

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABDERRAHMANE MIRA BEJAIA

FACULTE DE TECHNOLOGIE

DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de

MASTER

Filière : Génie Mécanique

Spécialité : Construction Mécanique

Par :

Nom prénom AISSANI Habib

Nom Prénom REBAI Cherif

Thème

Etude comparative des modèles hyper-élastiques pour l'optimisation de l'épaisseur des cylindres sous pression

Soutenu le 24/05/2025 devant le jury composé de :

M.YAYA Kamel

Président

Mme. BOUZIDI Safia

Rapporteur

M. METHIA Mounir

Examineur

Année Universitaire 2024-2025

Populaire et Démocratique Algérienne République

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



Déclaration sur l'honneur

Engagement pour respecter les règles d'authenticité scientifique dans l'élaboration d'un travail de recherche

Arrêté ministériel n° 1082 du 27 décembre 2020 (*)

fixant les règles relatives à la prévention et la lutte contre le plagiat

Je soussigné,

Nom : REBAI
Prénom : Cherif
Matricule : 202033006023
Spécialité et/ou Option : Construction Mécanique
Département : Génie Mécanique
Faculté : Science et Technologie
Année universitaire : 2024/2025

et chargé de préparer un mémoire de (*Licence, Master, Autres à préciser*) : Master.

Intitulé : Etude comparative des modèles hyper-élastiques pour l'optimisation de l'épaisseur des cylindres sous pressions.

Déclare sur l'honneur, m'engager à respecter les règles scientifiques, méthodologiques, et les normes de déontologie professionnelle et de l'authenticité académique requises dans l'élaboration du projet de fin de cycle cité ci-dessus.

Fait à Bejaia le
09/07/2025

REBAI Cherif
(*) Lu et approuvé

Populaire et Démocratique Algérienne République

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



Déclaration sur l'honneur

Engagement pour respecter les règles d'authenticité scientifique dans l'élaboration d'un travail de recherche

Arrêté ministériel n° 1082 du 27 décembre 2020 ()*

fixant les règles relatives à la prévention et la lutte contre le plagiat

Je soussigné,

Nom : AISSANI
Prénom : Habib
Matricule : 202033006346
Spécialité et/ou Option : Construction Mécanique
Département : Génie Mécanique
Faculté : Science et Technologie
Année universitaire : 2024/2025

et chargé de préparer un mémoire de (*Licence, Master, Autres à préciser*) : Master.

Intitulé : Etude comparative des modèles hyper-élastiques pour l'optimisation de l'épaisseur des cylindres sous pressions.

Déclare sur l'honneur, m'engager à respecter les règles scientifiques, méthodologiques, et les normes de déontologie professionnelle et de l'authenticité académique requises dans l'élaboration du projet de fin de cycle cité ci-dessus.

Fait à Bejaia le
09/07/2025

AISSANI Habib
(*) Lu et approuvé

Remerciements

Avant toute chose, nous rendons grâce à Dieu le Tout-Puissant, qui nous a offert la patience, la force et la persévérance nécessaires pour mener à bien ce travail.

La réalisation de ce mémoire de fin d'études marque l'aboutissement d'un parcours riche en apprentissages, en défis et en expériences humaines. Ce travail n'aurait pas pu voir le jour sans le soutien, les conseils et l'accompagnement de nombreuses personnes, à qui nous tenons à exprimer notre profonde gratitude.

Nous tenons à remercier sincèrement notre encadrante Mlle BOUZIDI Safia, pour sa disponibilité, ses orientations pertinentes, et ses encouragements tout au long de ce projet.

*Nos pensées les plus sincères vont également à nos familles respectives :
À nos mères et nos pères, pour leur amour inconditionnel, leurs prières, leur patience et leur soutien constant, sans lesquels rien n'aurait été possible.*

À nos frères et sœurs, pour leurs encouragements et leur présence bienveillante à chaque étape de notre parcours.

Nous exprimons aussi notre reconnaissance à nos enseignants, pour la qualité de l'enseignement reçu durant toutes ces années, ainsi qu'à l'ensemble du personnel pédagogique et administratif de département génie mécanique.

Enfin, un grand merci à nos amis, camarades de promotion, et à toutes les personnes qui, de près ou de loin, ont contribué à la réussite de ce mémoire.

À tous, merci du fond du cœur.

Habib et Cherif

Dédicaces

Grâce à Dieu, le Tout-Puissant, qui nous a tracé la voie et nous a donné la force ainsi que le courage d'aller jusqu'au bout, C'est avec une immense joie, un cœur reconnaissant et un profond plaisir que nous avons achevé la réalisation de ce modeste travail, que nous tenons à dédier chaleureusement :

À ceux qui occupent la place la plus précieuse dans nos cœurs :

À nos chères mères et à nos chers pères, qui n'ont jamais cessé de prier pour nous, de nous soutenir et de nous encourager dans la poursuite de nos objectifs.

À nos frères et sœurs, pour leur présence constante, leurs encouragements sincères et leur soutien indéfectible.

À nos amis, ainsi qu'à toutes les personnes qui, de près ou de loin, ont Contribué à l'aboutissement de ce travail.

Merci à chacun d'entre vous.

Habib et Cherif

Table des matières	
Introduction générale.....	1
Introduction	3
I.1. Notion fondamentale [1]	3
I.1.1. Signification du terme polymère	3
I.1.2. La macro moléularité.....	3
I.2.Présentation des élastomères [2] [3]	3
I.3. Comportement mécanique des élastomères [4], [5].....	4
I.3.1. Elasticité non- linéaire.....	4
I.3.2 Viscoélasticité [6].....	7
I.3.3 Incompressibilité [3]	7
I.3.4 Effet Mullin [6]	8
I.3.5 Effet Payne [7]	9
Conclusion.....	9
Introduction	10
II.1 Rappels de la mécanique des milieux continus en grandes déformations	10
II.1.1 Cinématique [8]	10
II.1.2 Description du mouvement [9]	10
II.1.3 Description des déformations [9].....	12
II.1.4 Description des contraintes [10] :	12
II.2 Modélisation du comportement [11]	14
II.2.1 Loi de comportement hyper-élastique [12].....	15
II.3 Les modèles hyper élastiques	16
II.3.1 Modèle néo-Hookéen (1943) [8]	16
II.3.2 Modèle de Mooney Rivlin [7].....	16
II.3.3 Modèle d'Ogden (1972) [12]	17
II.3.4 Modèle de Yeoh [13]	17
Conclusion.....	17
Introduction	19
III.1 Etude analytique	19
Modèle de <i>Mooney Rivlin</i>	23
Modèle <i>néo-Hookéen</i>	24
III.2 : Etude Numérique	27
III.2.1 : Construction du modèle numérique.....	27
III.2.1.1 Choix du modèle de comportement.....	27

III.2.1.2 Présentation de la géométrie	27
III.2.1.3 Le maillage	28
III.2.2.4 Chargements et conditions aux limites	29
III.2.2.5 : Résultats de la simulation numérique	29
III.2.2.5.1 Pour une pression interne égale à 0.1 MPa.....	33
III.2.2.5.2 Pour une pression externe égale à 0.1 MPa	38
Conclusion.....	42
Conclusion générale	42
Références bibliographique.....	43

Liste des figures

Liste des figures chapitre 1

Figure I.1 : Représentation schématique d'une chaîne et d'un réseau élastomère [3].....	4
Figure I.2 : Courbe de traction à rupture [4]	5
Figure I.3 : Essai de traction de type charge/décharge [4]......	6
Figure I.4 : Représentation de l'Effet Mullins.	8
Figure II.1 : Configurations initiale et déformée.	11
Figure II.2 : Domaine d'application de chaque domaine.....	15
Figure III.1.a : Distribution de la contrainte radiale en fonction de $Q^{(-1)}$ pour différentes valeurs de η ($\lambda_a=1.3, P_e=0 \text{ MPa}, C_{10}=0.162 \text{ MPa}, C_{01}=0.0059 \text{ MPa}$)	25
Figure III.1.b : Distribution de la contrainte radiale en fonction de $Q^{(-1)}$ pour différentes valeurs de η ($\lambda_a=1.3, P_e=0.1 \text{ MPa}, C_{10}=0.162 \text{ MPa}, C_{01}=0.0059 \text{ MPa}$)	26
Figure III.2 : Modèle étudié.....	27
Figure III.3 : Modèle maillé.	28
Figure III.4 : Chargements et conditions aux limites. (a) Pression externe, (b) pression interne.	29
Figure III.5 : Distribution des contraintes circonférentielles. ($P_i=0.1 \text{ MPa}, e=80 \text{ mm}$).....	30
Figure III.6 : Distribution des contraintes radiale ($P_i=0.1 \text{ MPa}, e=80 \text{ mm}$).	30
Figure III.7 : Distribution des contraintes Von Mises ($P_i=0.1 \text{ MPa}, e=80 \text{ mm}$).....	31
Figure III.8 : Distribution des contraintes Axiales ($P_i=0.1 \text{ MPa}, e=80 \text{ mm}$).	31
Figure III.9 : Distribution des contraintes radiale ($P_e=0.1 \text{ MPa}, e=80 \text{ mm}$).....	32
Figure III.10 : Distribution des contraintes circonférentielles. ($P_e=0.1 \text{ MPa}, e=80 \text{ mm}$).....	32
Figure III.11 : Distribution des contraintes Von Mises ($P_i=0.1 \text{ MPa}, e=80 \text{ mm}$).....	33
Figure III.12 : Distribution des contraintes Axiales ($P_e=0.1 \text{ MPa}, e=80 \text{ mm}$).	33
Figure III.13.a : Distribution des contraintes radiales pour les deux modèles pour une pression interne $P_i=0.1 \text{ MPa}$ (MR —, NH —.).....	34
Figure III.13.b : Distribution des contraintes circonférentielles pour les deux modèles pour une pression interne $P_i=0.1 \text{ MPa}$ (MR —, NH —.).....	35
Figure III.13.c : Distribution des contraintes axiales pour les deux modèles pour une pression interne $P_i=0.1 \text{ MPa}$ (MR —, NH —.).....	36
Figure III.13.d : Distribution des contraintes de Von Mises pour les deux modèles pour une pression interne $P_i=0.1 \text{ MPa}$, (MR —, NH —.).....	37
Figure III.14.a : Distribution des contraintes radiales pour les deux modèles pour une pression externe $P_e=0.1 \text{ MPa}$, (MR —, NH —.).....	39
Figure III.14.b : Distribution des contraintes circonférentielles pour les deux modèles pour une pression externe $P_e=0.1 \text{ MPa}$, (MR —, NH —.).....	40
Figure III.14.c : Distribution des contraintes axiales pour les deux modèles pour une pression externe $P_e=0.1 \text{ MPa}$, (MR —, NH —.).....	41
Figure III.14.d : Distribution des contraintes de Von Mises pour les deux modèles pour une pression externe $P_e=0.1 \text{ MPa}$, (MR —, NH —.).....	42

Liste des tableaux

Tableau 1 : Récapitulatif des différents tenseurs de contraintes et de déformations dans les deux configurations initiales et actuelle.	14
Tableau 2 : Données utilisées pour la simulation numérique.	28
Tableau 3 : Paramètres des deux modèles pour les données expérimentales de Treloar.....	29

Nomenclatures

(C_0) : Configuration initiale ;

(c_t) : Configuration actuelle ;

(Ω_0) : Volume occupé par le solide dans la configuration initiale ;

(Ω) : Volume occupé par le solide dans la configuration actuelle ;

\overrightarrow{dX} : Vecteur élémentaire dans la configuration initiale ;

\overrightarrow{dx} : Transformation de d 1 dans la Configuration actuelle ;

\mathbf{F} : Opérateur gradient de la transformation

\mathbf{F}^T : Transposé opérateur gradient de la transformation

\mathbf{C} : Tenseur des déformations Green-Lagrange droit ;

\mathbf{E} : Tenseur des déformations Green-Lagrange ;

\mathbf{B} : Tenseur des déformations Green-Lagrange gauche ;

\mathbf{A} : Tenseur des déformations d'Euler-Almansi ;

$\boldsymbol{\sigma}$: Tenseur des contraintes de Cauchy ;

$\boldsymbol{\pi}$: Premier Tenseur de Poila-Kirchhoff (P.K.1) ;

\mathbf{S} : Deuxième Tenseur de Poila-Kirchhoff (P.K.2) ;

\mathbf{I} : Tenseur d'identité ;

W : Potentiel élastique ;

μ_0 : Module de cisaillement du matériau ;

D : Module d'incompressibilité de matériau ;

I_1 : Premier invariant du tenseur des déformations de Green-Lagrange gauche \mathbf{B} ;

I_2 : Premier invariant du tenseur des déformations de Green-Lagrange gauche \mathbf{B} ;

P : Pression hydrostatique ;

ν : Coefficient de Poisson ;

Introduction générale

Les matériaux hyper-élastiques occupent une place de plus en plus importante dans les domaines industriels et biomédicaux, en raison de leur capacité à subir de grandes déformations réversibles. Ces matériaux, tels que les caoutchoucs ou certains tissus biologiques, se caractérisent par un comportement mécanique fortement non linéaire, nécessitant des modèles constitutifs spécifiques pour une description réaliste de leur réponse.

Parmi les géométries fréquemment rencontrées dans les structures souples, le cylindre creux soumis à une pression interne ou externe constitue une configuration de référence. On le retrouve dans de nombreuses applications telles que les tuyaux flexibles, les chambres à air ou encore les implants médicaux. Dans ce contexte, la modélisation du comportement d'un cylindre hyper-élastique sous pression représente un enjeu essentiel pour la conception et l'optimisation des dispositifs souples.

Plusieurs modèles de comportement sont proposés dans la littérature, notamment ceux de néo-hookéen et de Mooney-Rivlin, chacun reposant sur des hypothèses propres et répondant à des domaines de validité spécifiques. Cela soulève une question fondamentale :

Quel modèle permet de mieux représenter la réalité physique du matériau pour une application donnée ?

La problématique de ce mémoire peut donc être formulée comme suit :

Comment les différents modèles de comportement hyper-élastique influencent-ils la prédiction de la distribution des contraintes dans un cylindre soumis à une pression de ?

L'objectif principal de ce travail est de réaliser une étude comparative de deux modèles hyper-élastiques appliqués à un cylindre creux soumis à une pression, afin d'analyser les différences de comportement prédites par chaque modèle. Pour cela, nous nous appuierons à la fois sur des approches analytiques et des simulations numériques réalisées à l'aide d'un logiciel de calcul par éléments finis.

La démarche adoptée dans ce mémoire s'articule autour des étapes suivantes :

- Présentation des lois de comportement hyper-élastique les plus courantes ;
- Définition du cas d'étude (géométrie, conditions aux limites, chargement) ;
- Résolution analytique du problème posé ;
- Simulation numérique par éléments finis ;
- Analyse comparative des résultats et discussion des écarts observés.

Ce mémoire est structuré comme suit :

- Le premier chapitre présente des généralités sur les élastomères,
- Le deuxième chapitre expose le cadre théorique des matériaux hyper-élastiques ainsi que les modèles choisis,
- Le troisième chapitre est consacré à l'analyse analytique et numérique, ainsi qu'à la comparaison des résultats obtenus ;
- Enfin, une conclusion générale résume les principaux résultats obtenus.

Chapitre 1 : Généralités sur les élastomères

Introduction

Les élastomères, appartenant à la famille des polymères, regroupent l'ensemble des caoutchoucs, qu'ils soient naturels ou synthétiques, caractérisés par leur élasticité dite "caoutchoutique". Dans ce chapitre, nous aborderons les propriétés essentielles de ces matériaux, qui justifient leur large emploi dans de nombreux secteurs industriels.

I.1. Notion fondamentale [1]

I.1.1. Signification du terme polymère

Etymologiquement, le terme "polymère" provient de deux mots grecs : « polus », signifiant "nombreux" ou "plusieurs", et « meros », qui désigne des "parties" ou "unités". En chimie, ce concept est parfois assimilé à celui de macromolécule [1].

I.1.2. La macro molécularité

D'origine naturelle ou synthétique, les polymères organiques sont des matériaux constitués de chaînes moléculaires principalement formées d'atomes de carbone. Ces structures, qualifiées de macromolécules, résultent de la répétition covalente de motifs moléculaires organiques (monomères), conduisant à des édifices polymériques de haute masse molaire [1].

I.2. Présentation des élastomères [2] [3]

Elastomère : le préfixe « élasto » rappelle les grandes déformations élastiques possibles, tandis que le suffixe « mère » évoque leur nature de polymère et donc leur structure macromoléculaire [2]

Les élastomères constitués de longues chaînes liées entre elles avec des liaisons covalentes occasionnelles, des points de réticulations et des points d'enchevêtrement. Une chaîne est un assemblage de molécule monomère jointe par un squelette covalent d'atome de Carbone.

Elle est généralement composée de milliers de monomères. A une échelle intermédiaire, le matériau peut être vu comme une pelote statistique où les chaînes sont dans une position très remplies et où les points de jonction (réticulation et enchevêtrement) forment des nœuds entre

les chaînes. La représentation symbolique d'une chaîne et du réseau élastomère est présentée dans la figure ci-dessous [3]

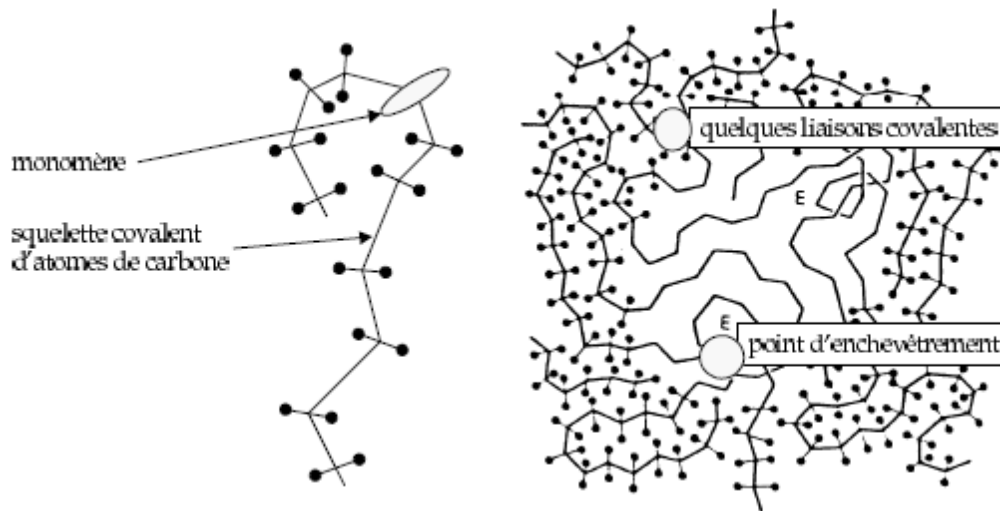


Figure I.1 : Représentation schématique d'une chaîne et d'un réseau élastomère [3].

Le caoutchouc naturel non transformé est un hydrocarbure constitué de molécules d'isoprène (C_5H_8) répétées.

La vulcanisation est un traitement chimique qui crée des liaisons entre les différentes chaînes de polymères, formant ainsi une structure en réseau solide et stable.

Lorsqu'ils sont soumis à des forces extérieures, les élastomères peuvent s'étirer considérablement tout en supportant d'importantes déformations sans se rompre.

I.3. Comportement mécanique des élastomères [4], [5]

Les élastomères présentent un comportement mécanique complexe dont la modélisation complète reste un défi scientifique. Dans ce qui suit, nous analyserons cette complexité et examinerons l'origine de leurs propriétés caractéristiques.

I.3.1. Elasticité non- linéaire

La propriété fondamentale des élastomères réside dans leur aptitude à supporter des déformations exceptionnelles. À titre d'illustration, les caoutchoucs naturels présentent une extensibilité remarquable, pouvant atteindre un allongement de 1000% avant rupture [4].

La figure I.2 illustre le comportement mécanique d'un élastomère soumis à un essai de traction.

La courbe obtenue met en évidence :

- Un comportement mécanique non linéaire
- Une déformation à rupture avoisinant 600% [4]

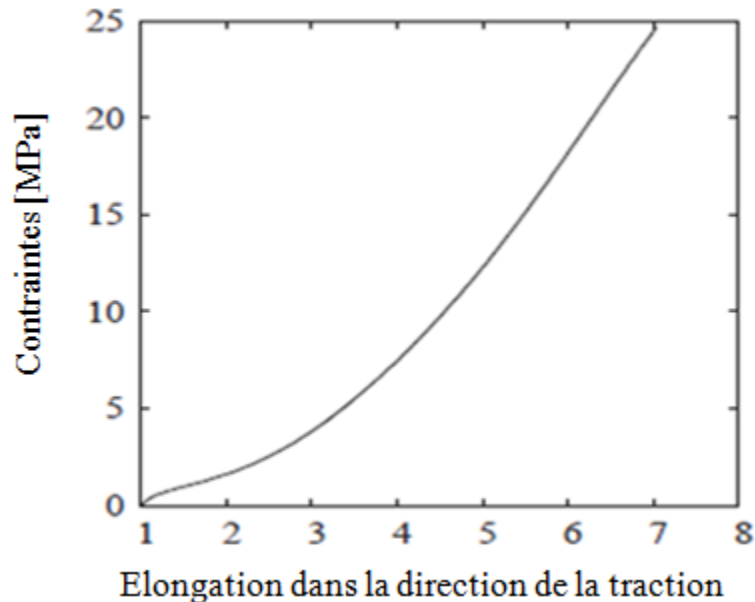


Figure I.2 : Courbe de traction à rupture [4]

Deuxième caractéristique : Non-linéarité du comportement le comportement mécanique des élastomères présente une non-linéarité prononcée. Comme nous le verrons, les modèles physiques permettent d'expliquer et de simuler cette particularité en décrivant l'évolution de la conformation des chaînes macromoléculaires. Le durcissement observé aux grandes déformations s'explique principalement par deux phénomènes :

Lorsque les chaînes macromoléculaires présentent une stéréorégularité suffisante (comme c'est le cas des caoutchoucs naturels), elles peuvent s'aligner pour former des zones cristallines ordonnées appelées cristallites. Ces structures agissent comme des charges renforçantes.

Les chaînes polymères atteignent progressivement leur extension conformationnelle maximale [4].

Troisième caractéristique : Élasticité caoutchoutique

La capacité à retrouver quasi-intégralement leur géométrie initiale après déformation constitue une propriété fondamentale des élastomères, communément appelée "élasticité caoutchoutique". Cependant, cette réversibilité parfaite n'est observée que sous deux conditions principales :

- Pour des élastomères non chargés (sans additifs de renforcement)
- Lorsque les déformations appliquées restent modérées

La figure I.3 illustre cette propriété à travers un essai de traction cyclique.

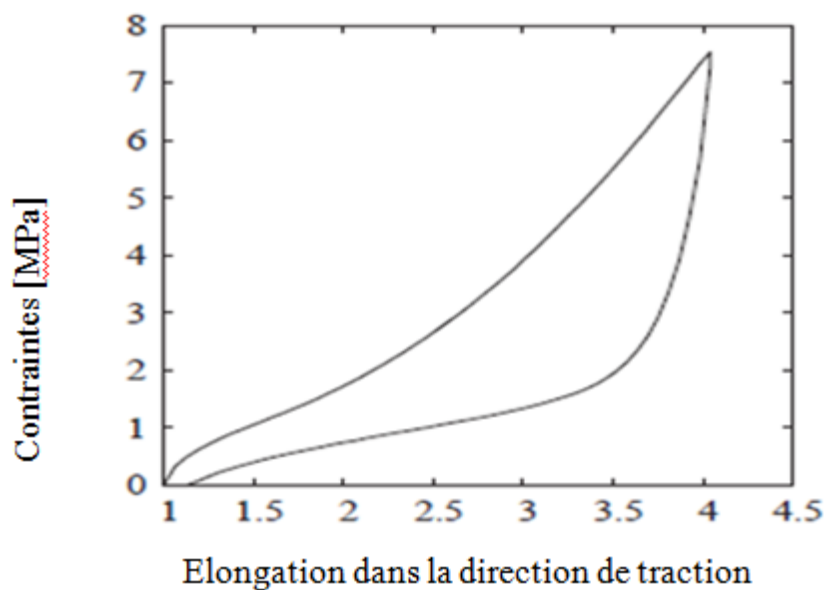


Figure I.3 : Essai de traction de type charge/décharge [4].

A l'échelle de la structure microscopique, un élastomère vulcanisé est constitué de longues chaînes moléculaires comportant des points de jonctions. Ces macromolécules forment ainsi un réseau tridimensionnel dont les segments de chaînes sont orientés de façon aléatoire. Outre ces points de jonctions de type liaisons covalentes, il existe des liaisons à très faible énergie appelées liaisons secondaires ou enchevêtrements. L'élasticité caoutchoutique est le résultat de cette faible interaction entre les macromolécules [5]. Ainsi, sous l'action d'une sollicitation mécanique, ces chaînes moléculaires peuvent glisser les unes sur les autres et changer ainsi la configuration microstructurale du réseau moléculaire qui passe d'un arrangement aléatoire à un arrangement orienté suivant la direction de sollicitation. L'élasticité caoutchoutique est donc de nature entropique [5].

I.3.2 Viscoélasticité [6]**1. Nature visqueuse et dissipation d'énergie**

Les élastomères présentent un comportement viscoélastique caractérisé par :

- Une dissipation d'énergie interne significative
- Une réponse mécanique dépendante du temps
- Une viscosité intrinsèque liée au tenseur des vitesses de déformation

Ce comportement se manifeste par :

- Une mémoire des déformations passées.
- Une dépendance des contraintes actuelles à l'histoire des sollicitations.
- Un retard dans la réponse mécanique.

2. Méthodes expérimentales de caractérisation

Deux approches complémentaires permettent d'étudier ce comportement :

a) Essais statiques :

- Fluage : étude de l'évolution temporelle de la déformation sous charge constante
- Relaxation : analyse de la diminution des contraintes à déformation imposée

b) Essais dynamiques :

- Vibrations : mesure de la réponse en fréquence sous sollicitation cyclique
- Analyse du module complexe (composantes élastique et visqueuse)

I.3.3 Incompressibilité [3]

La majorité des élastomères (ou caoutchoucs) sont considérés comme des matériaux incompressibles, c'est-à-dire qu'ils se déforment sans variation de volume. On admet ainsi que, dans des conditions de sollicitation n'impliquant pas de contraintes hydrostatiques importantes, la déformation du matériau s'effectue à volume constant. Il s'agit toutefois d'une approximation

idéale, car les essais expérimentaux montrent que les élastomères présentent en réalité une certaine compressibilité.

L'hypothèse d'incompressibilité, dans les conditions mentionnées, présente un grand intérêt sur le plan analytique, notamment pour l'interprétation des résultats expérimentaux. En revanche, cette hypothèse engendre certaines difficultés bien connues lorsqu'elle est utilisée dans des simulations numériques, notamment avec la méthode des éléments finis.

I.3.4 Effet Mullin [6]

Le comportement mécanique des élastomères chargés évolue après l'application d'une première extension. Cette dernière induit une diminution de la rigidité lors des déformations ultérieures ainsi qu'une déformation résiduelle figure I.4. Ce phénomène, connu sous le nom d'effet Mullins, peut être partiellement réversible : à température ambiante, la récupération se fait sur de longues périodes (plusieurs jours), tandis qu'à des températures proches de celle de la vulcanisation, elle peut s'effectuer en quelques heures.

Cette récupération peut s'accompagner d'une reprise de rigidité liée à la réactivation du processus de vulcanisation.

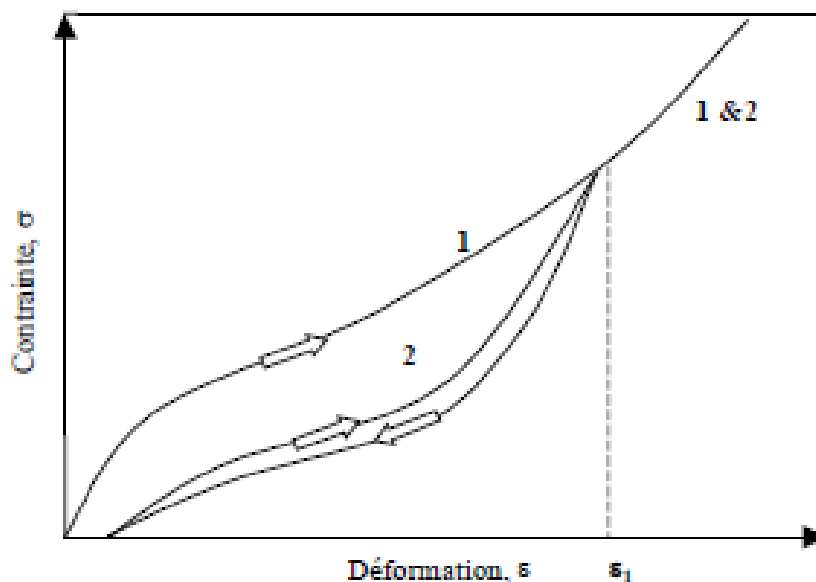


Figure I.4 : Représentation de l'Effet Mullins.

I.3.5 Effet Payne [7]

Un autre phénomène caractéristique des élastomères, mentionné ici à titre indicatif, est la variation du module complexe en fonction de l'amplitude de déformation et du taux de charges présentes dans la matrice. Ce comportement est connu sous le nom d'effet Payne. Principalement étudié dans le cadre des sollicitations vibratoires, ce phénomène dépasse le champ de notre étude et ne sera donc pas approfondi ici.

Conclusion

Cette première partie nous a permis d'introduire les notions générales relatives au comportement mécanique des élastomères. Toutefois, une compréhension approfondie des mécanismes régissant ce comportement requiert une connaissance précise de leur microstructure ainsi que des procédés de mise en œuvre associés.

Chapitre 2 : Rappels de la mécanique des milieux continus en grandes déformations

Introduction

Le comportement des matériaux soumis à de fortes sollicitations mécaniques nécessite une approche tenant compte des grandes déformations. En effet, dans le cas de matériaux élastomères ou de structures subissant des déformations importantes, l'hypothèse des petites déformations n'est plus valable. Ce chapitre présente un rappel théorique sur les grandes déformations, en abordant notamment les notions de gradient de déformation, de tenseur des déformations finies et de formulation hyper élastique. Ces concepts constituent la base des modèles utilisés dans la suite du mémoire pour la modélisation des matériaux hyper élastiques.

II.1 Rappels de la mécanique des milieux continus en grandes déformations

II.1.1 Cinématique [8]

Dans le cadre des transformations finies, il est important de distinguer la configuration initiale et la configuration actuelle (déformée). Le mouvement d'une particule d'un milieu continu peut être décrit soit dans la configuration lagrangienne, soit dans la configuration eulérienne. Les coordonnées lagrangiennes (ou matérielles) sont celles qui définissent la position du point matériel P (X_1 ; X_2 et X_3) du milieu continu (Ω), le repérage se faisant dans la configuration initiale (ou non déformée). Les coordonnées eulériennes (ou spatiales) sont celles qui définissent la position du point matériel p (x_1 ; x_2 et x_3) du milieu continu à l'instant courant, le repérage se faisant dans la configuration actuelle (ou déformée). Notons que dans le cas d'une transformation infinitésimale, les deux configurations sont confondues.

II.1.2 Description du mouvement [9]

Considérons un solide déformable S évoluant dans un repère R . Les particules p qui constituent ce solide occupent, à chaque instant, des positions spécifiques dans l'espace, comme le montre la figure II.1. Cela correspond à la configuration du système à l'instant t . Nous adopterons le même repère pour décrire à la fois la configuration initiale et celle déformée du système.

On considère C_0 la configuration initiale (ou le solide S occupe le volume Ω_1), et (C_t) la configuration actuelle à l'instant t (ou déformée), où le solide S occupe le volume ω . le vecteur position de la particule $P \in S$ à l'instant initial est noté \vec{X} . On note \vec{x} le vecteur position de cette particule à l'instant t .

Le mouvement du milieu continu est défini par la donnée de la fonction vectorielle :

$$X : \begin{cases} C_0 \rightarrow C_t \\ \vec{X} \rightarrow \vec{x} = x(X; t) \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

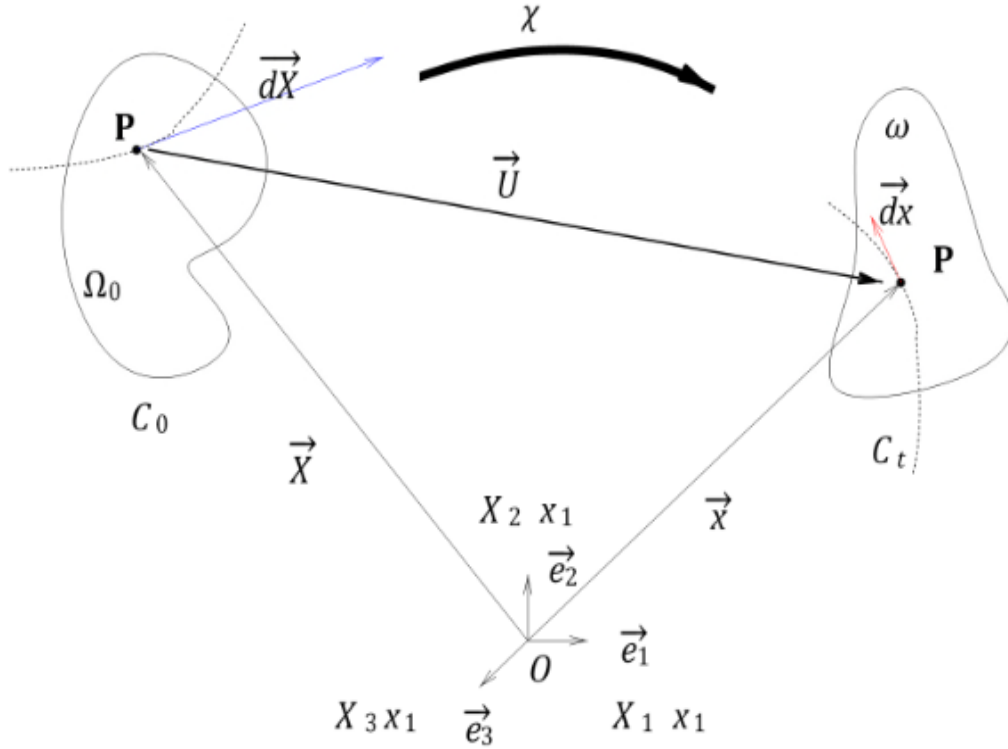


Figure II.1 : Configurations initiale et déformée.

L'équation II.1 définit la transformation qui permet de passer de la configuration de référence à la configuration actuelle (C_t). Afin de décrire la déformation près de la particule, on introduit l'application linéaire associée au mouvement, ou le tenseur tangent (figure 5).

Prenons un vecteur \vec{x} dans la configuration initiale, son image dans la configuration actuelle (C_t) peut être obtenue à l'aide de la relation (II.2) :

$$d\vec{x} = \mathbf{F}d\vec{X} \quad (\text{II.2})$$

II.1.3 Description des déformations [9]

Pour analyser les changements de forme entre les configurations c_0 et C_t , il est essentiel d'examiner les variations de longueur et d'angle, autrement dit, les variations du produit scalaire. On peut alors calculer le produit scalaire entre deux vecteurs matériels \overrightarrow{dx} et \overrightarrow{dy} , puis étudier son évolution en fonction des vecteurs dans la configuration initiale \overrightarrow{dX} et \overrightarrow{dY} . Selon la configuration de référence choisie, différentes méthodes peuvent être appliquées pour quantifier les déformations.

Description lagrangienne

Dans le cadre de la description lagrangienne, on introduit le tenseur de Cauchy-Green droit $\mathbf{C} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$, qui est un tenseur symétrique et défini positif, permettant de décrire les dilatations.

Lorsque le milieu ne subit aucune transformation $\mathbf{C} = \mathbf{I}$, on a le tenseur de déformation de Green-Lagrange, qui est entièrement lagrangien et symétrique, est en relation avec \mathbf{C} par :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I})$$

Description eulérienne

Dans le cadre de la configuration actuelle, le tenseur de Cauchy-Green gauche, défini par $\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$, est introduit. Ce tenseur est symétrique et possède la propriété d'être défini positif. Par ailleurs, le tenseur de déformation correspondant, qui traduit la modification du produit scalaire, est le tenseur d'Euler-Almansi \mathbf{A} .

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} (\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1})$$

II.1.4 Description des contraintes [10] :

Dans le cadre de la théorie des grandes déformations, on introduit les tenseurs de contraintes classiques, notamment le tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ (de description eulérienne), défini par la relation :

$$\vec{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n} \quad (\text{II.3})$$

Où \vec{t} représente le vecteur contrainte, correspondant à la force mesurée par unité de surface instantanée, appliquée sur un élément de surface \vec{df} de la configuration initiale, dont la normale extérieure est \vec{n} .

La force élémentaire \vec{df} agissant dans la configuration actuelle peut être reliée à l'élément de surface ds de la configuration initiale par la relation :

$$\vec{df} = \vec{T} ds \quad (\text{II.4})$$

Il s'agit ici d'une description mixte. Le vecteur \vec{T} désigne le vecteur contrainte de Piola-Kirchhoff I (également appelé vecteur de Boussinesq). Le tenseur de contrainte associé est le premier tenseur de Piola-Kirchhoff π , qui est un tenseur hybride, ni purement lagrangien ni purement eulérien, et qui s'exprime par :

$$\vec{df} = \vec{T} ds = \pi \cdot \vec{N} ds \quad (\text{II.5})$$

Où \vec{N} est la normale dans la configuration initiale. Notons que π n'est pas symétrique.

Pour obtenir un tenseur entièrement défini en variables lagrangiennes, on transporte la force \vec{df} agissant sur le volume actuel vers la configuration initiale non déformée

$$\vec{df}_0 = \mathbf{F}^{-1} \vec{df} \quad (\text{II.6})$$

\vec{df}_0 est une force fictive agissant sur la surface initiale. Le tenseur de Piola Kirchhoff 2 est Alors défini par :

$$\vec{df}_0 = \mathbf{S} \vec{N} ds \quad (\text{II.7})$$

\mathbf{S} est un être mathématique sans signification physique, mais il présente la particularité d'être symétrique.

Les trois tenseurs des contraintes sont reliés par la relation suivante :

$$\mathbf{J} \boldsymbol{\sigma} = \pi \cdot \mathbf{F}^T = \mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{F}^T \quad (\text{II.8})$$

$$\pi = \mathbf{F} \mathbf{S} \quad (\text{III.9})$$

$$\mathbf{J} = \det \mathbf{F} \quad (\text{II.10})$$

\mathbf{J} : le Jacobien de la transformation présentée.

Tableau 1 : Récapitulatif des différents tenseurs de contraintes et de déformations dans les deux configurations initiales et actuelle.

	Configuration (\mathbf{C}_0) initiale (libre de contraintes)	Configuration actuelle (\mathbf{C}_t)
Tenseurs des déformations	<p>C : Tenseur des dilatations de Green-Cauchy droit, symétrique.</p> <p>E: Tenseur des Déformations de Green-Lagrange, symétrique.</p>	<p>B : Tenseur des déformations de Green-Cauchy gauche, symétrique.</p> <p>A : Tenseur des Déformations d'Euler-Almansi, symétrique.</p>
Tenseurs des contraintes	S : Tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff 2, symétrique.	σ : Tenseur des contraintes de Cauchy, symétrique.

II.2 Modélisation du comportement [11]

Les élastomères sont des matériaux caractérisés par de multiples non-linéarités, ce qui rend la modélisation de leur comportement complexe et toujours d'actualité. De nombreuses théories ont été développées pour décrire ce comportement de manière précise.

Les modèles hyper élastiques, par exemple, sont particulièrement adaptés pour simuler des sollicitations quasi statiques ainsi que des déformations à très haute vitesse, permettant ainsi de reproduire fidèlement le comportement des élastomères sous grandes déformations. Par ailleurs, la dépendance à la vitesse de déformation dans le domaine des petites déformations est bien maîtrisée grâce à l'utilisation de modèles viscoélastiques linéaires.

Cependant, dans le contexte de notre étude, l'objectif est de modéliser à la fois le comportement en grandes déformations et la dépendance à la vitesse de déformation, ce qui représente un défi bien plus complexe. Les modèles employés doivent être capables de prendre

en compte la dissipation d'énergie. Pour répondre à cette problématique, nous aurons recours à des modèles viscoélastiques adaptés aux grandes déformations. La Figure II.2 reprend les différents cas de chargement possibles et les modèles associés

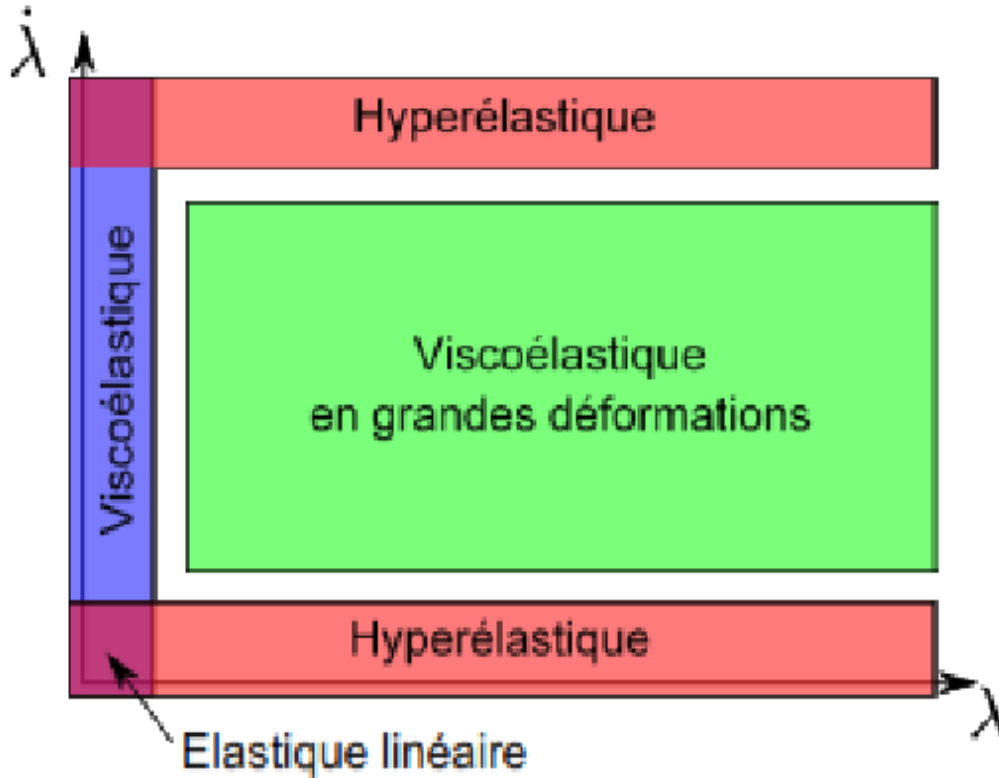


Figure II.2 : Domaine d'application de chaque domaine.

II.2.1 Loi de comportement hyper-élastique [12]

Dans l'approche phénoménologique, le matériau est traité comme un milieu continu. Son comportement mécanique est gouverné par une relation non linéaire qui relie les contraintes aux déformations. Ces contraintes sont calculées en dérivant un potentiel de déformation, noté W .

La relation entre la contrainte et la densité d'énergie de déformation est définie par l'expression suivante :

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2 \frac{\partial W}{\partial I_1} \mathbf{B} - 2 \frac{\partial W}{\partial I_2} \mathbf{B}^{-1} \quad (\text{II.11})$$

Où p représente la pression hydrostatique. Les densités d'énergie de déformation W sont exprimées en fonction des élongations principales λ_1 ; λ_2 et λ_3 (qui correspondent aux valeurs

propres du tenseur \mathbf{C}), ou plus couramment à partir des invariants I_1 ; I_2 et I_3 du tenseur des dilatations de Cauchy-Green gauche \mathbf{B} (ou \mathbf{C}). Ces invariants sont définis de la manière suivante :

$$\begin{cases} I_1 = \text{tr}(\mathbf{B}) \\ I_2 = \frac{1}{2}[\text{Trace } \mathbf{B}^2 - (\text{Trace } \mathbf{B})^2] \\ I_3 = \det \mathbf{B} \end{cases} \quad (\text{II.12})$$

On postule l'existence d'un potentiel élastique W , qui représente l'énergie volumique de déformation ramenée au volume initial. Pour un matériau isotrope, cette énergie de déformation W dépend uniquement des trois invariants $I_1(\mathbf{C})$, $I_2(\mathbf{C})$ et $I_3(\mathbf{C})$ du tenseur de Cauchy-Green droit \mathbf{C} , ce qui s'exprime par :

$$W = W(I_1; I_2; I_3)$$

De nombreux modèles hyper élastiques ont été développés et documentés dans la littérature. Dans ce contexte, nous nous focaliserons sur les modèles les plus couramment intégrés dans les logiciels de calcul par éléments finis.

II.3 Les modèles hyper élastiques

II.3.1 Modèle néo-Hookéen (1943) [8]

C'est le modèle hyper élastique le plus simple à un seul terme, mais sa justification repose davantage sur une approche moléculaire que phénoménologique. En s'appuyant sur les principes de la mécanique statique, il peut être exprimé sous la forme suivante :

$$W = \frac{1}{2}nkT(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) \quad (\text{II.14})$$

II.3.2 Modèle de Mooney Rivlin [7]

Ce modèle, développé par Mooney, repose sur l'observation que le comportement du caoutchouc présente une linéarité en cisaillement simple. Mooney exprime alors l'énergie de déformation W sous la forme suivante :

$$W = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3) \quad (\text{II.13})$$

Ce modèle reste largement privilégié en raison de sa simplicité et de sa capacité à représenter de manière adéquate le comportement des élastomères pour des niveaux de déformation atteignant jusqu'à 100 %.

II.3.3 Modèle d'Ogden (1972) [12]

Ce modèle est l'un des plus couramment utilisés pour décrire les très grandes déformations. Son approche consiste à remplacer les exposants entiers du développement de Rivlin par une série de puissances réelles des élongations principales. Ces exposants réels deviennent alors des paramètres matériels à déterminer. Contrairement aux formulations précédentes basées sur les invariants, le modèle d'Ogden s'exprime directement en fonction des élongations principales

$$W = \sum_{n=1}^n \frac{\mu_n}{\alpha_n} (\lambda_1^{\alpha_n} + \lambda_2^{\alpha_n} + \lambda_3^{\alpha_n}) \quad (\text{II.15})$$

Où les constantes $(\mu_n; \alpha_n)_{i=1, \dots, n}$ sont les paramètres matériaux. $\lambda_1; \lambda_2$ et λ_3 Sont les valeurs propres du tenseur de dilatation de Green-Cauchy.

II.3.4 Modèle de Yeoh [13]

La fonction d'énergie de déformation W du modèle de Yeoh s'exprime comme suit :

$$W^{\text{Yeoh}} = C_{10}(I_0 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{30}(I_1 - 3)^3 \quad (\text{II.16})$$

où C_{10}, C_{20} et C_{30} sont les paramètres de matériaux du modèle.

Conclusion

Ce chapitre a permis de poser les fondations théoriques nécessaires à la compréhension des comportements hyper élastiques des élastomères. Les notions de grandes déformations, souvent complexes, sont essentielles pour modéliser de manière réaliste les matériaux soumis à de fortes sollicitations.

Chapitre 3 : Comparaison de deux lois de comportement hyper-élastique pour la modélisation de cylindres sous pression

Introduction

Dans ce dernier chapitre, les concepts théoriques développés précédemment sont mis en œuvre dans le cadre d'une étude comparative. Deux approches sont adoptées : une approche analytique qui permet d'estimer les contraintes et les déformations dans un cylindre soumis à une pression, et une approche numérique à l'aide d'un logiciel de simulation, permettant de simuler le comportement d'un tube de différentes épaisseurs selon deux modèles hyper-élastiques. L'objectif est d'évaluer l'impact du choix du modèle de comportement sur l'optimisation de l'épaisseur de la structure.

III.1 Etude analytique

Ce chapitre traite de l'étude des contraintes dans un tube long soumis à des sollicitations mécaniques, notamment à des pressions interne et externe. Cette analyse est fondamentale pour comprendre le comportement non linéaire d'un matériau hyper-élastique soumis à un chargement.

En raison de l'axisymétrie du problème, seules les composantes radiale, axiale et circonférentielle des contraintes sont considérées. Ces composantes sont déterminées à partir des équations d'équilibre et des relations constitutives associées à différents modèles hyperélastiques, tels que les modèles néo-Hookéen et Mooney-Rivlin, afin de décrire la réponse mécanique du matériau.

Le matériau est supposé isotrope et incompressible. Dans la configuration de référence, le tube a un rayon intérieur A et un rayon extérieur B ; ces paramètres deviennent respectivement a et b dans la configuration déformée. Pour décrire le mouvement, deux systèmes de coordonnées cylindriques sont adoptés, (R, Θ, Z) dans la configuration de référence, et (r, θ, z) dans la configuration déformée.

En raison de l'axisymétrie du problème, les déformations du cylindre peuvent s'écrire comme :

Avant déformations :

$$\begin{cases} A \leq R \leq B \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq Z \leq L \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

Après déformations :

$$\begin{cases} a \leq r \leq b \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq z \leq l \end{cases} \quad (\text{III.2})$$

Qui est un membre de la famille des solutions universelles proposées par Ericksen [14].

De l'équation précédente le gradient de la déformation peut prendre la forme suivante :

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \lambda_r & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_\theta & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{dr}{dR} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r}{R} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{dz}{dZ} \end{bmatrix} \quad (\text{III.3})$$

où $\frac{dr}{dR}$ décrit la déformation plane du cylindre creux.

Les lois de comportement hyper-élastique découlent d'un potentiel élastique appelé densité d'énergie de déformation, souvent notée W , définie par unité de volume non déformé. Lorsque le matériau possède des propriétés isotropes, la densité d'énergie de déformation s'écrit en termes des invariants du tenseur de Cauchy-Green \mathbf{B} , notés I_i ($i = 1, 2, 3$), soit :

$$\begin{cases} I_1 = \text{tr}(\mathbf{B}) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \\ I_2 = \frac{1}{2} \left[(\text{tr}(\mathbf{B}))^2 - \text{tr}(\mathbf{B}^2) \right] = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 \\ I_3 = \det(\mathbf{B}) = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 \end{cases} \quad (\text{III.4})$$

où λ_1, λ_2 et λ_3 sont les rapports d'étirement et ils sont définis comme les racines carrées des valeurs propres de \mathbf{B} .

Après la substitution, les principaux invariants du tenseur de déformations de Cauchy Green gauche sont :

$$\begin{cases} I_1 = \lambda_r^2 + \lambda_\theta^2 + \lambda_z^2 \\ I_2 = \lambda_r^{-2} + \lambda_\theta^{-2} + \lambda_z^{-2} \\ I_3 = \lambda_r^2 \lambda_\theta^2 \lambda_z^2 \end{cases} \quad (\text{III.5})$$

Dans le cas d'un milieu incompressible, l'hypothèse d'incompressibilité s'écrit comme suit :

$$J = \det \mathbf{F} = 1 \quad \text{Ou encore } I_3 = 1.$$

Le troisième invariant principal I_3 étant à présent connu et la densité d'énergie de déformation ne dépend plus que des deux premiers invariants : $W=W(I_1, I_2)$.

Lorsque $\lambda_z = \lambda = 1$, on aura :

$$\begin{cases} I_1 = \lambda_r^2 + \lambda_\theta^2 + 1 \\ I_2 = \lambda_r^{-2} + \lambda_\theta^{-2} + 1 \\ I_3 = (\lambda_r \lambda_\theta)^2 \end{cases} \quad (\text{III.6})$$

Le tenseur de déformations Cauchy-Green gauche est définie par :

$$\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T = \begin{pmatrix} \lambda_r^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_\theta^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{III.7a})$$

Donc :

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_r^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_\theta^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{III.7b})$$

On pose : $Q = \frac{R}{r}$

De l'équation 7 on a :

$$\begin{cases} \lambda_r = \frac{dr}{dR} = Q \\ \lambda_\theta = \frac{r}{R} = Q^{-1} \end{cases} \quad (\text{III.8})$$

Et sachant que le milieu est incompressible, alors : $\lambda_r = \lambda_\theta^{-1}$

Donc on obtient :

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} Q^2 & 0 & 0 \\ 0 & Q^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} Q^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & Q^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{III.9})$$

On a : $\frac{dQ}{dr} = \frac{d}{dr} \left(\frac{R}{r} \right) = \frac{Q^{-1} - Q}{r}$

On définit les paramètres suivants : $\eta = \frac{A}{B}$, $\lambda_a = \frac{a}{A}$, $\lambda_b = \frac{b}{B}$

où η et λ_a , λ_b représentent respectivement un paramètre de structure, le rapport d'étirement au rayon intérieur et au rayon extérieur :

On a : $\det \mathbf{F} = 1$ alors : $rdr = R dR$

Ce qui donne : $r^2 = R^2 + C$, où $C = \text{cte}$

Pour $R = A$, $r = a \Rightarrow a^2 = A^2 + C$

Et pour $R = B$, $r = b \Rightarrow b^2 = B^2 + C$

Ce qui implique que :

$$\lambda_b = \sqrt{1 + (\lambda_a^2 - 1)\eta^2} \quad (\text{III.10})$$

Pour les matériaux incompressibles, la loi de comportement s'exprime comme suit :

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2 \frac{\partial W}{\partial I_1} \cdot \mathbf{B} - 2 \frac{\partial W}{\partial I_2} \cdot \mathbf{B}^{-1} \quad (\text{III.11a})$$

L'équation d'équilibre s'écrit :

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0 \quad (\text{III.11b})$$

$$\text{On a : } \frac{d\sigma_{rr}}{dr} = \frac{d\sigma_{rr}}{dQ} \frac{dQ}{dr}$$

$$\text{ce qui donne : } \frac{d\sigma_{rr}}{dQ} = - \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{Q^{-1} - Q}$$

Après intégration, on obtient l'expression de la contrainte radiale :

$$\sigma_{rr} = - \int_Q^{\lambda_b^{-1}} \left(\frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{Q^{-1} - Q} \right) dQ + \sigma_{rr}(\lambda_b^{-1}) \quad (\text{III.11c})$$

Modèle de Mooney Rivlin

Le modèle de Mooney Rivlin propose la forme phénoménologique suivante pour la densité d'énergie de déformation [15] :

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) \quad (\text{III.12})$$

Ce modèle admet donc deux paramètres matériaux, qui doivent vérifier $C_{10} > 0$ et $C_{01} \geq 0$.

$$\text{On a : } \frac{\partial W}{\partial I_1} = C_{10} \quad ; \quad \frac{\partial W}{\partial I_2} = C_{01}$$

Les expressions des contraintes sont données par :

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = -p + 2C_{10} \cdot Q^2 - 2C_{01} \cdot Q^{-2} \\ \sigma_{\theta\theta} = -p + 2C_{10} \cdot Q^{-2} - 2C_{01} \cdot Q^2 \\ \sigma_{zz} = -p + 2C_{10} - 2C_{01} \end{cases} \quad (\text{III.13})$$

En utilisant les équations (III.11c) et (III.13), on obtient :

$$\sigma_{rr} = -2(C_{10} + C_{01}) \left[\frac{Q^2}{2} + \ln(Q) \right]_Q^{\lambda_b^{-1}} + \sigma_{rr}(\lambda_b^{-1}) \quad \text{III.14}$$

En appliquant une pression uniforme constante sur les surfaces intérieure et extérieure du cylindre, les conditions aux limites s'expriment comme suit :

$$\sigma_{rr}(\lambda_b^{-1}) = -P_{\text{ext}}, \quad \sigma_{rr}(\lambda_a^{-1}) = -P_{\text{int}} \quad (\text{III.15a})$$

Ce qui donne :

$$\sigma_{rr} = -2(C_{10} + C_{01}) \left[\frac{Q^2}{2} + \ln(Q) \right]_Q^{\lambda_b^{-1}} - P_{\text{ext}} \quad (\text{III.15b})$$

Et à partir de l'équation (III.13₁), on trouve que :

$$p = 2C_{10} \cdot Q^2 - 2C_{01} \cdot Q^{-2} - \sigma_{rr} \quad (\text{III.16})$$

Ce qui donne pour les contraintes circonférentielles et axiales :

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{rr} + 2C_{10} \cdot (Q^{-2} - Q^2) - 2C_{01} \cdot (Q^2 - Q^{-2}) \quad (\text{III.17a})$$

$$\sigma_{zz} = \sigma_{rr} + 2C_{10}(1 - Q^2) - 2C_{01} \cdot (1 - Q^{-2}) \quad (\text{III.17b})$$

Modèle néo-Hookéen

Le modèle hyper-élastique isotrope et incompressible le plus simple est le modèle néo-Hookéen [16], il est donné par :

$$W = C_1(I_1 - 3) \quad (\text{III.18})$$

$$\text{On a : } \frac{\partial W}{\partial I_1} = C_1 \quad ; \quad \frac{\partial W}{\partial I_2} = 0$$

Notons que le domaine de validité du modèle de de Mooney Rivlin est plus large que celui du modèle Néo-Hookéen.

Les expressions des contraintes sont données par :

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = -p + 2C_1 \cdot Q^2 \\ \sigma_{\theta\theta} = -p + 2C_1 \cdot Q^{-2} \\ \sigma_{zz} = -p + 2C_1 \end{cases} \quad (\text{III.19})$$

En utilisant les équations (III.11c) et (III.19), on obtient :

$$\sigma_{rr} = -2C_1 \left[\frac{Q^2}{2} + \ln(Q) \right]_Q^{\lambda_b^{-1}} - P_{\text{ext}} \quad (\text{III.20})$$

Et à partir de l'équation (III.19₁), on trouve que :

$$p = 2C_1 \cdot Q^2 - \sigma_{rr} \quad (\text{III.21})$$

Ce qui donne pour les contraintes circonférentielles et axiales :

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{rr} + 2C_1 \cdot (Q^{-2} - Q^2) \quad (\text{III.22a})$$

$$\sigma_{zz} = \sigma_{rr} + 2C_1(1 - Q^2) \quad (\text{III.22b})$$

Dans ce qui suit, on s'intéresse à l'évolution de la contrainte radiale dans un cylindre soumis à une pression interne, en supposant un comportement hyper-élastique régi par le modèle de Mooney-Rivlin. Le taux d'étirement au rayon intérieur est fixé à $\lambda_a = 1.3 > 1$, valeur choisie pour simuler une expansion sous l'effet de la pression appliquée. Les courbes sont tracées en fonction de la variable Q^{-1} , pour différentes valeurs du rapport géométrique

($\eta = \frac{A}{B} = 0.5, 0.65, 0.75, 0.9$), afin d'évaluer l'influence de l'épaisseur de la paroi. Deux cas sont examinés : sans pression extérieure $P_e = 0$ MPa et avec une pression extérieure $P_e = 0.1$ MPa. Les figures ci-dessous illustrent ces résultats.

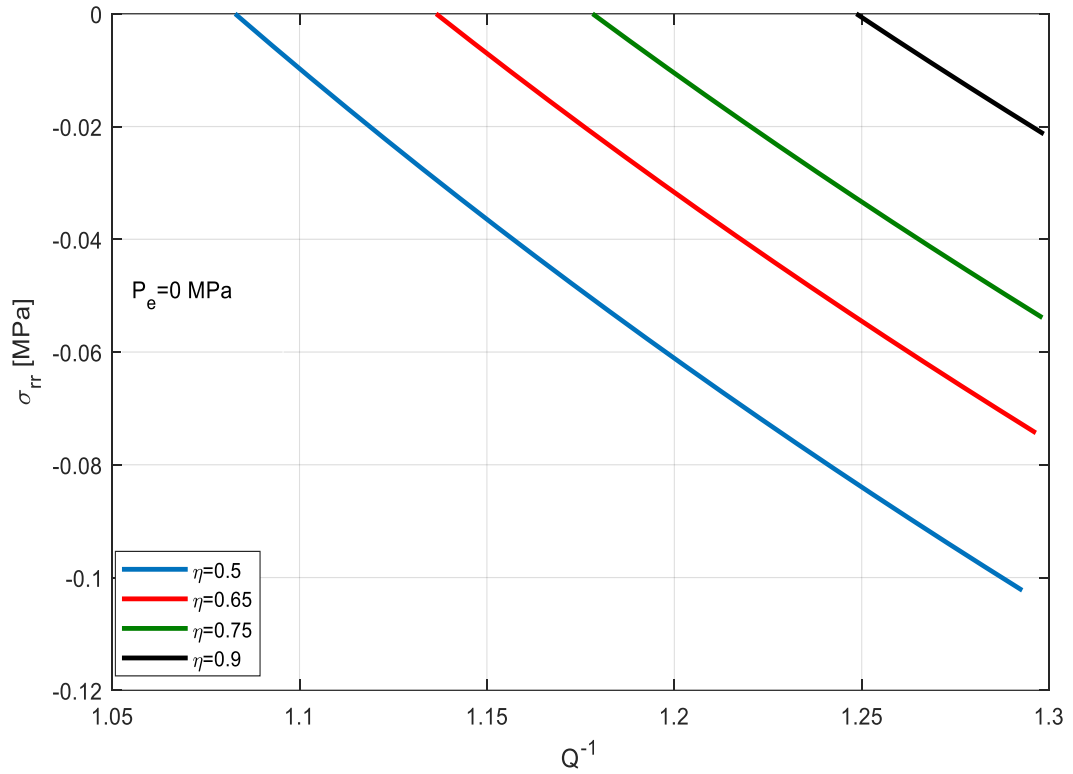


Figure III.1.a : Distribution de la contrainte radiale en fonction de Q^{-1} pour différentes valeurs de η ($\lambda_a=1.3$, $P_e=0$ MPa, $C_{10}=0.162$ MPa, $C_{01}=0.0059$ MPa)

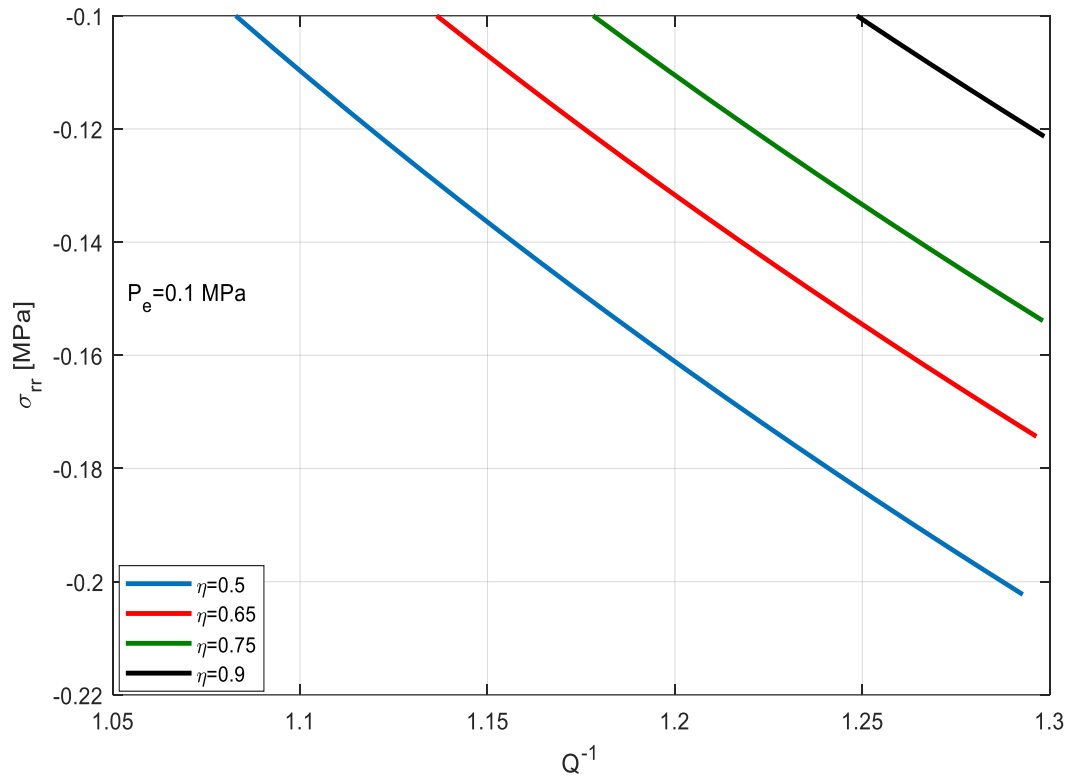


Figure III.1.b : Distribution de la contrainte radiale en fonction de Q^{-1} pour différentes valeurs de η ($\lambda_a=1.3$, $P_e=0.1$ MPa , $C_{10}=0.162$ MPa, $C_{01}=0.0059$ MPa)

L'analyse des figures obtenues permet de dégager plusieurs tendances caractéristiques concernant l'évolution de la contrainte radiale en fonction de Q^{-1} :

- Pour toutes les courbes, la contrainte radiale diminue quand Q^{-1} augmente,
- On constate que $\lambda_a = 1.3$ est supérieure à λ_b ,
- Plus η est faible, plus la contrainte radiale est importante en valeur absolue pour un même Q^{-1} , cela correspond à des parois plus épaisses,
- À l'inverse, lorsque η est proche de 1, la contrainte radiale est moins prononcée, car le cylindre est plus mince.

On conclut qu'une paroi plus épaisse supporte une contrainte radiale plus importante.

L'ajout d'une pression extérieure rend la contrainte radiale plus compressive sur toute l'épaisseur du cylindre, elle ajoute donc un effort compressif supplémentaire au bord extérieur, ce qui se transmet vers l'intérieur.

III.2 : Etude Numérique

III.2.1 : Construction du modèle numérique

III.2.1.1 Choix du modèle de comportement

Nous avons choisi deux modèles :

Le modèle de Mooney-Rivlin à deux paramètres implémentés dans le code de calcul éléments finies dont le potentiel hyper-élastique est défini par :

$$W = W(I_1, I_2) = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) + \frac{1}{D} (J - 2)^2 \quad (\text{III.23})$$

Où W est l'énergie de déformation par unité de volume, C_{10} et C_{01} sont les paramètres du matériau.

Et le modèle Néo-Hookéen incompressible dont le potentiel hyper-élastique s'écrit :

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + \frac{1}{D} (J - 2)^2 \quad (\text{III.24})$$

III.2.1.2 Présentation de la géométrie

On suppose que le cylindre est infiniment long, c'est-à-dire que sa longueur est grande devant son diamètre. Ainsi les effets de bords sont négligeables. La schématisation du tube est représentée sur la Figure III.2.

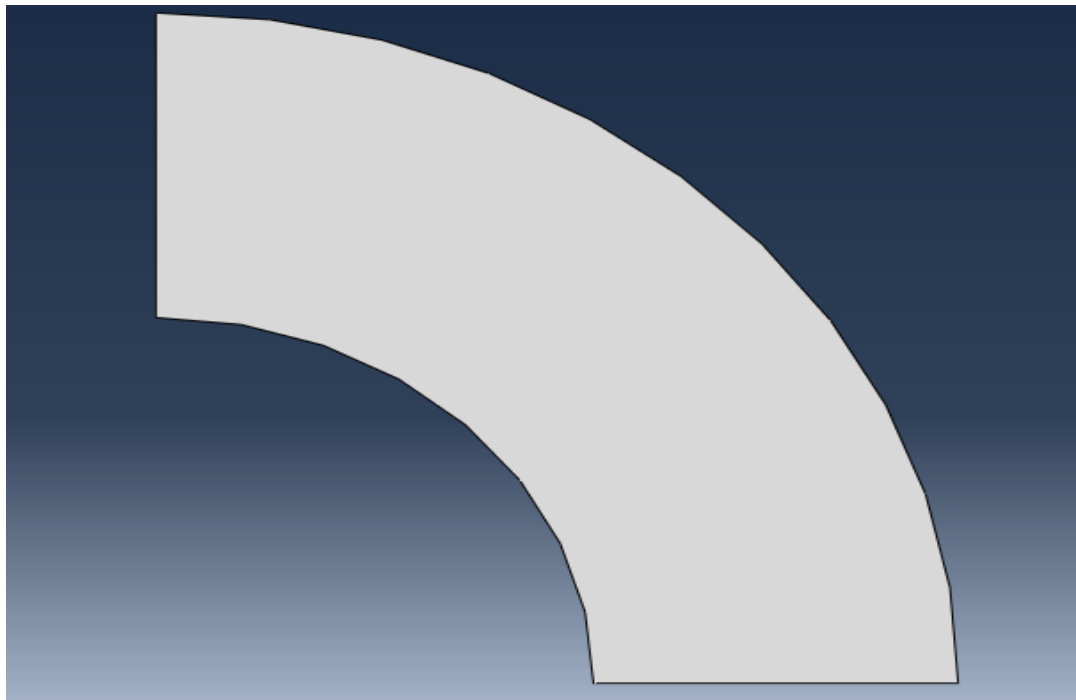


Figure III.2 : Modèle étudié.

III.2.1.3 Le maillage

Dans notre cas, nous avons opté pour une modélisation 2D avec un maillage à éléments quadratique, assurant une meilleure précision dans la représentation des grandes déformations et des contraintes. Pour cela nous avons utilisés un élément finis quadratique à intégration réduits et hybride CPE8RH. Le maillage global de notre géométrie est présentée dans la figure III.3 ci-dessous ;

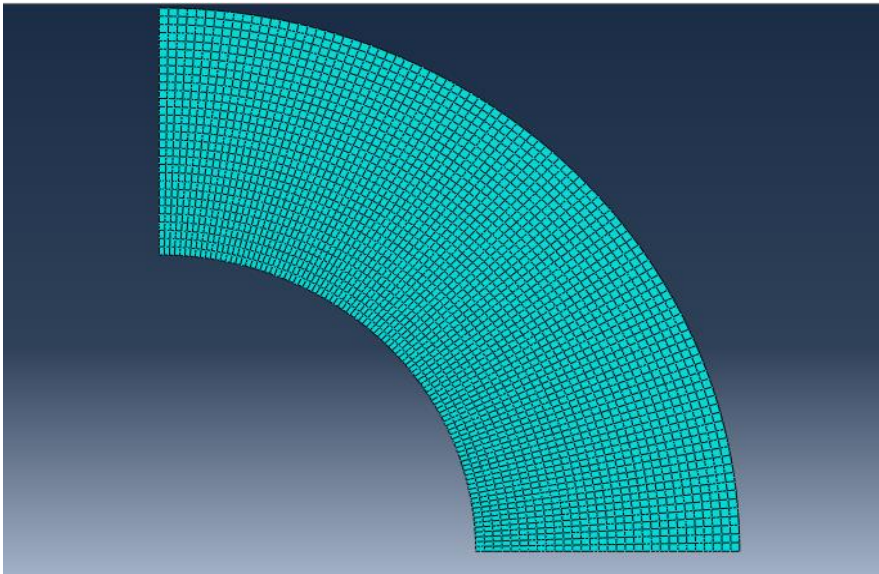


Figure III.3: Modèle maillé.

Le tableau ci-dessous illustre le maillage adopté pour les différentes épaisseurs de cylindre.

Tableau 2 : Données utilisées pour la simulation numérique.

Géométrie de cylindre		Eléments de maillage	
Rayon A en (mm)	Rayon B en (mm)	Nombre d'élément	Nombre de nœuds
220	120	2910	8985
220	140	3300	10181
220	160	3930	12113

III.2.2.4 Chargements et conditions aux limites

En raison de la symétrie de la géométrie et des conditions aux limites appliquées on modélise seulement un quart de cylindre. Deux cas de chargement ont été considérés : l'un avec une pression externe et l'autre avec une pression interne. Pour les conditions aux limites on a bloqué les déplacements et les translations sur les extrémités comme illustre la figure ci-dessous,

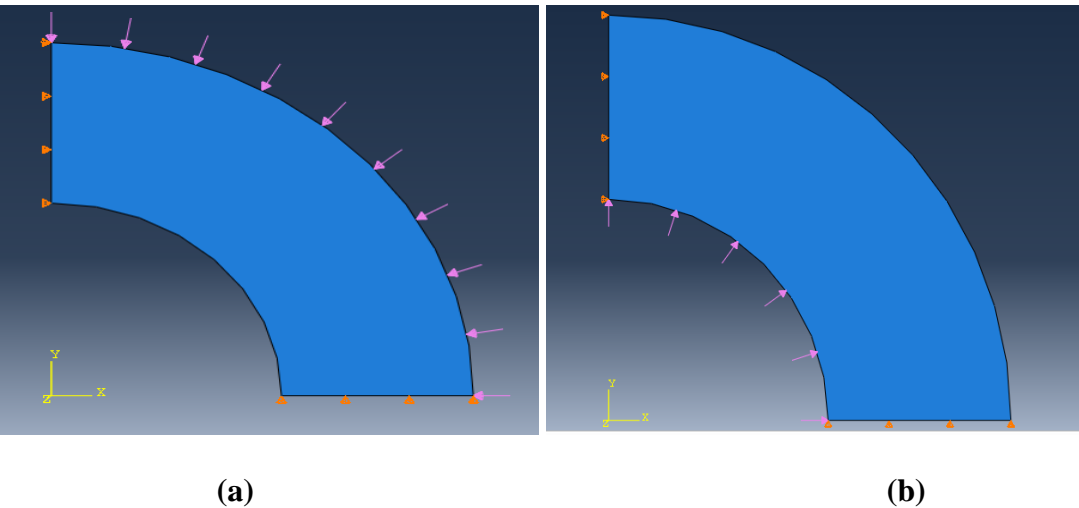


Figure III.4 : Chargements et conditions aux limites. (a) Pression externe, (b) pression interne.

III.2.2.5 : Résultats de la simulation numérique

Pour effectuer cette simulation, nous avons utilisé les paramètres matériels des deux modèles incompressibles néo hookéen et Mooney Rivlin identifié par Gillas Marckmann

Tableau 3 : Paramètres des deux modèles pour les données expérimentales de Treloar.

Type de Model	Paramètres matériels [MPa]
Neo-hookean	$C_{10} = 0.2$
Monney-Rivlin	$C_{10} = 0.162$ and $C_{01} = 5.910^{-3}$

Les paramètres des matériaux pour les modèles Néo-Hookéen et Mooney Rivlin utilisées dans cette simulation ont été fournis par Gillas Marckman. Ces paramètres ont été obtenus par ajustement des données expérimentales de Treloar [17].

Nous avons déterminé numériquement la distribution des contraintes sur une surface du cylindre.

Les résultats obtenus pour une épaisseur de 80 mm et une pression interne de 0.1 MPa sont donnés ci-dessous :

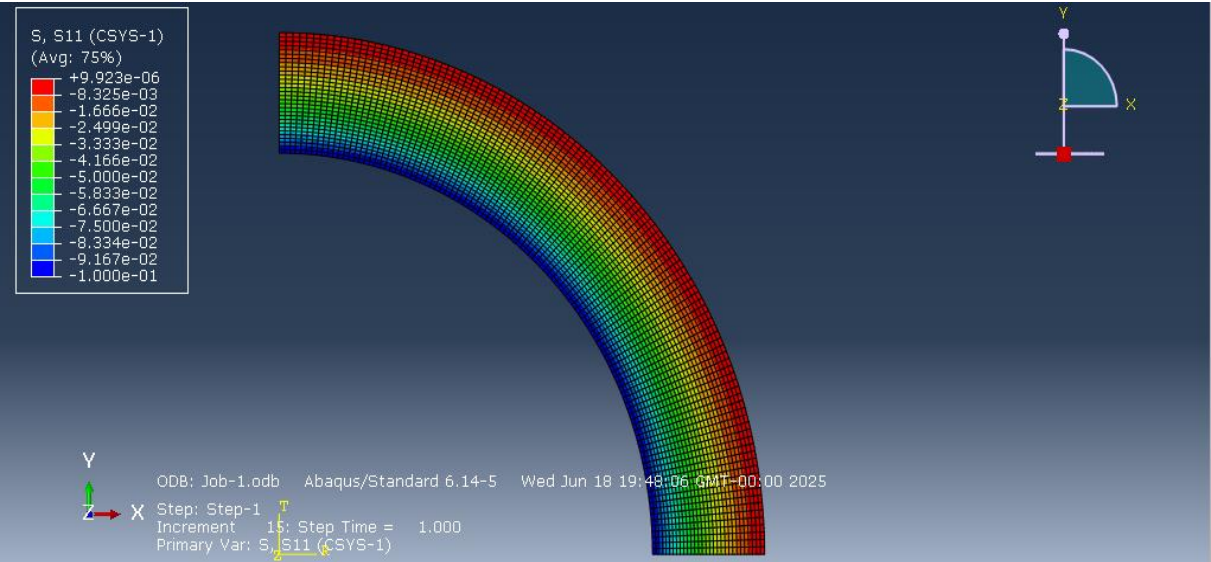


Figure III.5 : Distribution des contraintes radiales ($P_i=0.1\text{MPa}$, $e=80\text{mm}$).

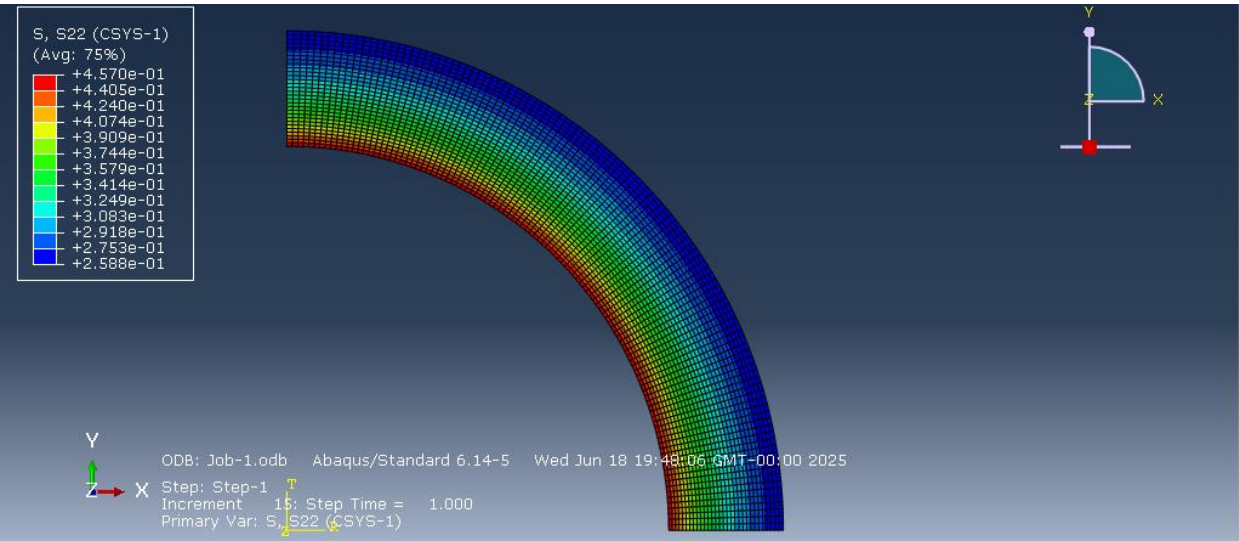


Figure III.6 : Distribution des contraintes circonférentielles. ($P_i=0.1\text{MPa}$, $e=80\text{mm}$).

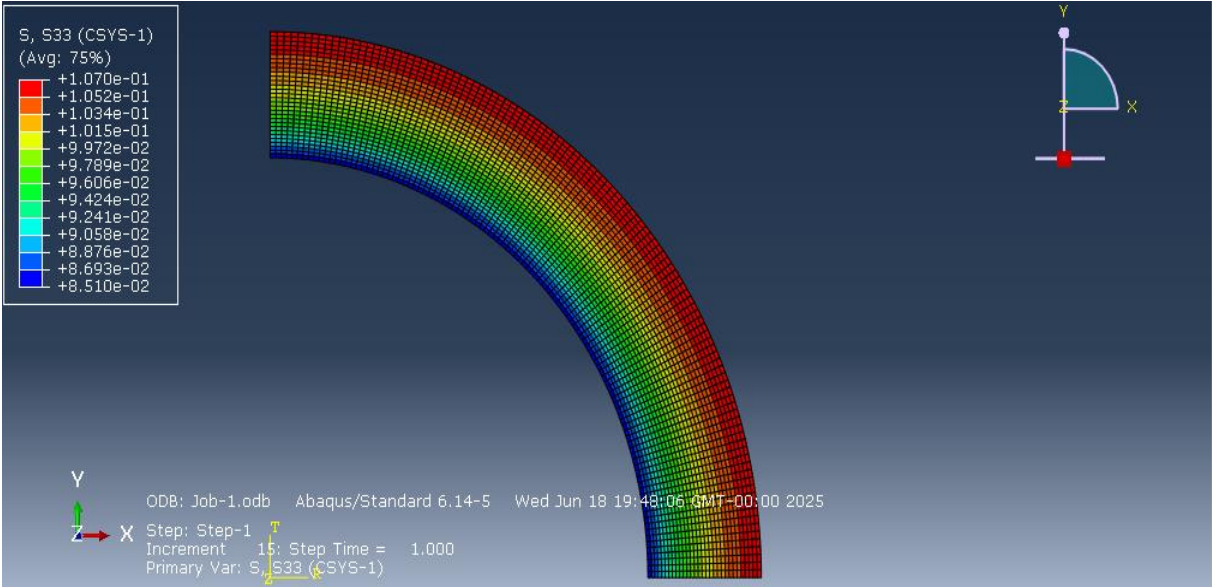


Figure III.7 : Distribution des contraintes Axiales ($P_i=0.1$ MPa, $e=80$ mm).

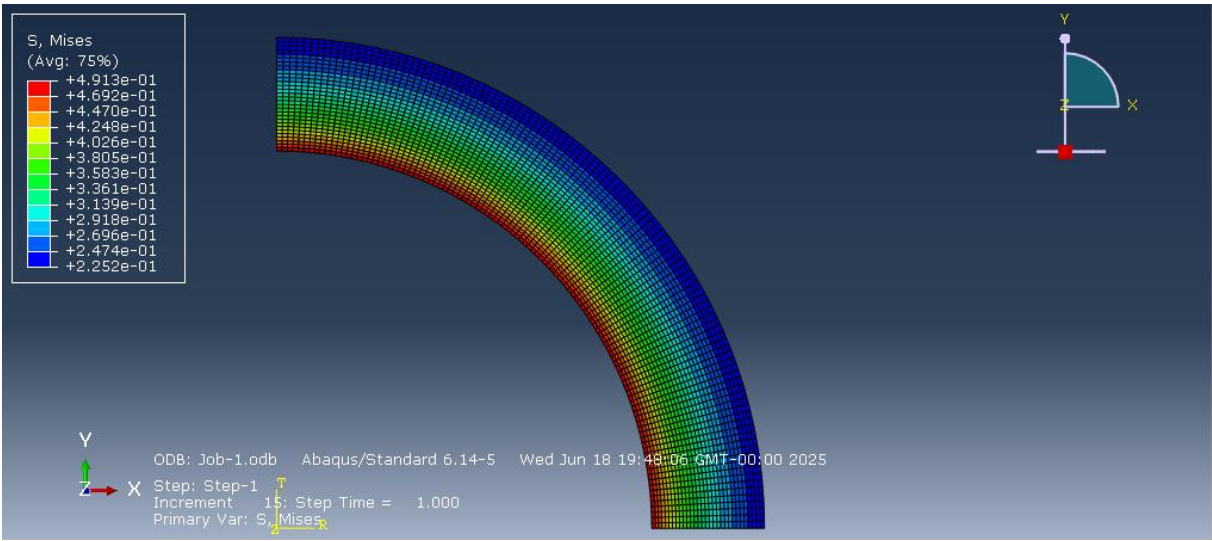


Figure III.8 : Distribution des contraintes Von Mises ($P_i=0.1$ MPa, $e=80$ mm).

Les résultats obtenus pour une épaisseur de 80 mm et une pression externe de 0.1 MPa sont donnés ci-dessous :

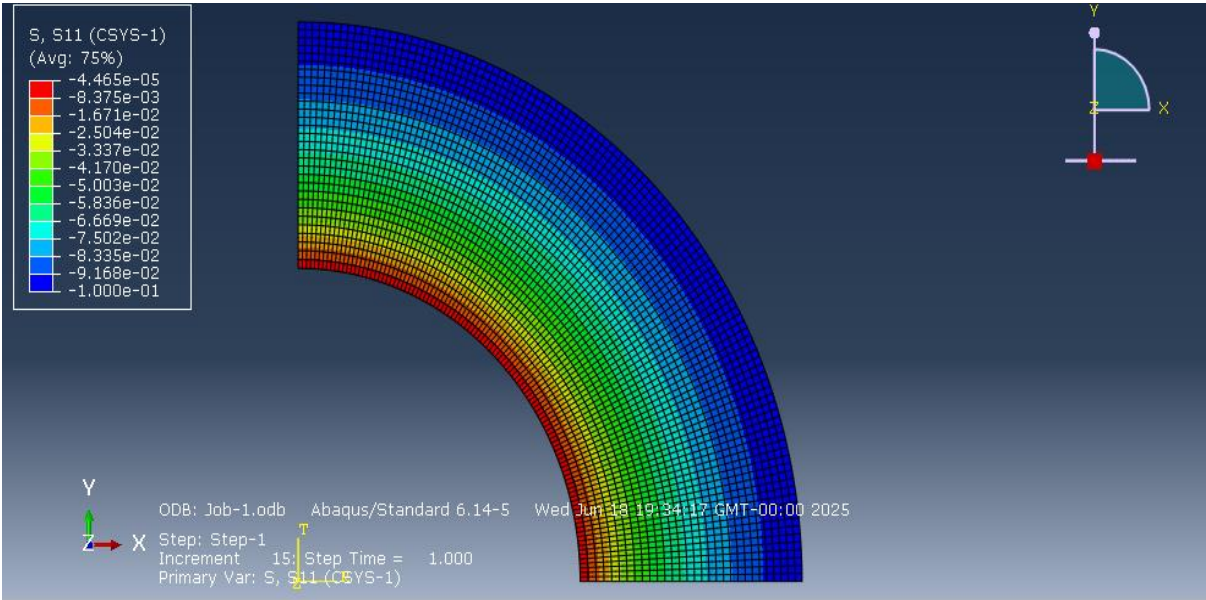


Figure III.9 : Distribution des contraintes radiale (Pe=0.1MPa, e=80mm).

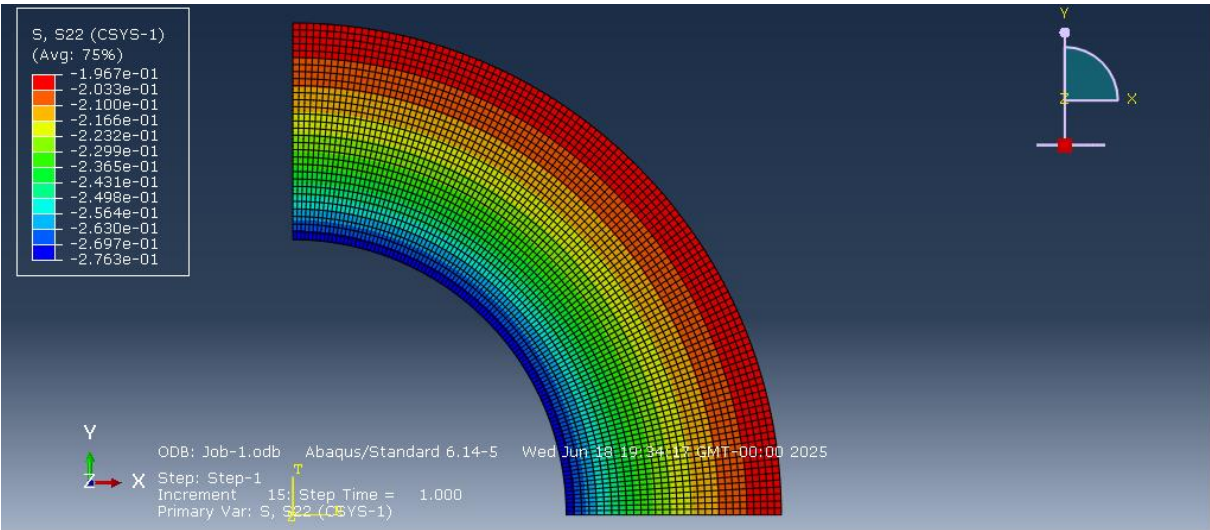


Figure III.10 : Distribution des contraintes circonférentielles. (Pe=0.1MPa, e=80mm).

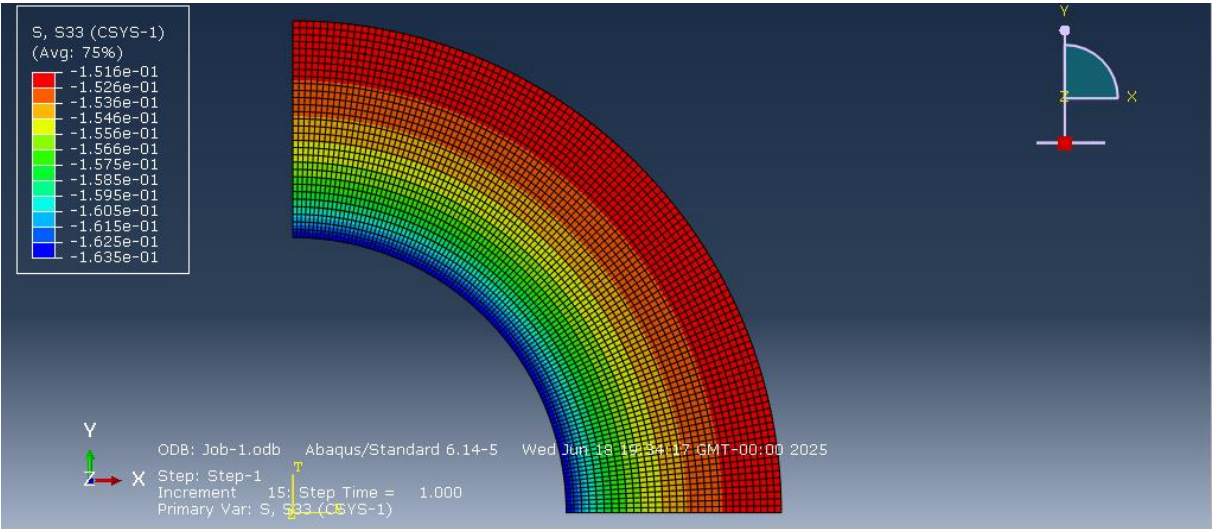


Figure III.11 : Distribution des contraintes Axiales (Pe=0.1MPa, e=80mm).

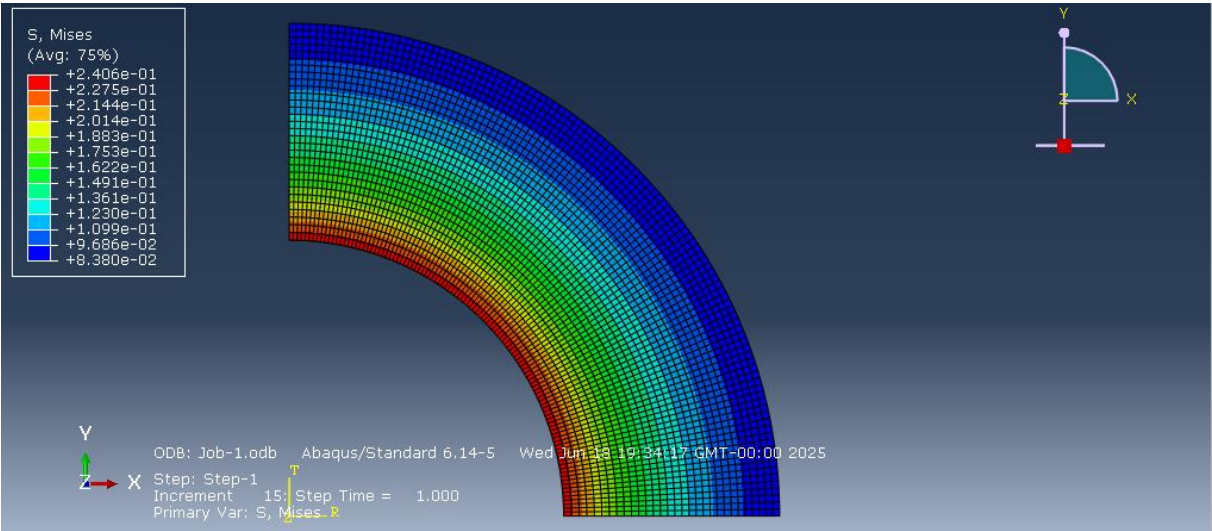


Figure III.12 : : Distribution des contraintes Von Mises (Pi=0.1MPa, e=80mm).

III.2.2.5.1 Pour une pression interne égale à 0.1 MPa

Les figures (III.13.a) à (III.13.d) illustrent les distributions des contraintes radiales, circonférentielles, axiales et de Von Mises à travers l'épaisseur d'un cylindre soumis à une pression interne. Elles permettent une comparaison entre les modèles de Mooney-Rivlin et néo-hookéen, pour différentes valeurs de l'épaisseur.

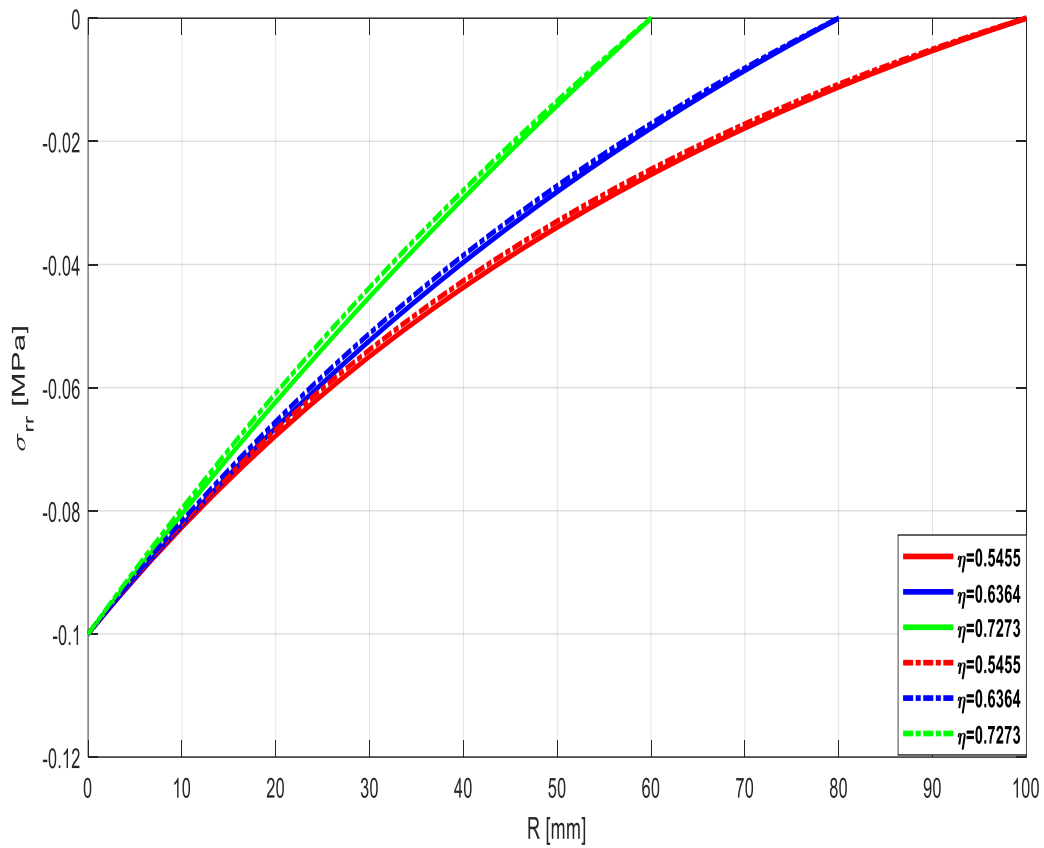


Figure III.13.a : Distribution des contraintes radiales pour les deux modèles pour une pression interne $P_i=0.1$ MPa (MR —, NH —.).

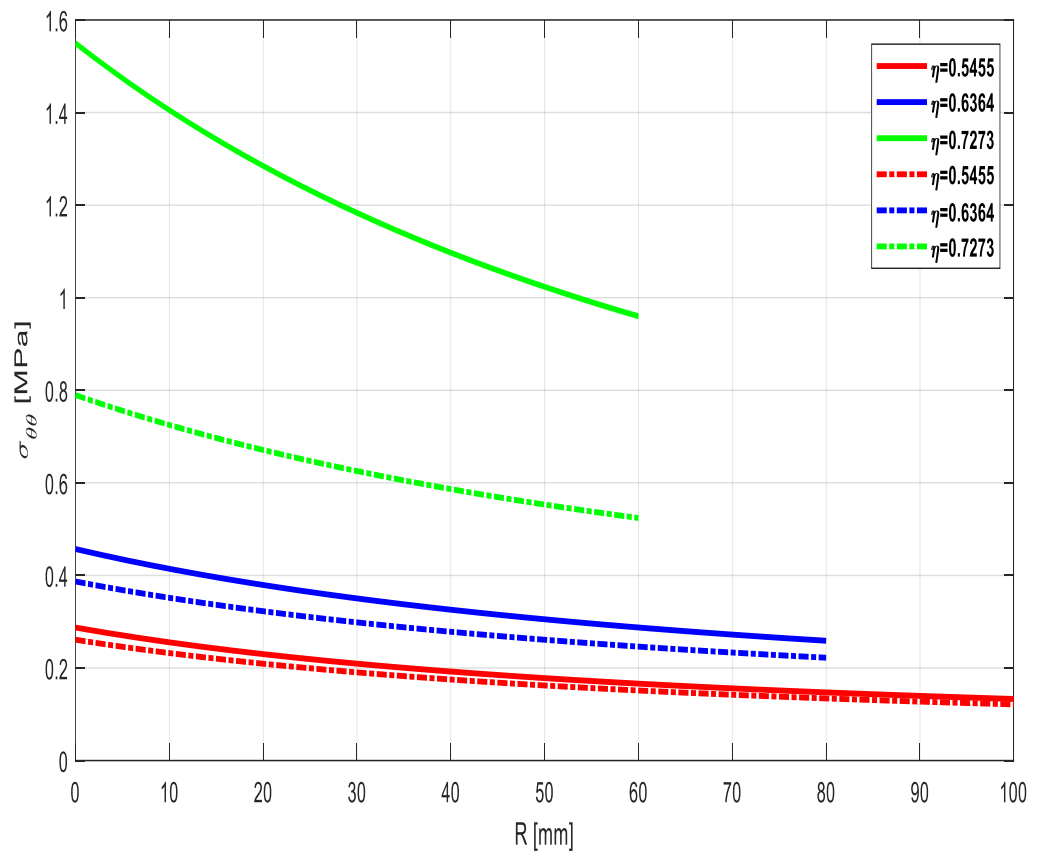


Figure III.13.b : Distribution des contraintes circonférentielles pour les deux modèles pour une pression interne $P_i=0.1\text{MPa}$ (MR —, NH ---.).

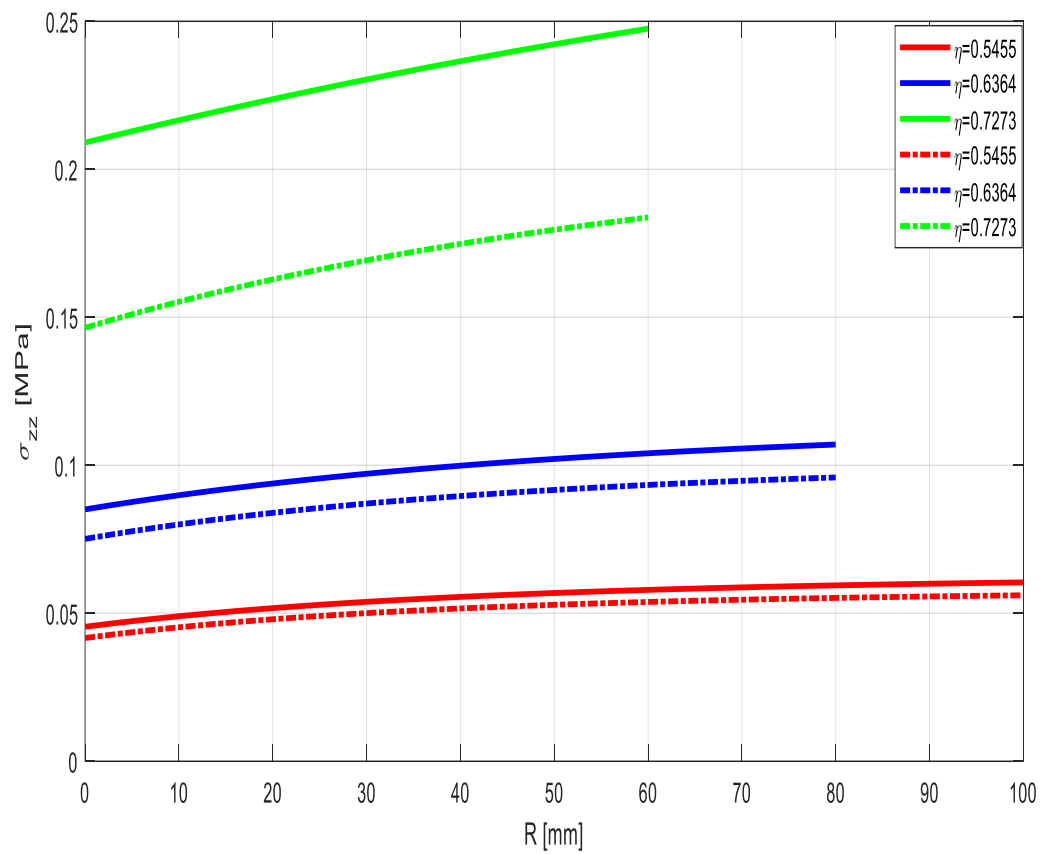


Figure III.13.c : Distribution des contraintes axiales pour les deux modèles pour une pression interne $P_i=0.1\text{MPa}$ (MR —, NH —.).

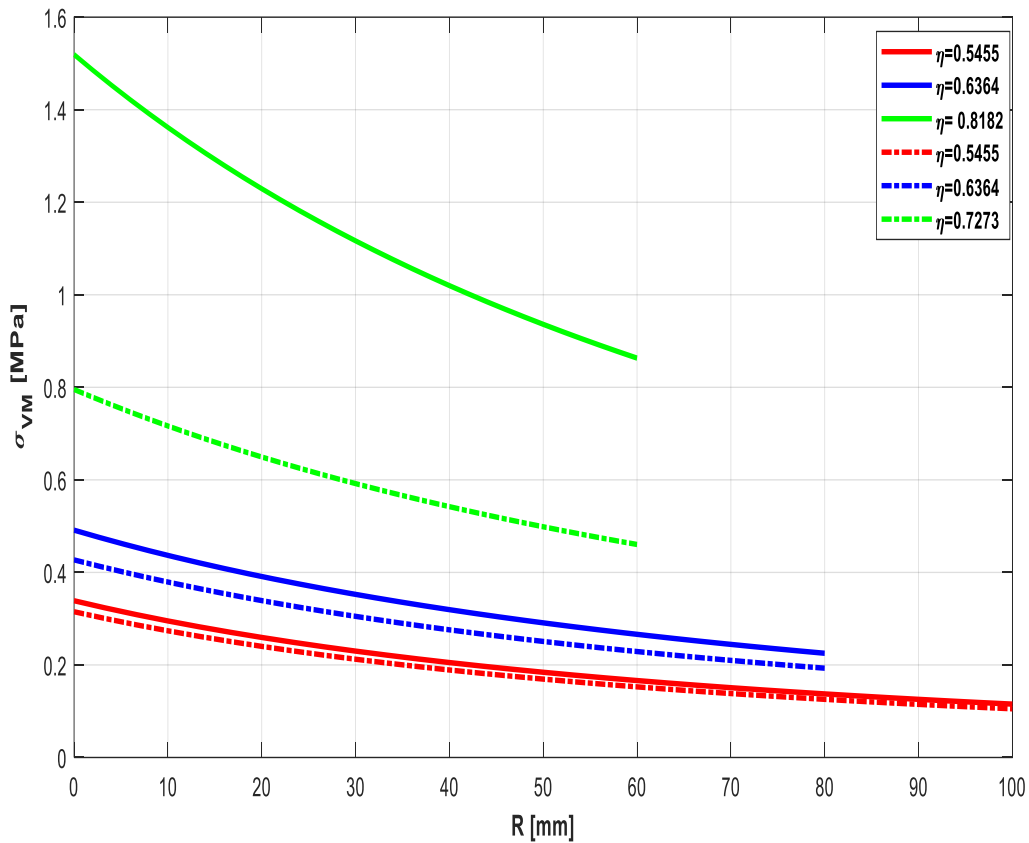


Figure III.13.d : Distribution des contraintes de Von Mises pour les deux modèles pour une pression interne $P_i=0.1\text{MPa}$, (MR —, NH —.).

Les figures (III.13.a) à (III.13.d) présentent la distribution des différentes contraintes (radiales, circonférentielles, axiales et de Von Mises) à travers l'épaisseur d'un cylindre soumis à une pression interne $P_i = 0.1\text{MPa}$, pour deux modèles hyper-élastiques : Mooney-Rivlin et néo-hookéen.

La figure (III.13.a) montre que la contrainte radiale est négative sur toute l'épaisseur, traduisant un état de compression provoqué par la pression interne. Elle atteint sa valeur maximale (en compression) au rayon interne du cylindre, puis décroît progressivement jusqu'à s'annuler à la surface externe, conformément aux conditions aux limites. Les deux modèles donnent des distributions similaires.

La figure (III.13.b) illustre la contrainte circonférentielle, qui est positive. Le modèle de Mooney-Rivlin prédit des valeurs légèrement plus élevées que le modèle de néo-hookéen, en particulier pour les géométries plus minces.

La figure (III.13.c) présente la contrainte axiale, qui reste positive sur toute l'épaisseur. Bien que sa valeur soit inférieure à celle de la contrainte circonférentielle, elle demeure significative. Le modèle de Mooney-Rivlin tend à prédire des contraintes légèrement plus élevées que celles du modèle néo-hookéen, notamment dans le cas de parois plus minces.

Enfin, la figure (III.13.d) montre la contrainte équivalente de Von Mises, qui permet d'évaluer l'état global de sollicitation du matériau. Cette contrainte atteint généralement son maximum à l'intérieur du cylindre, là où la combinaison des efforts est la plus critique. Le modèle Mooney-Rivlin tend à produire des contraintes de Von Mises légèrement plus élevées que le modèle néo-hookéen.

En résumé, bien que les deux modèles décrivent qualitativement les mêmes tendances, le modèle de Mooney-Rivlin prédit globalement des contraintes légèrement plus importantes, surtout en traction. Cette différence devient plus marquée lorsque l'épaisseur de la paroi diminue, ce qui souligne l'importance du choix du modèle constitutif dans les analyses de structures soumises à des sollicitations internes.

III.2.2.5.2 Pour une pression externe égale à 0.1 MPa

Les figures (III.14.a) à (III.14.d) présentent la répartition des contraintes radiales, circonférentielles, axiales et de Von Mises à travers l'épaisseur d'un cylindre soumis à une pression externe. Elles permettent de comparer les prédictions des modèles hyper-élastiques de Mooney-Rivlin et néo-hookéen pour différentes valeurs de l'épaisseur.

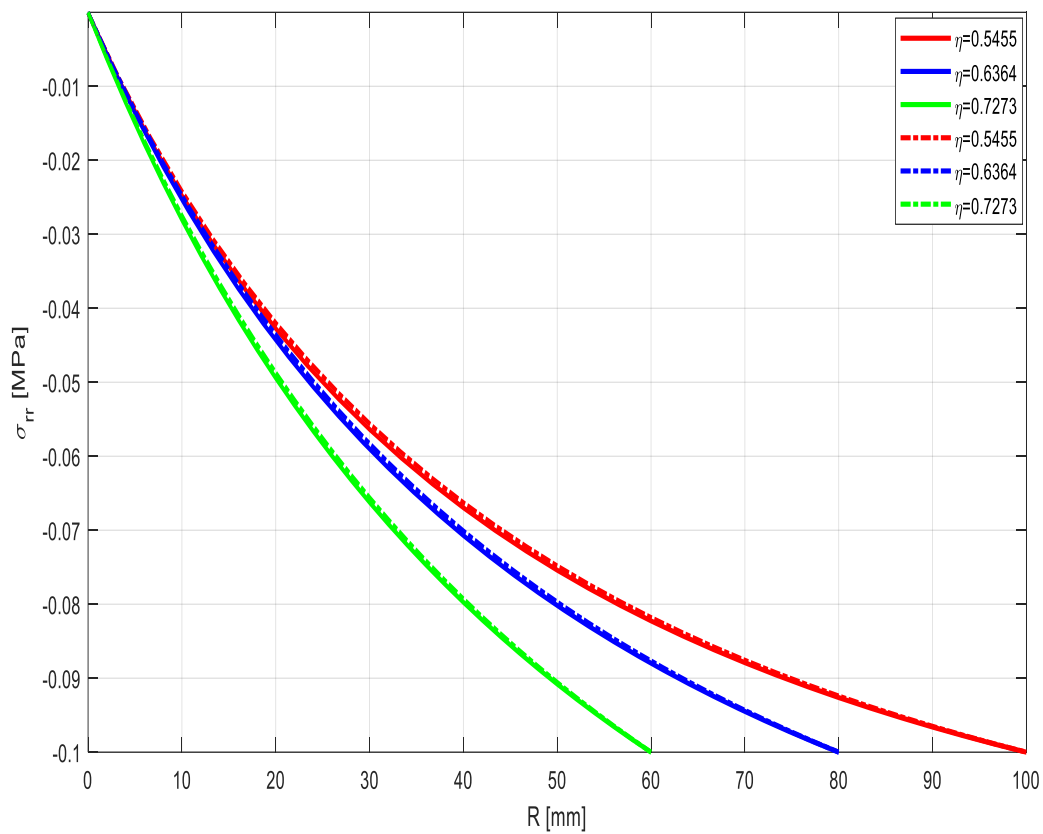


Figure III.14.a : Distribution des contraintes radiales pour les deux modèles pour une pression externe $P_e=0.1\text{MPa}$, (MR —, NH —.).

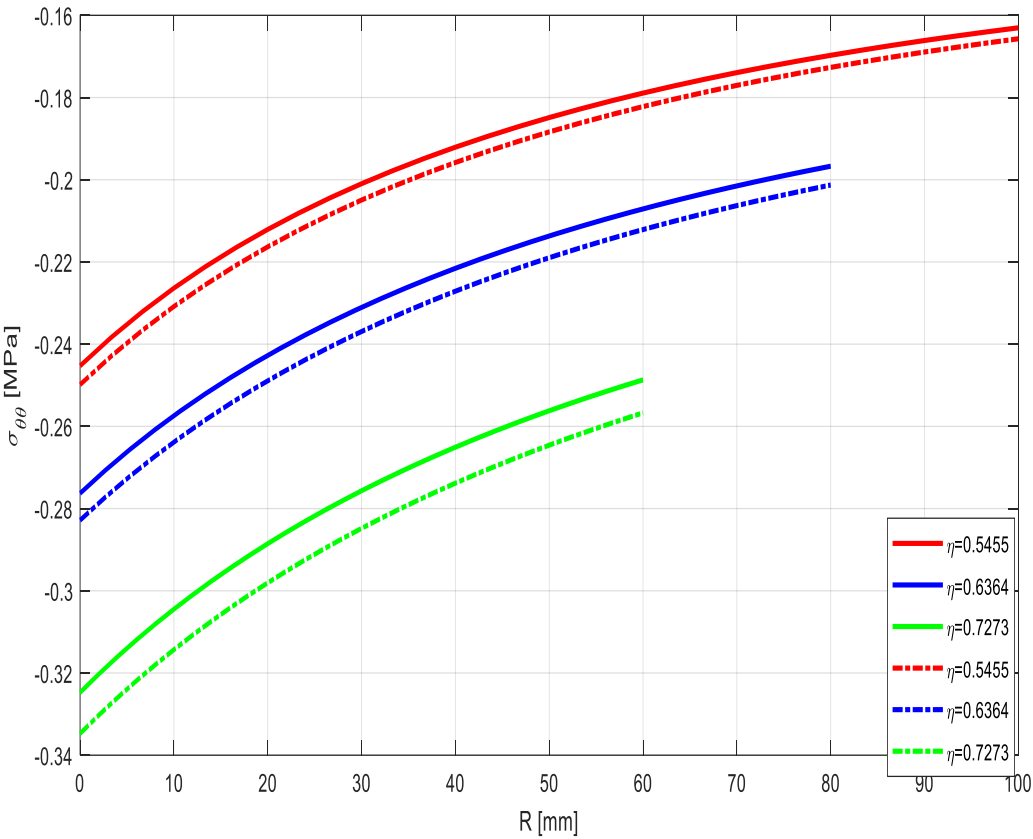


Figure III.14.b : Distribution des contraintes circonférentielles pour les deux modèles pour une pression externe $P_e = 0.1\text{MPa}$, (MR —, NH —.).

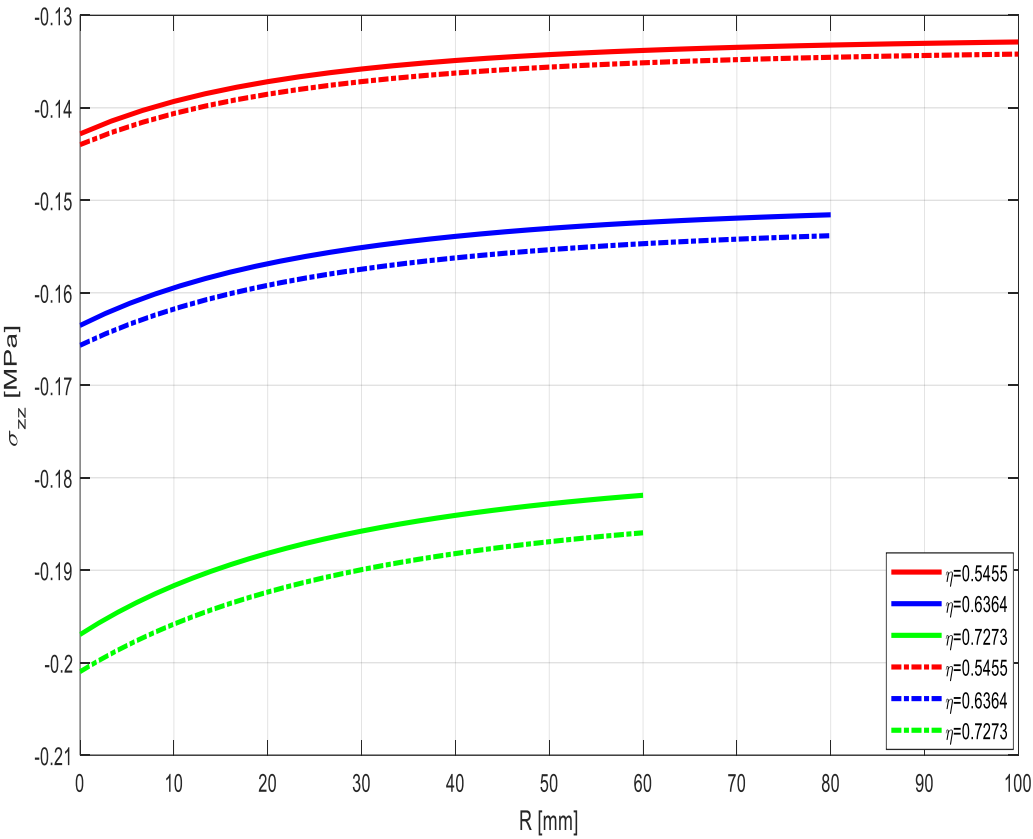


Figure III.14.c : Distribution des contraintes axiales pour les deux modèles pour une pression externe $P_e=0.1\text{MPa}$, (MR —, NH —.).

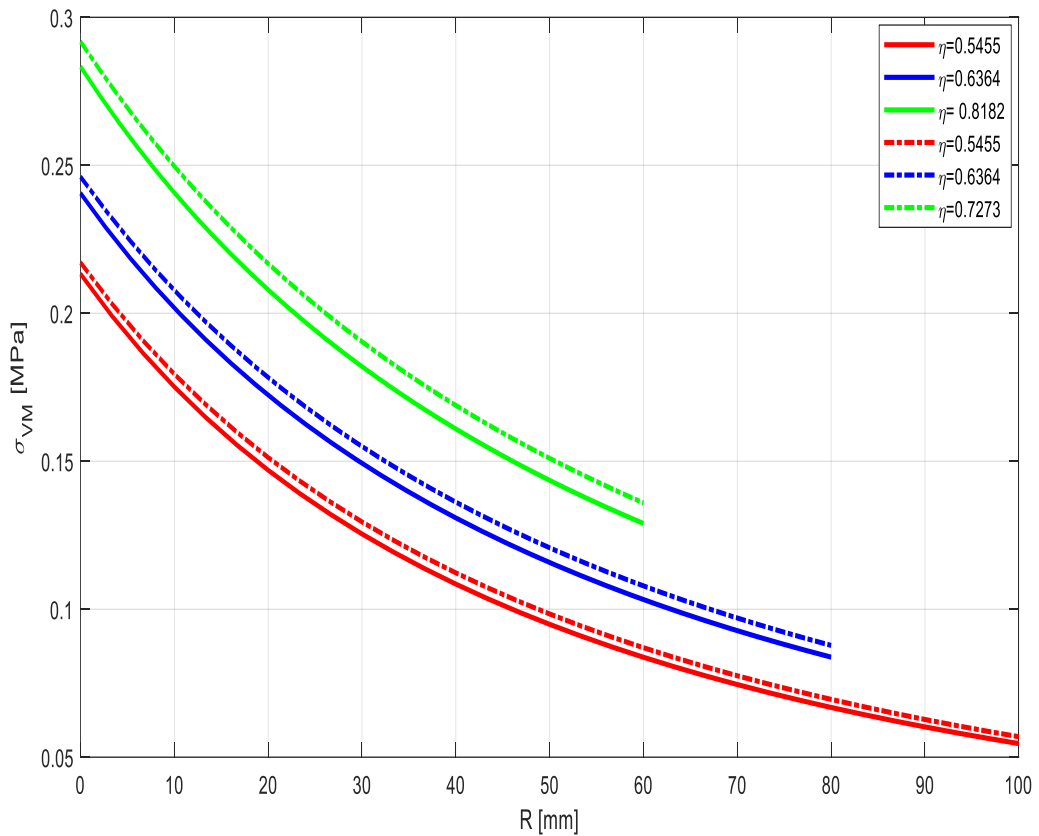


Figure III.14.d : Distribution des contraintes de Von Mises pour les deux modèles pour une pression externe $P_e = 0.1 \text{ MPa}$, (MR —, NH —.).

Il ressort de l'analyse des résultats (figures III.14) que le modèle néo-hookéen prédit généralement des contraintes légèrement plus élevées que le modèle de Mooney-Rivlin. Cependant, cette différence entre les deux modèles tend à s'atténuer lorsque l'épaisseur du cylindre augmente. En effet, pour les parois plus épaisses, les contraintes calculées selon les deux lois de comportement deviennent presque superposables, ce qui traduit une réponse mécanique globalement similaire.

Conclusion

On observe que sous pression interne, la différence entre les modèles de Mooney-Rivlin et de néo-hookéen est significative, en particulier pour les parois minces, en raison des fortes déformations générées. En revanche, sous pression externe seule, les différences entre les deux modèles sont beaucoup moins marquées.

Conclusion générale

Conclusion générale

Ce mémoire a permis de comparer deux modèles hyper-élastiques, Mooney-Rivlin et néo-hookéen, appliqués à l'analyse mécanique de cylindres soumis à des pressions. L'étude a été menée à la fois par des approches analytiques et numériques, en mettant en évidence l'influence du type de sollicitation et de l'épaisseur sur la distribution des contraintes.

Dans le cas d'une pression interne, les contraintes sont plus importantes, surtout pour les parois minces, ce qui amplifie les différences entre les deux modèles. Le modèle de Mooney-Rivlin tend à prédire des contraintes plus élevées dans ce régime, du fait de sa formulation plus complète.

En revanche, sous pression externe seule, les contraintes sont plus modérées et la différence entre les deux modèles devient beaucoup moins marquée. Un écart subsiste néanmoins lorsque l'épaisseur du cylindre est faible.

En conclusion, le choix du modèle hyper-élastique est d'autant plus critique que la structure est soumise à des sollicitations internes importantes et présente une paroi mince, ce qui souligne l'intérêt d'une modélisation adaptée aux conditions réelles de chargement.

Références bibliographique

[1] : Marc Carrega ‘Matériaux polymères ‘ .Dunod (2007)

[2] : Patricia Saad Septembre 2003, modélisation et identification du comportement non linéaire des cales caoutchouc, thèse de Doctorat

[3] : Erwan Verron, Modalisation du comportement des structures et des matériaux élastomères, mémoire d’habilitation à diriger des recherches école centrale de Nantes 2003.

[4] : IDA Raoult structures élastomères sous chargement cyclique comportement –fatigue-, durée de vie, thèse de doctorat jainvier 2005, laboratoire de mécanique des solide umr 7649-cnrs.

[5] : Adnane Boukamel. Modélisation mécaniques et numériques des matériaux et structure en élastomères, octobre 2006.

[6] : Gacem Hatem comportement Visco-hypérelastique des élastomères-Visco-élasticité non Linéaires applications aux multicouches, Thèse de doctorat, décembre 2007, l’université paris.

[7] : Gilles Marckmann. Contribution a l’étude des élastomères et des membranes soufflées Mécanique [physics.med-ph]. Ecole Centrale de Nantes (ECN); Université de Nantes, 2004. Français.

[8] Safia Bouzidi., Modélisation micro-mecanique du comportement hyper-élastique des Élastomères composite, (2006). Thèse magister, université de Bejaia

[9] Patricia Saad, modélisation et identification du comportement non linéaire cales en caoutchouc thèse doctorat l’école central de Lyon.

[10] Jean Coirier, « Mécanique des milieux continus», Dunod, 2001.

[11] Jean Christophe Petiteau, Caractérisation expérimentale et modélisation du comportement

des elastomeres en dynamique rapide, Ecole Central de Nante, 2012.

[12] Ogden R.W. Large deformation et isotropic elasticity in the correlation of theory and Experiment for incompressible rubber-like solids .Proc. R. London, ser .A 326,565-584. (1972).

[13] Fabrice DELEAU ; comportement tribologique et vibro-acoustique d'un contact Élastomère / verre. Thèse de Doctorat 2009, École Centrale De Lyon.

[14] Holzapfel GA (2000) Nonlinear solid mechanics a continuum approach for engineering, 1st edn. Wiley, Chichester

[15] Mooney, M.: A theory of large elastic deformation. Journal of applied physics 11(9), 582-592 (1940).

[16] Treloar, L.: The elasticity of a network of long-chain molecules. I. Transactions of the Faraday Society 39, 36-41 (1943).

[17] G .Marckmann, E Verron: Rubber chemistry and technology 79 (5), 835-858, 2006

Résumé

Ce mémoire de fin d'étude porte sur l'étude comparative des modèles hyper-élastiques dans le but d'optimiser l'épaisseur des cylindres soumis à des pressions internes. Le travail a commencé par une présentation des généralités sur les élastomères, mettant en évidence leurs propriétés non linéaires et leur comportement caoutchoutique. Ensuite, un rappel des principes de la mécanique des milieux continus en grandes déformations a été présenté, afin d'établir un cadre théorique solide pour la modélisation. Enfin, deux lois de comportement hyper-élastique ont été comparées pour simuler le comportement mécanique du cylindre sous pression, dans le but de déterminer la loi la plus adaptée à une optimisation de l'épaisseur.

Mots-clés : Elastomères, Hyper-élasticité, Optimisation, Epaisseur, cylindre, Pression, Modélisation.

ملخص باللغة العربية

يتناول هذا العمل دراسة سلوك أسطوانة مصنوعة من مادة مطاطية عند تعرضها لضغط داخلي، وذلك من خلال مقارنة بين عدة نماذج فائقة المرونة. تهدف الدراسة إلى تحديد النموذج الأنسب لتمثيل تشوه السماكة بدقة في حالة التشوهات الكبيرة. تم الاعتماد على النماذج الرياضية الشهيرة التي تصف سلوك المواد المطاطية، مع التركيز على خصائص هذه المواد واستجاباتها الميكانيكية تحت تأثير الأحمال. كما تم استخدام المحاكاة العددية لتحليل سلوك الأسطوانة واستخراج نتائج تساعد على مقارنة فعالية كل نموذج في تمثيل الظاهرة المدروسة. وقد أظهرت النتائج اختلافات واضحة بين النماذج من حيث الدقة والاستقرار العددي، مما يسمح باختيار النموذج الأكثر ملاءمة حسب نوع التطبيق الهندسي المراد.

الكلمات المفتاحية

الإيلاستوميرات، المرونة الفائقة، التحسين، السماكة، الأسطوانة، الضغط، النمذجة.

Abstract in English

This Master's thesis focuses on the comparative study of hyperelastic models to optimize the thickness of cylinders subjected to internal pressure. The study begins with a general overview of elastomers, highlighting their nonlinear characteristics and rubber-like elasticity. It then provides a theoretical reminder of continuum mechanics under large deformations, essential for accurate modeling. Finally, two hyperelastic constitutive laws were compared to simulate the mechanical behavior of the pressurized cylinder, aiming to identify the most suitable model for thickness optimization.

Keywords: Elastomers, Hyperelasticity, Optimization, Thickness, Cylinder, Pressure, Modeling.