

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**  
**MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR**  
**ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**



**UNIVERSITE ABDERRAHMANE MIRA BEJAIA**  
**FACULTE DE TECHNOLOGIE**  
**DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE**

**MEMOIRE**

Présenté pour l'obtention du diplôme de

**MASTER**

Filière : Génie Mécanique

Spécialité : Energétique & Installations Energétiques Et Turbomachines

Par :

**LAKAB Ala-Eddine**

**RIAH Bachir**

**Thème**

---

**Simulation numérique de la convection double diffusive dans un espace confiné**

---

Soutenu le **25 /06/2025** devant le jury composé de :

Dr Mr. BOUTALBI Nadir	Président
Dr Mr. CHERFI Ryad	Rapporteur
Pr Mr. SADAOUUI Djamel	Examinateur

**Année Universitaire 2024-2025**

## Remerciements

*Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à Dieu Tout Puissant, pour m'avoir accordé la force, la patience et la persévérance nécessaires tout au long de ce travail.*

*Je souhaite adresser mes remerciements les plus sincères à mon encadrant universitaire, Mr. CHÉRFI Ryad, pour son accompagnement précieux, sa disponibilité constante, ses conseils avisés et la qualité de son encadrement, qui ont été essentiels à la réalisation de ce projet.*

*Je remercie sincèrement les membres du jury pour leur temps, leurs remarques constructives et leur bienveillance tout au long de l'évaluation de mon projet de fin d'études.*

*Mes remerciements vont également à l'ensemble des enseignants du département de génie mécanique de l'Université de Béjaïa, pour les connaissances et les compétences qu'ils m'ont transmises tout au long de mon parcours.*

*Je n'oublie pas d'exprimer ma reconnaissance à mes camarades, pour les moments d'entraide, les échanges enrichissants et le soutien mutuel.*

*A toute ces personnes, nous leurs disons merci infiniment.*

***ALAIN & BACHIR***

## Dédicaces

*Je dédie ce travail à :*

*Mes très chers parents adorés, mes premiers guides, mes piliers, ceux dont l'amour inconditionnel, les sacrifices silencieux et la tendresse infinie m'ont porté jusqu'ici.*

*Vous m'avez montré, jour après jour, la beauté du courage, la noblesse du travail, et la chaleur d'un foyer bâti sur l'amour et le respect.*

*Ce travail est bien peu de chose comparé à tout ce que je vous dois, mais il porte en lui chaque battement de mon cœur reconnaissant.*

*Je vous aime profondément.*

*Une pensée émue à la mémoire de mon cher grand-père paternel, que Dieu entoure de sa miséricorde. Son héritage moral et ses valeurs demeurent une source d'inspiration constante dans ma vie. Que la paix soit éternellement sur lui.*

*Mes deux chers frères, Hamza et Omar, dont le soutien et l'affection m'ont toujours porté.*

*Votre présence dans ma vie est une source inépuisable de force et de réconfort.*

*Ma précieuse ELGUETTA A F.Zahra, qui a toujours été à mes côtés avec bienveillance et amour,  
ainsi qu'à toute sa famille pour leur générosité et leur soutien constant.*

*Tous mes cousins (es), particulièrement Moh, Djo, Othmane Dembélé, Ahmed, Bagou, Jaja, Zaki, Martin, Farouk, Karim et surtout Nabyl.*

*Tous mes amis(es) sans exception.*

*Mon binôme Bachir et sa famille.*

**ALAIN**

## Dédicaces

*Avec un grand respect et un énorme plaisir, je dédie ce modeste travail à tous ceux qui me sont chers,*

*Mes très chers parents qui ont toujours été là pour moi et qui m'ont donné un magnifique modèle de labeur et de persévérence. J'espère qu'ils trouveront dans ce travail toute ma reconnaissance et tout mon amour.*

*À mon frère Achour et sa femme ainsi que sa fille Nada et son fils Bissou*

*À mon frère Chabane et sa femme ainsi que son fils Zouzou*

*À mon cher frère Mahdi*

*À ma sœur Nassima ainsi que son mari Idris et ses trois filles Bouchra, Omniya, Sana, et son fils Waïl*

*À tous mes amis(es) sans exception*

*À mon binôme Alain et sa famille.*

# Sommaire

**Remerciements**

**Dédicaces**

**Sommaire**

**Liste des figures**

**Liste des tableaux**

**Nomenclatures**

**Introduction Générale .....** 1

**Chapitre I : Généralité et étude bibliographique.....** 4

**I.1 Introduction :.....** 4

**I.2 Mode de transfert de chaleur : .....** 4

I.2.1 La conduction : ..... 4

I.2.2 Transfert par rayonnement : ..... 6

I.2.3 Transfert par convection : ..... 6

**I.3 Différents types de convection :.....** 7

I.3.1 Convection naturelle : ..... 7

I.3.2 Convection Forcée : ..... 8

I.3.3 Convection mixte : ..... 8

I.3.4 La convection double-diffusive : ..... 8

**I.4 Les ailettes : .....** 9

I.4.1 Définition : ..... 9

I.4.2 Choix des ailettes : ..... 10

I.4.3 Intérêt des ailettes : ..... 10

I.4.4 Forme des ailettes : ..... 10

I.4.5 Quelques types classiques d'aillettes : ..... 11

I.4.6 Equation de la barre : ..... 11

I.4.6.1 Hypothèses simplificatrices : ..... 11

**I.5 Recherches bibliographiques relatifs au domaine : .....** 12

I.5.1 Convection entre deux cylindres : ..... 12

I.5.2 Convection autour de cylindres munis d'aillettes : ..... 15

I.5.3 Convection en régime de double-diffusion entre deux cylindres : ..... 16

**I.6 Conclusion :.....** 20

**Chapitre II : Position du problème et formulation mathématique .....** 22

**II.1 Introduction : .....** 22

**II.2 Géométrie étudiée : .....** 22

<b>II.3 Hypothèses simplificatrices :</b>	23
<b>II.4 Équations gouvernantes :</b>	24
II.4.1 Forme dimensionnelle des équations :	24
<b>II.5 Conditions aux limites :</b>	25
<b>II.6 Équations adimensionnelles :</b>	26
II.6.1 Forme adimensionnelle des équations de conservation :	26
<b>II.7 Conditions aux limites adimensionnelles :</b>	28
<b>II.8 Groupements sans dimensions :</b>	28
<b>II.9 Conclusion :</b>	30
<b>Chapitre III : Résultats et discussion</b>	32
<b>III.1 Introduction :</b>	32
<b>III.2 Etude du maillage :</b>	32
<b>III.3 Validation numérique :</b>	34
<b>III.4 Résultats et Discussions :</b>	36
III.4.1 Structure de l'écoulement et distribution de température et de concentration :	36
III.4.1.1 Effet du nombre de Grashof :	36
III.4.1.2 Effet du nombre de Reynolds :	38
III.4.1.3 Effet du nombre de Lewis :	41
III.4.1.4 Effet du nombre de rapport de flottabilité :	43
III.4.2 Analyse du transfert de chaleur et de masse :	45
III.4.2.1 Nombres de Nusselt et de Sherwood local :	45
III.4.2.2 Nombre de Nusselt et Sherwood moyen :	49
<b>III.5 Conclusion :</b>	52
<b>Conclusion Générale</b>	54

## Références Bibliographiques

## Annexes

## Résumé

## Liste des figures

<b>Figure I-1.</b> Représentation des 3 modes de transfert de chaleur.....	4
<b>Figure I-2.</b> Spectre du rayonnement thermique.....	6
<b>Figure I-3.</b> Configuration étudiée par Lee .....	13
<b>Figure I-4.</b> Espace annulaire étudié avec les conditions aux limites .....	15
<b>Figure I-5.</b> Anneau cylindrique horizontal étroit .....	15
<b>Figure I-6.</b> Géométrie étudiée .....	16
<b>Figure I-7.</b> Représentation schématique de l'espace annulaire avec ailettes.....	17
<b>Figure I-8.</b> Géométrie de l'anneau.....	18
<b>Figure I-9.</b> Schéma du modèle physique et du système de coordonnées.....	19
<b>Figure II-1.</b> Géométrie du problème. ....	23
<b>Figure III-1 : a)</b> Définition du maillage coulissant ; b) l'interface séparant les deux régions (mobile et fixe). .....	33
<b>Figure III-2:</b> Comparaison avec Al-Amiri et al [29] , Cylindre extérieur tournant, N=1, Re = 100 et Gr=10 <sup>4</sup> , (a) Nombre de Nusselt et Sherwood moyen, (b) Isoconcentration, linges de courants et isothermes, for Le=1.....	34
<b>Figure III-3 :</b> Effet du nombre de Grashof sur les isothermes, isoconcentration et lignes de courants pour Re=50, N=1 Le=1.....	36
<b>Figure III-4 :</b> Effet du nombre Reynold sur les isothermes, isoconcentration et lignes de courants pour Gr=10 <sup>5</sup> , N=1 et Le=1.....	39
<b>Figure III-5 :</b> Effet du Lewis sur les isothermes, isoconcentration et lignes de courants pour Gr=10 <sup>5</sup> , N=1 et Re=50.....	41
<b>Figure III-6 :</b> Effet du Rapport flottabilité sur les isothermes, isoconcentration et lignes de courants pour Gr=10 <sup>5</sup> , Re=50 et Le=1.....	44
<b>Figure III-7 :</b> Effet du Grashof sur les nombres de Nusselt et Sherwood locaux pour Re=50, N=1 Le=1.....	45
<b>Figure III-8 :</b> Effet du Reynolds sur les nombres de Nusselt et Sherwood locaux.....	45
<b>Figure III-9 :</b> effet du nombre de Lewis sur les nombres locaux de Nusselt et Sherwood pour Re=50, Gr=10 <sup>5</sup> et N=1. ....	46
<b>Figure III-10 :</b> Effet du rapport de flottabilité sur les nombres de Nusselt et Sherwood locaux pour Gr=10 <sup>5</sup> , Re=50 , Le=1.....	47
<b>Figure III-11 :</b> Effet du nombre de Grashof sur Nu et Sh moyens.....	48
<b>Figure III-12 :</b> Effet du nombre de Reynolds sur Nu et Sh moyens.....	48
<b>Figure III-13 :</b> Effet du nombre de Lewis sur Nu et Sh moyens. ....	49
<b>Figure III-14 :</b> Effet du rapport de flottabilité sur Nu et Sh moyens. ....	50

## Liste des tableaux

<b>Tableau II-1</b> : Les conditions aux limites.....	<b>25</b>
<b>Tableau II-2</b> : Les Conditions aux limites adimensionnelles. ....	<b>27</b>
<b>Tableau III-1</b> : Teste de sensibilité du maillage. ....	<b>33</b>

# Nomenclatures

Symboles	Définition	Unité (SI)
c	Concentration	$\text{Kg m}^{-3}$
C	Concentration adimensionnelle $C = (c - c_e)/(c_i - c_e)$	-
$C_p$	Chaleur spécifique	$\text{J Kg}^{-1}\text{K}^{-1}$
D	Diffusivité massique	$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$
g	Accélération de la pesanteur	$\text{m s}^{-2}$
$l_{ref}$	Epaisseur de l'espace annulaire $l_{ref} = r_0 - r_i$	m
$\overline{Nu}$	Nombre de Nusselt moyen	-
$Nu$	Nombre de Nusselt local	-
P	Pression	Pa
P	Pression adimensionnelle $P = p/\rho_0 (\omega r_i)^2$	-
r	Rayon	m
R	Rayon adimensionnelle	-
$\overline{Sh}$	Nombre de Sherwood moyen	-
$Sh$	Nombre de Sherwood local	-
t	Temps	s
T	Température	K
u, v	Composantes dimensionnelles de la vitesse	
U, V	Composantes adimensionnelles de la vitesse	-
$\omega$	Vitesse de rotation	$\text{rad s}^{-1}$
x, y	Coordonnées cartésiennes	M
X, Y	Cordonnées cartésiennes adimensionnelles	-

## Symboles Grecs

$\alpha$	Diffusivité thermique	$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$
$\beta$	Coefficient de dilatation du fluide à pression constant( $1/T$ )	$\text{K}^{-1}$
$\bar{\sigma}$	Tenseur de contrainte surfacique (tenseur de contrainte de Cauchy)	Pa
$\lambda$	Conductivité thermique	$\text{W m}^{-1}\text{K}^{-1}$
$\rho$	Masse volumique	$\text{Kg m}^{-3}$
$\upsilon$	Viscosité cinématique	$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$
$\mu$	Viscosité dynamique	$\text{Kg m}^{-1} \text{s}^{-1}$

$\tau$	Temps adimensionnelle $\tau = t \omega r_i / l$	-
$\varphi$	Position de l'ailette (Angle d'inclinaison)	$\circ$
$\emptyset$	Coordonné angulaire	-
$\theta$	Température adimensionnelle $\theta = (T - T_e) / (T_i - T_e)$	-

## Indices

i	Intérieur
e	Extérieur
f	Froide
c	Chaud
o	Reference
T	Thermique
s	Solutal

## Groupements adimensionnels

Pr	Nombre de Prandtl, $P_r = \frac{\nu}{\alpha}$	
Gr	Nombre de Grashof, $Gr = g\beta(T_i - T_0)l^3 / \nu^2$	
Re	Nombre de Reynolds, $Re = \omega r_i l_{ref} / \nu$	
Le	Nombre de Lewis, $Le = \alpha / D$	
N	Nombre de rapport de flottabilité, $N = Gr_s / Gr_T$	

# **Introduction Générale**

## **Introduction Générale**

Dans le contexte actuel de la transition énergétique et de l'optimisation des systèmes thermiques la compréhension des mécanismes de transfert de chaleur et de masse dans les milieux fluides complexes représente un enjeu majeur. Parmi ces mécanismes, la convection double diffusive caractérisée par la présence simultanée de gradients de température et de concentration cette suscite un intérêt particulier en raison de sa complexité physique et de ses nombreuses applications pratiques, allant des procédés industriels aux phénomènes géophysiques.

Ce phénomène se manifeste dans divers systèmes tels que les réacteurs chimiques, les échangeurs de chaleur, les dispositifs de refroidissement ou encore les milieux naturels comme les océans. La difficulté d'analyse réside dans l'interaction entre les deux types de flottabilité (thermique et solutale) qui influencent différemment le comportement du fluide selon les conditions aux limites, la géométrie, et les propriétés du fluide. L'étude de ces phénomènes nécessite donc une approche numérique rigoureuse, d'autant plus lorsqu'on ajoute des éléments perturbateurs comme la rotation et les ailettes, qui modifient l'écoulement et les transferts thermiques.

Le présent mémoire a pour objectif de simuler et d'analyser la convection double diffusive en régime mixte, dans une configuration annulaire horizontale, où le cylindre intérieur est chaud, rotatif et muni d'ailettes, tandis que le cylindre extérieur est froid et fixe. L'étude a été conduite à l'aide du logiciel ANSYS Fluent, en se basant sur la méthode des volumes finis, afin de visualiser les effets des principaux paramètres (nombre de Grashof, Reynolds, Lewis, rapport de flottabilité) sur les transferts thermiques et massiques.

Le mémoire est structuré en trois chapitres :

Le premier chapitre est dédié aux généralités et à la revue bibliographique. Il commence par une présentation des différents modes de transfert thermique (conduction, convection et rayonnement), avec une attention particulière portée à la convection naturelle, forcée, mixte et double diffusive. Ce chapitre expose également les rôles et l'impact des ailettes dans l'amélioration des échanges thermiques, ainsi qu'une synthèse des travaux de recherche précédents sur les configurations annulaires, les effets de la rotation, et les écoulements thermo-solutaux. Cette partie offre ainsi le cadre théorique et scientifique qui justifie notre choix de configuration physique.

Le deuxième chapitre traite de la modélisation mathématique et numérique du problème. Il présente les équations gouvernantes adimensionnelles (continuité, quantité de mouvement, énergie, concentration) et les conditions aux limites appliquées à notre domaine d'étude. Ce chapitre décrit

## **Introduction générale**

---

également la stratégie de simulation adoptée, la méthode des volumes finis implémentée dans Fluent, le traitement de la rotation via un maillage glissant, ainsi que les hypothèses de modélisation utilisées. Il constitue la base du travail de simulation numérique effectué.

Le troisième chapitre est consacré à la présentation et à l'analyse des résultats numériques. Il montre l'évolution des champs de température (isothermes), de concentration (isoconcentrations) et de vitesse (lignes de courant) en fonction des paramètres étudiés. Ce chapitre permet d'interpréter l'effet du nombre de Grashof (Gr), du nombre de Reynolds (Re), du rapport de flottabilité (N), du nombre de Lewis (Le), ainsi que de la présence des ailettes sur les mécanismes de transfert et la structure de l'écoulement. Une attention particulière est portée à l'influence des paramètres sur les nombres de Nusselt et de Sherwood, indicateurs clés des performances thermiques et massiques.

Nous avons terminé par une conclusion générale dans laquelle nous avons dégagé les principaux résultats obtenus ainsi que les perspectives futures.

# **Chapitre I : Généralité et étude bibliographique**

## Chapitre I : Généralité et étude bibliographique

### I.1 Introduction :

La convection est un mode de transfert de chaleur qui intervient lorsqu'un fluide, liquide ou gazeux se met en mouvement et transporte de l'énergie thermique. Ce transfert s'effectue lorsque le fluide entre en contact avec une surface ayant une température différente. Un exemple courant est celui d'un radiateur : l'air froid qui l'entoure se réchauffe, devient moins dense, et monte. Ce phénomène s'explique notamment par la poussée d'Archimède, qui fait monter l'air chaud, générant ainsi des courants de convection.

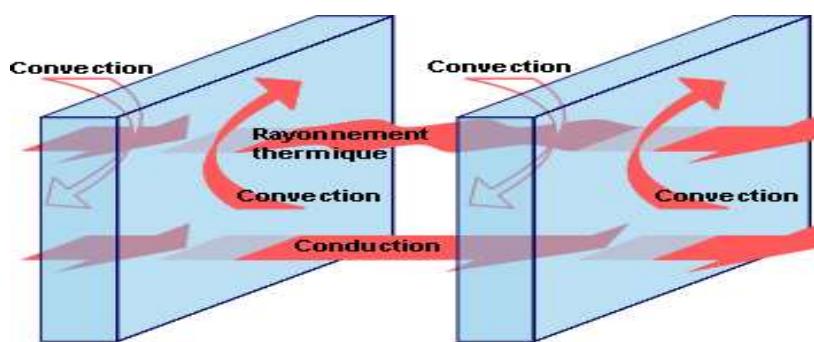
On distingue deux formes principales de convection : naturelle et forcée. La convection naturelle est provoquée par les différences de densité dues aux variations de température. Le fluide chaud, plus léger, s'élève tandis que le fluide froid descend. À l'inverse, la convection forcée est induite par un dispositif externe, comme un ventilateur ou une pompe, qui provoque le mouvement du fluide.

Ce mode de transfert de chaleur est essentiel dans de nombreux domaines : refroidissement des composants électroniques, systèmes de chauffage, échangeurs thermiques industriels, ou encore sécurité des réacteurs nucléaires. L'efficacité de la convection dépend fortement des propriétés thermiques du fluide utilisé, telles que la conductivité thermique et la capacité calorifique, ce qui peut influencer la performance globale des systèmes thermiques.

### I.2 Mode de transfert de chaleur :

Les modes de transfert de chaleur sont la manière avec laquelle la chaleur est transportée d'un milieu à un autre. Il existe trois modes de transfert de chaleur : la **conduction**, la **convection** et le **rayonnement**.

La figure suivante présente les trois modes de transfert de chaleur pour un composant électronique :



**Figure I-1.** Représentation des 3 modes de transfert de chaleur.

#### I.2.1 La conduction :

La conduction thermique est la transmission de la chaleur, de molécule à molécule, dans un corps ou dans plusieurs corps contigus et non réfléchissants, sans qu'il y ait mouvement du milieu ou que ce mouvement intervienne dans la transmission.

Cette méthode de transmission de transferts de chaleur dans les solides ou entre corps solides en contact. La conduction y a cours également dans les liquides et les gaz mais, dans les cas sauf ceux des liquides très visqueux et des gaz prisonniers d'éléments poreux, son impact est négligeable comparé à l'impact de la convection. Il n'est pas nécessaire de mélanger la conduction thermique et le chauffage par passage de courant électrique directement dans la pièce à chauffer, également connu sous le nom de chauffage par conduction électrique.

Le transfert de chaleur par conduction définit tous les transferts de chaleur qui se réalisent dans les parois séparant deux corps aux températures différentes. C'est vrai des surfaces d'échange des échangeurs de chaleur, mais ce l'est aussi pour les murs et vitrages d'un bâtiment, les cuves pour liquides chauds ou froids, les parois des fours, etc.

Il est courant que les parois soient constituées de plusieurs matériaux ayant chacun un rôle spécifique (réfractaire, revêtement anti corrosion, isolant thermique, etc.) et qui sont des parois composites à travers lesquelles s'effectue le transfert de chaleur.

Le transfert de chaleur par conduction définit tous les transferts de chaleur qui ont lieu dans les parois qui séparent deux corps qui ont des températures différentes. Il s'agit du transfert de chaleur sur les surfaces d'échange des échangeurs de chaleur, mais il s'agit aussi du transfert des murs et des vitrages d'un bâtiment, des cuves contenant des liquides chaud ou froid, des parois des fours, etc.

Il est fréquent que les parois se composent de divers matériaux chacun spécifique à sa fonction (réfractaire, anticorrosion revêtement, isolant thermique, etc.) et étant des parois composites au travers desquelles intervient le transfert de la chaleur.

- **Loi de FOURIER :**

La loi de Fourier traduit la relation existante, en chaque point d'un corps, entre le flux thermique et le gradient de température.

Cette expression, dans la mesure où la position d'un point peut être caractérisée par une seule dimension (paroi plane, cylindrique ou sphérique par exemple), s'écrit :

$$-\bar{\lambda} S \overrightarrow{grad}(T)$$

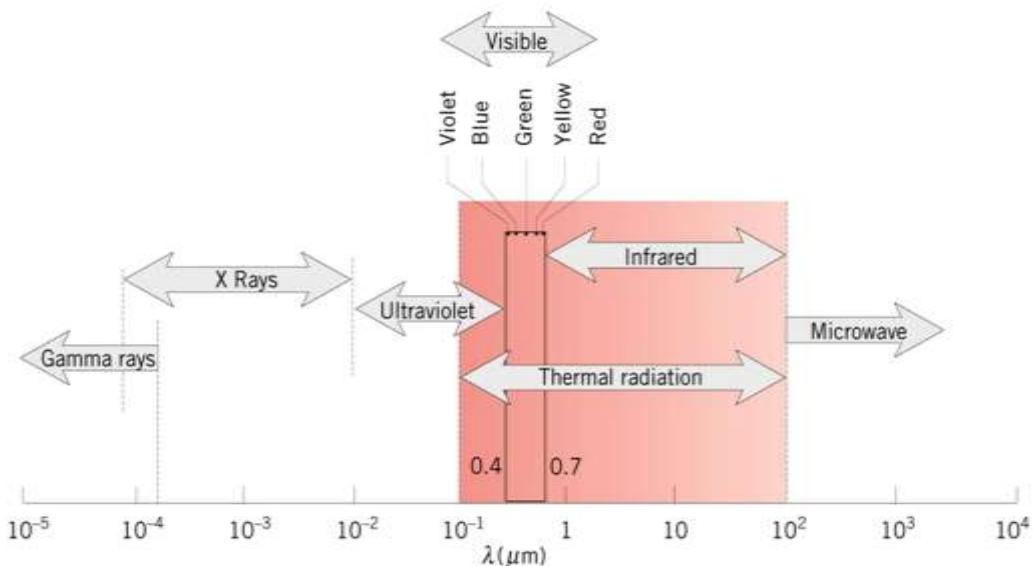
Le calcul intégral permet d'étendre la loi de Fourier à des corps de forme quelconque. La loi décrit le fait que le flux de chaleur est proportionnel au gradient de température. La direction de l'écoulement de chaleur coïncide avec celle du gradient de température. Le signe caractérise le fait que l'écoulement de chaleur s'effectue dans le sens des températures décroissantes, du chaud vers le froid.

### I.2.2 Transfert par rayonnement :

Le rayonnement est encore mal expliqué. Une des théories consiste à expliquer le rayonnement comme la propagation de photons. Une autre théorie consiste à l'expliquer comme étant des ondes électromagnétiques. Dans tous les cas, les ondes qui transportent le rayonnement ont une longueur  $10^{-1}\mu m < \lambda < 10^2\mu m$  comme le montre la **figure I-2**.

Le rayonnement est un transfert de chaleur sans support matériel. Il a lieu grâce aux photons. Dans le rayonnement, la chaleur est transportée par des ondes électromagnétiques. L'exemple le plus connu est la chaleur du soleil. La chaleur se propage mieux par rayonnement dans le vide. Le rayonnement dépend de la nature de la surface et de sa matière

$$\Phi = hs(T_p^4 - T_\infty^4)$$



**Figure.I-2.** Spectre du rayonnement thermique [1]

### I.2.3 Transfert par convection :

Il est bien connu depuis plus d'un siècle, que les scientifiques se penchent sur l'étude des écoulements avec transfert de chaleur par différents modes de convection (naturelle, forcée et mixte). Celles-ci, s'impliquant dans de nombreux phénomènes naturels ou processus industriels. Parmi les différents domaines industriels où l'on trouve leurs applications on peut citer, par exemple, les processus de dépôt de vapeurs chimiques [1], ainsi que le refroidissement des réacteurs nucléaires et des systèmes électroniques.

La convection est un mode de transport d'énergie par l'action combinée de la conduction, de l'accumulation de l'énergie et du mouvement du milieu. La convection est le mécanisme le plus important de transfert d'énergie entre une surface solide et un liquide ou un gaz. Le transfert d'énergie par convection d'une surface dont la température est supérieure à celle du fluide qui l'entoure s'effectue en plusieurs étapes. D'abord la chaleur s'écoule par conduction de la surface aux particules

fluide adjacentes ; l'énergie ainsi transmise sert à augmenter la température et l'énergie interne de ces particules. Ensuite ces dernières vont se mélanger avec d'autres particules situées dans une région à basse température et transférer une partie de leur énergie, celle -ci est à présent emmagasinée dans les particules fluides et elle est transportée sous l'effet de leur mouvement. Le transfert de chaleur par convection est classifié selon la nature de l'écoulement. On distingue principalement deux modes :

- La convection forcée intervient lorsque l'écoulement est causé par un moyen externe.
- La convection naturelle ou libre fait référence aux écoulements engendrés par les forces flottabilité
- **Loi de Newton :**

La loi de refroidissement de Newton, une découverte remarquable dans le domaine de la thermodynamique, demeure fondamentale dans notre compréhension des phénomènes de transfert thermique. Elle décrit la manière dont la température d'un objet change en fonction du temps lorsqu'il est soumis à un environnement dont la température est différente. Cette loi est largement utilisée dans divers domaines scientifiques et industriels, allant de l'ingénierie aux sciences environnementales. L'importance de cette loi réside dans sa capacité à modéliser et prédire le comportement thermique des matériaux. Elle permet d'estimer la vitesse de refroidissement ou de réchauffement d'un corps ce qui est crucial dans de nombreuses applications pratiques, telles que la sécurité alimentaire, la conservation des ressources énergétiques et même la médecine légale.

$$\Phi = hs(Tp - T\infty)$$

Où :

$\Phi$  : est le flux de chaleur transféré par convection (en watts, W).

$h$  : est le coefficient de transfert de chaleur par convection (en  $\text{W}/\text{m}^2 \cdot \text{K}$ ).

$s$  : est la surface de contact entre le solide et le fluide (en  $\text{m}^2$ ).

$Tp$  : est la température de la surface solide (en K ou  $^{\circ}\text{C}$ ).

$T\infty$  : est la température du fluide loin de la surface (en K ou  $^{\circ}\text{C}$ ).

### I.3 Différents types de convection :

#### I.3.1 Convection naturelle :

En convection naturelle, les mouvements du fluide sont provoqués par des gradients de densités dues au fait que la température ne soit pas uniforme. Les couches chaudes, donc de poids spécifique plus faible, sont soumises à des forces dirigées vers le haut suivant un mécanisme analogue à celui de la poussée d'Archimède. Dans les régions à température élevée, le fluide prend donc un mouvement ascendant. Le phénomène inverse de courants descendants se produit pour les parties du fluide dont la température est inférieure à celle du fluide chaud. Les courants de convection naturelle sont alors

dus à des différences de poids spécifique et par conséquent le phénomène se produit en raison de [2] l'existence du champ de pesanteur terrestre.

Le phénomène de la convection naturelle faire l'objet de maintes différentes applications à savoir: les problèmes océanographiques et atmosphériques tels que les effets de serre, les changements extrêmes de climat, ainsi que les problèmes technologiques, à savoir les équipements électriques et les réacteurs nucléaires, les capteurs solaires, le stockage des fluides, l'écoulement d'air dans les pièces d'habitation, les appareils ménagers, les réfrigérateurs et les échangeurs de chaleur sont tous des problèmes.

### I.3.2 Convection Forcée :

La convection forcée représente un mode de transfert de chaleur dont le mouvement du fluide est provoqué par action de dispositifs mécaniques externes (pompé, turbine ou ventilateur) plutôt que par les seules forces de flottabilité. Ce phénomène est omniprésent dans de nombreux systèmes thermiques et énergétiques (chauffage central « à accélérateur », radiateurs électriques « à soufflerie », chauffe-eaux solaires, fours à chaleur tournante).

Quelques exemples de convection forcée dans des appareillages : four à convection de cuisinière. Le corps humain a son propre système de convection cuisinière. Le corps humain a son propre système de convection forcée, la circulation sanguine.

### I.3.3 Convection mixte :

Il existe une cause externe au mouvement du fluide mais insuffisante pour que la poussée d'Archimède puisse être négligée (frontière entre la convection libre et la convection forcée) c'est le cas des transferts de chaleur dans un habitacle d'automobile [3] : L'air est soufflé dans l'habitacle par un ventilateur, mais la poussée d'Archimède n'est pas négligeable, surtout lorsqu'on se place loin des entrées d'air.

Le critère permettant de distinguer la convection naturelle de la convection forcée repose sur le nombre adimensionnel de Richardson (**Ri**). Ce dernier est défini comme le rapport entre le nombre de Grashof (**Gr**), qui caractérise l'importance des forces de flottabilité, et le carré du nombre de Reynolds (**Re**), qui quantifie l'effet des forces d'inertie associées à l'écoulement imposé. Mathématiquement, il s'exprime sous la forme :

$$Ri = \frac{Gr}{Re^2}$$

### I.3.4 La convection double-diffusive :

La convection double-diffusive est un phénomène de dynamique des fluides qui décrit une forme de convection entraînée[4] par deux gradients de densité différents, qui ont des taux de diffusion différents.

La convection dans les fluides est entraînée par des variations de densité à l'intérieur de ceux-ci sous l'influence de la gravité. Ces variations de densité peuvent être causées par des gradients dans la composition du fluide, ou par des différences de température (par dilatation thermique). Les gradients thermiques et de composition peuvent souvent se diffuser avec le temps, réduisant leur capacité à entraîner la convection, et nécessitant que des gradients dans d'autres régions de l'écoulement existent pour que la convection continue. Un exemple courant de convection double-diffusive est en océanographie, où les concentrations de chaleur et de sel existent avec des gradients différents et se diffusent à des taux différents. Un effet qui affecte ces deux variables est l'apport d'eau douce froide provenant d'un iceberg. Un autre exemple de double diffusion est la formation de faux fonds à l'interface [5] de la glace de mer et des couches d'eau de fonte sous la glace. Une bonne discussion de plusieurs de ces processus se trouve[6] dans la monographie de Stewart Turner "Buoyancy effects in fluids".

La convection double diffusive est importante pour comprendre l'évolution d'un certain nombre de systèmes qui ont de multiples causes de variations de densité. Il s'agit notamment de la convection dans les océans de la Terre (comme mentionné ci-dessus), dans les chambres magmatiques [7] et dans le soleil (où la chaleur et l'hélium se diffusent à des vitesses différentes). On peut également penser que les sédiments ont [8] une vitesse de diffusion brownienne lente par rapport au sel ou à la chaleur, de sorte que la convection double diffusive est considérée comme importante sous les rivières chargées de sédiments dans les lacs et l'océan .

## **I.4 Les ailettes :**

### **I.4.1 Définition :**

L'ailette comme son nom l'indique est un appendice que l'on dispose sur un dispositif que l'on désire refroidir ou chauffer efficacement. L'idée est d'augmenter la surface d'échange. On peut voir des ailettes sur les radiateurs de [9] chauffage domestique, sur le radiateur de voitures, sur les microprocesseurs dans les systèmes électroniques.

Les ailettes sont des éléments métalliques fixés à un dispositif thermique dans le but d'améliorer le processus de refroidissement. Leur fonction principale est d'augmenter la surface d'échange thermique disponible. En accroissant cette surface, elles facilitent le transfert de chaleur entre le système et son environnement. Généralement en contact avec l'air ou un fluide de refroidissement, elles permettent une dissipation plus rapide et plus efficace de la chaleur. Ce principe repose sur l'amélioration des échanges thermiques par convection ou rayonnement. Leur conception est étudiée pour maximiser l'efficacité thermique sans alourdir excessivement le système. L'utilisation d'ailettes est une solution simple et économique pour optimiser les performances de refroidissement. Elles sont largement employées dans les domaines de la mécanique, de l'électronique et de l'énergie. En résumé

---

les ailettes jouent un rôle essentiel dans la gestion thermique des dispositifs. Leur présence permet de maintenir les systèmes à [10] des températures de fonctionnement sûres et efficaces

#### I.4.2 Choix des ailettes :

Les ailettes sont utilisées lorsqu'il faut extraire une quantité de chaleur importante dans un encombrement réduit, comme par exemple dans le radiateur d'automobile, le carter de moteur refroidi par air, l'évaporateur de climatiseur, etc. D'une façon générale, l'usage des ailettes est peu utile pour les liquides car le coefficient d'échange convectif est grand mais important dans le cas des gaz car le coefficient d'échange convectif est faible. Des ailettes étroites et rapprochées sont meilleures que des ailettes plus grandes et espacées mais on est limité par les pertes de charges (elles deviennent trop importantes si l'on diminue trop l'écartement des ailettes). L'aillette est d'autant plus performante que sa conductivité thermique  $\lambda$  est élevée. Le choix des ailettes résulte finalement d'un compromis entre le prix, les pertes de charge et les qualités de chaleur échangée [11].

#### I.4.3 Intérêt des ailettes :

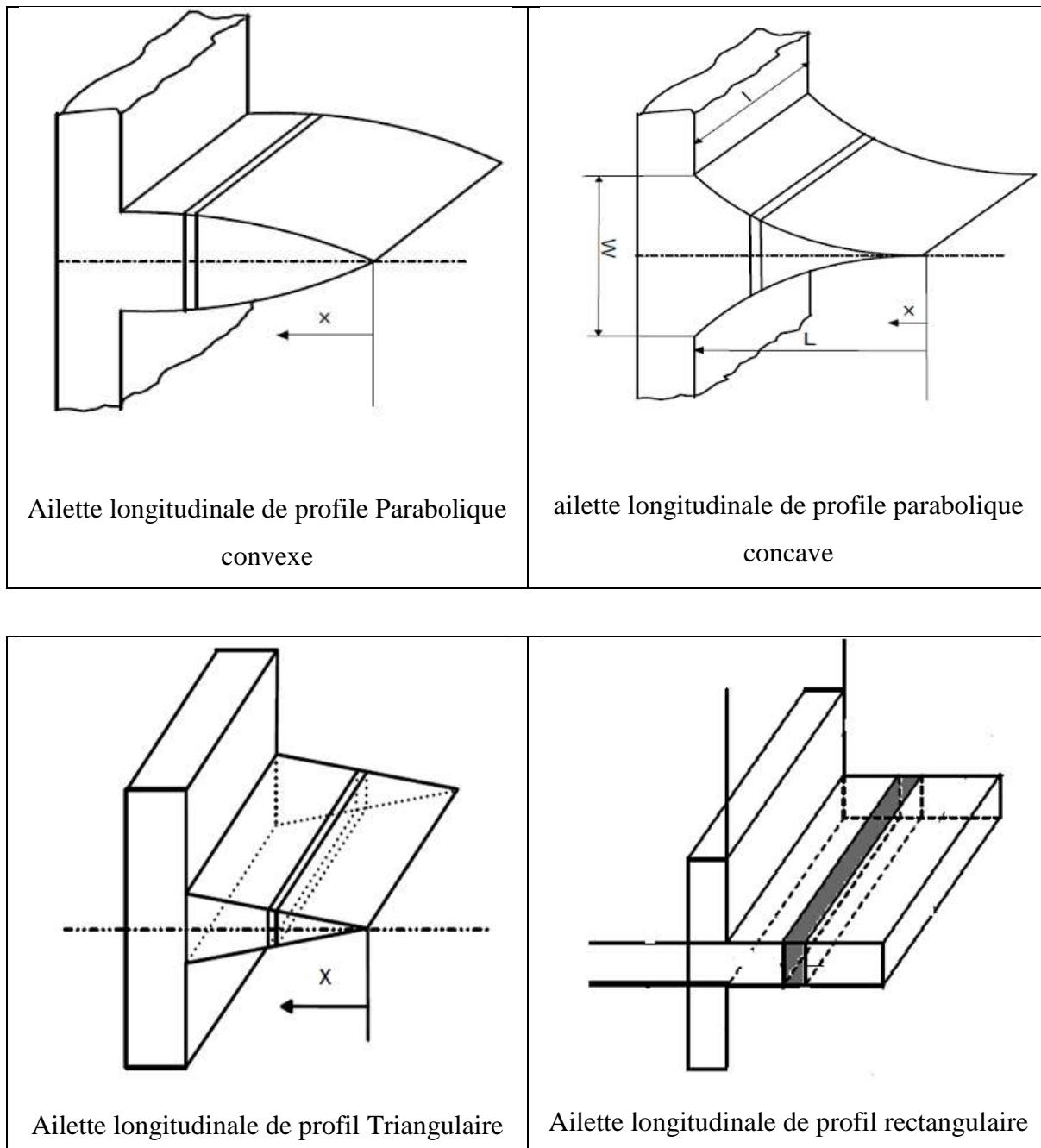
- Favoriser la turbulence pour détruire la couche limite thermique.
- Augmenter la surface d'échange.

#### I.4.4 Forme des ailettes :

Les formes des ailettes sont tellement variées qu'il est important de les citer. WEBB, BERGLES ET JUNKHAN identifient 329 formes d'aillettes brevetées aux USA [12]. Dans graphe [13], l'auteur note qu'il existe plus de 180 profils et géométrie d'aillette en Aluminium dans le monde. La recherche de nouvelles formes est en développement continu. On distingue classiquement les formes :

- Rectangulaire
- Triangulaire
- Parabolique
- Hyperbolique

#### I.4.5 Quelques types classiques d'ailettes :



**Figure.I -3 :** Différents Profils d'Ailettes Longitudinales Utilisées en Échangeurs Thermiques.

#### I.4.6 Equation de la barre :

##### I.4.6.1 Hypothèses simplificatrices :

- Ailette longitudinale de section quelconque
- Régime stationnaire
- La longueur  $L \gg e$  (épaisseur de l'ailette) ce qui permet de considérer une évolution uniquement.

- Matériau homogène et isotrope avec  $\kappa = \lambda$  cste.
- Le coefficient de convection aire-ailette constant.
- Résistance de contact entre la paroi mère et l'ailette négligeable.
- Ambiance à température constante.
- Pas de source de chaleur dans l'ailette.

## I.5 Recherches bibliographiques relatifs au domaine :

L'optimisation du transfert thermique par convection représente un enjeu central dans de nombreux travaux de recherche en ingénierie thermique. Dans cette optique, un grand nombre d'études, tant numériques qu'expérimentales, ont été consacrées à la compréhension des mécanismes de convection, à l'analyse de l'influence des configurations géométriques des systèmes, ainsi qu'à l'étude des propriétés physico-chimiques des fluides utilisés.

Parmi les différents types de convection – naturelle, forcée ou mixte – leur étude dans des cavités confinées a retenu l'attention de plusieurs chercheurs en raison de leurs multiples applications industrielles. En effet, ces phénomènes interviennent dans des domaines variés tels que les échangeurs de chaleur, le stockage d'énergie thermique, le refroidissement des denrées alimentaires dans le secteur agroalimentaire, le transfert thermique dans les réacteurs nucléaires et les moteurs d'avion, la gestion thermique des composants électroniques, le conditionnement d'air dans les bâtiments, ainsi que dans les dynamiques océanographiques et atmosphériques.

C'est dans ce contexte que s'inscrit ce travail de fin d'étude. Une revue bibliographique a été entreprise afin d'identifier et d'analyser les principales contributions scientifiques relatives à la convection dans des configurations axisymétriques (ou géométries de révolution), avec une attention particulière portée à la présence éventuelle d'ailettes. Cette synthèse vise à mettre en lumière les avancées théoriques et pratiques dans ce domaine, à travers des études expérimentales, analytiques et numériques. Trois axes principaux ont été retenus pour cette analyse :

- Le transfert de chaleur par convection entre deux cylindres concentriques ;
- Le comportement de la convection autour d'un cylindre équipé d'ailettes ;
- La convection mixte à double diffusion entre deux cylindres.

### I.5.1 Convection entre deux cylindres :

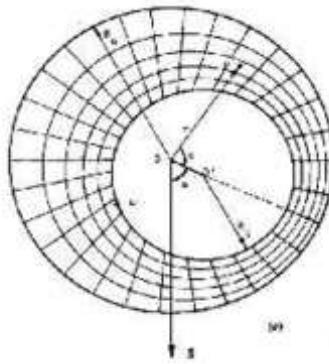
La convection thermique dans les espaces annulaires, et plus particulièrement entre deux cylindres horizontaux à parois isothermes, suscite un intérêt croissant en raison de ses nombreuses applications industrielles. Ce type de configuration intervient notamment dans le stockage d'énergie thermique, le refroidissement des composants électroniques, ainsi que dans la gestion thermique des câbles de transmission électrique.

Sur le plan théorique, l'étude de la convection dans un anneau horizontal représente un domaine de recherche important en transfert de chaleur. Cette configuration se distingue par la richesse et la complexité des structures d'écoulement qu'elle peut engendrer, ce qui en fait un sujet privilégié pour les investigations scientifiques, tant expérimentales que numériques.

Il existe un nombre important d'investigations dans la littérature sur la convection (naturelle ou mixte) entre deux cylindres. La première étude expérimentale sur les transferts thermoconvectifs entre deux cylindres coaxiaux horizontaux a été réalisée par **Beckmann** [14] en 1931 avec de l'air, de l'hydrogène et du dioxyde de carbone comme fluides d'essai. Sa contribution fondamentale dans l'analyse du problème a été l'introduction de la définition du rapport de conductivité thermique équivalente. Le travail expérimental a dédié à la quantification du transfert thermique global entre les cylindres en jouant sur la différence de température entre ces derniers.

Après une quarantaine d'année, **Kuehn** et **Goldstein** [15] ont présenté une investigation expérimentale, théorique et numérique en vue d'approfondir les connaissances existantes sur la structure de l'écoulement dans une cavité annulaire horizontale en régime de convection naturelle. Un interféromètre de Mach Zehnder est utilisé pour déterminer expérimentalement la distribution de température et le coefficient de transfert de chaleur local. Des résultats ont été obtenus pour une gamme du nombre de Rayleigh variant entre  $10^2$  et  $10^3$  et un rapport de forme  $L/Di=0,8$  en utilisant de l'eau et de l'air comme fluide de travail. La méthode des différences finies est utilisée pour la résolution numérique des équations gouvernantes pour des propriétés thermophysiques constantes. A l'issue de l'étude, les auteurs ont fourni un ensemble de solutions stables pour des nombres de Rayleigh modérés et depuis, ces résultats sont considérés comme une référence.

Dans une géométrie similaire, **Lee** [16] a conduit une étude numérique sur la convection entre deux cylindres concentriques et excentriques dont le cylindre intérieur chaud est en rotation, **figure I-3**. La méthode numérique utilisée est basée sur la technique de transformation du maillage couplée avec l'introduction de paramètres "faux transitoires" pour la solution du problème en régime permanent. Ils ont analysé les effets de l'excentricité, des nombres de Rayleigh et de Reynolds pour  $Pr=0,7$  et  $Ro/Ri=2,6$ . Il ressort de cette étude que le nombre de Nusselt moyen augmente avec l'augmentation du nombre de Rayleigh et diminue avec la rotation du cylindre intérieur (Re).



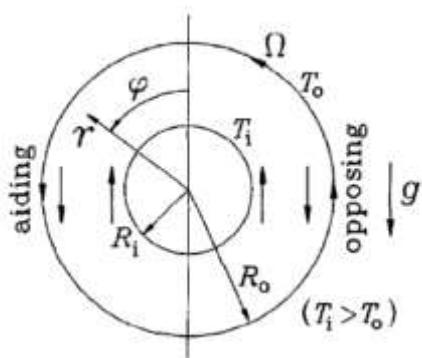
**Figure I-3.** Configuration étudiée par Lee [16]

Le transfert de chaleur en régime de convection mixte entre deux cylindres concentriques horizontaux a été étudié numériquement par **Yoo** [17]. Dans cette configuration, les deux cylindres sont maintenus à des températures uniformes : le cylindre intérieur est chauffé tandis que le cylindre extérieur, plus froid, est mis en rotation lente à vitesse angulaire constante, comme illustré à la **figure I-4**. L'écoulement est donc induit à la fois par les forces de flottabilité et par le mouvement de rotation du cylindre externe, ce qui caractérise un régime de convection mixte.

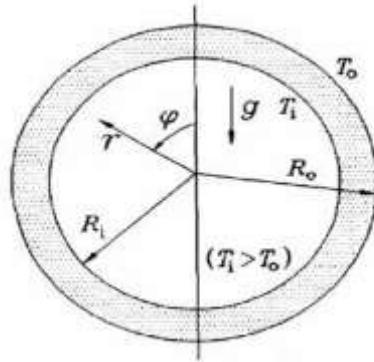
Les simulations ont été menées pour différentes combinaisons de paramètres : nombre de Rayleigh (Ra), nombre de Reynolds (Re) et rapport de forme de l'enceinte ( $\sigma$ ), avec les plages suivantes :  $\text{Ra} < 5 \times 10^4$ ,  $\text{Re} < 1500$  et  $0,5 < \sigma < 5$ . Les résultats numériques ont permis d'identifier trois régimes d'écoulement distincts : un écoulement à deux tourbillons, un écoulement à un seul tourbillon, et un régime sans formation de tourbillons.

Par la suite, le même auteur a conduit deux autres études, cette fois-ci consacrées à la convection naturelle dans un espace annulaire cylindrique horizontal étroit sur la **figure I-5**. La première étude s'intéresse aux fluides de faible nombre de Prandtl ( $\text{Pr} < 0,3$ ) [18]. Il a été observé que pour  $\text{Pr} < 0,2$  l'instabilité hydrodynamique engendre des écoulements stationnaires ou oscillatoires, formant des structures multicellulaires tournant dans le même sens. Pour  $\text{Pr} = 0,3$  une instabilité thermique provoque l'apparition d'une cellule tourbillonnaire à rotation opposée dans la partie supérieure de l'anneau. Enfin, pour  $\text{Pr} \approx 0$ , les cellules tourbillonnaires se distribuent de manière symétrique dans les parties inférieure et supérieure de l'espace annulaire.

La seconde étude porte sur la convection naturelle dans une configuration similaire, mais pour un fluide de Prandtl  $\text{Pr} = 0,4$  [19]. Il a été mis en évidence que l'interaction entre les instabilités thermique et hydrodynamique conduit à la formation de structures d'écoulement multicellulaires complexes ainsi qu'à des phénomènes de transition riches. À la suite de l'instabilité du régime de conduction quatre branches de solutions et cinq types de solutions multiples ont été identifiés, chacun caractérisé par un comportement temporel et une structure spatiale spécifique du champ d'écoulement.



**Figure I-4.** Espace annulaire étudié avec les conditions aux limites [17]



**Figure I-5.** Anneau cylindrique horizontal étroit [18], [19].

### I.5.2 Convection autour de cylindres munis d'ailettes :

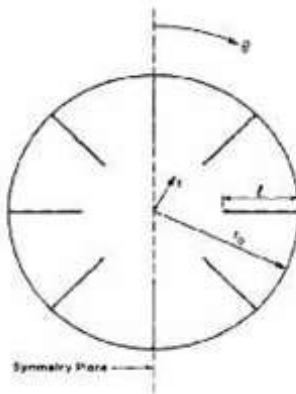
Le refroidissement par convection naturelle, combiné à la présence de surfaces ailettées, constitue souvent une solution économique et sans consommation d'énergie dans de nombreuses situations.

Les études mentionnées jusqu'à présent se sont principalement intéressées à la convection entre deux cylindres coaxiaux. Toutefois, les écoulements dans des anneaux cylindriques munis d'ailettes ont suscité un intérêt croissant ces dernières années, en raison de leur efficacité thermique dans diverses applications industrielles. Parmi les premières contributions notables dans ce domaine, on peut citer les travaux de **Rustum et Soliman** [20], qui ont étudié la convection mixte laminaire dans des tubes horizontaux à ailettes, en supposant un apport de chaleur axialement uniforme et une température de paroi constante.

La structure de l'écoulement et le transfert de chaleur induit dépendent fortement des nombres de Grashof (Gr) et de Prandtl (Pr), ainsi que de paramètres géométriques tels que la hauteur relative des ailettes (H) et leur nombre (M) comme montre la **Figure I-6**. Les résultats de cette étude ont montré que la géométrie du tube, à travers les paramètres M et H, influence de manière significative les profils d'écoulement, l'intensité des écoulements secondaires, la vitesse axiale, la distribution de température, le flux thermique au niveau des parois, le coefficient de frottement, ainsi que le nombre de Nusselt. En général, une augmentation du nombre ou de la hauteur des ailettes (M ou H) tend à réduire, voire éliminer, l'écoulement secondaire dans les espaces formés entre les ailettes, pour une valeur donnée du nombre de Grashof.

Dans le même esprit, **Sparrow et Preston** [21] ont mené une série d'expériences afin de déterminer les coefficients de transfert thermique dans le cas de configurations annulaires d'ailettes montées sur un arbre en rotation. Leur étude couvre un large éventail de vitesses de rotation et d'espacements entre ailettes. Ils ont conclu que le coefficient de transfert thermique décroît à mesure que

l'espacement entre les ailettes diminue. Par conséquent, des ailettes rapprochées peuvent être utilisées efficacement à des vitesses de rotation élevées.

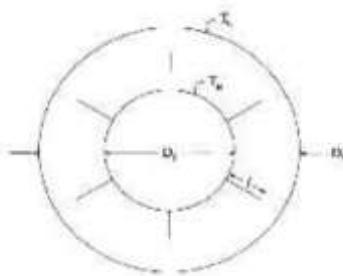


**Figure I-6.** Géométrie étudiée [20].

Dans la continuité de l'étude précédente, **Farinas et al.** [22] ont réalisé une étude numérique visant à analyser l'influence des ailettes placées à l'intérieur d'un espace annulaire horizontal sur le champ d'écoulement, la distribution de température et le transfert de chaleur. Pour ce faire, les auteurs ont utilisé la méthode des éléments finis, en adoptant la formulation de Galerkin pour discréteriser les équations gouvernantes de l'écoulement.

La stratégie numérique employée consiste à résoudre une série de problèmes transitoires, en faisant varier progressivement le nombre de Rayleigh. Les résultats, obtenus pour l'air avec un nombre de Prandtl  $Pr = 0,7$ , couvrent une plage de nombres de Rayleigh allant de  $10^3$  à  $10^6$ , et explorent différentes configurations géométriques des ailettes : fines, arrondies et divergentes, avec trois longueurs relatives d'ailettes ( $\ell = 0,25, 0,5$  et  $0,75$ ), comme illustré à la **Figure I-7**.

Les résultats montrent que la configuration avec ailettes fines offre un taux de transfert de chaleur supérieur d'environ 10 % par rapport à celle avec des ailettes arrondies. Toutefois, bien que les performances thermiques globales soient comparables entre les trois types de géométrie, ce sont les ailettes arrondies qui présentent la meilleure efficacité thermique, ce qui les rend particulièrement intéressantes pour des applications où un compromis entre efficacité et compacité est recherché.



**Figure I-7.** Représentation schématique de l'espace annulaire avec ailettes [22].

### I.5.3 Convection en régime de double-diffusion entre deux cylindres :

Depuis une vingtaine d'années, un autre type de transport convectif en milieux fluides a suscité un intérêt croissant dans la communauté scientifique : il s'agit de la convection double diffusive, également appelée convection thermosolutale. Ce phénomène survient en présence simultanée de deux gradients, typiquement de température et de concentration, agissant dans un fluide multicomposant.

Dans le cas particulier de la convection thermosolutale, les deux gradients thermique et massique sont imposés, bien que le gradient de concentration puisse également être induit par le gradient thermique (effet Soret). Cette interaction complexe entre la diffusion thermique et la diffusion massique engendre des mécanismes d'écoulement riches et variés, pouvant aboutir à des structures convectives complexes, telles que des cellules de convection, des instabilités oscillatoires ou des régimes bifurqués, en fonction des conditions aux limites et des paramètres caractéristiques du fluide.

Le phénomène de la double diffusion a été introduit pour la première fois par **Stommel** [23], ouvrant la voie à de nombreuses investigations dans divers domaines scientifiques et industriels. Jusqu'ici les recherches se sont principalement concentrées sur la convection dans les espaces annulaires entre deux cylindres coaxiaux, avec ou sans présence d'ailettes, dans le cadre de transferts thermiques classiques.

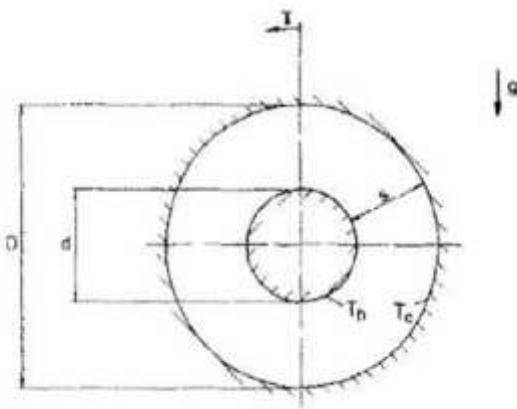
Dans ce qui suit, l'attention est portée sur la convection double diffusive dans les cavités cylindriques coaxiales, un sujet d'actualité en raison de la complexité des structures d'écoulement qui y prennent naissance, résultant de l'interaction entre les mécanismes de transport thermique et massique. Une compréhension approfondie de ces phénomènes est essentielle, notamment pour des applications telles que le refroidissement de composants électroniques, le séchage de matériaux, l'électrochimie, les procédés de revêtement, la fabrication du verre, le chauffage des bâtiments, le stockage d'énergie, le transport de contaminants dans les sols saturés ou encore en géophysique.

Dans ce contexte, la convection double diffusive dans des géométries cylindriques fait l'objet d'une recherche intense, aussi bien sur le plan expérimental que numérique. À titre d'exemple, **Schiroky** et **Rosenberger** [24] ont mené une étude expérimentale sur la convection libre dans un cylindre horizontal dont les parois sont soumises à un chauffage différentiel. Les expériences ont été réalisées sur une large plage de nombres de Rayleigh ( $74 < Ra < 1,3 \times 10^6$ ), en fonction des espèces gazeuses utilisées et de la pression du gaz. Les résultats ont révélé un comportement tridimensionnel prononcé de l'écoulement, caractérisé notamment par un mouvement asymétrique : seul une partie du fluide s'écoule le long de la paroi froide (dans la moitié inférieure du cylindre), tandis que l'autre partie longe la paroi chaude dans la moitié supérieure.

Une étude numérique de la convection en régime de double diffusion dans un anneau circulaire horizontal a été réalisée par **Dosch** et **Beer** [25] à l'aide de la méthode des différences finies,

complétée par une visualisation holographique des structures d'écoulement sur la **Figure I-8**. Les résultats obtenus ont mis en évidence une réduction significative du transfert thermique en présence d'un gradient de concentration stabilisant (gradient de sel), comparativement au cas de la convection naturelle purement thermique. Cela souligne l'effet inhibiteur du stratification solutale sur le développement des mouvements convectifs.

Dans la continuité de cette thématique, **Sung et al.** [26] ont examiné la convection double diffusive dans un anneau horizontal en rotation, soumis à un gradient thermique horizontal et un gradient de concentration vertical. L'objectif principal de cette étude est de déterminer l'influence de la rotation sur la structure globale des flux convectifs. Pour cela, les auteurs ont adopté un schéma pseudo-spectral de haute précision afin d'intégrer les équations de Navier-Stokes pour un écoulement incompressible et axisymétrique. Les résultats, présentés sous forme de champs d'écoulement, de température et de concentration, mettent en lumière les effets conjugués de la rotation et des gradients thermo-solutaux sur la dynamique du fluide.



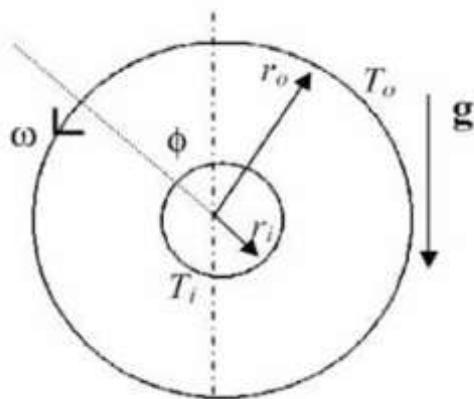
**Figure I-8.** Géométrie de l'anneau [25].

Dans le même contexte, **Al-Amiri et Khanafer** [27] ont réalisé une étude numérique portant sur la convection mixte en régime de double diffusion dans un anneau horizontal bidimensionnel. Dans cette configuration, la convection forcée est induite par la rotation antihoraire du cylindre extérieur, tandis que les forces de flottabilité thermique et solutale sont générées par des gradients de température et de concentration imposés entre les deux parois cylindriques comme montre la **Figure I-9**. Les équations de transport sont discrétisées à l'aide de la méthode des éléments finis de Galerkin basée sur la technique des résidus pondérés et utilisant un maillage non uniforme pour mieux capturer les zones à forts gradients.

Les résultats obtenus montrent que des nombres de Reynolds rotatif élevés tendent à affaiblir les structures convectives thermiques, du fait de l'effet de cisaillement généré par la rotation, qui a tendance à diffuser les cellules de convection. Ces résultats ont des implications importantes pour le

contrôle thermique dans des applications d'ingénierie, notamment dans les procédés de séchage ou la croissance de cristaux, où la maîtrise du transport thermo-solutal est essentielle.

Peu après, les mêmes auteurs ont poursuivi leurs travaux [28] en analysant l'effet des conditions aux limites sur le transfert thermique par convection double diffusive dans la même configuration géométrique. Ils se sont intéressés plus particulièrement à l'influence de l'amplitude et de la fréquence d'oscillation du cylindre interne chauffé sur la variation temporelle du nombre de Nusselt moyen. Il en ressort que des transferts de chaleur élevés peuvent être obtenus en diminuant le nombre de Lewis (Le) et en augmentant le rapport de flottabilité, ce dernier traduisant la dominance de la flottabilité solutale par rapport à la flottabilité thermique. En outre, une augmentation du nombre de Lewis favorise significativement le transfert de masse, en raison d'une diffusion massique plus efficace comparée à la diffusion thermique.



**Figure I-9.** Schéma du modèle physique et du système de coordonnées [27]

## I.6 Conclusion :

Le transfert de chaleur par convection constitue un mécanisme fondamental de la thermodynamique intervenant dans une multitude de phénomènes naturels et procédés industriels.

En interaction avec la conduction et le rayonnement, la convection joue un rôle déterminant dans l'efficacité thermique des systèmes, qu'il s'agisse d'échangeurs de chaleur, de dispositifs électroniques, ou encore de systèmes complexes comme les réacteurs nucléaires.

L'étude détaillée des différents régimes – convection naturelle, forcée, mixte et double diffusive a mis en évidence l'impact crucial de plusieurs facteurs : les propriétés thermophysiques des fluides, la géométrie des configurations étudiées, ainsi que les conditions aux limites imposées. Ces paramètres conditionnent fortement le comportement des écoulements et, par conséquent, l'intensité du transfert thermique.

Par ailleurs, l'intégration d'éléments passifs, tels que les ailettes, s'avère être une solution simple et efficace pour améliorer les échanges thermiques, notamment dans les régimes de convection mixte ou forcée. Les recherches expérimentales et numériques montrent que ces dispositifs, bien que simples, peuvent significativement modifier les structures d'écoulement et favoriser un transfert de chaleur plus intense et mieux réparti.

À travers cette synthèse bibliographique, il apparaît clairement que la compréhension fine des phénomènes convectifs est un levier essentiel pour le développement de solutions thermiques innovantes, performantes et économes en énergie. Dans un contexte mondial où l'optimisation énergétique devient un enjeu prioritaire, la maîtrise du transfert convectif s'impose comme un vecteur stratégique d'amélioration pour de nombreuses applications industrielles et technologiques.

# **Chapitre II : Position du problème et formulation mathématique**

## Chapitre II : Position du problème et formulation mathématique

### II.1 Introduction :

Dans le cadre de cette étude, nous nous intéressons au phénomène de convection mixte à double diffusion à l'intérieur d'une cavité annulaire. Ce phénomène combine les effets de la convection forcée, induite par la rotation du cylindre intérieur, et ceux de la convection naturelle, résultant de la variation de température entre les parois chaude et froide. De plus, la présence de gradients de concentration introduit l'effet de double diffusion, caractéristique des écoulements où la flottabilité dépend à la fois de la température et de la concentration d'une espèce chimique. Pour modéliser ce problème, il est nécessaire de résoudre les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement, de l'énergie et de la concentration, en tenant compte des forces de flottabilité thermique et massique. La résolution complète de ses équations en variant certains paramètres physiques et géométriques revient à déterminer en tout point et à tout instant les grandeurs caractéristiques du fluide ( $\vec{V}$ ,  $p$  et  $T$ ).

Dans ce chapitre, il sera question de la formulation du problème physique considéré, à savoir la définition de la géométrie et des conditions aux limites associées aux équations de conservation nécessaires.

### II.2 Géométrie étudiée :

La configuration représentée sur la **figure (II.1)** illustre le cas de convection mixte à double diffusion au sein d'un anneau concentrique horizontal. Le cylindre extérieur, de rayon  $r_0$ , est maintenu à une température froide  $T_c$  et à une concentration basse  $C_c$ . Le cylindre intérieur de rayon  $r_i$  muni d'une température élevée  $T_h$  et une concentration élevée  $C_h$ , qui est équipé de deux ailettes longitudinales d'épaisseur ( $e$ ) et de longueur  $l_a$ , fixée sur sa surface externe. L'ensemble cylindre–ailette est en rotation autour de l'axe central avec une vitesse angulaire constante  $\omega$ .

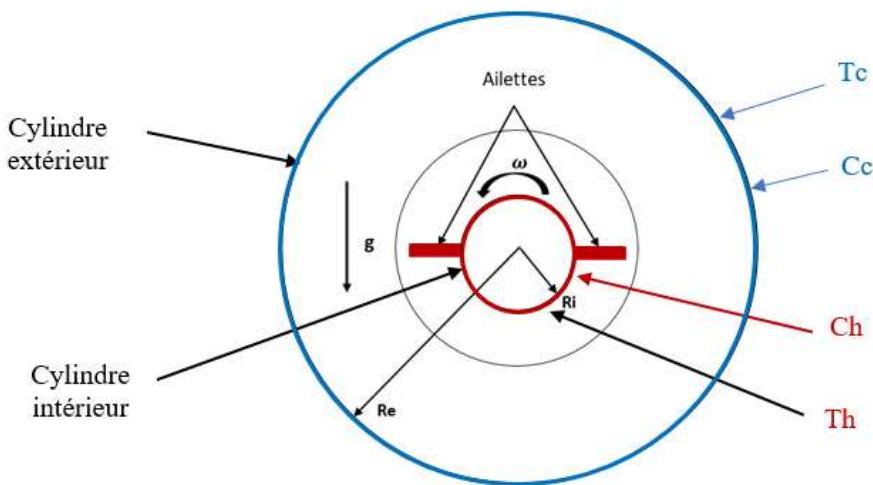


Figure II-1. Géométrie du problème.

### II.3 Hypothèses simplificatrices :

Pour la formulation mathématique du problème, les hypothèses suivantes sont adoptées :

- Le fluide de travail est considéré newtonien et incompressible.
- Le régime d'écoulement est laminaire et périodique établi.
- Double diffusion : échange de chaleur et de matier.
- L'écoulement et le transfert de chaleur et de masse sont bidimensionnels.
- L'approximation de Boussinesq est applicable, c'est-à-dire que la masse volumique varie uniquement dans le terme de force de flottabilité.
- Les propriétés thermophysiques du fluide est viscosité cinématique ( $\nu$ ), conductivité thermique ( $\lambda$ ), coefficient de diffusion massique ( $D$ ) sont constantes et évaluées à la température de référence  $T_0$ .
- Le nombre de Prandtl est fixé à  $Pr = 0.71$  (cas de l'air).
- La dissipation visqueuse dans l'équation d'énergie est négligeable en raison des faibles vitesses impliquées.
- Il n'y a pas de réaction chimique entre les espèces diffusées.
- Le coefficient d'expansion thermique  $\beta_T$  et le coefficient d'expansion solutale  $\beta_c$  sont constants.

L'approximation de Boussinesq repose sur deux hypothèses : d'une part, elle suppose que la densité est constante dans tous les termes sauf dans le cas de la force de flottabilité ( $\rho g$ ). D'autre part, on suppose qu'il existe une différence de température et de concentration entre les surfaces actives de la cavité. En se limitant au premier terme du développement de  $\rho$  en fonction de la température et de la concentration, nous pouvons écrire :

$$\rho(T, C) = \rho_0[1 - \beta_T(T - T_0) - \beta_c(C - C_0)] \quad (\text{II-1})$$

Où  $\rho_0$ ,  $\beta_c$  et  $\beta_T$  sont respectivement la densité de référence, le coefficient d'expansion thermique et le coefficient d'expansion solutale à la température et concentration de référence  $T_0$  et  $C_0$  :

$$\beta_T = -\frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{P,C} \quad (\text{II-2})$$

$$\beta_c = -\frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \rho}{\partial C} \right)_{P,T} \quad (\text{II-3})$$

## II.4 Équations gouvernantes :

Le transfert de chaleur et de masse dans le cadre d'une convection mixte à double diffusion en régime laminaire repose sur l'existence d'un écoulement fluide dans le domaine étudié. Cet écoulement résulte de l'action combinée des gradients de température et de concentration entre les parois, qui engendrent des effets de flottabilité, et du mouvement de rotation du cylindre intérieur, responsable de la composante de convection forcée. Pour modéliser ce phénomène complexe, il est indispensable de résoudre les équations fondamentales de la mécanique des fluides, en les couplant aux équations de conservation de l'énergie thermique et de la concentration d'espèces. Cette démarche s'appuie sur les hypothèses physiques énoncées précédemment, permettant de simplifier le problème tout en conservant une représentation fidèle des mécanismes dominants.

### II.4.1 Forme dimensionnelle des équations :

- **Équation de continuité :**

L'équation de continuité présente un intérêt très général car elle met en œuvre le principe de conservation de la masse dans les écoulements. L'établissement de cette équation locale repose sur le bilan massique du fluide au sein d'un élément de volume pendant un temps élémentaire  $dt$ .

$$\frac{\partial P}{\partial T} + \operatorname{div}(\rho \vec{V}) = 0 \quad (\text{II-4})$$

Pour un écoulement incompressible ( $\rho$  constant), l'équation devient :

$$\operatorname{div}(\vec{V}) = 0 \quad (\text{II-5})$$

En coordonnées cartésiennes :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{II-6})$$

- **Équations de quantité de mouvement :**

L'équation générale de la quantité de mouvement s'écrit :

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} - \overrightarrow{grad} p + \mu \Delta \vec{V} \quad (\text{II-7})$$

Selon x :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + v \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (\text{II-8})$$

Selon y :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + v \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + g[\beta_T(T - T_0)] \quad (\text{II-9})$$

Où :

$\rho \frac{d\vec{V}}{dt}$  : Représente le taux de variation de quantité de mouvement.

$\overrightarrow{grad} P$  : Représente les forces dues à la pression.

$\mu \Delta \vec{V}$  : Représente les forces de viscosité.

$\vec{F}$  : Représente les forces de volume dont les composantes sont :

$$\left. \begin{aligned} F_x &= g\beta\rho(T - T_0) \cos \varphi \\ F_y &= g\beta\rho(T - T_0) \sin \varphi \end{aligned} \right\} \text{ et } [\beta_c(C - C_0)]$$

- **Équation de conservation de l'énergie :**

$$\rho C_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (\text{II-10})$$

Avec :

$\lambda$  : désigne la conductivité thermique.

$C_p$  : la chaleur spécifique à pression constante.

$\rho$  : la masse volumique.

- **Équation de conservation des espèces :**

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = D \left( \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right) \quad (\text{II-11})$$

Où

D : est le coefficient de diffusion moléculaire.

## II.5 Conditions aux limites :

Les conditions aux limites pour les équations obtenues précédemment sont résumées dans le

**Tableau II-1** suivant :

Surface	Vitesse $u$	Vitesse $v$	Température $T$	Concentration $C$	
Cylindre intérieur	$u = \omega r_i \sin \theta$	$v = \omega r_i \cos \theta$	$T = T_h$	$C = C_h$	(II-12)
Cylindre extérieur	$u = 0$	$v = 0$	$T = T_c < T_h$	$C = C_c < C_h$	(II-13)
Ailettes	$u = \omega r \sin \theta$	$v = \omega r \cos \theta$	$T = T_h$	$C = C_h$	(II-14)

**Tableau II-1 :** Les conditions aux limites.**II.6 Équations adimensionnelles :**

Pour obtenir la forme adimensionnelle des équations gouvernantes, nous définissons les grandeurs de références suivantes :

- Dimension linéaire caractéristique :  $l_{ref} = r_0 - r_i$
- Vitesse de référence :  $u_0 = \omega r_i$
- Pression de référence :  $p_{ref} = \frac{\rho u_0^2}{l_{ref}^2}$
- Différence de température de référence :  $\Delta T = T_h - T_c$
- Différence de concentration de référence :  $\Delta C = C_h - C_c$
- Temps de référence :  $t_{ref} = \frac{l_{ref}}{u_0}$

À partir de ces grandeurs de références, nous définissons les variables réduites ci-dessous qui serviront à rendre les équations adimensionnelles :

$$\begin{aligned} X &= \frac{x}{l} ; & Y &= \frac{y}{l} \\ U &= \frac{u}{u_0} ; & V &= \frac{v}{u_0} ; & P &= \frac{p}{p_{ref}} ; \\ \theta &= \frac{T - T_c}{T_h - T_c} ; & \tau &= \frac{t}{l/u_0} \end{aligned}$$

**II.6.1 Forme adimensionnelle des équations de conservation :**

En introduisant ces grandeurs sans dimensions dans les équations de conservation, on obtient le système d'équations adimensionnel suivant :

- **Équation de continuité :**

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (\text{II-15})$$

- **Équation de quantité de mouvement :**

Selon x :

$$\frac{\partial U}{\partial r} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = \frac{\partial P}{\partial X} + \frac{1}{Re} \left[ \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right] \quad (\text{II-16})$$

Selon y :

$$\frac{\partial V}{\partial r} + U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = - \frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{1}{Re} \left[ \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right] + \frac{Gr}{Re^2} (\theta + N\Phi) \quad (\text{II-17})$$

En introduisant les nombres de Richardson thermique  $Ri_T = \frac{Gr_T}{Re^2}$  et solutal  $Ri_s = \frac{Gr_s}{Re^2}$  l'équation peut



s'écrire de cette manière :

$$\frac{\partial V}{\partial r} + U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = - \frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{1}{Re} \left[ \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right] + \frac{Gr_T}{Re^2} + Ri_T \theta + Ri_S \Phi \quad (\text{II-18})$$

- **Équation d'énergie :**

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{1}{RePr} \left[ \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right] \quad (\text{II-19})$$

- **Équation de concentration :**

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + U \frac{\partial \Phi}{\partial X} + V \frac{\partial \Phi}{\partial Y} = \frac{1}{ReLePr} \left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial Y^2} \right] \quad (\text{II-20})$$

## II.7 Conditions aux limites adimensionnelles :

Surface	Composante $U$	Composante $V$	Température $\theta$	Concentration $\Phi$	
Conditions initiales ( $\tau = 0$ )	$U = 0$	$V = 0$	$\theta = 0$	$\Phi = 0$	
Cylindre intérieur	$U = \omega r_i \sin \theta$	$V = \omega r_i \cos \theta$	$\theta = 1$	$\Phi = 1$	(II-21)
Cylindre extérieur	$U = 0$	$V = 0$	$\theta = 0$	$\Phi = 0$	(II-22)
Ailettes	$U = \omega r_i \sin \theta$	$V = \omega r_i \cos \theta$	$\theta = 1$	$\Phi = 1$	(II-23)

Tableau II-2 : Les Conditions aux limites adimensionnelles.

## II.8 Groupements sans dimensions :<sup>2</sup>

La mise sous forme adimensionnée des équations de conservation ainsi que des conditions aux limites fait apparaître plusieurs nombres sans dimension, qui facilitent l'analyse du phénomène et le contrôle de l'écoulement. Ces nombres sont définis à partir du diamètre hydraulique  $l_{ref} = r_0 - r_i$  et des propriétés thermophysiques évaluées à la température initiale  $T_0$ .

### Nombre de Prandtl :

Le nombre de Prandtl (Pr) est un nombre sans dimension qui définit les propriétés du fluide. Il est le rapport entre la diffusivité de la quantité de mouvement  $\nu$  (ou viscosité cinétique) et la diffusivité thermique  $\alpha$  :

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} \quad (\text{II-24})$$

**Nombre de Lewis :**

Le nombre de Lewis (Le) représente le rapport entre la diffusivité thermique et la diffusivité massique :

$$Le = \frac{\alpha}{D} = \frac{S_c}{P_r} \quad (II-26)$$

**Nombre de Reynolds :**

Le coefficient Reynolds caractérise le régime de l'écoulement (lamininaire, transitoire, turbulent). Il représente le rapport entre les forces d'inertie et les forces de frottement :

$$Re = \frac{\omega r_i l_{ref}}{\nu} \quad (II-27)$$

**Nombre de Grashof thermique :**

Le nombre de Grashof thermique est le rapport entre l'effet de flottabilité thermique et l'effet résistif de l'écoulement :

$$Gr_T = \frac{g\beta_T(T_h - T_c)l_{ref}^3}{\nu^2} \quad (II-28)$$

**Nombre de Grashof solutal :**

Le nombre de Grashof solutal quantifie l'effet de la flottabilité due aux gradients de concentration :

$$Gr_S = \frac{g\beta_c(c_h - c_c)l_{ref}^3}{\nu^2} \quad (II-29)$$

**Rapport de flottabilité :**

Le rapport N entre les forces de flottabilité solutale et thermique est défini par :

$$N = \frac{\beta_c \Delta C}{\beta_T \Delta T} = \frac{Ri_S}{Ri_T} \quad (II-30)$$

Ce rapport détermine le régime de la convection double-diffusive :

- Si  $N > 0$  : régime coopératif (les gradients de température et de concentration agissent dans le même sens).
- Si  $N < 0$  : régime opposé (les gradients de température et de concentration s'opposent).

**Nombre de Nusselt :**

Le nombre de Nusselt, noté  $Nu$ , est un nombre sans dimension utilisé pour quantifier l'intensité du transfert de chaleur par convection à la surface d'un corps immergé dans un fluide. Il exprime le rapport entre le transfert de chaleur par convection et le transfert de chaleur par conduction à travers une même épaisseur de fluide.

$$Nu = \frac{h l_{ref}}{\lambda} \quad (II-31)$$

Où  $h$  est le coefficient d'échange thermique défini par :

$$h = \frac{q}{(T - T_0)} \quad (II-32)$$

Le nombre de Nusselt local sur une paroi s'exprime par :

$$Nu_{local} = \frac{\partial \theta}{\partial n} \Big|_{paroi} \quad (II-33)$$

Où  $n$  est la direction normale à la paroi.

### Nombre de Sherwood :

Le nombre de Sherwood, noté  $Sh$ , est un nombre adimensionnel utilisé en transfert de masse par analogie avec le nombre de Nusselt en transfert de chaleur. Il représente le rapport entre le transfert de masse par convection et le transfert de masse par diffusion à travers une même distance caractéristique.

La formule générale du nombre de Sherwood est :

$$Sh = \frac{\partial C}{\partial h} \quad (II-34)$$

- $h_m$  : est le coefficient de transfert de masse convectif.
- $l_{ref}$  : est la longueur caractéristique du système.
- $D$  : est le coefficient de diffusion massique.

### II.9 Conclusion :

Dans ce chapitre, la problématique de la convection mixte à double diffusion a été posée, et le modèle mathématique correspondant a été développé sous la forme d'un système d'équations couplées, accompagné des conditions aux limites adéquates. En raison de la complexité inhérente à ces équations, marquées par leur caractère non linéaire et leur forte interdépendance, une résolution analytique s'avère généralement inapplicable. Ainsi, le recours à une méthode numérique devient incontournable pour traiter ce type de problème de manière rigoureuse et exploitable.

Dans la suite, nous ferons usage d'un code de calcul fondé sur la méthode numérique des volumes finis, qui permettra d'analyser les phénomènes de transfert de chaleur et de masse dans la configuration géométrique considérée, et d'étudier l'influence des différents paramètres adimensionnels sur les caractéristiques de l'écoulement et des transferts.

# **Chapitre III : Résultats et discussion**

## Chapitre III : Résultats et discussion

### III.1 Introduction :

L'étude des transferts couplés de chaleur et de masse en convection mixte doublement diffusive dans des milieux confinés représente un enjeu fondamental pour de nombreuses applications industrielles, telles que les échangeurs thermiques à géométrie complexe, les séchoirs rotatifs, les systèmes de croissance cristalline ou les réacteurs chimiques. Ces dispositifs fonctionnent dans des conditions où les gradients de température et de concentration interagissent simultanément avec des effets mécaniques, générant ainsi des phénomènes convectifs complexes et fortement couplés.

Le présent travail s'intéresse à une configuration de type annulaire bidimensionnelle composée de deux cylindres coaxiaux. Le cylindre intérieur est rotatif, chauffé à température constante et muni d'ailettes radiales, alors que le cylindre extérieur est fixe et maintenu à une température plus basse. En plus du rôle thermique, le cylindre intérieur constitue également une source de concentration, ce qui induit une stratification doublement diffusée dans le domaine fluide. Ce type de géométrie est pertinent pour simuler les effets conjoints de la convection naturelle et forcée dans des systèmes dynamiques, où les mécanismes de transfert thermique et massique sont étroitement couplés.

Le fluide est supposé newtonien, incompressible, avec un écoulement bidimensionnel, laminaire et périodique établi. Le mouvement rotatif du cylindre intérieur induit une force centrifuge et une vitesse tangentielle qui agit comme une source de convection forcée. Par ailleurs, les différences de densité dues aux gradients de température et de concentration génèrent des forces de flottabilité qui provoquent une convection naturelle. La complexité du phénomène réside dans l'interaction non linéaire entre ces deux types de convection, amplifiée par la présence d'ailettes, qui modifient localement les structures d'écoulement et favorisent les échanges énergétiques et diffusifs.

### III.2 Etude du maillage :

Dans toute étude de simulation numérique fondée sur la méthode des volumes finis cité en **annexe**, il est impératif de vérifier l'indépendance des résultats par rapport au maillage utilisé. Cette vérification permet d'assurer que les résultats obtenus sont représentatifs du comportement physique du système et non d'effets numériques induits par un maillage inadéquat.

Dans le présent travail, une analyse de sensibilité au maillage a été menée en testant cinq configurations de grilles structurées :  $40 \times 40$ ,  $60 \times 60$ ,  $80 \times 80$ ,  $100 \times 100$  et  $120 \times 120$  nœuds, **Tableau**

**III-1.** L'objectif est de déterminer la grille optimale assurant à la fois la précision des résultats et un temps de calcul raisonnable, en particulier dans le contexte d'un écoulement influencé par la rotation du cylindre intérieur, la présence d'ailettes, et des transferts thermo-solutaux couplés.

Les simulations ont été réalisées pour les paramètres suivants : nombre de Reynolds  $Re = 50$ , nombre de Lewis  $Le = 1$ , rapport de flottabilité  $N = 1$ , et nombres de Grashof  $Gr = 10^2, 10^3, 10^4, 10^5$ . Pour chaque configuration, les valeurs moyennes des nombres de Nusselt (Nu) et de Sherwood (Sh) sur la paroi extérieure fixe ont été extraites et comparées. Ces deux grandeurs caractérisent respectivement les transferts de chaleur et de masse, et constituent des indicateurs fiables de la qualité de la résolution numérique.

Les résultats montrent que les écarts relatifs entre les valeurs de Nu et Sh deviennent négligeables à partir du maillage  $80 \times 80$ , indiquant une bonne convergence des solutions. Toutefois, pour garantir une capture précise des gradients intenses notamment à proximité des ailettes du cylindre intérieur et des parois, un maillage de  $100 \times 100$  nœuds a été retenu. Ce choix représente un compromis optimal entre la résolution spatiale, la stabilité numérique et les ressources de calcul disponibles.

Il convient de souligner que ce maillage permet également de résoudre efficacement les structures secondaires apparaissant dans les régimes de convection mixte, notamment les cellules de recirculation induites par la rotation et les panaches thermosolutaux liés aux gradients de densité. Ce niveau de raffinement est donc jugé suffisant pour garantir la fiabilité et la représentativité physique des résultats présentés dans les sections suivantes.

La **figure III-1** illustre la structure du maillage employée dans la modélisation numérique du problème étudié.

- (a) présente une vue d'ensemble de l'espace annulaire, subdivisé en deux zones distinctes : une zone mobile, située au voisinage du cylindre intérieur en rotation, et une zone fixe, proche du cylindre extérieur stationnaire.
- (b) met en évidence l'interface mobile, qui assure la transition continue des flux (de chaleur et de masse) entre les deux zones.

Ce type de maillage dit glissant (ou coulissant) est fondamental pour reproduire fidèlement l'effet de la rotation du cylindre intérieur, tout en conservant l'immobilité du cylindre extérieur. Il permet de capturer de manière précise les interactions complexes de convection mixte à double diffusion, où les transferts de chaleur et de masse sont étroitement couplés et sensibles aux mouvements relatifs entre les zones.

Grille		40x40	60x60	80x80	100x100	120x120
Gr=10 <sup>5</sup>	$\bar{Nu}$	5.36692	5.38447	5.39087	5.39088	5.390902
	$\bar{Sh}$	6.83328	6.85223	6.853018	6.853018	6.853019
Gr=10 <sup>4</sup>	$\bar{Nu}$	2.16658	2.200341	2.201236	2.201236	2.201239
	$\bar{Sh}$	2.42187	2.452031	2.452032	2.452032	2.452032
Gr=10 <sup>3</sup>	$\bar{Nu}$	1.86974	1.918497	1.926974	1.927113	1.927124
	$\bar{Sh}$	1.91551	2.024601	2.025011	2.025013	2.025013

Tableau III-1 : Teste de sensibilité du maillage.

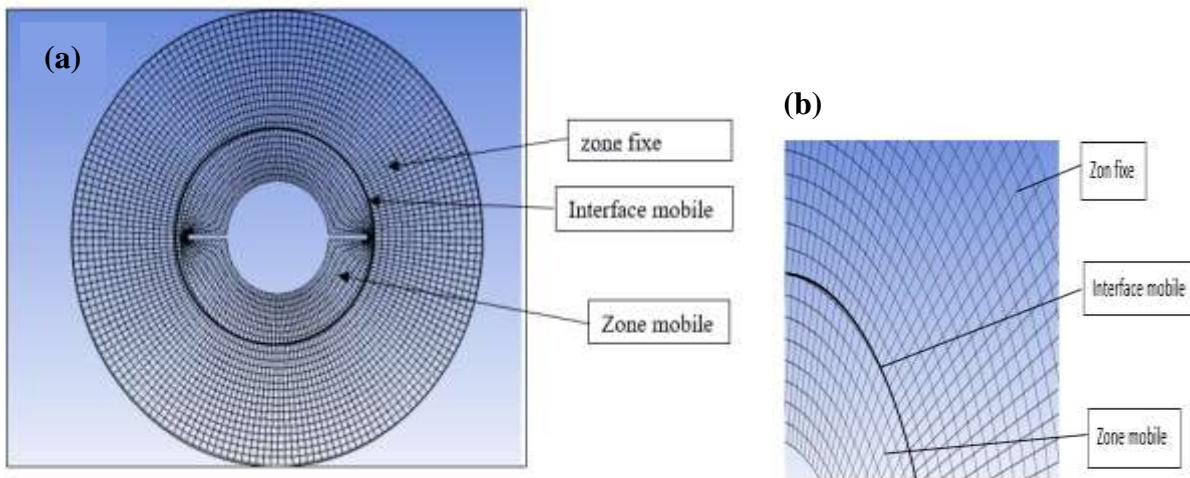
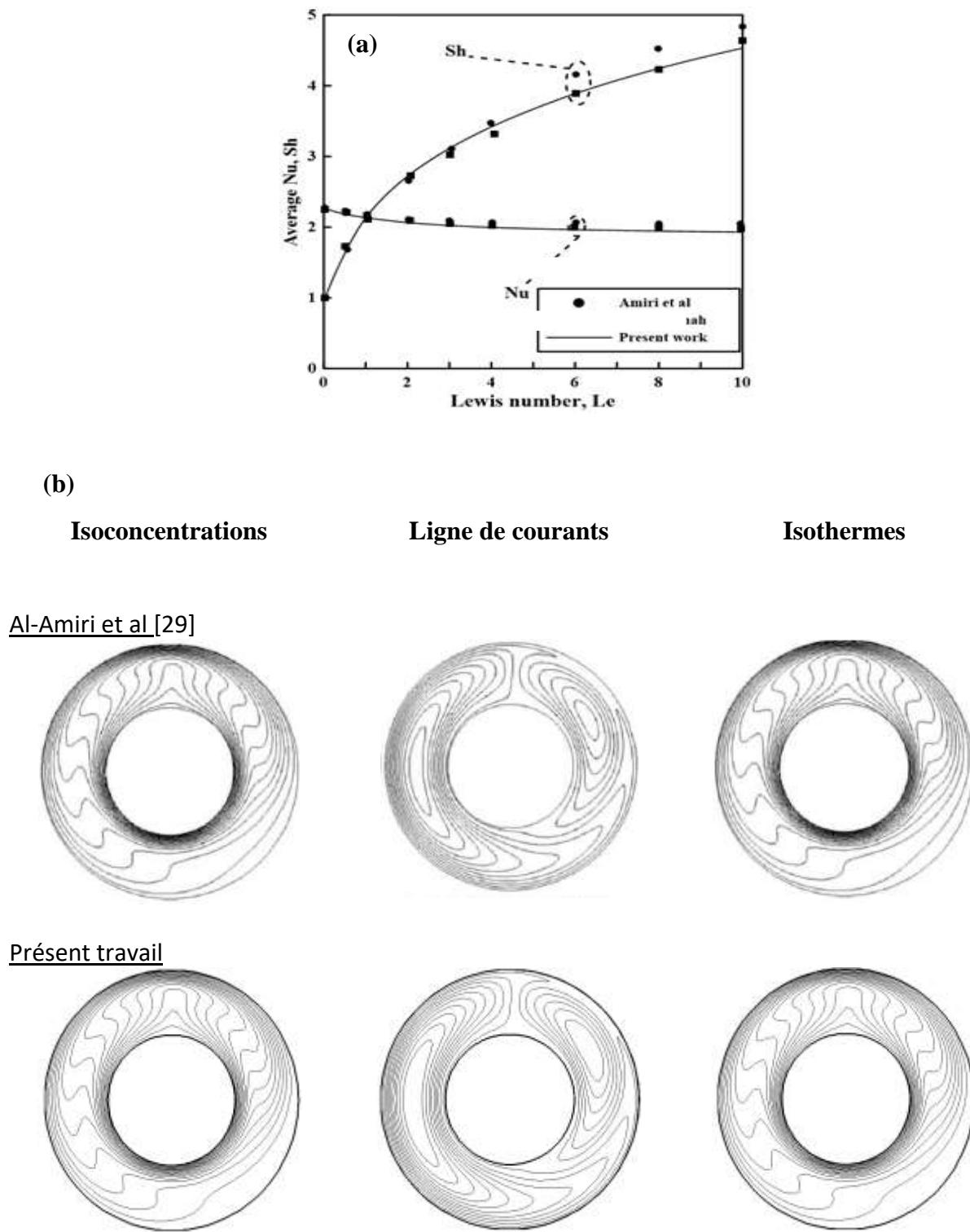


Figure III-1 : a) Définition du maillage coulissant ; b) l'interface séparant les deux régions (mobile et fixe).

### III.3 Validation numérique :

Le sujet de cette étude représente un domaine de recherche particulièrement important. Afin de vérifier l'exactitude des résultats obtenus, notre code numérique a été validé à l'aide de données publiées dans la littérature, concernant la convection mixte à double diffusion dans un anneau rotatif.

La **Figure III-2** illustre une comparaison avec les résultats obtenus par Al-Amiri et al. [29], portant sur l'effet du nombre de Lewis sur les nombres moyens de Nusselt et de Sherwood sur la **Figure III-2-a**. Cette figure montre un excellent accord pour les valeurs du nombre moyen de Nusselt. En ce qui concerne le nombre moyen de Sherwood, les résultats obtenus sont également en bon accord avec ceux d'Al-Amiri et al., notamment pour les valeurs élevées du nombre de Lewis. L'écart maximal observé reste inférieur à 5 %, ce qui confirme la fiabilité du modèle numérique développé.



**Figure III-2:** Comparaison avec Al-Amiri et al [29] , Cylindre extérieur tournant,  $N=1$ ,  $Re = 100$  et  $Gr = 10^4$ , (a) Nombre de Nusselt et Sherwood moyen, (b) Isoconcentration, linge de courants et isothermes, for  $Le=1$ .

### III.4 Résultats et Discussions :

Dans cette section, nous examinerons l'impact des nombres adimensionnels majeurs sur les phénomènes de transfert de chaleur et de masse, ainsi que sur la structure de l'écoulement, dans une configuration où le cylindre intérieur est chauffé, rotatif et muni d'ailettes, tandis que le cylindre extérieur fixe maintenue à une température froide.

Les simulations numériques permettent de visualiser la complexité des phénomènes de convection mixte à double diffusion, à travers des champs de lignes de courant, d'isothermes et d'isoconcentrations. En complément, des analyses quantitatives basées sur les nombres de Nusselt (Nu) et de Sherwood (Sh), à la fois moyens et locaux, sont utilisées pour qualifier l'intensité des échanges thermiques et massiques.

Les paramètres étudiés sont les suivants :

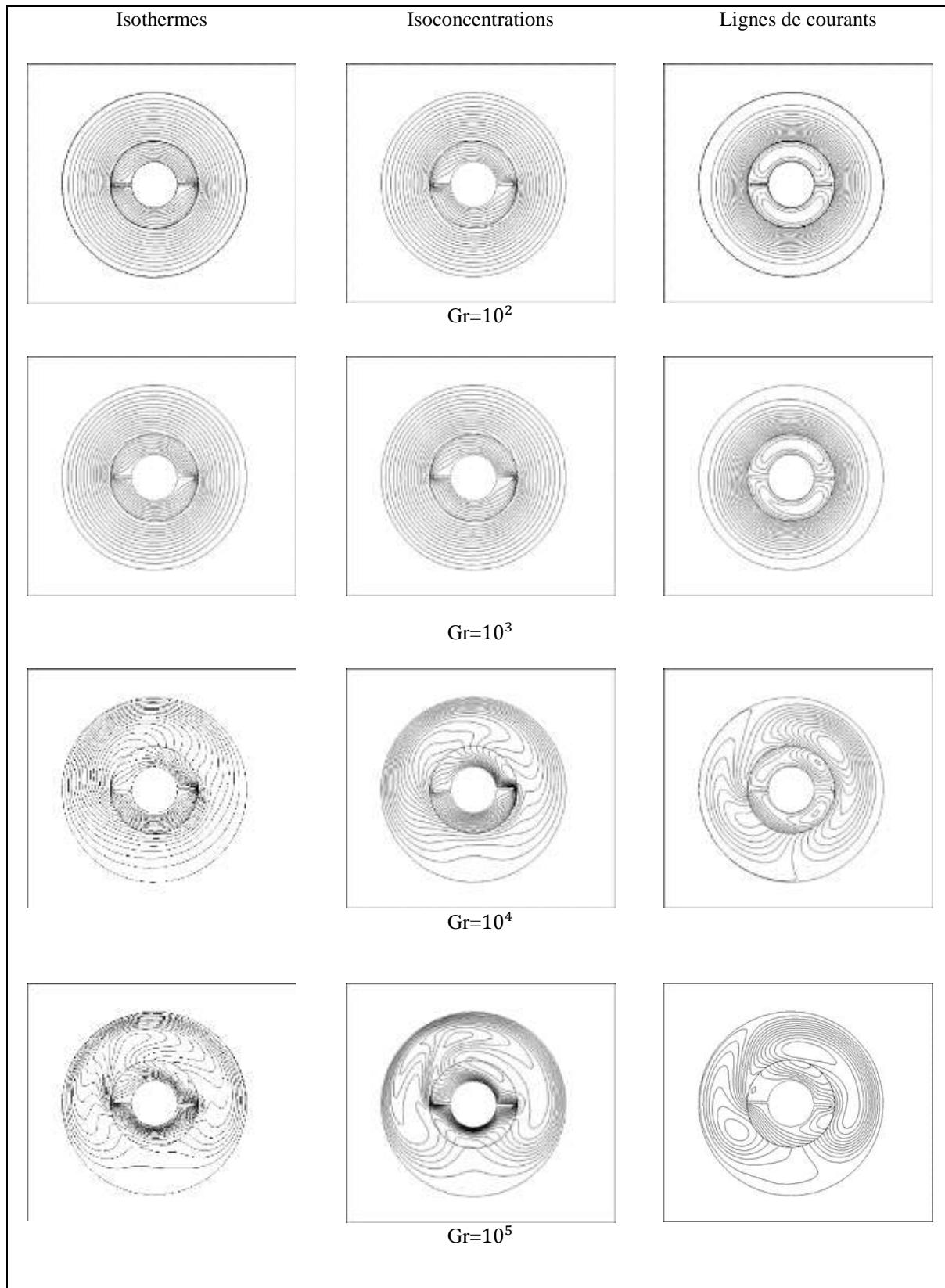
- Le nombre de Grashof (Gr) : mesure de l'intensité de la flottabilité thermique
- Le nombre de Reynolds (Re) : intensité du forçage mécanique par rotation
- Le nombre de Lewis (Le) : rapport des diffusivités thermique/massique
- Le rapport de flottabilité (N) : proportion relative entre les effets de flottabilité thermique et massique

#### III.4.1 Structure de l'écoulement et distribution de température et de concentration :

##### III.4.1.1 Effet du nombre de Grashof :

L'étude menée sur l'influence du nombre de Grashof dans un système de convection mixte à double diffusion met en évidence une évolution progressive des mécanismes de transfert thermique et massique ainsi que des structures d'écoulement. À faible Grashof ( $Gr = 10^2$ ), la convection forcée domine et les champs thermique et massique conservent une distribution concentrique et symétrique, avec des transferts relativement faibles, principalement contrôlés par la conduction et la rotation imposée du cylindre intérieur. L'augmentation du nombre de Grashof à  $Gr = 10^3$  marque l'entrée dans un régime mixte, où la flottabilité commence à déformer les champs scalaires et à introduire des composantes verticales dans l'écoulement, entraînant une amélioration des transferts, **Figure III-3**. À  $Gr = 10^4$ , un équilibre s'établit entre convection forcée et naturelle, générant des structures complexes, telles que des zones de recirculation secondaires et un mélange intensifié, amplifié par l'effet perturbateur des ailettes. Ce régime est particulièrement favorable en termes d'efficacité de transfert. Enfin, à  $Gr = 10^5$ , la convection naturelle prend le dessus, donnant lieu à une stratification

verticale marquée, à la formation des panaches thermique-solutale et à un écoulement potentiellement instationnaire.



**Figure III-3 :** Effet du nombre de Grashof sur les isothermes, isoconcentration et lignes de courants pour  $Re=50$ ,  $N=1$   $Le=1$ .

Dans cette configuration, les ailettes déclenchent des jets intenses et des zones de mélange chaotique. Le couplage parfait entre le transfert de chaleur et de masse, permis en fixant  $Re = 50$ ,  $Le = 1$  et  $N = 1$  d'analyser l'évolution synchrone des deux phénomènes. L'ensemble de l'analyse révèle que la gamme  $Gr \approx 10^3\text{--}10^4$  représente un compromis optimal entre performance de transfert et efficacité énergétique. Ces résultats sont d'un grand intérêt pour la conception et l'optimisation de dispositifs industriels tels que les échangeurs de chaleur rotatifs, les réacteurs chimiques à mélange ou les systèmes à double diffusion contrôlée.

### III.4.1.2 Effet du nombre de Reynolds :

L'étude de l'effet du nombre de Reynolds sur les mécanismes de transfert thermique et massique en convection double diffusive dans une cavité confinée, notamment dans un anneau horizontal avec cylindre intérieur aileté en rotation, met en évidence la richesse et la complexité des phénomènes intervenant dans ces écoulements couplés. D'un point de vue fondamental, l'évolution du régime d'écoulement avec  $Re$  permet d'observer une transition progressive entre la convection naturelle et forcée, qui ne se manifeste pas par un seuil brutal, mais par un glissement continu des mécanismes dominants. Cette transition impacte directement la distribution des isothermes, des isoconcentrations ainsi que les structures tourbillonnaires visibles sur les lignes de courant.

Les résultats numériques obtenus et validés qualitativement par les tendances expérimentales de la littérature révèlent l'existence d'un optimum énergétique situé autour de  $Re \approx 100\text{--}150$ . Dans cette zone, le couplage naturel/forcé permet de maximiser le transfert thermique tout en limitant la dépense énergétique induite par la rotation du cylindre. Cela a une implication directe en ingénierie thermique, notamment dans la conception de systèmes de refroidissement passifs ou semi-actifs où la consommation énergétique doit rester faible sans compromettre l'efficacité du transfert.

Par ailleurs, le rôle des ailettes se révèle d'autant plus stratégique à mesure que le nombre de Reynolds augmente. En effet, les ailettes modifient localement la structure de l'écoulement, favorisant la rupture des couches limites thermiques et la formation de zones de recirculation qui renforcent les échanges, **Figure III-4**. Cependant, leur efficacité est fortement dépendante du régime dynamique : à faibles  $Re$ , elles perturbent peu le champ thermique ; à hauts  $Re$ , elles deviennent critiques pour canaliser l'énergie cinétique vers des échanges utiles. Ce comportement justifie leur intégration systématique dans les configurations où  $Re$  dépasse une certaine valeur seuil, notamment au-delà de 150.

Un autre point notable concerne la robustesse du couplage thermosolutal, qui semble se maintenir de manière optimale lorsque le nombre de Lewis ( $Le$ ) et le rapport de flottabilité ( $N$ ) sont proches de l'unité. Cela confirme la pertinence d'un design symétrique des propriétés thermiques et diffusives

dans les fluides binaires utilisés. En termes de simulation, l'analyse montre la nécessité de recourir à des modèles CFD différenciés selon  $Re$ , avec des modèles laminaires, transitionnels ou turbulents selon le cas. L'instabilité croissante de l'écoulement dans la zone  $100 < Re < 200$  appelle l'intégration de modèles plus fins pour une capture précise des structures tourbillonnaires.

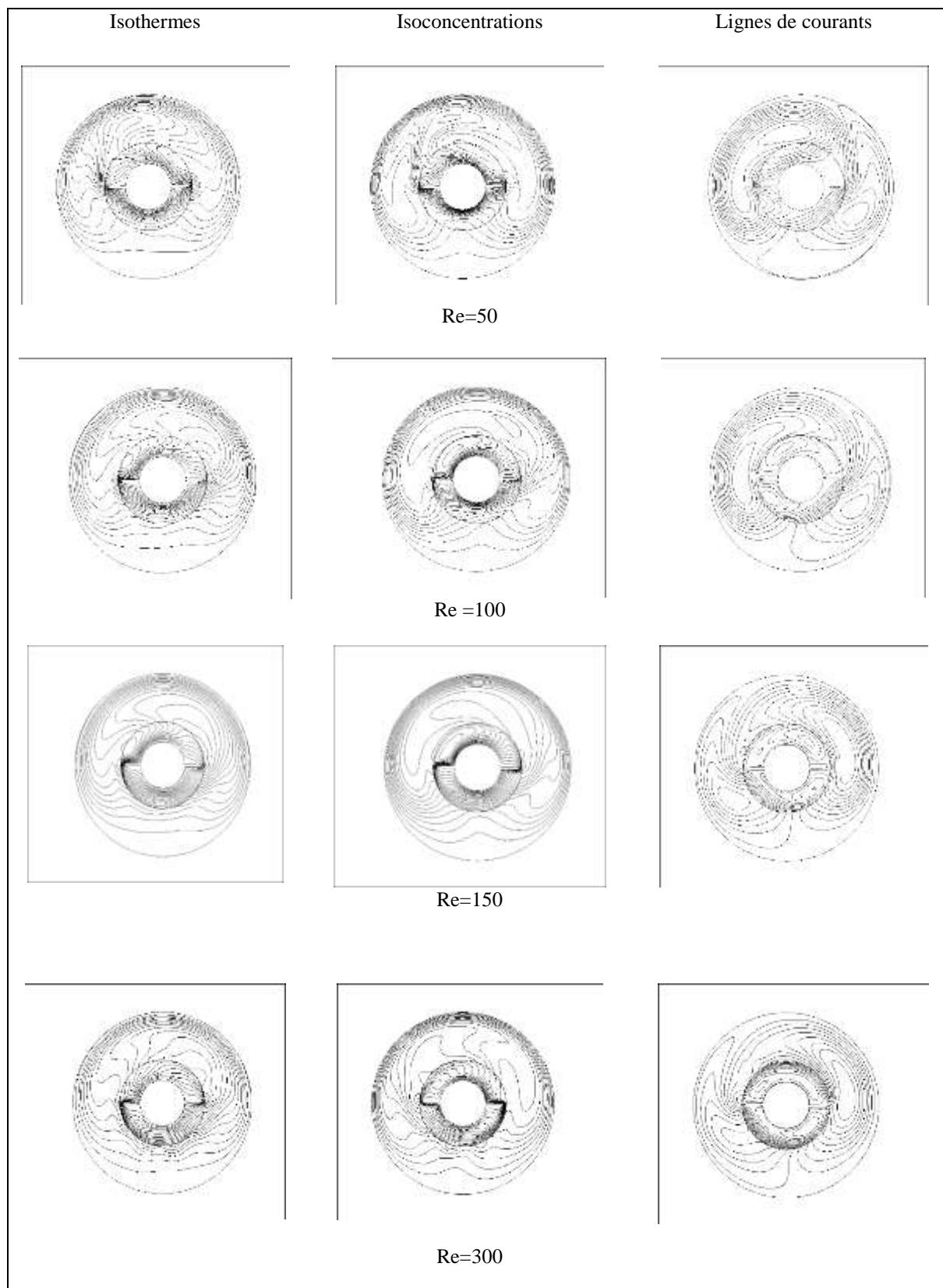
Sur le plan technologique, ces résultats ouvrent des perspectives intéressantes pour des systèmes à régulation adaptative, où la vitesse de rotation du cylindre ou d'autres paramètres dynamiques pourraient être modulés en temps réel pour maintenir le système dans sa zone d'efficacité maximale. Cette logique d'optimisation dynamique, combinée à des capteurs intelligents et à des matériaux actifs, permettrait à terme de développer des systèmes thermo-fluidiques autonomes, capables de s'auto-ajuster en fonction de leur environnement.

Enfin, les applications potentielles de ces travaux ne se limitent pas aux systèmes de refroidissement terrestre. Les contextes de microfluidique, de bio-ingénierie ou encore des systèmes spatiaux en micropesanteur offrent un terrain fertile pour l'extension des principes identifiés ici, dans des conditions de fonctionnement extrêmes où la gravité, la géométrie et la dissipation énergétique doivent être finement contrôlées.

En conclusion, le nombre de Reynolds apparaît comme un paramètre clé de conception et de régulation pour les systèmes doublement diffusifs. Sa compréhension fine et sa gestion adaptative constituent une voie prometteuse pour la conception de systèmes énergétiquement efficaces, robustes et intelligents.

Enfin, les applications potentielles de ces travaux ne se limitent pas aux systèmes de refroidissement terrestre. Les contextes de microfluidique, de bio-ingénierie ou encore des systèmes spatiaux en micropesanteur offrent un terrain fertile pour l'extension des principes identifiés ici, dans des conditions de fonctionnement extrêmes où la gravité, la géométrie et la dissipation énergétique doivent être finement contrôlées.

En conclusion, le nombre de Reynolds apparaît comme un paramètre clé de conception et de régulation pour les systèmes doublement diffusifs. Sa compréhension fine et sa gestion adaptative constituent une voie prometteuse pour la conception de systèmes énergétiquement efficaces, robustes et intelligents.

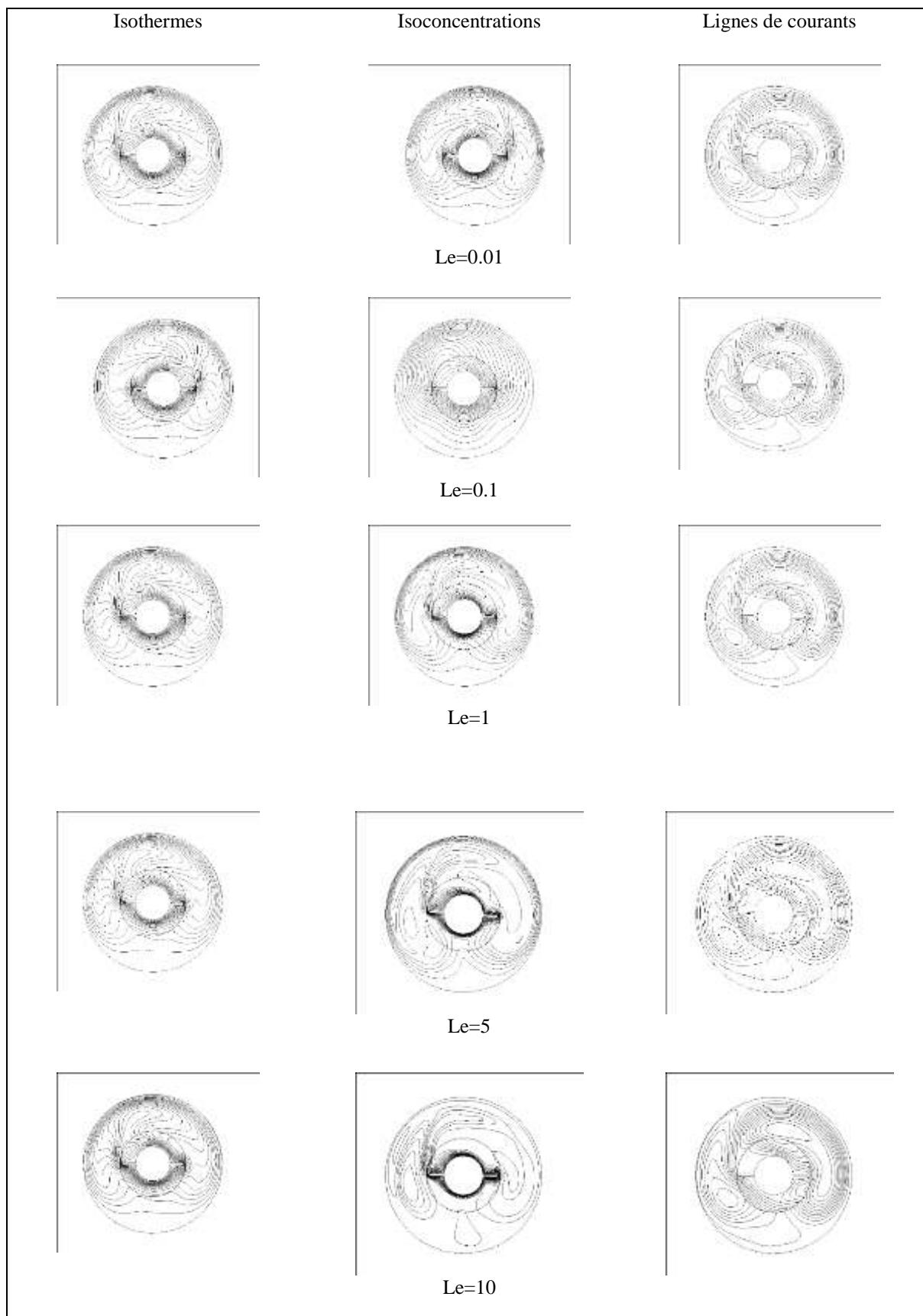


**Figure III-4 :** Effet du nombre Reynold sur les isothermes, isoconcentration et lignes de courants pour  $Gr=10^5$ ,  $N=1$  et  $Le=1$ .

### III.4.1.3 Effet du nombre de Lewis :

Dans un système à convection mixte soumis à un nombre de Grashof ( $Gr = 10^5$ ), un nombre de Reynolds constant ( $Re = 50$ ) et un rapport de flottabilité unitaire ( $N = 1$ ), le nombre de Lewis émerge comme un paramètre fondamental gouvernant la structuration des transferts couplés de chaleur et de masse. L'analyse des champs scalaires met en évidence que, pour des valeurs de Le très faibles ( $Le \ll 1$ ), la diffusion massique prédomine, induisant une homogénéisation rapide du champ de concentration, **Figure III-5**. Ce régime se traduit par des isoconcentrations quasi-parallèles, faiblement stratifiées, tandis que les isothermes sont confinées et présentent des gradients intenses, signe d'un transfert thermique localisé. À l'opposé, pour des valeurs élevées de Lewis ( $Le \gg 1$ ), la diffusivité thermique devient dominante, lissant le champ de température sur l'ensemble du domaine. Dans ce cas, le transfert de masse est confiné à des régions étroites, caractérisées par une forte stratification et des gradients concentrés comme illustré dans la **Figure III-5**.

Un régime de couplage optimal émerge dans l'intervalle  $0.1 \leq Le \leq 5$ , où la compétition entre les effets diffusifs est équilibrée. Ce régime se distingue par une superposition quasi-identique des isothermes et des isoconcentrations, traduisant une synergie entre flottabilité thermique et massique. Il en résulte des structures convectives organisées, une distribution homogène de l'énergie et de la matière, et des performances optimales en termes de transfert global, mesurées par les nombres de Nusselt (Nu).



**Figure III-5 :** Effet du Lewis sur les isothermes, isoconcentration et lignes de courants pour  $Gr=10^5$ ,  $N=1$  et  $Re=50$ .

### III.4.1.4 Effet du nombre de rapport de flottabilité :

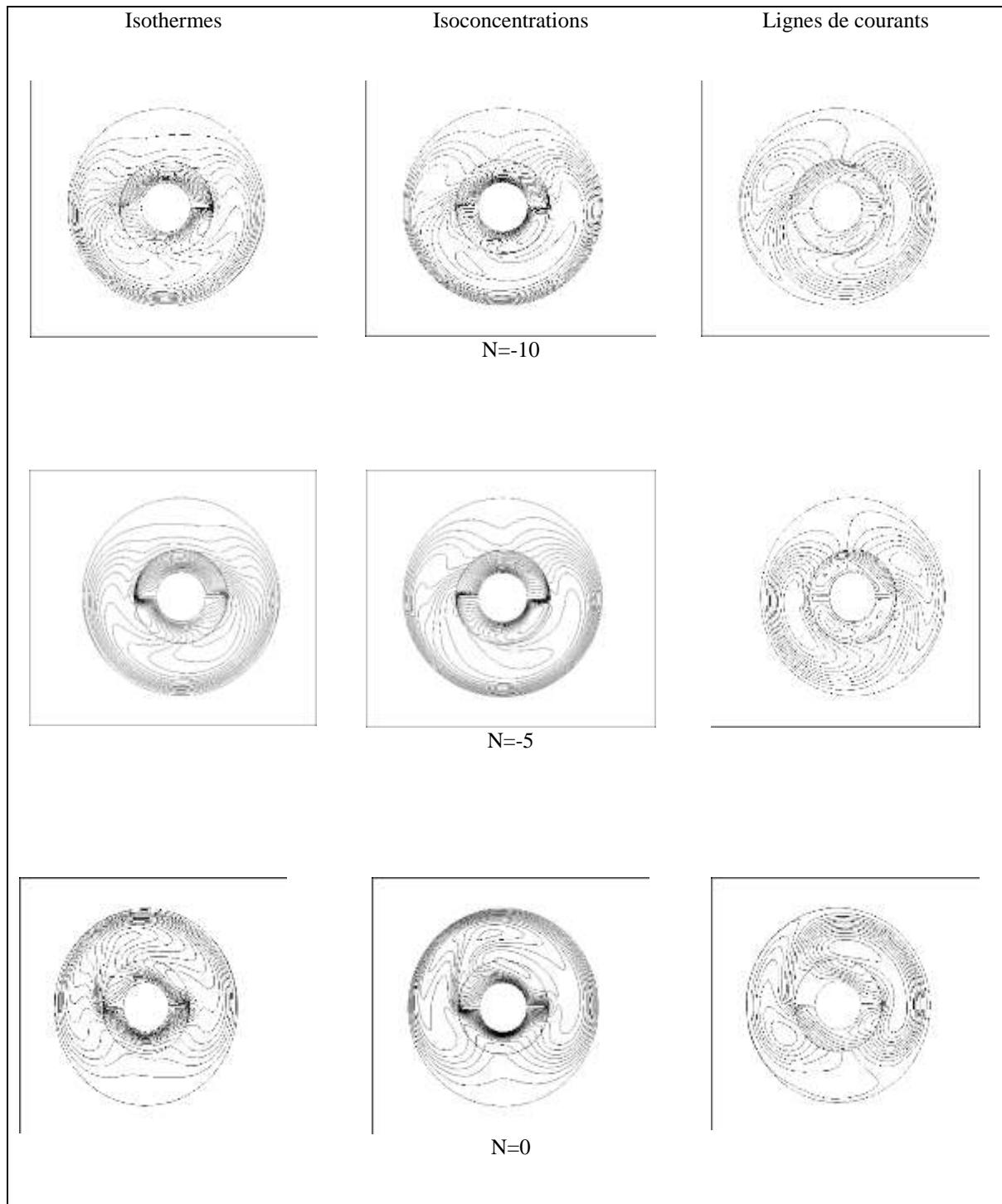
L'étude approfondie de l'effet du rapport de flottabilité  $N$  révèle la complexité et la richesse des interactions entre les mécanismes de convection thermique et massique dans les systèmes à double diffusion. Ce paramètre adimensionnel, défini comme le rapport entre les contributions massique et thermique à la force de flottabilité s'avère être un levier fondamental de contrôle du comportement dynamique et des performances globales du système. Les résultats obtenus montrent que lorsque  $N < 0$ , les flottabilités opposées induisent un régime instable caractérisé par des structures conflictuelles d'écoulement, des zones de stagnation accrues et une réduction notable de l'efficacité des transferts, **Figure III-6.** Ce régime, bien que physiquement réaliste dans certaines applications contraignantes (cristallisation, dissolution), demeure peu favorable du point de vue énergétique et nécessite souvent des solutions technologiques de compensation (agitation mécanique, géométrie optimisée).

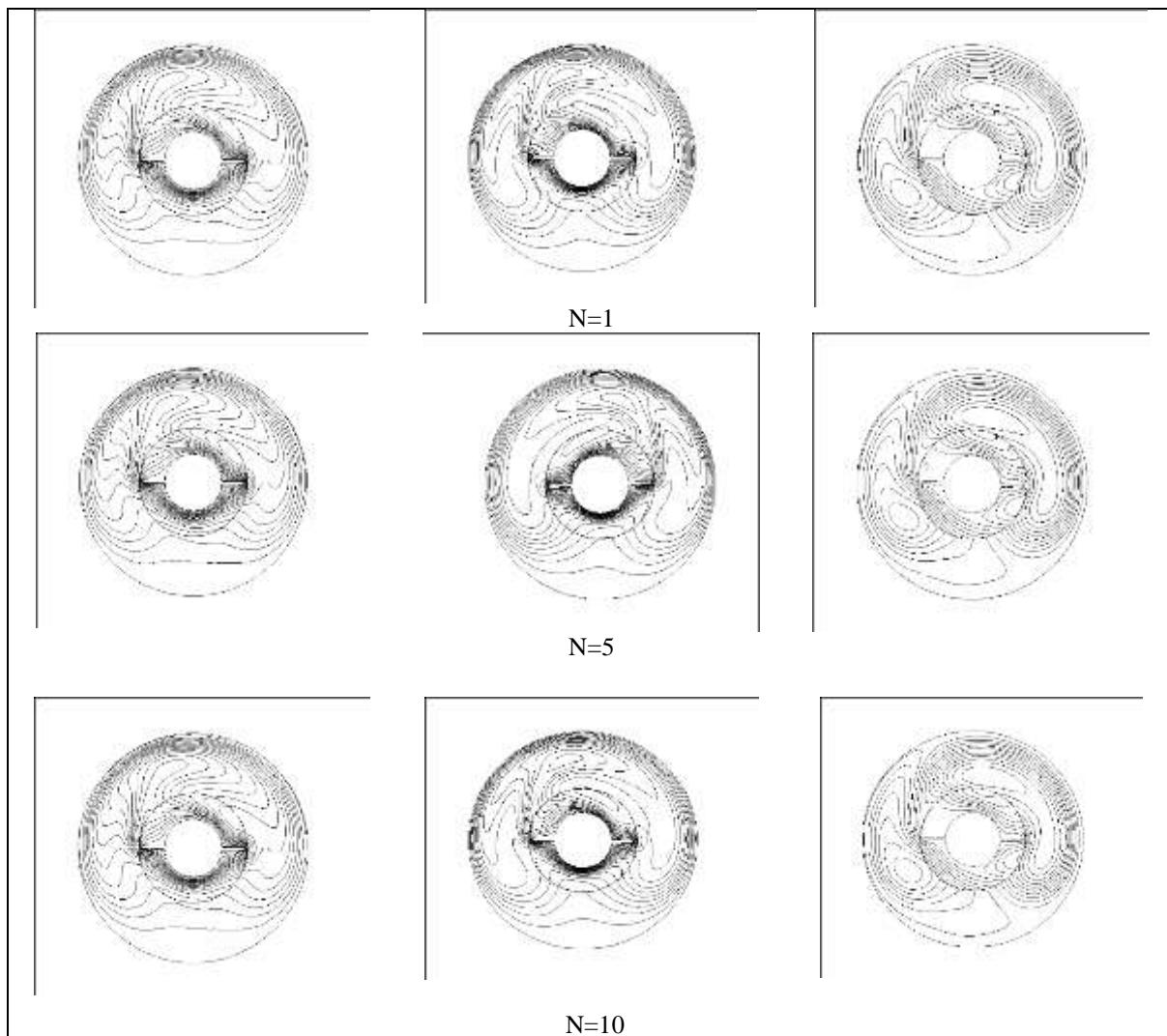
À l'opposé, pour  $N > 0$ , la synergie entre les flottabilités engendre une amélioration significative de la circulation convective. Le cas particulier de  $N = 1$  représente un optimum de coopération équilibrée, où les gradients thermique et massique agissent conjointement et de manière constructive, menant à une intensification des transferts tant thermiques que massiques. Ce point d'équilibre constitue une cible de conception privilégiée pour les systèmes mixtes tels que les échangeurs à double fonction ou les réacteurs chimiques couplés. Lorsque  $N$  augmente au-delà de 1, la flottabilité massique devient progressivement dominante. Cette domination n'implique pas une dégradation des performances mais oriente leur spécialisation : les structures d'écoulement s'adaptent pour maximiser les transferts massiques, au détriment partiel de l'efficacité thermique. Ces régimes sont particulièrement adaptés aux processus industriels nécessitant un contrôle fin de la diffusion des espèces, comme la distillation, la purification ou le dégazage.

D'un point de vue fondamental, l'évolution continue observée de  $N = -10$  à  $N = +10$  souligne la transition progressive entre un régime destructif et un régime constructif, marquée par une forte non-linéarité des coefficients de transfert ( $Nu$  et  $Sh$ ). La stabilité dynamique s'en trouve également affectée, avec une zone critique identifiée autour de  $N < -5$  où les instabilités peuvent compromettre le fonctionnement stable du système. L'intégration de ce paramètre dans les modèles prédictifs, à travers des corrélations empiriques ou semi-analytiques du type  $Nu = f(Gr, Re, Le, N)$ , permet non seulement une meilleure compréhension du comportement convectif, mais aussi une optimisation ciblée selon les besoins applicatifs.

Sur le plan technologique, la maîtrise du rapport de flottabilité ouvre la voie à des systèmes intelligents et adaptatifs, capables de modifier dynamiquement leurs conditions opératoires pour maintenir des performances optimales. Cette approche conditionne l'avenir des technologies

avancées de transfert thermique et massique, notamment dans les domaines émergents tels que la micro-fluidique, la biotechnologie ou les énergies renouvelables.





**Figure III-6 :** Effet du Rapport flottabilité sur les isothermes, isoconcentration et lignes de courants pour  $Gr=10^5$ ,  $Re=50$  et  $Le=1$ .

### III.4.2 Analyse du transfert de chaleur et de masse :

#### III.4.2.1 Nombres de Nusselt et de Sherwood local :

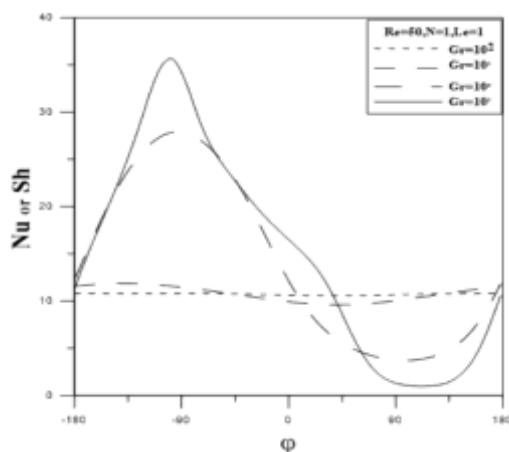
Afin d'exprimer l'évolution de transfert de chaleur et de masse le long du cylindre extérieur, on a considéré les nombres de Nusselt et Sherwood locaux qui mesurent les taux de transfert de chaleur et de masse. À cet effet, les profils des nombres de Nusselt et Sherwood locaux sont exprimés le long du cylindre extérieur en fonction de l'angle  $\phi$ .

L'analyse de l'influence du nombre de Grashof sur les distributions angulaires des nombres de Nusselt et Sherwood locaux sur la **Figure III-7**, révèle une transformation fondamentale des mécanismes de transfert en fonction de l'intensité de la flottabilité. Pour les faibles valeurs de Grashof ( $Gr = 10^2$ ), correspondant à un régime où les forces de flottabilité sont négligeables devant les forces visqueuses, les profils angulaires présentent des variations sinusoïdales régulières et modérées avec des amplitudes comprises entre 2 et 6. Cette régularité spatiale reflète la prédominance absolue de la

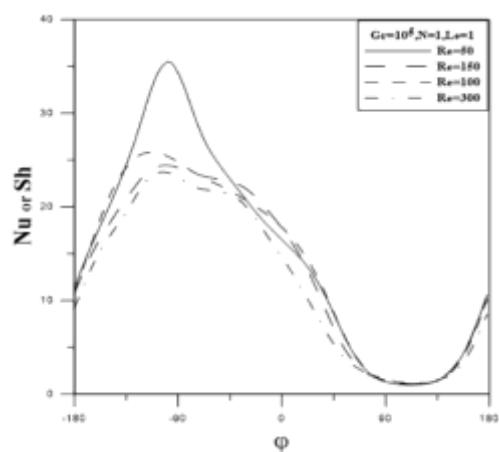
convection forcée induite par la rotation du cylindre intérieur, générant un écoulement largement contrôlé par les effets inertiels. La distribution quasi-périodique des transferts traduit l'absence d'instabilités convectives significatives, caractéristique d'un régime laminaire stable où les couches limites thermique et de concentration demeurent attachées à la paroi.

L'augmentation progressive du nombre de Grashof vers des valeurs intermédiaires ( $Gr = 10^3-10^4$ ) amorce une déstabilisation graduelle de l'écoulement, manifestée par l'amplification des variations angulaires et l'apparition de premières irrégularités dans les profils de transfert. Cette transition témoigne de l'émergence d'instabilités convectives localisées où les forces de flottabilité commencent à perturber l'écoulement de base imposé par la rotation.

Pour les valeurs élevées de Grashof ( $Gr = 10^5$ ), correspondant à un régime de convection naturelle intense, les transferts locaux subissent une amplification spectaculaire avec des valeurs maximales excédant 20 à 25, soit une augmentation d'un ordre de grandeur par rapport au régime de faible flottabilité. Ces instabilités convectives génèrent une forte hétérogénéité spatiale des transferts, créant des zones de forte intensité alternant avec des régions de relative stagnation, caractéristique des écoulements turbulents en convection naturelle.



**Figure III-7 :** Effet du Grashof sur les nombres de Nusselt et Sherwood locaux pour  $Re=50$ ,  $N=1$ ,  $Le=1$



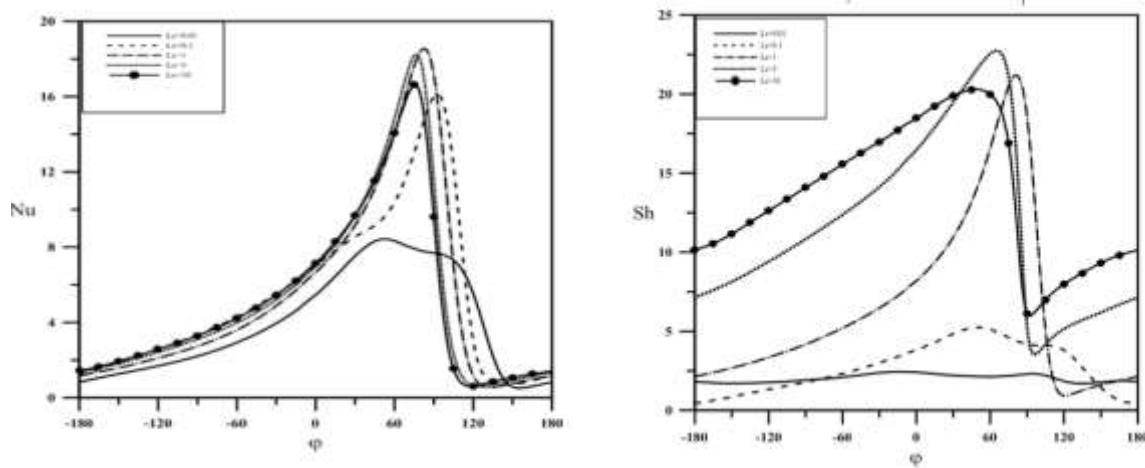
**Figure III-8 :** Effet du Reynolds sur les nombres de Nusselt et Sherwood locaux Pour  $Gr = 10^5$ ,  $N=1$ ,  $Le=1$

La **Figure III-8** montre l'influence du nombre de Reynolds sur les distributions locales illustre parfaitement la compétition complexe entre convection forcée et convection naturelle dans le système étudié. Pour les faibles valeurs de Reynolds ( $Re = 50$ ), correspondant à une rotation lente du cylindre intérieur, la convection forcée demeure insuffisante pour déstabiliser efficacement les couches limites thermique et de concentration. Dans ce régime, les transferts locaux présentent des amplitudes modérées avec des variations angulaires relativement faibles, reflétant un écoulement où les forces

visqueuses dominent encore largement les effets inertIELS. L'énergie cinétique limitée de l'écoulement ne permet pas de promouvoir un mélange efficace, limitant ainsi l'intensité des échanges thermosolutaux.

L'optimisation des transferts se manifeste clairement autour de  $Re = 100-150$ , où l'équilibre délicat entre convection forcée et naturelle génère un régime synergique maximisant les performances locales. Dans cette configuration optimale, l'énergie cinétique imposée par la rotation devient suffisante pour déstabiliser les couches limites sans pour autant supprimer les instabilités convectives naturelles induites par la flottabilité. Cette interaction équilibrée favorise le développement de structures convectives hybrides qui amplifient simultanément les transferts thermiques et massiques, générant des valeurs locales maximales dépassant 25.

Pour les valeurs élevées de Reynolds ( $Re = 300$ ), correspondant à une rotation rapide du cylindre, la convection forcée devient excessive et tend paradoxalement à dégrader les performances de transfert. Dans ce régime, l'énergie cinétique élevée de l'écoulement supprime les instabilités convectives naturelles en stabilisant artificiellement les couches limites par cisaillement intense. Cette domination de la convection forcée élimine les mécanismes de déstabilisation thermosolutale, réduisant l'efficacité globale des transferts malgré l'intensification du mouvement fluide.



**Figure III-9 :** effet du nombre de Lewis sur les nombres locaux de Nusselt et Sherwood pour  $Re=50$ ,  $Gr=10^5$  et  $N=1$ .

La **Figure III-9** analyse l'effet du nombre de Lewis sur les transferts thermique et massique couplés en convection mixte pour ( $Re = 50$ ,  $Gr = 10^5$ ,  $N=1$ ). Pour  $Le > 1$ , la couche limite de concentration est plus mince, favorisant le transfert massique. Pour  $Le < 1$ , c'est le transfert thermique qui est intensifié. L'étude met en évidence les limites de l'analogie de Reynolds, valable uniquement pour  $Le = 1$ . L'évolution conjointe de  $Nu$  et  $Sh$  illustre le couplage fort des transferts. Ces résultats sont essentiels pour optimiser les procédés industriels tels que le séchage, la cristallisation ou

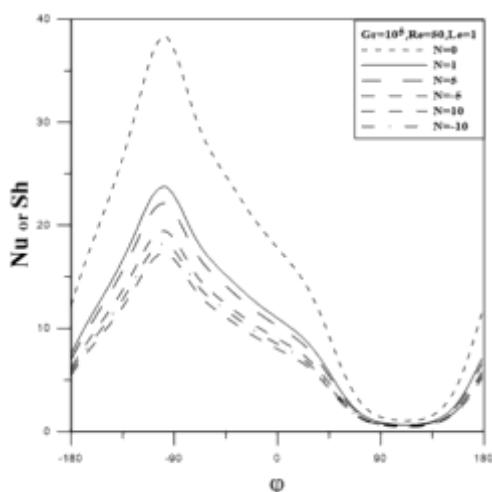
l'évaporation. La compréhension fine de ces phénomènes permet d'améliorer l'efficacité énergétique des systèmes d'échange.

Le rapport de flottabilité  $N$ , défini comme le rapport entre les forces de flottabilité solutale et thermique, exerce une influence déterminante sur la structure de l'écoulement et les transferts associés

**Figure III-10.** Pour les valeurs négatives ( $N < 0$ ), les flottabilités thermiques et solutale s'opposent, créant un régime destructif caractérisé par des interférences destructives entre les mécanismes convectifs. Cette configuration opposée génère des gradients de densité contradictoires qui inhibent le développement de la convection naturelle, créant des zones de recirculation locale où les transferts chutent dramatiquement ( $Nu, Sh < 5$ ). Les panaches thermiques ascendants sont contrecarrés par les panaches solutaux descendants, générant un écoulement chaotique peu efficace pour les échanges.

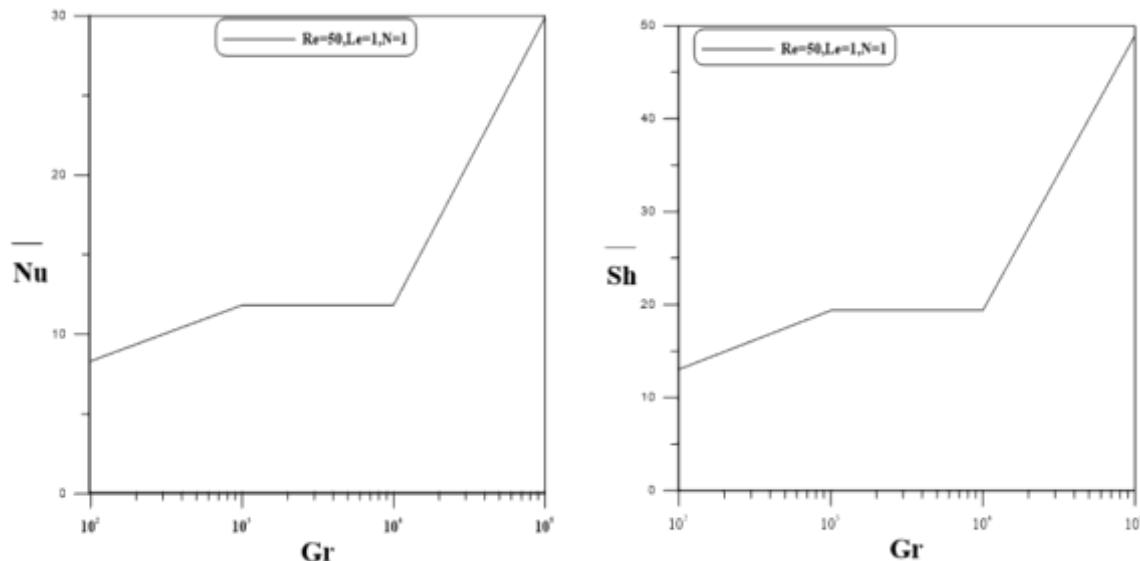
La transition vers les valeurs positives ( $N > 0$ ) marque l'établissement d'un régime coopératif où les flottabilités thermique et solutale s'additionnent de manière constructive. Cette synergie se manifeste par une amplification progressive des transferts locaux, avec une croissance marquée pour  $N = 0.5$  à  $N = 1$ . L'optimum absolu s'établit autour de  $N = 1$ , correspondant à l'équilibre parfait entre les contributions thermique et solutale à la flottabilité totale. Cette configuration favorise le développement des panaches thermosolutaux cohérents et intenses qui maximisent l'efficacité des échanges, générant des valeurs locales maximales dépassant 20.

Pour  $N > 1$ , la flottabilité solutale devient prédominante, conduisant à une spécialisation progressive des transferts massiques au détriment de l'équilibre thermosolutal. Bien que les transferts massiques continuent de croître, les transferts thermiques tendent à se stabiliser voire à décroître légèrement, reflétant la domination des mécanismes solutaux sur les mécanismes thermiques.



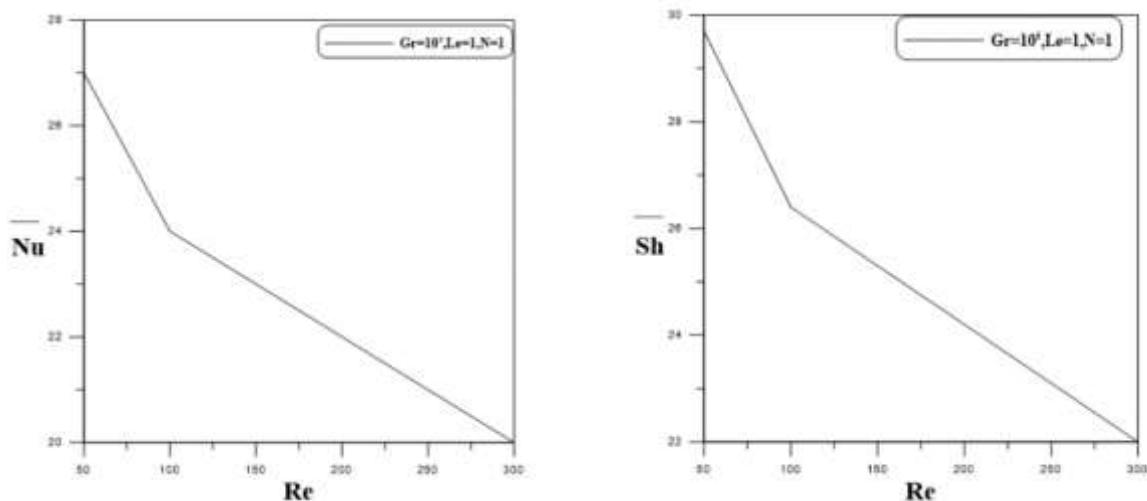
**Figure III-10 :** Effet du rapport de flottabilité sur les nombres de Nusselt et Sherwood locaux pour  $Gr = 10^5$  ,  $Re=50$  ,  $Le=1$

### III.4.2.2 Nombre de Nusselt et Sherwood moyen :



**Figure III-11** : Effet du nombre de Grashof sur Nu et Sh moyens

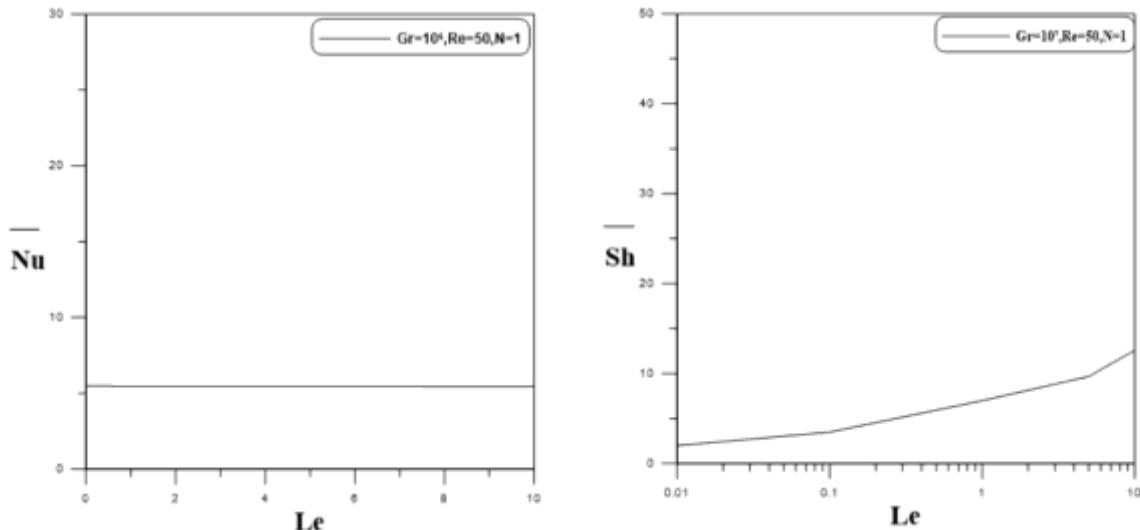
Les courbes présentées sur la **Figure III-11** montrent une augmentation des nombres de Nusselt (Nu) et de Sherwood (Sh) moyens avec le nombre de Grashof (Gr). Cette tendance est cohérente avec la théorie de la convection naturelle, selon laquelle une élévation de Gr traduit une intensification des forces de flottabilité par rapport aux forces visqueuses. Cette augmentation quasi-linéaire des coefficients de transfert suggère un régime de convection naturelle laminaire bien établi, dans lequel les transferts convectifs deviennent progressivement dominants par rapport à la conduction thermique ou diffusion de masse pure.



**Figure III-12** : Effet du nombre de Reynolds sur Nu et Sh moyens

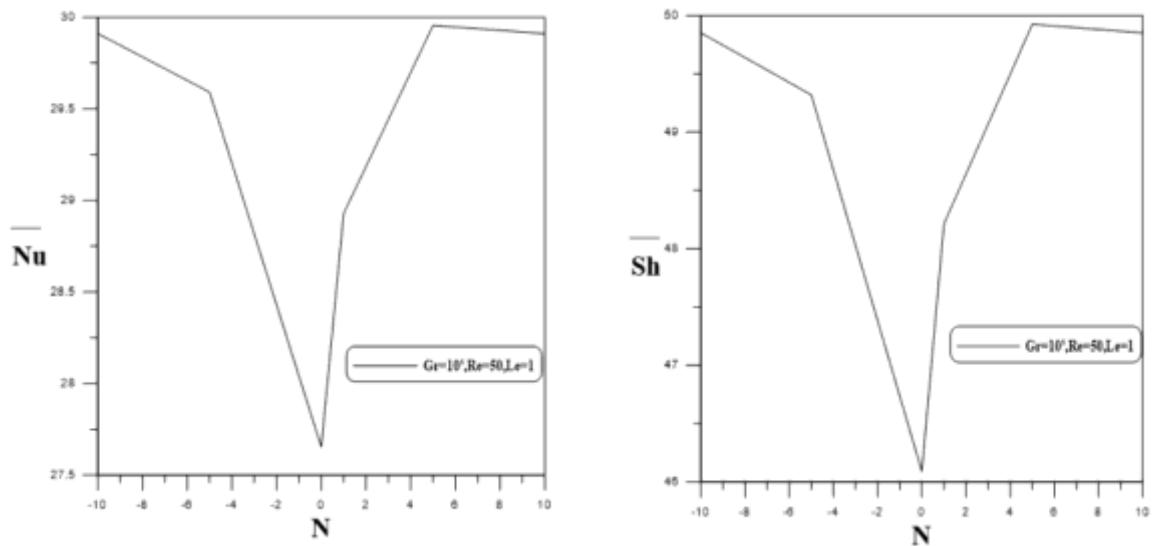
L'évolution des nombres de Nusselt et de Sherwood moyens en fonction du nombre de Reynolds (Re) met en évidence l'effet de la convection forcée sur les mécanismes de transfert illustré dans la **Figure III-12**. Une croissance de Nu et Sh avec Re indique que l'intensification de l'écoulement améliore

significativement les échanges thermiques et massiques par convection. La forme des courbes associées pourrait traduire une transition progressive entre différents régimes d'écoulement (laminaire, transitionnel ou turbulent), ou encore la formation d'une couche limite plus mince et dynamique, favorable à l'augmentation des gradients et donc des flux.



**Figure III-13 :** Effet du nombre de Lewis sur Nu et Sh moyens.

La **Figure III-13** illustre l'influence du nombre de Lewis ( $Le$ ) sur les nombres de Nusselt moyen ( $\bar{Nu}$ ) et de Sherwood moyen ( $\bar{Sh}$ ) dans un système de convection mixte à double diffusion. Le graphe de gauche montre la légèrement diminution du nombre  $\bar{Nu}$  avec l'augmentation de  $Le$ , en particulier pour les faibles valeurs de  $Le$  (inférieures à 1). Cela indique que lorsque la diffusivité thermique devient dominante par rapport à la diffusivité massique, le transfert de chaleur est atténué. En revanche, le graphe de droite révèle une augmentation marquée de  $\bar{Sh}$  avec  $Le$ , surtout pour les cas où  $Le > 1$ . Cela s'explique par le fait que, dans ces conditions, la diffusion de masse est plus lente, entraînant des gradients de concentration plus forts et donc un transfert de masse accru. Ainsi, un nombre de Lewis élevé favorise un transfert de masse plus important au détriment du transfert de chaleur. Cette opposition dans les tendances met en évidence le rôle crucial du couplage thermo-massique dans la dynamique des transferts, soulignant l'importance de considérer le nombre de Lewis dans la conception de systèmes thermiques et chimiques.



**Figure III-14 :** Effet du rapport de flottabilité sur Nu et Sh moyens.

Les courbes obtenues dans la **Figure III-14** indiquent une augmentation parallèle des nombres moyens de Nusselt (Nu) et de Sherwood (Sh) en fonction du rapport de flottabilité, mettant en évidence un fort couplage entre les transferts thermique et massique. Cette tendance reflète une intensification des mécanismes convectifs induite par les forces de flottabilité, traduisant une transition progressive d'un régime dominé par la diffusion vers un régime où la convection prédomine. Ces résultats revêtent une importance particulière pour l'optimisation des procédés industriels intégrant des transferts couplés, tels que le séchage, les échangeurs de chaleur ou les systèmes de refroidissement.

### III.5 Conclusion :

Ce chapitre a permis de mettre en évidence, par une approche numérique rigoureuse, la richesse et la complexité des phénomènes de convection mixte à double diffusion dans une configuration annulaire avec cylindre intérieur rotatif aileté. L'étude a d'abord validé le modèle numérique utilisé en le comparant à des références de la littérature, puis a exploré de manière détaillée l'impact des principaux paramètres adimensionnels (Grashof, Reynolds, Lewis, et rapport de flottabilité) sur les structures d'écoulement, les distributions thermiques et de concentration, ainsi que sur les transferts locaux et moyens de chaleur et de masse.

Les résultats ont montré que l'interaction entre convection naturelle et forcée, modulée par la rotation, les gradients de température et de concentration, ainsi que la géométrie ailetée, génère des structures d'écoulement particulièrement complexes. L'étude du nombre de Grashof a mis en évidence la transition progressive entre régimes dominés par la conduction, la convection mixte, et la convection naturelle, avec une efficacité maximale observée dans l'intervalle  $Gr \approx 10^4\text{--}10^5$ . Le nombre de Reynolds, quant à lui, a révélé l'existence d'un optimum énergétique autour de  $Re \approx 100\text{--}150$ , où les effets de la force d'inertie et de flottabilité coopèrent efficacement. Le nombre de Lewis a souligné l'importance du rapport des diffusivités pour équilibrer les transferts thermiques et massiques, tandis que le rapport de flottabilité  $N$  s'est révélé déterminant pour passer d'un régime opposé à un régime synergique.

Cette analyse paramétrique approfondie fournit des éléments essentiels pour la conception et l'optimisation de systèmes industriels exploitant la double diffusion dans des configurations confinées et dynamiquement actives. Elle ouvre aussi des perspectives vers des systèmes adaptatifs et intelligents, capables de moduler leurs conditions opératoires en temps réel pour maintenir une efficacité maximale de transfert. Enfin, les résultats obtenus posent les bases de futurs travaux sur des configurations tridimensionnelles, instationnaires ou turbulentes, pour aller plus loin dans la compréhension des couplages thermo-solutaux complexes.

# Conclusion Générale

### Conclusion Générale

Ce travail a porté sur l'étude numérique de la convection mixte à double diffusion dans une cavité annulaire, une configuration représentative de nombreux procédés industriels nécessitant une gestion précise des transferts de chaleur et de masse. En combinant des effets de flottabilité thermique et solutale avec une composante de convection forcée induite par la rotation du cylindre intérieur a ailette, le système étudié présente une complexité physique riche et pertinente.

À travers une modélisation rigoureuse, nous avons formulé un modèle mathématique complet décrivant le comportement du fluide dans des conditions thermiques et diffusives couplées. L'approche numérique mise en œuvre, basée sur la méthode des volumes finis, a permis d'analyser l'impact de plusieurs paramètres adimensionnels sur les transferts énergétiques et la dynamique de l'écoulement. Les résultats obtenus ont mis en évidence l'importance de l'interaction entre les phénomènes de diffusion thermique et massique, et ont souligné le rôle déterminant des configurations géométriques, notamment la présence d'ailettes, sur l'intensification des échanges.

Ce travail constitue ainsi une contribution utile à la compréhension des phénomènes de convection double diffusive en milieu confiné, et peut servir de base pour l'optimisation de systèmes thermiques complexes. Les perspectives futures peuvent s'orienter vers l'étude de configurations tridimensionnelles, la prise en compte de la turbulence, ou encore l'optimisation des formes et des matériaux pour améliorer davantage l'efficacité des transferts.

# Références Bibliographiques

## Références Bibliographiques

- [1] T. Icoz et Y. Jaluria. (2005) “Numerical simulation of boundary conditions and the onset of instability in natural convection due to protruding thermal sources in an open rectangular channel”Numerical heat transfer, part A,vol 48 pp 831-847.
- [2] C. Body, les échangeurs de chaleur par convection (1ère partie), Ed. Bordas/Mouton, Paris.
- [3] S. Saddam , Amélioration de la convection mixte dans un dissipateur de chaleur à ailette elliptique creuse. Thèse de Master Université de M’sila.2015.
- [4] Mojtabi , A . Charrier-Mojtabi, M.-C. (2000). 13. Double-Diffusive Convection in Porous Media. In Kambiz Vafai (ed.). Handbook of porous media. New York: Dekker. ISBN 978-0-8247-8886-5.
- [5] Notz, D . McPhee, M.G.; Worster, M.G.; Maykut, G.A.; Schlünzen, K.H.; Eicken, H. (2018). Impact of underwater-ice evolution on Arctic summer sea ice. Journal of Geophysical Research: Oceans. **108** (C7). doi:10.1029/2001JC001173.
- [6] Turner, J. S . Turner, John Stewart (1979-12-20). Buoyancy Effects in Fluids. Cambridge University Press. ISBN 978-0-521-29726-4.
- [7] Huppert, H E . Sparks, R S J (1984). "Double-Diffusive Convection Due to Crystallization in Magmas". Annual Review of Earth and Planetary Sciences. **12** (1): 11–37. Bibcode:1984AREPS..12...11H. doi:10.1146/annurev.ea.12.050184.000303
- [8] Parsons, Jeffrey D . Bush, John W. M.; Syvitski, James P. M. (2001-04-06). "Hyperpycnal plume formation from riverine outflows with small sediment concentrations". Sedimentology. **48** (2): 465–478. Bibcode:2001Sedim..48..465P. doi:10.1046/j.1365-3091.2001.00384.x. ISSN 0037-0746. S2CID 128481974
- [9] LUCQUIN B , PIRONNEAU O, Introduction au Calcul Scientifique Masson 1997. Introduction to Scientific Computing for Engineers (Wiley). (Traduit du francais) 1998.
- [10] Holman J . P . “heat transfert.A partical approach”.2nd edition,(1997),p47-59.
- [11] JEANNOT Y, cours transfert thermique cours 2ème année , Ecole des mines, Nancy, France 2009.
- [12] Webb R . L , Bergels A. E. , and junkhan G., “Bibliography of U.S parent littérature on heat transfer augmentation techniques”. Engineering research institute HTL-HTL-25, Iowa state university,(1980)
- [13] Rigot G. ”Echangeurs : L’evolution technologique des échangeurs ailettes”. Revue pratique du froid et conditionnement d’air,vol.770,(mars1993), p .30-34.
- [14] W. Beckmann, “Die WärmeÜbertragung in zylindrischen Gasschichten bei natürlicher Konvektion,” Forsch. Geb. D. Ingenieur , vol. 71, no. 1927, pp. 165–178, 1931.

## Références bibliographiques

---

- [15] T. H. Kuehn and R. J. Goldstein, “An experimental and theoretical study of natural convection in the annulus between horizontal concentric cylinders,” *J. Fluid Mech.*, vol. 74, no. 4, pp. 695–719, 1976.
- [16] T. S. Lee, “Numerical experiments with laminar fluid convection between concentric and eccentric heated rotating cylinders,” *Numer. Heat Transf.*, 1984.
- [17] J. S. Yoo, “Mixed convection of air between two horizontal concentric cylinders with a cooled rotating outer cylinder,” *Int. J. Heat Mass Transf.*, vol. 41, pp. 293–302, 1998.
- [18] J.-S. Yoo, “Natural convection in a narrow horizontal cylindrical annulus:  $\text{Pr} \leq 0.3$ ,” *Int. Heat Mass Transfer* 41, vol. 41, pp. 3055–3073, 1998.
- [19] B. A. Abu-Hijleh and W. N. Heilen, “Correlation for laminar mixed convection from a rotating cylinder,” *Int. Commun. Heat Mass Transf.*, vol. 25, no. 6, pp. 875–884, 1998.
- [20] I. M. Rustum and H. M. Soliman, “Numerical analysis of laminar mixed convection in horizontal internally finned tubes,” *Int. J. Heat Mass Transf.*, vol. 33, no. 7, pp. 1485–1496, 1990.
- [21] E. M. Sparrow and C. S. Preston, “Heat transfer from rotating annular fins,” *Int. J. Heat Mass Transf.*, 1986.
- [22] M.-L. Farinas, A. Garon, and K. Saint-Louis, “Study of heat transfer in a horizontal cylinder with fins,” *Rev. Gin. Therm.*, vol. 36, pp. 398–410, 1997.
- [23] H. Stommel, A. B. Arons, and D. Blanchard, “An oceanographical curiosity: the perpetual salt fountain,” *Deep Sea Res.*, vol. 3, no. 2, pp. 152–153, 1956.
- [24] G. H. Schiroky and F. Rosenberger, “Free convection of gases in a horizontal cylinder with differentially heated end walls,” *Int. J. Heat Mass Transf.*, vol. 27, no. 4, pp. 587–598, 1984.
- [25] J. Dosch and H. Beer, “Numerical simulation and holographic visualization of double diffusive convection in a horizontal concentric annulus,” *Int. J. Heat Mass Transf.*, vol. 35, no. 7, pp. 1811–1821, 1992.
- [26] H. J. Sung, Won, K. Cho, and J. M. Hyun, “Double-diffusive convection in a rotating annulus with horizontal temperature and vertical solutal gradients,” *J. Heat Mass Transf.*, vol. 36, no. I5, pp. 3773–3782, 1993.
- [27] A. M. Al-Amiri and K. M. Khanafer, “Numerical simulation of double-diffusive mixed convection within a rotating horizontal annulus,” *Int. J. Therm. Sci.*, vol. 45, pp. 567–578, 2006.

## Références bibliographiques

---

[28] A. M. Al-Amiri, K. Khanafer, and M. F. Lightstone, “Unsteady numerical simulation of double diffusive convection heat transfer in a pulsating horizontal heating annulus,” *Heat Mass Transf. und Stoffuebertragung*, vol. 42, no. 11, pp. 64–75, 2006.

[29] A. M. Al-Amiri and K. M. Khanafer, “Numerical simulation of double-diffusive mixed convection within a rotating horizontal annulus,” *Int. J. Therm. Sci.*, vol. 45, pp. 567–578, 2006.

# **ANNEXES**

## Annexes

### Annexe A : Méthode des Volumes Finis

#### A.1 Fondements de la Méthode des Volumes Finis :

##### A.1.1 Principe et caractéristiques fondamentales :

La méthode des volumes finis (MVF) est une technique numérique puissante permettant de résoudre des équations aux dérivées partielles (EDP) représentant divers phénomènes physiques. Son application s'étend à de nombreux domaines incluant :

- La mécanique des fluides et les écoulements complexes
- Les transferts thermiques par conduction, convection et rayonnement
- La diffusion de masse et les phénomènes de transport
- Les problèmes d'électromagnétisme et d'acoustique

Le principe fondamental de la MVF repose sur la discrétisation du domaine d'étude en un ensemble de volumes de contrôle non chevauchants, et l'application des lois de conservation sur chacun de ces volumes. Cette approche comporte trois étapes essentielles :

**Discrétisation du domaine spatial :** Le domaine d'étude est subdivisé en un maillage de cellules ou volumes finis. Chaque cellule possède un centre (noeud) qui représente un point de calcul pour les variables d'intérêt.

**Intégration des équations gouvernantes :** Les équations différentielles aux dérivées partielles sont intégrées sur chaque volume fini. L'application du théorème de divergence permet de transformer les termes de flux en intégrales de surface, évaluées aux frontières de chaque volume de contrôle.

**Approximation des flux :** Des approximations numériques sont introduites pour évaluer les flux traversant les faces des volumes de contrôle, établissant ainsi des relations entre les valeurs des variables aux nœuds adjacents.

##### A.1.2 Avantages de la méthode des volumes finis :

La méthode des volumes finis présente plusieurs avantages significatifs qui expliquent sa popularité en simulation numérique :

**Conservation intrinsèque :** La MVF garantit naturellement la conservation locale et globale des grandeurs physiques (masse, quantité de mouvement, énergie), ce qui est particulièrement important pour les problèmes de mécanique des fluides.

**Flexibilité géométrique** : Elle s'adapte aisément à des géométries complexes et irrégulières grâce à la possibilité d'utiliser des maillages non structurés.

**Robustesse** : La méthode est relativement insensible aux singularités et aux conditions aux limites difficiles.

**Formulation physique intuitive** : Les équations discrétisées conservent une interprétation physique claire, facilitant l'implémentation et l'analyse des résultats.

**Adaptabilité au traitement des termes sources** : Elle permet d'intégrer facilement des termes sources complexes, comme ceux apparaissant dans les équations de la convection mixte.

### A.1.3 Applications à la convection mixte à double diffusive :

La convection mixte à double diffusive est caractérisée par la présence simultanée de :

- Convection naturelle (due aux forces de flottabilité)
- Convection forcée (due à un gradient de pression imposé)
- Transfert de chaleur (gradient de température)
- Transfert de masse (gradient de concentration)

Ce phénomène complexe est gouverné par un système couplé d'équations aux dérivées partielles comprenant :

- L'équation de continuité (conservation de la masse)
- Les équations de quantité de mouvement (conservation de la quantité de mouvement)
- L'équation de l'énergie (conservation de l'énergie thermique)
- L'équation de diffusion des espèces (conservation des espèces chimiques)

La résolution numérique de ces équations par la méthode des volumes finis permet d'analyser et de prédire des phénomènes complexes tels que :

- Les instabilités thermohalines dans les océans
- Les processus de cristallisation et de solidification
- La dispersion de polluants dans l'atmosphère
- Les écoulements dans les systèmes de ventilation

## A.2 Formulation Mathématique et Discréétisation :

### A.2.1 Équation générale de transport :

Pour mettre en évidence l'application de la MVF, considérons l'équation générale de transport sous sa forme conservative :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\emptyset) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u\emptyset) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v\emptyset) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma \frac{\partial \emptyset}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma \frac{\partial \emptyset}{\partial y}\right) + S_\emptyset \quad (\text{A-1})$$

Dans cette équation :

- $\rho$ : Densité du fluide
- $\emptyset$ : Grandeur transportée (peut être température, concentration, quantité de mouvement, etc.)
- $u, v$ : Composantes de la vitesse dans les directions  $x$  et  $y$
- $\Gamma$ : Coefficient de diffusion

$S_\emptyset$ : terme source (représente la création ou destruction de  $\emptyset$ )

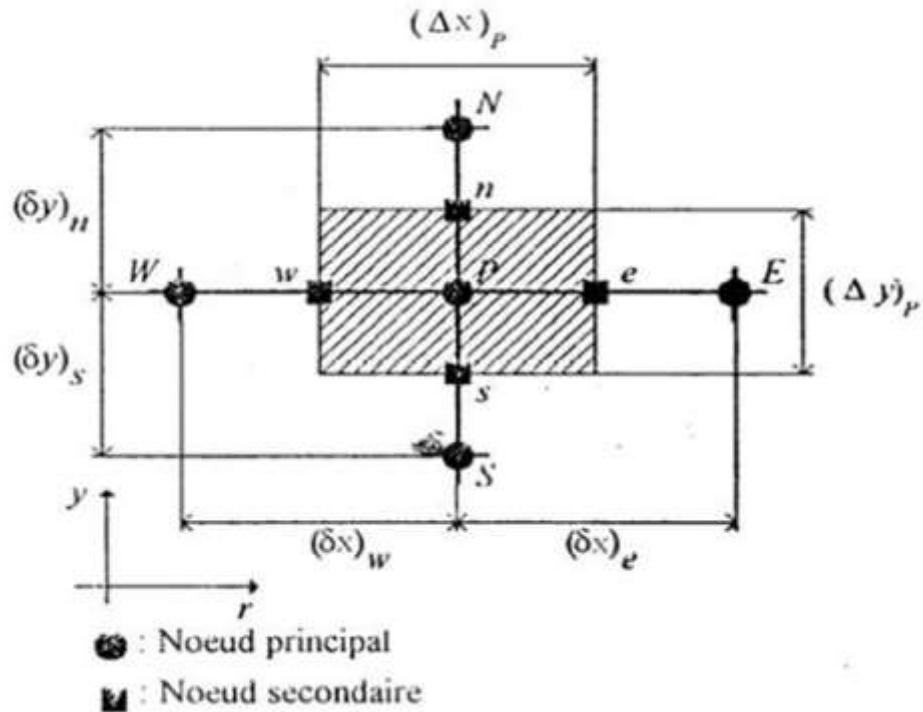
Le tableau suivant récapitule les valeurs que prend la variable  $\emptyset$  dans les différentes équations de conservation pour la convection mixte à double diffusive :

Grandeurs	$\emptyset$	$\Gamma_\emptyset$	$S_\emptyset$
Continuité	1	0	0
Quantité de mouvement selon x	u	v	$-\frac{\partial p}{\partial x}$
Quantité de mouvement selon y	v	v	$-\frac{\partial p}{\partial x} + g\beta(T - T_0)$
Énergie	T	$\frac{\lambda_T}{C_p}$	0
Concentration	C	$\frac{\lambda_C}{C_p}$	0

**Tableau A-1** : Les termes de l'équation de transport.

### A.2.2 Discréétisation spatiale :

La première étape de la MVF consiste à intégrer l'équation générale de transport sur un volume de contrôle élémentaire. Considérons un volume de contrôle bidimensionnel délimité par les faces est (e), ouest (w), nord (n) et sud (s), comme illustré sur la figure ci-dessous :



**Figure A-1 :** Volume de contrôle à travers lequel se fait l'intégration.

L'intégration de l'équation de transport sur ce volume de contrôle donne :

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho \phi) dV + \int_V \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\rho u \phi) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v \phi) \right] dV = \int_V \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \right] dV + \int_V S_\phi dV \quad (A-2)$$

En appliquant le théorème de divergence, les intégrales de volume des termes convectifs et diffusifs sont transformées en intégrales de surface :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho p \phi p) \Delta V + \sum_{faces} (\rho \phi \vec{v} \cdot \vec{n}) A = \sum_{faces} \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) A + S_\phi \Delta V \quad (A-3)$$

Où :

- $\Delta V$  : Le volume de la cellule
- $A$  : L'aire de la face
- $\vec{v}, \vec{n}$  : Le vecteur normal à la face

Cette équation peut être réécrite sous la forme :

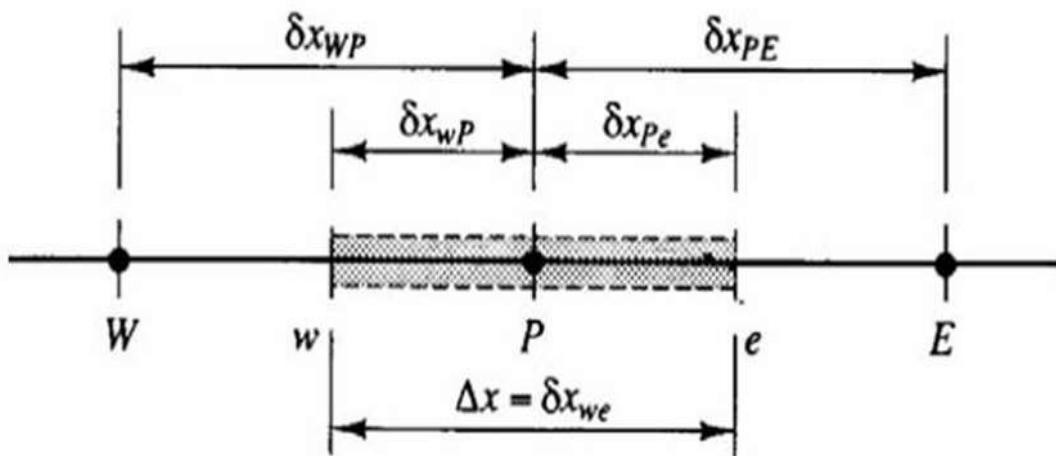
$$\begin{aligned} \left( \rho_p^1 \phi_p^1 - \rho_p^0 \phi_p^0 \right) \Delta V &= \int_t^{t+\Delta t} \left[ (D_e \phi_E - D_e \phi_p) - (D_w \phi_p - D_w \phi_W) \right] dt + \\ &\quad \int_t^{t+\Delta t} \left[ (D_n \phi_N - D_n \phi_p) - (D_s \phi_p - D_s \phi_S) \right] dt + \int_t^{t+\Delta t} \left[ (F_e \phi_e) - (F_w \phi_w) \right] dt + \\ &\quad + \int_t^{t+\Delta t} \left[ (F_n \phi_n) - (F_s \phi_s) \right] dt + \int_t^{t+\Delta t} S_\phi \Delta V dt \end{aligned} \quad (A-4)$$

Où :

- Les exposants 0 et 1 indiquent respectivement les valeurs aux temps  $t$  et  $t + \Delta t$
- $D = \frac{\Gamma A}{\delta x}$  : représente la conductance diffusive
- $F = \rho u A$  : représente le débit massique

Pour compléter la discréttisation spatiale, il est nécessaire d'évaluer les valeurs de  $\phi$  aux faces du volume de contrôle. Plusieurs schémas peuvent être utilisés à cet effet :

#### A.2.3 Schéma aux différences centrées (CDS) :



**Figure A- 2 :** Volume de contrôle dans le cas à une dimension.

Ce schéma utilise une interpolation linéaire entre les nœuds adjacents :

$$\varphi_e = \frac{\varphi_P + \varphi_E}{2} \quad \text{et} \quad \varphi_w = \frac{\varphi_W + \varphi_P}{2} \quad (\text{A-5})$$

Les flux diffusifs sont approximés par :

$$\left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e = \Gamma_e \frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x_{PE}} \quad \text{et} \quad \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w = \Gamma_w \frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta x_{WP}} \quad (\text{A-6})$$

Bien que précis à l'ordre 2, ce schéma peut générer des oscillations non physiques pour des écoulements à nombre de Péclet élevé.

#### A.2.4 Schéma Upwind (UPS) :

Le schéma Upwind tient compte de la direction de l'écoulement en utilisant la valeur de  $\phi$  au nœud situé en amont de la face :

$$\text{Pour un flux positif } (u_w > 0 \text{ et } u_e > 0) : \phi_e = \phi_P \text{ et } \phi_w = \phi_W \quad (\text{A-7})$$

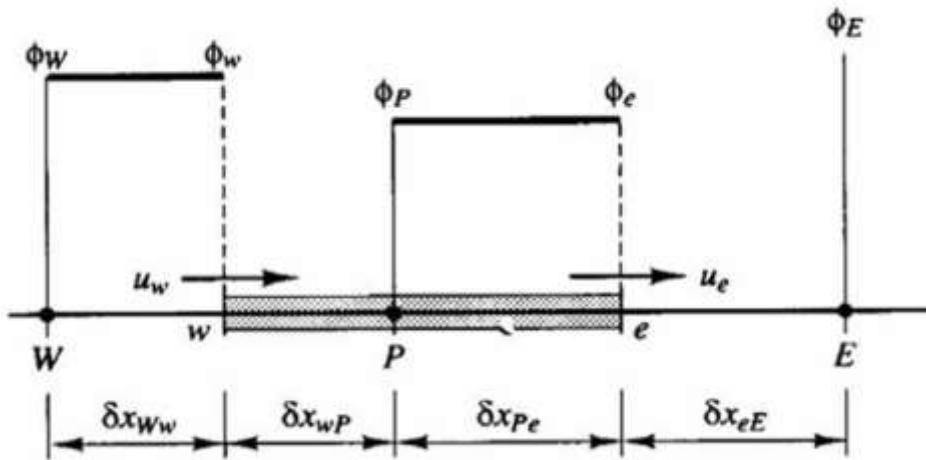


Figure A-3 :  $u_W > 0$  et  $u_e > 0$ .

Pour un flux négatif ( $u_W < 0$  et  $u_e < 0$ ) :  $\phi_e = \phi_E$  et  $\phi_w = \phi_P$  (A-8)

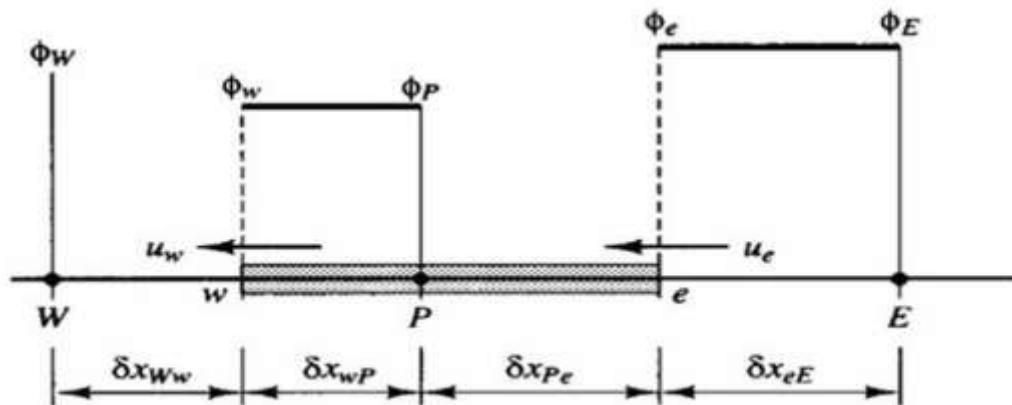


Figure A-4 :  $u_W < 0$  et  $u_e > 0$ .

Ce schéma est inconditionnellement stable mais seulement précis à l'ordre 1, ce qui introduit de la diffusion numérique.

#### A.2.5 Schéma hybride (HDS) :

Le schéma hybride combine les avantages des schémas CDS et Upwind en fonction du nombre de Péclet local  $P_e = u \delta.x / \Gamma$ , qui quantifie l'importance relative des phénomènes convectifs par rapport aux phénomènes diffusifs:

$$\phi_e = \alpha_e \phi_P + (1 + \alpha_e) \phi_E \quad (\text{A-9})$$

$$\phi_w = \alpha_w \phi_W + (1 + \alpha_w) \phi_P \quad (\text{A-10})$$

Avec :

- $\alpha_i = 0$  Si  $P_e < -2$  (schéma Upwind)
- $\alpha_i = 1/2$  Si  $|P_e| \leq 2$  (schéma aux différences centrées)
- $\alpha_i = 1$  Si  $P_e > 2$  (schéma Upwind)

#### **A.2.6 Schéma à loi de puissance (PLDS) :**

Le schéma à loi de puissance offre une approximation plus précise pour les problèmes à convection dominante. Il est basé sur la solution exacte de l'équation de convection-diffusion unidimensionnelle :

$$\frac{d}{dx}(\rho u \phi) = \frac{d}{dx}\left(\Gamma \frac{d\phi}{dx}\right) \quad (\text{A-11})$$

La solution exacte de cette équation est donnée par :

$$\frac{\phi(x) - \phi_0}{\phi_1 - \phi_0} = \frac{\exp(Pe^x/1)}{\exp(Pe^x) - 1} \quad (\text{A-12})$$

$$\text{Telle que : } \begin{cases} \phi_0 = \phi(x = 0) \\ \phi_1 = \phi(x = 1) \end{cases} \quad (\text{A-13})$$

Où :

$Pe = ul/\Gamma$  : le nombre de Péclet.

Ce schéma approxime cette solution par une fonction polynomiale, offrant ainsi un meilleur compromis entre précision et stabilité que les schémas précédents.

#### **A.3 Discrétisation temporelle :**

Pour les problèmes instationnaires, la discrétisation temporelle des équations est également nécessaire. Considérons l'intégrale temporelle suivante :

$$\int_t^{t+\Delta t} \phi p dt = [\theta \phi_P^1 + (1 - \theta) \phi_P^0] \Delta t \quad (\text{A-14})$$

En fonction de la valeur du paramètre ( $\theta$ ), différents schémas temporels peuvent être obtenus :

##### **A.3.1 Schéma explicite ( $\theta = 0$ ) :**

Dans ce schéma, toutes les valeurs de  $\phi_P^0$  dans le second membre de l'équation sont évaluées à l'instant  $t + \Delta t$ :

$$\int_t^{t+\Delta t} \phi p dt = \phi_P^0 \Delta t \quad (\text{A-15})$$

Ce schéma est simple à mettre en œuvre mais soumis à des restrictions de stabilité (condition CFL).

### A.3.2 Schéma implicite ( $\theta = 1$ ) :

Dans ce schéma, toutes les valeurs  $\phi_P^1$  de sont évaluées à l'instant  $t + \Delta t$  :

$$\int_t^{t+\Delta t} \phi p dt = \phi_P^1 \Delta t \quad (\text{A-16})$$

Ce schéma est inconditionnellement stable mais nécessite la résolution d'un système d'équations à chaque pas de temps.

### A.3.3 Schéma de Crank-Nicolson ( $\theta = 1/2$ ) :

Ce schéma utilise une moyenne des valeurs aux instants  $t$  et  $\Delta t$  :

$$\int_t^{t+\Delta t} \phi p dt = \frac{1}{2} (\phi_P^1 + \phi_P^0) \Delta t \quad (\text{A-17})$$

Il offre une précision à l'ordre 2 en temps et une meilleure stabilité que le schéma explicite. Après discrétisation spatiale et temporelle, l'équation de transport prend la forme algébrique suivante :

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + b \quad (\text{A-18})$$

Ou, de manière plus compacte :

$$a_P \phi_P = \sum_{nb} a_{nb} \phi_{nb} + b \quad (\text{A-19})$$

Où (n, b) désigne les nœuds voisins (E, W, N, S) et (b) contient les termes sources et les contributions du pas de temps précédent.

## A.4 Traitement du Couplage Pression-Vitesse :

### A.4.1 Problématique du couplage pression-vitesse :

Dans les équations de Navier-Stokes pour un fluide incompressible, la pression n'apparaît pas explicitement dans l'équation de continuité, qui impose uniquement la condition de divergence nulle du champ de vitesse. Cette absence directe de la pression engendre une difficulté majeure pour déterminer simultanément les champs de vitesse et de pression. Afin de résoudre ce problème de couplage, plusieurs algorithmes ont été développés. Parmi eux, l'algorithme SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations) est l'un des plus largement utilisés dans le cadre

de la méthode des volumes finis. Cet algorithme propose une stratégie itérative permettant de corriger progressivement les champs de vitesse et de pression afin de satisfaire à la fois les équations de quantité de mouvement et la contrainte d'incompressibilité.

#### **A.4.2 Maillage décalé :**

Pour éviter les oscillations non physiques du champ de pression, une approche courante consiste à utiliser un maillage décalé où :

- La composante de vitesse  $u$  (selon l'axe  $x$ ) est évaluée au centre des faces est et ouest des volumes de contrôle de pression.
- La composante de vitesse  $v$  (selon l'axe  $y$ ) est évaluée au centre des faces nord et sud de ces volumes.
- Les grandeurs scalaires telles que la pression  $p$ , la température  $T$ , et la concentration  $C$  sont évaluées au centre des volumes de contrôle

Cette configuration permet un couplage naturel entre la pression et la vitesse et évite les problèmes liés au découplage "damier" (checkerboard pattern).

#### **A.4.3 Algorithme SIMPLE :**

L'algorithme SIMPLE est une procédure itérative permettant de résoudre le couplage pression-vitesse dans les écoulements incompressibles. Ses principales étapes sont :

- **Estimation du champ de pression :** On part d'un champ de pression estimé  $p^*$
- **Résolution des équations de quantité de mouvement :** À partir de ce champ de pression, on résout les équations de quantité de mouvement discrétisées pour obtenir les composantes de vitesse estimées  $u$  et  $v$

$$\begin{cases} a_{i,J}u_{i,J}^* = \sum a_{nb}u_{nb}^* + (p_{I-1,J} - p_{I,J}^*)A_{i,J} + b_{i,J} \\ a_{I,j}u_{I,j}^* = \sum a_{nb}v_{nb}^* + (p_{I,J-1} - p_{I,J}^*)A_{I,j} + b_{I,j} \end{cases} \quad (A-20)$$

- **Calcul de la correction de pression :** On définit des corrections pour la pression et les vitesses :

$$p = p^* + p'u = u^* + u'v = v^* + v' \quad (A-21)$$

## Annexes

---

En substituant ces expressions dans les équations de quantité de mouvement et l'équation de continuité, et en négligeant certains termes de couplage, on obtient des expressions pour les corrections de vitesse :

$$u'_{i,J} = (p'_{I-1,J} - p'_{I,J})d_{i,J} \quad v'_{I,j} = (p'_{I,J-1} - p'_{I,J})d_{I,j} \quad (\text{A-22})$$

où les coefficients  $d_{i,J}$  et  $d_{I,j}$  sont donnés par :

$$d_{i,J} = \frac{A_{i,J}}{a_{i,J}} \quad , \quad d_{I,j} = \frac{A_{I,j}}{a_{I,j}} \quad (\text{A-23})$$

- **Résolution de l'équation de correction de pression** : En substituant les expressions des corrections de vitesse dans l'équation de continuité discrétisée, on obtient une équation pour la correction de pression :

$$a_{I,J}p'_{I,J} = a_{I+1,J}p'_{I+1,J} + a_{I-1,J}p'_{I-1,J} + a_{I,J+1}p'_{I,J+1} + a_{I,J-1}p'_{I,J-1} + b'_{I,J} \quad (\text{A-24})$$

- **Correction des champs de pression et de vitesse** : Une fois la correction de pression calculée, on met à jour les champs de pression et de vitesse :

$$p = p^* + \alpha_p p' u = u^* + u' v = v^* + v' \quad (\text{A-25})$$

Où :  $\alpha_p$  est un facteur de sous-relaxation pour stabiliser la convergence.

- **Résolution des autres équations de transport** : On résout les équations pour les autres variables scalaires (température, concentration).
- **Vérification de la convergence** : Si les critères de convergence ne sont pas satisfait, on retourne à l'étape 2 en utilisant les champs mis à jour comme nouvelles estimations.

Cet algorithme est particulièrement efficace pour les écoulements à faible nombre de Reynolds, mais peut nécessiter de nombreuses itérations pour converger dans le cas d'écoulements plus complexes.

### A.5. Résolution des Systèmes d'Équations :

La discrétisation des équations de conservation par la MVF conduit à un système d'équations algébriques linéaires devant être résolu numériquement. La taille et la structure de ce système dépendent de la dimensionnalité du problème et du nombre de nœuds du maillage.

#### **A.5.1 Méthodes directes et itératives :**

Les méthodes de résolution des systèmes d'équations linéaires peuvent être classées en deux catégories:

- **Méthodes directes:** Inversion de matrice, factorisation LU, élimination de Gauss. Ces méthodes fournissent une solution exacte (aux erreurs d'arrondi près) en un nombre fini d'opérations, mais leur coût de calcul peut devenir prohibitif pour des systèmes de grande taille.
- **Méthodes itératives:** Jacobi, Gauss-Seidel, méthodes du gradient conjugué. Ces méthodes partent d'une solution initiale qui est progressivement améliorée. Elles sont généralement moins coûteuses que les méthodes directes pour des systèmes de grande taille, mais leur convergence n'est pas toujours garantie.

#### **A.5.2 Algorithme TDMA (Tri-Diagonal Matrix Algorithm) :**

La méthode des volumes finis appliquée à des problèmes multidimensionnels conduit souvent à des systèmes d'équations ayant une structure particulière. En utilisant une approche de balayage ligne par ligne, ces systèmes peuvent être résolus efficacement à l'aide de l'algorithme TDMA (également connu sous le nom d'algorithme de Thomas).

Considérons un système tridiagonal de la forme :

$$-\beta_j \phi_{j-1} + D_j \phi_j - \alpha_j \phi_{j+1} = C_j \quad \text{pour } j = 2, 3, \dots, n \quad (\text{A-26})$$

Avec  $\phi_1$  et  $\phi_{n+1}$  connus (conditions aux limites).

L'algorithme TDMA procède en deux étapes :

**1. Marche avant (élimination) :** On transforme le système en une forme récursive :

$$\phi_j = A_j \phi_{j+1} + C'_j \quad \text{pour } j = 1, 2, \dots, n \quad (\text{A-27})$$

où les coefficients  $A_j$  et  $C'_j$  sont calculés par:

## Annexes

---

$$A_j = \frac{\alpha_j}{D_j - \beta_j A_{j-1}} \quad \text{et} \quad C'_j = \frac{\beta_j C'_{j-1} + C_j}{D_j - \beta_j A_{j-1}} \quad (\text{A-28})$$

avec les valeurs initiales  $A_1 = 0$  et  $C'_1 = \emptyset_1$

**2. Marchearrière (substitution) :** Connaissant  $\emptyset_{n+1}$  on calcule uccessivement  $\emptyset_n$ ,  $\emptyset_{n-1}$ , ...,  $\emptyset_2$  à l'aide de la relation:

$$\emptyset_j = A_j \emptyset_{j+1} + C'_j \quad (\text{A-29})$$

Cet algorithme est direct pour les problèmes unidimensionnels, mais peut être utilisé de manière itérative pour résoudre des problèmes multidimensionnels en balayant le domaine ligne par ligne ou plan par plan.

## Résumé

### Simulation numérique de la convection double diffusive dans un espace confiné

Ce mémoire présente une étude numérique de la convection mixte doublement diffusive dans une géométrie annulaire composée d'un cylindre intérieur rotatif avec ailettes. En utilisant le logiciel ANSYS Fluent basé sur la méthode des volumes finis, nous avons analysé l'effet des paramètres adimensionnels majeurs tels que les nombres de Grashof, Reynolds, Lewis, et le rapport de flottabilité (N) sur les transferts de chaleur (Nusselt) et de masse (Sherwood). Les résultats montrent l'impact crucial du couplage thermo-solutal, de la rotation, et de la présence d'ailettes sur l'efficacité des transferts. Ce travail contribue à l'optimisation des systèmes énergétiques à géométries complexes.

**Mots-clés** : convection mixte, double diffusion, Nusselt, Sherwood, ailettes, transfert thermique, transfert de masse.

## Abstract

### Numerical Simulation of Double-Diffusive Convection in a Confined Space

This thesis presents a numerical investigation of double-diffusive mixed convection in an annular geometry with a rotating inner cylinder equipped with fins. Using ANSYS Fluent and the finite volume method, we analyzed the impact of key dimensionless numbers such as Grashof, Reynolds, Lewis, and the buoyancy ratio (N) on heat (Nusselt) and mass (Sherwood) transfer. Results underline the critical role of thermo-solutal coupling, rotation, and the use of fins in improving transfer efficiency. This work supports the optimization of complex energy systems.

**Keywords:** mixed convection, double diffusion, Nusselt, Sherwood, fins, thermal transfer, mass transfer.

## الملخص

### المحاكاة العددية للحمل الحراري ذو الانتشار المزدوج في حيز مغلق

يعرض هذا البحث دراسة عددية لظاهرة الحمل المختلط ذو الانتشار المزدوج في هندسة حلقة تحتوي على أسطوانة داخلية دوارة مزودة بزعنفة. باستخدام برنامج ANSYS Fluent وتقنية حجوم التحكم، قمنا بتحليل تأثير الأعداد اللا بعدية المهمة مثل Grashof، Reynolds، Lewis ونسبة الطفو (N) على انتقال الحرارة (Nusselt) وانتقال المادة (Sherwood). توضح النتائج الدور الأساسي للاقتران الحراري-الكتلي، وتأثير الدوران والزعناف على كفاءة النقل. يسهم هذا العمل في تحسين أداء الأنظمة الحرارية المعقدة.

**الكلمات المفتاحية:** حمل مختلط، انتشار مزدوج، ANSYS Fluent، Grashof، عدد Lewis، عدد Nusselt، عدد Reynolds، زعناف، انتقال حراري، انتقال كتلي.