

**RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE**  
**MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR**  
**ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**UNIVERSITE ABDERRAHMANE MIRA BEJAIA**  
**FACULTÉ DE TECHNOLOGIE**  
**DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE**

MEMOIRE  
PRÉSENTÉ POUR L'OBTENTION DU DIPLÔME DE  
**MASTER**  
FILIÈRE : GÉNIE MÉCANIQUE  
SPÉCIALITÉ : CONSTRUCTION MÉCANIQUE

PAR :  
**SEBAIHI MASSILIA**  
**REDJEM KHODJA MERIEM**

## Thème

---

**Étude de l'influence des trous sur les champs des contraintes et de déformations au voisinage d'une pointe de la fissure pour les matériaux élastiques linéaire en 2D**

---

Soutenu le 21/09/2022 devant le jury composé de :

Mr.YAYA KAMEL	Président
Mr.METHIA MOUNIRE	Rapporteur
Mil.BOUZIDI SAFIA	Examineur

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2021-2022

## Remerciements

*« Au nom du Dieu le clément et le miséricordieux »*

Un mémoire, tant nominatif soit-il, est un travail de réflexion collective,  
Donc au terme de ce travail, il nous est à la fois un plaisir et un devoir de remercier

Sincèrement toutes les personnes qui ont participé à sa réalisation.

Avant tout, nous remercions Le BON DIEU le tout puissant de

Nous avoir donné

Le courage, la volonté et la patience pour achever ce modeste travail.

Notre vif remerciement et notre profonde gratitude s'adressent à notre

Encadreur Mr Methia Mounir. qui a accepté de nous encadrer, on le remercie

Infiniment pour sa grande patience, ses encouragements, son aide et ses conseils

Judicieux, durant la réalisation du présent travail.

Nos remerciements vont également aux membres de jury d'avoir

Accepté d'évaluer ce travail

Et leur bienveillance durant notre travail.

On tient à remercier l'ensemble de la promotion génie mécanique

Appliquée 2021/2022

Nous remercions nos familles pour leurs aides durant nos études et leurs soutiens.

Enfin, on adresse nos plus sincères remerciements à tous les proches,

Et à tous nos amis avec lesquels on a travaillé ensemble,

Toutes les personnes qui ont contribuées de près et de loin.

## Dédicaces

Avec l'aide de dieu tout puissant, j'ai pu réaliser ce modeste travail. Je tiens à remercier toutes les personnes sans qui, aujourd'hui cela n'aurait pas été possible.

A la personne la plus chère, qui m'a quitté trop tôt « mon cher père », mon exemple éternel, c'est grâce à toi j'ai appris le sens du travail et de responsabilité. J'espère que tu es fier de moi là où tu es que le BON DIEU t'accueille dans son vaste paradis.

A ma très chère mère affable, aimable, source de tendresse et de patience inépuisable qui grâce à elle, a fait de moi ce que je suis.

A mes frères et sœurs : Zizi, Kahina, Souad, Sabrina, Ali, Lynda, les symboles de la bonté par excellence ainsi que mes neveux : Milissa, ilicia, mimo, Lili, Chahine, bina, Lina, m Cherif, ghiles, mayas, badis, Dali, Anaïs

À tous mes amies et amis :Meriem,Sabrine,Mélissa,Sarah,Djodjo,Nawel,Tina,Siham,Chaima, Lynda, ouissam,Amir,Hamza,Ithri,zaki, Momouh,Maydine,Dani,Badou,Walid,Aziz,Yacine.

qui ont toujours été là dans les hauts et les bas

et a tous mes collègues de classe

J'adresse mes plus sincères remerciements à mon amie et ma binôme Massalia qui m'a toujours soutenu et encouragé au cours de toute la période des études supérieures.

**Meriem**

## Dédicaces

Avec des sentiments de gratitude les plus profonds je dédie ce travail aux deux êtres qui me sont les plus chers au monde.

**ma mère et mon père**

Qui m'ont toujours soutenu et encouragé et qui ont tout fait pour assurer le bon déroulement de mes études. J'espère être à la hauteur de leurs espérances.

Je dédie ce travail :

À mes soeurs et À mes frères ainsi que mes neveux : Razane et Sidi Ali

À tous mes amie et amis Anissa, Amina, Nari, Celia, Nissette, Lydia, Yasmina, Ouissam

Lynda Hm, Lynda RKH, Dida, Nawal, Kenza, Tina, Siham, Mouloud , Hamza ,

Amir,dani,maydine,badou,walid,aziz,yacine

qui ont toujours été là dans les hauts et les bas.

et a tous mes collègues de classe

J'adresse mes plus sincères remerciements à mon amie et ma binôme Meriem qui m'a toujours soutenu et encouragé au cours de toute la période des études supérieur.

**Massilia**

## Table de matière :

Remerciements.....	2
Dédicaces .....	3
Table de matière :.....	5
Liste des figures .....	7
Notations principales.....	9
Introduction générale .....	11
Structure du manuscrit .....	12
Chapitre I: Mécanique de la rupture linéaire .....	13
Partie 1 : Concepts théoriques de la rupture en petites déformations .....	14
I.1. Introduction.....	14
I.2. Historique.....	15
I.3. Mécanique linéaire de la rupture .....	17
I.3.1. Généralités.....	17
I.3.2. Modes d'ouverture d'une fissure .....	17
I.3.3. Zone délimitant le voisinage d'une pointe de fissure.....	18
I.3.4. Champs des contraintes et des déplacements.....	19
I.3.5. Propagation de fissure.....	25
I.3.5.1. Propagation de la fissure en mode I- ténacité du matériau .....	25
I.3.5.2. Propagation de fissure en mode mixte (2D) .....	25
Partie 2 : Concepts de modélisation numérique de la rupture .....	26
I.1. Méthode des éléments finis .....	26
I.2. Méthode de remaillage .....	27
I.3. Méthode de sous-modélisation .....	28
I.4. Méthode sans maillage .....	29
Chapitre II Simulation numérique.....	30
II.1. Introduction.....	31
II.2. Géométrie de l'éprouvette .....	31
II.3. Création des modèles .....	31
II.4. Application du matériau.....	32
II.5. Définition de la fissure.....	33

---

II.6. Conditions aux limites .....	33
II.6.1. Blocages.....	33
II.6.2.Chargement.....	34
II.7 Maillage .....	35
II.8.Résultats.....	35
II.9. Conclusion.....	36
Chapitre III Résultats et validation numérique .....	37
III.1. Introduction.....	38
III.2. Validation du modèle numérique .....	38
III.3. Discussion des résultats.....	40
III.4. Influence du rayon du trou sur les champs des contraintes et de déplacement.....	44
III.5. Influence de la distance D sur les champs des contraintes et de déplacement.....	46
III.6. Conclusion.....	48
Conclusion générale et perspectives .....	49
Références bibliographiques .....	52

## Liste des figures

**FIGURE I.1:** État final de différentes éprouvettes après un essai uni axial (tiré de [3]).

**FIGURE I.2:** Réponses schématiques de différents matériaux dans un essai de traction uni axiale.

**FIGURE I.3:** Catastrophes liées au phénomène de rupture (a) accident de l'avion American Airlines Airbus-A300 [10] (b) navire Liberty Ship [11].

**FIGURE I.4 :** Fissure dans un milieu continu.

**FIGURE I.5 :** Trois modes d'ouverture d'une fissure.

**FIGURE I.6 :** zone au voisinage de la fissure.

**FIGURE I.7:** Système de coordonnées en front de fissure.

**FIGURE I.8:** Représentation de l'éprouvette dans le cas fini et infini.

**FIGURE I.9:** Champ de contrainte **(a)** dans le système de coordonnées cartésiennes **(b)** dans le système de coordonnées polaires.

**FIGURE I.10:** Fissure sollicitée en mode mixte.

**FIGURE I.11:** Plaque carrée préfissurée et le maillage associé pour le calcul des facteurs d'intensité de contrainte [24].

**FIGURE I.12:** Représentation schématique d'un remaillage [29].

**FIGURE I.13:** Illustration de la technique de sous-modélisation.

**FIGURE I.1:** Géométrie d'une éprouvette SENT.

**FIGURE II.2:** création de Modèle en 2D (a) mode I.

**FIGURE II.3 :** Introduction des propriétés du matériau.

**FIGURE II.4:** Définition de la fissure

**FIGURE II.5:** Blocage des déplacements par la ligne BC-1.

**FIGURE II.6:** Application de chargement en mode I .

**FIGURE II.7:** Maillage obtenu mode I.

**FIGURE II.8:** Résultats de la modélisation mode I.

**FIGURE III.1 :** Comparaison entre les résultats numérique et analytique en mode I (a)  $\sigma_{11}$  (b)  $\sigma_{22}$  (c)  $U_1$  .

**FIGURE III.2 :** Comparaison entre les résultats  $\sigma_{11}$  et  $\sigma_{22}$

**FIGURE III.3 :** Variation de  $\sigma_{11}$  en fonction de  $r$  pour différentes valeurs de  $D$  et  $R$  fixé, en mode I.

**FIGURE III.4 :** Variation de  $U_1$  en fonction de  $r$  pour différentes valeurs de  $D$  et  $R$  fixé, en mode I.

**FIGURE III.5 :** Variation de  $\sigma_{11}$  et  $U_1$  en fonction de  $r$  pour différentes valeurs de  $R$  et  $D$  fixé, en mode I.

**FIGURE III.6 :** Influence du rayon trou  $R$  sur la distribution des contraintes von Mises, pour un  $D=2$ .

**FIGURE III.7 :** Influence du rayon trou sur la distribution des déplacements  $U_1$ , pour un  $D=2$ .

**FIGURE III.8 :** Influence de la distance  $D$  sur la distribution des contraintes de von Mises, pour un  $R=5$ .

**FIGURE III.9::** Influence de la distance  $D$  sur les déplacements  $U_1$ , pour un  $R=5$ .

## Notations principales

$a$	demi-longueur de la fissure
$E$	module de Young
$r$	distance radiale de la pointe de la fissure dans la configuration de déformée
$r_p$	rayon autour de pointe de la fissure
$S$	densité d'énergie de déformation
$S_{cr}$	valeur critique du facteur de densité d'énergie de déformation
$W$	Longueur de la plaque
$\beta_1, \beta_2$	angle d'inclinaison de la fissure
$\theta_0$	angle d'extension de la fissure
$K_c$	facteur d'intensité de contraintes critique
$K_I, K_{II}$	les facteurs d'intensité de contrainte des modes I et II
$x, y$	fonction de $K_I, K_{II}$ et $\theta$
$\kappa$	$3 - 4\nu$ en déformations planes ; $(3 - \nu/1 + \nu)$ en contraintes planes
$\nu$	coefficient de Poisson
$\sigma_0$	contrainte appliquée dans le cas d'un chargement uniaxial
MEF	méthode des éléments finis
$\sigma_{max}$	contrainte tangentielle maximale
$\{\sigma_{rr}, \sigma_{r\theta}, \sigma_{\theta\theta}\}$	les composantes du tenseur des contraintes de Cauchy en coordonnées polaire
$\{\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}\}$	les composantes du tenseur des contraintes de Cauchy dans la base cartésienne
$\{u_x, u_y\}$	les composants de vecteur de déplacement dans la base cartésienne
$\{u_r, u_\theta\}$	les composants de vecteur de déplacement dans la base polaire
$u_{i,j} = H_{ij}$	tenseur du gradient de déplacement

$\alpha_I, \alpha_{II}, \gamma_I, \gamma_{II}$  Coefficients d'ajustement arbitraires

$Y_I, Y_{II}$  Facteur de géométrie

$\delta_I, \delta_{II}$  Exposant de raccord arbitraire

## Introduction générale

La mécanique de la rupture est une science assez récente et qui a vu la plupart de ses développements théoriques au cours du 20ème siècle [1,2]. La conception des structures d'ingénieries consiste essentiellement à assurer un degré de sécurité acceptable permettant de réduire les risques relatifs aux défaillances. Cependant, la présence de discontinuités géométriques (fissure, cavité, etc.) réduit considérablement leur capacité de charge. Les fissures, en tant que source commune de discontinuité dans un milieu, sont caractérisées par de fortes singularités des champs mécaniques compliquant ainsi leur étude en employant des outils classiques de la mécanique.

Parmi les approches permettant de modéliser la propagation de fissures, la mécanique linéaire de la rupture reste aujourd'hui la plus utilisée en pratique. De nombreuses théories ont été développées afin de prévoir l'initiation de fissures, dans le cadre des comportements élastiques isotropes sous des sollicitations statiques. L'approche de la densité d'énergie de déformation s'est avérée être un outil puissant pour évaluer le comportement statique et en fatigue en ingénierie structurelle.

En mécanique de la rupture, plusieurs approches numériques ont été adoptées pour analyser le comportement mécanique des structures fissurées et déterminer les différents paramètres de la rupture. La méthode des éléments finis (MEF) est l'une des méthodes numériques les plus utilisées aujourd'hui pour traiter les problèmes pratiques de la rupture, basée sur la simulation numérique de la propagation des fissures. Néanmoins, certaines difficultés existent telles que la nécessité d'un raffinement important du maillage en fond de fissure ou le remaillage progressif lors de l'avancement du front de fissure.

L'objectif de ce mémoire est d'utiliser la méthode des éléments finis, pour simuler l'influence des trous sur la fissure dans une éprouvette, sous un chargement en mode I.

Nous présentons quelques notions de base sur la mécanique de la rupture dans le chapitre 01. Dans le chapitre 02 nous avons présenté les étapes suivies afin d'effectuer les simulations nécessaires pour démontrer l'effet des paramètres géométrique sur la résistance de l'éprouvette au fissures. Nous avons présenté les différents résultats retrouvés dans les simulations et les

calculs analytiques, puis une confrontation entre les deux méthodes a été faite afin de valider les résultats

## **Structure du manuscrit**

Le présent manuscrit s'articule de la manière suivante :

Le premier chapitre du manuscrit porte sur la mécanique de la rupture linéaire, et la présentation de quelques critères de rupture, ainsi que les méthodes numériques les plus utilisées.

Le deuxième chapitre est consacré à la présentation de la géométrie de l'éprouvette utilisé au cours de notre étude pour les simulations par la méthode des éléments finis. Les étapes nécessaires à la création d'un modèle numérique avec les principaux modules disponibles, ont été détaillées en mode I.

Dans le troisième chapitre, les prévisions analytiques issues de ce travail et les résultats de la MEF, en termes de déformation et des contraintes, sont examinés et comparés. De plus, ces deux approches ont été utilisées dans le code élément fini pour prédire l'influence des trous sur la fissure dans des conditions de chargement en mode I. Enfin une validation de nos résultats a été effectuée, en les comparant aux données expérimentales extraites de la littérature

Les résultats principaux obtenus dans ce travail sont récapitulés dans une conclusion générale. Enfin, des perspectives visant à améliorer le présent travail viennent clôturer le manuscrit.

---

---

# Chapitre I

## Mécanique de la rupture

### linéaire

---

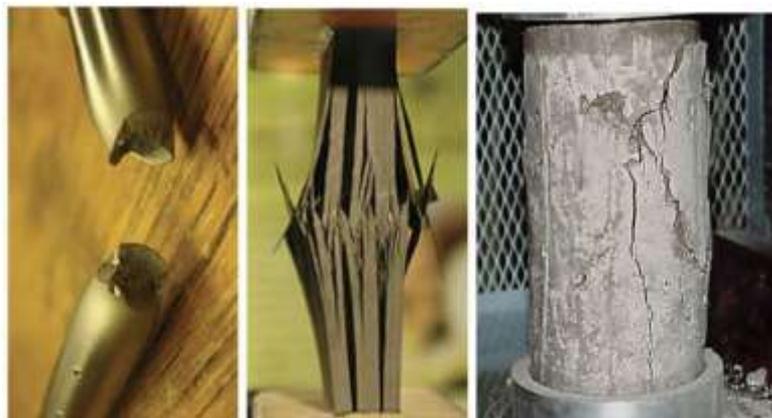
## Partie 1 : Concepts théoriques de la rupture en petites déformations

### I.1. Introduction

Après une brève introduction sur les différents types de rupture qui peuvent intervenir en fonction du matériau et du chargement considéré, les principes généraux de la mécanique de la rupture qui permettent d'accéder aux différents critères de propagation employés dans ces travaux sont exposés. Ensuite sont abordés les différents aspects de la modélisation par éléments finis d'une structure mince. Enfin, une dernière partie présente les méthodes numériques qui existent actuellement pour représenter puis faire propager une fissure. On décrira notamment la méthode des éléments finis étendus.

#### Qu'est-ce que la rupture ?

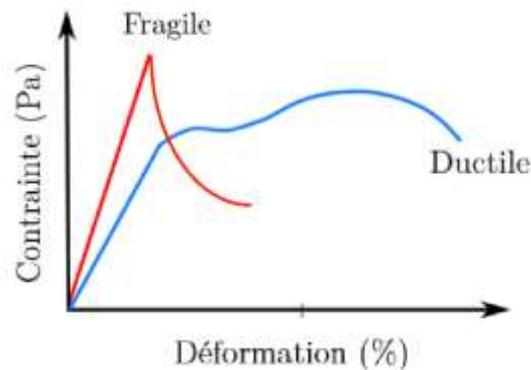
Les mécanismes de rupture observés sont très variés et fortement dépendant du matériau et de l'essai comme on peut le voir (FIGURE I.1). Par exemple lors d'un essai de traction sur acier, on va d'abord observer un phénomène dit de striction qui se caractérise par un rétrécissement de la section de l'éprouvette. La rupture intervient ensuite par une séparation en deux de l'éprouvette dans le sens transversal. Pour un essai de compression d'un composite dans la direction des fibres, la rupture a pour origine une décohésion de celles-ci. Pour un béton en compression, la rupture se traduit par l'apparition d'un réseau de fissures longitudinales alors que dans un essai de traction elle consiste essentiellement en une fissure unique transversale.



**FIGURE I.1:** État final de différentes éprouvettes après un essai uni axial (tiré de [3]).

Une classification du comportement et de la rupture des matériaux peut être proposée à partir des différences observées dans des essais uni axiaux. Lorsqu'un matériau comme le béton voit sa contrainte rapidement chuter vers 0 après la phase élastique, il est qualifié de fragile. Alors qu'un matériau comme l'acier à température ambiante peut supporter des déformations

importantes avant de rompre, il est dit ductile et entre les deux, on trouve des matériaux dits quasi-fragiles, comme schématisé sur la (FIGURE I.2)



**FIGURE I.2:** Réponses schématisques de différents matériaux dans un essai de traction uniaxiale.

## I.2. Historique

Durant la seconde moitié du 19<sup>ème</sup> siècle, l'usage de l'acier et d'autres alliages métalliques se développa considérablement. Avec cet essor se multiplièrent aussi les accidents dus à l'utilisation inadéquate de ces matériaux, à des faiblesses de conception et de dimensionnement. Par leur soudaineté, certains de ces accidents causes des dégâts humains et matériels.

L'un des premiers incidents enregistrés sur une structure importante fut la rupture d'une chaîne du pont suspendu Montrose en mars 1830 en Grande-Bretagne. Depuis, il y a eu un nombre important d'effondrements de ponts, dont le King's Bridge à Melbourne (1962) ou encore le Point Pleasant Bridge en Virginie (1967). Les accidents ferroviaires dus à une rupture brutale des essieux, des roues ou encore des rails ont également été très nombreux. Entre 1860 et 1870, le nombre de personnes victimes d'accidents de train en Grande-Bretagne s'élevait environ à 200 par an. De nombreux accidents interviennent également sur les navires maritimes, l'exemple le plus célèbre, est la rupture de plus de 200 navires « Liberty Ship » assemblés entièrement par soudage par la marine américaine, durant la seconde guerre mondiale. Bien d'autres accidents intervinrent également sur des pipelines, ou encore sur des avions. En janvier 1919, un énorme réservoir de mélasse, de 27 mètres de diamètre et 15 mètres de hauteur se déchira soudainement, répandant 7,5 millions de litres de mélasse dans les rues de Boston (USA) [4]. Douze personnes trouvèrent la mort et une quarantaine furent blessées dans cet accident. De nombreux autres accidents ont été rapportés, ce ne fut qu'au cours de la seconde guerre mondiale que l'on commença à considérer sérieusement le phénomène de rupture.

L'étude de la rupture des matériaux fragiles remonte aux années 1920, avec les travaux précurseurs de Griffith [5] réalisées dans un milieu élastique fissuré, d'un point de vue énergétique. Les premiers développements théoriques d'analyse des champs de déplacements, déformations et contraintes au voisinage d'une fissure ont été entrepris par Westergaard [6] vers 1940. Mais ces travaux sont tombés dans un oubli relatif avant d'être exhumés dans les années 1950–1960, lorsque l'extension de la discipline a été amorcée par Irwin [7]. Ces études ont donné la définition des facteurs d'intensité de contraintes, caractérisant l'état de sollicitation de la région dans laquelle la rupture se produit.

Entre 1960 et 1980, la mécanique de la rupture connaît un grand succès scientifique, avec notamment l'apparition de la mécanique non linéaire de la rupture qui a permis de mieux prendre en compte le comportement plastique des matériaux. De nombreux travaux sont publiés à cette période ; on peut citer par exemple les travaux de Rice [8] et Bui [9] qui introduisent, respectivement, les notions de l'intégrale  $J$  et son expression duale  $J^*$ , indépendantes du contour d'intégration et dont les valeurs critiques correspondent à la ténacité d'un matériau. Tous les développements théoriques réalisés à cette époque ont permis de déterminer la forme exacte de la singularité, et des champs asymptotiques à la pointe de fissure, permettant d'aider dans l'analyse et l'interprétation des résultats expérimentaux. De plus, ils représentent une solution précise à de nombreux problèmes de géométrie simples, et peuvent être utilisés comme solutions approchées pour des problèmes plus complexes.

Le domaine d'application de la mécanique de rupture ne se limite pas aux structures métalliques. Elle s'applique également aux roches, aux bétons, aux céramiques et aux élastomères. Les échelles d'application sont également très diverses puisqu'elles vont des micro-systèmes à la géomécanique de la croûte terrestre (création et propagation de failles).

La FIGURE I.3 : présente les phénomènes catastrophiques liés à la rupture des structures.

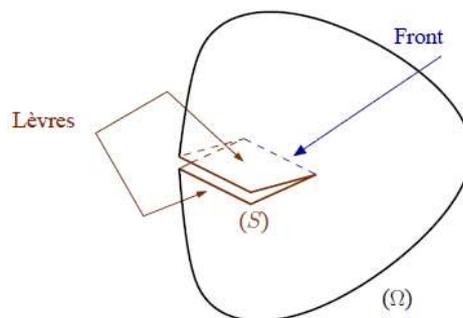


**FIGURE I.3:** Catastrophes liées au phénomène de rupture (a) accident de l'avion American Airlines Airbus-A300 [10] (b) navire Liberty Ship [11].

### I.3. Mécanique linéaire de la rupture :

#### I.3.1. Généralité :

Localement, la rupture est caractérisée par la séparation irréversible d'un milieu continu ( $\Omega$ ) en deux parties distinctes. On définit alors une fissure comme étant la surface géométrique ( $S$ ) de séparation (FIGURE I.4:). [12]



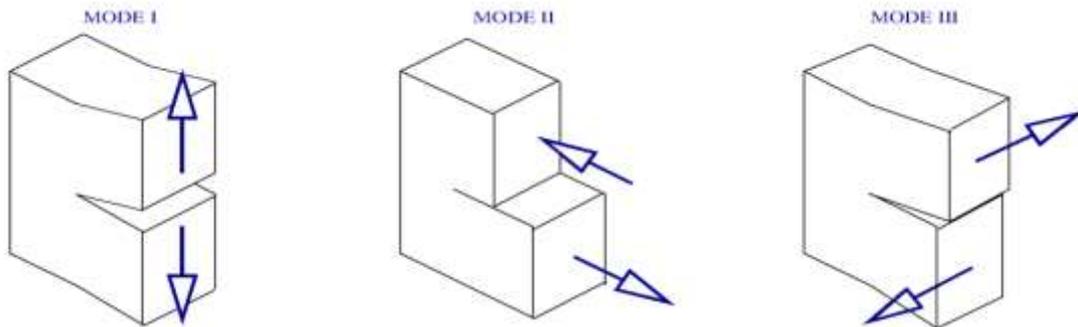
**Figure I.4 :** Fissure dans un milieu continu.

#### I.3.2. Modes d'ouverture d'une fissure :

Il a été montré que toutes les sollicitations sur la fissure peuvent être ramenées à la superposition de trois modes élémentaires (FIGURE I.5):

- le mode I (mode d'ouverture) où les lèvres de la fissure se déplacent dans des directions opposées, perpendiculairement au plan de fissuration,
- le mode II (mode de cisaillement dans le plan) où les lèvres de la fissure se déplacent dans le même plan, dans une direction perpendiculaire au front de fissure,
- le mode III (mode de cisaillement hors plan) où les lèvres de la fissure se déplacent dans le même plan, dans une direction parallèle au front de fissure.

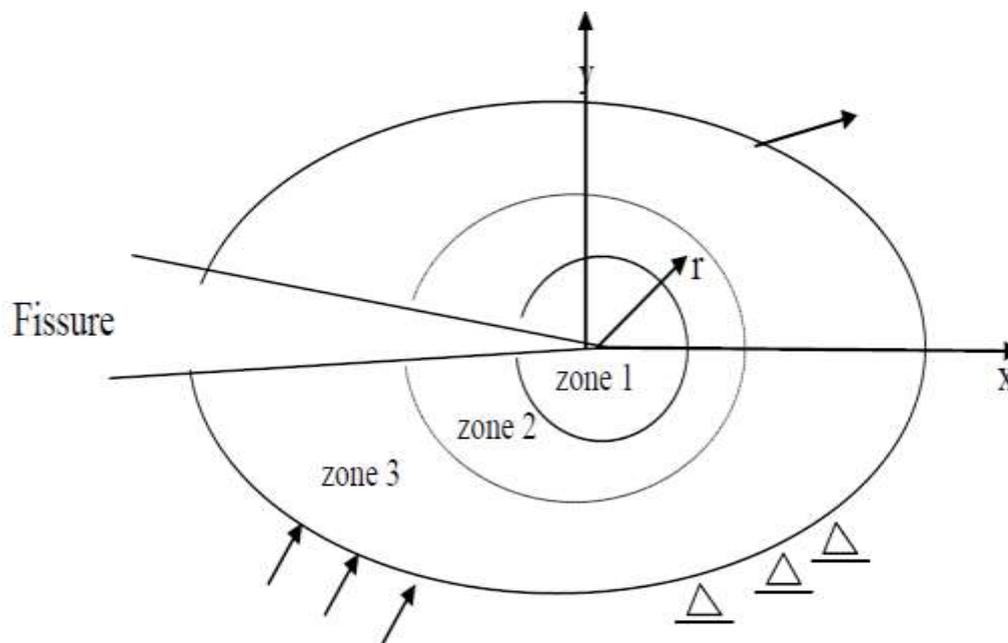
Notons que dans le cas des modes II et III, les lèvres de fissures restent en contact et entraînent donc des frottements qui diminuent l'énergie disponible pour la propagation de fissure. Ces deux modes sont ainsi généralement moins dangereux que le mode I.



**FIGURE I.5 :** Trois modes d'ouverture d'une fissure.

### I.3.3. Zone délimitant le voisinage d'une pointe de fissure

La mécanique de la rupture étudie l'interaction entre la discontinuité géométrique (fissure) et le milieu continu avoisinant, ainsi que l'évolution de cette discontinuité. D'un point de vue mécanique, on peut distinguer schématiquement, dans un milieu fissuré, trois zones successives (FIGURE I.6) [13,14] :



**FIGURE I.6 :** zone au voisinage de la fissure.

- **La zone d'élaboration 1:** elle se trouve à la pointe de fissure et dans le sillage laissé par la fissure au cours de sa propagation. L'étude de cette zone est très complexe à cause des contraintes importantes qui ont fortement endommagé le matériau. La

théorie classique de la mécanique de la rupture réduit cette zone à un point pour les problèmes plans et à une courbe pour les problèmes tridimensionnels.

- **La zone singulière 2** : les champs de déplacements (ou déformations) et contraintes sont continus et possèdent une formulation indépendante de la géométrie lointaine de la structure. On démontre que dans cette zone, les composantes de champ de contraintes sont infinies au voisinage du front de fissure ( $r \rightarrow 0$ ). Plus exactement, la singularité est en ( $r^{-1/2}$ ) dans un milieu élastique linéaire. Le matériau ayant une limite élastique, il existe un rayon ( $r_p$ ) autour de la pointe de fissure qui détermine la forme de la zone plastique. C'est en fonction de la taille de la zone plastique que l'on dira que la rupture est fragile ou ductile.
- **La zone extérieure 3** : comprenant les champs lointains se raccordant d'une part, à la zone singulière, et d'autre part aux conditions aux limites en charges et en déplacements. Dans cette zone, les champs de déplacements, déformations et contraintes varient peu et peuvent être approchées par des polynômes communément utilisés dans les différentes méthodes de résolutions.

### I.3.4. Champs des contraintes et des déplacements

La mécanique de la rupture consiste à caractériser le comportement à la fissuration des structures à l'aide des paramètres quantifiables au sens de l'ingénieur, notamment la contrainte appliquée, la taille de la fissure et la résistance à la fissuration du matériau. Il s'agit alors d'établir une procédure qui relie le champ de contraintes et de déplacements au voisinage de la fissure à la contrainte nominale appliquée au loin, à la taille de la fissure et son orientation, et enfin aux caractéristiques mécaniques du matériau.

Diverses méthodes d'analyse permettent d'étudier les champs de déplacements/déformations et contraintes au voisinage d'une fissure. On peut regrouper l'ensemble de ces méthodes sous trois types d'approches :

- Approches directes (locales) : sont fondées sur l'utilisation des fonctions d'Airy ; ces approches résolvent des problèmes plans et font appel à la recherche de fonctions analytiques. Dans le cadre de ces approches, on énumère : la résolution de Westergaard [6], l'expansion de Williams [15] et l'analyse de Muskhelishvili [16].
- Approches énergétiques qui sont basées sur l'analyse énergétique du milieu continu contenant une fissure. Elles consistent à établir un bilan énergétique global. Dans le

cadre de ces approches, on peut traiter des problèmes où le milieu n'est pas exclusivement élastique linéaire et homogène [17].

- Autres approches : plus récemment l'approche hamiltonienne à la rupture permet d'associer les deux types d'approches précédentes [18].

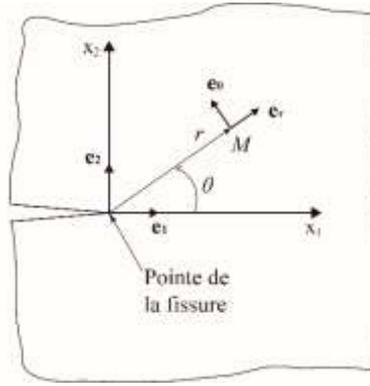
considérons un repère local à la pointe de fissure, comme illustrée sur la (FIGURE I.7). En élasticité linéaire, l'analyse locale permet d'obtenir une solution asymptotique pour les champs de contrainte et de déplacements. Irwin [7] a alors proposé de définir des facteurs quantifiant l'intensité de la singularité des contraintes. Ainsi pour un chargement statique (ou quasi-statique) ces facteurs sont utilisés pour déterminer l'intensité de la singularité aussi bien en termes de contraintes que de déplacements. Ces facteurs sont appelés facteurs d'intensité des contraintes et sont définis pour chaque mode élémentaire de rupture [19] :

$$\begin{cases} K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{23}(\theta = 0) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu_0}{\kappa_0 + 1} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \llbracket u_y(\theta = \pi) \rrbracket & \text{en mode I} \\ K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{23}(\theta = 0) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu_0}{\kappa_0 + 1} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \llbracket u_x(\theta = \pi) \rrbracket & \text{en mode II} \\ K_{III} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{23}(\theta = 0) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu_0}{\kappa_0 + 1} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \llbracket u_z(\theta = \pi) \rrbracket & \text{en mode III} \end{cases} \quad (\text{I.1})$$

Où  $\sigma_{ij}$  et  $u_i$  sont les composantes du tenseur de contrainte et du vecteur déplacement, respectivement.  $\llbracket u(0 = \pi) \rrbracket = u(0 = \pi) - u(0 = -\pi)$  sont les sauts de déplacements au passage de la discontinuité.  $\mu_0 = E/2(1 + \nu_0)$  est le module de cisaillement, et la constante élastique de Kolosov  $\kappa_0$  prend les formes suivantes :  $\kappa$

$$\kappa_0 = \begin{cases} 3 - 4\nu_0 & \text{en déformations planes} \\ \frac{3 - \nu_0}{1 + \nu_0} & \text{en contraintes planes} \end{cases} \quad (\text{I.2})$$

les indices  $(i,j)$  font référence aux coordonnées cartésiennes avec  $(i,j=1,2,3)$ , ou en coordonnées polaires  $(i,j=r, \theta, z)$ .



**FIGURE I.7 :** Système de coordonnées en front de fissure.

En élasticité plane, l'approche de Westergaard [6] reprise par Williams [15], permettent d'obtenir, à l'aide des fonctions d'Airy, les champs de déplacements et de contraintes au voisinage de la pointe de la fissure en fonction des facteurs d'intensité de contraintes, pour un matériau à comportement linéaire élastique.

Les contraintes sont définies en coordonnées cartésiennes par :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left\{ K_I \cos \frac{\theta}{2} \left[ 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] - K_{II} \sin \frac{\theta}{2} \left[ 2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right] \right\} \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left\{ K_I \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + K_{II} \cos \frac{\theta}{2} \left[ 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \right\} \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left\{ K_I \cos \frac{\theta}{2} \left[ 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] + K_{II} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right\} \end{pmatrix} \quad (\text{I.3})$$

avec

$$\sigma_{33} = \begin{cases} 0 & \text{en contraintes planes} \\ \nu_0 (\sigma_{11} + \sigma_{22}) & \text{en déformations planes} \end{cases} \quad (\text{I.4})$$

Considérons une plaque avec une fissure inclinée de longueur  $a$ , soumise à une contrainte uniforme, égale à  $\sigma_0$  dans le cas d'un chargement uniaxial. Les facteurs d'intensité de contraintes  $K_I$  et  $K_{II}$  sont donnés par les équations suivantes :

Dans le cas infini [20] :

$$\begin{cases} K_I = \sigma_0 \sqrt{\pi a} \sin^2 \beta_1 \\ K_{II} = \sigma_0 \sqrt{\pi a} \cos \beta_1 \sin \beta_1 \end{cases} \quad (\text{I.5})$$

Dans le cas fini [21] :

$$\begin{cases} K_I = Y_I \sigma_0 \sqrt{\pi a} \sin^2 \beta_2 \\ K_{II} = Y_{II} \sigma_0 \sqrt{\pi a} \cos \beta_2 \sin \beta_2 \end{cases} \quad (\text{I.6})$$

avec

$$Y_i = \gamma_i \left[ \cos \frac{\alpha}{W} \right]^{-\delta_i} + \alpha_i \left( \frac{\alpha}{W} \right) \quad (\text{I.7})$$

$$\begin{cases} Y_1 = \gamma_1 \left[ \cos \frac{\alpha}{W} \right]^{-\delta_1} + \alpha_1 \left( \frac{a}{W} \right) \\ \gamma_1 = 1.9 (\cos(\beta_2))^{-0.921} - 0.38 \beta_2^{2.03} \\ \delta_1 = \frac{8.53 - 5.57 \beta}{\beta_2^2 - 0.82 \beta_2 + 1.37} \\ \alpha_1 = \frac{1.12}{\beta_2^3 - 0.73 \beta_2^2 + 0.8} \end{cases} \quad (\text{I.8})$$

$$\begin{cases} Y_2 = \gamma_2 \left[ \cos \frac{\alpha}{W} \right]^{-\delta_2} + \alpha_2 \left( \frac{a}{W} \right) \\ \gamma_2 = 1.2 (\cos(\beta_2))^{-0.3} - 0.15 \beta_2 \\ \delta_2 = 2.85 \beta_2^3 - 2.53 \beta_2^2 + 5.1 \\ \alpha_2 = 0.8 \beta_2^3 - 2.53 \beta_2^2 + 1.66 \beta_2 + 0.54 \end{cases} \quad (\text{I.9})$$

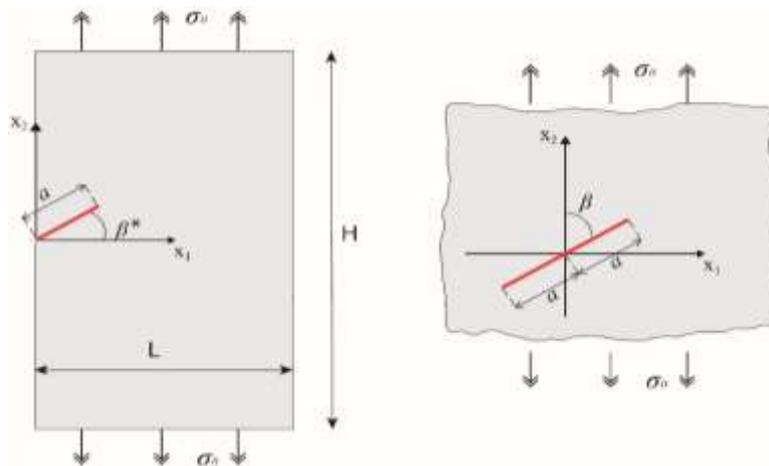


FIGURE I.8: Représentation de l'éprouvette dans le cas fini et infini.

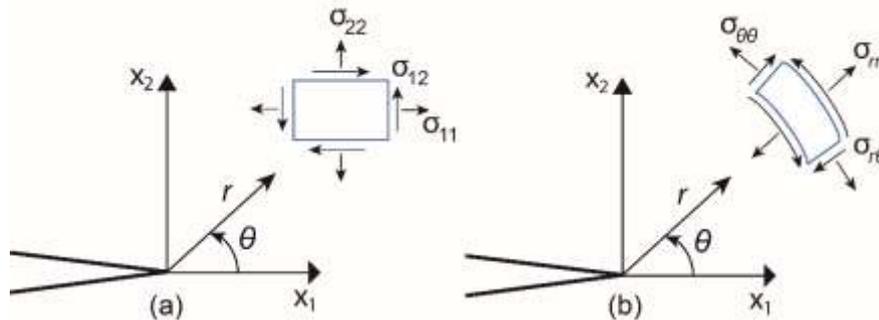
Les termes dominants de l'Eq. (I.2) sont proportionnels à  $1/\sqrt{r}$ , de plus les contraintes sont théoriquement infinies à la pointe de la fissure c'est-à-dire lorsque  $r \rightarrow 0$  [22]. Aussi, les facteurs d'intensité de contrainte, sont exprimés en fonctions à la fois du chargement et de la géométrie, permettent de caractériser la sévérité des contraintes en pointe de fissure.

On peut utiliser le changement de base afin d'exprimer les composantes du tenseur des contraintes de Cauchy  $\{\sigma_{rr}, \sigma_{r\theta}, \sigma_{\theta\theta}\}$  voir (FIGURE I.8) [14]:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{r\theta} \\ \sigma_{\theta\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta \sigma_{11} + 2 \sin \theta \cos \theta \sigma_{12} + \sin^2 \theta \sigma_{22} \\ -\sin \theta \cos \theta \sigma_{11} + (2 \cos^2 \theta - 1) \sigma_{12} + \sin \theta \cos \theta \sigma_{22} \\ \sin^2 \theta \sigma_{11} - 2 \sin \theta \cos \theta \sigma_{12} + \cos^2 \theta \sigma_{22} \end{pmatrix} \quad (\text{I.10})$$

Compte tenu des Eqs. (I.2) et (I.3), le champ de contraintes en coordonnées polaires peut s'écrire comme suit :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{r\theta} \\ \sigma_{\theta\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4\sqrt{2\pi r}} \left\{ K_I \left[ 5 \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \right] - K_{II} \left[ 5 \sin \frac{\theta}{2} - 3 \sin \frac{3\theta}{2} \right] \right\} \\ \frac{1}{4\sqrt{2\pi r}} \left\{ K_I \left[ \sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2} \right] + K_{II} \left[ \cos \frac{\theta}{2} + 3 \cos \frac{3\theta}{2} \right] \right\} \\ \frac{1}{4\sqrt{2\pi r}} \left\{ K_I \left[ 3 \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{3\theta}{2} \right] - 3 K_{II} \left[ \sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2} \right] \right\} \end{pmatrix} \quad (\text{I.11})$$



**FIGURE I.9** : Champ de contrainte (a) dans le système de coordonnées cartésiennes (b) dans le système de coordonnées polaires.

En utilisant la loi de comportement élastique linéaire, les composantes du vecteur déplacement s'écrivent en coordonnées cartésiennes :

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu_0} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left\{ K_I \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ \frac{\kappa_0 - 1}{2} + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] + K_{II} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ \frac{\kappa_0 + 1}{2} + \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \right\} \\ \frac{1}{\mu_0} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left\{ K_I \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ \frac{\kappa_0 + 1}{2} - \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] - K_{II} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ \frac{\kappa_0 - 3}{2} + \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \right\} \end{pmatrix} \quad (\text{I.12})$$

La relation de  $\{u_r, u_\theta\}$  avec  $\{u_x, u_y\}$  s'écrit sous la forme suivante [14]:

$$\begin{pmatrix} u_r \\ u_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta u_x + \sin\theta u_y \\ -\sin\theta u_x + \cos\theta u_y \end{pmatrix} \quad (\text{I.13})$$

Compte tenu des Eqs.(I.7) et (I.8), on peut écrire le champ de déplacements en coordonnées polaires de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} u_r \\ u_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4\mu_0} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left\{ K_I \left[ (2\kappa_0 - 1) \cos\frac{\theta}{2} - \cos\frac{3\theta}{2} \right] - K_{II} \left[ (2\kappa_0 - 1) \sin\frac{\theta}{2} - 3 \sin\frac{3\theta}{2} \right] \right\} \\ \frac{1}{4\mu_0} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left\{ K_I \left[ -(2\kappa_0 + 1) \sin\frac{\theta}{2} + \sin\frac{3\theta}{2} \right] - K_{II} \left[ (2\kappa_0 + 1) \cos\frac{\theta}{2} - 3 \cos\frac{3\theta}{2} \right] \right\} \end{pmatrix} \quad (\text{I.14})$$

Dans le cas d'un chargement hors plan, la seule composante du déplacement est  $u_z$ . Les déplacements et les contraintes ont les expressions suivantes :

$$\begin{cases} u_z = \frac{2K_{III}}{\mu_0} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \sigma_{13} = -\frac{2K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \sigma_{23} = -\frac{2K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{cases} \quad (\text{I.15})$$

Dans le système de coordonnées polaires, la matrice du gradient de déplacement peut s'écrire comme suit :

$$\begin{pmatrix} u_{r,r} & u_{r,\theta} \\ u_{\theta,r} & u_{\theta,\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right) \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) \end{pmatrix} \quad (\text{I.16})$$

Dans le système de coordonnées cartésiennes, les composantes de la matrice du tenseur du gradient de déplacement sont :

$$\begin{pmatrix} H_{11} = u_{1,1} \\ H_{12} = u_{1,2} \\ H_{21} = u_{2,1} \\ H_{22} = u_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin^2 \theta H_{\theta\theta} + \cos^2 \theta H_{rr} - \sin \theta \cos \theta (H_{r\theta} + H_{\theta r}) \\ \cos^2 \theta H_{r\theta} - \sin^2 \theta H_{\theta r} + \sin \theta \cos \theta (H_{rr} - H_{\theta\theta}) \\ \cos^2 \theta H_{\theta r} - \sin^2 \theta H_{r\theta} + \sin \theta \cos \theta (H_{rr} - H_{\theta\theta}) \\ \sin^2 \theta H_{rr} + \cos^2 \theta H_{\theta\theta} + \sin \theta \cos \theta (H_{r\theta} + H_{\theta r}) \end{pmatrix} \quad (\text{I.17})$$

### I.3.5. Propagation de fissures

On présente ici quelques critères classiques utilisés dans la détermination du niveau de sollicitation qui entraîne la propagation d'une fissure, ainsi que la direction que cette propagation se donne.

#### I.3.5.1. Propagation de la fissure en mode I - ténacité du matériau

Le critère de propagation de fissure proposé par G.Irwin [23] porte sur les facteurs d'intensité des contraintes, et plus précisément sur le mode *I*, qui est le mode d'ouverture, caractérisé par le facteur d'intensité  $K_I$ . Ce mode est intuitivement le plus dangereux. Irwin postule qu'il existe une valeur critique de  $K_I$ , appelée ténacité (et notée  $K_{IC}$ ), en deçà de laquelle la fissure n'évolue pas. Une fois cette valeur critique atteinte, la fissure avance. La ténacité  $K_{IC}$  est une caractéristique du matériau, indépendante de la géométrie ou du chargement de l'éprouvette.

En résumé :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{si } K_I < K_{IC} & \text{aucune évolution de la fissure} \\ \text{si } K_I = K_{IC} & \text{la fissure avance} \end{array} \right. \quad (\text{I.18})$$

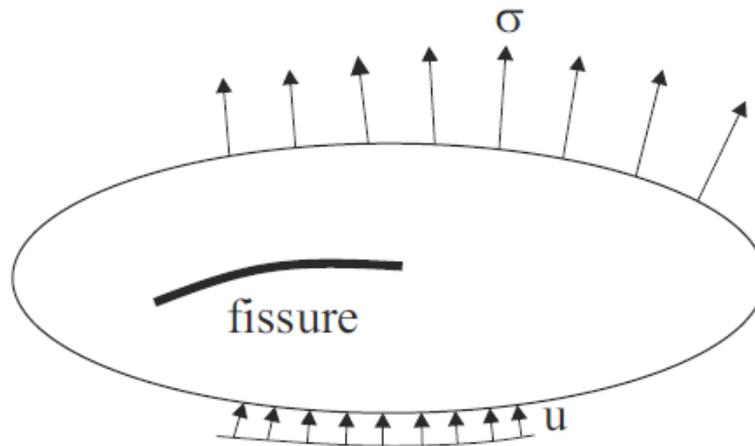
Cette relation établit en particulier un lien entre la ténacité  $K_{IC}$  associée à la propagation en mode *I* (ouverture de la fissure) pur et le taux de restitution d'énergie critique

$G_c$  qui représente l'énergie nécessaire à la création d'une unité de nouvelles surfaces libres en pointe de fissure (en contrainte plane) :

$$G_c = \frac{K_{IC}^2}{E} \quad (\text{I.19})$$

#### I.3.5.2. Propagation de fissures en mode mixte (2D)

Lorsqu'une fissure est soumise en même temps à plusieurs modes de chargement (FIGUREI.9), on cherche l'intensité de la sollicitation à laquelle la rupture se produit, et la direction dans laquelle la fissure se propage.



**FIGURE I.10:** Fissure sollicitée en mode mixte.

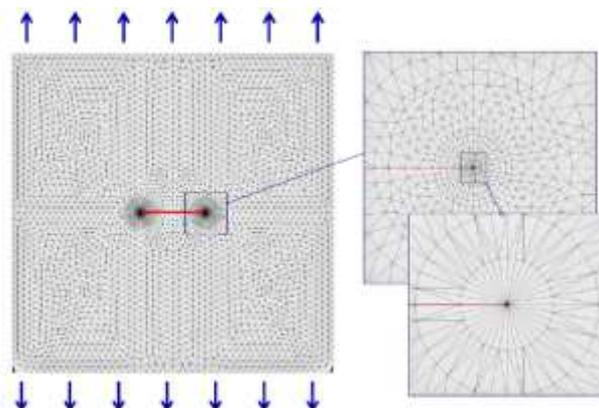
## Partie 2 : Concepts de modélisation numérique de la rupture

Dans cette section, on présente quelques méthodes numériques les plus utilisées en mécanique de la rupture en discutant brièvement de leurs avantages et inconvénients.

### I.1.Méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis (MEF) est une méthode largement utilisée dans le calcul des structures en mécanique. Elle a donc été naturellement adaptée pour résoudre des problèmes de fissuration et de rupture. Parmi les références récentes, on peut citer les travaux [24-25], qui étudient la propagation de fissures en 2D et en 3D [26,27].

La modélisation des discontinuités représente toujours un défi d'un point de vue numérique. Si on veut modéliser les fissures par la méthode des éléments finis classique (MEF), le maillage EF doit se conformer avec la géométrie de la fissure, comme illustré sur la FIGURE I.10.

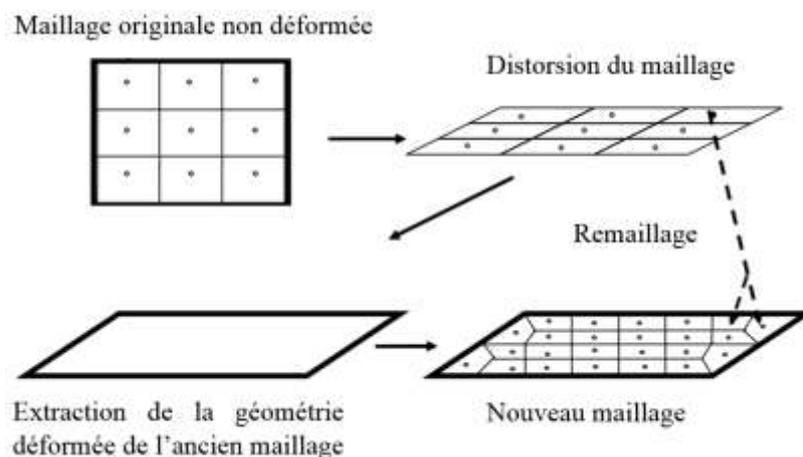


**FIGURE I.11:** Plaque carrée préfissurée et le maillage associé pour le calcul des facteurs d'intensité de contrainte [24].

Dans les simulations par la MEF en grandes déformations, certains éléments du maillage peuvent être fortement déformés. Cela affecte négativement la précision de la simulation et peut empêcher son achèvement. Afin de surmonter ce problème, et de déterminer avec précision le champ de contrainte et de déformation autour de la pointe de la fissure, on a besoin de raffiner le maillage dans cette zone. De nombreuses méthodes ont été proposées et développées dans ce sens.

## I.2.Méthode de remaillage

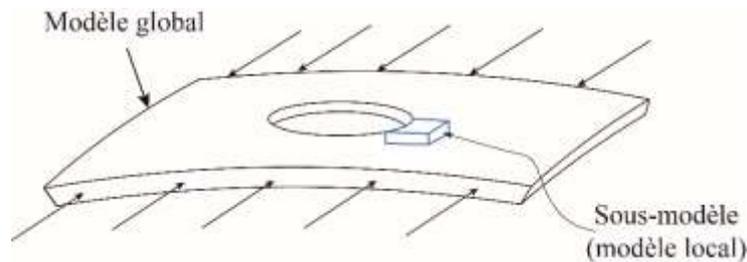
Le remaillage est une solution pour contrôler la distorsion des éléments. L'idée est simple, si le maillage est fortement déformé pendant la simulation, il faut alors générer un nouveau maillage basé sur la géométrie déformée de la pièce. Un processus connu sous le nom de la cartographie « mapping » qui transférera les solutions du maillage légèrement déformé au nouveau maillage en se basant sur leur position relative dans l'espace. Des interpolations ont généralement lieu pendant ce processus, car les nœuds de l'ancien maillage et ceux du nouveau maillage ne coïncident généralement pas. Une fois que les solutions (champs de contraintes et déformations, température, etc.) sont mises en correspondance avec le nouveau maillage, la simulation peut se poursuivre avec des éléments rafraîchis et moins déformés [28]. De ce fait, l'interpolation sera largement utilisée au cours du processus de cartographie et la précision de la solution se détériorera, ainsi des erreurs peuvent s'accumuler après des remaillages répétitifs. La FIGURE I.12 résume les étapes de la méthode de remaillage.



**FIGURE I.12:** Représentation schématique d'un remaillage [29].

### I.3. Méthode de sous-modélisation

La sous-modélisation est une technique utilisée pour étudier une partie locale d'un modèle avec un maillage raffiné, pour une plus haute-fidélité. Cette méthode est particulièrement utile lorsqu'il est nécessaire d'obtenir une solution précise et détaillée dans une ou plusieurs régions locales, alors que l'analyse de la structure globale est trop coûteuse ou ne vaut pas la peine. Le concept de base du sous-modèle est illustré dans la FIGURE I.12.



**FIGURE I.13 :** Illustration de la technique de sous-modélisation.

En résumé, une première analyse globale d'une structure identifie généralement les zones où la réponse à la charge est jugée cruciale. La modélisation secondaire permet ensuite d'améliorer facilement le modèle de ces zones sans avoir à recourir à un remaillage et à une nouvelle analyse de l'ensemble du modèle.

Les détails concernant les méthodes de remaillage et sous-modélisation peuvent être trouvés dans le manuel d'analyse des utilisateurs d'Abaqus [30].

### I.4. Méthode sans maillage

Appliquée aux problèmes de mécanique de la rupture depuis 1994, cette méthode est plus proche de la MEF que la méthode des éléments de frontières. Elle se base sur la résolution de la forme faible des équations aux dérivées partielles par une méthode de Galerkin (comme pour la MEF). Par contre, l'approximation du champ de déplacement qui est construite pour être introduite dans la forme faible ne nécessite pas de maillage. Seul un ensemble de nœuds est réparti dans le domaine et l'approximation du champ de déplacement en un point ne dépend que de la distance de ce point par rapport aux nœuds qui l'entourent, et non de l'appartenance à un certain élément fini. En mécanique de la rupture, la fissure se propage parmi cet ensemble de nœuds et la présence d'une fissure est simplement prise en compte en diminuant le poids que possède un nœud sur l'approximation du déplacement en un certain point, si la ligne joignant ce nœud et ce point est coupée par la fissure. Les principaux

développements ont été exposés dans [31,32]. Les problèmes de ces techniques sont la lourdeur du calcul et le traitement des conditions aux limites cinématiques. Une vision simplifiée de ces méthodes a été récemment présentée dans [33].

---

# Chapitre II

Simulation numérique.

---

## II.1. Introduction

Dans ce chapitre, nous avons présenté quelques notions de base sur la méthode des éléments finis puis les étapes suivies afin d'effectuer des simulations numériques pour calculer les déformations appliquées sur la plaque.

## II.2. Géométrie de l'éprouvette

Au cours de notre étude, nous avons utilisé les éprouvettes SENT (Single-edge-notched-tension), comme illustré dans la FIGURE II.1. Cette géométrie est utilisée afin d'étudier la propagation instable de fissures sous chargement statique.

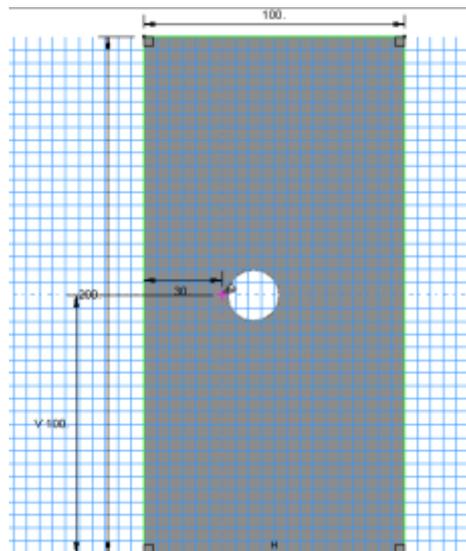


FIGURE II.1 : Géométrie d'une éprouvette SENT.

## II.3. Création des modèles

Nous avons commencé par dessiner les éprouvettes en 2D de Mode I sur l'interface sketch du logiciel et défini des trous de rayon  $R$  à distance  $D$ , comme montré ci-dessous.

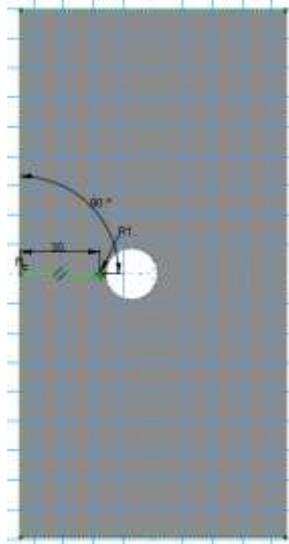


FIGURE II.2 : création de Modèle en 2D mode I.

#### II.4. . Application du matériau

Pour cette analyse bidimensionnelle par éléments finis, les propriétés de l'alliage d'aluminium utilisé dans cette étude ont été prises comme suite  $E=72400$  Mpa,  $\nu =0.3$  et  $K_{IC}= 1297$  N/mm<sup>3/2</sup>, où  $E$ ,  $\nu$  et  $K_{IC}$  représentent respectivement le module de Young, le coefficient de Poisson et le facteur d'intensité de contrainte critique.

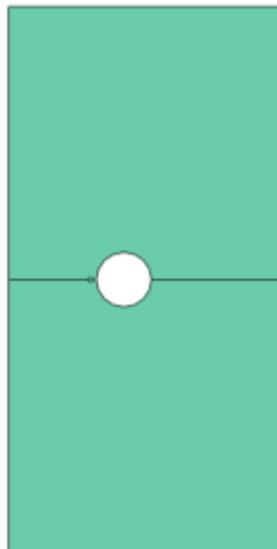


FIGURE II.3 : Introduction des propriétés du matériau.

## II.5. Définition de la fissure

Dans cette étape on doit définir la fissure initiale qui a une longueur de 30mm ce que montre la FIGURE II.4.

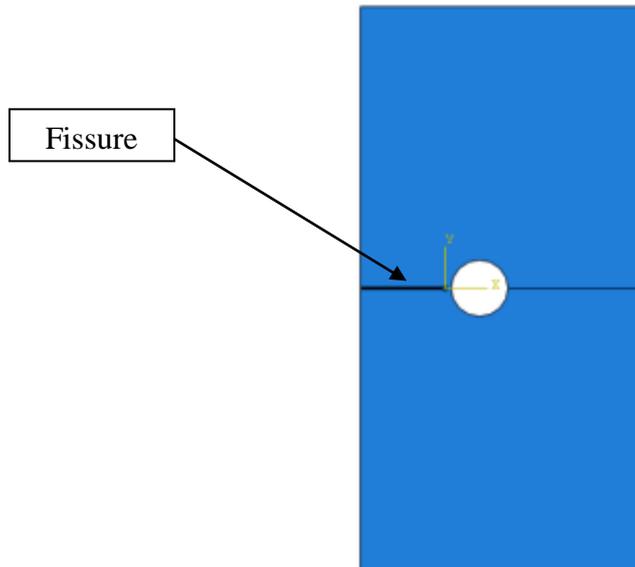


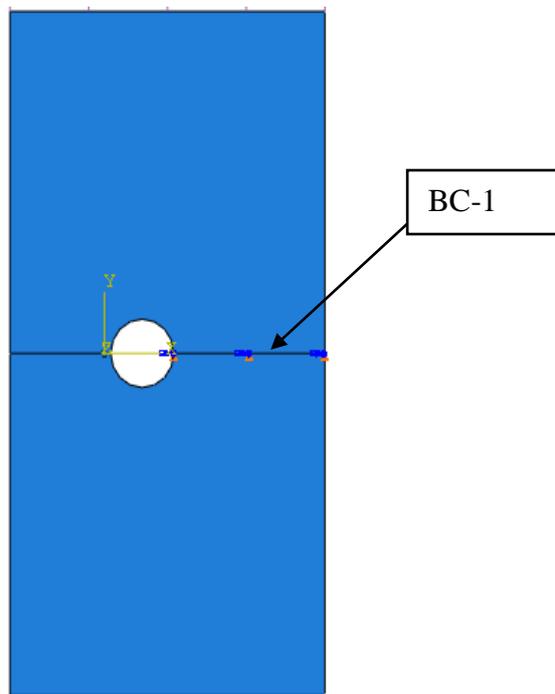
FIGURE II.4 : Définition de la fissure.

## II.6. Conditions aux limites

Dans cette étape on va définir les conditions aux limites appliquées à la plaque.

### II.6.1. Blocages

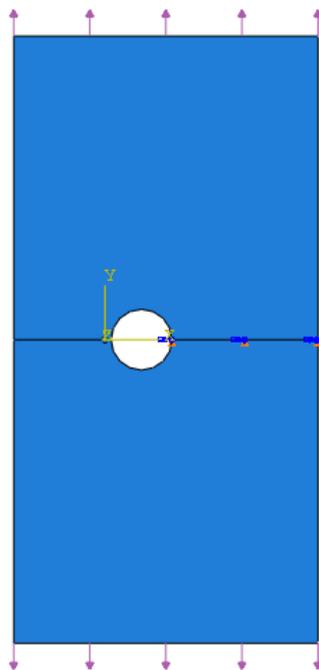
On a bloqué tous les déplacements  $U_y$  et  $U_z$  ainsi que toutes les rotations par la ligne repéré par BC-1 dans la FIGURE II.5. Cette condition a été ajoutée afin d'éviter la rotation de l'éprouvette.



**FIGURE II.5:** Blocage des déplacements par la ligne BC-1.

### II.6.2. Chargement

Le chargement appliqué à cette plaque en mode I, est uniformément répartie sur les arrêtes supérieur et inférieur d'une intensité  $\sigma=80.479$  MPa.



**FIGURE II.6 :** Blocage des déplacements par la ligne BC-1 et application de chargement en mode I.

## II.7. Maillage

En petites déformations, seule une région restreinte très proche du fond de fissure est affectée par la singularité de la fissure. Dans tous les cas, un maillage très fin près de la pointe de la fissure est nécessaire. Cependant, l'application des charges importantes génère une déformation excessive des éléments situés au voisinage du fond de fissure. Pour cette modélisation nous avons effectué un maillage grossier sur la géométrie complète du modèle FIGURE II.6. Un maillage fin est appliqué autour de la pointe de la fissure, qui est constitué de 50 éléments qui sont distribués radialement avec un rapport de biais = 500 (indice d'ABAQUS), et de 16 éléments autour du cercle. La taille de plus petit élément est de l'ordre de  $3.3 \times 10^{-3}$ , et un maillage de 30 éléments autour de trou.

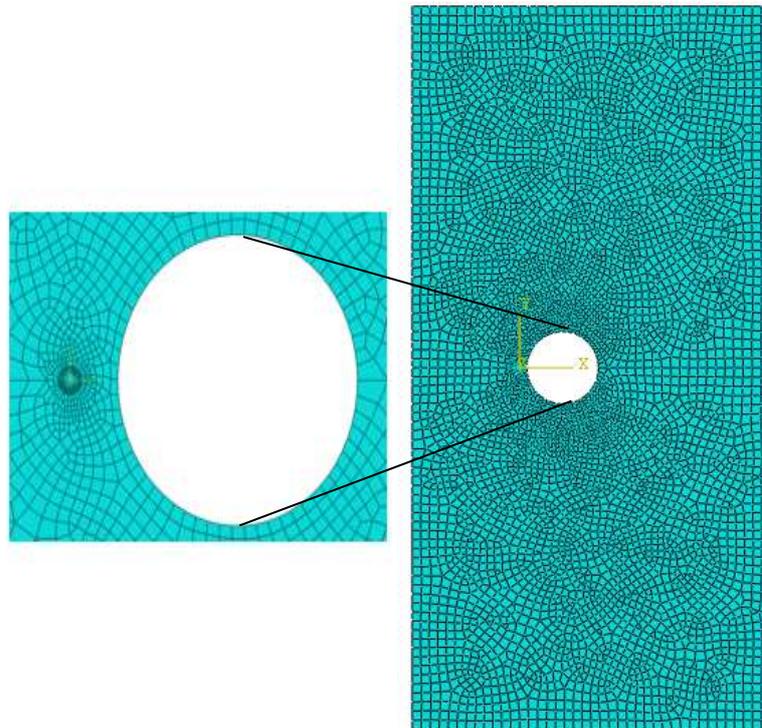
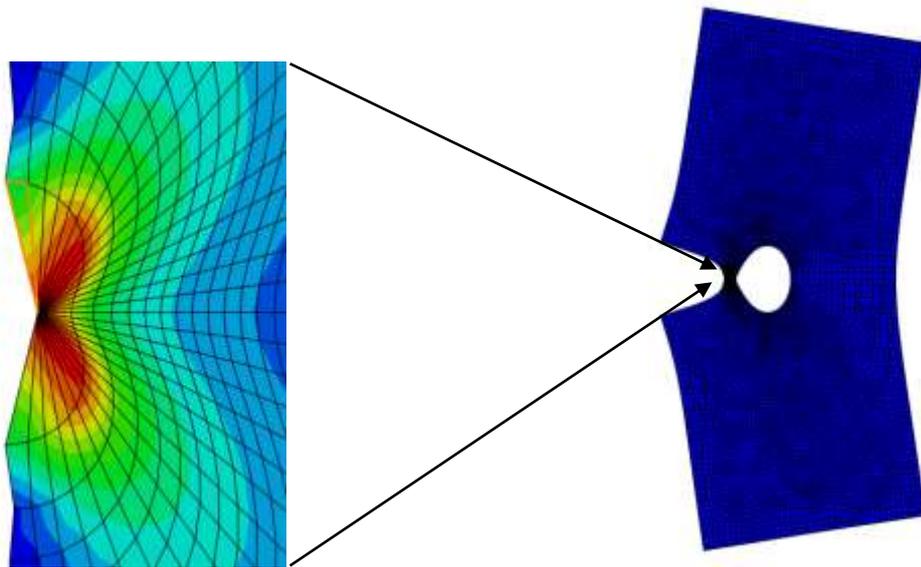


FIGURE II.7 : Maillage obtenu mode I.

## II.8. Résultats

Après l'application de maillage, nous avons obtenu les résultats de la FIGURE II.8 qui montre la distribution des contraintes équivalentes de Von-Mises autour de la pointe de la fissure. On constate que la contrainte Von-Mises est maximale à la pointe de la fissure.



**FIGURE II.8** : Résultats de la modélisation mode I.

### **II.9. Conclusion :**

Dans ce chapitre, la géométrie de l'éprouvette a été présentée, puis le chargement et le maillage a été fait afin de pouvoir procéder au lancement de la simulation numérique.

---

## Chapitre III Résultats et validation numérique

---

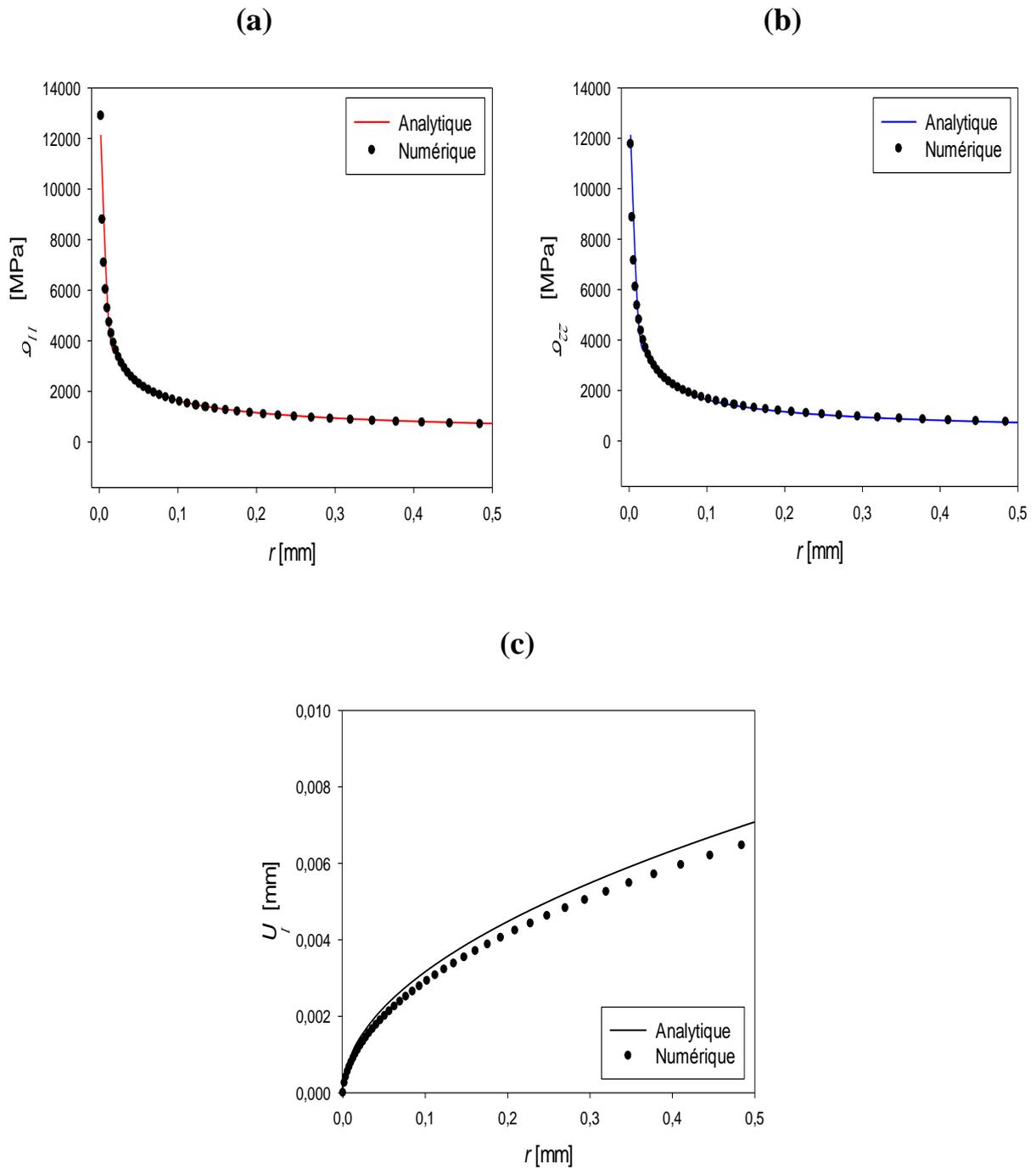
### III.1. Introduction

En mécanique de la rupture, plusieurs approches numériques ont été adoptées pour analyser le comportement mécanique des structures fissurées et déterminer les différents paramètres de la rupture. La méthode des éléments finis est l'une des méthodes numériques les plus utilisées aujourd'hui pour traiter les problèmes de fissuration. Cependant, parmi les difficultés majeures qui se posent avec cette méthode c'est la nature physique des champs des contraintes et de déformations nécessite un maillage très fin autour de l'extrémité de la fissure afin de le représenter correctement.

Dans ce chapitre, la méthode des éléments finis a été utilisée afin de prédire les contraintes et les déformations au voisinage d'une pointe de la fissure dans le cadre de la mécanique linéaire élastique de la rupture, sous un chargement en mode I. Dans un premier temps, on compare les résultats numériques aux solutions analytiques en termes de contraintes et de déplacement. Cette étape nous permet la validation de notre modèle numérique. Dans un second temps, on s'intéresse à l'évolution des contraintes et des déformations au voisinage d'une pointe de la fissure, en présence d'un trou.

### III.2. Validation du modèle numérique

Afin de vérifier la validité de notre modèle numérique, nous avons comparé les résultats analytiques des déplacements (Eq (I.12)) et des contraintes (Eq(I.3)), à ceux obtenus à l'aide de la méthode des éléments finis. L'évolution de  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  et  $U_1$  en fonction de la distance radiale, sont rapportées sur les FIGURE III.1 (a), (b) et (c).



**FIGURE III.1 :** Comparaison entre les résultats numérique et analytique en mode I (a)  $\sigma_{11}$  (b)  $\sigma_{22}$  (c)  $U_I$  .

Ces graphiques montrent qu'il existe une très bonne concordance entre les deux résultats analytiques et numériques, pour toutes les valeurs de  $r$ , ce qui nous permet de conclure que notre modèle numérique a été élaboré avec succès. Cependant, on peut constater

aussi que une certaine divergence entre les résultats analytiques et numériques concernant  $U_1$  pour  $r > 0.2$ , ce qui est dû probablement aux perturbations à la pointe de la fissure.

On note également que en mode I, la contrainte  $\sigma_{11}$  égale à la contrainte  $\sigma_{22}$ , comme le montre la FIGURE III.2. Aussi, la composante  $U_2$  du vecteur de déplacement est nulle.

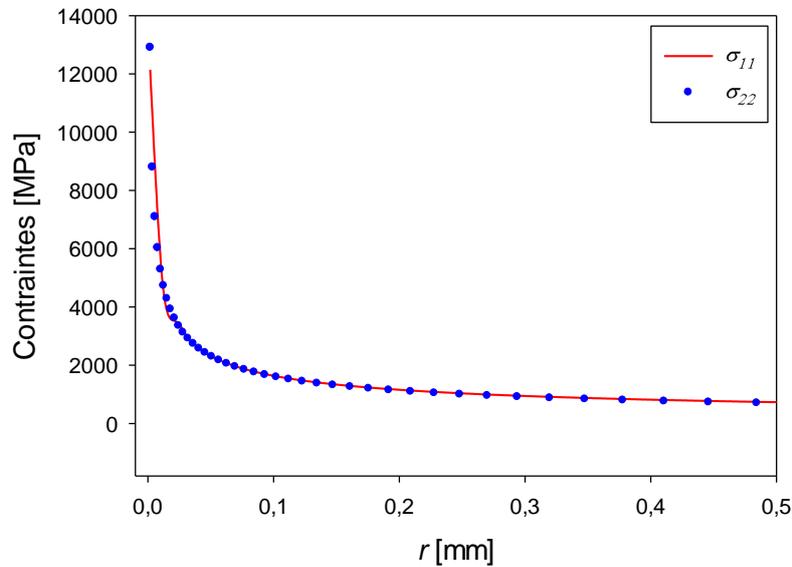
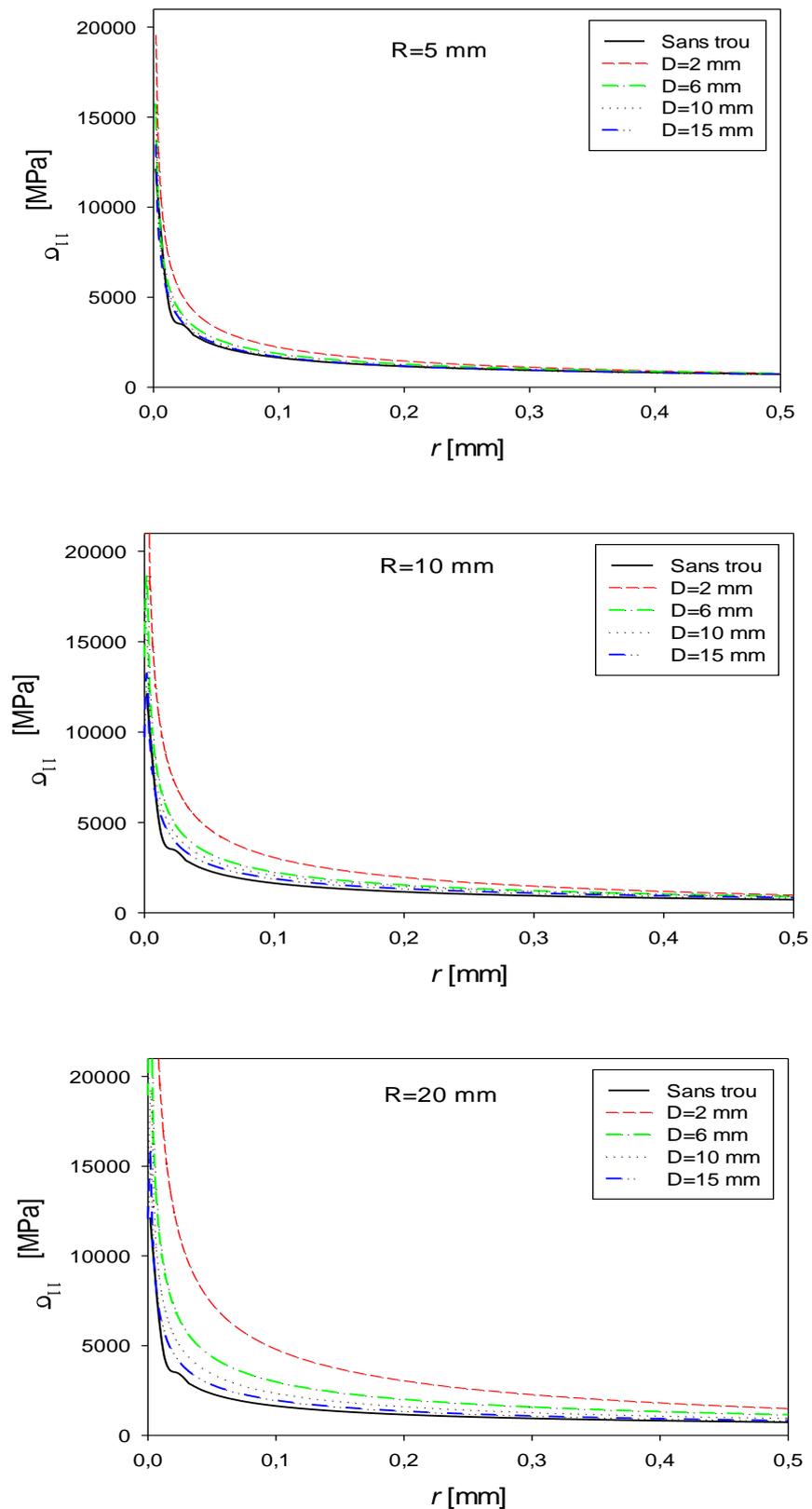


FIGURE III.2 : Comparaison entre les résultats  $\sigma_{11}$  et  $\sigma_{22}$

### III.3. Discussion des résultats

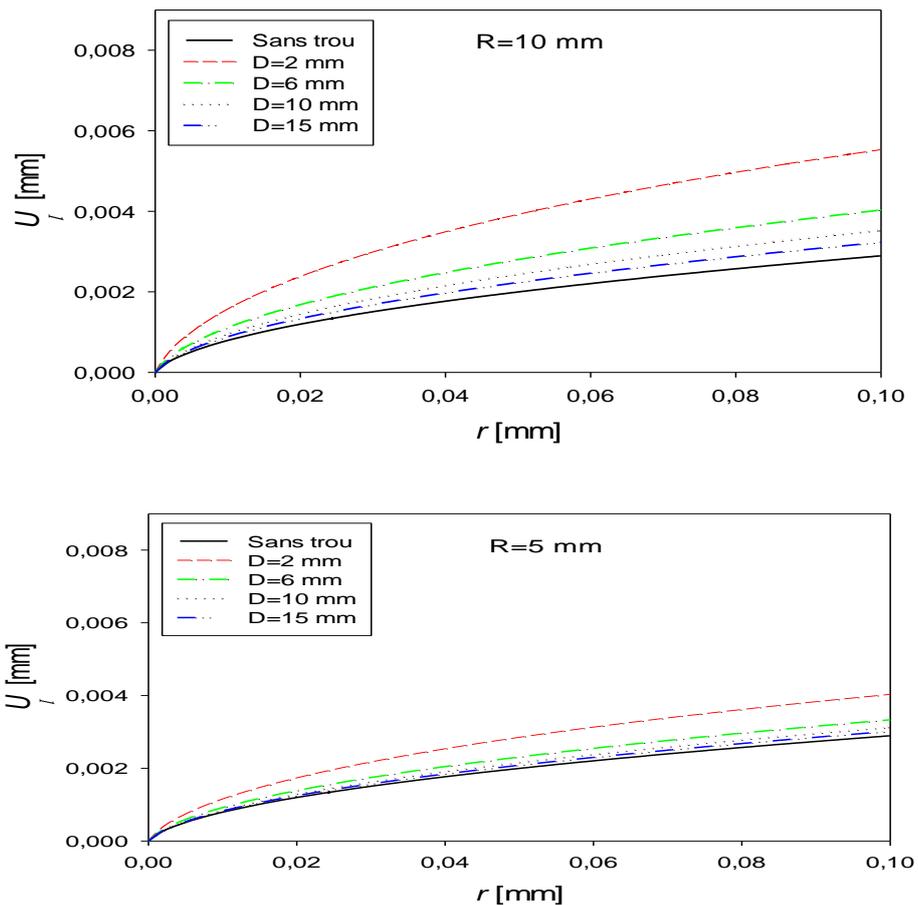
À partir de la simulation numérique, la variation des contraintes et des déplacements en fonction de la distance radiale en présence d'un trou, et pour différentes valeurs  $R=5, 10, 20$  mm (rayon du trou) et  $D=2, 6, 10, 15$  mm (distance entre la pointe de la fissure et le trou), comme illustrées sur la FIGURE III.3-5.

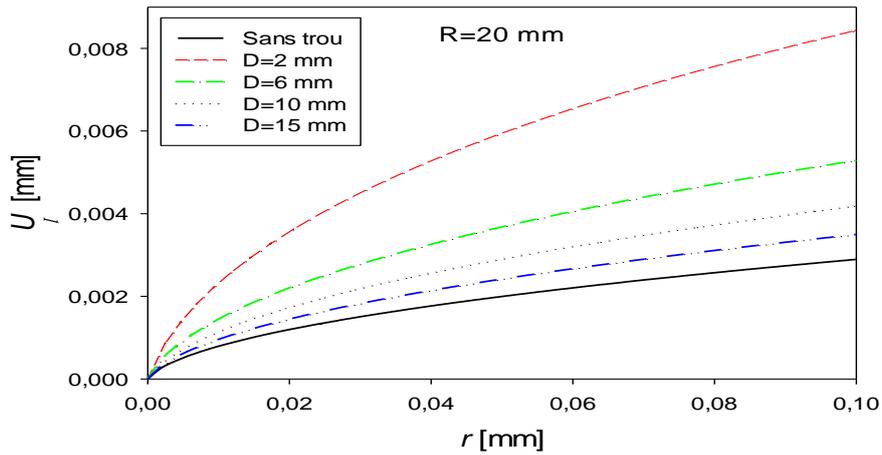
Les FIGURE III.3-4 montrent la variation des contraintes et des déplacements en fonction de la distance radiale, pour différentes valeurs  $D$  et pour chaque  $R$  fixé. À partir de la FIGURE III.3, on peut observer une même tendance de  $\sigma_{11}$ , pour chaque diamètre du trou. En effet, elle a une valeur maximale à la pointe de la fissure, où on trouve une concentration de contrainte très élevée. Par la suite, on constate une diminution à mesure qu'on s'éloigne de la pointe de la fissure. On remarque aussi que la valeur de  $\sigma_{11}$ , augmente inversement par rapport à la distance  $D$  et proportionnellement à  $R$ .



**FIGURE III.3 :** Variation de  $\sigma_{11}$  en fonction de  $r$  pour différentes valeurs de  $D$  et  $R$  fixé, en mode I.

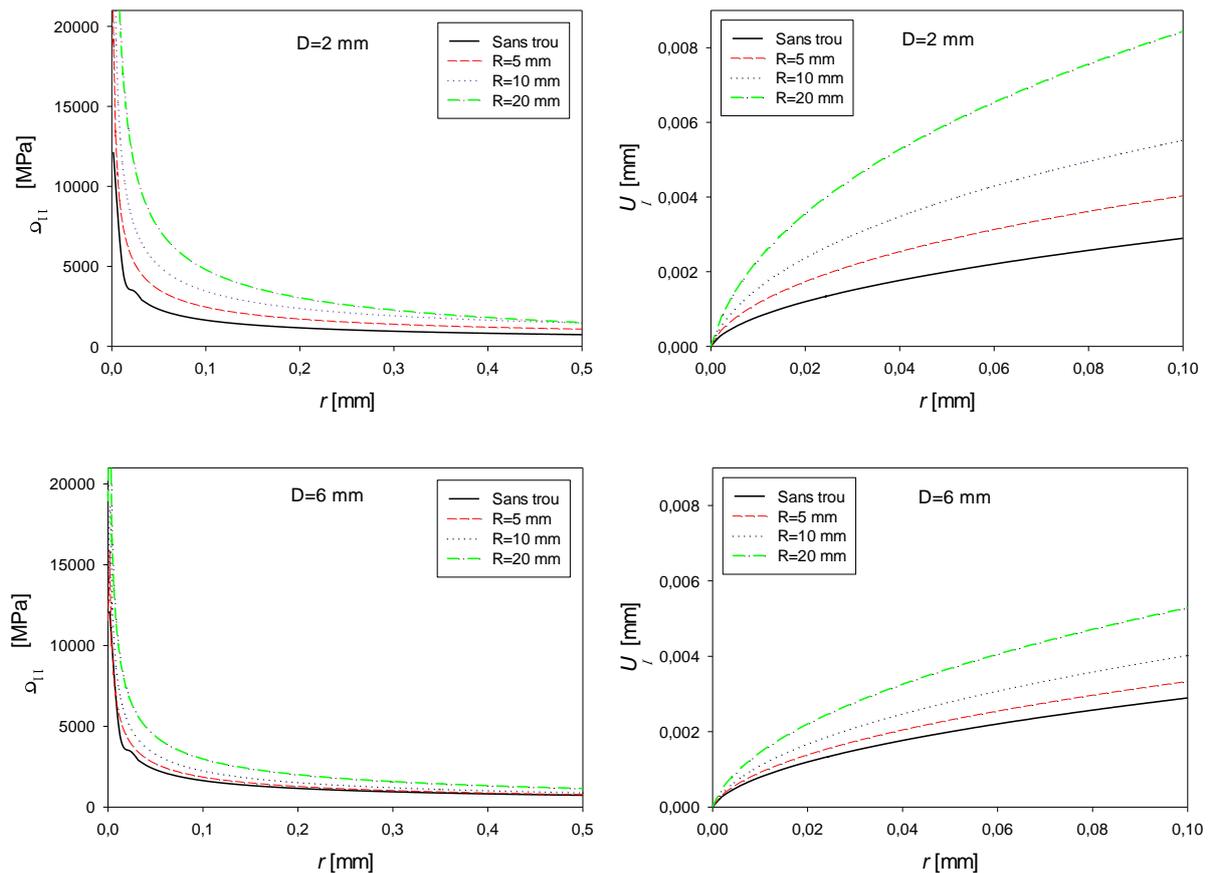
Les graphes de la FIGURE III.4 nous montrent que l'évolution du vecteur de déplacement  $U_I$  en fonction de la distance radiale, pour différentes valeurs  $D$  et pour chaque  $R$  fixé. On peut constater que le comportement de  $U_I$ , est le même pour les différentes valeurs de  $R$ . En effet, il a une valeur minimale à la pointe de la fissure et augmente quand s'éloigne de la pointe de la fissure. Comme la contrainte  $\sigma_{11}$ , on remarque aussi que les valeurs de  $U_I$ , augmentent inversement par rapport à la distance  $D$  et proportionnellement à  $R$ .

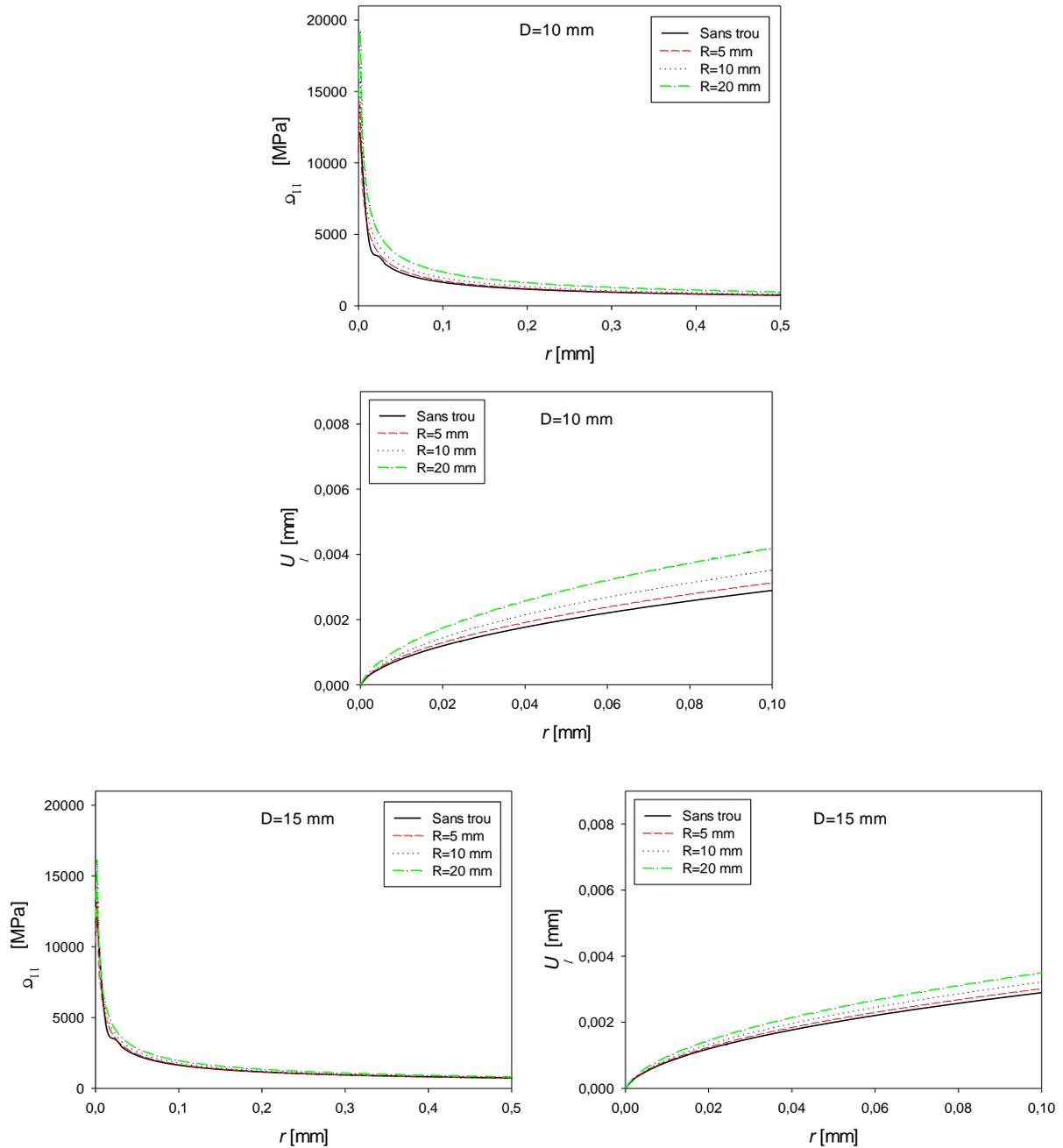




**FIGURE III.4 :** Variation de  $U_r$  en fonction de  $r$  pour différentes valeurs de  $D$  et  $R$  fixé, en mode I.

Les graphes de la FIGURE III.5 nous montrent l'évolution de  $\sigma_{11}$  et de  $U_r$  en fonction de la distance radiale, pour différentes valeurs  $R$  et pour chaque  $D$  fixé. On remarque qu'à mesure que  $D$  augmente, la perturbation des champs de contraintes et de déplacements diminue, quelle que soit la taille du rayon  $R$ .



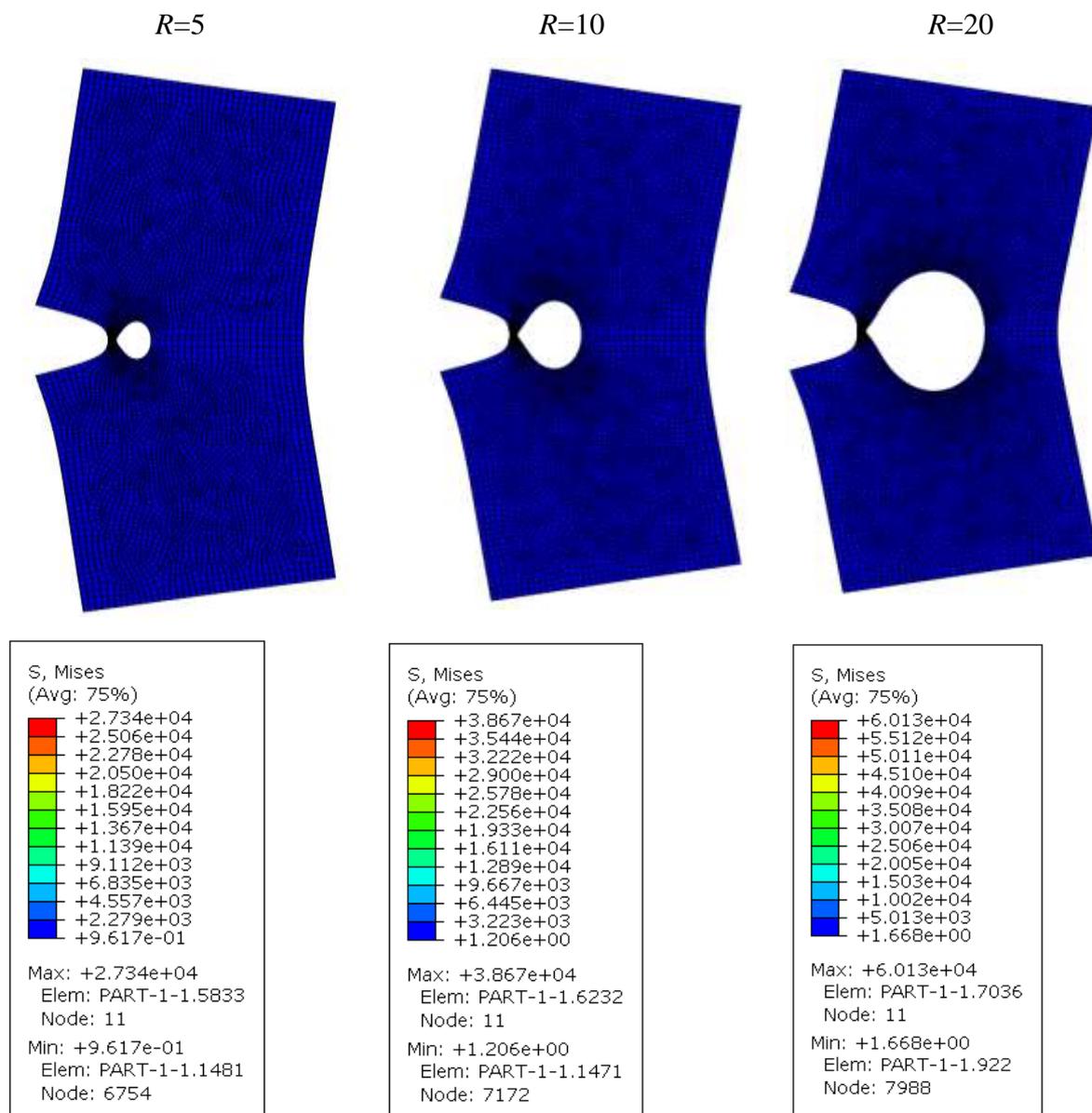


**FIGURE III.5:** Variation de  $\sigma_{11}$  et  $U_I$  en fonction de  $r$  pour différentes valeurs de  $R$  et  $D$  fixé, en mode I.

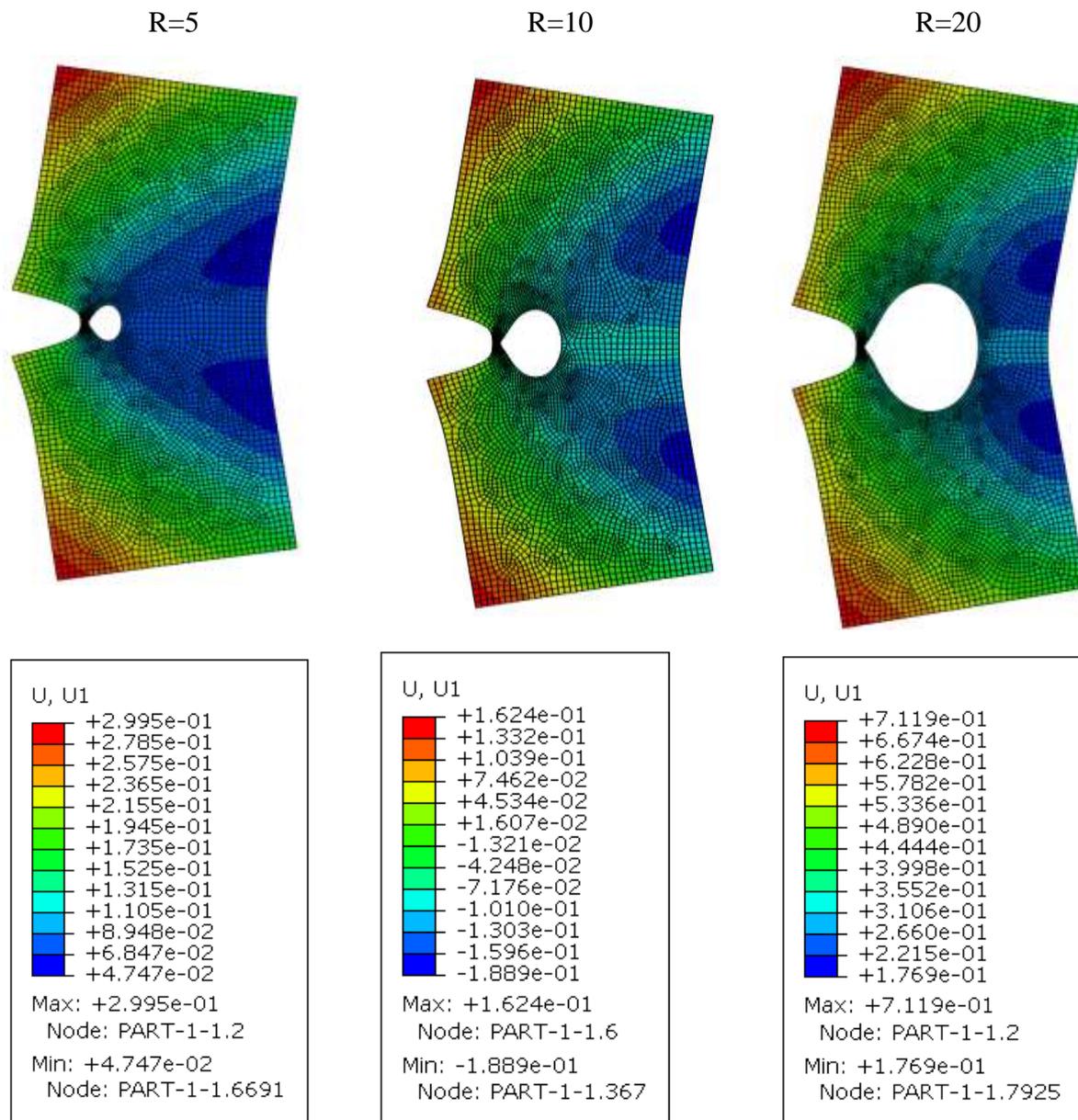
### III.4. Influence du rayon du trou sur les champs des contraintes et de déplacement

D'après les résultats illustrés précédemment et à l'aide des FIGURE III.6-7, nous pouvons constater que le rayon  $R$  influence grandement les champs des contraintes et des

déplacements à la pointe de la fissure. On remarque aussi que pour le même chargement l'angle d'ouverture de la fissure grandit à mesure que  $R$  augmente.



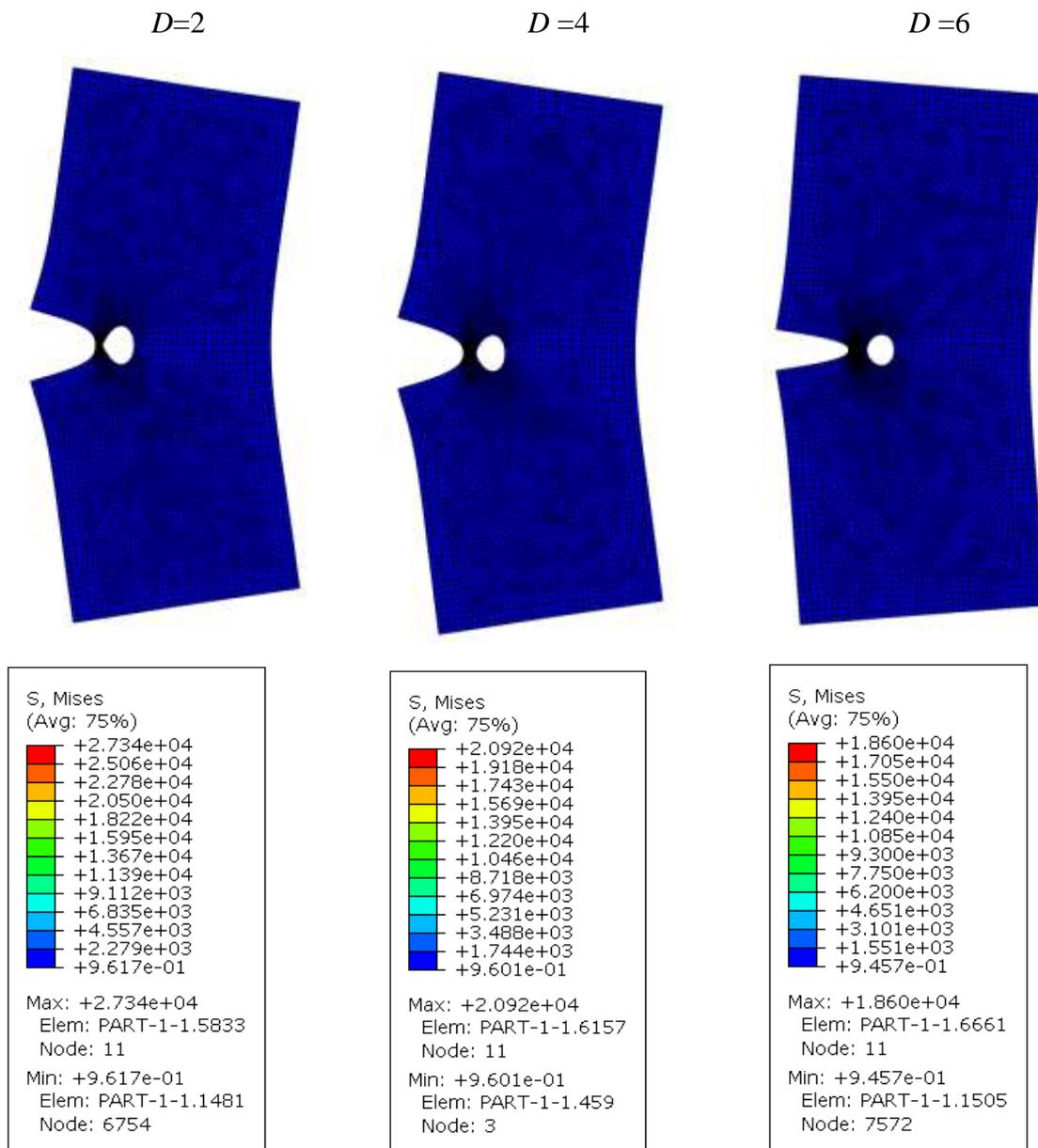
**FIGURE III.6 :** Influence du rayon trou  $R$  sur la distribution des contraintes von Mises, pour un  $D=2$ .



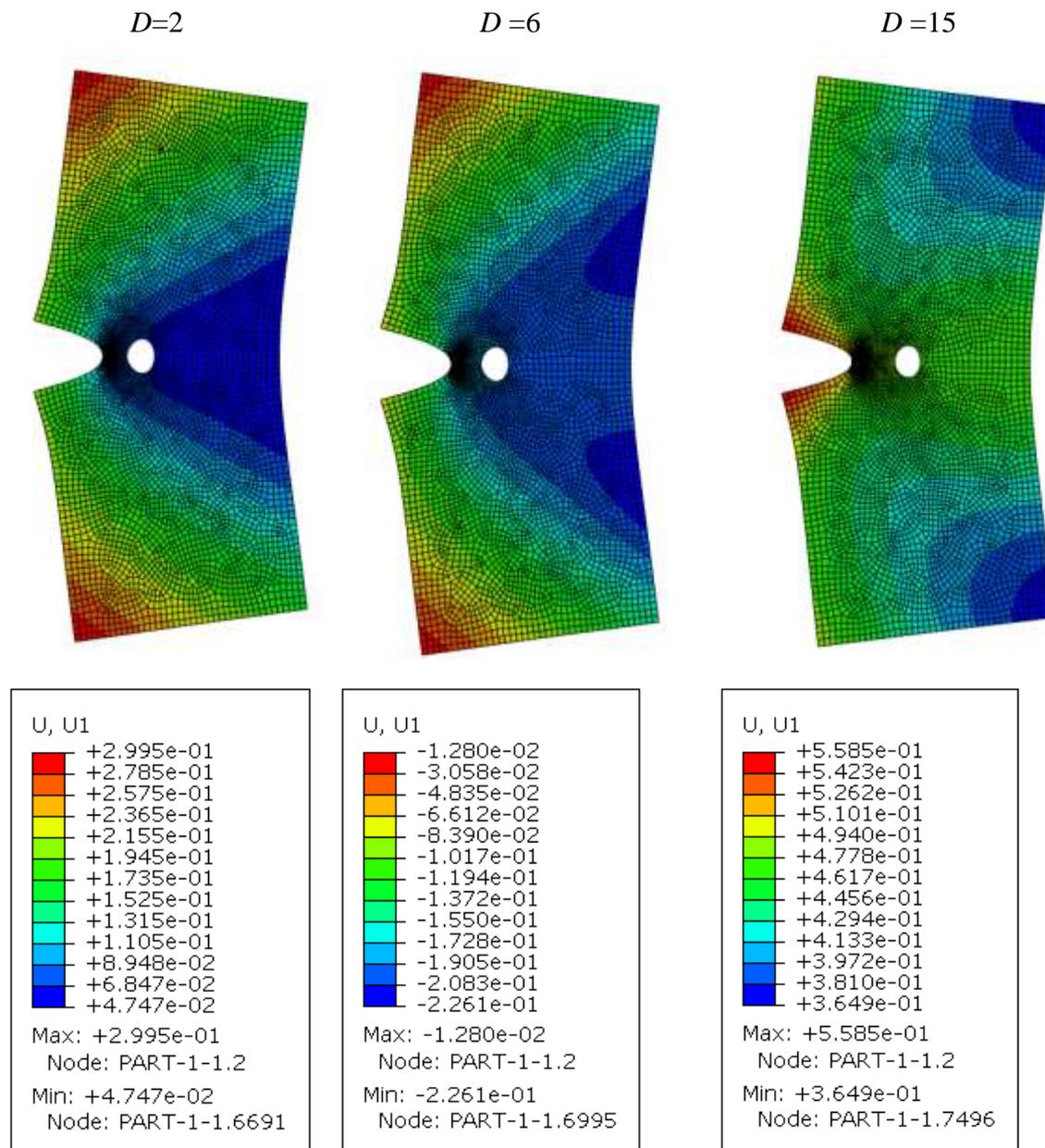
**FIGURE III.7 :** Influence du rayon trou sur la distribution des déplacements  $U_1$ , pour un  $D=2$ .

### III.5. Influence de la distance $D$ sur les champs des contraintes et de déplacement

D'après les résultats illustrés précédemment et ceux de la FIGURE III.8, nous pouvons constater que la distance  $D$  influence modérément les champs des contraintes et des déplacements à la pointe de la fissure. On remarque aussi que pour le même chargement l'ouverture de la fissure diminue à mesure que  $D$  augmente.



**FIGURE III.8** : Influence de la distance  $D$  sur la distribution des contraintes de von Mises, pour un  $R=5$



**FIGURE III.9 :** Influence de la distance  $D$  sur les déplacements  $U_1$ , pour un  $R=5$ .

### III.6. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons utilisé le logiciel commercial ABAQUS pour mener plusieurs simulations pour démontrer l'influence des différents paramètres géométrique du tous ( $R$  et  $D$ ), sur la distribution des contraintes et des déplacements au voisinage d'une fissure. Après l'exploitation des résultats, nous avons démontré que l'influence du rayon  $R$  sur les champs de contraintes et de déplacements devient quasi-inexistante à mesure que la distance  $D$  augmente, c.-à-d. quand on s'éloigne de la fissure. Autrement dit, la propagation de la fissure n'est pas obligatoire en présence d'un trou.

---

## **Conclusion générale et perspectives**

---

## Conclusion générale et perspective

L'importance croissante de la simulation numérique dans le processus de conception industriel a entraîné une augmentation importante du nombre de problèmes accessibles par les méthodes numériques modernes. Que ce soit en simulation du phénomène de rupture ou dans d'autres domaines de la mécanique, la méthode des Éléments Finis a été largement développée et utilisée. Elle est désormais capable d'aller bien au-delà des simulations statiques élastiques linéaires. Un certain nombre de problèmes sont cependant plus difficilement accessibles à la méthode des éléments finis. La difficulté vient alors du fait que l'on doit représenter explicitement la discontinuité à l'aide du maillage et ce quel que soit sa nature (interface entre deux matériaux, changement de phase, fissure, interaction fluide-structure...).

Ce travail nous a permis d'appréhender une méthodologie de recherche scientifique en utilisant la méthode des éléments finis, afin d'étudier l'influence d'un trou sur les champs de contrainte et les déplacements au voisinage de la pointe de fissure, pour les matériaux élastiques linéaires. L'objectif de cette étude est de prédire l'effet de la distance du trou par rapport à la pointe de la fissure et son diamètre, sur les champs de contrainte et les déformations au voisinage de la pointe de fissure en mode I. Pour ce faire, nous avons développé notre travail selon trois axes :

Premièrement, il convenait de présenter les techniques analytiques et numériques développées en mécanique de la rupture, pour appréhender les phénomènes de rupture des matériaux fragiles.

Dans un second lieu, il a fallu présenter la géométrie de l'éprouvette utilisée au cours de notre étude pour les simulations par la méthode des éléments finis. Les étapes nécessaires à la création d'un modèle numérique avec les principaux modules disponibles qui ont été détaillées en mode I.

La dernière partie, la méthode des éléments finis a été utilisée afin de prédire les contraintes et les déformations au voisinage d'une pointe de la fissure dans le cadre de la mécanique linéaire élastique de la rupture, sous un chargement en mode I. Une comparaison entre les résultats numériques issus de la MEF et les solutions analytiques a été effectuée, en termes de contraintes et de déplacement sans prendre le trou en considération. Cette étape nous permet la validation de notre modèle numérique. Dans un second temps, on s'intéresse à l'évolution des contraintes et des déformations au voisinage d'une pointe de la fissure, en

présence d'un trou. Il s'est avéré que son influence diminue considérablement à mesure qu'il s'éloigne de la pointe de la fissure.

En perspective, il serait intéressant d'étudier l'influence de trou sur les champs de contrainte et les déformations au voisinage de la pointe de fissure pour les matériaux élastiques linéaires en mode mixte, afin de mieux montrer la pertinence des deux critères. De plus, faire la même étude en mode I et mixte I+II, en prenant en compte plusieurs trous à la fois.

---

## Références bibliographiques

1. The theory of rupture. Proc. 1st inter. Congress Appl. Mech. P55-63. Biezeno. Burgers Ed. Waltman (1925).
2. Analysis of stresses and strains near the end of crack traversing a plate. Journal of Applied Mechanics, 24, 361-364
3. Marigo, J.-J.: Plasticité et rupture. (2016).
4. Le, B.D.: Modélisation discrète en mécanique de la rupture des matériaux fragiles. Strasbourg (2013)
5. Griffith, A.: The phenomena of flow and rupture in solids: Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. Ser. A 221, 163-198 (1920).
6. Westergaard, H.M.: Bearing pressures and cracks. Trans AIME, J. Appl. Mech. 6, 49-53 (1939).
7. Irwin, G.R.: Analysis of stresses and strains near the end of a crack transversing a plate. Trans. ASME, Ser. E, J. Appl. Mech. 24, 361-364 (1957).
8. Rice, J.R.: A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. Journal of Applied Mechanics 35(2), 379-386 (1968).
9. Bui, H.: Dual path independent integrals in the boundary-value problems of cracks. Engineering Fracture Mechanics 6(2), 287-296 (1974).
10. Editor: American Airlines – Airbus – A300-605R (N14053) flight AA587. Aviation accidents, (2001) (<https://www.aviation-accidents.net/american-airlines-airbus-a300-605r-n14053-flight-aa587/>).
11. Proudhon, H., Cailletaud, G.: Mécanique de la rupture, MINES ParisTech, Centre des matériaux, CNRS UMR 7633. (2011).
12. Naman recho. « Rupture par fissuration des structures ». Edition Hermès, Paris, 1995
13. Bui, H.: Introduction à la mécanique de la rupture. Rupture Contrôle Sécurité, Conseil National de Recherches Canada, Institut de Génie des Matériaux, 3-5 (1980).

- 
14. Naman, R.: Mécanique de la rupture par fissuration. Lavoisier, (2012)
  15. Williams, M.: On the stress distribution at the base of a stationary crack J. of Appl. Mech. Vol, 109-II104 (1957).
  16. Muskhelishvili, N.I.: Certain Fundamental Problems of the Mathematical Theory of Elasticity. Izd-vo Nauka, Moscow (1966).
  17. Knott, J.F.: Fundamentals of fracture mechanics. Gruppo Italiano Frattura, (1973)
  18. Bui, H.D.: Introduction aux problèmes inverses en mécanique des matériaux. (1993).
  19. Jan, Y.: Modélisation de la propagation de fissure sur des structures minces, soumises à des sollicitations intenses et rapides, par la méthode X-FEM. (2016)
  20. j.albinmousa et al./engineering fracture mechanics 78(2011)3300-3307
  21. Sih, G.C.: Strain-energy-density factor applied to mixed mode crack problems. International Journal of Fracture 10(3), 305-321 (1974).
  22. Fiordalisi, S.: Modélisation tridimensionnelle de la fermeture induite par plasticité lors de la propagation d'une fissure de fatigue dans l'acier 304L. Chasseneuil-du-Poitou, Ecole nationale supérieure de mécanique et d ... (2014)
  23. G. Irwin. Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate. J. of Applied Mechanics, 24 :361–364, 1957.
  24. Bonnet, d.M., Frangi, A.: Analyse des solides déformables par la méthode des éléments finis. European Journal of Computational Mechanics/Revue Européenne de Mécanique Numérique 16(5), 667-668 (2007).
  25. Givoli, D., Zusman, R.: An adaptive finite element framework for fatigue crack propagation. International Journal for Numerical Methods in Engineering 54(1), 111-135 (2002).
  26. Dhondt, G.: Automatic 3-D mode I crack propagation calculations with finite elements. International Journal for Numerical Methods in Engineering 41(4), 739-757 (1998).
  27. Schöllmann, M., Fulland, M., Richard, H.: Development of a new software for adaptive crack growth simulations in 3D structures. Engineering Fracture Mechanics 70(2), 249-268 (2003).

28. Prabel, B.: Modélisation avec la méthode X-FEM de la propagation dynamique et de l'arrêt de fissure de clivage dans un acier de cuve REP. (2007)
29. Krishnan, V.R., Hui, C.Y., Long, R.: Finite strain crack tip fields in soft incompressible elastic solids. *Langmuir* 24(24), 14245-14253 (2008).
30. Abaqus/cae: Usel's Guide, Modeling and Visualization. (2016).
31. Organ, D.J.: Numerical solutions to dynamic fracture problems using the element-free Galerkin method. Northwestern University (1996)
32. Krysl, P., Belytschko, T.: The element free Galerkin method for dynamic propagation of arbitrary 3-D cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 44(6), 767-800 (1999).
33. Rabczuk, T., Belytschko, T.: Cracking particles: a simplified meshfree method for arbitrary evolving cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 61(13), 2316-2343 (2004).

## **Résumé**

L'objectif principal de cette étude est la contribution à l'analyse de la fissuration des matériaux élastiques linéaires, dans le cadre d'un régime quasi-statique. Dans un premier temps nous avons présenté les notions essentielles de la rupture en petites déformations, ainsi que les critères de rupture adaptés aux matériaux fragiles, ensuite nous avons cité certains points relatifs aux méthodes numériques couramment utilisées dans l'analyse de la rupture des matériaux et structures. Dans un second lieu, les étapes pour la création de l'éprouvette utilisée pour les simulations par la méthode des éléments finis, ont été détaillées en mode I. Les critères prédisent une trajectoire horizontale. Ces résultats sont consolidés par des données expérimentales extraites dans la littérature.

**Mots clés :** Critères de ruptures ; Elasticité linéaire ; Simulation par MEF.

---

## **Abstract**

The main objective of this study is to contribute to the analysis of the cracking of linear elastic materials in the quasi-static regime. In a first step, we presented the essential notions of fracture in small deformations, as well as the criteria of fracture adapted to brittle materials, then we cited some points relating to the numerical methods commonly used in the analysis of the fracture of materials and structures. In a second place, the steps for the creation of the specimen used for the simulations by the finite element method, were detailed in mode I the criteria predict a horizontal trajectory. These results are consolidated by experimental data extracted from the literature.

**Key words:** Fracture criteria; linear elasticity; FEM simulation.

---