \text{ Avec : } w(r, n) = f_n(r) e^{i\omega n t} \quad (\text{III.76a, b})$$

D'où  $w(r, n)$  est une solution de l'équation différentielle partielle (III.73). En effet, afin de résoudre l'équation différentielle, il est nécessaire de définir la dérivée de  $w$  par rapport au temps  $t$ , la dérivée de  $w$  par rapport à  $r$  et également la deuxième dérivée de  $w$  par rapport à  $r$  :

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial w(r)}{\partial t} \right|_n &= \frac{\partial}{\partial t} (f_n(r) e^{i\omega n t}) = i\omega n f_n(r) e^{i\omega n t}; \\ \left. \frac{\partial w(r)}{\partial r} \right|_n &= \frac{\partial}{\partial r} (f_n(r) e^{i\omega n t}) = \frac{\partial f_n}{\partial r} e^{i\omega n t}; \\ \left. \frac{\partial^2 w(r)}{\partial r^2} \right|_n &= \frac{\partial^2 f_n}{\partial r^2} e^{i\omega n t}; \end{aligned} \quad (\text{III.77a, b, c})$$

Ces expressions peuvent ensuite être substituées dans l'équation réduite de Navier-Stokes (III.73), et après quelques manipulations mathématiques simples, elles donnent l'équation suivante :

$$\frac{\partial^2 f_n(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f_n(r)}{\partial r} + \frac{i^3 \omega n}{\nu} f_n(r) = \frac{P_n}{\mu} \quad (\text{III.78})$$

L'équation (III.78) est une équation différentielle ordinaire linéaire non-homogène de 2<sup>ème</sup> ordre. Elle peut ensuite être résolue pour  $f_n(r)$  en utilisant une fonction de Bessel d'ordre zéro.

L'équation (III.78) est rendue sans dimension :

$$\frac{\partial^2 f_n(r)}{\partial \hat{r}^2} + \frac{1}{\hat{r}} \frac{\partial f_n(r)}{\partial \hat{r}} + \frac{i^3 n \omega}{\nu} R^2 f_n(r) = \frac{P_n}{\mu} R^2 \quad (\text{III.79})$$

$$\frac{\partial^2 f_n(r)}{\partial \hat{r}^2} + \frac{1}{\hat{r}} \frac{\partial f_n(r)}{\partial \hat{r}} + i^3 n \xi^2 f_n(r) = \frac{P_n}{\mu} R^2 \quad (\text{III.80})$$

$$\frac{\partial^2 f_n(r)}{\partial \hat{r}^2} + \frac{1}{\hat{r}} \frac{\partial f_n(r)}{\partial \hat{r}} + \lambda^2 f_n(r) = \frac{P_n}{\mu} R^2 \quad (\text{III.81})$$

Où le nombre de Womersley  $\xi$  est un paramètre sans dimension utilisé pour caractériser un écoulement périodique. Ce nombre est le rapport entre les forces inertielles instationnaires et les forces visqueuses. Il s'écrit de la manière suivante :

$$\xi = R\sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \quad (\text{III.82})$$

L'équation(III.81) est une équation linéaire non homogène à cause de terme du gradient de pression et elle correspond à une équation différentielle de Bessel d'ordre-zéro à la forme suivante :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial s^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial g}{\partial s} + \lambda^2 g = 0 \quad (\text{III.83})$$

L'équation (III.83) est la fonction de Bessel d'ordre zéro et d'arguments complexes ou la solution homogène est donnée par:

$$f_n(r) = C_1 J_0(\lambda r) + C_2 Y_0(\lambda r) \quad (\text{III.84})$$

Où  $C_1$  et  $C_2$  sont des constantes,  $J_0$  et  $Y_0$  sont des fonctions de Bessel d'ordre zéro de première et deuxième espèce, respectivement.

$\lambda$  est une constante dépendant de la viscosité cinématique  $\nu$ , une fréquence fondamentale  $\omega$  et une harmonique  $n$  donnée.

Dans ce cas  $C_2=0$ , nous devons seulement nous préoccuper du premier terme,  $J_0$  est donnée par :

$$J_0 = 1 - \frac{x^2}{2^2 (1!)^2} + \frac{x^4}{2^4 (2!)^2} - \frac{x^6}{2^6 (3!)^2} + \frac{x^8}{2^8 (4!)^2} - \dots \quad (\text{III.85})$$

L'équation de Bessel dans la solution de Womersley est inhomogène à cause du terme de gradient de pression. Nous devons trouver une solution particulière à l'équation différentielle, nous en proposons donc une facile :

$$f_n(r)_{particulière} = C_3 \quad (\text{III.86})$$

Nous pouvons alors mettre à zéro les dérivées de  $f_n(r)$  par rapport à  $(r)$  et résoudre l'équation (III.86) :

$$\frac{i^3 n \omega}{\nu} R^2 C_3 = \frac{P_n}{\mu} R^2 \quad (\text{III.87})$$

$$C_3 = \frac{P_n \mu}{\mu \rho i^3 \omega n} = -\frac{P_n}{i \rho \omega n} \quad (\text{III.88})$$

L'équation (III.84) devient :

$$f_n(r) = C_1 J_0(\lambda r) - \frac{P_n}{i \rho \omega n} \quad (\text{III.89})$$

Afin de trouver la constante  $C_1$ , on utilise la condition de non-glissement (III.19c), la vitesse à la paroi devrait être nulle  $w=0$  à  $r=R$  :

$$0 = C_1 J_0(\lambda R) - \frac{P_n}{i \rho \omega n} \quad (\text{III.90})$$

$$C_1 = \frac{P_n}{i \rho \omega n J_0(\lambda R)} \quad (\text{III.91})$$

La solution totale de l'équation (III.84), devient maintenant :

$$f_n(r) = \frac{P_n}{i \rho \omega n} \left[ \frac{J_0(\lambda r)}{J_0(\lambda R)} - 1 \right] \quad (\text{III.92})$$

La vitesse correspondante  $w$  devient :

$$w(r,t) = \Re e \left\{ \frac{P_n}{i \rho n \omega} e^{i n \omega t} \left[ \frac{J_0 \left( \frac{r}{R} \xi i^{\frac{3}{2}} n^{\frac{1}{2}} \right)}{J_0 \left( \xi i^{\frac{3}{2}} n^{\frac{1}{2}} \right)} - 1 \right] \right\} \quad (\text{III.93})$$

Où  $i$  est la partie imaginaire,  $J_0$  est la fonction de Bessel de première espèce d'ordre zéro et

d'argument complexe, et  $\xi = R \sqrt{\frac{\rho \omega}{\mu}}$  est le nombre de Womersley.

### III.5. Conclusion

Dans des conditions normales, le sang se comporte comme un fluide newtonien. Lorsque la constante de temps de l'agrégation des globules de sang rouge devient inférieure à l'échelle de temps d'écoulement local, c'est-à-dire en présence de régions à faible débit et stagnantes, le sang se comporte comme un fluide thixotrope.

Dans ce chapitre, la formulation dimensionnelle et adimensionnelles accompagnée des conditions initiales et aux limites de l'écoulement a été présentée, pour chaque phénomène physique caractérisé par ses propres hypothèses simplificatrices. Des descriptions mathématiques détaillées d'un écoulement pulsé ont été développées dans un tube sous un gradient de pression et accélération périodique externe pour différents fluide (newtonien et non-newtonien). Ces démonstrations mathématiques importantes associés à ces différents cas d'écoulement ont été représentées et considérés en détail, avec un accent particulier sur la solution analytique de Womersley [28] qui correspond à un écoulement de Poiseuille superposé à un écoulement harmonique, donc à un écoulement pulsé d'un fluide newtonien incompressible homogène dans un tube à parois rigides et indéformables.

**Chapitre IV :**  
**Méthode des différences**  
**finies**

# Chapitre IV

## Méthode des différences finies

### IV.1. Introduction

Les modèles mathématiques utilisés dans la formulation du problème physique se présentent sous la forme de systèmes d'équations différentielles qui lient des fonctions inconnues à leurs dérivées partielles. Comme la majorité ou bien la totalité des phénomènes physiques ne sont pas linéaires, il n'existe pas de solution exacte ou bien analytique et pour cela il est nécessaire de chercher des solutions approchées à la solution exacte par des méthodes numériques.

Les méthodes numériques de discrétisation consistent à ramener la résolution du système d'équations différentielles dans le domaine d'étude, avec des conditions aux limites appropriées, à celles d'un système d'équations algébriques.

Dans ce chapitre, nous décrivons la résolution des équations par la méthode des différences finies pour résoudre les équations obtenues au deuxième chapitre.

### IV.2. Méthode des différences finies

La méthode des différences finies, présente une technique de résolution des équations aux dérivées partielles, par l'approximation de dérivées par des différences finies. Cette méthode consiste à subdiviser le domaine d'étude en un nombre déterminé de nœud et à représenter la fonction recherchée en chacun des nœuds du domaine par un développement limité en série de Taylor. Ainsi, l'équation différentielle est transformée en équation algébrique pour chaque nœud. La résolution du système d'équations algébriques permet d'obtenir la distribution de la fonction étudiée dans le domaine d'étude.

La méthode de différence finie ne permet pas la prise en compte des conditions de passage d'un milieu physique à un autre et des non-linéarités, cela nécessite un traitement spécifique. D'autre part, elle s'adapte mal aux objets de la géométrie complexe à cause de la rigidité du maillage.

### IV.3. Principe de résolution

La méthode des différences finies consiste à remplacer les dérivées partielles par des différences divisées ou combinaisons de valeurs ponctuelles de la fonction en un nombre fini

de points discrets ou nœuds du maillage. La méthode des différences finies consiste à approximer les dérivées des équations de la physique au moyen des développements de Taylor et se déduit directement de la définition de la dérivée.

Cette méthode a comme avantage d'être d'une grande simplicité d'écriture et faible coût en termes de temps de calcul. Ces principaux inconvénients sont sa limitation à des géométries simples, sa difficultés de prise en compte des conditions aux limites de type Neumann.

#### IV.4. La modélisation mathématique et la simulation numérique

Les différentes étapes pour modéliser un système physique sont :

- La recherche d'un modèle mathématique représentant la physique. Mise en équation.
- L'élaboration d'un maillage. Discrétisation des équations de la physique.
- La résolution des équations discrètes (souvent systèmes linéaires à résoudre).
- La transcription informatique et programmation des relations discrètes.
- La simulation numérique et exploitation des résultats.

#### IV.5. Notation indicielle

La notation indicielle est utilisé pour la facilité l'écriture et la lecture des équations.

Le principe de la notation indicielle :

Soit  $w(r, t)$  une grandeur physique à déterminer sur l'intervalle  $r \in [0, R]$  en espace et  $t \in [0, T]$  en temps. La recherche d'une solution discrète de la grandeur  $w(r, t)$  amène à constituer un maillage de l'intervalle de définition.

On considère un maillage (ou grille de calcul) composé de  $N + 1$  points  $r_i$  pour  $i = 0; \dots; N$  régulièrement espacés avec un pas  $\Delta r$ . Les points  $r_i = i\Delta r$  sont appelés les nœuds du maillage. Pour le temps en définie  $t_j$  pour  $j=0 ; \dots ; T$  régulièrement espacés avec un pas  $\Delta t$ .

Par exemple :

$$w(r, t) = w_{i, j} \quad \text{(IV.1)}$$

$$w(r + \Delta r, t) = w_{i+1, j} \quad \text{(IV.2)}$$

$$w(r - \Delta r, t) = w_{i-1, j} \quad \text{(IV.3)}$$

$$w(z, t + \Delta t) = w_{i, j+1} \quad \text{(IV.4)}$$

$$w(z, t - \Delta t) = w_{i, j-1} \quad \text{(IV.5)}$$

## IV.6. Maillage (grille de calcul)

La spécification du maillage dépend de la complexité de la géométrie. Si cette dernière est cylindrique, comme c'est le cas de notre problème, il est recommandé d'utiliser un maillage rectangulaire (Figure IV.1).

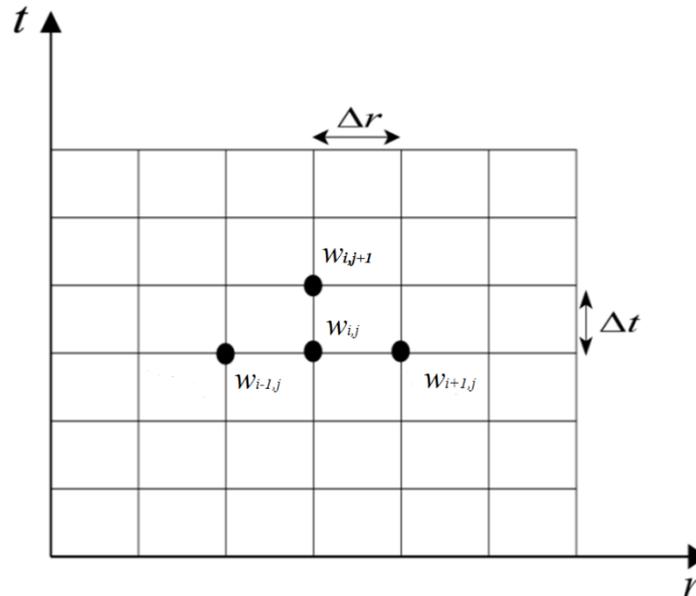


Figure IV.1. Maillage par la méthode des différences finies.

## IV.7. Développement en séries de Taylor

Le développement en série de Taylor peut être donné sous la forme suivante :

$$w(r_0 + \Delta r, t_0) = w(r_0, t_0) + \left. \frac{\partial w}{\partial r} \right|_{r=0} \Delta r + \left. \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right|_{r=0} \frac{\Delta r^2}{2!} + \dots + \left. \frac{\partial^n w}{\partial r^n} \right|_{r=0} \frac{\Delta r^n}{n!} + R_n \quad (\text{IV.6})$$

$$w(r_0 - \Delta r, t_0) = w(r_0, t_0) - \left. \frac{\partial w}{\partial r} \right|_{r=0} \Delta r + \left. \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right|_{r=0} \frac{\Delta r^2}{2!} - \dots + \left. \frac{\partial^n w}{\partial r^n} \right|_{r=0} \frac{\Delta r^n}{n!} + R_n \quad (\text{IV.7})$$

$R_n$  : Représente les termes omis d'ordre (n+1 à l'infini)

En pratique on se limite à un nombre fini de terme et tout le reste sera considéré en tant que l'erreur de l'approximation (erreur de troncature).

## IV.8. Construction des schémas pour la dérivée d'ordre un et deux

La forme des différents schémas utilisés peut être donnée selon les équations suivantes :

Schéma aux différences avant :

$$\left. \frac{\partial w}{\partial r} \right|_0 = \frac{w(r_0 + \Delta r, t_0) - w(r_0, t_0)}{\Delta r} + \theta(\Delta r) \quad (\text{IV.8})$$

Schéma aux différences arrière :

$$\left. \frac{\partial w}{\partial r} \right|_0 = \frac{w(r_0, t_0) - w(r_0 - \Delta r, t_0)}{\Delta r} + \theta(\Delta r) \quad (\text{IV.9})$$

Schéma aux différences centrées :

$$\left. \frac{\partial w}{\partial r} \right|_0 = \frac{w(r_0 + \Delta r, t_0) - w(r_0 - \Delta r, t_0)}{2\Delta r} + \theta(\Delta r^2) \quad (\text{IV.10})$$

Schéma à la dérivée seconde :

$$\left. \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right|_0 = \frac{w(r_0 + \Delta r, t_0) - 2w(r_0, t_0) + w(r_0 - \Delta r, t_0)}{\Delta r^2} + \theta(\Delta r^2) \quad (\text{IV.11})$$

Les schémas aux dérivées peuvent être donnés sous forme indicielle comme suit :

Schéma aux différences avant :

$$\left. \frac{\partial w}{\partial r} \right|_{i,j} = \frac{w_{i+1,j} - w_{i,j}}{\Delta r} + \theta(\Delta r) \quad (\text{IV.12})$$

Schéma aux différences arrière :

$$\left. \frac{\partial w}{\partial r} \right|_{i,j} = \frac{w_{i,j} - w_{i-1,j}}{\Delta r} + \theta(\Delta r) \quad (\text{IV.13})$$

Schéma aux différences centrées :

$$\left. \frac{\partial w}{\partial r} \right|_{i,j} = \frac{w_{i+1,j} - w_{i-1,j}}{2\Delta r} + \theta(\Delta r^2) \quad (\text{IV.14})$$

Schéma à la dérivée seconde :

$$\left. \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right|_{i,j} = \frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{\Delta r^2} + \theta(\Delta r^2) \quad (\text{IV.15})$$

### IV.8.1. Schéma explicite

Nous utilisons un schéma avant d'ordre 1 pour évaluer la dérivée temporelle et un schéma centré d'ordre 2 pour la dérivée seconde en espace (Figure IV.2) :

$$\frac{U_i^{j+1} - U_i^j}{\Delta t} + \theta(\Delta t) = a \frac{U_{i+1}^j - 2U_i^j + U_{i-1}^j}{\Delta z^2} + \theta(\Delta z^2) \quad (\text{IV.16})$$

$$U_i^{j+1} = \lambda U_{i-1}^j + (1+2\lambda)U_i^j + \lambda U_{i+1}^j \quad (\text{IV.17})$$

Avec :  $\lambda = a \frac{\Delta t}{\Delta z^2}$

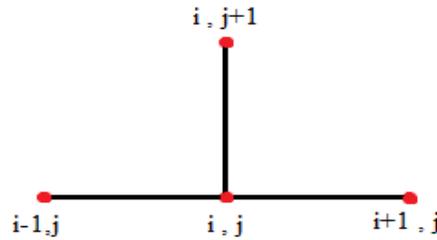


Figure IV. 2. Schéma explicite [66].

### IV.8.2. Schéma implicite

De la même manière que le schéma explicite. Nous utilisons un schéma avant d'ordre 1 pour évaluer la dérivée temporelle et un schéma centré d'ordre 2 pour la dérivée seconde en espace (Figure IV.3):

$$\frac{U_i^{j+1} - U_i^j}{\Delta t} + \theta(\Delta t) = a \frac{U_{i+1}^j - 2U_i^j + U_{i-1}^j}{\Delta z^2} + \theta(\Delta z^2) \quad (\text{IV.18})$$

$$-U_i^{j+1} = \lambda U_{i-1}^{j+1} + (1-2\lambda)U_i^{j+1} + \lambda U_{i+1}^{j+1} \quad (\text{IV.19})$$

Avec :  $\lambda = a \frac{\Delta t}{\Delta z^2}$

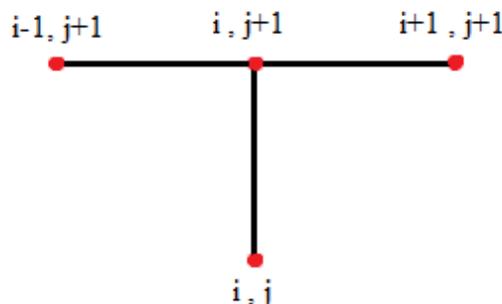


Figure IV. 3. Schéma implicite [66].

### IV.8.3. Schéma de Crank-Nicolson

Le schéma de Crank-Nicolson est un schéma mixte, moitié explicite et moitié implicite (Figure IV.4).

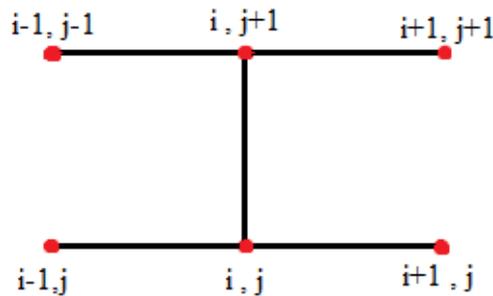
$$\frac{U_i^{j+1} - U_i^j}{\Delta t} = a \frac{1}{2} \frac{U_{i+1}^j - 2U_i^j + U_{i-1}^j}{\Delta z^2} + a \frac{1}{2} \frac{U_{i+1}^j - 2U_i^j + U_{i-1}^j}{\Delta z^2} \quad (\text{IV.20})$$

$$\frac{U_i^{j+1} - U_i^j}{\Delta t} = a\alpha \frac{U_{i+1}^j - 2U_i^j + U_{i-1}^j}{\Delta z^2} + a(1-\alpha) \frac{U_{i+1}^j - 2U_i^j + U_{i-1}^j}{\Delta z^2} \quad (\text{IV.21})$$

Pour  $\alpha = 0$  le schéma est explicite

$\alpha = 1$  le schéma est implicite

$\alpha = 0.5$  le schéma devient celui de Crank-Nikolson.



**Figure IV. 4.** Schéma de Crank-Nickolson [66].

L'avantage principal de ce schéma est que pour une valeur donnée de  $\Delta x$ , l'erreur de troncature sur le terme en  $\Delta t$  est nettement plus petite que dans les méthodes implicite et explicite.

La méthode de Crank-Nickolson est numériquement stable, et quadratique pour le temps. On peut facilement la généraliser à des problèmes à deux ou trois dimensions.

#### IV.8.4. Schéma de Duffort Frankel

Le schéma de Duffort Frankel est le seul schéma explicite simple connu avec une précision de 2<sup>ème</sup> ordre dans l'espace et le temps qui possède cette propriété. Par conséquent, il a été en partie utilisé pour résoudre les équations de Navier-Stokes.

$$\frac{U_i^{j+1} - U_i^j}{2\Delta t} = a \frac{U_{i+1}^j - 2U_i^j + U_{i-1}^j}{\Delta z^2} \quad (\text{IV.22})$$

#### IV.9. Erreur de troncature ou erreur de consistance

C'est l'erreur qui résulte de l'utilisation d'une approximation (schéma) à la place de la solution exacte (dérivée).

## IV.10. Notion de stabilité

On distingue trois types de stabilité

- La stabilité d'un problème physique.
- La stabilité d'un problème mathématique.
- La stabilité numérique d'une méthode de calcul.

### IV.10.1. Stabilité d'un problème physique (système chaotique)

Un problème est dit chaotique si une petite variation des données initiales entraîne une variation totalement imprévisible des résultats. Cette notion de chaos, liée à la physique d'un problème, est indépendante du modèle mathématique utilisé et encore plus de la méthode numérique utilisée pour résoudre ce problème mathématique. De nombreux problèmes sont chaotiques, par exemple la turbulence des fluides.

### IV.10.2. Stabilité d'un problème mathématique (sensibilité)

Un problème est dit très sensible ou mal conditionné si une petite variation des données ou des paramètres entraîne une grande variation des résultats. Cette notion de conditionnement, liée au problème mathématique, est indépendante de la méthode numérique utilisée pour le résoudre. Pour modéliser un problème physique qui n'est pas chaotique, on construira un modèle mathématique qui sera le mieux conditionné possible [66].

### IV.10.3. Stabilité d'une méthode numérique

Une méthode est dite instable si elle est sujette à une propagation importante des erreurs numériques de discrétisation et d'arrondi.

Un problème peut être bien conditionné alors que la méthode numérique choisie pour le résoudre est instable. Dans ce cas, il est impératif de changer de méthode numérique. Par contre, si le problème de départ est mal conditionné, aucune méthode numérique ne pourra y remédier. Il faudra alors essayer de trouver une formulation mathématique différente du même problème, si on sait que le problème physique sous-jacent est stable [66].

### IV.10.4. Erreurs dues à la discrétisation

Il existe deux types d'erreur :

- Erreur d'arrondi: due au nombre de digits qui représente un réel. Cette erreur est de moins en moins significative sur les machines de calcul actuelles.

- Erreur numérique de discrétisation : est la plus commune et la plus étudiée (voir ce qui suit) : elle provient, comme son nom l'indique, de l'approximation d'un système continu (un milieu continu ici, décrit par un nombre infini de paramètres) par un système discret (décrit par un nombre fini de paramètres).

#### IV.10.5. Convergence

Un schéma est dit convergent lorsque les deux conditions (la stabilité et la consistance) sont réunies. Ce théorème est applicable pour les EDP linéaires.

#### IV.11. Résolution numérique

Dans le cas de notre étude et en l'absence de solutions exactes dans les différents cas traités, nous sommes motivés par l'utilisation de méthodes numériques pour résoudre des équations aux dérivées partielles décrivant le modèle physique construit. La méthode différence finie a été choisie, un choix motivé par le fait que cette méthode est assez souvent utilisée dans la littérature et notamment pour la simulation des écoulements sanguins.

La méthode standard des différences finies (MDF) est utilisée pour résoudre numériquement les équations différentielles ci-dessus (Chapitre III), avec les conditions initiales et limites correspondantes en utilisant un schéma aux différences avant pour le temps et un schéma aux différences centrées pour l'espace.

##### IV.12.1. Discrétisation du problème

L'utilisation de la méthode des différences finies nécessite le maillage du système physique en choisissant judicieusement les pas d'espace et de temps  $\Delta r$  et  $\Delta t$ , respectivement ainsi que l'utilisation de variables discrètes aux différents nœuds. Ceci est réalisé en remplaçant les dérivées partielles par des schémas différentiels. Le maillage est une étape cruciale dans la résolution du problème par la méthode bien connue des différences finies. Il consiste en un choix judicieux. Les incréments d'espace et de temps  $\Delta r$  et  $\Delta t$ , respectivement, ainsi que l'utilisation de variables discrètes à différents nœuds.

La projection axiale de l'équation de quantité de mouvement avec les conditions initiales et aux limites correspondantes données pour les trois cas, peuvent être intégrés numériquement. Les schémas aux différences centrée et avant ont été utilisés pour estimer, respectivement, la dérivée spatiale du premier et du second ordre, tandis que le schéma aux

différences avant a été utilisé pour estimer la dérivée temporelle. L'exécution de la méthode numérique a été faite avec un code de calcul.

Ceci est réalisé en remplaçant les dérivées partielles par des schémas différentiels finis.

Donc, notons  $w(r_i, t_i) = w_i^j$  et approchons diverses dérivées partielles comme : Désignons les diverses dérivées spatiales comme :

$$\frac{\partial w(r, t)}{\partial r} \cong \frac{w_{i+1}^j - w_i^j}{\Delta r} \quad (\text{IV.23})$$

$$\frac{\partial^2 w(r, t)}{\partial r^2} \cong \frac{w_{i+1}^j - 2w_i^j + w_{i-1}^j}{\Delta r^2} \quad (\text{IV.24})$$

De même, pour la dérivée temporelle, nous définissons l'approximation :

$$\frac{\partial w(r, t)}{\partial t} \cong \frac{w_i^{j+1} - w_i^j}{\Delta t} \quad (\text{IV.25})$$

En utilisant les équations de la dérivée temporelle et spatiale, **IV.23**, **IV.24** et **IV.25**, la discrétisation de l'équation de quantité de mouvement adimensionnelle **III.21** pour la première étude « *Ecoulement sanguin pulsé newtonien sous accélération périodique externe* », s'écrit sous la forme suivante :

$$(w)_i^{j+1} = \frac{\Delta t}{a} \left[ B_1 (1 + e \cos 2\pi t^j) + B_2 \cos(2\pi \omega_r t^j + \phi) \right] + (w)_i^j \left( 1 - \frac{2}{\alpha} \frac{\Delta t}{\Delta r^2} \right) + (w)_{i+1}^j \left( \frac{\Delta t}{2\alpha r \Delta r} + \frac{\Delta t}{\alpha \Delta r^2} \right) + (w)_{i-1}^j \left( \frac{\Delta t}{\alpha \Delta r^2} - \frac{\Delta t}{2\alpha r \Delta r} \right) \quad (\text{VI.26})$$

Pour la seconde étude « *Ecoulement sanguin pulsé thixotrope sous accélération périodique externe* », la discrétisation de l'équation de quantité de mouvement adimensionnelle **III.40**, la contrainte de cisaillement d'un fluide Non Newtonien de type thixotrope **III.41** ainsi que le paramètre structurel du modèle de Moore **III.42**, peuvent être écrites sous la forme :

$$w_i^{j+1} = w_i^j + \frac{\Delta t}{\gamma} \left[ B_1 (1 + e \cos(2\pi t^j)) + B_2 \cos(\omega_r t^j + \phi) + \frac{1}{r_i^j} (\tau_{rz})_i^j + \left( \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} \right)_i^j \right] \quad (\text{IV.27})$$

$$(\tau_{rz})_i^j = (1 + (\mu_r - 1) \lambda_i^j) \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)_i^j \quad (\text{IV.28})$$

$$\lambda_i^{j+1} = \lambda_i^j + \Delta t \left( K_a (1 - \lambda_i^j) - K_b \lambda_i^j \left( \left| \frac{\partial w}{\partial r} \right| \right)_i^j \right) \quad (\text{IV.29})$$

Pour la troisième étude « *Écoulement sanguin pulsé thixotrope sous accélération périodique externe et champ magnétique uniforme* », l'équation de quantité de mouvement adimensionnelle **III.68**, la contrainte de cisaillement pour un fluide non newtonien de type thixotrope **III.69**, et le paramètre structural du modèle de Moore **III.70**, ont été discrétisées à l'aide de la dérivée spatiale et temporelle, comme suit :

$$w_i^{j+1} = w_i^j + \frac{\Delta t}{\gamma} \left[ B_1 (1 + e \cos(2\pi t^j)) + B_2 \cos(\omega_r t^j + \varphi) + \frac{1}{r_j^i} (\tau_{rz})_i^j + \left( \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} \right)_i^j + H^2 w_i^j \right] \quad (\text{IV.30})$$

$$(\tau_{rz})_i^j = (1 + (\mu_r - 1) \lambda_i^j) \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)_i^j \quad (\text{IV.31})$$

$$\lambda_i^{j+1} = \lambda_i^j + \Delta t \left( K_a (1 - \lambda_i^j) - K_b \lambda_i^j \left( \left| \frac{\partial w}{\partial r} \right| \right)_i^j \right) \quad (\text{IV.32})$$

La discrétisation des conditions initiales et aux limites peut être donnée comme suit :

$$w_i^1 = 0; \lambda_i^1 = 1; w_{N+1}^j = 0; w_1^j = w_2^j; \lambda_1^j = \lambda_2^j \quad (\text{IV.33})$$

Dans toutes les équations, la longueur du rayon et le temps sont discrétisés à l'aide de ces formules :

$$r_i = (i - 1) \Delta r, (i = 1, 2, \dots, N + 1) \text{ de sorte que } r_{N+1} = R$$

$$t_j = (j - 1) \Delta t, (i = 1, 2, \dots, N + 1)$$

Avec  $\Delta r$  et  $\Delta t$  sont respectivement les incréments d'espace et de temps. Nous avons considéré l'étape suivante taille  $\Delta r = 0.01$  et le pas de temps  $\Delta t = 0.0001$ .

### IV.13. Conclusion

Afin de résoudre numériquement les équations différentielles gouvernantes de mouvement par rapport aux conditions initiales et aux limites pour les trois différentes applications, on fait appel à la méthode des différences finies. Quand il s'agit, de la modélisation de la circulation cérébrale, la méthode des différences finies est la plus utilisée. Un choix motivé par le fait que cette méthode est couramment pratiquée dans la littérature et notamment pour la simulation des écoulements sanguins, car elle est plus facile d'accès en termes de simplicité d'écriture, et de faible coût en termes de temps de calcul.

Les schémas de résolution ainsi que la discrétisation du modèle mathématique et les notions de stabilité ont été élaborés, pour chaque cas d'étude.

Dans le chapitre suivant nous allons entamer l'exposition des résultats ainsi que l'analyse et l'interprétation de ces derniers.

## **Chapitre V : Résultats et discussions**

# Chapitre V

## Résultats et discussions

### V.1. Introduction

L'hémodynamique est un domaine scientifique qui s'intéresse à la dynamique de l'écoulement du sang et explique les lois physiques qui régissent l'écoulement du sang dans les vaisseaux sanguins dans lesquels il se produit. La simulation du flux sanguin dans le réseau artériel permettra une meilleure compréhension de la physiologie du corps humain. Par conséquent, la connaissance détaillée de l'écoulement du sang est un concept clé fondamental dans la compréhension du système cardiovasculaire et dans la détection des maladies artérielles.

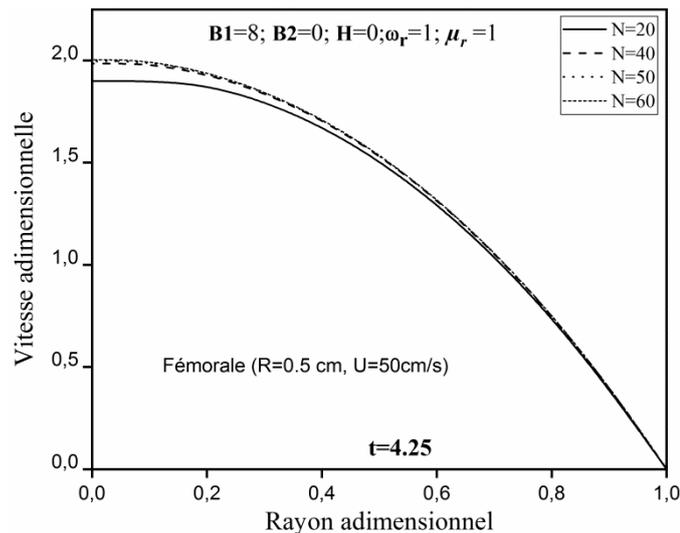
Le présent chapitre décrit et analyse les résultats numériques obtenus dans le cadre de l'étude de l'écoulement sanguin pulsé d'un fluide considéré newtonien et non-newtonien thixotrope entraîné par un gradient de pression oscillant sous accélération périodique externe et un champ magnétique uniforme.

### V.2. Indépendance du maillage

Il est bien connu que les résultats numériques obtenus dépendent essentiellement des paramètres de contrôle à savoir : le temps de calcul et la précision souhaitée. Le choix d'un maillage adéquat s'avère être une étape primordiale dans tout problème de modélisation numérique. En effet, il est important d'avoir un bon rapport entre la qualité des résultats obtenus en termes de précision et le prix à payer en termes de temps de calcul (le coût).

Ainsi, afin de choisir un maillage approprié et d'examiner l'effet de ce dernier sur les résultats numériques obtenus, différents tests ont été effectués pour différentes tailles de maillage. Les résultats sont présentés sur la figure (V.1) ou différents profils de vitesse ont été tracés pour différents maillages en faisant varier le nombre de mailles  $N = 20, 40, 50$  et  $60$ . Il convient de remarquer sur la figure (V.1) qu'un raffinement du maillage *i.e.* l'augmentation du nombre de mailles à partir de  $N = 50$  n'a pas d'effet significatif sur les résultats en termes de vitesse axiale. Autrement dit, l'augmentation du nombre de maillage  $N$  ne modifie pas la

valeur de la solution obtenue. Ainsi l'étude de l'indépendance du maillage dans le contexte actuel de la simulation numérique a sa propre importance pour établir l'exactitude des résultats obtenus et leur indépendance de la taille de la grille choisie. Par conséquent, la solution obtenue avec un nombre de maille  $N=50$  mailles est indépendante de la qualité du maillage pour les trois cas, et cette solution peut être considérée comme étant la solution du problème modélisé.



**Figure V.1.** Indépendance du profil de vitesse à la taille du maillage :  $B1=8$ ,  $B2 = 0$ ,  $H = 0$ ,  $\mu_r = 1$  et  $\omega_r = 1$  à  $t=0.25$ .

Il est important de mentionner que ce test du maillage est appliqué pour les trois études numériques, à savoir : écoulement pulsé d'un fluide newtonien sous accélération externe, écoulement pulsé d'un fluide thixotrope sous accélération externe à la présence d'une accélération périodique externe, et l'étude de l'écoulement pulsé d'un fluide thixotrope sous la présence d'une accélération externe et un champ magnétique uniforme.

### V.3. Validation de la solution du code de calcul

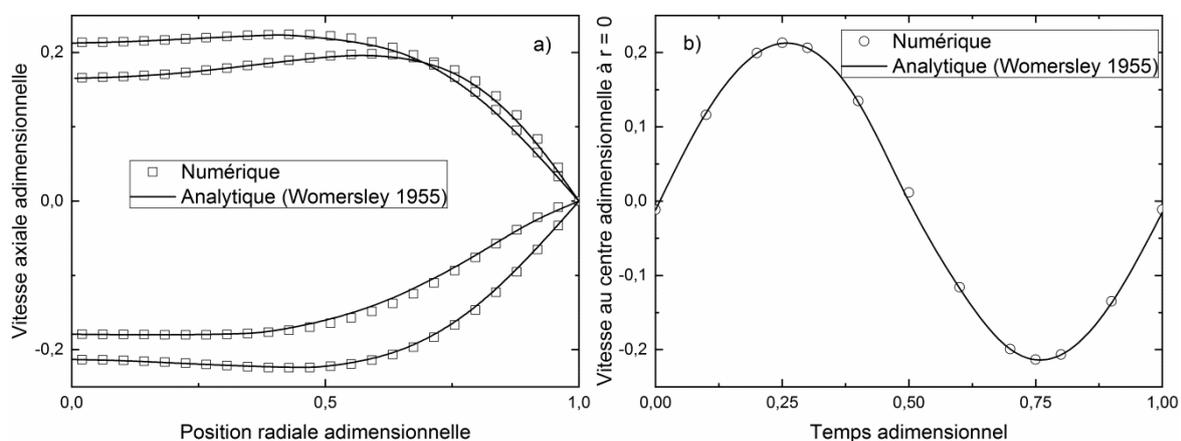
Le code développé dans ce travail devrait d'abord être vérifié en premier lieu, afin que l'on puisse développer des comparaisons justes et objectives, et cela a été fait en comparant la solution obtenue numériquement, avec la solution analytique donnée **(III.86)** par Womersley [28], comme cela est bien établi dans la littérature pour un fluide newtonien de viscosité constante.

La solution de Womersley [28] correspond à un écoulement de Poiseuille superposé à un écoulement harmonique, donc à un écoulement laminaire pulsé pleinement développé d'un fluide newtonien incompressible homogène dans un tuyau horizontal, cylindrique, uniforme, droit et à paroi rigide lisse.

Afin de pouvoir vérifier les résultats obtenus par le schéma aux différences finies utilisé, certains paramètres ont été ajustés de sorte que l'équation (III.18) est réduite à la projection axiale de la célèbre équation de Navier-Stokes. Dans le cas d'un écoulement pulsé d'un fluide newtonien, les profils de vitesse ainsi que la vitesse au centre du tube ont été comparés à la solution analytique donnée par l'équation (III.93). Certains paramètres ont été fixés de telle sorte à pouvoir comparer les résultats analytiques et numériques dans le but d'étudier la précision du schéma numérique choisi.

Les figures (V.2a-b) illustrent une comparaison entre la solution numérique obtenue par la méthode des différences finies et la solution analytique donnée par Womersley [28].

Dans un premier temps, la figure (V.2a) illustre l'évolution du profil de vitesse axiale adimensionnelle pour différentes périodes en fonction du rayon adimensionnel. On note une bonne concordance entre les deux résultats.



**Figure V.2.** Comparaison entre la solution obtenue par le schéma aux différences finies et les résultats existants de Womersley [28] : **a)** Profils de vitesse adimensionnelle et **b)** Vitesse au centre adimensionnelle.

Cette dernière nous montre que le fluide (sang) circule avec une vitesse maximale au centre de la conduite, puis elle diminue progressivement du centre jusqu'à la paroi de la conduite pour satisfaire la condition au limite imposée. Les profils de vitesses adimensionnelles prennent des valeurs positives pendant la systole et des valeurs négatives

pendant la diastole. Cela clarifie qu'en phase systolique, le muscle cardiaque s'est complètement contracté et que le sang est expulsé et pendant la diastole, le cœur se détend et permet à l'artère de se remplir de sang.

La figure (V.2b) illustre l'évolution de la vitesse adimensionnelle au centre de l'artère en fonction du temps adimensionnel. On constate que les résultats sont pratiquement identiques. Il est aussi important de souligner que la vitesse au centre de l'artère à ( $r=0$ ) fluctue autour de sa valeur moyenne.

On observe que les présents résultats obtenus par la méthode des différences finies sont en bon accord avec les résultats existants de Womersley [28]. Cela confirme évidemment la validité de modèle et renforce encore la confiance dans les résultats obtenus grâce à celui-ci.

#### **V.4. Présents résultats**

Après avoir vérifié le code de calcul mis en place dans le cadre de cette thèse, nous pouvons maintenant procéder présenter les résultats numériques obtenus pour les différents cas d'études présentés précédemment à savoir : l'écoulement pulsé en présence d'une accélération périodique externe d'un fluide newtonien puis en considérant le fluide thixotrope de type Moore et enfin en considérant un fluide thixotrope en présence d'un champ magnétique uniforme et une accélération périodique externe.

Dans cette section, nous souhaitons établir la réponse de la vitesse axiale, de la vitesse au centre et de la contrainte de cisaillement à la paroi pour différentes valeurs de paramètres adimensionnels, à savoir : le gradient de pression périodique, l'accélération périodique externe du corps, la constante adimensionnelle dépendante du nombre de Womersley du fluide newtonien et de la fréquence d'accélération du corps.

##### **V.4.1. Ecoulement sanguin pulsé newtonien sous accélération périodique externe**

Dans cette première partie nous nous intéresserons à la présentation des résultats obtenus dans le cadre d'un l'écoulement sanguin généré par un gradient de pression pulsé dans une conduite cylindrique axisymétrique en présence d'une accélération périodique externe en considérant le sang comme étant un fluide newtonien dont la viscosité indépendante du taux de cisaillement et du temps.

### V.4.1.1. Paramètres utilisés

La solution numérique basée sur la méthode des différences finies est fournie pour un écoulement axisymétrique d'un fluide Newtonien entraîné par un gradient de pression oscillant en présence d'une accélération externe. Deux ensembles différents de conditions données sont utilisés pour les calculs : un ensemble avec  $U = 98$  cm/s,  $R = 0,15$  cm représentant la vitesse moyenne à l'intérieur et le rayon de l'artère coronaire, et l'autre ensemble avec  $U = 50$  cm/s,  $R = 0,5$  cm représentant la vitesse moyenne à l'intérieur et le rayon de l'artère fémorale [34]. Pour les calculs numériques des quantités souhaitées ayant une importance physiologique majeure, nous avons résumé les valeurs des paramètres pertinents dans le tableau V.1.

Cependant, l'effet de différents paramètres adimensionnel à savoir :  $\alpha$ ,  $B1$ ,  $B2$ ,  $e$  et  $f_b$  sur les variables de l'écoulement sont étudiés. Les résultats obtenus en terme des différentes variables d'écoulement correspondantes, à savoir : la vitesse axiale, la vitesse au centre et la contrainte de cisaillement de la paroi, ont été analysées. Dans tous les calculs, nous avons supposé que ( $\varphi=0$ ).

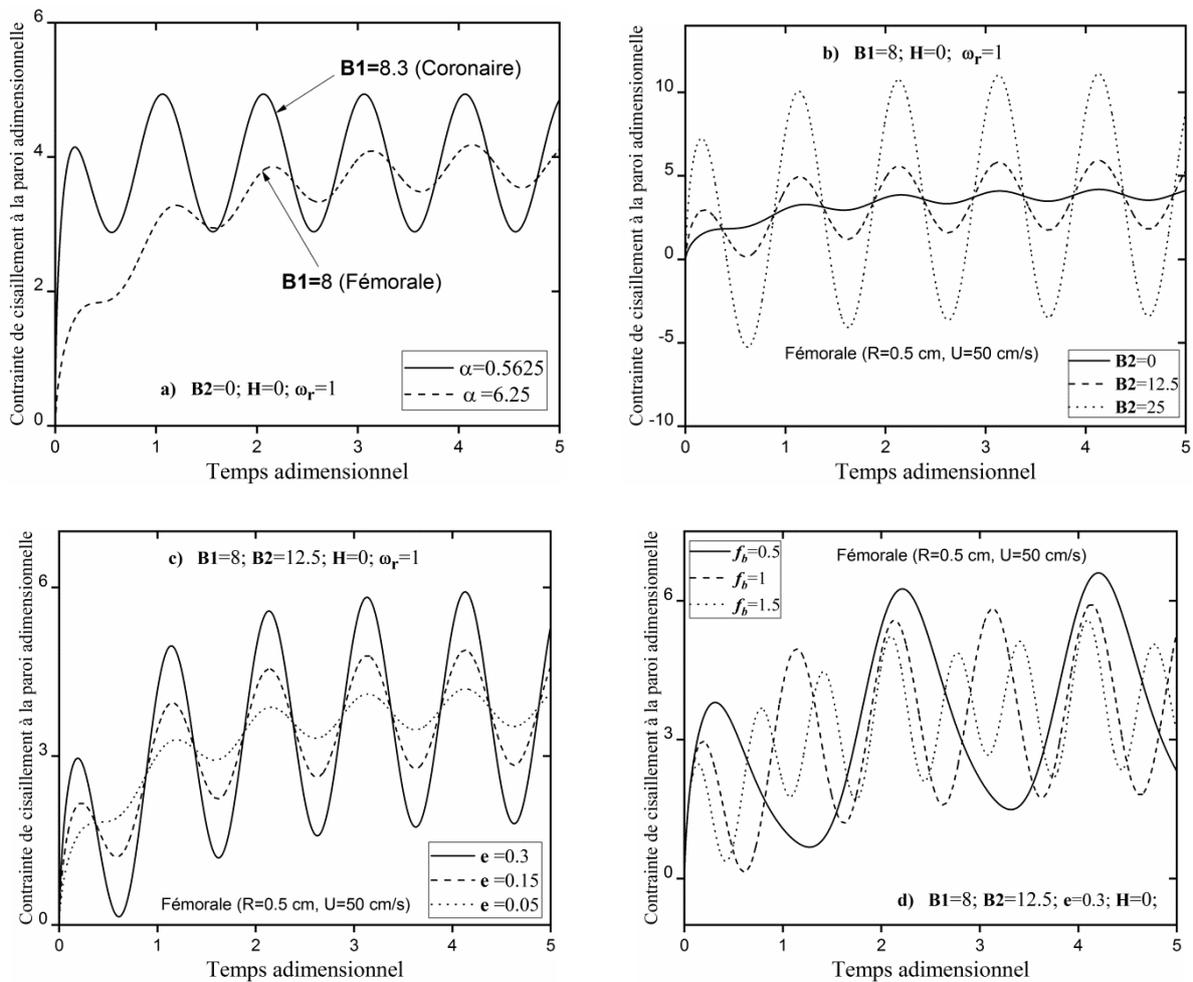
Il convient de mentionner que la variation des paramètres adimensionnels,  $\alpha$ ,  $B2$ ,  $e$  et  $f_b$  est liée à la variation, respectivement, de la composante du gradient de pression ( $P_0$ ), de l'accélération externe en termes d'amplitude ( $A_g$ ), du rapport de pression en termes de ( $e$ ) et de fréquence d'accélération externe du corps en terme de ( $f_b$ ).

**Tableau V.1.** Paramètres utilisés dans le cadre de l'étude de l'écoulement sanguin entraîné par un gradient de pression oscillant, d'un fluide Newtonien sous accélération périodique [30,50].

Paramètre	Symbole (unité)	Valeurs
Rayon coronaire	$R$ (m)	0.0015
Rayon fémorale	$R$ (m)	0.005
Vitesse moyenne coronaire	$U$ (m s <sup>-1</sup> )	0.5
Vitesse moyenne fémorale	$U$ (m s <sup>-1</sup> )	0.98
Amplitude d'accélération externe	$A_g$ (m s <sup>-2</sup> )	0, 0.1 et 0.4
Masse volumique	$\rho$ (kg m <sup>-3</sup> )	1000
Fréquence du gradient de pression	$f_p$ (Hz)	1
Fréquence d'accélération externe	$f_b$ (Hz)	0.5, 1 et 1.5
Pas de temps	$\Delta t$	0.0001
Pas d'espace	$\Delta r$	0.01

### V.4.1.2. Contrainte de cisaillement à la paroi adimensionnelle

Les figures (V.3.a-d), montrent que l'amplitude de la contrainte de cisaillement à la paroi fluctue dans le temps et augmente progressivement pour finalement atteindre un état stable dans le temps où la contrainte de cisaillement à la paroi fluctue autour de sa valeur moyenne.



**Figure V.3.** Contrainte de cisaillement à la paroi adimensionnelle en fonction du temps adimensionnel : **a)** Effet de la constante adimensionnelle  $\alpha$  et gradient de pression B1. **b)** Accélération du corps B2. **c)** Rapport de pression. **d)** Fréquence d'accélération périodique externe  $f_b$ .

La figure (V.3a), illustre l'amplitude de la contrainte de cisaillement à la paroi adimensionnelle en fonction du temps adimensionnel pour différentes valeurs de la constante sans dimension  $\alpha$  en l'absence d'accélération externe et de champ magnétique. On observe que l'amplitude de la contrainte de cisaillement à la paroi diminue en augmentant la valeur de

$\alpha$ . Sur la même figure (V.3a), deux groupes de tubes ont été étudiés : les tubes étroits et les tubes larges. Le groupe de tubes larges est représenté par une artère fémorale ( $B1=8 : R = 0,5$  cm et  $U = 50$  cm/s) et le groupe de tubes étroits est représenté par une artère coronaire ( $B1=8,3 : R = 0,15$  cm et  $U = 98,25$  cm/s). Il convient de mentionner que les caractéristiques de l'écoulement dans les artères fémorales et coronaires du système cardiovasculaire sont nettement différentes. La figure révèle que l'amplitude de l'oscillation de la contrainte de cisaillement à la paroi augmente de manière significative lorsque  $B1$  augmente.

La figure (V.3b), montre les évolutions de la contrainte de cisaillement à la paroi adimensionnelle en fonction du temps adimensionnel pour différentes valeurs d'accélération périodique externe  $B2$  en terme ( $Ag$ ). Il est intéressant de mentionner que l'oscillation de la contrainte de cisaillement à la paroi adimensionnelle augmente de manière significative, en augmentant l'amplitude de l'accélération du corps.

La figure (V.3c), illustre les distributions de la contrainte de cisaillement à la paroi en fonction du temps adimensionnel pour différentes valeurs du rapport de pression ( $e=0.3, 0.15$  et  $0.05$ ). Il révèle que l'écoulement est significativement affectée par le rapport de pression, donc, la diminution de ce dernier, entraîne une diminution de l'amplitude de l'oscillation de l'écoulement sanguin, alors que la diminution du rapport de pression conduit à une augmentation de la contrainte de cisaillement à la paroi en terme de valeur moyenne.

La figure (V.3d), montre les rapartition de la contrainte de cisaillement à la paroi adimensionnelle en fonction du temps adimensionnel pour différentes valeurs de fréquence d'accélération périodique externe  $f_b$ . On observe que l'amplitude de la contrainte de cisaillement à la paroi diminue en augmentant la fréquence  $f_b$ .

#### **V.4.1.3. Vitesse au centre à $r=0$ adimensionnelle**

L'hémodynamique fait référence à l'étude physique du sang dans toutes structures solides (telles que les artères) à travers lesquelles il circule. Selon cette définition, l'accent est mis sur la mécanique des fluides du système cardiovasculaire. En général, les aspects physiques et mécaniques de l'hémodynamique sont compris dans une large mesure.

Pour étudier la vitesse d'écoulement du sang, les figures (V.3a-d) montrent la vitesse au centre ( $r = 0$ ) adimensionnelle en fonction du temps adimensionnel où les effets de l'accélération externe ( $B2$ ), rapport de pression ( $e$ ), la fréquence ( $f_b$ ) et la constante adimensionnelle  $\alpha$  ont été étudiés. On peut voir sur ces figures que la vitesse au centre est

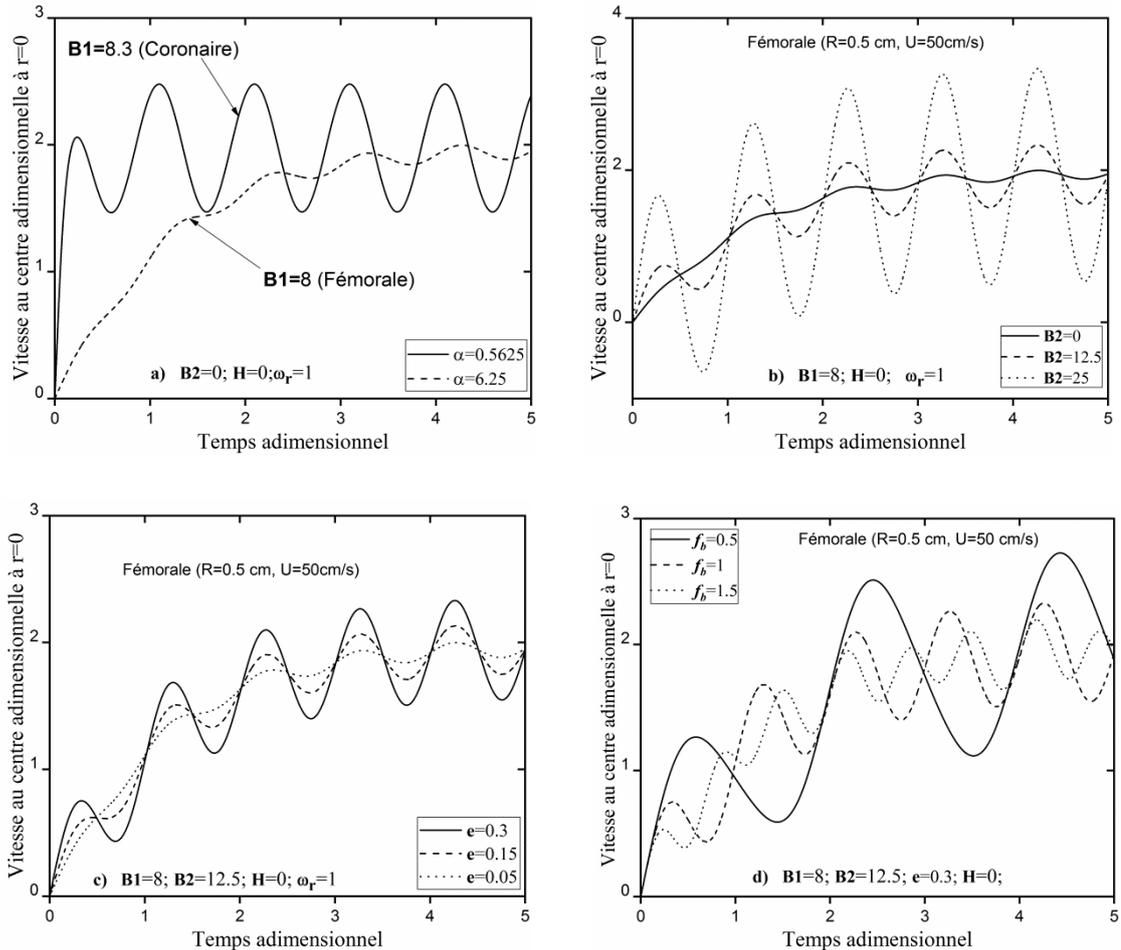
périodique dans le temps. En effet, la caractéristique importante du flux sanguin artériel est sa nature pulsatile. La nature pulsatile du flux sanguin expose les cellules endothéliales à deux stimuli de cisaillement distincts au cours du cycle cardiaque : un taux de changement important du cisaillement au début de l'écoulement (accélération de la vitesse), suivi d'un état périodique permanent. En effet, ces graphiques montrent que la vitesse au centre fluctue autour de sa valeur moyenne, augmente et atteint finalement l'état d'équilibre au fur et à mesure que le temps augmente. La nature pulsé (périodique) de la vitesse a été trouvée dans tous les cas.

La figure (V.4a), illustre les différentes distributions de la vitesse au centre adimensionnelle en fonction du temps adimensionnel pour deux groupes de tubes étudiés : les tubes étroits et les tubes larges. Le groupe de tubes larges est représenté par une artère fémorale ( $B_1=8$  :  $R = 0,5$  cm et  $U = 50$  cm/s) et le groupe de tubes étroits est représenté par une artère coronaire ( $B_1= 8,3$  :  $R = 0,15$  cm et  $U = 98,25$  cm/s). On observe à partir de ces graphiques que pour un écoulement pulsé pur *i.e.* sans accélération externe ( $B_2 = 0$ ), et sans champ magnétique, l'augmentation du nombre adimensionnel  $\alpha$  en termes du gradient de pression  $P_0$  entraîne une diminution de l'amplitude et de la valeur moyenne de la vitesse au centre de l'artère.

La figure (V.4b) montre la vitesse au centre de la conduite ( $r = 0$ ) en fonction du temps adimensionnel pour différentes valeurs d'accélération externe  $B_2$ . La figure (V.4b) révèle que l'amplitude de la vitesse augmente lorsque l'accélération externe ( $B_2$ ) augmente. Il est intéressant de mentionner que l'accélération augmente l'amplitude de l'oscillation de la vitesse de l'écoulement sanguin de manière significative tandis que l'effet de l'accélération sur la valeur de la vitesse moyenne du sang est négligeable. Ce présent résultat pouvait bien être prédit. En effet, l'accélération externe du corps due à un effort physique accélère l'écoulement du sang dans l'artère [67].

La figure (V.4c) met en évidence l'effet du rapport de pression ( $e$ ) sur la vitesse adimensionnelle au centre de l'artère ( $r = 0$ ) en fonction du temps adimensionnel. En effet, différentes valeurs du rapport de pression ( $e = 0.3, 0.15$  et  $0.05$ ) pour une valeur fixe de l'accélération externe ( $B_2 = 12.5$ ). La vitesse d'écoulement est significativement affectée par le rapport de pression. La figure (V.4c) révèle que l'augmentation du rapport de pression ( $e$ ) augmente l'amplitude de l'oscillation du flux sanguin de manière significative alors que

l'augmentation du rapport de pression sur la valeur de la vitesse moyenne du sang reste inchangée.

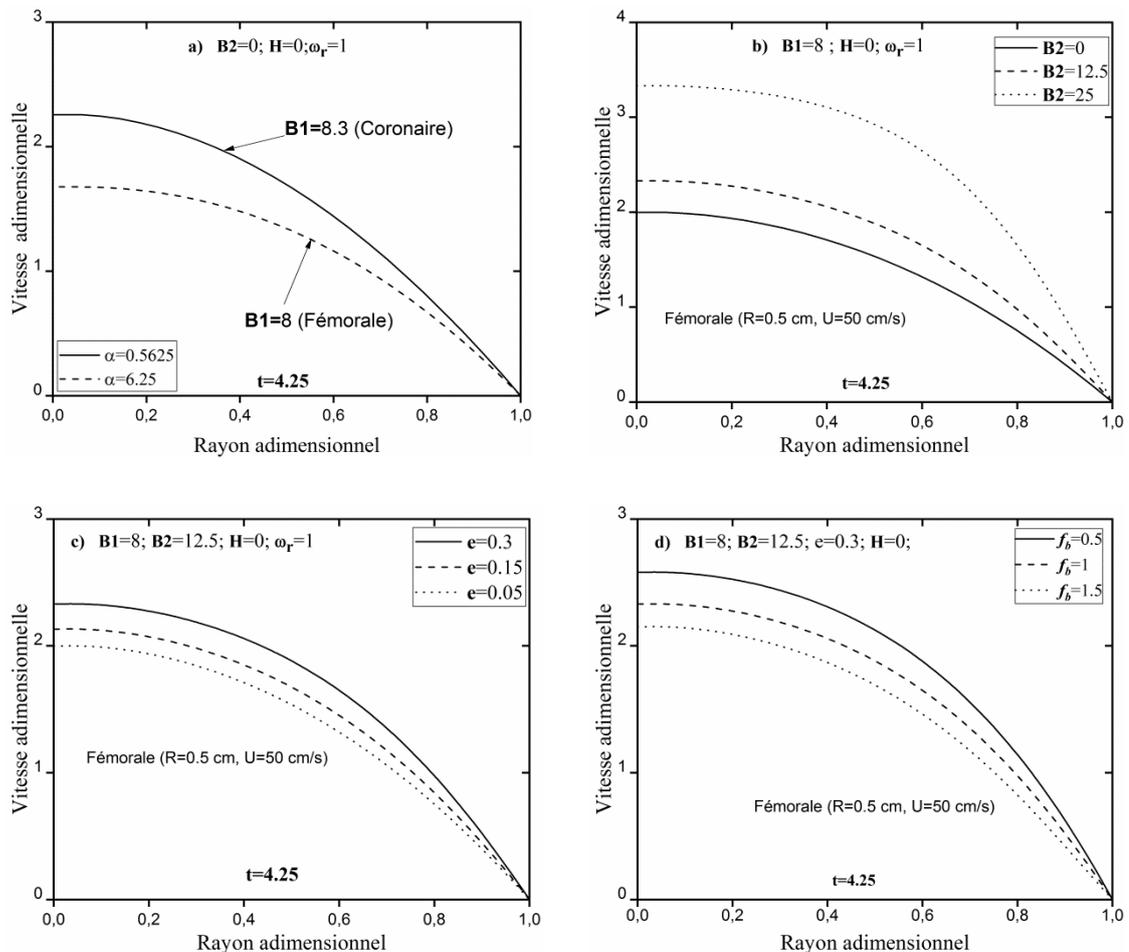


**Figure V.4.** Vitesse adimensionnelle au centre du tube à  $r=0$  en fonction du temps adimensionnel : **a)** Effet de la constante adimensionnelle  $\alpha$  et gradient de pression  $B1$ . **b)** Accélération du corps  $B2$ . **c)** Rapport de pression. **d)** Fréquence d'accélération périodique externe  $f_b$ .

La figure (V.4d) illustre la variation de la vitesse adimensionnelle au centre de l'artère ( $r = 0$ ) en fonction du temps adimensionnel pour différentes valeurs de fréquence ( $f_b = 0.5, 1$  et  $1.5$ ) pour une valeur fixe de l'accélération externe ( $B2 = 12.5$ ). La figure (V.4d) révèle que l'amplitude de la vitesse au centre augmente lorsque la fréquence ( $f_b$ ) diminue alors que l'effet de la fréquence sur l'évolution de la valeur de la vitesse moyenne du sang est négligeable.

### V.2.1.4. Profil de vitesse

L'écoulement sanguin normal peut être considéré comme un écoulement laminaire dans la plupart des cas. L'écoulement laminaire est caractérisé par un gradient de lignes d'écoulement représentant différentes vitesses du sang à différents endroits de la géométrie ou s'opère ce dernier. La raison de ces différences de vitesse d'écoulement du sang est la contrainte de cisaillement de la paroi. Lorsque le sang circule dans une artère, il existe une contrainte de cisaillement pariétal entre le sang et la paroi du vaisseau sanguin.



**Figure V.5.** Profils de Vitesse adimensionnelle en fonction du rayon adimensionnel : **a)** Effet de la constante adimensionnelle  $\alpha$  et gradient de pression B1. **b)** Accélération du corps B2. **c)** Rapport de pression. **d)** Fréquence d'accélération périodique externe  $f_b$ .

La distribution de ces profils de vitesse observée dans la présente étude est toujours une fonction parabolique à travers le rayon de l'artère. Sur les figures (V.5a-d) illustrés, les profils de vitesse adimensionnelle en fonction de la position radiale adimensionnelle. Les effets du paramètre ( $\alpha$ ) de l'accélération externe représenté par le terme adimensionnel (B2),

de la fréquence ( $f_b$ ) et du rapport de pression ( $e$ ) sur les profils de la vitesse axiale ont été étudiés pour un temps adimensionnel fixe  $t=4.25$ .

La figure (V.5a) montre des profils de vitesse adimensionnelle en fonction de la position radiale adimensionnelle pour différents groupes de tubes étudiés : les tubes étroits et les tubes larges. Le groupe de tubes larges est représenté par une artère fémorale ( $B1=8 : R = 0,5$  cm et  $U = 50$  cm/s) et le groupe de tubes étroits est représenté par une artère coronaire ( $B1= 8,3 : R = 0,15$  cm et  $U = 98,25$  cm/s), en absence d'accélération externe ( $B2 = 0$ ). L'augmentation du nombre adimensionnel  $\alpha$  en termes du gradient de pression  $P0$  entraîne une diminution de l'amplitude de la vitesse de l'artère.

Les profils de vitesse adimensionnelle en fonction de la position radiale adimensionnelle pour différentes valeurs d'accélération externe  $B2$ , sont illustrés dans la figure (V.5b). Il peut être clairement observé que l'accélération externe  $B2$  augmente l'amplitude de la vitesse.

La figure (V.5c) montre des profils de vitesse axiale adimensionnelle en fonction du rayon adimensionnel pour différentes valeurs de rapport de pression ( $e = 0.3, 0.15$  et  $0.05$ ). On observe que l'amplitude des profils de vitesse augmente lorsque le rapport de pression ( $e$ ) augmente.

La figure (V.5d) illustre des profils de vitesse axiale adimensionnelle en fonction du rayon adimensionnel pour différentes valeurs de fréquences ( $f_b = 0.5, 1$  et  $1.$ ) et pour une accélération externe fixe ( $B2 = 12.5$ ). Ces figures révèlent que l'amplitude des profils de vitesse diminue lorsque la fréquence  $f_b$  augmente.

#### **V.4.2. Ecoulement sanguin pulsé thixotrope sous accélération périodique externe**

Dans ce deuxième cas de figure étudié nous nous intéresserons à la présentation des résultats obtenus dans le cadre d'un écoulement sanguin généré par un gradient de pression pulsé dans une conduite cylindrique axisymétrique en présence d'une accélération périodique externe en considérant le sang comme étant un fluide non-newtonien thixotrope dont la viscosité est dépendante du taux de cisaillement et du temps.

En effet, Il est généralement admis que les fluides physiologiques présentent des propriétés non linéaires. En particulier, le sang considéré comme une suspension complexe

n'obéit pas à la relation linéaire entre la contrainte de cisaillement et le taux de déformation et ne peut donc pas être modélisé par le modèle de fluide newtonien. Le sang est bien connu comme étant un fluide au comportement non-newtonien présentant des propriétés rhéofluidifiantes, à seuil et possédant un caractère thixotrope qui ajoute à la complexité du problème.

L'hémodynamique est un domaine scientifique concerné par la dynamique des écoulements sanguins et explique les lois physiques qui régissent l'écoulement sanguin dans les vaisseaux sanguins à travers lesquels l'écoulement se produit. La simulation de l'écoulement sanguin dans le système de réseau artériel en intégrant les propriétés rhéologiques complexes du sang et une approche plus adaptée à l'étude hémodynamique et permettra de mieux comprendre la physiologie du corps humain.

Par conséquent, dans cette seconde partie du travail, la connaissance détaillée d'un écoulement sanguin est un concept clé fondamental dans la compréhension du système cardiovasculaire et dans la détection des maladies artérielles. Cependant, les effets de la thixotropie en termes de rapport de viscosité  $\mu_r$ , d'accélération externe caractérisée par le paramètre  $A_g$ , le rapport de pression  $e$  et la fréquence  $f_b$  sur les variables d'écoulement sont présentés et discutés.

#### **V.4.2.1. Paramètres utilisés**

Les paramètres utilisés afin d'obtenir les solutions numériques basées sur la méthode des différences finies pour un écoulement pulsé dans une conduite cylindrique axisymétrique d'un fluide rhéofluidifiant à caractère thixotrope entraîné par un gradient de pression pulsé en présence d'une accélération appliquée extérieurement sont données dans le tableau V.2. Il est à noter que les constantes peuvent être ajustées de diverses manières pour reproduire diverses conditions.

Deux ensembles différents de conditions sont utilisés pour les calculs : un ensemble avec  $U = 98$  cm/s,  $R = 0,15$  cm représentant la vitesse moyenne à l'intérieur et le rayon de l'artère coronaire, et l'autre ensemble avec  $U = 50$  cm/s,  $R = 0,5$  cm représentant la vitesse moyenne à l'intérieur et le rayon de l'artère fémorale [34]. Pour les calculs numériques des quantités souhaitées ayant une importance physiologique majeure, nous avons résumé les valeurs des paramètres pertinents dans le tableau V.2.

Cependant, l'effet de différents paramètres adimensionnel à savoir :  $\mu_r$ ,  $A_g$ ,  $e$  et  $f_b$  sur les variables de l'écoulement sont étudiés. Les résultats obtenus en terme des différentes variables d'écoulement correspondantes, à savoir : la vitesse axiale, la vitesse au centre et la contrainte de cisaillement à la paroi, ont été présentés et discutés dans ce qui suit. Dans tous les calculs, nous avons supposé que ( $\phi=0$ ).

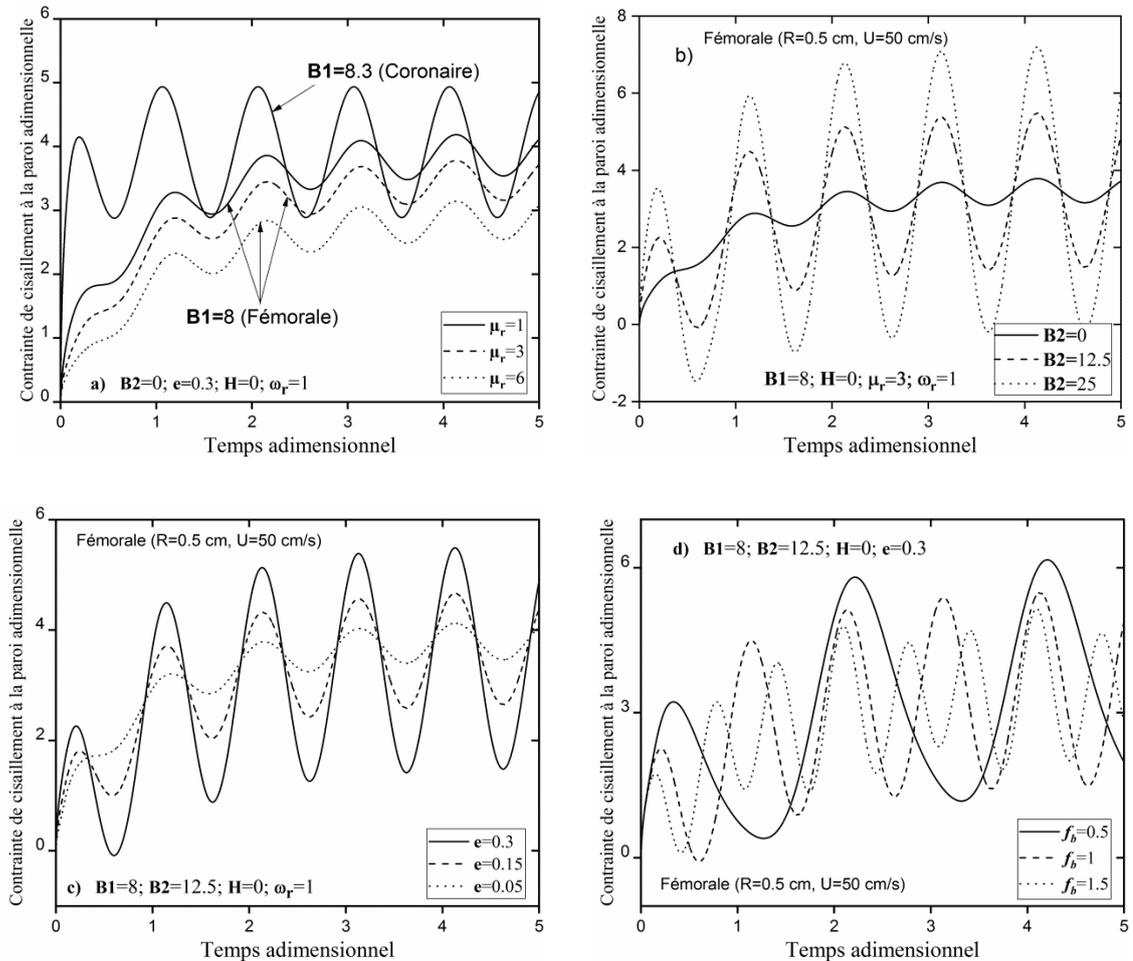
**Tableau V.2.** Paramètres utilisés dans le cadre de la seconde étude, qui porte sur l'écoulement sanguin entraîné par un gradient de pression oscillant d'un fluide Non Newtonien de type thixotrope sous la présence d'une accélération externe [30,50].

Paramètre	Symbole (unité)	Valeurs
Rayon coronaire	$R$ (m)	0.0015
Rayon fémorale	$R$ (m)	0.005
Vitesse moyenne coronaire	$U$ (m s <sup>-1</sup> )	0.5
Vitesse moyenne fémorale	$U$ (m s <sup>-1</sup> )	0.98
Amplitude d'accélération externe	$A_g$ (m s <sup>-2</sup> )	0, 0.1 et 0.4
Masse volumique	$\rho$ (kg m <sup>-3</sup> )	1000
Paramètre structurel	$K_b / K_a$	10
Pas de temps	$\Delta t$	0.0001
Pas d'espace	$\Delta r$	0.01
Rapport de pression	$e$	0.3, 0.15 et 0.05
Fréquence d'accélération externe	$f_b$ (Hz)	0.5, 1 et 1.5
Fréquence du gradient de pression	$f_p$ (Hz)	1
Viscosité maximale	$\mu_\infty$ (Pa)	0.004
Viscosité minimale	$\mu_0$ (Pa)	0.004, 0.012 et 0.024
Rapport de viscosité	$\mu_r$	1, 3 et 6
Rapport de pression	$e$	0.03, 0.15 et 0.005

#### V.4.2.2. Contrainte de cisaillement à la paroi adimensionnelle

L'endothélium vasculaire est exposé à une contrainte hémodynamique générée par l'écoulement du sang, connue sous le nom de contrainte de cisaillement à la paroi. La contrainte de cisaillement pariétale est définie comme étant la résistance exercée par le sang qui s'écoule à travers le vaisseau et elle dépend de la viscosité du sang et du gradient de vitesse de l'écoulement sanguin. La contrainte pariétale joue un rôle important dans les processus d'adaptation de la paroi vasculaire en induisant la production par les cellules endothéliales de substances telles que l'oxyde nitrique, la prostacycline et l'endothéline [70].

En effet, une forte contrainte de cisaillement favorise la survie et la quiescence des cellules endothéliales, leur alignement dans le sens du flux et la sécrétion de substances favorisant la vasodilatation et l'anticoagulation. Une faible contrainte de cisaillement favorise la prolifération et l'apoptose endothéliales, le changement de forme et la sécrétion de substances favorisant la vasoconstriction, la coagulation et l'agrégation plaquettaire [70].



**Figure V.6.** Contrainte de cisaillement à la paroi adimensionnelle en fonction du temps adimensionnel : **a)** Effet du comportement non newtonien ( $\mu_r$ ) et du gradient de pression (B1), **b)** Accélération du corps (B2), **c)** Rapport de pression. **d)** Fréquence d'accélération périodique externe  $f_b$ .

Étant donné qu'une modification de la contrainte de cisaillement à la paroi peut être impliquée dans la pathogenèse de l'athérosclérose, de l'hyperplasie néointimale et de la maladie anévrysmale, la compréhension de son évolution en raison de différents paramètres peut fournir des informations pour prévenir les maladies vasculaires. Par conséquent, l'étude de l'évolution de la contrainte pariétale reste d'un intérêt vital.

Les figures (V.6a-d) illustrent l'évolution de la contrainte de cisaillement à la paroi adimensionnelle en fonction du temps adimensionnel où les effets du rapport de viscosité du fluide ( $\mu_r$ ), de l'accélération externe ( $B2$ ), du rapport de pression ( $e$ ) et de la fréquence ( $f_b$ ) ont été étudiés. Il est clair à travers les figures illustrées que la contrainte de cisaillement à la paroi est périodique dans le temps en raison de la nature pulsée du l'écoulement sanguin.

La figure (V.6a), illustre les différentes distributions de la vitesse au centre adimensionnelle en fonction du temps adimensionnel pour deux groupes de tubes étudiés : les tubes étroits et les tubes larges. Le groupe de tubes larges est représenté par une artère fémorale ( $B1=8$  :  $R = 0,5$  cm et  $U = 50$  cm/s) et le groupe de tubes étroits est représenté par une artère coronaire ( $B1= 8,3$  :  $R = 0,15$  cm et  $U = 98,25$  cm/s) pour différentes valeurs de rapport de viscosité  $\mu_r=(1,3$  et  $6)$  en l'absence d'accélération externe ( $B2 = 0$ ). Il a été observé que pour un écoulement pulsé pur ( $B2= 0$ ), la contrainte de cisaillement à la paroi fluctue et augmente progressivement là où l'amplitude de la contrainte de cisaillement correspondante reste positive dans le temps. La figure (V.6a) révèle qu'une augmentation du rapport de viscosité  $\mu_r$  entraîne une diminution de l'amplitude de la contrainte de cisaillement à la paroi dans l'artère. La comparaison de l'écoulement sanguin considéré comme un fluide non-newtonien thixotrope (traits pointillés) avec celui du sang considéré comme un fluide newtonien (trait plein) montre l'effet du caractère non-newtonien du sang qui est responsable de la diminution considérable en intensité de contrainte de cisaillement à la paroi. En effet, des augmentations de viscosité entraînent des augmentations de résistance de l'écoulement. Lorsque la résistance augmente, la différence de pression qui influence la vitesse diminue et donc la contrainte de cisaillement à la paroi diminue. Nous avons observé que dans les conditions physiologiques considérées dans les travaux en cours, les propriétés de viscosité du sang n'affectent pas qualitativement le modèle de distribution temporelle de la contrainte de cisaillement à la paroi. Cependant, les propriétés de viscosité du sang ont un effet considérable sur la valeur de la contrainte de cisaillement à la paroi.

La figure (V.6b) montre la contrainte de cisaillement à la paroi adimensionnelle en fonction temps adimensionnel pour différentes valeurs d'accélération externe ( $B2$ ) pour une valeur fixe du rapport de viscosité ( $\mu_r = 3$ ). Il a été observé que la contrainte de cisaillement à la paroi fluctue entre des valeurs positives et négatives au fil du temps. La figure (V.6b) révèle que l'amplitude de la contrainte de cisaillement à la paroi augmente lorsque l'accélération externe ( $B2$ ) augmente. On voit clairement que l'accélération augmente

l'amplitude de l'oscillation de la contrainte de cisaillement à la paroi produite de manière significative par le gradient de pression pulsé tandis que l'effet de l'accélération sur la valeur moyenne de la contrainte de cisaillement à la paroi est négligeable [31].

La figure (V.6c) montre la contrainte de cisaillement à la paroi adimensionnelle en fonction du temps adimensionnel pour différentes valeurs de rapport de pression ( $e = 0.05, 0.15$  et  $0.3$ ) et une valeur d'accélération externe ( $B2 = 12.5$ ). La figure (V.6c) révèle que l'augmentation du rapport de pression ( $e$ ) augmente l'amplitude de l'oscillation de la contrainte de cisaillement à la paroi de manière significative tandis que l'augmentation du rapport de pression conduit à une diminution de la contrainte de cisaillement moyenne de la paroi sanguine [31].

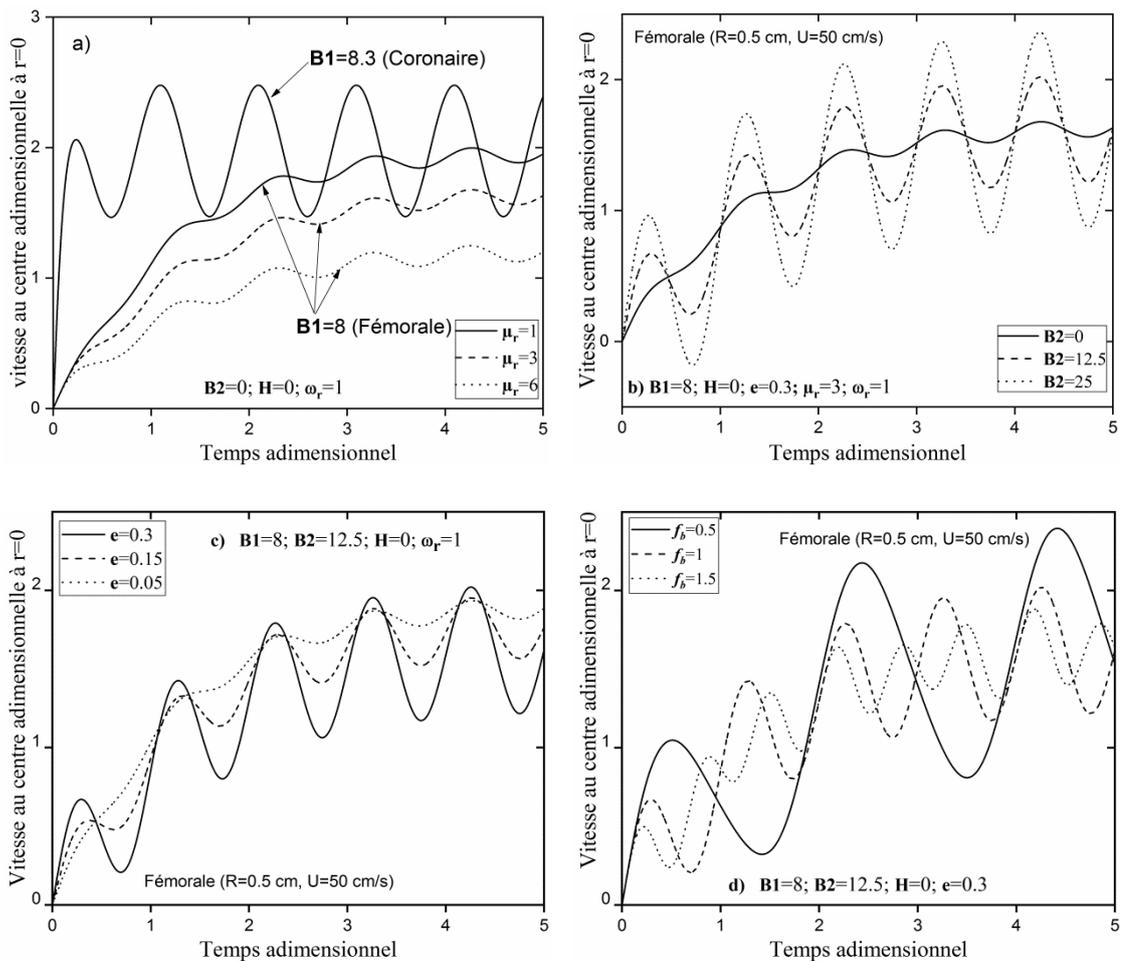
La figure (V.6d) montre l'évolution de la contrainte de cisaillement à la paroi adimensionnelle en fonction du temps adimensionnel pour différentes valeurs de fréquence  $f_b = (0.5, 1, 1.5)$  pour des valeurs fixes de rapport de viscosité ( $\mu_r = 3$ ) et d'accélération externe ( $B2 = 12.5$ ). La figure (V.6d) révèle que l'amplitude de la contrainte de cisaillement de la paroi augmente lorsque la fréquence de ( $f_b$ ) diminue.

#### V.4.2.3. Vitesse au centre adimensionnelle à $r=0$

On sait que les variations des caractéristiques hémodynamiques sont associées à la variation des propriétés hémorhéologiques. Par conséquent, la relation entre les propriétés hémorhéologiques et hémodynamiques est d'une grande importance [19].

Afin d'étudier la vitesse d'un écoulement sanguin, les figures (V.6a-d) montrent la vitesse au centre adimensionnelle à ( $r = 0$ ) en fonction du temps adimensionnel où les effets du rapport de viscosité du fluide ( $\mu_r$ ), de l'accélération externe ( $B2$ ), du rapport de pression ( $e$ ) et la fréquence ( $f_b$ ) ont été étudiées.

On peut voir sur les figures (V.7a-d), que la vitesse au centre est périodique dans le temps. En effet, la caractéristique importante de l'écoulement sanguin artériel est sa nature pulsatile. La nature pulsatile de l'écoulement sanguin expose les cellules endothéliales à deux stimulus de cisaillement distincts au cours du cycle cardiaque : un taux élevé de changement de cisaillement au début de l'écoulement (accélération de la vitesse), suivi d'un état d'équilibre.



**Figure V.7.** Vitesse au centre adimensionnelle ( $r = 0$ ) en fonction du temps adimensionnel: **a)** Effet du comportement non newtonien ( $\mu_r$ ) et du gradient de pression ( $B1$ ), **b)** Accélération du corps ( $B2$ ), **c)** Rapport de pression. **d)** Fréquence d'accélération périodique externe  $f_b$ .

La figure (V.7), illustre les différentes distributions de la vitesse au centre adimensionnelle en fonction du temps adimensionnel pour deux groupes de tubes étudiés : les tubes étroits et les tubes larges. Le groupe de tubes larges est représenté par une artère fémorale ( $B1=8 : R = 0,5$  cm et  $U = 50$  cm/s) et le groupe de tubes étroits est représenté par une artère coronaire ( $B1= 8,3 : R = 0,15$  cm et  $U = 98,25$  cm/s). Il a été observée que pour un écoulement pulsé pur ( $B2= 0$ ), la vitesse au centre fluctue et augmente progressivement là où l'amplitude de la vitesse correspondante reste positive dans le temps. L'effet du rapport de viscosité ( $\mu_r$ ) est évident sur la figure. En effet, l'augmentation du rapport de viscosité ( $\mu_r$ ) entraîne une diminution de l'amplitude de la vitesse au centre de l'artère. La comparaison de l'écoulement sanguin considéré comme un fluide non newtonien (traits pointillés) avec celui du sang considéré comme un fluide newtonien (trait plein) montre bien l'effet du caractère

non-newtonien du sang qui est responsable de l'important diminution de l'amplitude de la vitesse. En effet, les augmentations de viscosité entraînent des augmentations de résistance de l'écoulement tandis que la différence de pression qui influence la vitesse diminue, ce qui à son tour réduit l'écoulement.

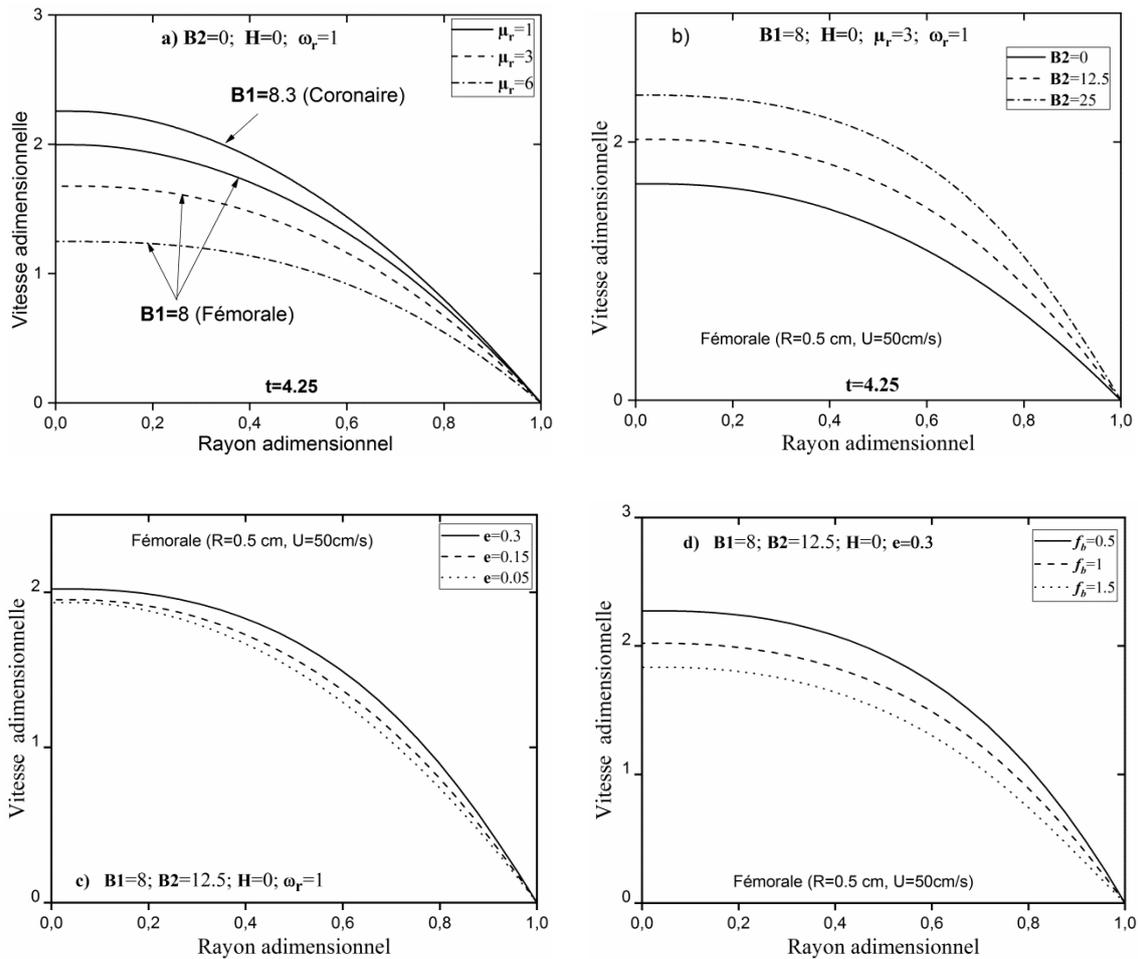
La figure (V.7b) montre la vitesse au centre adimensionnelle à ( $r = 0$ ) en fonction du temps adimensionnel pour différentes valeurs d'accélération externe ( $B2$ ) pour une valeur fixe du rapport de viscosité ( $\mu_r = 3$ ). Il a été observé que la vitesse fluctue entre des valeurs positives et négatives au cours du temps. La figure (V.7b) révèle que l'amplitude de la vitesse augmente lorsque l'accélération externe ( $B2$ ) augmente. Il est intéressant de mentionner que l'accélération augmente l'amplitude de l'oscillation de l'écoulement sanguin de manière significative alors que l'effet de l'accélération sur la valeur moyenne de la vitesse au centre du sang est resté inchangé. Comme il peut être prédit, l'accélération du corps accélère l'écoulement sanguin [19].

La figure (V.7c) montre la vitesse au centre adimensionnelle à ( $r = 0$ ) en fonction du temps adimensionnel pour différentes valeurs de rapport de pression ( $e = 0.3, 0.15$  et  $0.05$ ) pour des valeurs fixes de rapport de viscosité ( $\mu_r = 3$ ) et d'accélération externe ( $B2 = 12.5$ ). La figure (V.7c) révèle que l'augmentation du rapport de pression ( $e$ ) augmente l'amplitude de l'oscillation de l'écoulement sanguin de manière significative tandis que l'augmentation du rapport de pression conduit à une diminution de la vitesse moyenne du sang.

La figure (V.7d) montre la vitesse au centre adimensionnelle à ( $r = 0$ ) en fonction du temps adimensionnel pour différentes valeurs de fréquence ( $f_b = 0,5, 1$  et  $15$ ) pour des valeurs fixes de rapport de viscosité ( $\mu_r = 3$ ) et d'accélération externe ( $B2 = 12.5$ ). La figure (V.7d) révèle que l'amplitude de la vitesse augmente lorsque la fréquence ( $f_b$ ) diminue alors que l'effet de la fréquence sur la vitesse moyenne du sang est resté inchangé.

#### V.4.2.4. Profil de vitesse adimensionnelle

L'écoulement laminaire est caractérisé par un gradient de lignes d'écoulement représentant différentes vitesses du sang à différents endroits dans le tube. La raison de ces différences de vitesse de l'écoulement sanguin est la contrainte de cisaillement à la paroi. Lorsque le sang circule dans l'artère, il existe une friction entre le sang et la paroi du vaisseau. Cette friction diminue la vitesse du sang le plus proche de la paroi [70].



**Figure V.8.** Profils de vitesse adimensionnelle en fonction de la position radiale adimensionnelle : **a)** Effet du comportement non newtonien ( $\mu_r$ ) et du gradient de pression ( $B1$ ), **b)** Accélération du corps ( $B2$ ), **c)** Rapport de pression. **d)** Fréquence d'accélération périodique externe  $f_b$ .

Dans les figures (V.8a-d), des profils de vitesse adimensionnelle en fonction de la position radiale adimensionnelle sont représentés où les effets du rapport de viscosité du fluide ( $\mu_r$ ), de l'accélération externe ( $A_g$ ) et du rapport de pression ( $e$ ) ont été étudiés.

La figure (V.8a), illustre les différentes distributions de la vitesse au centre adimensionnelle en fonction du temps adimensionnel pour deux groupes de tubes étudiés : les tubes étroits et les tubes larges. Le groupe de tubes larges est représenté par une artère fémorale ( $B1=8$  :  $R = 0,5$  cm et  $U = 50$  cm/s) et le groupe de tubes étroits est représenté par une artère coronaire ( $B1= 8,3$  :  $R = 0,15$  cm et  $U = 98,25$  cm/s). L'amplitude de vitesse diminue avec une augmentation du rapport de viscosité. Ce résultat correspond à l'attente intuitive.

La figure (V.8b) montre des profils de vitesse adimensionnelle en fonction de la position radiale adimensionnelle pour différentes valeurs d'accélération externe ( $B_2 = 0, 12.5$  et  $25$ ) pour un rapport de viscosité ( $\mu_r = 3$ ). Il a été généralement observé que l'accélération du corps augmente l'amplitude de la vitesse.

La figure (V.8c) montre des profils de vitesse adimensionnelle en fonction de la position radiale adimensionnelle pour différentes valeurs de rapport de pression ( $e = 0.05 ; 0.15$  et  $0.3$ ) pour des valeurs fixes de rapport de viscosité ( $\mu_r = 3$ ) et d'accélération externe ( $B_2 = 12.5$ ). La figure (V.8c) révèle que l'amplitude des profils de vitesse augmente lorsque le rapport de pression ( $e$ ) augmente.

La figure (V.8d) montre des profils de vitesse adimensionnelle en fonction de la position radiale adimensionnelle pour différentes valeurs de fréquences ( $f_b = 0,5, 1$  et  $1,5$ ) pour des valeurs fixes de rapport de viscosité ( $\mu_r = 3$ ) et d'accélération externe ( $B_2 = 12.5$ ). La figure (V.8d) révèle que l'amplitude des profils de vitesse diminue lorsque la fréquence  $f_b$  augmente.

### **V.4.3. Ecoulement sanguin pulsé thixotrope sous accélération périodique externe et champ magnétique uniforme**

La dynamique des fluides biomagnétiques est un domaine de recherche intéressant ces dernières années. Il a des applications importantes dans les sciences médicales et la bioingénierie. Sans aucun doute, le sang est un fluide biomagnétique en raison de l'interaction complexe des protéines intercellulaires, de la membrane cellulaire et de l'hémoglobine. Le concept MagnétoHydroDynamique (MHD) affecte considérablement l'écoulement sanguin et réduit le débit sanguin.

L'écoulement d'un fluide globalement neutre et conducteur, tel que le sang, en présence d'un champ magnétique externe, est régi par les lois de la magnétohydrodynamique. Lorsque le corps est soumis à un champ magnétique, les particules chargées du sang circulant dans une direction perpendiculaire au champ sont défléchies par la force de Lorentz, ce qui induit des courants et des potentiels électriques. Les interactions entre les inductions et le champ externe peuvent conduire à une chute du débit et par conséquent à une augmentation compensatoire de la pression sanguine pour maintenir un débit sanguin constant.

### V.4.3.1. Paramètres utilisés

L'étude de la MagnétoHydroDynamique (MHD) de l'écoulement sanguin dans les artères est d'un grand intérêt physiologique possédant plusieurs implications cliniques importantes.

**Tableau V.3.** Paramètres utilisés dans le cadre de la seconde étude, qui porte sur l'écoulement sanguin entraîné par un gradient de pression oscillant d'un fluide Non Newtonien de type thixotrope sous la présence d'une accélération externe [30,50].

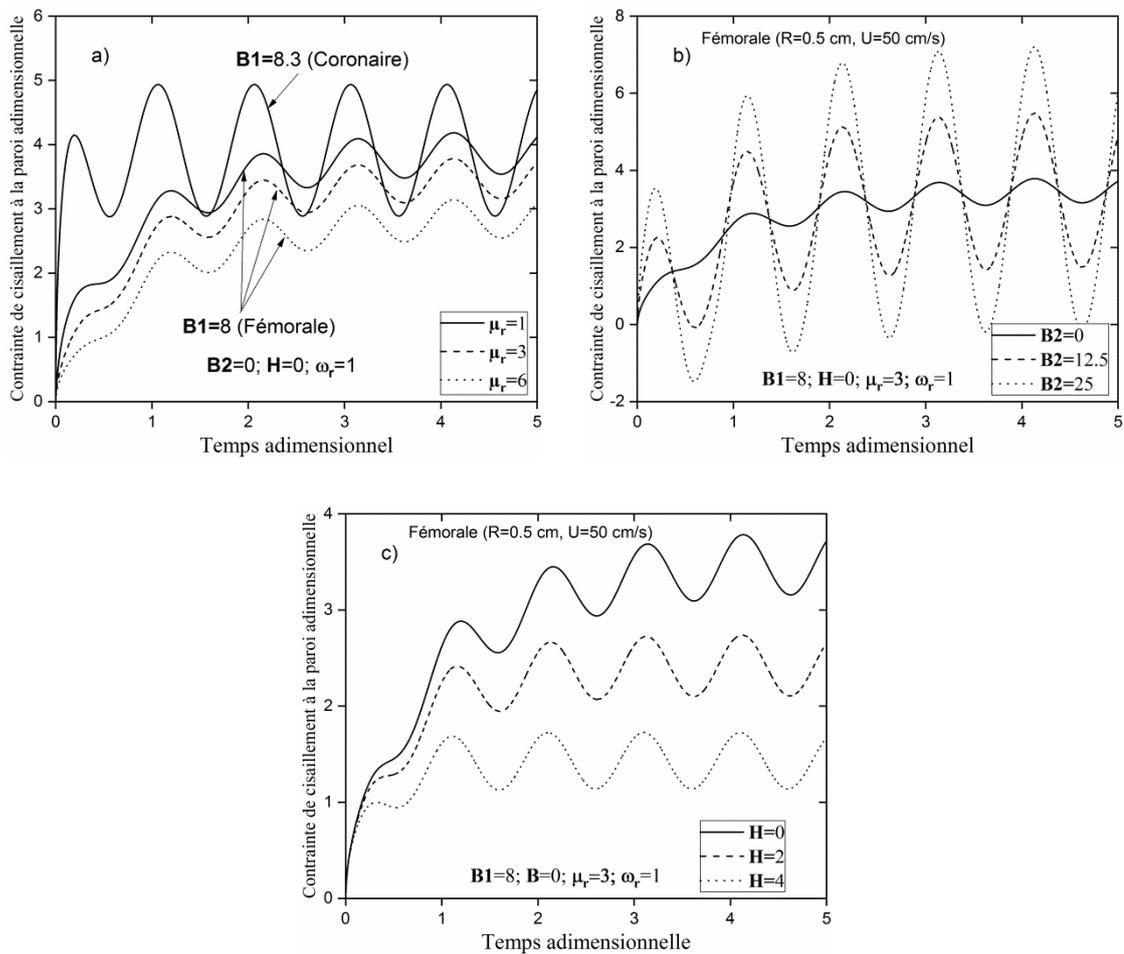
Paramètre	Symbole (unité)	Valeurs
Rayon coronaire	$R$ (m)	0.0015
Rayon fémorale	$R$ (m)	0.005
Vitesse moyenne coronaire	$U$ (m s <sup>-1</sup> )	0.5
Vitesse moyenne fémorale	$U$ (m s <sup>-1</sup> )	0.98
Amplitude d'accélération externe	$A_g$ (m s <sup>-2</sup> )	0, 0.1 et 0.4
Masse volumique	$\rho$ (kg m <sup>-3</sup> )	1000
Paramètre structurel	$K_b / K_a$	10
Pas de temps	$\Delta t$	0.0001
Pas d'espace	$\Delta r$	0.01
Fréquence d'accélération externe	$f_b$ (Hz)	1
Fréquence du gradient de pression	$f_p$ (Hz)	1
Viscosité maximale	$\mu_\infty$ (Pa)	0.004
Viscosité minimale	$\mu_0$ (Pa)	0.004, 0.012 et 0.024
Rapport de viscosité	$\mu_r$ (-)	1, 3 et 6
Rapport de pression	$e$ (-)	0.03, 0.15 et 0.005
Nombre de Hartmann	$H$ (-)	0, 2 et 4

Deux ensembles différents de conditions sont utilisés pour les calculs : un ensemble avec  $U = 98$  cm/s,  $R = 0,15$  cm représentant la vitesse moyenne à l'intérieur et le rayon de l'artère coronaire, et l'autre ensemble avec  $U = 50$  cm/s,  $R = 0,5$  cm représentant la vitesse moyenne à l'intérieur et le rayon de l'artère fémorale [34]. Les solutions numériques basées sur la méthode des différences finies pour un écoulement axisymétrique d'un fluide Non Newtonien thixotrope entraîné par un gradient de pression oscillant en présence d'une accélération appliquée de l'extérieur et d'un champ magnétique sont données. Les valeurs numériques des différents paramètres du système considérés dans le présent travail sont données dans le tableau V.3.

### V.4.3.2. Contrainte de cisaillement à la paroi adimensionnelle

Il a été établi que les systèmes biologiques en général sont fortement affectés par l'application d'un champ magnétique externe. Jusqu'à présent, les études théoriques traitant de l'influence du champ magnétique appliqué sur les écoulements sanguins ont reçu très peu d'attention [70].

La figure (V.9a) montre l'amplitude de la contrainte de cisaillement à la paroi adimensionnelle en fonction du temps adimensionnel pour différentes du rapport de viscosité  $\mu_r$ , en l'absence d'accélération externe et de champ magnétique. On observe que l'amplitude de la contrainte de cisaillement à la paroi diminue en augmentant la valeur du rapport de viscosité ( $\mu_r$ ).



**Figure V.9.** Contrainte de cisaillement à la paroi adimensionnelle en fonction du temps adimensionnel : **a)** Effet du comportement non newtonien ( $\mu_r$ ), **b)** Effet de l'accélération du corps ( $B2$ ) et **c)** Effet du champ magnétique ( $H$ ).

L'examen des résultats obtenus pour le sang considéré comme un fluide newtonien (ligne continue) et ceux du même fluide considéré comme un fluide non-newtonien (lignes pointillées et en tirets) montre l'effet du caractère dépendant du temps du sang responsable de la diminution considérable de la contrainte de cisaillement de la paroi.

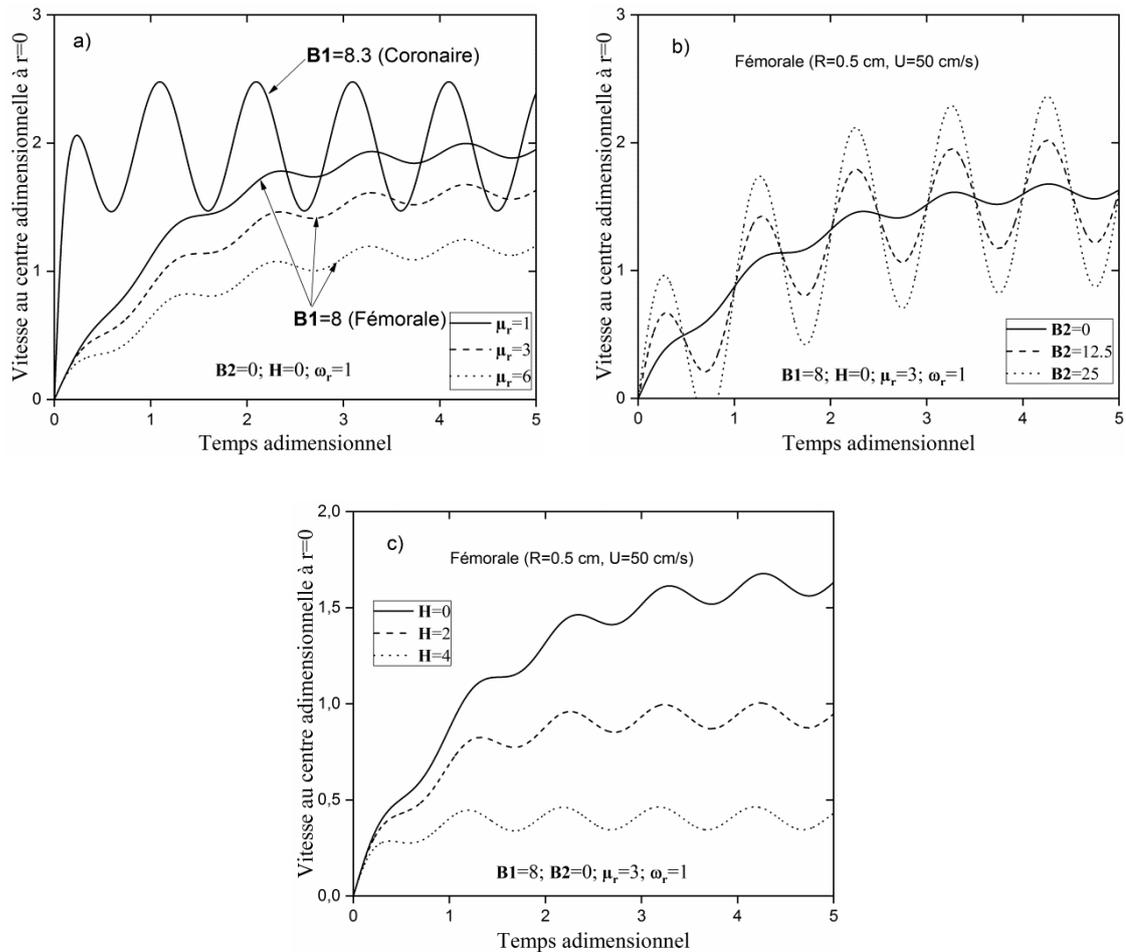
En effet, l'augmentation de la viscosité  $\mu_r$  entraîne une augmentation de la résistance de l'écoulement. Lorsque la résistance augmente, la différence de pression qui influence la vitesse diminue et donc la contrainte de cisaillement diminue. Sur la même figure (V.9a), deux groupes de tubes ont été étudiés : les tubes étroits et les tubes larges. Le groupe de tubes larges est représenté par une artère fémorale ( $B1=8$  :  $R = 0,5$  cm et  $U = 50$  cm/s) et le groupe de tubes étroits est représenté par une artère coronaire ( $B1= 8,3$  :  $R = 0,15$  cm et  $U = 98,25$  cm/s). Il convient de mentionner que les caractéristiques de l'écoulement dans les artères fémorales et coronaires du système cardiovasculaire sont nettement différentes. La figure (V.9a) révèle que l'amplitude de l'oscillation de la contrainte de cisaillement de la paroi augmente de manière significative lorsque  $B1$  augmente [30,70].

Les figures (V.9b) et (V.9c) illustrent, respectivement, l'effet de l'accélération du corps en termes de  $B2$  et l'effet du champ magnétique externe en termes de nombre de Hartmann  $H$  sur la contrainte de cisaillement à la paroi adimensionnelle. On peut clairement voir que l'accélération du corps augmente l'amplitude de l'oscillation de la contrainte de cisaillement à la paroi de manière significative alors que la valeur moyenne de la contrainte de cisaillement de la paroi reste constante. Cependant, il est intéressant de noter que l'augmentation de la magnitude du nombre de Hartmann, c'est-à-dire la présence d'un champ magnétique, entraîne une diminution de la magnitude de la contrainte de cisaillement à la paroi [31].

#### **V.4.3.3. Vitesse adimensionnelle au centre à $r=0$**

Il est connu que les variations des caractéristiques hémodynamiques sont associées aux variations des propriétés hémorhéologiques. Par conséquent, la relation entre les propriétés hémorhéologiques et hémodynamiques est d'une grande importance [19].

Pour étudier la vitesse l'écoulement sanguin, l'amplitude de la vitesse au centre en fonction du temps adimensionnel pour différentes valeurs du rapport de viscosité  $\mu_r$ , en l'absence d'accélération externe et de champ magnétique est illustrée à la figure V.10a. On observe que la valeur moyenne de la vitesse au centre diminue en augmentant la valeur du rapport de viscosité ( $\mu_r$ ).



**Figure V.10.** Vitesse au centre adimensionnelle en fonction du temps adimensionnel : **a)** Effet du comportement non newtonien ( $\mu_r$ ), **b)** Effet de l'accélération du corps ( $B2$ ) et **c)** Effet du champ magnétique ( $H$ ).

L'examen des résultats obtenus pour le sang considéré comme un fluide newtonien (ligne continue) et ceux du même fluide considéré comme un fluide non-newtonien (lignes en pointillés et en tirets) montre l'effet du caractère dépendant du temps du sang responsable de la diminution significative de la vitesse. On peut en conclure que le comportement non newtonien ralentit l'écoulement du sang dans les artères.

La vitesse adimensionnelle au centre de l'artère est montrée dans la même figure V.10a pour différentes valeurs du gradient de pression ( $B1=8$  et  $8,3$ ) correspondant, respectivement, aux artères fémorales et coronaires. La figure révèle que l'amplitude de l'oscillation de la vitesse augmente de manière significative lorsque  $B1$  augmente [30,65].

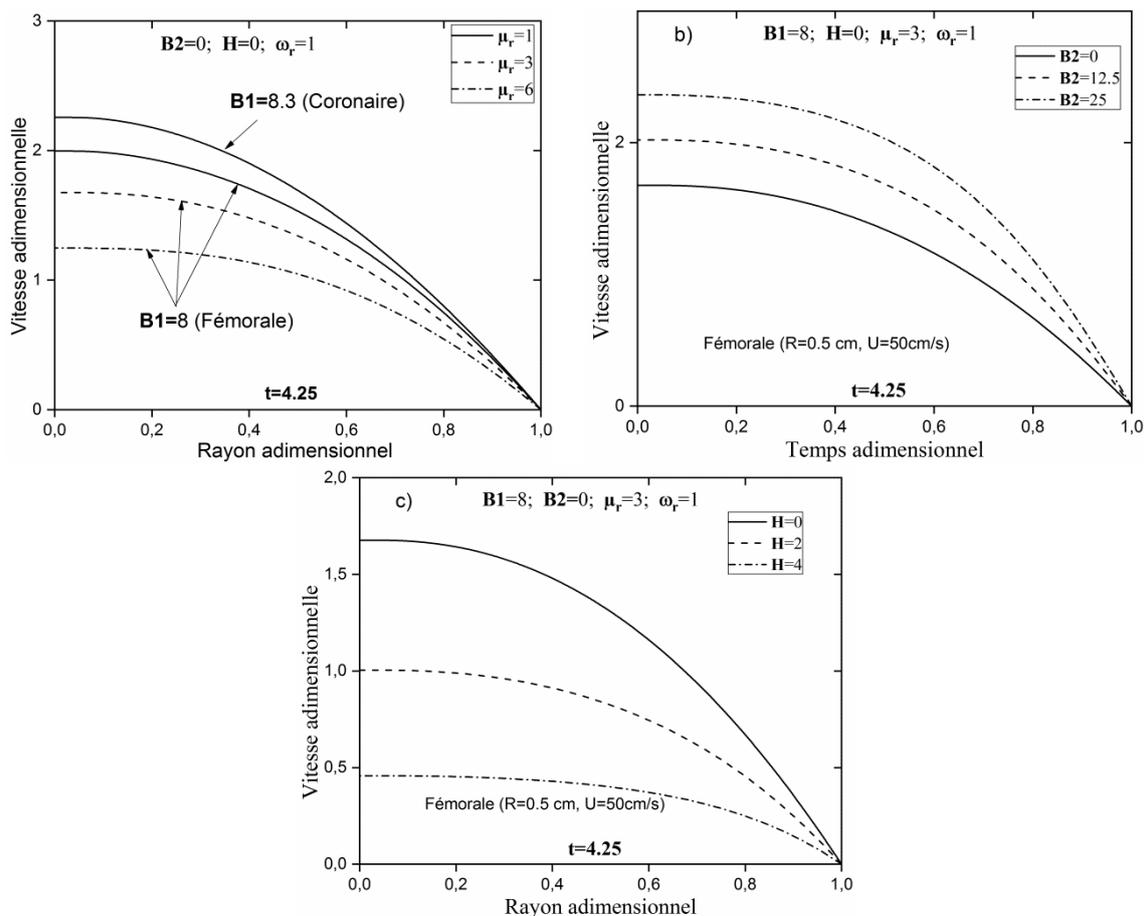
Les figures (V.10b) et (V.10c) illustrent, respectivement, l'effet de l'accélération du corps en termes de  $B2$  et l'effet du champ magnétique externe en termes de nombre de

Hartmann  $H$  sur la vitesse adimensionnelle au centre. Comme prévu par les résultats obtenus ci-dessus (contrainte de cisaillement à la paroi), l'accélération du corps augmente de manière significative l'amplitude de l'oscillation de la vitesse alors que la valeur moyenne de la vitesse reste constante.

Cependant, il est intéressant de noter que les augmentations de l'amplitude du nombre de Hartmann, c'est-à-dire la présence d'un champ magnétique, entraînent une diminution de la vitesse au centre. On peut conclure que l'accélération du corps accélère le flux sanguin, tandis que le champ magnétique le ralentit dans les artères.

#### V.4.3.4. Profil de vitesse adimensionnelle

Les profils de vitesse axiale en fonction du rayon adimensionnel pour différentes valeurs de viscosité adimensionnel en l'absence d'accélération externe et de champ magnétique sont illustrés dans la figure V.11a.



**Figure V.11.** Profils de vitesse adimensionnelle en fonction du rayon adimensionnel : **a)** Effet du comportement non newtonien ( $\mu_r$ ), **b)** Effet de l'accélération du corps ( $B_2$ ) et **c)** Effet du champ magnétique ( $H$ ).

On observe que l'amplitude de la vitesse axiale diminue en augmentant la valeur du rapport de viscosité ( $\mu_r$ ). L'analyse des résultats obtenus révèle que les caractéristiques du sang en fonction du temps, qui se traduisent par une diminution significative de la vitesse, peuvent être observées en comparant la ligne continue (représentant le sang comme un fluide newtonien) aux lignes en pointillés et en tirets (représentant le sang comme un fluide non newtonien). Comme nous l'avons vu plus haut, le comportement non newtonien ralentit l'écoulement du sang. Les profils de vitesse adimensionnelle pour différentes valeurs de la pression ( $B1=8$  et  $8,3$ ) sont illustrés dans la même figure (V.11a).

Les figures (V.11b et c) illustrent, respectivement, l'effet de l'accélération du corps en termes de  $B2$  et l'effet du champ magnétique externe en termes de nombre de Hartmann  $H$  sur les profils de vitesse adimensionnelle. Comme prévu d'après les résultats obtenus ci-dessus, l'accélération du corps augmente considérablement l'amplitude de la vitesse tandis que l'augmentation de l'amplitude du nombre de Hartmann entraîne une diminution de l'amplitude de la vitesse axiale.

## V.5. Conclusion

L'hémodynamique fait référence à l'étude physique du sang dans toutes structures solides (telles que les artères) à travers lesquelles il circule. Selon cette définition, l'accent est mis sur la mécanique des fluides appliquée aux écoulements sanguins. Cette partie du travail, présente la particularité d'établir des connaissances nouvelles à propos de l'écoulement sanguin pulsé. Nous avons donc mis en évidence les effets du gradient de pression pulsé, l'accélération externe et le champ magnétique d'un fluide newtonien et non-newtonien (thixotrope).

A ce titre, trois études numériques complémentaires ont été initiées, celles-ci étant essentiellement basées sur la rhéologie du sang et l'écoulement pulsé.

Les principaux résultats obtenus sont soulignés:

- Dans des situations où la personne est soumise à une accélération périodique externe (par exemple : un effort physique), l'amplitude de l'oscillation de la contrainte de cisaillement à la paroi et la vitesse, augmente de manière significative, donc on peut dire que la présence d'une accélération externe périodique accélère l'écoulement sanguin.

- La présence d'un champ magnétique peut conduire à un ralentissement de l'écoulement sanguin.
- L'effet du caractère non-newtonien de type thixotrope est responsable de l'importante diminution de l'amplitude de la vitesse et contrainte de cisaillement à la paroi.

# **Conclusion générale et perspectives**

## **Conclusion générale et perspectives**

En raison de son importance dans de nombreuses applications industrielles, notamment en biomécanique, la rhéologie du sang joue un rôle et intérêt essentiel dans la circulation sanguine car le coefficient de viscosité du sang figure en bonne place dans les lois de comportement des fluides newtoniens et non newtoniens. Cet intérêt est à l'origine de ce travail qui consiste en la modélisation numérique des écoulements sanguins pulsés des fluides newtoniens et non newtoniens dans les artères.

Une analyse bibliographique a permis de cerner les principaux paramètres dans différentes géométries et de faire le point sur différents problèmes cliniques du système cardiovasculaire grâce à la biomécanique, qui participe à pratiquement toutes les avancées modernes de la science et de la technologie médicales.

La présente étude s'inscrit donc pleinement dans l'axe de développement souhaitable, en ce qui concerne le domaine de la rhéologie et son application aux écoulements sanguins pulsés, par des techniques numériques basées sur la résolution des équations de la mécanique des fluides. Les différentes modélisations sont rendues possibles. La discrétisation des équations gouvernantes relatives au comportement newtonien et non newtonien, à travers une artère illustrée par une conduite cylindrique basée sur la méthode des différences finies.

Le travail est structuré en différentes sections tournant autour de l'influence de l'écoulement sanguin pulsé et les différents types lois de comportement à travers des études paramétriques telles que le gradient de pression pulsé, viscosité, le champ magnétique, la nature de comportement du fluide et l'accélération périodique externe, ce qui nous a permis d'aborder trois applications différentes. Les trois études initiées passent par une validation du modèle théorique utilisé par comparaison avec des références disponibles dans la littérature.

La première application consiste en l'analyse du comportement newtonien dépendant du temps de l'écoulement sanguin de nature pulsé, développé dans une conduite cylindrique. L'étude prend en compte l'influence de différents paramètres à savoir le phénomène de l'écoulement pulsé, l'accélération périodique externes, les conditions initiales et aux limites sur la structure de l'écoulement. Les résultats obtenus ont mis en évidence l'influence de différents paramètres sur le champ de vitesse. En outre, il est mis l'accent sur les situations

où la personne est soumise à une accélération périodique externes (par exemple : effort physique), les résultats sont tout à fait différents. Dans une telle situation, l'oscillation périodique superposée due à l'accélération externe augmente l'amplitude de la vitesse produite par le gradient de pression pulsé.

Dans la seconde application, on s'est focalisé sur la caractéristique non newtonienne de type thixotrope dépendant du temps dans un écoulement pulsé sous l'influence de l'accélération périodique externe dans une conduite cylindrique. On a analysé l'influence des paramètres les plus décisifs en hémodynamique sur le champ de vitesse et la contrainte de cisaillement à la paroi. Les résultats rapportés révèlent que l'augmentation du rapport de viscosité du fluide non newtonien entraîne une diminution des valeurs moyennes de vitesse et des grandeurs de contrainte de cisaillement à la paroi, et l'augmentation de l'accélération du corps entraîne une augmentation de la vitesse et de l'amplitude d'oscillation de la contrainte de cisaillement à la paroi.

La troisième application concerne l'effet de l'écoulement pulsé MagnétoHydroDynamique (MHD) du sang à travers une conduite cylindrique entraîné par un gradient de pression oscillant, un champ magnétique et une accélération périodique externe. Les résultats ont montré que le champ magnétique est en fonction du nombre de Hartmann et l'augmentation de ce dernier entraîne une diminution de la contrainte de cisaillement à la paroi et ralentit ainsi considérablement l'écoulement sanguin dans les artères.

Les résultats des différentes études ont mis en lumière la relation entre l'application des lois de la mécanique des fluides au mouvement sanguin et l'application des propriétés rhéologique du sang.

Le travail de thèse réalisés, même s'il est restreint à une classe de fluides bien définie (thixotrope), nous a permis de mettre en évidence l'importance des effets de l'aspect non newtonien sur la structure des écoulements pulsé associé.

Enfin, concernant les perspectives à donner à ce travail, nous nous accorderons sur la nécessité d'entreprendre des recherches appropriées pour chaque classe de fluides, et nous pensons qu'il est intéressant de considérer une simulation en 3-D de l'écoulement sanguin à travers des différentes configurations géométriques à symétrie axiale comme : sténose (rétrécissement) et des anévrismes (élargissement).

Cela nous permettra sans doute de mieux assimiler ces phénomènes, et constituera un atout majeur pour mieux les maîtriser,

## **Références Bibliographiques**

## Références Bibliographiques

- [1] H. Wang, M. Naghavi, C. Allen. Global, regional, and national life expectancy, all-cause mortality, and cause-specific mortality for 249 causes of death, 1980–2015: a systematic analysis for the Global Burden of Disease Study 2015. *Lancet*. 388: 1459-1544, 2016.
- [2] American Heart Association Council on Epidemiology and Prevention Statistics Committee and Stroke Statistics Subcommittee, Heart Disease and Stroke Statistics – 2018 Update: A Report from the American Heart Association. *Circulation*, 137(12): e64–e492, 2018.
- [3] <https://www.aps.dz/sante-science-technologie/119636-les-maladies-cardiovasculaires-premiere-cause-de-mortalite-en-algerie>.
- [4] T. J. Pedley. *The Fluid Mechanics of Large Blood Vessels*. Cambridge: Cambridge University Press, 1980.
- [5] A. Y. Cheer, C. P. Van Dam. *Contemporary Mathematics. Fluid Dynamics in Biology*, American Mathematical Society, 41: 1993.
- [6] Y.C. Fung. *Biomechanics: mechanical properties of living tissues*. 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 1993.
- [7] <https://www.dreamstime.com/diagram-showing-composition-blood-illustration-image163861507>.
- [8] N. Tahiri. *Simulation de Globules Rouges modèles, et analyse analytique de modèles de suspensions très concentrées*, thèse de doctorat à l'Université de Grenoble et l'Université Mohammed V-Agdal-Rabat, 2013.
- [9] O. Baskurt, J.M. Herbert. Blood Rheology and Hemodynamics, seminars in thrombosis and hemostasis, 29(5):435-450, 2003.
- [10] R. Fdhraus, T. Lindqvist. The viscosity of the blood in narrow capillary tubes, *American Journal of Physiology*, 1930.

- [11] A.L. Cople. Hemorheology; proceedings. International Conference on Hemorheology. 1<sup>st</sup>, University of Iceland, 1968.
- [12] S. Chien, S. Usami, R. J. Dellenback, M.I. Gregersen. Shear-dependent in rheology deformation blood of erythrocytes of human. *Am J Physiol.* 219(1):136–142, 1970.
- [13] M. Armstrong, J.S. Horner, M. Clark, M. Deegan, T. Hill T, C. Keith, L. Mooradian. Evaluating rheological models for human blood using steady state, transient, and oscillatory shear predictions. *Rheol Acta.* 57(11):705–728, 2018.
- [14] J. Horner, M. Armstrong, N. Wagner, A.N. Beris. Measurements of human blood viscoelasticity and thixotropy under steady and transient shear and constitutive modeling thereof. *J Rheol.* 63(5):799–813, 2019.
- [15] M. Ameenuddin, M. Anand, M. Massoudi. Effects of shear-dependent viscosity and hematocrit on blood flow. *Appl Math Comput.* 356:299–311, 2019.
- [16] S.V. Frolov, S.V. Sindeev, D. Liepsch, A. Balasso, P. Arnold, J.S. Kirschke, S. Prothmann, A.Y. Potlov. Newtonian and non Newtonian blood flow at a 90° - Bifurcation of the cerebral artery: a comparative study of fluid viscosity models. *J Mech Med Biol.* 18(05):1850043, 2018.
- [17] R. Tao, K. Huang. Reducing blood viscosity with magnetic fields. *Physic review E,* 84: 011905, 2011.
- [18] J.C. Misra, S.D. Adhikary. Flow of a Bingham fluid in a porous bed under the action of a magnetic field: Application to magneto-hemorheology. *Eng Sci Tech An Int J,* 20(3):973-981, 2017.
- [19] E. Yeom, K.J. Yang, S.J. Lee. Changes in velocity profile according to blood viscosity in a microchannel. *Biomicrofluidics.* 8 (3): 034110, 2014.
- [20] J. G. G. Dobbe, M. R. Hardeman, G. J. Streekstra, J. Strackee, C. Ince, C. A. Grimbergen. Analyzing Red Blood Cell-Deformability Distributions Submitted Blood Cells, Molecules, and Diseases. 28(3): 373–384, 2002.

- [21] M. O. Bernabeu, R. W. Nash, D. Groen, H.B. Carver, J. Hetherington, T. Kruger, P.V. Coveney. Impact of blood rheology on wall shear stress in a model of the middle cerebral artery. *Interface Focus*, 3 (2), 2013.
- [22] F. M. A. Box, R. J.V.D. Geest, M. C. M. Rutten, J. H. C. Reiber. The Influence of Flow, Vessel Diameter, and Non-Newtonian Blood Viscosity on the Wall Shear Stress in a Carotid Bifurcation Model for Unsteady Flow. *Invest Radiol*, 40 (5): 277-94, 2005.
- [23] S.K. Hamlin, P.S. Benedik. Basic Concepts of Hemorheology in Micro vascular Hemodynamics. *Crit Care Nurs Clin N Am*, 6(3):337–344, 2014.
- [24] G. D. Lowe, A. J. Lee, A. Rumley, J. F. Price, F. G. Fowkes. Blood viscosity and risk of cardiovascular events: the Edinburgh Artery Study, *British Journal of Hematology*, 96(1): 168–173, 1997.
- [25] A.R. Pries, D. Neuhaus, P. Gaetgens. Blood viscosity in tube flow: dependence on diameter and hematocrit. *The American Physiological Society*, 263: H1770-8, 1992.
- [26] Y.k. Ha, H. Hong, E. Yeom, J.M. Song. Numerical study of the pulsatile flow depending on non-Newtonian viscosity in a stenosed microchannel. *Journal of visualization*. 23 (1): 61–70, 2020.
- [27] D. Quemada. Hydrodynamique sanguine : Hémo-rhéologie et écoulement du sang dans les petits vaisseaux. *Journal de Physique Colloques*, 37 (C1), 1976.
- [28] J. R. Womersley. Method for the calculation of velocity, rate of flow and viscous drag in arteries when the pressure gradient is known, *J. Physiol*, 127: 553-563, 1995.
- [29] R. Usha, K. Prema. Flux pulsatile du modèle de suspension particulaire-fluide du sang sous accélération périodique du corps. *Z. Angew. Math. Phys*, 50:175-192, 1999.
- [30] M. Massoudi, T.X. Phuoc. Pulsatile flow of blood using a modified second-grade fluid model. *Comput Math Appl*, 56(1):199–211, 2008.
- [31] A. Zaman, N. Ali, O. A. Beg. Numerical study of unsteady blood flow through a vessel using Sisko model, *Engineering Science, and Technology, an International Journal* 19: 538-547, 2016.

- [32] V. K. Sud, G. S. Sekhon. Arterial flow under periodic body acceleration, *Bulletin of Mathematical Biology*, 47 (1): 35-52, 1985.
- [33] V. K. Sud, G. S. Sekhon. Analysis of blood flow through a model of the human arterial system under periodic body acceleration, *Journal of Biomechanics*, 19 (11): 929-941, 1986.
- [34] P. Chaturani, V. Palanisamy. Pulsatile flow of power-law fluid model for blood flow under periodic body acceleration. *Biorheology*. 27: 747-758, 1990.
- [35] P. Chaturani, V. Palanisamy. Pulsatile flow of blood with periodic body acceleration, *Int.J.Engngsci.* 29 (1): 113-121, 1991.
- [36] D. S. Sankar, K. Hemalatha. A non-Newtonian fluid flow model for blood flow through a catheterize dartery—Steady flow. *Applied Mathematical Modelling*. 31:1847–1864, 2007.
- [37] G. Varshney, V. K. Katiyar. Numerical modeling of pulsatile flow of blood through a stenosed tapered artery under periodic body acceleration. *Journal of Mechanics in Medicine and Biology*, 10(2): 251–272, 2010.
- [38] Sarifuddin, S. Chakravarty, P. K. Mandal, G. C. Layek. Numerical simulation of unsteady generalized Newtonian blood flow through differently shaped distensible arterial stenoses, *Journal of Medical Engineering Technology* 32: 385-399, 2008.
- [39] J. Chen, X. Yun Lu, Numerical investigation of the non-Newtonian pulsatile blood flow in a bifurcation model with a non-planar branch. *Journal of Biomechanics*, 39: 818–832, 2006.
- [40] J. C. Misra, B. Pal. A mathematical model for the study of the pulsatile flow of blood under externally imposed body acceleration. *Mathematical and computer modeling*, 29: 89-106, 1999.
- [41] S. U. Siddiqui, S.R. Shah, Geeta. A biomechanical approach to study the effect of body acceleration and slip velocity through stenotic artery. *Applied Mathematics and Computation* 261: 148–155, 2015.
- [42] P. Nagarani, G. Sarojamma. Effect of body acceleration on pulsatile flow of Casson fluid through a mild stenosed artery. *Korea-Australia Rheology Journal*, 20 (4): 189-196, 2008.

- [43] S. Mishra, S. U. Siddiqui , N. K. Verma , R. S. Gupta. Mathematical modelling of pulsatile flow of Casson's fluid in arterial stenosis. *Applied Mathematics and Computation* 210: 1–10, 2009.
- [44] E. M. Khabakhpasheva, V.I. Popov, A.N. Kekalov, E.S. Mikhailova. Pulsating flow of viscoelastic fluids in tubes. *Journal of Non-NewtonianFluidMechanics*. 33: 289-30, 1989.
- [45] M. Sajid, A. Zaman, N. Ali. A. M. Siddiqui, Pulsatile flow of Bblood in a vessel using an Oldroyd-B fluid, *IJNSNS*, 16(5): 197–206, 2016.
- [46] M. Anand, J. Kwack ,A. Masud. A new generalized Oldroyd-B model for blood flow in complex geometries. *Int J Eng Sci*. 72:78–88, 2013.
- [47] H.A. Barnes, Thixotropy – A review, *J. Non-Newtonian Fluid Mech*, 70: 1-33, 1997.
- [48] D. Pritchard, A.I. Croudace, S.K. Wilson, Thixotropic pumping in a cylindrical pipe, *Physical Review Fluids*, 5: 013303, 2020.
- [49] A. I. Croudace, D. Pritchard, and S. K. Wilson, Unsteady flow of a thixotropic fluid in a slowly varying pipe, *Physical Review Fluids*, 29: 083103, 2017.
- [50] S. Nezamidoost, K. Sadeghy, V. Askaril, Pulsatile flow of thixotropic fluids through a partially-constricted tube. *J. Soc. Rheol. Jpn*. 41(2):45–52, 2013.
- [51] Z. Abbas, M.S. Shabbir , N. Ali. Numerical study of magnetohydrodynamic pulsatile flow of Sutterby fluid through an inclined over lapping arterial stenosis in the presence of periodic body acceleration. *Results in Physics*. 9: 753-762, 2018.
- [52] P. Akbarzadeh. Pulsatile magneto-hydrodynamic blood flows through porous blood vessels using a third grade non-Newtonian fluids model. *Comput Methods Programs Biomed*, 2015.
- [53] A. Drochon. Sinusoidal flow of blood in a cylindrical deformable vessel exposed to an external magnetic field. *The European Physical Journal Applied Physics*. 73: 31101, 2016.
- [54] R.P. Chhabra, J.F. Richardson. *Non-Newtonian flow and applied rheology: Engineering Applications*, 2008.

- [55] A. Benslimane. Rhéologie et écoulement de fluides chargés : Application aux réseaux d'assainissement urbains. Etude expérimentale et modélisation, Thèse de doctorat École Doctorale Mathématiques, Sciences de l'Information et de l'Ingénieur, Strasbourg, 2012.
- [56] P. Coussot, F. Bertrand, J. S. Raynaud , P. Moucheron. Détermination directe par IRM du comportement thixotrope de suspensions colloïdales. 36ème colloque du Groupe Français de Rhéologie, 2001.
- [57] H.A. Barnes, J.F. Hutton, K. Walters. An introduction to Rheology. Elsevier, 1989.
- [58] T. Peterfi, Arch. Entwicklungsmech. Organ. 112, 680, 1927.
- [59] W. H. Bauer, E. A. Collins. In Rheology, edited by F. R. Eirich, Academic Press, 4: 423, 1967.
- [60] C.F. Goodeve, G.W. Whitfield, Trans. Faraday Soc, 34 :511, 1938.
- [61] J. Mewis, N.J. Wagner. Thixotropy, Advances in Colloid and Interface Science, 147–148, 214–227, 2009.
- [62] F. Moore. The rheology of ceramic slips and bodies. Trans. Br. Ceram. Soc. 58: 470–474, 1959.
- [63] P. Coussot, Q.D. Nguyen, H.T. Huynh, D. Bonn. Viscosity bifurcation in thixotropic, yielding fluids, J Rheol, 46 (3): 573 – 589, 2002.
- [64] N. Tahiri. Simulation de Globules Rouges modèles, et analyse analytique de modèles de suspensions très concentrées, thèse de doctorat à l'Université de Grenoble et l'Université Mohammed V-Agdal-Rabat, 2013.
- [65] Cheffar, L., Benslimane, A., Sadaoui, D., Benchabane, A., & Bekkour, K. Pulsatile flow of thixotropic blood in artery under external body acceleration. Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering, 26(8), 927–940, 2022.
- [66] E. Goncalvès. Résolution numérique, discrétisation des EDP et EDO, institut national polytechnique de Grenoble, 2005.

[67] V. Szabo, C. Jenei, G. Halasz. Modelling blood pressure in stenosed coronary arteries. *Periodica polytechnica mechanical engineering*, 61(3): 242-246, 2017.

[68] J.D. Pollock, I. Murray, S. Bordes, A.N. Makaryus. Physiology, cardiovascular hemodynamics. In: *Stat Pearls*. Treasure Island (FL): Stat Pearls, 2020.

[69] S.K. Samijo, J. M. Willigers, R. Barkhuysen, P. Kitslaar, R.S. Reneman, P.J. Brands, A.P.G. Hoeks. Wall shear stress in the human common carotid artery as function of age and gender. *Cardiovasc Res*. 39(2):515–522, 1998.

[70] J.J. Paszkowiak, A. Dardik. Arterial wall shear stress: observations from the bench to the bedside. *Vasc Endovascular Surg*. 37(1):47–57, 2003.

# **Annexes**

## Annexe A

### Système d'équations de continuité et de Navier-Stokes en coordonnées cartésiennes :

Les composantes de la vitesse dans les directions  $(x, y, z)$  peuvent s'écrire comme suit :

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

L'équation de continuité s'écrit en coordonnées cartésiennes comme suit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}) = 0 \quad (\text{A.2})$$

La projection de l'équation de continuité (A.2):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0 \quad (\text{A.3})$$

L'équation de quantité de mouvement s'écrit :

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = -\nabla p + 2\mu \Delta \vec{V} + \rho \vec{f} \quad (\text{A.4})$$

On obtient l'écriture finale à partir de la projection de l'équation de quantité de mouvement (A.4), connue sous le nom d'équations de Navier-Stokes :

$$\begin{cases} \rho \left( \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) + \rho f_x \\ \rho \left( \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) + \rho f_y \\ \rho \left( \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) + \rho f_z \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

## Annexe B

### Système d'équations de continuité et de Navier-Stokes en coordonnées cylindriques :

Les composantes de la vitesse dans les directions  $(r, \theta, z)$  peuvent s'écrire comme suit :

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

L'équation de continuité s'écrit en coordonnées cylindrique comme suit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}) = 0 \quad (\text{B.2})$$

La projection de l'équation de continuité (B.2):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \rho u) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0 \quad (\text{B.3})$$

L'équation de quantité de mouvement s'écrit :

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = -\nabla p + 2\mu \Delta \vec{V} + \rho \vec{f} \quad (\text{B.4})$$

On obtient l'écriture finale des équations de Navier-Stokes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v^2}{r} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \rho f_r \\ \rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{uv}{r} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \rho f_\theta \\ \rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \rho f_z \end{array} \right. \quad (\text{B.5})$$

## Annexe C

### Système d'équations de continuité et de Navier-Stokes en coordonnées sphériques :

Les composantes de la vitesse dans les directions  $(r, \theta, \varphi)$  peuvent s'écrire comme suit :

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_\varphi \end{pmatrix} \quad (\text{C.1})$$

L'équation de continuité s'écrit en coordonnées cartésiennes comme suit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}) = 0 \quad (\text{C.2})$$

La projection de l'équation de continuité (C.2):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r}(\rho v_r) + \frac{2v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v_\theta) + \frac{v_\theta \cot \theta}{r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}(\rho v_\varphi) = 0 \quad (\text{C.3})$$

L'équation de quantité de mouvement s'écrit :

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = -\nabla p + 2\mu \Delta \vec{V} + \rho \vec{f} \quad (\text{C.4})$$

Le système d'équations de Navier-Stokes en coordonnées sphérique :

Sur l'axe r :

$$\rho \left( \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\theta^2}{r} - \frac{v_\varphi^2}{r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2v_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \varphi^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{2v_\theta \cot \theta}{r^2} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right) + \rho f_r \quad (\text{C.5})$$

Sur l'axe  $\theta$ :

$$\rho \left( \begin{array}{l} \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_r v_\theta}{r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \\ + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi^2 \cot \theta}{r} \end{array} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left( \begin{array}{l} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \\ + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{2 \cot \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \end{array} \right) + \rho f_\theta$$

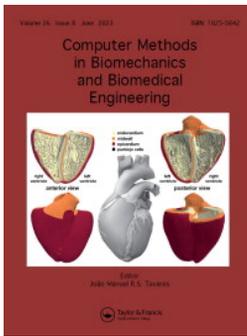
(C.6)

Sur l'axe  $\varphi$

$$\rho \left( \begin{array}{l} \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_r v_\varphi}{r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} \\ + \frac{v_\theta v_\varphi \cot \theta}{r} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} \end{array} \right) = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \mu \left( \begin{array}{l} \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} \\ + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{2 \cot \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} \end{array} \right) + \rho f_\varphi$$

(C.7)

# **Article de thèse**



## Pulsatile flow of thixotropic blood in artery under external body acceleration

Louiza Cheffar, Abdelhakim Benslimane, Djamel Sadaoui, Adel Benchabane & Karim Bekkour

To cite this article: Louiza Cheffar, Abdelhakim Benslimane, Djamel Sadaoui, Adel Benchabane & Karim Bekkour (2023) Pulsatile flow of thixotropic blood in artery under external body acceleration, *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering*, 26:8, 927-940, DOI: [10.1080/10255842.2022.2098677](https://doi.org/10.1080/10255842.2022.2098677)

To link to this article: <https://doi.org/10.1080/10255842.2022.2098677>



Published online: 19 Jul 2022.



Submit your article to this journal [↗](#)



Article views: 120



View related articles [↗](#)



View Crossmark data [↗](#)



## Pulsatile flow of thixotropic blood in artery under external body acceleration

Louiza Cheffar<sup>a</sup>, Abdelhakim Benslimane<sup>a</sup>, Djamel Sadaoui<sup>a</sup>, Adel Benchabane<sup>b,c</sup>  and Karim Bekkour

<sup>a</sup>Laboratoire de Mécanique, Matériaux et Energétique (L2ME), Faculté de Technologie, Université de Bejaia, Bejaia 06000, Algérie;

<sup>b</sup>Laboratoire de Génie Energétique et Matériaux (LGEM), Faculté des Sciences et de la Technologie, Université Mohamed Khider -Biskra, BP 145, Biskra 07000, Algérie; <sup>c</sup>ICube Research Institute UMR 7357, CNRS, Université de Strasbourg, 2 Rue Boussingault, Strasbourg 67000, France

### ABSTRACT

This work presents a numerical technique for simulating non-Newtonian blood flow in human's arteries driven by an oscillating pressure gradient. The blood is considered as a thixotropic fluid and its structural properties are considered to obey Moore's thixotropic model as a constitutive equation. The equations of motion are simplified considering the flow laminar, axisymmetric and the fluid incompressible. A numerical solution is presented using finite difference method in order to compute the velocity field and wall shear stress distribution. The numerical results obtained have been validated with the analytical solution available in the literature. Furthermore, the effect of the structural properties, the average of the pressure gradient and the external acceleration on the velocity and wall shear stress distribution is investigated. These results reveal the influence of the different parameters studied on the pipe flow response of the thixotropic fluid.

### ARTICLE HISTORY

Received 31 January 2022

Accepted 1 July 2022

### KEYWORDS

Thixotropic; blood; pulsatile flow; external acceleration

### Introduction

For several decades, the study of unsteady pulsed flows has attracted many researchers due to its great interest in biomechanics. Indeed, several authors have focused their studies on understanding of blood flows in human's body arteries under various assumptions (Womersley 1955; Young 1979; MacDonald 1979; Ku 1997; Taylor et al. 1998; Müller et al. 2005; Sarifuddin et al. 2008; Caballero and Laín 2015). Early research done in the field of blood flow modeling was developed by considering blood as a Newtonian fluid. An assumption that allowed researchers, at the time, to understand unsteady blood flows. However, rheological measurements made on blood have shown that this fluid is more complex than it seems. Indeed, it is well known that its composition of plasma, red and white blood cells (RBCs and WBCs), platelets and so forth makes blood a fluid with a complex rheological behavior and classifies it as a non-Newtonian fluid exhibiting shear-thinning, yield stress and thixotropic character which adds to the complexity of the problem (Horner et al. 2019). Since, several studies have been conducted to better understand the behavior of blood, especially since the characteristics of blood

flow have a direct influence on the pathological conditions reported in the cardiovascular system (Fung 1993). The well-known shear thinning behavior, i.e. viscosity decreases with increasing shear stress, associated with blood yield stress has been widely described (Chien et al. 1970). The reversible aggregation-disaggregation process of red blood cells (RBCs) is responsible for the shear-thinning behavior of blood (Ameenuddin et al. 2019). However, blood properties are strongly time-dependent, and thus, blood is categorized as a thixotropic material. A thixotropic fluid is a fluid whose viscosity is a function not only of the applied stress but also of the previous history of motion within the fluid. The different timescales of the aggregation and disaggregation processes are at the origin of its thixotropic response. One of the prominent experimental investigations is that of Bureau et al. (1979) who systematically obtained hysteresis and step-up curves of pathological and physiological human blood. More recently, Armstrong et al. (2018) and Horner et al. (2019) conducted experiments in steady and transient rheometric flows which were capable to probe the time-dependent thixotropic response of blood. The rheological modeling of blood

should consider all the above phenomena which require the use of sophisticated rheological models to predict a realistic behavior.

The applications of non-Newtonian constitutive equations in computational fluid simulations are more complex and this is because of the way that highly nonlinear impact of non-Newtonian materials has complicated nature (Hayat et al. 2017; Khan et al. 2017; Qayyum et al. 2018; Khan et al. 2020a, 2020b; Wang et al. 2020).

The non-Newtonian models which encompass the aforementioned properties of blood can be categorized as time-independent and time-dependent models. Pulsatile flow was studied by several authors under various assumptions using different well-known time-independent constitutive models of non-Newtonian fluids such as: power law model (Chaturani and Palanisamy 1990a; Varshney et al. 2010), Casson model (Chaturani and Palanisamy 1990b), Carreau model (Akbar and Nadeem 2014), Sisko (Zaman et al. 2016) and Herschel-Bulkley model (Sankar and Hemalatha 2007; Misra and Maiti 2012). Due to their simplicity, they are the most widely used non-Newtonian blood flow models in numerical simulations. Among the articles that used these models for solving the pulsating and/or oscillatory flow of non-Newtonian fluids in cylindrical geometry, the following can be mentioned: Chaturani and Palanisamy (1990a, 1990b); Zaman et al. (2016). Others have applied these models to investigate blood flow in intracranial aneurysms (Bernsdorf and Wang 2009), stenoses (Nandakumar et al. 2015), coronary arteries (Apostolidis et al. 2016), idealized small arterial networks (Weddell et al. 2015) and heart valves (De Vita et al. 2016).

In their study, Fisher and Rossmann (2009) used four constitutive models to model the effect of non-Newtonian behavior of blood on hemodynamics, i.e. the flow characteristics in arteries. It is clear that the non-Newtonian behavior of blood has a considerable effect on the mathematical prediction of fluid flow characteristics. In their collaboration, Frolov et al. (2018) observed that non-Newtonian blood behavior had a significant effect on hemodynamic parameters. Indeed, hemorheology, i.e. the rheological characteristics of blood change as the geometry of the flow changes which had a significant effect on the flow characteristics. Nandakumar et al. (2015) investigated pulsatile blood flows in a planar channel. They reported that shear-thinning fluids predicted higher peak wall shear stress (WSS) than Newtonian fluids,

and that this difference decreased with the increase in Reynolds number and stenosis degree.

However, the above studies employ time-independent non-Newtonian models which are enabled to describe, in the transient flow conditions often encountered *in vivo*, the thixotropic properties of blood.

Time-dependent constitutive models, conversely, can further describe the thixotropic and viscoelastic behavior of blood as well as its shear-thinning behavior in the steady flow limit. Among some of the viscoelastic models for blood, include the Oldroyd-B (Phillips and Deutsch 1975) and the generalized Oldroyd-B constitutive model (Anand and Rajagopal 2004; Anand et al. 2013) on thermodynamic principles.

Whereas many studies have considered Newtonian, non-Newtonian and viscoelastic assumptions, studies regarding the time-dependent thixotropic effect exhibited by physiological systems such as blood are fewer despite its importance in blood flow modeling. However, the concept of thixotropy is well established and the related rheological experimentation has already been extensively investigated (Barnes 1997; de Souza Mendes et al. 2012; Pritchard et al. 2020) given the widespread nature of thixotropic fluid applications. Thixotropic fluids are commonly used in the construction industry (e.g. liquid cements, liquid concrete, drilling fluids), industrial applications (e.g. muds, paints) and the food industry (e.g. liquid dairy products, ketchup). Related applications include some forms of mud flows and debris flows, pasty sewage sludges and some wastewater treatment residues (Benslimane et al. 2016a, 2016b).

The detailed review paper published by Barnes (1997) presented different examples of thixotropic systems and summarized various mathematical theories and models that have been developed forward to describe the phenomenon.

The fluid exhibit a thixotropic effect when it is internal mesoscopic structure changes function of shear stress (shear rate) in ways that affect the macroscopic properties of the fluid (Croudace et al. 2017).

From a theoretical point of view, many scientific papers were published to investigate pipe flow conditions of thixotropic fluids. It is worthwhile to mention that the literature is so rich in this research area when it comes to modeling rheological characteristics of thixotropic fluids while theoretical studies that deal with the flow conditions are quite rare for such complex fluids. The review paper by Livescu (2012) summarizes the most impactful published works. In general, there are only a few studies, available in

literature, where an exact solution has been derived from general theory for pipe flow of thixotropic fluids (Popel and Enden 1993; Ahmadpour et al. 2014; Pritchard et al. 2016). Recently, Ahmadpour et al. (2014) presented an exact solution for fully developed pipe flows of thixotropic fluids obeying the Moore model. The authors investigate the effects of thixotropic parameters on the velocity field. However, there are little more studies in the literature dealing with the problem of thixotropic fluid flows from a numerical point of view. Many authors investigated pipe flow of thixotropic fluids under several time and boundary conditions. Among others, some of authors studied the basic characteristics of the fully developed uniform flow of thixotropic fluids (Derksen 2011), others investigated the pipe flow of such fluids in complex geometries (Hermany et al. 2013; Nezamidoost et al. 2013; López-Aguilar et al. 2015). However, there appears to be very few published works (Nezamidoost and Sadeghy 2012; Pritchard et al. 2020) addressing pulsatile flow of fluids having time-dependent viscosity, i.e. thixotropic fluids.

In most cases, arteries are assumed to be immobile, i.e. under normal physiological conditions. In this case, blood flow is driven by a biological pump: the heart producing a pulsatile pressure gradient in the cardiovascular system (Shit and Roy 2011). However, this excludes other important situations that occur in daily human life, in which the human body is subjected to external body acceleration, e.g. running, driving a vehicle, traveling in an airplane. A long exposure of body to such acceleration in time can lead to many health problems namely: increase in pulse rate, abdominal pain, venous pooling of blood in the extremities (Frolov et al. 2018). To this end, several researchers (Sud et al. 1983; Misra and Sahu 1988; Srivastava et al. 1994; Massoudi and Phuoc 2008) focused their studies on understanding blood flow in arteries under periodic body acceleration.

In view of the previous literature review, this topic has attracted growing interest over last decades due to its numerous applications, particularly in medicine. This motivated us to investigate the unsteady blood flow in arteries considering its time-dependent thixotropic characteristic driven by an oscillating pressure gradient in the presence of body acceleration. This is highly relevant to further exploring hemodynamic control methods in diseased arteries. Furthermore, the current study generalizes the work of Massoudi and Phuoc (2008) by taking into account the time-dependent thixotropic non-Newtonian rheology of the

streaming blood subject to periodic body acceleration. To properly capture the bulk response of the evolving microstructure within blood, thixotropy models are necessary. The most common approach to modeling thixotropy is through structural kinetic models. Moore's (1995) thixotropic model was used as a constitutive equation to model the blood behavior. Taking into account the high nonlinear behavior of the mathematical model used in the case of such materials some appropriate simplifications are necessary. Herein, the flow in artery is considered laminar, axisymmetric and one dimensional. The set of differential equations obtained are solved numerically using the well-known finite difference method to lead to stress and velocity fields. The numerical results obtained have been validated with the analytical solution (Womersley 1955) available for the Newtonian fluid. The effects of different parameters were investigated then various numerical results obtained have been presented and discussed.

### Problem formulation and mathematical model

Fundamental equations of motion for incompressible, laminar and unsteady fluid flow (mass conservation and linear momentum equations) are given in their dimensional form as follows:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (1)$$

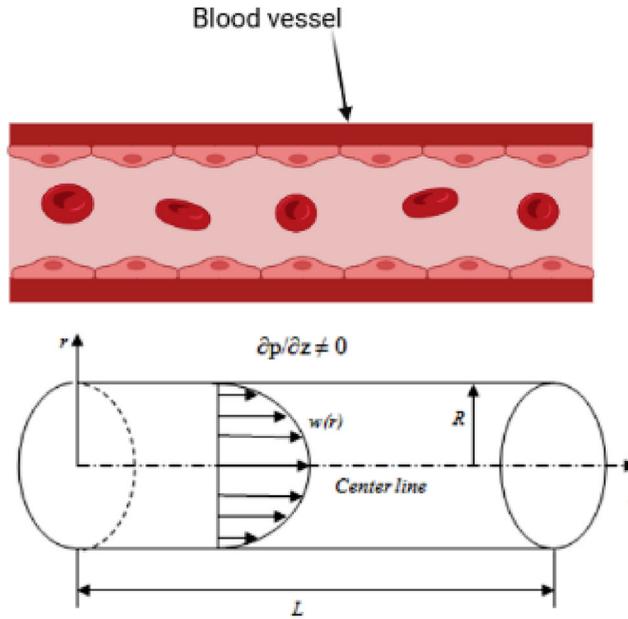
$$\underbrace{\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt}}_1 = \underbrace{\text{div}(\boldsymbol{\sigma})}_2 + \underbrace{\rho \mathbf{f}}_3 \quad (2)$$

The different terms correspond to the inertial forces (1), summation of hydrostatic and viscous forces (2) and the external forces applied to the fluid (3).  $\rho$  is the density of the fluid,  $\mathbf{u} = (u \ v \ w)$  is the velocity vector,  $\boldsymbol{\sigma}$  is the Cauchy stress tensor,  $\mathbf{f}$  is the body force vector,  $\partial/\partial t$  the partial derivative with respect to time and  $d/dt$  the particulate or material time derivative, given by:

$$\frac{d(\cdot)}{dt} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)(\cdot) \quad (3)$$

Due to the complexity of blood behaviour, generally it can be considered as a complex fluid flow and many constitutive relations are used to describe the non-Newtonian behaviour. Thus, for an ideal thixotropic fluid as considered the Cauchy stress tensor is formulated as:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \dots \quad (4)$$



**Figure 1.** Schematic view of blood vessel and its physical domain.

here  $p$  is the hydrostatic pressure,  $I$  is the identity tensor and  $\tau$  is the extra stress tensor which can be defined as follows (Nezamidoost et al. 2013):

$$\tau = \mu(A_1, \lambda)A_1 \quad (5)$$

where  $A_1$  is the first Rivlin–Ericksen tensor given by (Nezamidoost et al. 2013):

$$A_1 = \nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u} \quad (6)$$

and  $\mu$  the apparent viscosity given by (Nezamidoost et al. 2013):

$$\mu(A_1, \lambda) = \mu_\infty + (\mu_0 - \mu_\infty)\lambda \quad (7)$$

$\lambda(r, t)$  is the structural parameter which describes the local state of the fluid microstructure,  $\mu_0$  and  $\mu_\infty$  described the asymptotic viscosities, i.e. the maximum and the minimum viscosities, respectively. Note that for  $\mu_0 = \mu_\infty$  the apparent viscosity is reduced to that of the Newtonian fluid model.

The structure parameter evolves according to a buildup/breakdown function so that (Nezamidoost et al. 2013):

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda}{dt} &= \frac{\partial \lambda}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \lambda = \kappa_a (1 - \lambda) - \kappa_b \lambda |\dot{\gamma}|; \\ \dot{\gamma} &= \left[ \frac{1}{2} \text{tr}(A_1^2) \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (8a, b)$$

where  $\kappa_a$  and  $\kappa_b$  are material constant so that  $\kappa_a \equiv [1/s]$  describes the rate of Brownian recovery and  $\kappa_b \equiv [-]$  represents the destruction parameter related to structure sensitivity to applied shear-rate. The so-called shear rate  $\dot{\gamma} \equiv [1/s]$  is the second invariant of  $A_1$ . In general,  $\lambda$  lies within the range  $0 \leq \lambda \leq 1$ ,

where  $\lambda = 1$  denotes undisturbed fully recovered microstructure and  $\lambda = 0$  corresponds to a completely breakdown microstructure.

The investigated problem with its boundary conditions is illustrated schematically in Figure 1. The physical model consists of pulsatile thixotropic fluid flow in a rectilinear cylindrical pipe of radius  $R$  and length  $L$ , with rigid and impermeable walls. The fluid is considered homogeneous, isotropic and incompressible, with a constant density  $\rho$  subjected to a pressure gradient ( $\partial p / \partial z$ ) due to the pumping action of the heart which generates the axial fluid motion and can models the flow. One must include a local acceleration term in the momentum equation to take in account of this effect.

The velocity vector for a laminar flow in the duct  $(r, \theta, z)$  can be simplified in view of the above assumptions as follows:

$$\mathbf{u} = (0, 0, w(r, t)) \quad (9)$$

where  $w(r, t)$  is the axial velocity (blood fluid velocity). With the taken velocity field continuity equation is identically satisfied. The  $z$ -component of the momentum equation obtained by substituting the constitutive Eq. (5) into Eq. (4), then in the global Eq. (2) of motion takes the form:

$$\rho \frac{\partial w}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}) + \rho G(t) \quad (10)$$

As previously mentioned, in the cardiovascular system, the blood motion has a pulsatile nature due to the local pressure gradient along the longitudinal direction of artery; therefore, it can be assumed (Womersley 1955):

$$-\frac{\partial p}{\partial z} = P_0 + P_1 \cos(\omega_p t) \tag{11}$$

where  $-\partial p/\partial z$  is the pressure gradient,  $P_0$  is the average of the pressure gradient,  $P_1$  is the amplitude (diastolic) of the pressure gradient fluctuation,  $\omega_p = 2\pi f_p$  is the angular frequency of the imposed pressure gradient and  $f_p$  is the pulse rate frequency.

Further, the external acceleration or the body acceleration is given following Massoudi and Phuoc (2008):

$$G(t) = A_g \cos(\omega_b t + \varphi) \tag{12}$$

where  $A_g$ ,  $\omega_b = 2\pi f_b$  and  $f_b$  are the amplitude, the angular frequency and the frequency, respectively, while  $\varphi$  is the lead angle.

Substituting Eqs. (11) and (12) into Eq. (10), and substituting Eq. (7) in Eq. (5), and then, in Eq. (10) the nondimensional form of the The  $z$ -component of the momentum equation can be written as follows:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial w}{\partial t} &= P_0 \left( 1 + \frac{P_1}{P_0} \cos(\omega_p t) \right) + A_g \cos(\omega_b t + \varphi) \\ &+ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}) \end{aligned} \tag{13}$$

Then substituting Eq. (7) in Eq. (5) we obtain:

$$\tau_{rz} = \mu_\infty \left( 1 + \left( \frac{\mu_0}{\mu_\infty} - 1 \right) \lambda \right) \frac{\partial w}{\partial r} \tag{14}$$

The above equation of motion Eq. (13) is coupled with the time-dependent structural parameter equation (see Eq. (8a, b)):

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = \kappa_a (1 - \lambda) - \kappa_b \lambda \left| \frac{\partial w}{\partial r} \right| \tag{15}$$

The relevant initial and boundary conditions associated to the physical problem can be summarized as follows:

Initial condition: at  $t=0$  the fluid is assumed to be at rest:

$$w(r, 0) = 0 \quad \lambda(r, 0) = 1 \tag{16a}$$

Boundary conditions:

On the duct wall:

$$w(R, t) = 0 \text{ at } r = R \text{ (No - slip condition)} \tag{16b}$$

On the centerline ( $z$ -axis):

$$\begin{aligned} \frac{\partial w(0, t)}{\partial r} &= 0 \quad \frac{\partial \lambda(0, t)}{\partial r} = 0 \text{ at} \\ r &= 0 \text{ (Symmetry condition)} \end{aligned} \tag{16c}$$

When adjusting some parameters, i.e.  $\mu_0 = \mu_\infty$  and  $A_g = 0$ , Eq. (13) reduces to the equation of motion of

Newtonian fluid and an analytical solution is given in literature by Womersley (1955):

$$w(r, t) = \Re e \left\{ -i \frac{P_0}{\rho \omega_p} \exp(i\omega t) \left( 1 - \frac{J_0 \left( \frac{r}{R} \xi \frac{3}{t^2} \right)}{J_0 \left( \xi \frac{3}{t^2} \right)} \right) \right\} \tag{17}$$

where  $i$  is the imaginary unit,  $J_0$  is the Bessel function of the first kind, zero order and complex argument and  $\xi = R \sqrt{\frac{\rho \omega}{\mu}}$  is the adimensionnal Womersley number.

Considering the reduced variables based on the main characteristics of the problem such as the radius, the velocity, the viscosity and the angular frequency:

$$\hat{r} = \frac{r}{R} \quad \hat{w} = \frac{w}{U} \quad \hat{t} = \frac{\omega_p}{2\pi} t \quad \hat{\tau}_{rz} = \frac{R}{\mu_\infty U} \tau_{rz} \tag{18}$$

The dimension form of the governing Eq. (13) is cast in its dimensionless form as follows:

$$\begin{aligned} \gamma \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{t}} &= B_1 \left( 1 + e \cos(2\pi \hat{t}) \right) + B_2 \cos(\omega_r \hat{t} + \varphi) \\ &+ \frac{\partial}{\partial \hat{r}} (\hat{r} \hat{\tau}_{rz}) \end{aligned} \tag{19}$$

with:

$$\hat{\tau}_{rz} = (1 + (\mu_r - 1)\lambda) \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{r}} \tag{20}$$

and:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \hat{t}} = K_a (1 - \lambda) - K_b \lambda \left| \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{r}} \right| \tag{21}$$

In the above equations the dimensionless constants are given by:

$$\begin{aligned} U &= \frac{P_0 R^2}{8\mu_\infty} \quad B_1 = \frac{P_0 R^2}{\mu_\infty U} \quad B_2 = \frac{\rho A_g R^2}{\mu_\infty U} \quad \gamma = \frac{\rho R^2 \omega_p}{\mu_\infty 2\pi} \\ e &= \frac{P_1}{P_0} \quad \omega_r = \frac{\omega_b}{\omega_p} \quad \mu_r = \frac{\mu_0}{\mu_\infty} \quad K_a = \frac{2\pi \kappa_a}{\omega_p} \quad K_b = \frac{2\pi \kappa_b U}{\omega_p R} \end{aligned} \tag{22}$$

The boundary conditions (Eqs. (16b) and (16c)) as well as the initial condition (Eq. (16a)) are also rewritten according to the reduced variables previously defined (Eq. (18)):

Initial condition: at  $t=0$  the fluid is assumed to be at rest:

$$\hat{w}(\hat{r}, 0) = 0 \quad \lambda(\hat{r}, 0) = 1 \tag{23a}$$

Boundary conditions:

$$\hat{w}(1, \hat{t}) = 0 \text{ at } \hat{r} = 1 \text{ (No - slip condition)} \tag{23b}$$

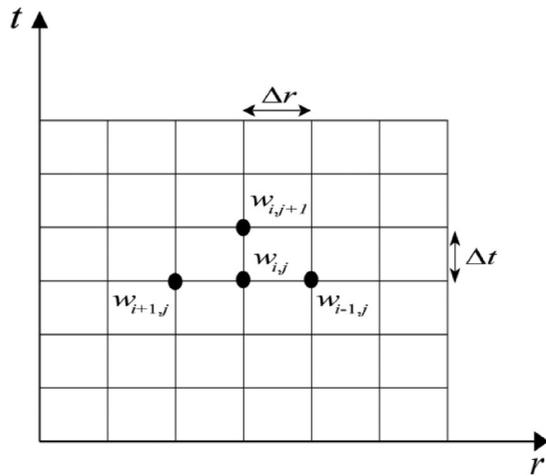


Figure 2. Finite difference method discretization grid.

$$\frac{\partial \hat{w}(0, \hat{t})}{\partial \hat{r}} = 0 \quad \frac{\partial \lambda(0, \hat{t})}{\partial \hat{r}} = 0 \text{ at } \hat{r} = 0 \text{ (Symmetry condition)} \quad (23c)$$

### Numerical solution

In this article, the standard finite difference method (FDM) is used to numerically solve the above differential equations with the corresponding initial and boundary conditions. Equation (19) subject to the boundary and initial conditions given in Eqs. (23a), (23b) and (23c) is integrated numerically using the finite difference method. The spatial derivative of the first and the second order are approximated with the forward and the central differential scheme, respectively while the time derivative is approximated with the forward differential scheme (Figure 2). The implementation of the numerical method was made using MATLAB® software and all simulations are computed with this program.

The use of the finite difference method requires the meshing of the physical system with choosing judiciously steps for space and time  $\Delta r$  and  $\Delta t$ , respectively, as well as the use of discrete variables at different nodes. This is achieved by replacing partial derivatives with finite differential schemes.

So, let us denote (after dropping bars)  $w(r_i, t_i) = w_i^j$  and approximate various partial derivatives as:

$$\frac{\partial w(r, t)}{\partial r} \cong \frac{w_{i+1}^j - w_i^j}{\Delta r} \quad (24)$$

$$\frac{\partial^2 w(r, t)}{\partial r^2} \cong \frac{w_{i+1}^j - 2w_i^j + w_{i-1}^j}{\Delta r^2} \quad (25)$$

$$\frac{\partial w(r, t)}{\partial t} \cong \frac{w_i^{j+1} - w_i^j}{\Delta t} \quad (26)$$

Using Eqs. (24)–(26), Eqs. (19)–(21) may be transformed into the following differential equations:

$$w_i^{j+1} = w_i^j + \frac{\Delta t}{\gamma} \left[ B_1 (1 + e \cos(2\pi t^j)) + B_2 \cos(\omega_r t^j + \varphi) + \frac{1}{r_i} (\tau_{rz})_i^j + \left( \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} \right)_i^j \right] \quad (27)$$

$$(\tau_{rz})_i^j = (1 + (\mu_r - 1)\lambda_i^j) \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)_i^j \quad (28)$$

$$\lambda_i^{j+1} = \lambda_i^j + \Delta t \left( K_a (1 - \lambda_i^j) - K_b \lambda_i^j \left( \left| \frac{\partial w}{\partial r} \right| \right)_i^j \right) \quad (29)$$

Initial and boundary conditions can also be discretized as follows:

$$w_i^1 = 0 \quad \lambda_i^1 = 1 \quad (30a)$$

$$w_{N+1}^j = 0 \quad (30b)$$

$$w_1^j = w_2^j \quad \lambda_1^j = \lambda_2^j \quad (30c)$$

In the previous equations (Eqs. (27)–(30)), the radius length and the time are discretized using these formulas:

$$r_i = (i - 1)\Delta r, \quad (i = 1, 2, \dots, N + 1)$$

$$t_j = (j - 1)\Delta t, \quad (j = 1, 2, \dots)$$

with  $\Delta r$  and  $\Delta t$  are the increments in space and time, respectively. We have considered the following step size  $\Delta r = 0.01$  and the time step  $\Delta t = 0.0001$ .

### Results and discussions

#### Verification: grid independency and code validation

In order to examine the effect of the grid on the numerical study, the numerical code was examined for  $A_g = 0$ ,  $\mu_r = 1$  and  $\omega_r = 1$ . The velocity profiles were calculated using four different computational grids namely:  $N = 20, 40, 50$  and  $60$ . The results are presented in Figure 3 and it is apparent that a refinement of the grid from  $N = 50$  does not have a meaningful effect on the results in terms of axial velocity.

To verify the results obtained by the finite difference scheme used, some parameters have been adjusted so that Eq. (13) is reduced to the axial projection of the well-known Navier–Stokes equation, i.e. equation of motion of a Newtonian fluid where an analytical solution can be found in literature (Womersley 1955). In the case of a pulsating flow of a Newtonian fluid, the velocity profiles as well as the centerline velocity have been compared to the analytical solution (Eq. (17)) by fixing certain parameters

namely:  $A_g = 0$  and  $\mu_0/\mu_\infty = 1$  to study the accuracy of a numerical scheme.

In Figure 4, the current results are compared with those obtained by (Womersley 1955). Figure 4(a,b) show a comparison between numerical and analytical dimensionless velocity profiles vs. the dimensionless radius and dimensionless centerline velocity vs. the dimensionless time, respectively. It reveals that the results obtained numerically for pulsed flow of Newtonian fluid in artery are in good agreement with Womersley’s 1995 results. Thus, the accuracy of the finite difference scheme is verified by comparing the numerical results with the analytical solution.

**Current results**

Hemodynamics is an area of science concerned with the dynamics of blood flow and explains the physical laws that govern the flow of blood in the blood vessels

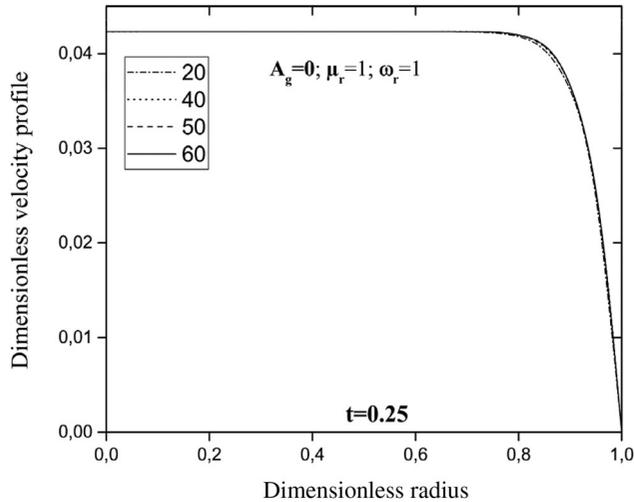
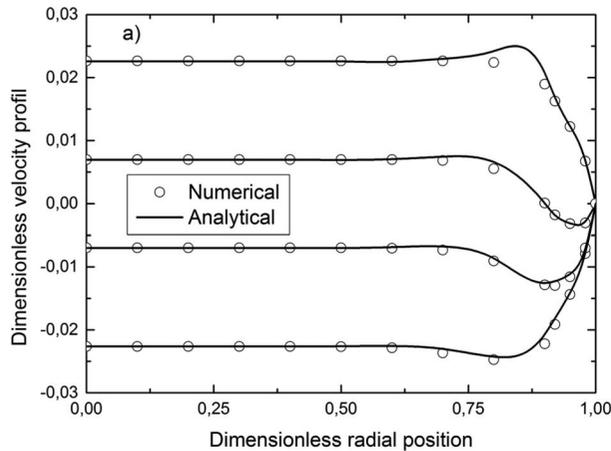


Figure 3. Velocity profiles for different grids:  $N = 20, 40, 50$  and  $60$ .



through which the flow occurs. Simulation of blood flow in the arterial network system will provide a better understanding of the physiology of human body. Hence, detailed knowledge of blood flow is a fundamental key concept in the understanding of cardiovascular system and in the detection of arterial diseases. However, the effects of thixotropy in terms of the viscosity ratio  $\mu_r$ , external acceleration characterized by the parameter  $A_g$ , the pressure ratio  $e$  and the frequency  $f_b$  on the flow variables are investigated. The corresponding flow variables namely: velocity and wall shear stress have been analyzed and discussed.

The numerical solutions based on finite difference method for an axisymmetric flow of thixotropic blood in artery driven by an oscillating pressure gradient in the presence of externally applied acceleration is given. The numerical values of different system parameters considered in the present work are given in Table 1.

**Wall shear stress**

The vascular endothelium is exposed to a hemodynamic stress generated by the blood flow known as the wall shear stress (WSS). Wall shear stress is

Table 1. Governing parameters (Massoudi and Phuoc 2008; Nezamidoost et al. 2013).

Parameters	Symbol (unit)	Values
Radius	$R$ (m)	0.015
Average pressure gradient	$P_0$ (Pa $m^{-1}$ )	1000–6000
Amplitude of body acceleration	$A_g$ (m $s^{-2}$ )	0, 2, 5 and 10
Minimum viscosity	$\mu_\infty$ (Pa s)	0.04
Maximum viscosity	$\mu_0$ (Pa s)	0.04, 0.16 and 0.32
Density	$\rho$ (kg $m^{-3}$ )	1000
Frequency of pressure gradient	$f_p$ (Hz)	1
Frequency of body acceleration	$f_b$ (Hz)	0.5, 1 and 1.5
Time steps	$\Delta t$	0.0001
Space steps	$\Delta r$	0.01
Thixotropic ratio	$K_b / K_a$	1, 2, 6

Note that the constant can be adjusted in various ways to reproduce various conditions.

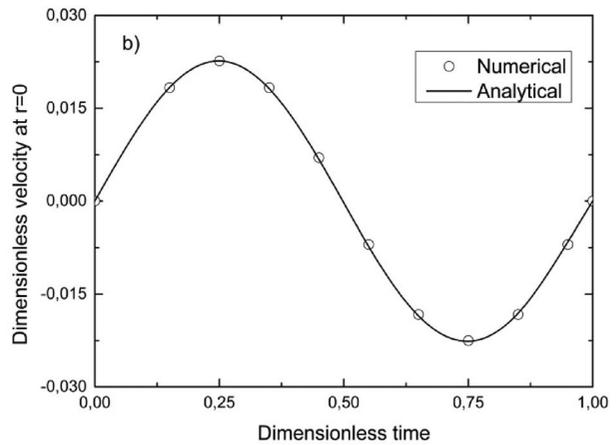
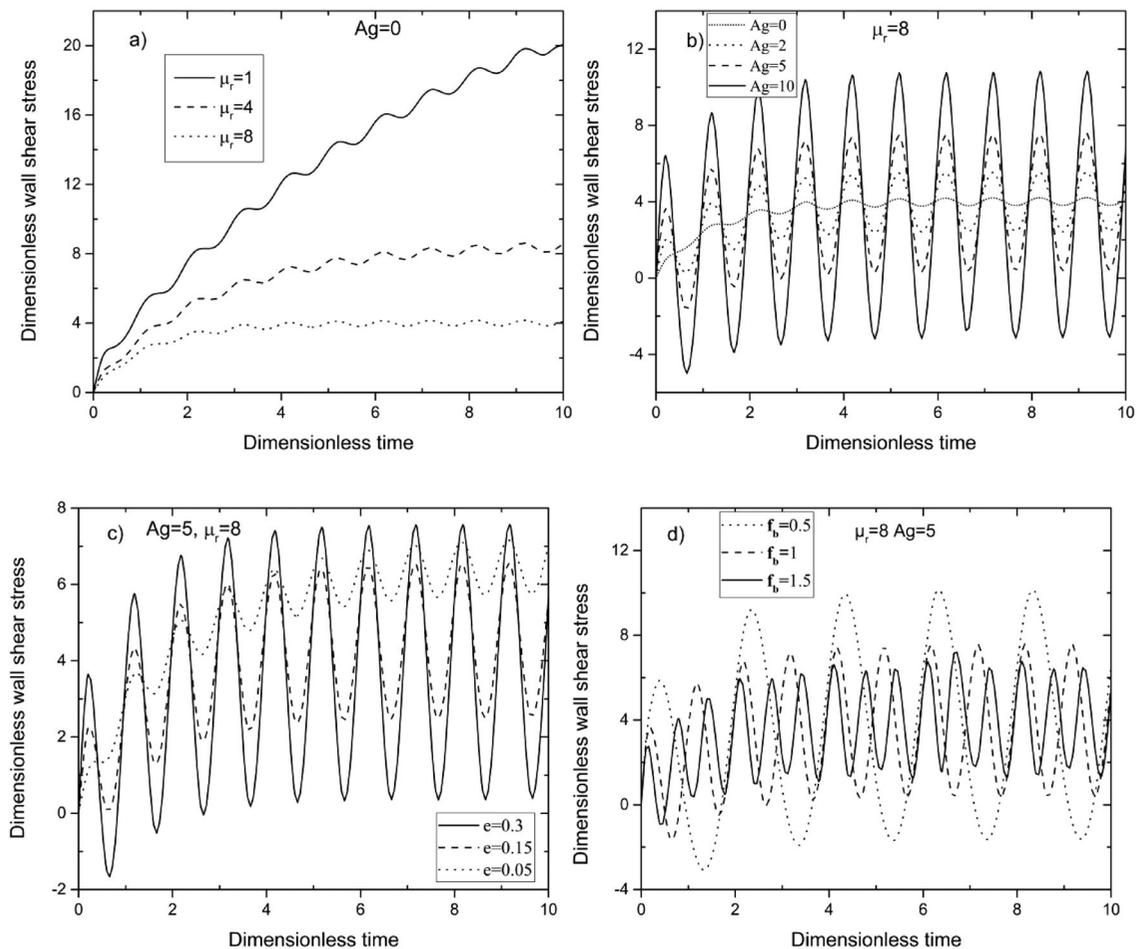


Figure 4. Comparison between finite difference scheme and Ref. (Womersley 1955): (a) Dimensionless velocity profiles and (b) Dimensionless centerline velocity.



**Figure 5.** Dimensionless wall shear stress as a function of the dimensionless time: (a) in absence of external acceleration  $A_g = 0$  for different viscosity ratios  $\mu_r = 1, 4$  and  $8$ , (b) for  $\mu_r = 8$  and for different external acceleration  $A_g = 0, 2, 5$  and  $10$ , (c) for  $\mu_r = 8$ ,  $A_g = 5$  and for different pressure ratios  $e = 0.05, 0.15$  and  $0.3$ , (d) for  $\mu_r = 8$ ,  $A_g = 5$  and for different frequencies  $f_b = 0.5, 1$  and  $1.5$ .

defined as the drag exerted by flowing blood on the vessel and it depends on blood viscosity and the blood flow velocity profile. This stress is thought to play an important role in adaptational processes of the vascular wall by inducing the production by endothelial cells of substances such as nitric-oxide, prostacyclin and endothelin (Samijo et al. 1998). However, the study of the WSS remains of vital interest. Indeed, high shear stress promotes endothelial cell survival and quiescence, alignment in the direction of flow and secretion of substances that promote vasodilation and anticoagulation. Low shear stress promotes endothelial proliferation and apoptosis, shape change and secretion of substances that promote vasoconstriction, coagulation and platelet aggregation (Paszkwiaik and Dardik 2003).

Since that a change in wall shear stress can be implicated in the pathogenesis of atherosclerosis, neointimal hyperplasia and aneurysmal disease, the understanding of its evolution due to different

parameters may provide insight to prevent vascular disease.

Figure 5(a–d) show the dimensionless WSS function of dimensionless time where the effects of the viscosity ratio of the fluid ( $\mu_r$ ), the external acceleration ( $A_g$ ), the pressure ratio ( $e$ ) and the frequency ( $f_b$ ) were investigated. It can be seen from these figures that the wall shear stress is periodic in time due to pulsatile nature of the blood flow.

Figure 5(a) shows dimensionless WSS function of dimensionless time for various values of viscosity ratio ( $\mu_r = 1, 4$  and  $8$ ) in absence of external acceleration ( $A_g = 0$ ). It has been observed that for a pure pulsatile flow ( $A_g = 0$ ) the WSS fluctuates and gradually increases where the magnitude of the corresponding shear stress remains positive over time. Figure 5(a) reveals that an increases in viscosity ratio ( $\mu_r$ ) leads to a decrease in magnitude of WSS in the pipe. The comparison of the blood flow considered as a non-Newtonian fluid (dot and dashed lines) with

that of blood considered as a Newtonian fluid (solid line) shows the effect of the non-Newtonian character of blood which is responsible for the considerable decrease in WSS intensity. Indeed, increases in viscosity lead to increases in resistance of the flow. As resistance increases the difference in pressure which influences velocity decreases and thus WSS decreases. We observed that under the physiological conditions considered in the current work, the blood viscosity properties do not affect the temporal distribution pattern of the WSS qualitatively. However, the blood viscosity properties have considerable effect on the magnitude of the WSS.

Figure 5(b) shows dimensionless shear stress function of dimensionless time for various values of external acceleration ( $A_g = 0, 2, 5$  and  $10$ ) for a fixed value of viscosity ratio ( $\mu_r = 8$ ). It has been observed that the wall shear stress fluctuates between positive and negative values over time. Figure 5(b) reveals that the magnitude of the WSS increases when the external acceleration ( $A_g$ ) increases. It can be clearly seen that the acceleration increases the amplitude of the oscillation of WSS significantly produced by the pulsatile pressure gradient while the effect of acceleration on the average of WSS remains constant. These results are in agreement with previous results (Zaman et al. 2016).

Figure 5(c) shows dimensionless WSS function of dimensionless time for various values of pressure ratio ( $e = 0.05, 0.15$  and  $0.3$ ) for a fixed values of viscosity ratio ( $\mu_r = 8$ ) and external acceleration ( $A_g = 5$ ). Figure 5(c) reveals that the increase of pressure ratio ( $e$ ) increases the amplitude of the oscillation of WSS significantly while the increase of pressure ratio leads to a decrease on the average blood wall shear stress. As seen above the present results are in agreement with previous results (Zaman et al. 2016).

Figure 5(d) shows dimensionless WSS function of dimensionless time for various values of frequency ( $f_b = 0.5, 1$  and  $1.5$ ) for a fixed values of viscosity ratio ( $\mu_r = 8$ ) and external acceleration ( $A_g = 5$ ). Figure 5(d) reveals that the magnitude of the wall shear stress increases when the of frequency ( $f_b$ ) decreases.

### Centerline velocity

It has been known that variations in hemodynamic characteristics are associated with variation of hemorheological properties. Therefore, the relationship between the hemorheological and hemodynamic properties is of great importance (Yeom et al. 2014).

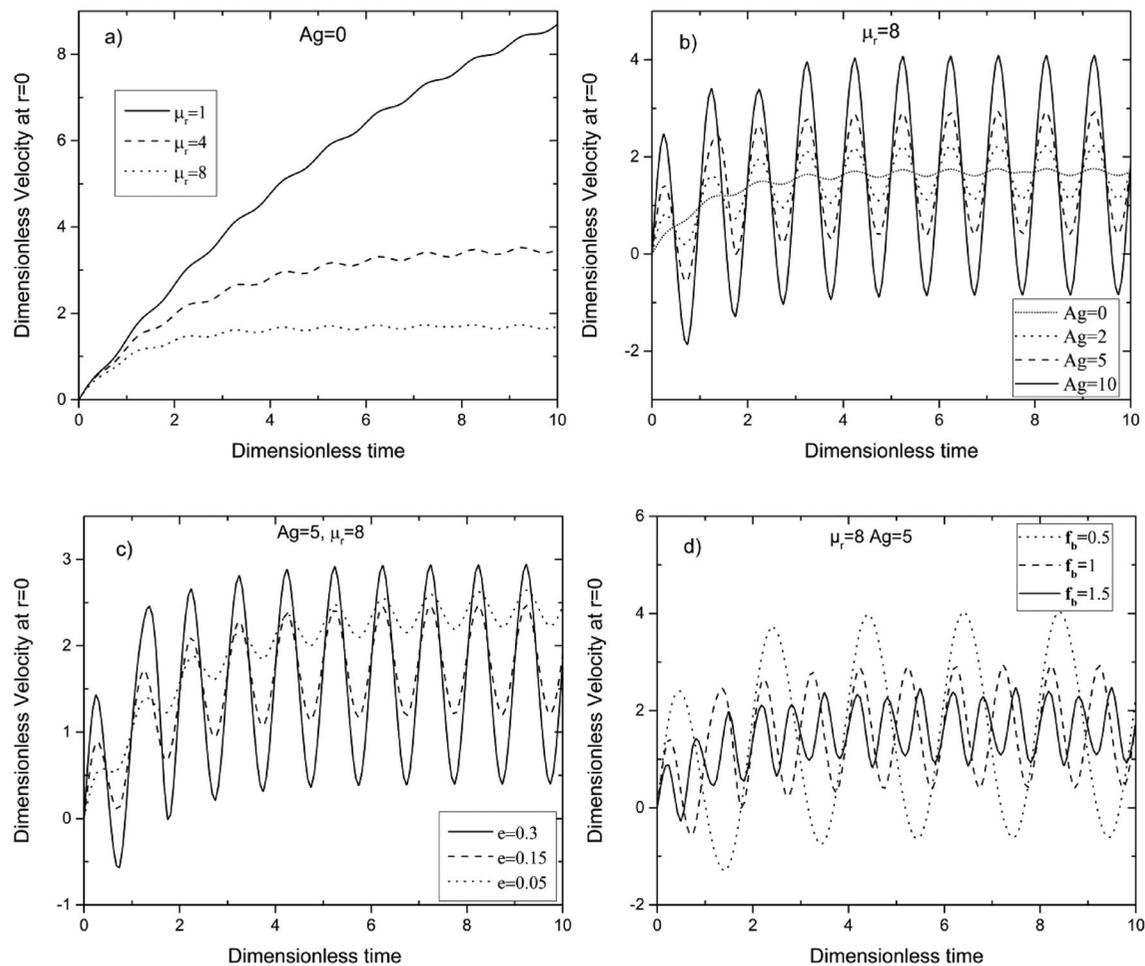
To investigate blood flow velocity, Figure 6(a–d) show the dimensionless centerline velocity ( $r=0$ )

function of dimensionless time where the effects of the viscosity ratio of the fluid ( $\mu_r$ ), the external acceleration ( $A_g$ ), the pressure ratio ( $e$ ) and frequency ( $f_b$ ) were investigated. It can be seen from these figures that the centerline velocity is periodic in time. Indeed, the important feature of the arterial blood flow is its pulsatile nature. The pulsatile nature of blood flow exposes the endothelial cells to two distinct shear stimuli during the cardiac cycle: a large rate of change in shear at the onset of flow (velocity acceleration), followed by a steady state.

Figure 6(a) shows dimensionless centerline velocity ( $r=0$ ) function of dimensionless time for various values of viscosity ratio ( $\mu_r = 1, 4$  and  $8$ ) in absence of external acceleration ( $A_g = 0$ ). It has been observed that for a pure pulsatile flow ( $A_g = 0$ ) the centerline velocity fluctuates and gradually increases where the magnitude of the corresponding velocity remains positive over time. The effect of viscosity ratio ( $\mu_r$ ) is evident. Indeed, increases in viscosity ratio ( $\mu_r$ ) leads to a decrease in magnitude of velocity at the center of the artery. The comparison of the blood flow considered as a non-Newtonian fluid (dot and dashed lines) with that of blood considered as a Newtonian fluid (solid line) visibly shows the effect of the non-Newtonian character of blood which is responsible for the considerable decrease in velocity magnitude. Indeed, increases in viscosity lead to increases in resistance of the flow while the difference in pressure which influences velocity decreases, which in turn reduces flow.

Figure 6(b) shows dimensionless centerline velocity ( $r=0$ ) function of dimensionless time for various values of external acceleration ( $A_g = 0, 2, 5$  and  $10$ ) for a fixed value of viscosity ratio ( $\mu_r = 8$ ). It has been observed that the velocity fluctuates between positive and negative values over time. Figure 6(b) reveals that the magnitude of the velocity increases when the external acceleration ( $A_g$ ) increases. It is worthwhile to mention that the acceleration increases the amplitude of the oscillation of blood flow significantly while the effect of acceleration on the average blood velocity was unchanged. As expected, the body acceleration accelerates the flow of blood. These results are in agreement with previous results (Szabó and Halász 2017).

Figure 6(c) shows dimensionless centerline velocity ( $r=0$ ) function of dimensionless time for various values of pressure ratio ( $e = 0.05, 0.15$  and  $0.3$ ) for a fixed values of viscosity ratio ( $\mu_r = 8$ ) and external acceleration ( $A_g = 5$ ). Figure 6(c) reveals that the increase of pressure ratio ( $e$ ) increases the amplitude



**Figure 6.** Dimensionless centerline velocity ( $r=0$ ) as a function of the dimensionless time: (a) in absence of external acceleration  $A_g=0$  for different viscosity ratios  $\mu_r=1, 4$  and  $8$ , (b) for  $\mu_r=8$  and for different external acceleration  $A_g=0, 2, 5$  and  $10$ , (c) for  $\mu_r=8, A_g=5$  and for different pressure ratios  $e=0.05, 0.15$  and  $0.3$ , for  $\mu_r=8, A_g=5$  and for different frequencies  $f_b=0.5, 1$  and  $1.5$ .

of the oscillation of blood flow significantly while the increase of pressure ratio leads to a decrease on the average blood velocity.

Figure 6(d) shows dimensionless centerline velocity ( $r=0$ ) function of dimensionless time for various values of frequency ( $f_b=0.5, 1$  and  $1.5$ ) for a fixed values of viscosity ratio ( $\mu_r=8$ ) and external acceleration ( $A_g=5$ ). Figure 6(d) reveals that the magnitude of the velocity increases when the frequency ( $f_b$ ) decreases while the effect of frequency on the average blood velocity was unchanged.

### Velocity profiles

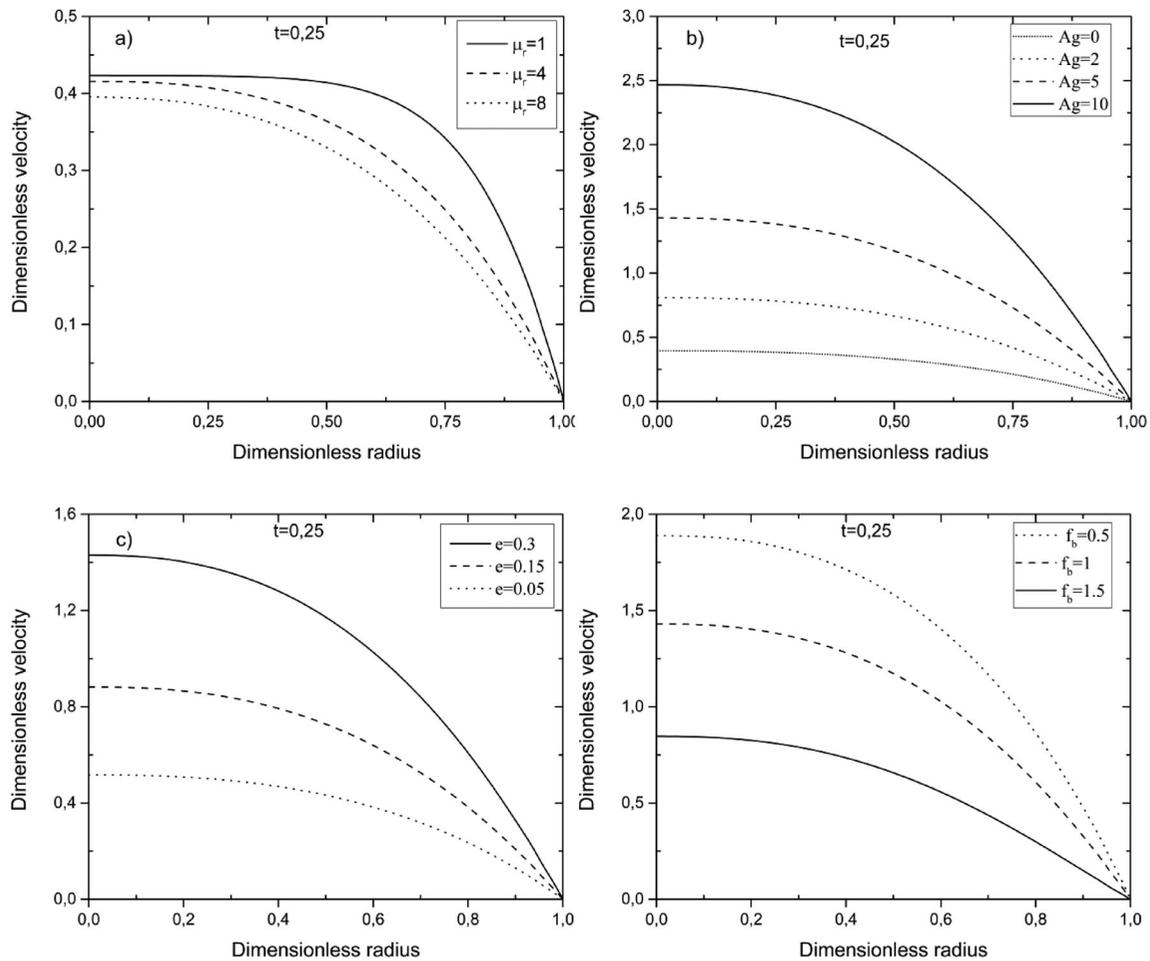
Normal blood flow can be thought of as simple laminar flow in most instances. Laminar flow is characterized by a gradient of flow lines representing different blood velocities at different locations in the tube. The reason for these differences in blood flow velocity is wall shear stress. When the blood flows through artery, friction exists between the blood and

the wall of the vessel. This friction decreases the velocity of the blood closest to the wall (Pollock et al. 2021).

In Figure 7(a–d) dimensionless velocity profiles function of dimensionless radial position are shown where the effects of the viscosity ratio of the fluid ( $\mu_r$ ), the external acceleration ( $A_g$ ) and the pressure ratio ( $e$ ) were studied.

Figure 7(a) shows dimensionless velocity profiles function of dimensionless radial position for different values of viscosity ratio ( $\mu_r=1, 4$  and  $8$ ) in absence of external acceleration ( $A_g=0$ ). The velocity amplitude decreases with an increase in viscosity ratio. This result corresponds to the intuitive expectation. The dimensionless velocity profiles are nearly parabolic in absence of external acceleration.

Figure 7(b) shows dimensionless velocity profiles function of dimensionless radial position for various values of external acceleration ( $A_g=0, 2, 5$  and  $10$ ) for a viscosity ratio ( $\mu_r=8$ ). It has been generally



**Figure 7.** Dimensionless velocity profiles as a function of the dimensionless radial position: (a) in absence of external acceleration  $A_g = 0$  at  $t = 0.25$  and for different viscosity ratios  $\mu_r = 1, 4$  and  $8$ , (b) for  $\mu_r = 4$ ,  $t = 0.25$  and for different external acceleration  $A_g = 0, 2, 5$  and  $10$ , (c) for  $\mu_r = 4$ ,  $A_g = 5$ ,  $t = 0.25$  and for different pressure ratios  $e = 0.05, 0.15$  and  $0.3$ , (d) for  $\mu_r = 4$ ,  $A_g = 5$ ,  $t = 0.25$  and for different frequency  $f_b = 0.5, 1$  and  $1.5$ .

observed that body acceleration increases the magnitude of velocity.

Figure 7(c) shows dimensionless velocity profiles function of dimensionless radial position for various values of pressure ratio ( $e = 0.05, 0.15$  and  $0.3$ ) for a fixed values of viscosity ratio ( $\mu_r = 8$ ) and external acceleration ( $A_g = 5$ ). Figure 7(c) reveals that the magnitude of the velocity profiles increases when the pressure ratio ( $e$ ) increases.

Figure 7(d) shows dimensionless velocity profiles function of dimensionless radial position for various values of frequencies ( $f_b = 0.5, 1$  and  $1.5$ ) for a fixed values of viscosity ratio ( $\mu_r = 8$ ) and external acceleration ( $A_g = 5$ ). Figure 7(d) reveals that the magnitude of the velocity profiles decreases when frequency increases.

## Conclusion

A numerical formulation has been developed to analyze a thixotropic blood vessel flow driven by an

oscillating pressure gradient under external body acceleration. Finite difference method is used to study the structural properties of the blood which are considered to obey Moore's thixotropic time-dependent model as a constitutive equation. It is found that the velocity field and WSS, the most decisive factors in hemodynamics, are significantly influenced by the viscosity ratio, pressure ratio, external acceleration and frequency which can be summarized in following point:

- The non-Newtonian nature of blood in terms viscosity ratio ( $\mu_r$ ): The increase in viscosity ration leads to a decrease in mean values of velocity and WSS magnitudes. The computational results demonstrated that variations in hemorheological properties alter flow resistance and wall shear stress in blood vessels which are the most decisive factors, among the local biomechanical factors. Therefore, detailed understanding of the relationship between

the hemorheological and hemodynamic properties is of great importance. Indeed, a detailed hemodynamic evaluation of flow and the WSS distribution may give additional insight to understanding and prediction of future cardiovascular diseases progression, and treatment planning. The non-Newtonian behavior of the blood is an important factor and should always be taken in consideration in the study of blood flow in arteries.

- The body acceleration in terms of  $A_g$ : The increase in body acceleration leads to an increases in velocity and wall shear stress oscillation amplitude while the effect of acceleration on the average of velocity and wall shear stress remains constant. The results obtained here may be related to hypertension. Under normal circumstances/conditions, the magnitude of the pressure gradient maintains sufficient blood flow in the arteries for normal organ function. However, in situations where the human body is subjected to periodic external acceleration, the results are quite different. In such a situation, the superimposed periodic oscillation due to body acceleration increases the velocity amplitude produced by the pulsatile pressure gradient. This increase in velocity amplitude can lead to hypertension, nausea, loss of vision and headaches.
- The pressure ratio in terms of ( $e$ ): The increase in pressure ratio leads to an increases in velocity and wall shear stress oscillation amplitude while the increase of pressure ratio leads to a decrease on the average blood velocity and wall shear stress.
- The increase in frequency ratio in terms of ( $\omega_r$ ): The increase in frequency ratio leads to a decrease on the blood velocity and wall shear stress.

However, the present study can be extended to artery stenosis, which refers to the narrowing of the artery, a dangerous common and serious disease caused by a buildup of plaque (atherosclerosis) inside the artery wall that reduces blood flow.

### Disclosure statement

No potential conflict of interest was reported by the authors.

### Funding

We thank the editor and anonymous reviewers for their careful reading of our manuscript and their many insightful comments and suggestions, which helped us to improve the manuscript. The authors thank the General Directorate

of Scientific Research and Technological Development (DGRSDT/MESRS-Algeria) for their financial support.

### ORCID

Adel Benchabane  <http://orcid.org/0000-0002-6474-8494>

### References

- Ahmadpour A, Sadeghy K, Maddah-Sadatieh S-R. 2014. The effect of a variable plastic viscosity on the restart problem of pipelines filled with gelled waxy crude oils. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 205:16–27.
- Akbar NS, Nadeem S. 2014. Carreau fluid model for blood flow through a tapered artery with a stenosis. *Ain Shams Eng J.* 5(4):1307–1316.
- Ameenuddin M, Anand M, Massoudi M. 2019. Effects of shear-dependent viscosity and hematocrit on blood flow. *Appl Math Comput.* 356:299–311.
- Anand M, Kwack J, Masud A. 2013. A new generalized Oldroyd-B model for blood flow in complex geometries. *Int J Eng Sci.* 72:78–88.
- Anand M, Rajagopal KR. 2004. A shear-thinning viscoelastic fluid model for describing the flow of blood. *Int J Cardiovasc Med Sci.* 4(2):59–68.
- Apostolidis A, Moyer A, Beris A. 2016. Non-Newtonian effects in simulations of coronary arterial blood flow. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 233:155–165.
- Armstrong M, Horner J, Clark M, Deegan M, Hill T, Keith C, Mooradian L. 2018. Evaluating rheological models for human blood using steady state, transient, and oscillatory shear predictions. *Rheol Acta.* 57(11):705–728.
- Barnes HA. 1997. Thixotropy - a review. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 70(1–2):1–33.
- Benslimane A, Bahlouli IM, Bekkour K, Hammiche D. 2016a. Thermal gelation properties of Carboxymethyl cellulose and bentonite-Carboxymethyl cellulose dispersions: rheological considerations. *Appl Clay Sci.* 132–133: 702–710.
- Benslimane A, Bekkour K, François P, Bechir H. 2016b. Laminar and turbulent pipe flow of Bentonite suspensions. *J Pet Sci Eng.* 139:85–93.
- Bernsdorf J, Wang D. 2009. Non-Newtonian blood flow simulation in cerebral aneurysms. *Comput Math Appl.* 58(5):1024–1029.
- Bureau M, Healy JC, Bourgoin D, Joly M, Biophysique LD, Medecine FD, Salpetriere P. 1979. Rheological hysteresis of blood at low shear rate. *Biorheology.* 16:7–100.
- Caballero AD, Laín S. 2015. Numerical simulation of non-Newtonian blood flow dynamics in human thoracic aorta. *Comput Methods Biomech Biomed Engin.* 18(11): 1200–1216.
- Chaturani P, Palanisamy V. 1990a. Pulsatile flow of power-law fluid model for blood flow under periodic body acceleration. *Biorheology.* 27(5):747–758.
- Chaturani P, Palanisamy V. 1990b. Casson fluid model for pulsatile flow of blood under periodic body acceleration. *Biorheology.* 27(5):619–630.
- Chien S, Usami S, Dellenback RJ, Gregersen MI. 1970. Shear-dependent in rheology deformation blood of erythrocytes of human. *Am J Physiol.* 219(1):136–142.

- Croudace AI, Pritchard D, Wilson SK. 2017. Unsteady flow of a thixotropic fluid in a slowly varying pipe. *Phys Rev Fluids*. 29(8):083103.
- de Souza Mendes PR, de Abreu Soares FS-M, Ziglio CM, Gonçalves M. 2012. Startup flow of gelled crudes in pipelines. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 179–180:23–31.
- De Vita F, de Tullio M, Verzicco R. 2016. Numerical simulation of the non-Newtonian blood flow through a mechanical aortic valve. *Theor Comput Fluid Dyn.* 30(1–2): 129–138.
- Derksen JJ. 2011. Simulations of thixotropic liquids. *Appl Math Modell.* 35(4):1656–1665.
- Fisher C, Rossmann J. 2009. Effect of non-Newtonian behavior on hemodynamics of cerebral aneurysms. *J Biomech Eng.* 131(9):091004.
- Frolov SV, Sindeev SV, Liepsch D, Balasso A, Arnold P, Kirschke JS, Prothmann S, Potlov AY. 2018. Newtonian and non-Newtonian blood flow at a 90° - Bifurcation of the cerebral artery: a comparative study of fluid viscosity models. *J Mech Med Biol.* 18(05):1850043.
- Fung YC. 1993. *Biomechanics: mechanical properties of living tissues*. 2nd ed. New York: Springer-Verlag.
- Hayat T, Waleed Ahmed Khan M, Alsaedi A, Ijaz Khan M. 2017. Squeezing flow of second grade liquid subject to non-Fourier heat flux and heat generation/absorption. *Colloid Polym Sci.* 295(6):967–975.
- Hermany L, dos Santos DD, Frey S, Naccache MF, de Souza PR. 2013. Flow of yield-stress liquids through an axisymmetric abrupt expansion-contraction. *J Non-Newton Fluid Mech.* 201:1–9.
- Horner JS, Armstrong MJ, Wagner NJ, Beris AN. 2019. Measurements of human blood viscoelasticity and thixotropy under steady and transient shear and constitutive modeling thereof. *J Rheol.* 63(5):799–813.
- Khan MI, Alzahrani F, Hobiny A, Ali Z. 2020a. Modeling of Cattaneo-Christov double diffusions (CCDD) in Williamson nanomaterial slip flow subject to porous medium. *J Mater Res Technol.* 9(3):6172–6177.
- Khan MI, Hayat T, Waqas M, Alsaedi A. 2017. Outcome for chemically reactive aspect in flow of tangent hyperbolic material. *J Mol Liq.* 230:143–151.
- Khan MI, Qayyum S, Kadry S, Khan WA, Abbas SZ. 2020b. Irreversibility analysis and heat transport in squeezing nanoliquid flow of non-Newtonian (Second-Grade) fluid between infinite plates with activation energy. *Arab J Sci Eng.* 45(6):4939–4947.
- Ku DN. 1997. Blood flow in arteries. *Annu Rev Fluid Mech.* 29(1):399–434.
- Livescu S. 2012. Mathematical modeling of thixotropic drilling mud and crude oil flow in wells and pipelines—a review. *J Pet Sci Eng.* 98–99:174–184.
- López-Aguilar JE, Webster MF, Tamaddon-Jahromi HR, Manero O. 2015. Numerical modelling of thixotropic and viscoelastoplastic materials in complex flows. *Rheol Acta.* 54(4):307–325.
- MacDonald DA. 1979. On steady flow through modelled vascular stenoses. *J Biomech.* 12(1):13–20.
- Massoudi M, Phuoc TX. 2008. Pulsatile flow of blood using a modified second-grade fluid model. *Comput Math Appl.* 56(1):199–211.
- Misra JC, Maiti S. 2012. Peristaltic pumping of blood in small vessels of varying cross-section. *ASME J Appl Mech.* 79:1–19. 061003.
- Misra JC, Sahu BK. 1988. Flow through blood vessels under the action of a periodic body acceleration field: a mathematical analysis. *Comput Math Appl.* 16(12):993–1016.
- Moore F. 1995. The rheology of ceramic slips and bodies. *Trans Br Ceram Soc.* 58:470.
- Müller J, Sahni O, Li X, Jansen KE, Shephard MS, Taylor CA. 2005. Anisotropic adaptive finite element method for modelling blood flow. *Comput Methods Biomech Biomed Eng.* 8(5):295–305.
- Nandakumar N, Sahu K, Anand M. 2015. Pulsatile flow of a shear-thinning model for blood through a two-dimensional stenosed channel. *Eur J Mech-B/Fluids.* 49:29–35.
- Nezamidoost S, Sadeghy K. 2012. Peristaltic pumping of thixotropic fluids: a numerical study. *J Soc Rheol Jpn.* 40(1):1–9.
- Nezamidoost S, Sadeghy K, Askari V. 2013. Pulsatile flow of thixotropic fluids through a partially-constricted tube. *J Soc Rheol Jpn.* 41(2):45–52.
- Paszkowiak JJ, Dardik A. 2003. Arterial wall shear stress: observations from the bench to the bedside. *Vasc Endovascular Surg.* 37(1):47–57.
- Phillips W, Deutsch S. 1975. Toward a constitutive equation for blood. *Biorheology.* 12(6):383–389.
- Pollock JD, Murray I, Bordes S, Makaryus AN. 2021. Physiology, cardiovascular hemodynamics. In: *StatPearls*. Treasure Island (FL): StatPearls Publishing. <https://www.ncbi.nlm.nih.gov/books/NBK470310/>.
- Popel AS, Ender G. 1993. An analytical solution for steady flow of a Quemada fluid in a circular tube. *Rheol Acta.* 32(4):422–426.
- Pritchard D, Croudace AI, Wilson SK. 2020. Thixotropic pumping in a cylindrical pipe. *Phys Rev Fluids.* 5(1):013303.
- Pritchard D, Wilson SK, McArdle CR. 2016. Flow of a thixotropic or antithixotropic fluid in a slowly varying channel: the weakly advective regime. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 238:140–157.
- Qayyum S, Khan MI, Hayat T, Alsaedi A. 2018. Comparative investigation of five nanoparticles in flow of viscous fluid with Joule heating and slip due to rotating disk. *Phys B: Condens Matter.* 534:173–183.
- Samijo SK, Willigers JM, Barkhuysen R, Kitslaar P, Reneman RS, Brands PJ, Hoeks APG. 1998. Wall shear stress in the human common carotid artery as function of age and gender. *Cardiovasc Res.* 39(2):515–522. volume
- Sankar DS, Hemalatha K. 2007. Pulsatile flow of Herschel–Bulkley fluid through catheterized arteries—a mathematical model. *Appl Math Model.* 31(8): 1497–1517.
- Sarifuddin, Chakravarty S, Mandal PK, Layek GC. 2008. Numerical simulation of unsteady generalized Newtonian blood flow through differently shaped distensible arterial stenoses. *J Med Eng Technol.* 32(5):385–399.
- Shit GC, Roy M. 2011. Pulsatile flow and heat transfer of a magneto-micropolar fluid through a stenosed artery under the influence of body acceleration. *J Mech Med Biol.* 11(03):643–661.
- Srivastava LM, Edemeka UE, Srivastava VP. 1994. Particulate suspension model for blood flow under

- external body acceleration. *Int J Biomed Comput.* 37(2): 113–129.
- Sud VK, Von Gierke HE, Kaleps I, Oestreicher HL. 1983. Blood flow under the influence of externally applied periodic body acceleration in large and small arteries. *Med Biol Eng Comput.* 21(4):446–452.
- Szabó V, Halász G. 2017. 1-D blood flow modelling in a running human body. *Comput Methods Biomech Biomed Engin.* 20(9):941–948.
- Taylor CA, Hughes TJR, Zarins CK. 1998. Finite element modelling of blood flow in arteries. *Comput Methods Appl Mech Eng.* 158(1–2):155–196.
- Varshney G, Katiyar VK, Kumar S. 2010. Numerical modelling of pulsatile flow of blood through a stenosed tapered artery under periodic body acceleration. *J Mech Med Biol.* 10(02):251–272.
- Wang J, Khan MI, Khan WA, Abbas SZ, e, Imran Khan M. 2020. Transportation of heat generation/absorption and radiative heat flux in homogeneous–heterogeneous catalytic reactions of non-Newtonian fluid (Oldroyd-B model). *Comput Methods Programs Biomed.* 189:105310.
- Weddell J, Kwack J, Imoukhuede P, Masud A. 2015. Hemodynamic analysis in an idealized artery tree: differences in wall shear stress between Newtonian and non-Newtonian blood models. *PLoS One.* 10(4):e0124575.
- Womersley JR. 1955. Method for the calculation of velocity, rate of flow and viscous drag in arteries when the pressure gradient is known. *J Physiol.* 127(3):553–563.
- Yeom E, Kang YJ, Lee SJ. 2014. Changes in velocity profile according to blood viscosity in a microchannel. *Biomicrofluidics.* 8(3):034110.
- Young DF. 1979. Fluid mechanics of arterial stenosis. *J BiomechEng Trans ASME.* 101(3):157–175.
- Zaman A, Ali N, Bég OA. 2016. Numerical study of unsteady blood flow through a vessel using Sisko model. *Eng Sci Technol Int J.* 19(1):538–547.

## Résumé

### Etude numérique des écoulements pulsés de fluides Newtoniens et Non-Newtoniens thixotropes. Application biomédicale.

Le présent travail porte sur la modélisation numérique de fluides newtoniens et non-newtoniens (thixotropes) et leurs applications aux écoulements pulsés sanguins à travers une artère illustrée par une conduite cylindrique. Les applications considérées mettent l'accent sur les effets de certains facteurs dont le gradient de pression oscillant, le comportement du fluide (sang), l'accélération périodique externe, le champ magnétique uniforme et le type des conditions aux limites. Les équations d'écoulement des différentes modélisations sont celles de quantité de mouvement et de continuité. La méthode des différences finies (MDF) est utilisée pour résoudre ces équations afin de calculer le champ de vitesse et la distribution des contraintes de cisaillement à la paroi. Les investigations en régime laminaire, instationnaire et axisymétrique nous a permis de cerner la structure du problème posé et de faire le point sur différents problèmes cliniques du domaine biomédical. Ces investigations initiées passent par une validation du modèle théorique utilisé par comparaison avec une référence disponible dans la littérature. Les résultats des différentes études ont mis en lumière la relation entre l'application des lois de la mécanique des fluides au mouvement sanguin et l'application des propriétés rhéologiques du sang.

**Mots clés :** Thixotropes, écoulements pulsés, artère, champ magnétique uniforme, MDF, biomédical.

## Abstract

### Numerical study of pulsatile flows of Newtonian and Non-Newtonian thixotropic fluids. Biomedical application.

The present work deals with the numerical modeling of Newtonian and non-Newtonian (thixotropic) fluids and their application to pulsating blood flows through an artery illustrated by a cylindrical pipe. The applications considered focus on the effects of certain factors including the oscillating pressure gradient, the behavior of the fluid (blood), the external periodic acceleration, the magnetic field and the type of boundary conditions. The flow equations of the various models are those of momentum and continuity. The finite difference method (FDM) is used to solve these equations in order to calculate the velocity field and the shear stress distribution at the wall. Our investigations in laminar, unsteady and axisymmetric regimes have allowed us to identify the structure of the problem posed and to take stock of various clinical problems in the biomedical field. These investigations were initiated by a validation of the theoretical model used by comparison with a reference available in the literature. The results of the different studies have highlighted the relationship between the application of the laws of fluid mechanics to blood movement and the application of the rheological properties of blood.

**Key words:** Thixotropic, pulsed flows, artery, magnetic field, FDM, biomedical.

## ملخص

### دراسة عددية للتدفقات النبضية للسوائل المتغيرة الانسيابية النيوتونية وغير النيوتونية. تطبيق الطب الحيوي.

يتناول هذا العمل النمذجة العددية للسوائل النيوتونية وغير النيوتونية (متغيرة الانسيابية) وتطبيقاتها على تدفق الدم النبضي عبر شريان موصح بواسطة أنبوب أسطواني. تؤكد التطبيقات التي تم النظر فيها على تأثيرات بعض العوامل بما في ذلك تدرج الضغط المتذبذب، وسلوك السائل (الدم)، والتسارع الدوري الخارجي، والمجال المغناطيسي ونوع شروط الحدود. معادلات التدفق للنماذج المختلفة هي تلك الخاصة بالزخم والاستمرارية. تستخدم طريقة الفروق المحدودة لحل هذه المعادلات لحساب مجال السرعة وتوزيع إجهاد القص عند الجدار. لقد مكنتنا تحقيقاتنا في النظام الرقائقي وغير المستقر والمحور من تحديد هيكل المشكلة المطروحة وتقييم المشكلات السريرية المختلفة في مجال الطب الحيوي. تمر هذه التحقيقات التي بدأت من خلال التحقق من صحة النموذج النظري المستخدم عن طريق المقارنة مع المرجع المتاح في الأدبيات. وقد أبرزت نتائج الدراسات المختلفة العلاقة بين تطبيق قوانين ميكانيكا الموائع على حركة الدم وتطبيق الخواص الريولوجية للدم.

**الكلمات المفتاحية :** متغيرة الانسيابية، التدفقات النبضية، الشريان، المجال المغناطيسي، طريقة الفروق المحدودة، الطب الحيوي.