

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



Université A/Mira de Béjaïa  
Faculté des Sciences Exactes  
Département de Mathématiques

## Mémoire de fin d'études

En  
Mathématiques

Spécialité :  
*Probabilités Statistique et Applications*

## Thème

Analyse du système d'attente M/M/1 avec  
impatience et vacances du serveur

Présenté par : M. SAIDANI Mohamed Zakaria

Devant le jury :

Mr SOUFIT Massinissa	Président	M.C.B	U. A/Mira Béjaïa.
Mme BOURAINÉ Louiza	Rapporteur	Professeur	U. A/Mira Béjaïa.
Mme IDJIS Khelidja	Examinatrice	M.C.B	U. A/Mira Béjaïa.

## *\* Remerciements \**

À terme de mon modeste travail, je tiens à remercier avant tout, le Dieu le tout puissant de m'avoir accordé la volonté, force, santé, détermination et courage afin d'accomplir mon mémoire.

Un grand merci aux membres de ma famille pour leurs présences, leurs préoccupations et leurs soucis qu'ils se fassent pour nous, leur encouragement et leur suivi avec patience du déroulement de ce travail.

Je tiens également à remercier Mme. BOURAINE Louiza, ma promotrice pour l'honneur qu'elle ma fait en assurant la direction du présent mémoire, je la remercie pour précieux conseils et orientations.

Je remercie *M<sup>r</sup>* SOUFIT Massinissa d'avoir accepter de présider le jury. Ainsi Mme. IDJIS Khelidja d'avoir accepter d'évaluer mon travail à sa juste valeur.

Que toute personne qu'a contribué, de près ou loin, à l'élaboration de ce mémoire, veuillez bien trouvez ici l'expression de mes sincères remerciements.

J'espère que ce mémoire saura combler vos attentes.

※ *Dédicaces* ※

Du profond de mon cœur, je dédie ce travail...

À celle qui m'a transmis la vie, l'amour, le courage, à toi ma très chère et douce grande mère  
(Betitera Saifi).

À mes chers parents Tahar Saidani et Mira Itim.

À mon chère ami Ali Assoul, en témoignage de l'amitié qui nous unis et des souvenirs de tous les moments que nous avons passés ensemble, je te souhaite une vie pleine de santé et de bonheur, tu es pour moi un ami sur qui je peux compter.

À mes chères sœurs Rania Saidani et Fatima Saidani, en témoignage de l'attachement, de l'amour que je porte pour vous, je vous dédie ce travail avec tous mes vœux de bonheur, de santé et de réussite.

À mes chères tantes Ouardia Itim et Karima Itim.

À mes chers frères Amar Saidani, Fayçel Ider et Faouzi Bensaci.

À ma meilleure amie Ryma Dridi.

À mes chères ami(e)s :

Amine Nait, Farid Azzoug, Abdou Soultan, Leila Haddad, Ikram Zemmoura, Aimad Aissi,  
Mazigh Mazouzi.

*M. Mohamed Zakaria Saidani*

# Table des matières

Table des matières	i
Table des figures	iii
Liste des tableaux	iv
Introduction générale	1
<b>1 Processus aléatoires et phénomènes d'attente</b>	<b>4</b>
1.1 Fonctions génératrices de probabilités . . . . .	4
1.1.1 Définitions et propriétés . . . . .	4
1.1.2 Exemples de fonctions génératrices de probabilités . . . . .	5
1.1.3 Propriétés . . . . .	5
1.2 Processus aléatoires . . . . .	5
1.3 Chaîne de Markov . . . . .	6
1.4 Processus de Poisson . . . . .	7
1.4.1 Processus de Comptage . . . . .	7
1.4.2 Processus de Poisson . . . . .	8
1.5 Processus de naissance et de mort . . . . .	8
1.5.1 Régime transitoire . . . . .	9
1.5.2 Régime stationnaire . . . . .	10
1.6 Phénomènes d'attente . . . . .	11
1.6.1 La description d'un phénomène d'attente simple . . . . .	11
1.6.2 Notation de Kendall . . . . .	11
1.6.3 Analyse opérationnelle des systèmes de file d'attente . . . . .	12
1.6.4 Files d'attente markoviennes . . . . .	13
<b>2 Analyse du système M/M/1 avec vacances et impatience dépendant de l'état du serveur</b>	<b>19</b>
2.1 Modèle A : M/M/1 (Multiple Vacation Policy) (M.V.P) . . . . .	20
2.1.1 Description du modèle A . . . . .	20
2.1.2 Les équations de balance et les fonctions génératrices . . . . .	21

---

2.1.3	Solutions des équations différentielles . . . . .	22
2.1.4	Calcul de $P_{00}$ , $P_{\bullet 0}$ et $P_{\bullet 1}$ . . . . .	23
2.1.5	Mesures de performance . . . . .	24
2.1.6	Illustration numérique . . . . .	25
2.2	Modèle B : M/M/1 (Single Vacation Policy) (S.V.P) . . . . .	30
2.2.1	Description du modèle B . . . . .	30
2.2.2	Equations de Balance et les fonctions génératrices . . . . .	30
2.2.3	Solutions des équations différentielles . . . . .	31
2.2.4	Calcul de $P_{00}$ , $P_{\bullet 0}$ et $P_{\bullet 1}$ . . . . .	32
2.2.5	Mesures de performance . . . . .	33
2.2.6	Illustration numérique . . . . .	34
2.3	Comparaison des deux politiques de vacances . . . . .	38
	<b>Conclusion</b>	<b>40</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>41</b>

# Table des figures

1.1	Le graphe de transition du processus de naissance et de mort. . . . .	10
1.2	Structure d'un système de files d'attente. . . . .	11
1.3	Graphe de transitions du modèle M/M/1. . . . .	13
1.4	Graphe de transitions du modèle M/M/1/K. . . . .	14
1.5	Graphe de transitions du modèle M/M/s. . . . .	16
2.1	Un modèle de file d'attente avec des vacances multiples et clients impatientes. . . . .	20
2.2	Graphe des transitions du M/M/1 avec M.V.P. . . . .	21
2.3	Mesures des performances pour différentes valeurs de $\xi_0$ . . . . .	26
2.4	Mesures des performances pour différentes valeurs de $\xi_1$ . . . . .	28
2.5	Mesures des performances pour différentes valeurs de $\gamma$ . . . . .	29
2.6	Graphe des transitions de M/M/1 avec S.V.P. . . . .	30
2.7	Mesures des performances pour différentes valeurs de $\xi_0$ . . . . .	35
2.8	Mesures des performances pour différentes valeurs de $\xi_1$ . . . . .	36
2.9	Mesures des performances pour différentes valeurs de $\gamma$ . . . . .	37

# Liste des tableaux

2.1	Mesures des performances pour différentes valeurs de $\xi_0$ . . . . .	26
2.2	Mesures des performances pour différentes valeurs de $\xi_1$ . . . . .	27
2.3	Mesures des performances pour différents valeurs de $\gamma$ . . . . .	29
2.4	Mesures des performances pour différentes valeurs de $\xi_0$ . . . . .	34
2.5	Mesures des performances pour différentes valeurs de $\xi_1$ . . . . .	36
2.6	Mesures des performances pour différentes valeurs de $\gamma$ . . . . .	37

# Introduction générale

Les files d'attente jouent un rôle important dans la modélisation des problèmes de la vie quotidienne. Les modèles de files d'attente sont largement utilisés dans divers domaines tels que l'informatique, les services d'urgence, les télécommunications, la logistique militaire etc. Cette théorie tire son origine des recherches de l'ingénieur Danois Agner Krarup Erlang sur la gestion des réseaux téléphonique de Copenhague entre (1909-1920). En 1909, Erlang a publié son premier article intitulé "The theory of probabilities on Telephone conversations" et au début des années 1920, il a développé le fameux modèle d'Erlang pour évaluer les probabilités de perte des conversations. C'est grâce aux apports des mathématiciens Khintchine, Palm, Kendall, Pollaczek et Kolmogrov que ce domaine de recherche s'est vraiment développé.

Le modèle classique des files d'attente est utilisé dans de nombreux domaines, tels que la planification des capacités, l'optimisation des opérations, la gestion des files d'attente dans les systèmes de transport, les centres d'appels, les services bancaires, les restaurants, et plus encore. Il permet d'optimiser les ressources, de réduire les temps d'attente et d'améliorer la satisfaction des clients en fournissant des prévisions et des mesures quantitatives.

Le modèle de file d'attente avec vacances de serveurs (absences de serveurs) a été étudié au cours des quatre dernières décennies et appliqué avec succès dans de nombreux domaines tels que les systèmes de fabrication, les systèmes et réseaux informatiques et les systèmes de télécommunication. D'excellentes études sur les travaux antérieurs des modèles de vacances ont été rapportés par Doshi (1986) [10], Takagi (1991) [20], Tian et Zhang (2006) [21].

L'impatience des clients a été traitée dans le passé, voir les travaux de Palm [17, 18] et de Barrer [6], principalement dans le contexte de l'abandon de la file d'attente par les clients en raison d'une longue attente déjà vécue, ou une longue attente prévue à l'arrivée. Le phénomène d'abandons et son importance par rapport à la stabilité des "centres d'appel" a été étudié par plusieurs auteurs [2]. Le lecteur peut être orienté à l'article de synthèse de Gans et al.(2003) [11]. Cependant, il existe des situations où l'impatience des clients est due à l'absence de serveurs à l'arrivée, en particulier, si un client arrivant ne voit aucun serveur présent dans le système, il peut abandonner la file d'attente si aucun serveur ne se présente au bout d'un certain temps. Comme conséquence, plusieurs travaux dans la littérature concernent l'analyse des systèmes d'attente avec vacances des serveurs et impatience des clients (voir [14]).

Les systèmes d'attente avec vacances du serveur et impatience des clients font partie des extensions du modèle classique des files d'attente qui prennent en compte des éléments supplémentaires pour mieux représenter la réalité de certaines situations. Dans ces systèmes, le serveur peut prendre des vacances ou des pauses pendant lesquelles il n'est pas disponible pour servir les clients. Au centre d'appels, les agents peuvent prendre des pauses régulières ou des pauses déjeuner. En plus des vacances du serveur, les systèmes d'attente peuvent également prendre en compte l'impatience des clients. Cela signifie que certains clients peuvent ne pas être disposés à attendre indéfiniment et peuvent abandonner la file d'attente si leur attente dépasse une certaine limite. L'impatience des clients peut être modélisée de différentes manières.

Dans la pratique, plusieurs situations peuvent être modélisées par les modèle d'attente avec impatiences et vacances du serveur [9] :

Supposons que nous ayons un système stochastique de production et d'inventaire à plusieurs machines. Une fois que l'inventaire a atteint le niveau cible (c'est-à-dire lorsque les serveurs sont inactifs), tous les serveurs peuvent être assignés à une période de vacances consécutivement jusqu'à ce qu'ils trouvent des unités en attente à la fin d'une vacance. Supposons que le système suive un mode de production (fabrication à partir du stock). La longueur de la file d'attente dans notre modèle correspond donc au nombre des produits en dessous du niveau de stock cible. Les demandes unitaires sont bloquées lorsque le système est plein et peuvent se mettre dans une file d'attente inobservable pendant la période de travail, tandis que pendant la période de vacances, elles décident de rejoindre la file d'attente ou non en fonction de la taille de celle-ci. Lorsqu'un client entrant dans le système, s'il trouve au moins un serveur inactif, il est immédiatement pris en charge. Dans le cas contraire, il attend dans la file, peut s'impatienter et abandonner le système sans service après un long temps d'attente, qui peut être dû à des délais de mise en place. Le comportement impatient des clients a un impact très négatif sur la génération des activités du revenu. Il sera donc intéressant d'envisager certaines stratégies pour retenir les clients et ne pas abandonner. Un client impatient peut être persuadé de rester dans le système en utilisant certains mécanismes convaincants, tels que l'augmentation du taux de service ou l'ajout de canaux de services supplémentaires dans le système.

Le régime transitoire du système  $M/M/1$  avec impatience des clients et vacance du serveur à été étudié par Ammar dans plusieurs travaux (voir [3], [4] et [5]).

L'objectif de notre travail concerne l'analyse du régime stationnaire du système d'attente markoviens  $M/M/1$  avec impatience des clients et vacances de travail du serveur. Nous considérons deux modèles relativement aux type de vacances du serveur à savoir vacance unique (Single Vacation Policy) (S.V.P) et vacances multiples (Multiple Vacation Policy) (M.V.P). En se basant sur l'article de Yue et al. (2016) [22], nous déterminons les fonctions génératrices du nombre de clients dans le système et nous calculons ainsi quelques mesures de performances.

Ce mémoire est composé de deux chapitres.

- Dans le premier chapitre, nous présentons le concept des fonctions génératrices de probabilités,

nous décrivons quelques processus aléatoires importants et très utilisés dans la modélisation des problèmes pratiques et nous analysons des systèmes de files d'attente simples, tels que  $M/M/1$ ,  $M/M/1/K$ ,  $M/M/s$  et  $M/M/\infty$ .

- Dans le deuxième chapitre, nous présentons les résultats analytiques du modèle  $M/M/1$  avec impatience et politique de vacances multiples et unique. En utilisant la méthode des fonctions génératrices, nous calculons quelques mesures de performances importantes. Une étude numérique, concernant l'effet du taux d'impatience et du taux de vacances sur les caractéristiques du système est réalisée.
- Le mémoire s'achève avec une conclusion et quelques perspectives de recherche et une bibliographie.

# Processus aléatoires et phénomènes d'attente

## Introduction

La théorie des files d'attente, ou des queues, constitue un outil théorique et pratique pour la modélisation des systèmes réels. Voir par exemple [7], [13] et [15].

Cette théorie a pour objet l'étude des systèmes ou des entités, appelés clients qui réclament un service. L'analyse mathématique de ces systèmes nécessite l'étude des différents processus aléatoires tels que le processus des arrivées, processus de service, le processus comptant le nombre de clients dans le système, etc ...

Ce chapitre comporte deux parties relatives à la théorie des files d'attente. Dans la première partie, nous présentons le concept des fonctions génératrices de probabilités et nous décrivons quelques processus aléatoires importants et très utilisés dans la modélisation des problèmes pratiques. La deuxième partie sera consacrée à l'analyse des systèmes d'attente simples.

## 1.1 Fonctions génératrices de probabilités

Les fonctions génératrices sont largement utilisées en mathématiques et jouent un rôle important en théorie des probabilités.

### 1.1.1 Définitions et propriétés

Considérons une variable aléatoire discrète à valeurs non négatives de loi de probabilité  $P_k = \mathbb{P}(X = k)$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$ .

La fonction génératrice de  $X$  est définie par

$$G_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k z^k = \mathbb{E}(z^X).$$

Notons que  $G_X(1) = 1$ , donc la série converge absolument pour  $|z| \leq 1$ . Aussi  $G_X(0) = P_0$ .

### 1.1.2 Exemples de fonctions génératrices de probabilités

- (i) Si  $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(p)$  (Bernoulli de paramètre  $0 < p < 1$ )  
 $P_k = p^k(1-p)^{1-k}, k \in \{0, 1\}, G_X(z) = q + pz$  avec  $q = 1 - p$
- (ii) Si  $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n, p)$  (Binomiale de paramètre  $p$ )  
 $P_k = C_n^k p^k q^{n-k}, \forall k \in \{0, 1, \dots, n\}, G_X(z) = (q + pz)^n$
- (iii) Si  $X \rightsquigarrow Geo(p)$  (Géométrique de paramètre  $p$ ).  
 $P_k = pq^{k-1} \forall k \in \mathbb{N}^*, G_X^z = \frac{pz}{1 - qz}, |z| \leq \frac{1}{q}.$
- (iv) Si  $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$  (Poisson de paramètre  $\lambda$ )  
 $P_k = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, G_X(z) = e^{\lambda(z-1)}.$

### 1.1.3 Propriétés

1. Si  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires de fonctions génératrices  $G_X, G_Y$  respectivement, Alors

$$\forall z, G_X(z) = G_Y(z) \iff \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(Y = k).$$

2. Si  $X, Y$  sont deux variables aléatoires indépendantes et  $Z = X + Y$  alors,

$$G_Z(z) = G_X(z)G_Y(z).$$

3. Soit  $X$  une variable aléatoire discrète admettant les moment d'ordre  $k$ , c-à-d  $\mu_{[k]}(X) = \mathbb{E}(X(X-1)(X-2)\dots(X-k+1))$  existe ( $k > 0$ ). Alors,

$$G_X^{(k)}(1) = \frac{d^k z^k}{dz^k} = \mu_{[k]}(X).$$

En particulier  $G'_X(1) = \mathbb{E}(X)$ .

## 1.2 Processus aléatoires

Un processus stochastique (ou aléatoire) décrit l'évolution de tout phénomène produit au hasard dans le temps.

Mathématiquement, un processus aléatoire noté  $\{X_t, t \in T\}$  est une famille de variables aléatoires indicées par le paramètre  $t$  et définies sur un même espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ . Pour chaque instant  $t \in T \subset \mathbb{R}^+$ , la variable aléatoires  $X_t$ , représente l'état du processus. On peut classifier les processus stochastiques comme suit :

- (a) Processus à temps discret et à espace d'états discret.
- (b) Processus à temps continu et à espace d'états discret.
- (c) Processus à temps discret et à espace d'états continu.

(d) Processus à temps continu et à espace d'états continu.

On peut distinguer les processus stochastiques selon les relations de dépendance entre les variables aléatoires  $X_t$ , citons par exemple [16] :

(a) Processus homogène.

(b) Processus à accroissements indépendants.

(c) Processus à accroissement stationnaire.

(d) Processus markoviens qui sont caractérisés par la propriété que l'état futur ne dépend que du présent (ou du passé récent) et non pas du passé.

## 1.3 Chaîne de Markov

Les premiers processus étudiés sont les suites de variables aléatoires indépendantes, ce qui a conduit à la loi des grands nombres et au théorème central limite. Le mathématicien Russe Andreï Markov (1856-1922) poussé par la théorie des probabilités par son maître Tchebychev, qui démontrera, sous des conditions assez générales, le théorème central limite, chercha à généraliser ce théorème à des suites de variables aléatoires dépendantes. Il est amené ainsi à considérer des variables aléatoires faiblement indépendantes, c.à.d que l'évolution future ne dépend que de l'état présent, fondement de la théorie des processus auxquels fût donné son nom.

Pationné de littérature, il développa en 1912 une application des chaînes de Markov à l'étude statistique des textes : il montre que l'occurrence d'une voyelle immédiatement après une consonne est un processus de Markov en étudiant 20 000 première lettres du roman Pouchkine de Eugène Onéguine.

### Propriété de Markov

**Définition 1.3.1.** Une suite de variables aléatoires  $(X_n)_{n \geq 0}$  définies sur  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  à valeurs dans un espace  $\mathbf{E}$  discret est appelé **Chaîne de Markov**(C.M) si, pour tout  $n \geq 0$ , pour toute suite  $(i_0, i_1, \dots, i_{n-1}, i, j)$  éléments de  $\mathbf{E}$  telle que  $\mathbb{P}(X_0 = i_0, \dots, X_n = i) > 0$ , nous avons

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i).$$

L'indice de la variable étant simulé au temps,  $X_n$  : l'observation du processus à l'instant  $n$ . L'indice 0 étant initial, l'état  $X_0$  : l'état initial.

L'état  $j$  du processus à l'instant  $n + 1$  ne dépend pas du passé,  $i_0, i_1, \dots, i_{n-1}$ , mais seul de l'état présent  $i$ . Cette propriété est appelé **propriété de Markov**.

### Probabilités et matrice de transitions

**Définition 1.3.2.** Soit  $(X_n)_{n \geq 0}$  une C.M. à valeurs dans  $\mathbf{E}$ , on appelle **probabilités de transition**, la donnée, pour tout  $n \geq 0$ , pour tout  $(i, j) \in \mathbf{E}^2$  :

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i) = P_{ij}(n).$$

Une C.M. est dite **homogène** si  $P_{ij}(n)$  ne dépend pas de l'instant  $n$  :

$$\forall n \geq 0, \quad \forall (i, j) \in \mathbf{E}^2, P_{ij}(n) = P_{ij}$$

c.à.d la probabilité de transition de l'état  $i$  à l'état  $j$  ne dépend pas de l'instant auquel la transition se fait.

**Définition 1.3.3.** On appelle Matrice de transition associée à la C.M.  $(X_n)_{n \geq 0}$  la matrice stochastique  $P = (P_{ij})_{i, j \in \mathbf{E}}$ , carrée d'ordre  $Card(\mathbf{E})$  si  $\mathbf{E}$  est fini, infinie si  $\mathbf{E}$  est dénombrable, telle que  $\sum_{j \in \mathbf{E}} P_{ij} = 1$ .

### Graphe de transition

**Définition 1.3.4.** Le graphe est construit à partir de la matrice de transition ainsi, les **sommets**, sont les états et les **arrêtes** orientées représentent les  $P_{ij} > 0$ .

## 1.4 Processus de Poisson

C'est un processus à temps continu à espace d'états discret, markovien. Il décrit la réalisation dans le temps d'événements d'un type donné.

### Exemples :

- L'arrivée des clients vers un guichet de banque.
- L'apparition des pannes dans un atelier de machines
- L'arrivée des tâches dans l'unité centrale d'un ordinateur.

### 1.4.1 Processus de Comptage

**Définition 1.4.1.** Soit  $N(t)$  le nombre d'événements s'y produisant dans l'intervalle  $[0, t]$ . Le processus stochastique  $\{N(t), t \geq 0\}$  est appelé processus de comptage.

#### Propriétés

- (a)  $N(0) = 0$ .
- (b) Le processus de comptage  $\{N(t), t \geq 0\}$  est à valeurs entières et positives.
- (c) La fonction  $t \mapsto N(t)$  est croissante :  $N(t + s) - N(t) \geq 0$ , si  $0 \leq t \leq t + s$ . De plus  $N(t + s) - N(t)$  représente le nombre d'événements survenus dans l'intervalle  $[t, t + s]$ .
- (d) Les trajectoires  $t \mapsto N_t(w), w \in \Omega$  sont continues à droite et admettent une limite à gauche.

### 1.4.2 Processus de Poisson

**Définition 1.4.2.** Un processus de comptage  $\{N(t), t \geq 0\}$ , homogène dans le temps, à accroissements indépendants et pour lequel  $N(t)$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda t$ , est appelé processus de Poisson de paramètre  $\lambda$ .

**Théorème 1.4.1.** Les temps séparant deux événements consécutifs d'un processus de Poisson de paramètre  $\lambda$  sont des variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ . [19]

## 1.5 Processus de naissance et de mort

Les phénomènes de naissance et de mort interviennent dans la modélisation des systèmes de files d'attente, et permettent de façon générale de décrire l'évolution temporelle de la taille d'une population d'un type donné (Biologie, Démographie, Sociologie).

Les processus de naissance et de mort (N-M) sont des processus stochastiques à temps continu et à espace d'états discret. Il sont markoviens (sans mémoire) et à partir d'un état  $n$  donné, les transitions ne sont possibles que vers l'un ou l'autre des états voisins. On parle alors de naissance et de mort.

**Définition 1.5.1.** Soit  $\{X(t), t \geq 0\}$  un processus stochastique, à espace d'états  $\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$  et homogène dans le temps :  $\mathbb{P}(X(t+s) = j \mid X(s) = i) = P_{ij}(t)$ , ne dépend pas de  $s$ .

$\{X(t), t \geq 0\}$  est dit processus de naissance et de mort (N-M) si les conditions suivantes sont satisfaites.

- $P_{i,i+1}(\Delta t) = \mathbb{P}(X(t + \Delta t) = i + 1 \mid X(t) = i) = \lambda_i \Delta t + o(\Delta t), \quad i \geq 0.$
- $P_{i,i-1}(\Delta t) = \mathbb{P}(X(t + \Delta t) = i - 1 \mid X(t) = i) = \mu_i \Delta t + o(\Delta t), \quad i \geq 1.$
- $P_{i,i}(\Delta t) = \mathbb{P}(X(t + \Delta t) = i \mid X(t) = i) = 1 - (\lambda_i + \mu_i) \Delta t + o(\Delta t), \quad i \geq 0.$

Où  $\lambda_i > 0, \mu_i > 0$  sont les taux de transitions.

$\lambda_i$  : taux de naissance.

$\mu_i$  : taux de mort.

Le générateur infinitésimal du processus est donc une matrice dite tridiagonale  $A = (a_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$  vérifiant  $a_{ij} = 0, \quad |i - j| \geq 2.$

$$a_{nn+1} = \lambda_n, \quad a_{nn-1} = \mu_n, \quad \forall n \geq 1, \quad (a_{01} = \lambda_0)$$

$$A = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \mu_1 & -(\lambda_1 + \mu_1) & \lambda_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2 + \mu_2) & \lambda_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}$$

**Remarque 1.5.1.** Les files d'attente de type markovien sont des cas particuliers très importants

de processus de naissance et de mort. Leur étude complète sera effectuée dans la sous-section (1.6.4).

### 1.5.1 Régime transitoire

On cherche les probabilité d'état  $P_n(t) = P(X(t) = n)$ .

D'après la formule des probabilités totales, on a pour  $n \geq 1$ ,

$$\begin{aligned}
 P_n(t + \Delta t) &= \mathbb{P}(X(t + \Delta t) = n), \\
 &= \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}(X(t + \Delta t) = n \mid X(t) = i) \mathbb{P}(X(t) = i), \\
 &= \sum_{i=0}^{\infty} P_i(t) P_{in}(\Delta t), \\
 &= P_{n-1}(t) P_{n-1n}(\Delta t) + P_n(t) P_{nn}(\Delta t) + P_{n+1}(t) P_{n+1n}(\Delta t) + \sum_{i=n+2}^{\infty} P_i(t) P_{in}(\Delta t). \\
 &= P_{n-1}(t) \lambda_{n-1} \Delta t + P_n(t) [1 - (\lambda_n + \mu_n) \Delta t] + P_{n+1}(t) \mu_{n+1} \Delta t + o(\Delta t). \\
 \frac{P_n(t + \Delta t) - P_n(t)}{\Delta t} &= -(\lambda_n + \mu_n) P_n(t) + \lambda_{n-1} P_{n-1}(t) + \mu_{n+1} P_{n+1}(t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t},
 \end{aligned}$$

quand  $\Delta t \rightarrow 0$  on aura

$$P'_n(t) = -(\lambda_n + \mu_n) P_n(t) + \lambda_{n-1} P_{n-1}(t) + \mu_{n+1} P_{n+1}(t), \quad n \geq 1,$$

de la même manière, on obtient pour  $n = 0$

$$P'_0(t) = -\lambda_0 P_0(t) + \mu_1 P_1(t).$$

Les équations

$$\begin{aligned}
 P'_n(t) &= -(\lambda_n + \mu_n) P_n(t) + \lambda_{n-1} P_{n-1}(t) + \mu_{n+1} P_{n+1}(t), \quad n \geq 1. \\
 P'_0(t) &= -\lambda_0 P_0(t) + \mu_1 P_1(t), \quad n = 0.
 \end{aligned}$$

Sont appelés les équations différentielles de Chapman Kolmogorov.

Si de plus, on connaît les conditions initiales c-à-d  $q_i = P(X(0) = i)$ , on détermine ainsi le régime transitoire du processus.

$$P_n(t) = \sum_{i=0}^{\infty} q_i P_{in}(t).$$

**Remarque 1.5.2.** En général, ces équations sont difficiles à résoudre, on ne considère alors que le régime stationnaire du processus.

$$P_n = \lim_{t \rightarrow \infty} P_n(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X(t) = n) = \mathbb{P}(X = n).$$

### 1.5.2 Régime stationnaire

Dans ce cas les équations de Kolmogorov deviennent :  $\lim_{t \rightarrow \infty} P'_n(t) = 0, \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots$

$$\mu_1 P_1 = \lambda P_0, \quad n = 0$$

$$\lambda_{n-1} P_{n-1} + \mu_{n+1} P_{n+1} = (\lambda_n + \mu_n) P_n, \quad n \geq 1.$$

Pour résoudre ce système d'équations linéaires, on additionne les  $(n + 1)$  premières équations, on trouve  $\lambda_n P_n = \mu_{n+1} P_{n+1}, \quad \forall n \geq 0$ , en admettant  $\lambda_0 > 0$  :

$$\begin{aligned} P_n &= \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} P_0, \quad \forall n \geq 1, \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} P_0. \end{aligned}$$

Comme  $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1 \Rightarrow P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \prod_{i=1}^n \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} \right) P_0 = 1$ , d'où

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \prod_{i=1}^n \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} \right)}.$$

Pour que le régime stationnaire existe, il faut que la somme ci-dessus converge.

**Remarque 1.5.3.** Si l'espace des états est fini, cette somme converge et le régime stationnaire existe.

#### Graphes de transition

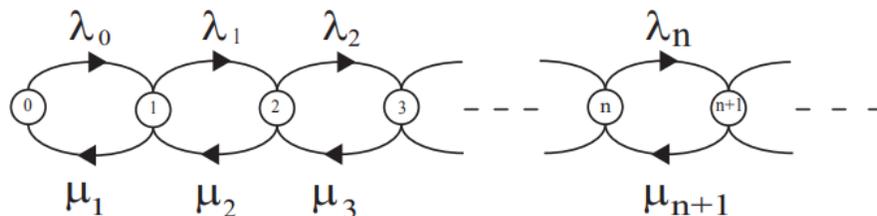


FIGURE 1.1 – Le graphes de transition du processus de naissance et de mort.

**Remarque 1.5.4.** Le taux de variation  $P'_n(t)$  de la masse attribuée à l'état  $n$  est égale à la différence du flux d'entrée et le flux de sortie de cet état, ce qui nous fournit directement les équations de Kolmogorov.

$$\begin{aligned} P'_n(t) &= -(\lambda_n + \mu_n) P_n(t) + \lambda_{n-1} P_{n-1}(t) + \mu_{n+1} P_{n+1}(t), \quad n \geq 1. \\ P'_0(t) &= -\lambda_0 P_0(t) + \mu_1 P_1(t), \quad n = 0. \end{aligned}$$

## 1.6 Phénomènes d'attente

### 1.6.1 La description d'un phénomène d'attente simple

Un phénomène d'attente peut être décrit comme un système stochastique composé d'un certain nombre de places d'attente, d'une ou plusieurs stations de service. Le serveur peut être un serveur humain, un central téléphonique, un serveur informatique... Les clients arrivent de la source à des instants aléatoires, ils attendent, se font servir selon des règles spécifiées et quittent le système, quand les serveurs sont tous occupés, les clients doivent alors patienter dans une file d'attente jusqu'à ce qu'un serveur soit disponible. Comme illustré par la figure (1.2).

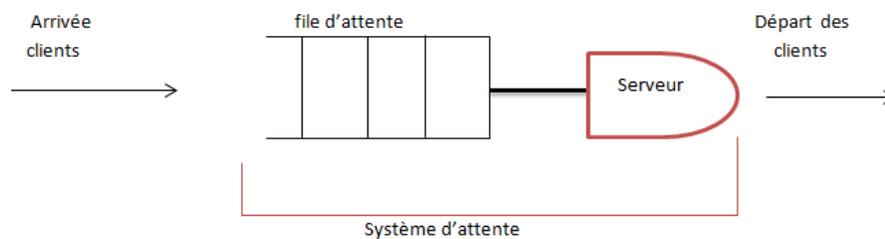


FIGURE 1.2 – Structure d'un système de files d'attente.

### 1.6.2 Notation de Kendall

Une notation symbolique a été développée par David George Kendall pour représenter les files d'attente simples, en 1953. La notation de Kendall nous permet de décrire un système d'attente, sous la forme suivante :

$$A/B/C/D/E/F$$

1. A : décrit la nature du processus des arrivées. Les codes utilisés sont :

**M** : Loi exponentielle (processus de poisson).

**G** : Loi générale.

**GI** : Loi générale indépendante.

**D** : Loi déterministe.

**E<sub>k</sub>** : Loi d'Erlang d'ordre *k*.

2. B : Distribution de service (les codes sont les même que A).

3. C : Le nombre de serveurs (montés en parallèle).

4.  $D$  : Capacité de la file.
5.  $E$  : Population des usagers (taille de la source).
6.  $F$  : Discipline de service. Les disciplines utilisées sont les suivantes :

**FIFO** (First In, First Out) ou **FCFS** (First Come, First Served) : C'est la file standard dans laquelle les clients sont servis dans leur ordre d'arrivée. Notons que les disciplines FIFO et FCFS ne sont pas équivalentes lorsque la file contient plusieurs serveurs. Dans la première, le premier client arrivé sera le premier à quitter la file alors que la deuxième, il sera le premier à commencer son service. Rien n'empêche alors qu'un client qui commence son service après lui, dans un autre serveur, termine avant lui.

**LIFO** (Last In, First Out) ou **LCFS** (Last Come, First Served) : Cela correspond à une pile, dans laquelle le dernier client arrivé sera le premier traité (retiré de la pile). A nouveau, les disciplines LIFO et LCFS ne sont équivalentes que pour une file monoserveur.

**SIRO** (Served In Random Order) : Les clients sont servis aléatoirement.

**PS** (Processor Sharing) : Les clients sont servis de manière égale. La capacité du système est partagée entre les clients.

**Remarque 1.6.1.** Lorsque les trois derniers éléments de la notation de Kendall ne sont pas précisés, il est sous entendu que  $D = +\infty$ ,  $E = +\infty$  et  $F = \text{FIFO}$  ( First In, First Out).

### 1.6.3 Analyse opérationnelle des systèmes de file d'attente

Cette analyse consiste au calcul des caractéristiques de performance d'un système d'attente, cette opération souhaite connaître les performances d'un système réel et que l'on ne peut effectuer de mesure directe sur celui ci.

#### Les mesures de performance

1.  $L$  : Nombre moyen de clients dans le système.
2.  $L_q$  : Nombre moyen de clients dans la file d'attente.
3.  $W$  : Temps moyen de séjour d'un client dans le système.
4.  $W_q$  : Temps moyen d'attente d'un client dans la file.

Ces caractéristiques sont liées par les relations suivantes :

- $L = \lambda_e W$ .
- $L_q = \lambda_e W_q$ .
- $L = L_q + \frac{\lambda_e}{\mu}$ .
- $W = W_q + \frac{1}{\mu}$ .

Les deux premières formules sont appelées formules de little où  $\lambda_e < \lambda$  est le taux d'entrée dans le système.

### 1.6.4 Files d'attente markoviennes

Les modèles markoviens sont caractérisés par des interarrivées ainsi que les durées de service exponentielles. Nous présentons quelques modèles de files d'attente markoviennes.

#### 1.6.4.1 Modèle M/M/1

M/M/1 est la file d'attente markovienne la plus simple, composé d'un seul serveur et la discipline de service FIFO. Ce système est caractérisé par des arrivées poissonienne de taux  $\lambda$  et des durées de service exponentielles de taux  $\mu$ . Le processus  $(X(t))_{t \geq 0}$  décrivant le nombre de clients à l'instant t est un processus de naissance et de mort de taux de transitions :

$$\lambda_n = \lambda, \quad \forall n \geq 0 \quad \text{et} \quad \mu_n = \mu, \quad \forall n \geq 1.$$

#### Graphe de transitions

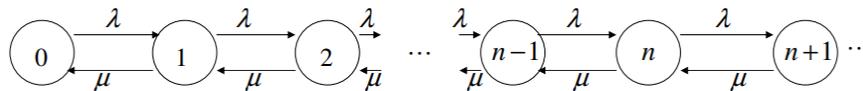


FIGURE 1.3 – Graphe de transitions du modèle M/M/1.

#### Régime stationnaire du système

On peut montrer que  $\lim_{t \rightarrow \infty} P_n(t) = P_n$  existent et sont indépendantes de l'état initial du processus et que  $\lim_{t \rightarrow \infty} P'_n(t) = 0, \forall n \geq 0$ .

En appliquant la formule de la distribution stationnaire d'un processus de naissance et de mort on a

$$P_n = P_0 \prod_{i=0}^{n-1} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)$$

D'où

$$P_n = P_0 \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^n, \quad \forall n \geq 0.$$

Comme on a  $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$ , on trouve

$$P_n = P_0 \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^n \quad \text{et} \quad P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^n}.$$

Si  $\frac{\lambda}{\mu} < 1$  alors  $P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$ , d'où la distribution stationnaire de M/M/1 est

$$P_n = \left( 1 - \frac{\lambda}{\mu} \right) \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{1.1}$$

En posant  $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ , l'équation (1.1) devient

$$P_n = (1 - \rho)\rho^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

### Mesures de performance

1. Le nombre moyen de clients dans le système :

$$L = \frac{\rho}{1 - \rho}.$$

2. Le nombre moyen de clients dans la file d'attente :

$$L_q = L - \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\rho^2}{1 - \rho}.$$

3. Le temps moyen de séjour d'un client dans le système :

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda}.$$

4. Le temps moyen d'attente dans la file :

$$W_q = \frac{1}{\lambda} L_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}.$$

#### 1.6.4.2 Modèle M/M/1/K

Ce système est identique au système M/M/1 excepté que la capacité de la file d'attente est finie. Le processus des arrivées est poissonien de taux  $\lambda$ , la durée de service est  $exp(\mu)$ . La capacité du système est  $K$ , c-à-d il y a  $K - 1$  places d'attente. Un client qui arrive et trouve  $K$  clients déjà dans le système, il est perdu.

Ce système est modélisé par le processus de naissance et de mort d'espace d'états  $S = \{0, 1, \dots, K\}$  dont les taux de transition sont

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda, & \text{si } 0 \leq n < K; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad \mu_n = \begin{cases} \mu, & \text{si } 1 \leq n \leq K; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

### Graphe de transition

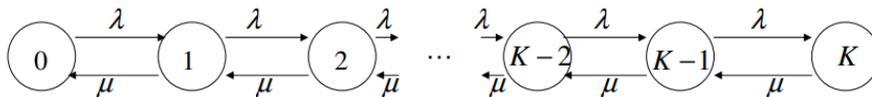


FIGURE 1.4 – Graphe de transitions du modèle M/M/1/K.

La distribution stationnaire est donnée par

$$P_n = \prod_{i=1}^n \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} P_0 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0, \quad 0 \leq n \leq K$$

$$\text{avec } P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^K \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n} = \begin{cases} \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}, & \text{si } \lambda \neq \mu; \\ \frac{1}{K+1}, & \text{si } \lambda = \mu. \end{cases}$$

Quand  $K \rightarrow \infty$ , on retrouve les résultats de M/M/1.

Le taux d'entrée effectif dans le système est

$$\lambda_e = \mathbb{P}(\text{file non pleine aux instants d'arrivée})\lambda = \lambda(1 - P_K) = \frac{1 - \rho^K}{1 - \rho^{K+1}}\lambda.$$

$$\text{Taux d'utilisation du serveur est } U = 1 - P_0 = \rho \frac{1 - \rho^K}{1 - \rho^{K+1}}$$

$$U = \frac{\lambda_e}{\mu} \rightarrow \rho \text{ si } \rho < 1 \text{ et tend vers } 1 \text{ si } \rho \geq 1, \text{ quand } K \rightarrow \infty.$$

### Mesures de performance

1. Le nombre moyen de clients  $L$  :

$$\begin{aligned} L &= \sum_{n=0}^K nP_n = \frac{(1-\rho)}{1-\rho^{K+1}} \sum_{n=0}^K n\rho^n. \\ &= \frac{\rho(1-\rho)}{1-\rho^{K+1}} \sum_{n=1}^K n\rho^{n-1}. \\ &= \frac{\rho(1-\rho)}{1-\rho^{K+1}} \times \frac{1 - (K+1)\rho^K + K\rho^{K+1}}{(1-\rho)^2}. \\ &= \frac{\rho}{1-\rho} \times \frac{1 - (K+1)\rho^K + K\rho^{K+1}}{1-\rho^{K+1}}. \end{aligned}$$

2. Le nombre moyen de clients dans la file d'attente :

$$L_q = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)P_n = L - (1 - P_0).$$

3. Temps moyen de séjour dans tout le système :

$$W = \frac{L}{\lambda_e} \text{ avec } \lambda_e = \lambda(1 - P_K) = \mu(1 - P_0).$$

4. Temps moyen d'attente dans la file :

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda_e}.$$

#### 1.6.4.3 Modèle M/M/s

Ce système comprend  $s$  stations de service en parallèle. Les durées de service sont exponentielles de paramètre  $\mu$ . Les inter-arrivées sont des variable aléatoire indépendantes de loi  $\exp(\lambda)$ , la discipline de service est FIFO, la capacité de la file est illimitée.

Soit  $X(t)$  : "Le nombre de client dans le système à l'instant  $t$ "

$\{X(t), t \geq 0\}$  est un P.N.M dont les taux de transitions sont

$$\lambda_n = \lambda, \quad n \geq 0 \quad \text{et} \quad \mu_n = \min(n\mu, s\mu) = \begin{cases} n\mu, & \text{si } 1 \leq n \leq s; \\ s\mu, & \text{si } n \geq s. \end{cases}$$

$s\mu$  est appelé **taux de service global** du système. On appelle  $\rho = \frac{\lambda}{s\mu}$  l'intensité du trafic global.

**Graphe de transition**

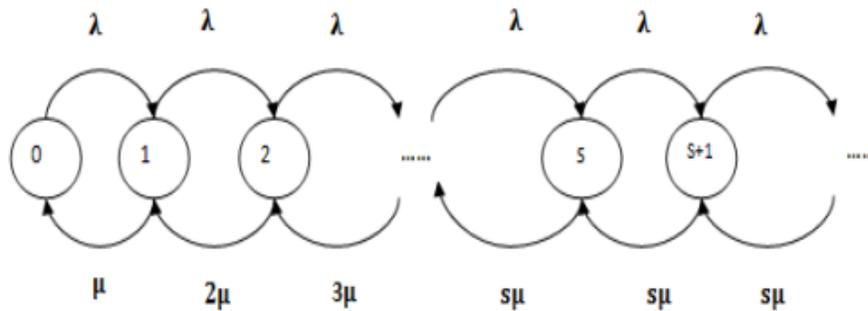


FIGURE 1.5 – Graphe de transistions du modèle M/M/s.

**Distribution stationnaire du système**

Pour  $n \leq s$ , on a :

$$P_n = \prod_{i=1}^n \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} P_0 = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} P_0.$$

Pour  $n \geq s$ , on a :

$$\begin{aligned} \lambda P_s &= s\mu P_{s+1} \implies P_{s+1} = \frac{\lambda}{s\mu} P_s \\ &\vdots \\ P_n &= \left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^{n-s} P_s = \rho^{n-s} P_s \quad \text{avec} \quad \rho = \frac{\lambda}{s\mu} \\ P_n &= \left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^{n-s} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s}{s!} P_0 \\ P_n &= \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{s^{n-s} s!} P_0 \end{aligned}$$

Enfin, en posant  $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$

$$P_n = \begin{cases} \frac{\rho^n}{n!} P_0, & 0 \leq n \leq s; \\ \frac{\rho^n}{s! s^{n-s}} P_0, & n \geq s. \end{cases}$$

ou bien, en posant  $\rho = \frac{\lambda}{s\mu}$

$$P_n = \begin{cases} \frac{(s\rho)^n}{n!} P_0, & 0 \leq n \leq s; \\ \frac{\rho^n s^n}{s!} P_0, & n \geq s. \end{cases}$$

Avec

$$P_0 = \left( \sum_{n=0}^s \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} + \sum_{s+1}^{\infty} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{s^{n-s} s!} \right)^{-1}$$

si  $\rho = \frac{\lambda}{s\mu} < 1$  on aura

$$P_0 = \left( \sum_{n=0}^s \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{s+1}}{\left(s - \frac{\lambda}{\mu}\right) s!} \right)^{-1}.$$

$$\begin{aligned} \bullet \mathbb{P}(\text{attente}) = \mathbb{P}(X \geq s) &= \sum_{n=s}^{\infty} P_n \\ &= \sum_{n=s}^{\infty} \rho^{n-s} P_s \\ &= P_s \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j = \frac{P_s}{1-\rho}. \end{aligned}$$

### Mesures de performance

- Le nombre moyen de clients dans la file :

$$\begin{aligned} L_q = \mathbb{E}(X_q) &= \sum_{n=s+1}^{\infty} (n-s) P_n \\ &= \sum_{n=s+1}^{\infty} (n-s) \rho^{n-s} P_s \\ &= P_s \rho \sum_{j=1}^{\infty} j \rho^{j-1} \\ &= P_s \rho \frac{1}{(1-\rho)^2}, \text{ avec } \rho = \frac{\lambda}{s\mu}. \end{aligned}$$

- Le nombre de clients dans le système :

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = s\rho + P_s \rho \frac{1}{(1-\rho)^2}$$

- À l'aide des formules de Little, on trouve le temps moyen d'attente et le temps moyen de séjour

$$W_q = \frac{P_s}{s\mu(1-\rho)^2} \text{ et } W = \frac{P_s}{s\mu(1-\rho)^2} + \frac{1}{\mu}.$$

#### 1.6.4.4 Modèle $M/M/\infty$

C'est un système comprenant une infinité de stations de service identiques. Donc aucune file d'attente ne se forme, chaque client est servi dès son entrée dans le système.

Ce système possède un intérêt non seulement théorique, mais il permet des études approximatives de phénomènes d'attente de type  $M/M/s$  comprenant un grand nombre de stations en parallèle.

Le processus  $\{X(t), t \geq 0\}$  décrivant le nombre de clients dans ce système est un processus de naissance et de mort de taux de transitions

$$\lambda_n = \lambda, \quad \forall n \geq 0, \quad \text{et} \quad \mu_n = n\mu, \quad \forall n \geq 1.$$

La distribution stationnaire est donnée par :

$$P_n = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} P_0, \quad \text{avec} \quad P_0 = e^{-\lambda/\mu}$$

Donc la distribution stationnaire du système  $M/M/\infty$  est une distribution de Poisson de paramètre  $\frac{\lambda}{\mu}$ , ce qui donne les caractéristiques suivantes :

$$L = \mathbb{E}(X) = \frac{\lambda}{\mu}, \quad L_q = W_q = 0 \quad \text{et} \quad W = 1/\mu.$$

**Remarque 1.6.2.** La distribution du temps de séjour de  $M/M/\infty$  est identique à la distribution de service  $\exp(\mu)$ .

## Conclusion

Dans ce chapitre, on a passé en revue l'analyse stochastique des système de file d'attente, en passant par la description des chaîne de Markov et quelques nouveaux processus particuliers.

Dans le prochain chapitre, nous analysons les systèmes avec impatience des clients dûe aux vacances du serveur (absences du serveur).

# Analyse du système M/M/1 avec vacances et impatience dépendant de l'état du serveur

## Introduction

Les systèmes de file d'attente avec des clients impatients se produisent dans de nombreuses situations pratiques. Parmi les exemples réels de systèmes de file d'attente avec des clients impatients, on cite les systèmes et les réseaux de télécommunication dans lesquels les abonnés abandonnent par impatience. D'autres exemples peuvent être trouvés dans les centres d'appel, les systèmes de production, voir par exemple [12], [11], [8]. D'autre part, les modèles avec vacances de serveur ont été introduits dans la littérature des files d'attente pour modéliser les situations où le serveur peut être non disponible pour servir les clients pendant certains intervalles de temps. Les vacances de serveurs peuvent être dûes à un manque de travail, à une défaillance du serveur ou à une autre tâche assignée au serveur.

Dans ce chapitre, en se basant sur les articles de Altman (2006) [1] et Yue et al. (2016) [22], nous analysons le système M/M/1 avec impatience des clients et vacances du serveur. Deux cas de vacances seront considérés à savoir les vacances multiples et vacance unique. L'objectif est de calculer quelques mesures de performances importantes de ce système et faire une étude numérique sur l'effet des paramètres d'impatience et de vacance sur les caractéristiques des modèles considérés.

## 2.1 Modèle A : M/M/1 (Multiple Vacation Policy) (M.V.P)

Nous considérons un système de file d'attente M/M/1 avec des clients impatients et une politique de vacances multiples (M.V.P).

### 2.1.1 Description du modèle A

Les clients arrivent selon un processus de Poisson de paramètre  $\lambda$ . Les durées de service sont indépendantes identiquement distribuées selon une loi exponentielle de paramètre  $\mu$ . À la fin de service d'un client, si la file est vide, le serveur part en vacances selon une loi exponentielle de paramètre  $\gamma$ . S'il y a des clients dans la file d'attente à la fin des vacances, le serveur commence immédiatement une période d'activité. Sinon, le serveur prend immédiatement une autre vacance et continue de la même manière jusqu'à ce qu'il trouve au moins un client dans la file. Il s'agit d'une politiques de vacance multiples. Chaque fois qu'un client arrive dans le système et constate que le serveur est en vacances, il active un "muniteur d'impatience  $T_0$ " qui est distribué de manière exponentielle avec un paramètre  $\xi_0$ . S'il découvre que le serveur est occupé, il active un "muniteur d'impatience  $T_1$ " qui est distribué de manière exponentielle avec un paramètre  $\xi_1$ . Si le muniteur expire, sans compléter le service, le client abandonne le système. Notons que ce système est stable pour  $\lambda/\mu < 1$ .

Le diagramme du modèle A est présenté à la figure (2.1).

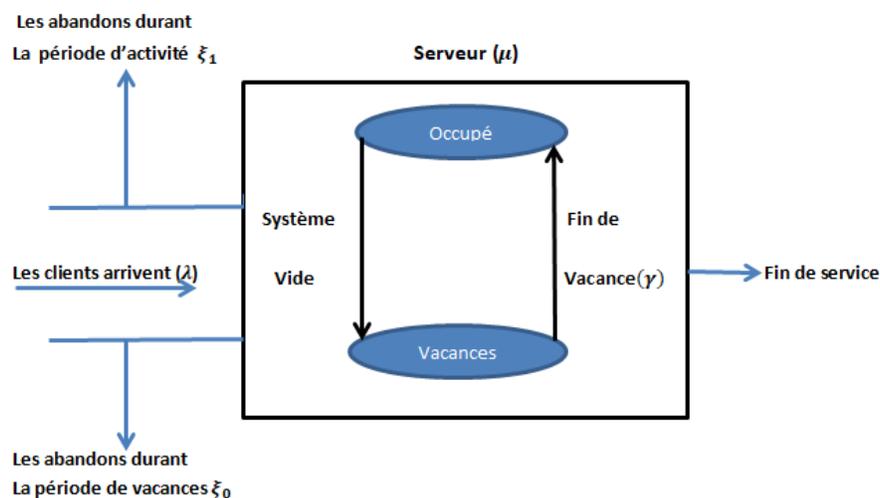


FIGURE 2.1 – Un modèle de file d'attente avec des vacances multiples et clients impatients.

### 2.1.2 Les équations de balance et les fonctions génératrices

Soit  $L(t)$  le nombre de clients dans le système à l'instant  $t$  et  $J(t)$  l'état du serveur à l'instant  $t$ , défini par :

$$J(t) = \begin{cases} 0, & \text{si le serveur est en vacance à l'instant } t. \\ 1, & \text{si le serveur est occupé à l'instant } t. \end{cases}$$

Le processus  $\{(L(t), J(t)), t \geq 0\}$  est un processus de Markov à temps continu d'espace d'états  $\Omega = \{(n, 0) : n = 0, 1, \dots\} \cup \{(n, 1) : n = 1, 2, \dots\}$ . Le diagramme des transitions est présenté à la figure (2.2).

Soit  $P_{nj} = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{L(t) = n, J(t) = j\}$ ,  $n=0,1,\dots$ ,  $j=0,1$ ,  $(n,j) \in \Omega$ , désignant les probabilités d'état du système (état stable).

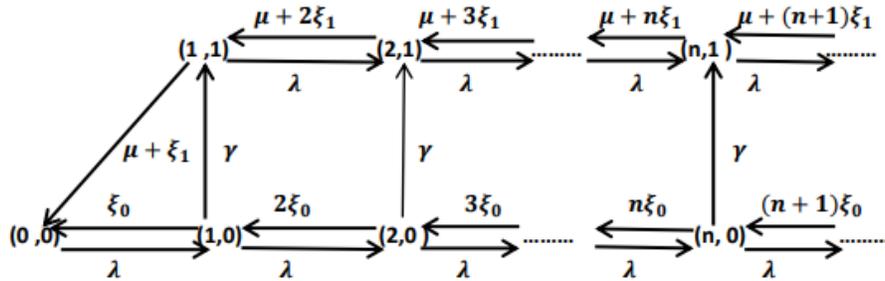


FIGURE 2.2 – Graphe des transitions du M/M/1 avec M.V.P.

D'après le graphe de transition, les équations de balance sont données par :

$$\lambda P_{00} = \xi_0 P_{10} + (\mu + \xi_1) P_{11}, \quad (2.1)$$

$$(\lambda + \gamma + n\xi_0) P_{n0} = \lambda P_{(n-1)0} + (n+1)\xi_0 P_{(n+1)0}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.2)$$

$$(\lambda + \mu + \xi_1) P_{11} = (\mu + 2\xi_1) P_{21} + \gamma P_{10}, \quad (2.3)$$

$$(\lambda + \mu + n\xi_1) P_{n1} = \lambda P_{(n-1)1} + [\mu + (n+1)\xi_1] P_{(n+1)1} + \gamma P_{n0}, \quad n = 2, 3, \dots \quad (2.4)$$

Et la condition de normalisation :

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{n0} + \sum_{n=1}^{\infty} P_{n1} = 1.$$

Nous définissons les fonctions génératrices du nombre de clients dans le système durant les périodes de vacances et d'activité du serveur (respectivement) par :

$$G_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{n0} z^n, \quad G_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} P_{n1} z^n, \quad \forall z \in [0, 1].$$

En multipliant les équations (2.1) et (2.2) par  $z^n$  et en sommant sur  $n = \overline{0, \infty}$ , nous obtenons :

$$\xi_0(1-z)G'_0(z) - [\lambda(1-z) + \gamma]G_0(z) = -[\gamma P_{00} + (\mu + \xi_1)P_{11}], \quad (2.5)$$

où  $G'_0(z) = \frac{d}{dz}G_0(z)$ . De la même manière, nous obtenons à partir des équations (2.3) et (2.4) :

$$\xi_1 z(1-z)G'_1(z) - (\lambda z - \mu)(1-z)G_1(z) = -\gamma z G_0(z) + [\gamma P_{00} + (\mu + \xi_1)P_{11}]z, \quad (2.6)$$

où  $G'_1(z) = \frac{d}{dz}G_1(z)$ .

### 2.1.3 Solutions des équations différentielles

On pose  $A = \gamma P_{00} + (\mu + \xi_1)P_{11}$ . Alors, pour  $z \neq 1$ , l'équation (2.5) peut être réécrite comme suit :

$$G'_0(z) - \left[ \frac{\lambda}{\xi_0} + \frac{\gamma}{\xi_0(1-z)} \right] G_0(z) = -\frac{A}{\xi_0(1-z)}. \quad (2.7)$$

Sa solution est obtenue par Altaman et Yechiali [1], en multipliant les deux membres de l'équation (2.7) par  $e^{-\frac{\lambda}{\xi_0}z}(1-z)^{\frac{\gamma}{\xi_0}}$ , on aura :

$$\frac{d}{dz} \left[ e^{-\frac{\lambda}{\xi_0}z}(1-z)^{\frac{\gamma}{\xi_0}} G_0(z) \right] = -\frac{A}{\xi_0} e^{-\frac{\lambda}{\xi_0}z}(1-z)^{\frac{\gamma}{\xi_0}-1}, \quad (2.8)$$

puis en intégrant de 0 à  $z$ , on a :

$$e^{-\frac{\lambda}{\xi_0}z}(1-z)^{\frac{\gamma}{\xi_0}} G_0(z) - G_0(0) = -\frac{A}{\xi_0} \int_0^z (1-s)^{\frac{\gamma}{\xi_0}-1} e^{-\frac{\lambda}{\xi_0}s} ds. \quad (2.9)$$

Finalement,

$$G_0(z) = e^{\frac{\lambda}{\xi_0}z}(1-z)^{-\frac{\gamma}{\xi_0}} \left\{ G_0(0) - \frac{A}{\xi_0} K_0(z) \right\}, \quad (2.10)$$

$$K_0(z) = \int_0^z (1-s)^{\frac{\gamma}{\xi_0}-1} e^{-\frac{\lambda}{\xi_0}s} ds. \quad (2.11)$$

Puisque  $G_0(1) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{n0} < \infty$  et  $z = 1$  est la racine du dénominateur du membre droit de l'équation (2.10), nous devons conclure que  $z = 1$  doit être la racine du numérateur du coté droit de l'équation (2.10). Nous obtenons :

$$P_{00} = G_0(0) = \frac{A}{\xi_0} K_0(1), \quad (2.12)$$

en remplaçant  $A$  dans (2.12), on obtient :

$$P_{00} = \frac{(\mu + \xi_1)K_0(1)}{\xi_0 - \gamma K_0(1)} P_{11}, \quad (2.13)$$

en substituant l'équation (2.12) dans l'équation (2.10), on obtient :

$$G_0(z) = e^{\frac{\lambda}{\xi_0}z} (1-z)^{-\frac{\gamma}{\xi_0}} \left[ 1 - \frac{K_0(z)}{K_0(1)} \right] P_{00}, \quad (2.14)$$

pour  $z \neq 1$  et  $z \neq 0$ , l'équation (2.6) peut être réécrite de la façon suivante :

$$G_1'(z) - \left( \frac{\lambda}{\xi_1} - \frac{\mu}{\xi_1 z} \right) G_1(z) = \frac{A - \gamma G_0(z)}{\xi_1(1-z)}. \quad (2.15)$$

Pour résoudre l'équation différentielle (2.15), nous multiplions les deux membres de l'équation par  $e^{-\frac{\lambda}{\xi_1}z} z^{\frac{\mu}{\xi_1}}$ , on obtient alors :

$$\frac{d}{dz} \left[ e^{-\frac{\lambda}{\xi_1}z} z^{\frac{\mu}{\xi_1}} G_1(z) \right] = \frac{[A - \gamma G_0(z)] e^{-\frac{\lambda}{\xi_1}z} z^{\frac{\mu}{\xi_1}}}{\xi_1(1-z)},$$

en intégrant de 0 à  $z$ , nous obtenons :

$$G_1(z) = e^{+\frac{\lambda}{\xi_1}z} z^{-\frac{\mu}{\xi_1}} \left[ \frac{A}{\xi_1} K_1(z) - \frac{\gamma}{\xi_1} \int_0^z (1-s)^{-1} s^{\frac{\mu}{\xi_1}} e^{-\frac{\lambda}{\xi_1}s} G_0(s) ds \right], \quad (2.16)$$

où

$$K_1(z) = \int_0^z (1-s)^{-1} s^{\frac{\mu}{\xi_1}} e^{-\frac{\lambda}{\xi_1}s} ds, \quad (2.17)$$

en utilisant l'équation (2.12) et en substituant l'équation (2.14) dans l'équation (2.16), on obtient :

$$G_1(z) = e^{\frac{\lambda}{\xi_1}z} z^{-\frac{\mu}{\xi_1}} \left[ \frac{\xi_0 K_1(z)}{\xi_1 K_0(1)} - \frac{\gamma K_2(z)}{\xi_1} \right] P_{00}, \quad (2.18)$$

où

$$K_2(z) = \int_0^z \left[ 1 - \frac{K_0(s)}{K_0(1)} \right] s^{\frac{\mu}{\xi_1}} (1-s)^{\left(\frac{\gamma}{\xi_0}+1\right)} e^{\left(\frac{\lambda}{\xi_0} - \frac{\lambda}{\xi_1}\right)s} ds. \quad (2.19)$$

D'après les équations (2.14) et (2.18),  $G_0(z)$  et  $G_1(z)$  sont exprimées en termes de  $P_{00}$ . Ainsi, une fois que  $P_{00}$  est calculées,  $G_0(z)$  et  $G_1(z)$  sont complètement déterminées.

#### 2.1.4 Calcul de $P_{00}$ , $P_{\bullet 0}$ et $P_{\bullet 1}$

On pose  $P_{\bullet 0} = \sum_{n=0}^{\infty} P_{n0}$  et  $P_{\bullet 1} = \sum_{n=1}^{\infty} P_{n1}$ . Ainsi,  $P_{\bullet 0}$  représente la probabilité que le serveur soit en vacances,  $P_{\bullet 1}$  représente la probabilité que le serveur soit occupé et  $P_{00}$  représente la probabilité que le serveur est en vacances et le système est vide.

En appliquant la règle de l'Hôpital à l'équation (2.14) et utilisant l'équation (2.12), nous obtenons :

$$P_{\bullet 0} = G_0(1) = \frac{\xi_0}{\gamma K_0(1)} P_{00}. \quad (2.20)$$

Pour  $z = 1$  l'équation (2.18), devient :

$$P_{\bullet 1} = G_1(1) = \frac{e^{\frac{\lambda}{\xi_1}}}{\xi_1} \left[ \frac{\xi_0 K_1(1)}{K_0(1)} - \gamma K_2(1) \right] P_{00}. \quad (2.21)$$

Comme  $P_{\bullet 0} + P_{\bullet 1} = 1$ , à partir les équations (2.20) et (2.21), on obtient :

$$P_{00} = \left( \frac{\xi_0}{\gamma K_0(1)} + \frac{e^{\frac{\lambda}{\xi_1}}}{\xi_1} \left[ \frac{\xi_0 K_1(1)}{K_0(1)} - \gamma K_2(1) \right] \right)^{-1}. \quad (2.22)$$

Ainsi,  $P_{\bullet 0}$ ,  $P_{\bullet 1}$  et  $P_{00}$  sont entièrement déterminées par les équations (2.20), (2.21) et (2.22).

## 2.1.5 Mesures de performance

### 2.1.5.1 Nombre moyen de clients dans le système

On pose :

- $L_0$  : Le nombre de clients dans le système lorsque le serveur est en vacances.
- $L_1$  : Le nombre de clients dans le système lorsque le serveur est occupé.

D'après l'équation (2.7), on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[L_0] &= \lim_{z \rightarrow 1} G'_0(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{[\lambda(1-z) + \gamma]G_0(z) - A}{\xi_0(1-z)} \\ &= \frac{-\lambda P_{\bullet 0} + \gamma \mathbb{E}[L_0]}{-\xi_0}. \end{aligned}$$

Par la suite :

$$\mathbb{E}[L_0] = \frac{\lambda}{\gamma + \xi_0} P_{\bullet 0}, \quad (2.23)$$

où  $P_{\bullet 0}$  est donnée par l'équation (2.20). D'après l'équation (2.15) et en utilisant la règle de l'Hôpital, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[L_1] &= \lim_{z \rightarrow 1} G'_1(z) \\ &= \frac{\lambda - \mu}{\xi_1} G_1(1) + \frac{\gamma}{\xi_1} G'_0(1) \\ &= \frac{\lambda - \mu}{\xi_1} P_{\bullet 1} + \frac{\gamma}{\xi_1} \mathbb{E}[L_0], \end{aligned} \quad (2.24)$$

où  $P_{\bullet 1}$  est donné par l'équation (2.21) et  $\mathbb{E}[L_0]$  est donné par l'équation (2.23).

### 2.1.5.2 La proportion du nombre de clients servis

On a le nombre moyen de clients servis par unité de temps est  $\mu P_{\bullet 1}$ , d'où la proportion du nombre de clients servis est :

$$P_s = \frac{\mu P_{\bullet 1}}{\lambda} = \frac{P_{\bullet 1}}{\rho}. \quad (2.25)$$

Où  $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$  et  $P_{\bullet 1}$  est donné par l'équation (2.21).

### 2.1.5.3 Le taux d'abandon d'un client dû à l'impatience

Lorsque le système est dans l'état  $(n, 0)$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , le taux d'abandon d'un client dû à l'impatience est  $n\xi_0$ . Lorsque le système est dans l'état  $(n, 1)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , le taux d'abandon d'un client à cause d'impatience est  $n\xi_1$ . Ainsi, le taux moyen d'abandon dû à l'impatience est donné par

$$R_a = \sum_{n=0}^{\infty} n\xi_0 P_{n0} + \sum_{n=1}^{\infty} n\xi_1 P_{n1} = \xi_0 \mathbb{E}[L_0] + \xi_1 \mathbb{E}[L_1]. \quad (2.26)$$

Où  $\mathbb{E}[L_0]$  et  $\mathbb{E}[L_1]$  sont donnés par les équations (2.23) et (2.24).

### 2.1.5.4 Temps moyen de séjour

Soit  $S$  le temps total de séjour d'un client dans le système, mesuré depuis l'instant d'arrivée jusqu'au départ, soit à la complétion de service ou à l'abandon et  $L = L_0 + L_1$  : nombre total de clients dans le système.

Par la formule de Little, le temps moyen de séjour d'un client dans le système est :

$$\mathbb{E}[S] = \frac{\mathbb{E}[L]}{\lambda} = \frac{\mathbb{E}[L_0] + \mathbb{E}[L_1]}{\lambda}. \quad (2.27)$$

## 2.1.6 Illustration numérique

Cette sous-section est consacrée à l'étude numérique des mesures de performance associées au modèle de file d'attente M/M/1 avec clients impatients et vacances multiples du serveur. Plus précisément, nous présentons quelques résultats numériques pour illustrer l'effet de divers paramètres sur les mesures de performance de ce modèle. Tous les calculs ont été réalisés avec le logiciel Matlab.

### Cas 1 :

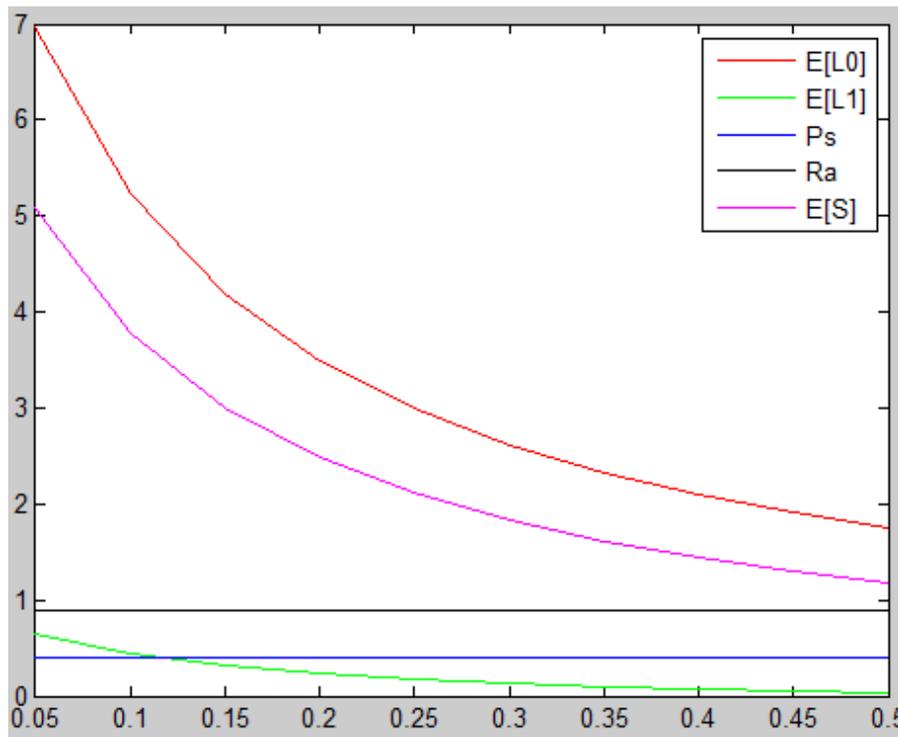
Nous calculons certaines mesures de performance en utilisant les expressions obtenues dans la sous-section 2.1.4 et la sous-section 2.1.5. Pour l'analyse, on fixe  $\xi_1 = 0.85$  et on fait varier le paramètre  $\xi_0$ ,  $\lambda = 1.5$ ,  $\mu = 2$  et  $\gamma = 0.1$ , (avec  $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$ ).

Les résultats numériques obtenus sont présentés dans le tableau suivant :

$\xi_0$	$P_{\bullet 0}$	$P_{\bullet 1}$	$\mathbb{E}[L_0]$	$\mathbb{E}[L_1]$	$P_s$	$R_a$	$\mathbb{E}[S]$
0.0500	0.6976	0.3024	6.9765	0.6429	0.4031	0.8953	5.0796
0.1000	0.6978	0.3022	5.2336	0.4380	0.4029	0.8956	3.7810
0.1500	0.6980	0.3020	4.1880	0.3151	0.4027	0.8960	3.0020
0.2000	0.6982	0.3018	3.4909	0.2332	0.4024	0.8964	2.4827
0.2500	0.6983	0.3017	2.9929	0.1747	0.4022	0.8967	2.1117
0.3000	0.6985	0.3015	2.6193	0.1308	0.4020	0.8970	1.8334
0.3500	0.6986	0.3014	2.3287	0.0967	0.4019	0.8972	1.6169
0.4000	0.6987	0.3013	2.0961	0.0694	0.4017	0.8974	1.4436
0.4500	0.6988	0.3012	1.9057	0.0470	0.4016	0.8975	1.3018
0.5000	0.6988	0.3012	1.7470	0.0284	0.4016	0.8976	1.1836

TABLEAU 2.1 – Mesures des performances pour différentes valeurs de  $\xi_0$ .

Réprésentations graphiques (voir les figures 2.3) illustrant les détails des résultat donnés dans le tableau précédent

FIGURE 2.3 – Mesures des performances pour différentes valeurs de  $\xi_0$ .

### Interprétation :

D'après la figure (2.3) et le tableau (2.1) , on remarque que :

- Le nombre moyen de clients dans le système lorsque le serveur est en vacance et lorsque le serveur est occupé décroît avec la croissance du taux d'impatience  $\xi_0$  .
- La proportion du nombre de clients servis décroît avec la croissance du taux d'impatience  $\xi_0$ .
- le taux d'abandons des clients dû à l'impatience croît avec la croissance du taux d'impatience  $\xi_0$ .

- Le temps moyen de séjour décroît avec la croissance du taux d'impatience  $\xi_0$ .

### Cas 2 :

Dans ce cas, on fixe le paramètre  $\xi_0 = 0.1$  et on fait varier le paramètre  $\xi_1$ , les autres paramètres sont fixés comme suit :  $\lambda = 1.5$ ,  $\mu = 2$  et  $\gamma = 0.1$ .

Les résultats numériques obtenus dans ce cas sont présentés dans le tableau suivant :

$\xi_1$	$P_{\bullet 0}$	$P_{\bullet 1}$	$\mathbb{E}[L_0]$	$\mathbb{E}[L_1]$	$P_s$	$R_a$	$\mathbb{E}[S]$
0.2000	0.4190	0.5810	3.1426	0.1188	0.7747	0.3380	2.1742
0.3000	0.4955	0.5045	3.7162	0.3979	0.6727	0.4910	2.7427
0.4000	0.5523	0.4477	4.1422	0.4759	0.5969	0.6046	3.0788
0.5000	0.5966	0.4034	4.4745	0.4915	0.5379	0.6932	3.3107
0.6000	0.6323	0.3677	4.7425	0.4840	0.4902	0.7647	3.4843
0.7000	0.6619	0.3381	4.9640	0.4676	0.4508	0.8237	3.6211
0.8000	0.6868	0.3132	5.1507	0.4481	0.4176	0.8735	3.7325
0.9000	0.7081	0.2919	5.3105	0.4279	0.3892	0.9161	3.8256
1.0000	0.7265	0.2735	5.4489	0.4082	0.3646	0.9530	3.9047
1.1000	0.7427	0.2573	5.5702	0.3894	0.3431	0.9854	3.9731

TABLEAU 2.2 – Mesures des performances pour différentes valeurs de  $\xi_1$ .

Réprésentations graphiques (voir les figure 2.4) illustrant les détails des résultats donnés dans le tableau précédent

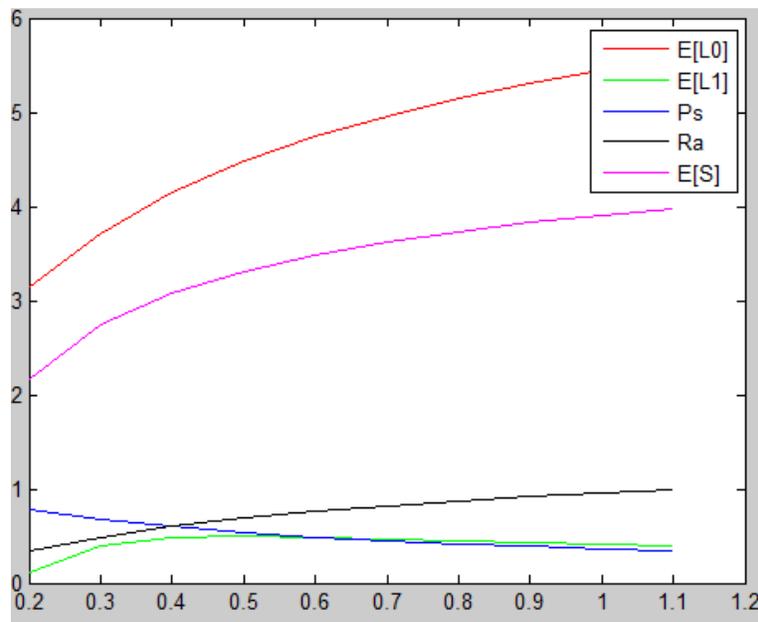


FIGURE 2.4 – Mesures des performances pour différentes valeurs de  $\xi_1$ .

### Interprétation :

D'après la figure (2.4), on remarque que :

- Le nombre moyen de clients dans le système lorsque le serveur est en vacance croît avec la croissance du taux d'impatience  $\xi_1$  et on remarque aussi que le taux d'abandons des clients croît avec la croissance de  $\xi_1$ .
- Le nombre moyen de clients dans le système lorsque le serveur est occupé,  $\mathbb{E}[L_1]$ , n'est pas une fonction monotone en  $\xi_1$ , c-à-d il existe une valeur  $\xi$  telle que : si  $0 < \xi_1 < \xi$ ,  $\mathbb{E}[L_1]$  croît avec la croissance de  $\xi_1$  et si  $\xi_1 \geq \xi$ ,  $\mathbb{E}[L_1]$  décroît.
- La proportion du nombre de clients servis décroît avec la croissance du taux  $\xi_1$ .
- Le temps moyen de séjour croît avec la croissance du taux d'impatience  $\xi_1$ .

### Cas 3 :

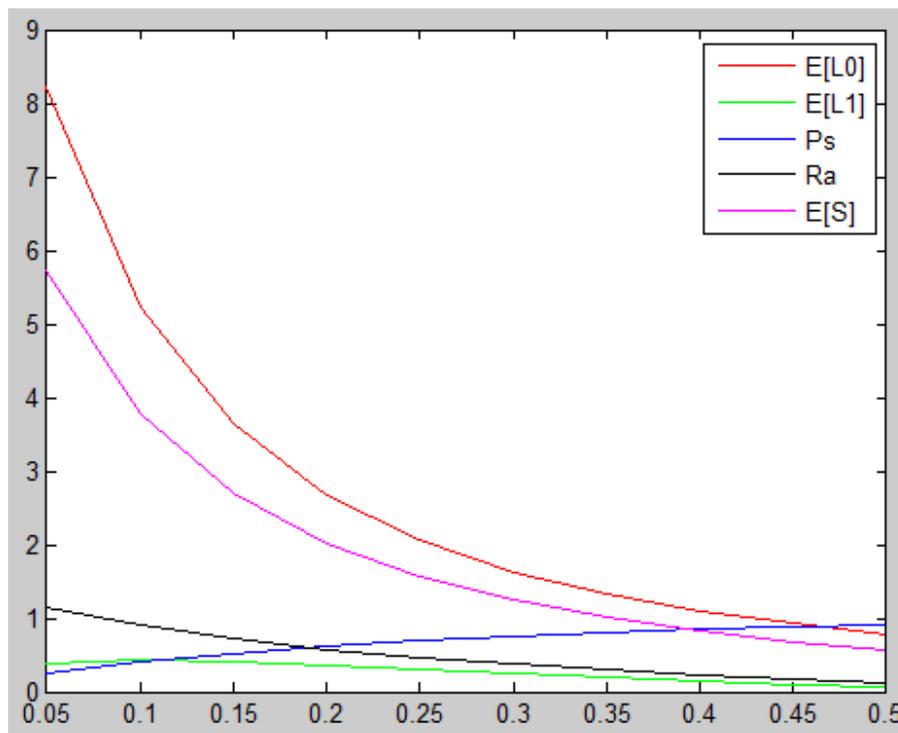
Dans ce cas, on fixe les paramètres  $\xi_0 = 0.1$ ,  $\xi_1 = 0.85$ ,  $\lambda = 1.5$  et  $\mu = 2$ , on fait varier le taux du vacance  $\gamma$

Les résultats numériques obtenus dans ce cas sont présentés dans le tableau suivant :

$\gamma$	$P_{\bullet 0}$	$P_{\bullet 1}$	$\mathbb{E}[L_0]$	$\mathbb{E}[L_1]$	$P_s$	$R_a$	$\mathbb{E}[S]$
0.0500	0.8221	0.1779	8.2205	0.3789	0.2373	1.1441	5.7329
0.1000	0.6978	0.3022	5.2336	0.4380	0.4029	0.8956	3.7810
0.1500	0.6061	0.3939	3.6369	0.4101	0.5251	0.7123	2.6980
0.2000	0.5358	0.4642	2.6788	0.3572	0.6190	0.5715	2.0240
0.2500	0.4800	0.5200	2.0572	0.2992	0.6933	0.4600	1.5709
0.3000	0.4348	0.5652	1.6304	0.2429	0.7537	0.3695	1.2489
0.3500	0.3973	0.6027	1.3244	0.1908	0.8036	0.2946	1.0101
0.4000	0.3658	0.6342	1.0974	0.1434	0.8456	0.2316	0.8272
0.4500	0.3389	0.6611	0.9243	0.1005	0.8814	0.1778	0.6832
0.5000	0.3157	0.6843	0.7893	0.0618	0.9124	0.1314	0.5674

TABLEAU 2.3 – Mesures des performances pour différents valeurs de  $\gamma$ .

Réprésentations graphiques (voir la figure 2.5) illustrant les détails des résultats données dans le tableau précédent

FIGURE 2.5 – Mesures des performances pour différentes valeurs de  $\gamma$ .

### Interprétation :

D'après la figure (2.5), on remarque que :

- Le nombre moyen de clients dans le système lorsque le serveur est en vancance décroît avec la croissance du taux de vacances  $\gamma$  et on remarque que le taux d'abandons des clients décroît avec la croissance du taux  $\gamma$ .
- Le nombre moyen de clients dans le système lorsque le serveur est occupé n'est pas une fonction

monotone en fonction du  $\gamma$ .

- La proportion de nombre de clients servis croît avec la croissance du taux  $\gamma$ .
- Le temps moyen de séjour décroît avec la croissance du taux de vacance  $\gamma$ .

## 2.2 Modèle B : M/M/1 (Single Vacation Policy) (S.V.P)

Dans cette section, nous considérons un système de file d'attente M/M/1 avec des clients impatientes et une politique de vacances unique (S.V.P).

### 2.2.1 Description du modèle B

On considère le système d'attente M/M/1 avec des clients impatientes, où le serveur ne prend qu'une seule vacance lorsque le système est vide. Si le serveur revient de la vacance à un système vide, il attend jusqu'à la première arrivée et commence ensuite une période d'activité. Sinon, s'il y a des clients dans la file d'attente au retour d'une vacance, le serveur démarre immédiatement une période d'activité. Les autres hypothèses sont les mêmes que dans la sous-section (2.1.1), mais dans le cadre de la politique unique.

### 2.2.2 Equations de Balance et les fonctions génératrices

Le processus  $\{(L(t), J(t)), t \geq 0\}$  défini comme précédemment, un processus de Markov à temps continu avec un nouvel espace d'états  $\Theta = \{(n, j) : n = 0, 1, \dots; j = 0, 1\}$ . Nous avons un nouvel état  $(0, 1)$  dans  $\Theta$ , qui indique que le système est vide et que le serveur est libre. Le diagramme d'état-transition est présenté à la figure (2.6).

Soit  $P_{nj} = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{L(t) = n, J(t) = j\}$ ,  $(n, j) \in \Theta$ , les probabilités d'état du système.

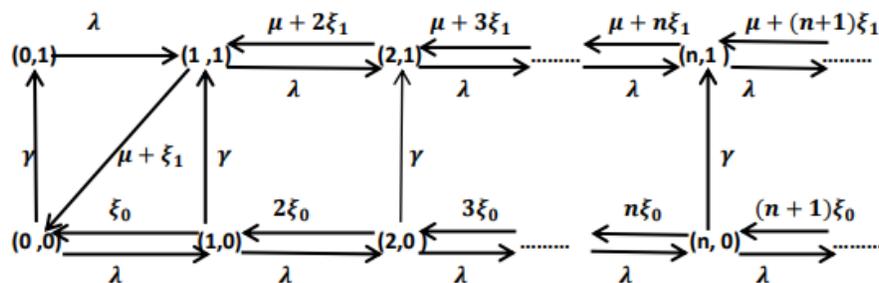


FIGURE 2.6 – Graphe des transitions de M/M/1 avec S.V.P.

D'après, le graphe de transition, les équations de Balance sont données par :

$$(\lambda + \gamma)P_{00} = \xi_0 P_{10} + (\mu + \xi_1)P_{11}, \quad (2.28)$$

$$(\lambda + \gamma + n\xi_0)P_{n0} = \lambda P_{(n-1)0} + (n+1)\xi_0 P_{(n+1)0}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.29)$$

$$\lambda P_{01} = \gamma P_{00} \quad (2.30)$$

$$(\lambda + \mu + n\xi_1)P_{n1} = \lambda P_{(n-1)1} + [\mu + (n+1)\xi_1]P_{(n+1)1} + \gamma P_{n0}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.31)$$

et la condition de normalisation

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{n0} + \sum_{n=1}^{\infty} P_{n1} = 1.$$

Définissons les fonctions génératrices

$$G_j(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{nj} z^n, \quad j = 0, 1, \quad \forall z \in [0, 1].$$

Ensuite, de manière similaire à la sous-sections (2.1.2), à partir des équations (2.28) et (2.29), nous obtenons

$$\xi_0(1-z)G'_0(z) - [\lambda(1-z) + \gamma]G_0(z) = -(\mu + \xi_1)P_{11}, \quad (2.32)$$

et à partir des équations (2.30) et (2.31), nous obtenons

$$\xi_1 z(1-z)G'_1(z) - (\lambda z - \mu)(1-z)G_1(z) = -\gamma z G_0(z) + \mu(1-z)P_{01} + (\mu + \xi_1)P_{11}z. \quad (2.33)$$

### 2.2.3 Solutions des équations différentielles

En procédant de la même manière que la sous-section (2.1.3), on obtient

$$G_0(z) = e^{\frac{\lambda}{\xi_0}z} (1-z)^{-\frac{\gamma}{\xi_0}} \left\{ G_0(0) - \frac{(\mu + \xi_1)P_{11}}{\xi_0} K_0(z) \right\}. \quad (2.34)$$

A partir de l'équation (2.34), on obtient comme précédemment

$$P_{00} = G_0(0) = \frac{(\mu + \xi_1)K_0(1)}{\xi_0} P_{11}.$$

D'où

$$P_{11} = \frac{\xi_0}{(\mu + \xi_1)K_0(1)} P_{00}. \quad (2.35)$$

En substituant l'équation (2.35) dans l'équation (2.34), on obtient

$$G_0(z) = e^{\frac{\lambda}{\xi_0}z} (1-z)^{-\frac{\gamma}{\xi_0}} \left[ 1 - \frac{k_0(z)}{k_0(1)} \right] P_{00}. \quad (2.36)$$

En résolvant l'équation (2.33) de la même manière que l'équation (2.15), on obtient :

$$G_1(z) = e^{\frac{\lambda}{\xi_1}z} z^{-\frac{\mu}{\xi_1}} \left[ \left( \frac{\mu}{\xi_1} + 1 \right) K_1(z) P_{11} - \frac{\gamma}{\xi_1} K_2(z) P_{00} + \frac{\mu}{\xi_1} K_3(z) P_{01} \right], \quad (2.37)$$

où

$$K_3(z) = \int_0^z s^{\frac{\mu}{\xi_1}-1} e^{-\frac{\lambda}{\xi_1}s} ds. \quad (2.38)$$

$K_1(z)$  et  $K_2(z)$  sont définies par les équations (2.17) et (2.19).

En tenant en compte l'équation (2.30), les équations (2.36) et (2.37) permettent d'exprimer  $G_0(z)$  et  $G_1(z)$  en termes de  $P_{00}$  et  $P_{11}$ . Comme  $P_{11}$  est exprimée en fonction de  $P_{00}$ ,  $G_0(z)$  et  $G_1(z)$  sont complètement exprimées en fonction de  $P_{00}$ . Tout le problème revient donc à déterminer  $P_{00}$ .

#### 2.2.4 Calcul de $P_{00}$ , $P_{\bullet 0}$ et $P_{\bullet 1}$

Posons  $P_{\bullet j} = \sum_{n=0}^{\infty} P_{nj}$ ,  $j = 0, 1$ . Alors,  $P_{\bullet 0}$  et  $P_{\bullet 1}$  représentent les probabilités que le serveur soit en vacances et que le serveur soit occupé, respectivement.

Avec  $z = 1$  dans l'équation (2.32), nous obtenons

$$P_{\bullet 0} = \frac{\mu + \xi_1}{\gamma} P_{11}. \quad (2.39)$$

Avec  $z = 1$  dans l'équation (2.37), nous obtenons

$$P_{\bullet 1} = e^{\frac{\lambda}{\xi_1}} \left[ \left( \frac{\mu}{\xi_1} + 1 \right) K_1(1) P_{11} - \frac{\gamma}{\xi_1} K_2(1) P_{00} + \frac{\mu}{\xi_1} K_3(1) P_{01} \right]. \quad (2.40)$$

D'après l'équation (2.30), nous avons

$$P_{01} = \frac{\gamma}{\lambda} P_{00}. \quad (2.41)$$

En substituant l'équation (2.41) dans l'équation (2.40), nous obtenons

$$P_{\bullet 1} = e^{\frac{\lambda}{\xi_1}} \left[ \left( \frac{\mu}{\xi_1} + 1 \right) K_1(1) P_{11} - \frac{\gamma}{\xi_1} K_2(1) P_{00} + \frac{\mu\gamma}{\lambda\xi_1} K_3(1) P_{00} \right]. \quad (2.42)$$

D'après la condition de normalisation, nous avons

$$P_{\bullet 0} + P_{\bullet 1} = 1. \quad (2.43)$$

Par conséquent, en substituant les équations (2.35) et (2.39) et (2.42) dans l'équation (2.43), nous obtenons

$$P_{00} = \left( \frac{\xi_0}{\gamma K_0(1)} + \frac{e^{\frac{\lambda}{\xi_1}}}{\xi_1} \left[ \frac{\xi_0 K_1(1)}{K_0(1)} - \gamma K_2(1) + \frac{\gamma\mu}{\lambda} K_3(1) \right] \right)^{-1}. \quad (2.44)$$

En substituant l'équation (2.35) à l'équation (2.39), nous obtenons

$$P_{\bullet 0} = \frac{\xi_0}{\gamma K_0(1)} P_{00}, \quad (2.45)$$

où  $P_{00}$  est donné par l'équation (2.44). Ainsi, à partir des équations (2.43) et (2.45), nous obtenons

$$P_{\bullet 1} = \frac{e^{\frac{\lambda}{\xi_1}}}{\xi_1} \left[ \frac{\xi_0 K_1(1)}{K_0(1)} - \gamma K_2(1) + \frac{\gamma\mu}{\lambda} K_3(1) \right] P_{00}. \quad (2.46)$$

## 2.2.5 Mesures de performance

### 2.2.5.1 Nombre moyen de clients dans le système

Soient

- $L_0$  : Le nombre de clients dans le système lorsque le serveur est en vacance.
- $L_1$  : Le nombre de clients dans le système lorsque le serveur est occupé.

Nous obtenons maintenant les nombres moyens de clients dans le système  $\mathbb{E}[L_0]$  et  $\mathbb{E}[L_1]$ .

D'après l'équation (2.32), en utilisant la règle de l'Hôpital, nous avons

$$\mathbb{E}[L_0] = \lim_{z \rightarrow 1} G'_0(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{[\lambda(1-z) + \gamma]G_0(z) - (\mu + \xi_1)P_{11}}{\xi_0(1-z)} = \frac{-\lambda P_{\bullet 0} + \gamma \mathbb{E}[L_0]}{-\xi_0}.$$

D'où

$$\mathbb{E}[L_0] = \frac{\lambda}{\gamma + \xi_0} P_{\bullet 0}. \quad (2.47)$$

Où  $P_{\bullet 0}$  est donnée par l'équation (2.45). D'après l'équation (2.33), en utilisant la règle de l'Hôpital, nous avons

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[L_1] &= \lim_{z \rightarrow 1} G'_1(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{\xi_1} \left[ \frac{\lambda z - \mu}{z} G_1(z) - \frac{\gamma G_0(z) - (\mu + \xi_1)P_{11}}{1-z} + \frac{\mu}{z} P_{01} \right] \\ &= \frac{\lambda - \mu}{\xi_1} P_{\bullet 1} + \frac{\gamma}{\xi_1} \mathbb{E}[L_0] + \frac{\mu \gamma}{\lambda \xi_1} P_{00}. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Où  $P_{00}$  est donné par l'équation (2.44),  $P_{\bullet 1}$  est donné par l'équation (2.46) et  $\mathbb{E}[L_0]$  est donné par l'équation (2.47).

### 2.2.5.2 La proportion du nombre de clients servis

Comme dans les équations (2.25) et (2.26), nous pouvons obtenir  $P_s$  la proportion de clients servis comme suit :

$$P_s = \frac{P_{\bullet 1}}{\rho}. \quad (2.49)$$

Où  $P_{\bullet 1}$  est donné par l'équation (2.46).

### 2.2.5.3 Le taux d'abandon d'un client dû à l'impatience

$$R_a = \sum_{n=0}^{\infty} n \xi_0 P_{n0} + \sum_{n=1}^{\infty} n \xi_1 P_{n1} = \xi_0 \mathbb{E}[L_0] + \xi_1 \mathbb{E}[L_1]. \quad (2.50)$$

Où  $\mathbb{E}[L_0]$  et  $\mathbb{E}[L_1]$  sont donnés par les équations (2.47) et (2.48).

### 2.2.5.4 Temps moyen de séjour

Soit  $S$  le temps total de séjour d'un client dans le système et  $L = L_0 + L_1$  : nombre total de clients dans le système.

Par la formule de Little, le temps moyen de séjour d'un client dans le système est :

$$\mathbb{E}[S] = \frac{\mathbb{E}[L]}{\lambda} = \frac{\mathbb{E}[L_0] + \mathbb{E}[L_1]}{\lambda}. \quad (2.51)$$

### 2.2.6 Illustration numérique

Cette sous-section est consacrée à l'étude numérique des différentes mesures de performance associées au modèle M/M/1 avec impatience et vacance unique. Nous présentons quelques résultats numériques pour illustrer l'effet de divers paramètres sur les mesures de performance. Tous les calculs ont été réalisés avec le logiciel Matlab

#### Cas1 :

Nous calculons certaines mesures de performance en utilisant les expressions obtenus dans la sous-section 2.2.4 et la sous-section 2.2.5 . Pour l'analyse, on fixe  $\xi_1 = 0.85$  et on fait varier le paramètre  $\xi_0$ ,  $\lambda = 1.5$ ,  $\mu = 1.62$  et  $\gamma = 0.1$ .

Les résultats numériques obtenus sont présentés dans le tableau suivant :

$\xi_0$	$P_{\bullet 0}$	$P_{\bullet 1}$	$\mathbb{E}[L_0]$	$\mathbb{E}[L_1]$	$P_s$	$R_a$	$\mathbb{E}[S]$
0.0500	0.6809	0.3191	6.8085	0.7615	0.3447	0.9877	5.0467
0.1000	0.6803	0.3197	5.1019	0.5609	0.3453	0.9869	3.7752
0.1500	0.6795	0.3205	4.0773	0.4404	0.3461	0.9860	3.0118
0.2000	0.6786	0.3214	3.3932	0.3601	0.3471	0.9847	2.5022
0.2500	0.6774	0.3226	2.9032	0.3026	0.3484	0.9830	2.1372
0.3000	0.6758	0.3242	2.5343	0.2594	0.3501	0.9808	1.8624
0.3500	0.6737	0.3263	2.2458	0.2256	0.3524	0.9778	1.6476
0.4000	0.6712	0.3288	2.0136	0.1984	0.3551	0.9741	1.4747
0.4500	0.6683	0.3317	1.8225	0.1759	0.3583	0.9697	1.3323
0.5000	0.6649	0.3351	1.6624	0.1570	0.3619	0.9647	1.2129

TABLEAU 2.4 – Mesures des performances pour différentes valeurs de  $\xi_0$ .

Réprésentations graphiques (voir figure 2.7 ) illustrant les détails des résultat donnés dans le tableau précédent

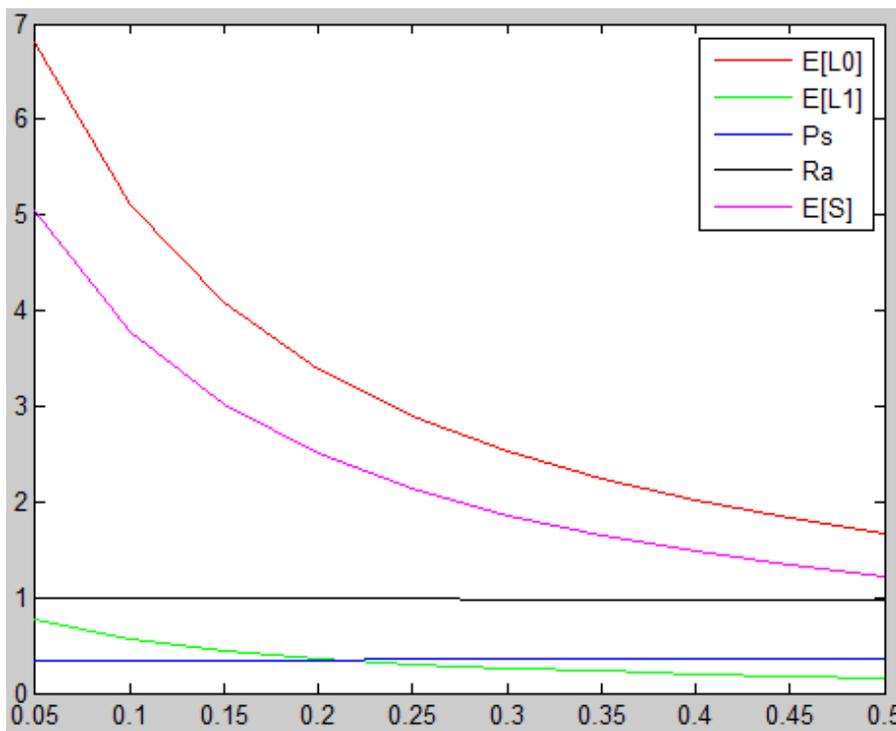


FIGURE 2.7 – Mesures des performances pour différentes valeurs de  $\xi_0$ .

**Interprétation :**

D’après la figure (2.7) et le tableau (2.4), on remarque que :

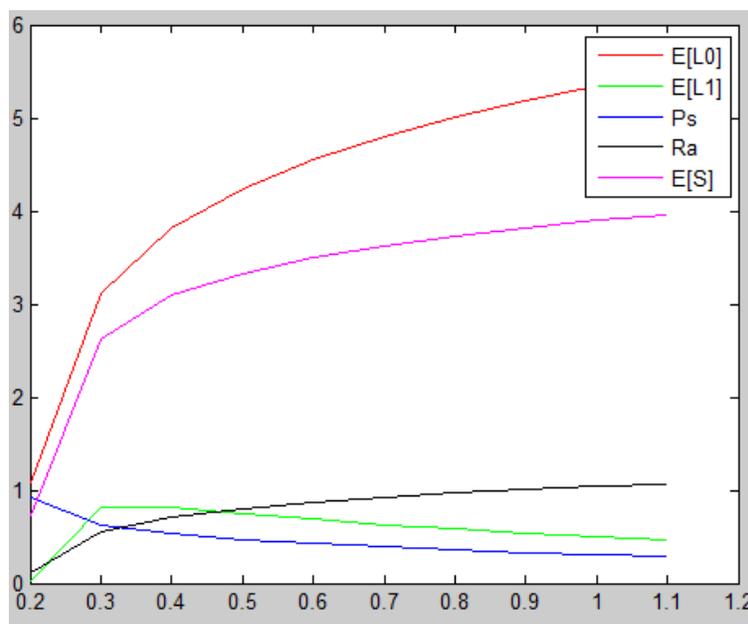
- Le nombre moyen de clients dans le système lorsque le serveur est en vacance et lorsque le serveur est occupé décroît avec la croissance du taux d’impatience  $\xi_0$  .
- La proportion du nombre de clients servis croît avec la croissance du taux d’impatience  $\xi_0$ .
- Le taux d’abandons des clients dû à l’impatience décroît avec la croissance du taux d’impatience  $\xi_0$ .
- Le temps moyen de séjour décroît avec la croissance du taux d’impatience  $\xi_0$ .

**Cas 2 :**

Dans ce cas, on fixe le paramètre  $\xi_0 = 0.1$  et on fait varier le paramètre  $\xi_1$ , les autres paramètres sont fixés comme suit :  $\lambda = 1.5$ ,  $\mu = 1.62$  et  $\gamma = 0.1$ .

Les résultats numériques obtenus dans ce cas sont présentés dans le tableau suivant :

$\xi_1$	$P_{\bullet 0}$	$P_{\bullet 1}$	$\mathbb{E}[L_0]$	$\mathbb{E}[L_1]$	$P_s$	$R_a$	$\mathbb{E}[S]$
0.2000	0.1430	0.8570	1.0726	0.0272	0.9255	0.1127	0.7332
0.3000	0.4152	0.5848	3.1142	0.8141	0.6316	0.5557	2.6189
0.4000	0.5093	0.4907	3.8199	0.8169	0.5299	0.7088	3.0912
0.5000	0.5652	0.4348	4.2390	0.7516	0.4696	0.7997	3.3271
0.6000	0.6069	0.3931	4.5516	0.6873	0.4246	0.8675	3.4926
0.7000	0.6403	0.3597	4.8023	0.6310	0.3885	0.9219	3.6221
0.8000	0.6680	0.3320	5.0103	0.5825	0.3585	0.9670	3.7285
0.9000	0.6916	0.3084	5.1867	0.5407	0.3331	1.0053	3.8183
1.0000	0.7118	0.2882	5.3386	0.5044	0.3112	1.0383	3.8953
1.1000	0.7295	0.2705	5.4710	0.4726	0.2922	1.0670	3.9624

TABLEAU 2.5 – Mesures des performances pour différentes valeurs de  $\xi_1$ .FIGURE 2.8 – Mesures des performances pour différentes valeurs de  $\xi_1$ .**Interprétation :**

D'après la figure (2.8), on remarque que :

- Le nombre moyen de clients dans le système lorsque le serveur est en vacance croît avec la croissance du taux d'impatience  $\xi_1$  et on remarque aussi que le taux d'abandons des clients croît avec la croissance de fonction  $\xi_1$ .
- Le nombre moyen de clients dans le système lorsque le serveur est occupé,  $\mathbb{E}[L_1]$  n'est pas une fonction monotone en fonction de  $\xi_1$ .
- La proportion du nombre de clients servis décroît avec la croissance du taux  $\xi_1$ .
- Le temps moyen de séjour croît avec la croissance du taux d'impatience  $\xi_1$ .

**Cas 3 :**

Dans ce cas, on fixe les paramètres  $\xi_0 = 0.1$ ,  $\xi_1 = 0.85$ ,  $\lambda = 1.5$  et  $\mu = 2$ , on fait varier le taux du vacance  $\gamma$

Les résultats numériques obtenus dans ce cas présentés dans le tableau suivant :

$\gamma$	$P_{\bullet 0}$	$P_{\bullet 1}$	$\mathbb{E}[L_0]$	$\mathbb{E}[L_1]$	$P_s$	$R_a$	$\mathbb{E}[S]$
0.0500	0.8213	0.1787	8.2131	0.3802	0.2382	1.1445	5.7289
0.1000	0.6958	0.3042	5.2187	0.4423	0.4056	0.8979	3.7740
0.1500	0.6030	0.3970	3.6182	0.4187	0.5293	0.7177	2.6912
0.2000	0.5317	0.4683	2.6586	0.3708	0.6244	0.5811	2.0196
0.2500	0.4753	0.5247	2.0369	0.3185	0.6996	0.4744	1.5702
0.3000	0.4295	0.5705	1.6107	0.2683	0.7606	0.3891	1.2526
0.3500	0.3917	0.6083	1.3057	0.2224	0.8111	0.3197	1.0188
0.4000	0.3600	0.6400	1.0799	0.1814	0.8534	0.2622	0.8408
0.4500	0.3329	0.6671	0.9080	0.1449	0.8894	0.2139	0.7019
0.5000	0.3097	0.6903	0.7742	0.1125	0.9204	0.1730	0.5911

TABLEAU 2.6 – Mesures des performances pour différentes valeurs de  $\gamma$ .

Réprésentations graphiques (voir la figure 2.9 ) illustrant les détails des résultats donnés dans le tableau précédent

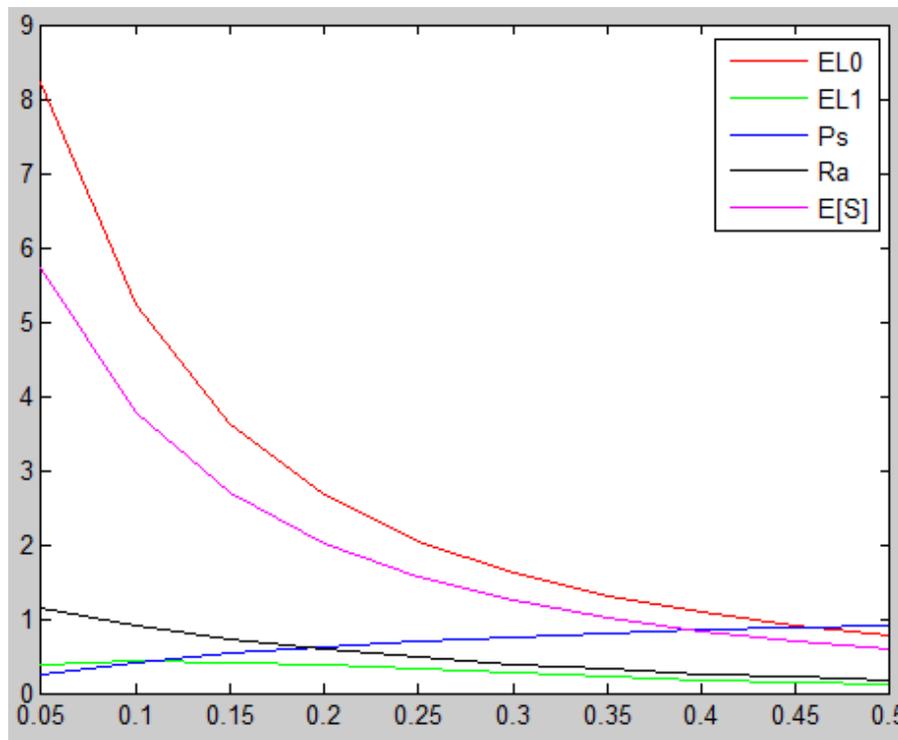


FIGURE 2.9 – Mesures des performances pour différentes valeurs de  $\gamma$ .

**Interprétation :**

D'après la figure (2.9), on remarque que :

- Le nombre moyen de clients dans le système lorsque le serveur est en vancance décroît avec la croissance du taux de vancances  $\gamma$  et on remarque que le taux d'abandons des clients décroît avec la croissance du taux  $\gamma$ .
- Le nombre moyen de clients dans le système lorsque le serveur est occupé,  $\mathbb{E}[L_1]$  n'est pas une fonction monotone en fonction de  $\gamma$ .
- La proportion de nombre de clients servis croît avec la croissance du taux  $\gamma$ .
- Le temps moyen de séjour décroît avec la croissance du taux de vancances  $\gamma$ .

## 2.3 Comparaison des deux politiques de vacances

Dans cette section, en se basant sur quelques mesures de performance calculées précédemment, on compare les deux politiques de vacances à savoir la politique de vacance unique et la politique de vacances multiples.

On montre que  $P_{00}(\text{vacances multiples}) > P_{00}(\text{vacance unique})$  et  $P_s(\text{vacance unique}) > P_s(\text{vacances multiples})$ .

Dans les formules (2.22 et 2.44), on pose

$$A = \frac{\xi_0}{\gamma K_0(1)} + \frac{e^{\frac{\lambda}{\xi_1}}}{\xi_1} \left[ \frac{\xi_0 K_1(1)}{K_0(1)} - \gamma K_2(1) + \frac{\gamma \mu}{\lambda} K_3(1) \right].$$

$$B = \frac{\xi_0}{\gamma K_0(1)} + \frac{e^{\frac{\lambda}{\xi_1}}}{\xi_1} \left[ \frac{\xi_0 K_1(1)}{K_0(1)} - \gamma K_2(1) \right].$$

On a :

$$A = B + \frac{\gamma \mu}{\xi_1 \lambda} e^{\frac{\lambda}{\xi_1}} K_3(1).$$

Or on a :

$$K_3(1) > 0 \Rightarrow A > B$$

D'où en déduit :

$$P_{00}(\text{vacances multiples}) > P_{00}(\text{vacance unique}).$$

On a :

$$P_s(\text{vacance unique}) = \frac{P_{\bullet 1}}{\rho}.$$

Avec

$$P_{\bullet 1}(\text{vacance unique}) = \frac{e^{\frac{\lambda}{\xi_1}}}{\xi_1} \left[ \frac{\xi_0 K_1(1)}{K_0(1)} - \gamma K_2(1) + \frac{\gamma \mu}{\lambda} K_3(1) \right] P_{00}(\text{vacance unique}).$$

On a :

$$P_s(\text{vacances multiples}) = \frac{P_{\bullet 1}}{\rho}.$$

Avec

$$P_{\bullet 1}(\text{vacances multiples}) = \frac{e^{\frac{\lambda}{\xi_1}}}{\xi_1} \left[ \frac{\xi_0 K_1(1)}{K_0(1)} - \gamma K_2(1) \right] P_{00}(\text{vacances multiples}).$$

Comme

$$P_{00}(\text{vacances multiples}) > P_{00}(\text{vacance unique})$$

et

$$P_{\bullet 1}(\text{vacance unique}) > P_{\bullet 1}(\text{vacances multiples}).$$

D'où :

$$P_s(\text{vacance unique}) > P_s(\text{vacances multiples}).$$

## Conclusion

Dans ce chapitre, une analyse stochastique de l'impatience des clients dans le système markovien M/M/1 avec vacances multiples et uniques du serveur a été effectuée via la méthode des fonctions génératrices. Quelques mesures de performance ont été calculé pour étudier l'effet du taux d'impatience et taux de vacance sur les mesures de performance du système considéré.

# Conclusion

Dans ce travail, nous avons analysé le système M/M/1 avec impatience et vacances du serveur. Nous avons considéré les cas des vacances multiples et unique avec les temps de vacances et impatience sont exponentiellement distribués. La formule explicite de la fonction génératrice de probabilités du nombre de clients dans le système a été obtenue. Nous avons ainsi calculés quelques mesures de performances importantes.

Enfin, nous avons réalisé une étude numérique de ce système pour voir l'effet des paramètres de vacances et d'impatience sur les caractéristiques du système. En effet, on a constaté que les fonctions  $\mathbb{E}[L_0]$ ,  $\mathbb{E}[L_1]$ ,  $P_s$ ,  $R_a$  et  $\mathbb{E}[S]$  sont monotones (soit croissantes ou décroissantes) en fonction de  $\xi_0$  et ce pour les deux types de vacances (M.V.P et S.V.P). Par contre le nombre moyen de clients dans le système durant la période d'activité n'est pas monotone ni en  $\xi_1$  ni en  $\gamma$  et ce pour les deux types de vacances (M.V.P et S.V.P).

Comme perspectives de ce travail, on peut envisager :

- L'analyse du système M/M/s avec impatience et vacance des serveurs.
- L'analyse des systèmes non markoviens avec les temps de vacances et impatience sont des lois générales (non exponentielles).
- L'étude économique de ce type de modèle.

# Bibliographie

- [1] E. Altman and U. Yechiali. Analysis of customers' impatience in queues with server vacation. *Queueing Systems*, 52 :261–279, 2006.
- [2] E. Altman and U. Yechiali. Infinite-server queues with system's additional tasks and impatient customers. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, 22 :477–493, 2008.
- [3] S.I Ammar. Transient analysis of a two-heterogeneous servers queue with impatient behavior. *J. Egypt. Math. Soc*, 22 :90–95, 2014.
- [4] S.I Ammar. Transient analysis of an  $M/M/1$  queue with impatient behavior and multiple vacations. *Appl. Math. Comput*, 260 :97–105, 2015.
- [5] S.I Ammar. Transient solution of an  $M/M/1$  vacation queue with a waiting server and impatient costumers. *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, 25 :337–342, 2017.
- [6] D.Y. Barrer. Queueing with impatient customers and ordered service. *Operations Research*, 5 :650–656, 1957.
- [7] B. Baynat. *Théorie des files d'attente : des chaînes de Markov aux réseaux forme produit*. Hermès, 2000.
- [8] S. Benjaafar, J. Gayon, and S. Tepe. Optimal control of production-inventory system with customer impatience. *Operations Research Letters*, 38 :267–272, 2010.
- [9] A.A. Bouchentouf, M. Cherfaoui, and M. Boualem. Analysis and performance evaluation of markovian feedback multi-server queueing model with vacation and impatience. *Amercain Journal of Mathematical and Management Sciences*, 40 :261–282, 2021.
- [10] B.T. Doshi. Queueing systems with vacations-a survey. *Queueing Systems*, 1 :29–66, 1986.
- [11] N. Gans, G. Koole, and A. Mandelbaum. Telephone call centers : Tutotial, review, and research prospects. *Manufacturing and Service Operations Management*, 5 :79–141, 2003.
- [12] O. Garnett, A. Mandelbaum, and M. Reiman. Designing a call center with impatient customers. *Manufacturing and Service Operations Management*, 4 :208–227, 2002.
- [13] D. Gross and C.M. Harris. *Fundamentals of Queueing Theory John wiley and Sons*. fourth Edition, 2008.

- 
- [14] M. Kadi, A.A. Bouchentouf, and L. Yahiaoui. On a multiserver queueing system with customer impatience until the end of service under single and multiple vacation policies. *Applications and applied Mathematics : An International. Journal (A A M)*, 15 :740–763, 2020.
- [15] L. Kleinrock. *Queueing systems Theory John wiley and Sons*. 1975.
- [16] M. Lefbvre. *Processus Stochastiques Appliqués*. Hermann, 2006.
- [17] C. Palm. Methods of judging the annoyance caused by congestion. *Tele*, 4 :189–208, 1953.
- [18] C. Palm. Research on telephone traffic carried by full availability groups. *Tele*, 1 :107, 1957.
- [19] A. Rungg. *Processus stochastiques*. press polytechniques, 1989.
- [20] H. Takagi. *Queueing Analysis, A Foundation of Performance Evaluation*. Elsevier, New York, NY, USA, 1991.
- [21] N. Tian and Z.G. Zhang. *Vacation Queueing Models : Theory and Applications*. Springer, New York, NY, USA, 2006.
- [22] D. Yue, W. Yue, and G. Xu. Analysis of an  $M/M/1$  queue with vacations and impatience timers which depend on the server's states. *Journal of Industrial and Management Optimization*, 12 :653–666, 2016.

## RÉSUMÉ

L'objectif de ce travail est l'analyse du système d'attente M/M/1 avec impatience et vacances du serveur (vacances multiples et vacance unique). Nous avons calculés quelques mesures de performances ont été obtenues via les fonctions génératrices de probabilités. Une illustration numérique a été faite pour voir l'effet des paramètres d'impatience et de vacance sur les mesures de performances du système.

**Mots clés :** Système d'attente ; impatience ; vacance ; fonction génératrice ; mesure de performance.

## ABSTRACT

The objective of this work is the analysis of the M/M/1 queueing system with impatience and server vacations (multiple vacation and single vacation). We calculated some performance measures were obtained via the probability generating functions. A numerical illustration was made to see the effect of the impatience and vacancy parameters on the performance measures of the system.

**Key words :** Queueing system ; impatience ; vacancy ; generating function ; performance measures.