

THÈSE

Présentée par

DJEMA Amar

Pour l'obtention du grade de

DOCTEUR EN SCIENCES

Filière : Physique

Option : Physique théorique

Thème

*Sur la dynamique non linéaire
de l'écoulement d'un film fluide
non newtonien sur un plan incliné :
Modèles et bifurcations*

Soutenue le : 27/10/2016

Devant le Jury composé de :

Nom et Prénom	Grade	
Mr BECHIR Hocine	Professeur	Univ. de BEJAIA
Mr AMAOUCHE Mustapha	Professeur	Univ. de BEJAIA
Mr BOUTOUDJ Mohamed Saïd	Professeur	Univ. de Tizi Ouzou
Mr DEBIANE Mohamed	Professeur	USTHB Alger
Mr OUICHAOUI Saad	Professeur	USTHB Alger
Mr AITABDERAHMANE Hamid	A. Prof. MASDAR Inst. Dubai, Emirates	Invité

Année Universitaire :2016/2017.

REMERCIEMENTS

Les travaux présentés dans ce mémoire ont été effectués au sein du Laboratoire de Physique Théorique de l'Université A.MIRA, Béjaïa sous la direction de Monsieur le Professeur M. AMAOUCHÉ. Qu'il me soit permis de lui exprimer ici mes sincères remerciements et ma profonde reconnaissance pour ses conseils et suggestions.

J'adresse mes plus vifs remerciements à Monsieur le professeur H. BECHIR qui, malgré ses multitudes occupations m'a fait l'honneur d'accepter de présider le jury de cette thèse.

J'exprime mes vifs remerciements à Messieurs les professeurs M. BEBIANE, S. OUICHAOUI et M.S. BOUTOUDJ ainsi le professeur associé H. AIT ABDERRAHMANE pour avoir accepté d'examiner ce travail et de siéger à ce jury de soutenance.

Enfin, je ne serai oublier mes collègues du Laboratoire de Physique Théorique, plus particulièrement Monsieur Faïçal Nait BOUDA et Madame Lamia BOURDACHE.

Table des matières

Table des matières	1
remerciements	2
Introduction	4
1 Formulation du problème et étude de la stabilité linéaire	9
1.1 Présentation du problème	9
1.1.1 Rhéologie du fluide	10
1.1.2 Mise en équations du problème	13
1.1.3 Conditions aux limites	13
1.1.4 Solution de l'écoulement de base	15
1.1.5 Echelles caractéristiques et équations adimensionnées	16
1.2 Analyse de la stabilité linéaire	17
1.2.1 Equations aux perturbations linéarisées	18
1.2.2 Équations types d'Orr-Sommerfeld	21
1.2.3 Résolution Asymptotique (Onde Longue)	23
1.2.4 Résolution numérique	29
1.3 Conclusion	31
2 Modélisation et Technique de Régularisation	33
2.1 Equation de couche limite	34
2.2 Les équations non-linéaires d'évolution	40

2.2.1	Modèles bidimensionnels	40
2.2.2	Modèles tridimensionnels	50
2.3	Simplification du modèle complet 2D d'ordre deux	54
2.3.1	Modèle simplifié type simplification adiabatique	54
2.3.2	Modèle réduit	54
2.3.3	Régularisation du modèle réduit	57
2.4	Conclusion	58
3	Validation des modèles par analyse de stabilité	59
3.1	Stabilité linéaire	59
3.1.1	Approche temporelle	59
3.1.2	Approche spatio-temporelle	70
3.2	Stabilité non linéaire : Ondes stationnaires	75
3.2.1	Formulation du système dynamique	75
3.2.2	Les points fixes	77
3.2.3	Stabilité et bifurcation des points fixes	79
3.2.4	Résolution numérique	86
Conclusion générale		102
Annexes		105
Bibliographie		112

Nomenclature

Grandeur	Notation et expression
x, y, z et t	Coordonnées de l'espace et du temps
g	Champ gravitationnel
v	Champ de vitesse
u, v, w	Composantes du vecteur vitesse
p	Pression
P_a	Pression atmosphérique
n	Vecteur normal à la surface libre
n	Indice du comportement non newtonien
Id	Matrice identité
D	Tenseur des déformations
\tilde{K}	Courbure
h	Hauteur du film
β	Angle d'inclinaison du substrat par rapport à l'horizontale
σ	Tension superficielle
σ	Tenseur des contraintes
τ	Tenseur des contraintes visqueuses
μ	La viscosité dynamique du fluide
$\partial_{x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}$	Dérivée partielle par rapport à x_i
div , grad	Opérateurs divergence et gradient

Introduction générale

Le problème des films minces s'écoulant sur un plan incliné est pertinent pour une large classe de phénomènes naturels (ruisselement des eaux, écoulement de la lave volcanique) et pour leurs intérêts en mécanique (lubrification, échangeurs de chaleur) et en génie des procédés (réacteurs chimiques, évaporateurs, condenseurs). L'écoulement d'un film mince constitue aussi un problème de référence de la théorie du chaos spatio-temporel, il offre une solution de base relativement simple permettant d'analyser les phénomènes de bifurcation rencontrés dans des situations plus complexes. Ce problème a fait l'objet d'études intensives depuis l'article de Nusselt [1] qui a établi une solution stationnaire de l'écoulement laminaire de film mince liquide sur un plan incliné. Cet écoulement devient instable lorsque les effets d'inertie surpassent les effets de pression hydrostatique et se comporte comme un amplificateur du bruit ambiant à partir duquel se forment spontanément des trains d'onde irréguliers se propageant vers l'aval. Cette instabilité est d'origine gravitaire, qui se produit à des nombres de Reynolds modérés. Des modes interfaciaux (de surface libre) dominés par la capillarité apparaissent. Les ondes qui en résultent ont une échelle de longueur beaucoup plus grande que l'épaisseur de film et deviennent rapidement tridimensionnelles. Quoique d'origine interfaciale, elles s'apparentent aux modes de Herbert (motifs de chevrons) ou de Klébanoff (instabilité synchrone) décris dans les couches limites. Un autre type d'instabilité d'origine visqueuse (mode de cisaillement), cette fois-ci, insensible aux effets de la tension superficielle, apparaît à de faibles inclinaisons du plan et à des nombres de Reynolds élevés. La nature sous critique des bifurcations de Hopf qui s'y produisent confère à l'écoulement des caractéristiques semblables à celles des couches limites transitionnelles. Cette similitude

laisse penser que les progrès réalisés dans la compréhension de l'apparition du chaos au sein des films sont autant d'éléments précieux apportés au problème de la transition vers la turbulence dans les couches limites.

Comme mentionné auparavant, dans le cas des films minces, l'instabilité se produit à faible nombre de Reynolds, d'où une grande cohérence de l'écoulement suivant l'épaisseur du film qui rend sa description possible à l'aide d'un système de faible dimension (petit nombre de variables internes dont les plus pertinentes sont l'épaisseur du film et le débit local). La littérature abonde de travaux consacrés à la recherche de modèles décrivant le développement des ondes de surface dans le cas des fluides newtoniens[2][3][4][5].

Trois paramètres de base indépendants apparaissent dans les équations sans dimension du problème ; en plus de l'angle d'inclinaison β qui représente les effets de la gravité, on choisit, par exemple, le nombre de Reynolds R et le nombre de tension superficielle (nombre de Weber modifié) W qui donnent, respectivement, l'importance relative des effets d'inertie et de la tension superficielle par rapport à ceux de viscosité. Dans une certaine gamme de ces paramètres, des expériences[references] ont révélé que les ondes de surface présentent souvent un large spectre d'amplitude, longueur et vitesse d'onde. Ces ondes apparaissent, tout d'abord, comme courtes, périodiques et peuvent évoluer vers un état fortement irrégulier. Comme décrit par Chang [6] et rapporté par Oron et Gottlieb [7], on distingue dans l'évolution du film quatre étapes principales :

- (i) l'évolution spatio-temporelle de l'instabilité primaire, celle-ci est bidimensionnelle. Le caractère convectif de cette instabilité a été vérifié expérimentalement par Liu et al.[8] et démontré théoriquement par Joo et Davis[9],
- (ii) la saturation de l'amplitude des ondes primaires par des effets faiblement non linéaires dont la forme demeure quasi-stationnaire sur une distance de quelques longueurs d'onde [10],
- (iii) les ondes saturées subissent une instabilité secondaire 2D conduisant à la formation d'ondes bidimensionnelles rapides de grande amplitude,
- (iv) l'amplification des perturbations transversales pour former une structure essentiellement tridimensionnelle souvent accompagnée d'une dynamique chaotique.

Ces étapes ont été également observées dans les expériences menées par J.Liu et al. [8][11][12]. Il est établi à la fois à partir de simulations numériques et des expériences que les structures d'ondes solitaires jouent un rôle central dans le comportement de l'écoulement. Comme le montrent les calculs de Malamataris et al. [13], les profils de vitesse au-dessous des ondes solitaires sont fortement déformés par rapport à la vitesse d'écoulement de base et la dynamique devient complexe. Il est donc utile, pour une compréhension fondamentale de l'écoulement, de développer des systèmes réduits qui peuvent être exploités à la fois analytiquement et numériquement. Étant donné que l'instabilité se manifeste par des ondes de surface dont la longueur d'onde est, à l'exception de très faibles inclinaisons, beaucoup plus grande que l'épaisseur du film, un développement asymptotique près de la criticalité a été mis en évidence en premier par Benney [14]. Une équation dite de Benney (BE) qui permet la description de l'évolution du film au voisinage de la criticalité est ainsi établie. Les variables de l'écoulement dépendent alors toutes de la forme locale de l'interface. Même si l'équation Benney (BE) contient différents mécanismes physiques et est potentiellement capable de décrire le voisinage du comportement nonlinéaire critique, elle perd sa pertinence physique lorsque les effets convectifs deviennent significatifs, en raison de la production d'ondes plus courtes. Afin de surmonter certains des inconvénients associés à l'équation de Benney, plusieurs améliorations ont été récemment proposées. Une équation d'évolution unique, contenant les effets de dissipation de second ordre via une échelle appropriée a été proposée par Panga et Balakotaiah [15]. Ruyer-Quil et Manneville [16] ont montré que le modèle Panga et Balakotaiah peut être modifié de telle sorte que ses termes inertIELS correspondent à l'équation de Ooshida [17]. L'échec des modèles de grandes ondes pour décrire correctement les comportements non linéaires loin de la criticalité est en partie dû à leur incapacité à capturer tous les effets d'inertie. La façon d'améliorer la modélisation, selon Ruyer-Quil et Manneville [3], serait d'introduire le débit local qui devient une variable effective juste après la formation de l'onde. Un tel modèle a été introduit par Shkadov [18] en utilisant une approche de couche limite intégrale (IBL). Cette théorie combine l'hypothèse de grandes ondes avec la méthode de l'épaisseur moyenne de type Karman-Pohlhausen, utilisée en couche limite. En dépit de son succès pour décrire les régimes non linéaires pour des nombres de Reynolds

modérés, l'approche IBL ne prédit pas avec précision le comportement de l'écoulement au voisinage du seuil d'instabilité comme l'équation de Benney le permet avec succès. Ce défaut est dû, comme nous le verrons plus tard, au fait que l'IBL n'est cohérente que jusqu'à l'ordre zéro par rapport au paramètre de grande onde près de la criticalité. Une meilleure prise en compte des premiers termes convectifs près de la criticalité est donc nécessaire pour éliminer cet inconvénient. Le remède a été trouvé par Ruyer-Quil et Manneville [3][19] en utilisant une approche de couche limite intégrale aux résidus pondérés (WRIBL). Leur modèle, développé pour les deux approximations du premier et du second ordre, a corrigé l'incapacité de l'approche Shkadov à converger au seuil de la stabilité linéaire et a permis de produire des solutions pour une plus grande gamme de nombres de Reynolds que celle dans le cas de l'équation de Benney. Il a été démontré [3] que les deux modèles du premier et du second ordre concordent bien avec les expériences effectuées par Kapitza et Kapitza [20] pour le cas d'un plan vertical. Cependant, seul le modèle du second ordre concorde bien avec les résultats expérimentaux de Liu et al.[8] pour une solution de glycérine à l'eau sur un plan incliné. L'approche de WRIBL a été étendue aux écoulements non isothermes par Ruyer-Quil et al.[21] et aux écoulements de deux couches fluides par Amaouche et al.[5].

Dans la présente étude, il s'agira d'une extension de l'approche (WRIBL) au cas de fluide non-newtonien, tout en proposant une procédure beaucoup plus appropriée. En effet, il est important de comprendre comment les effets non-newtoniens affectent la dynamique du film car ils sont présents dans une large gamme d'applications physiques et technologiques. Par exemple, ces effets spécifiques sont rencontrés dans des situations telles que la fabrication de plastique, des procédés de revêtement, mouvements fluides biologiques, les flux géologiques... Notre intérêt est porté spécialement sur des fluides dont le comportement rhéologique peut être décrit par un modèle de loi de puissance qui est une équation constitutive relativement simple. Le comportement non newtonien du fluide est caractérisé par un indice de puissance désigné par " n ", le cas newtonien est obtenu pour $n = 1$.

Dans ce domaine, il y a peu d'études contrairement au cas newtonien. Lin et Hwang [22] ont utilisé la méthode des échelles multiples pour résoudre une équation non linéaire de type

Benney. Leurs résultats indiquent que l'instabilité sous-critique et une solution explosive se produisant à faibles indices de loi de puissance. Une région supercritique et une région inconditionnelle stable existent uniquement lorsque cet indice est supérieur à une certaine valeur critique. Une équation de type Benney a été également utilisée et numériquement intégrée dans le domaine périodique par Miladinova et al. [23], qui ont montré que la forme et l'amplitude des ondes progressives sont fortement dépendantes des propriétés non-newtoniennes du fluide. La méthode intégrale de couche limite a été appliquée par Dandapat et Mukhopadhyay [24] pour obtenir une équation d'évolution pour les ondes connues sous le nom cinématiques et inertielles. Ils ont constaté, entre autres résultats, que l'exposant de loi de puissance joue un rôle de premier plan dans le contrôle des effets de tension superficielle. Sisoev et al. [25] présentent une analyse de bifurcation des ondes stationnaires en utilisant une équation similaire à celle obtenue dans [24]. Des limitations similaires à celles décrites ci-dessus ont également été rencontrées lors de l'utilisation de la théorie de la lubrification ainsi que dans la procédure de Shkadov pour les écoulements de film liquide non-newtonien.

Dans ce manuscrit, le premier chapitre est consacré à la formulation mathématique du problème objet de l'étude en donnant les équations gouvernantes sous forme dimensionnelle et adimensionnelle, faisant apparaître les paramètres du problème. L'analyse de stabilité linéaire conduit à un système de type Orr-Sommelfeld résolu numériquement par la méthode Runge-Kuta associée à la méthode de Riccati[26]. Dans le deuxième chapitre, nous dérivons un ensemble de modèles en équations d'évolution, afin de décrire la dynamique non linéaire du film, par la méthode de Galerkin sous l'hypothèse des grandes ondes. Un système de deux équations réduit et régularisé est obtenu en utilisant l'approximation de Padé[21]. Le chapitre trois est consacré à la validation des modèles élaborés au chapitre précédent. En premier lieu, une comparaison avec les résultats de la stabilité linéaire, obtenus au premier chapitre, est effectuée. Par la suite, une étude non linéaire du modèle réduit régularisé est abordée dans le cadre des ondes stationnaires afin d'examiner la nature des différentes bifurcations qui apparaissent conduisant au chaos.

Chapitre 1

Formulation du problème et étude de la stabilité linéaire

Dans ce chapitre, nous développons la stabilité linéaire de l'écoulement d'un film mince, à surface libre, sur un plan incliné étendu. Cet exemple de configuration a été utilisé par plusieurs auteurs, à commencer par Kapitza, et reste un exemple de base pour toute tentative d'étude théorique ou expérimentale dans le cas des domaines étendus à surface libre[20]. Dans notre cas, le fluide considéré est non-Newtonien avec une loi de comportement de type loi de puissance. En premier, on présente la configuration que nous allons étudier, les équations gouvernantes sous forme adimensionnelle, les équations linéarisées de type Orr-Sommerfeld. Par la suite, une résolution asymptotique et numérique de ces dernières est effectuée.

1.1 Présentation du problème

Nous considérons un écoulement incompressible d'un film mince liquide non newtonien sous l'effet de la gravité le long d'un plan incliné, avec un angle d'inclinaison β par rapport à l'horizontale. Un système de coordonnées cartésiennes (x, y, z) est adopté : l'axe des x selon le sens de l'écoulement, l'axe des y étant perpendiculaire au plan et l'axe des z étant la direction

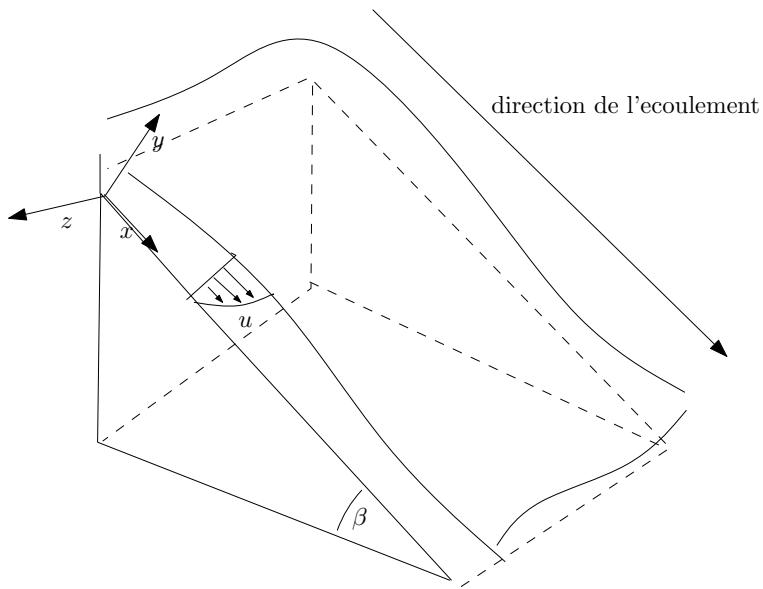


FIGURE 1.1 – Ecoulement d'un film sur un plan incliné

transversale de l'écoulement (voir figure 1.1). Dans ce qui suit, les hypothèses suivantes sont considérées comme telles :

- La géométrie du système est supposée infinie dans les directions x et z .
- On néglige toute circulation d'air au-dessus du film.
- La pression de l'air est supposée constante et égale à P_a .
- Le milieu considéré est homogène et isotrope.
- La tension superficielle entre le fluide et le milieu extérieur σ est supposée constante.

1.1.1 Rhéologie du fluide

La plupart des fluides, combinent plusieurs caractéristiques qui ne sont pas entièrement déterminées. Il est donc difficile de comprendre parfaitement les phénomènes observés. La détermination des lois qui répondent le plus largement possible à ces caractéristiques s'inscrit dans la discipline de la rhéologie. Par ailleurs, les équations régissant les écoulements des fluides non-newtoniens sur un plan incliné sont fort complexes et n'admettent pas souvent

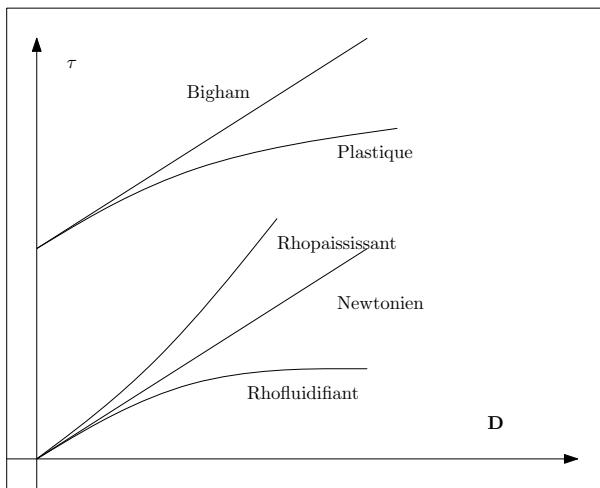


FIGURE 1.2 – Relation entre le tenseur des contraintes visqueuses τ et tenseur des taux de déformation D pour différents types de fluides

de solutions stationnaires par un calcul analytique, ceci rend l'analyse de la stabilité plus difficile à mener. Parmi les modèles de fluides où la solution analytique de l'écoulement de base est envisageable, on cite le cas de fluides en loi de puissance qui fera l'objet de notre étude. La nature du fluide est représentée par le tenseur de contraintes visqueuses τ . Il dépend du tenseur taux de déformation D , tel que

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} u_x & (u_y + v_x)/2 & (u_z + w_x)/2 \\ (u_y + v_x)/2 & v_y & (v_z + w_y)/2 \\ (u_z + w_x)/2 & (v_z + w_y)/2 & w_z \end{pmatrix}$$

La relation entre les tenseurs τ et D est souvent complexe (Figure 1.2) et dépend des propriétés constitutives du fluide considéré. Dans notre cas, cette relation s'écrit sous la forme suivante :

$$\tau = 2\mu D$$

Où μ est la viscosité dynamique du fluide, et est reliée à une puissance du taux de cisaillement par la formule, appelée "loi de puissance", donnée par

$$\mu = K|\dot{\gamma}|^{n-1} \quad (1.1)$$

avec K est sa consistance (en $Pa.s^n$), considéré constante et indépendante de la température et $\dot{\gamma}$ est le second invariant du tenseur des déformations, défini par :

$$\dot{\gamma}^2 = 2 \operatorname{Tr}(\mathbf{D}^2)$$

Dans ce qui suit, on note par η la quantité :

$$\eta = |\dot{\gamma}|^{n-1} = \left\{ 2(u_x^2 + v_y^2 + w_z^2) + (u_y + v_x)^2 + (u_z + w_x)^2 + (v_z + w_y)^2 \right\}^{(n-1)/2} \quad (1.2)$$

L'indice n est appelé indice d'écoulement, il indique le degré du comportement non Newtonien. Il est adimensionnel et vaut 1 pour un fluide Newtonien et 0 pour un solide rigide, plus il s'éloigne de l'unité, plus les effets non newtonien sont importants.

En effet, $0 < n < 1$ correspond au comportement pseudo-plastique et $n > 1$ représente les dilatants (un comportement d'épaisseissement).

Dans le tableau ci-dessous, on donne quelques exemples de fluides en loi de puissance pour différentes valeur de n .

fluides	n	$K(gr/(cm s^{2-n}))$	$\rho(gr/cm^3)$	$\sigma(N/m^2)$
Mélange d'eau et d'éthylène glycol	2	0.00004241	1.226	0.045
Mélange d'eau et d'éthylène glycol	1.8	0.001428	1.238	0.045
Mélange de chaux et d'eau	1.47	$2.5 10^{-7}$	1.25	0.076
Mélange d'éthylène glycol, de glycérine et d'eau	1.37	0.04583	1.305	0.045
Mélange d'éthylène glycol et d'eau	1.18	0.007767	1.222	0.045
sang humain	0.9			
pétrole (en général)	0.8			
solution de napalm en kérospène	0.52	$5.35 10^{-3}$	0.8	0.026

Tableau 1.1 : Caractéristique physique de quelques exemples de fluides en loi de puissance

1.1.2 Mise en équations du problème

Le problème est régi par les équations suivantes :

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (1.3)$$

$$\rho(\partial_t + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad})\mathbf{v} = \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g} \quad \text{dans } \Omega. \quad (1.4)$$

Où $\Omega = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+ ; 0 < y < h(x, z, t)\}$ est le domaine occupé par le film.

L'équation (1.3) est l'équation de continuité dans le cas d'un fluide incompressible ($\rho = Cst$), assurant la conservation de la masse. L'équation (1.4) est celle de la conservation de la quantité du mouvement qui découle directement du principe fondamental de la dynamique. $\boldsymbol{\sigma}$ étant le tenseur de contraintes de Cauchy qui se décompose en une partie sphérique et une partie déviatrice sous la forme :

$$\boldsymbol{\sigma} = -P\mathbf{I}_d + \boldsymbol{\tau},$$

où \mathbf{I}_d est le tenseur identité.

La partie sphérique $-P\mathbf{I}_d$ correspond aux actions de pression qui s'exercent seules en l'absence de gradient de vitesse. Le scalaire P est appelé pression hydrostatique, le signe négatif traduit le fait est qu'un fluide au repos est généralement en compression.

1.1.3 Conditions aux limites

Le film fluide étant supposé infini dans le sens de l'écoulement et dans la direction transversale, les seules conditions aux limites du problème sont celles à la paroi ($y = 0$) et à la surface libre du film ($y = h$) :

En $y = 0$

Le fluide s'écoule sur la paroi avec une condition d'adhérence (non glissement) et de non perméabilité

$$\mathbf{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow u = v = w = 0 \quad (1.5)$$

En $y = h(x, z, t)$

À la surface libre du film, deux conditions doivent être vérifiées :

- La condition cinématique traduisant l'imperméabilité de l'interface. Elle exprime le fait que le fluide et la surface libre d'équation $y - h = 0$, ont la même vitesse normale, d'où

$$(\partial_t + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})(h - y) = 0 \quad (1.6)$$

- La condition de raccordement des contraintes traduit la continuité de la contrainte tangentielle et le saut de la contrainte normale. Ce dernier est dû à la tension superficielle. Le cisaillement est nul pour l'air dans le cas d'un film à surface libre, d'où l'équation

$$(p_a - p + \sigma \operatorname{div} \mathbf{v} \mathbf{n}) \mathbf{n} + \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad (1.7)$$

où :

$$\mathbf{n} = \frac{(-h_x, 1, -h_z)^t}{\sqrt{1 + h_x^2 + h_z^2}}$$

étant le vecteur normal unitaire extérieur à la surface libre.

On a :

$$\operatorname{div} \mathbf{v} \mathbf{n} = -\tilde{K}$$

tel que \tilde{K} est la courbure de l'interface qui s'écrit

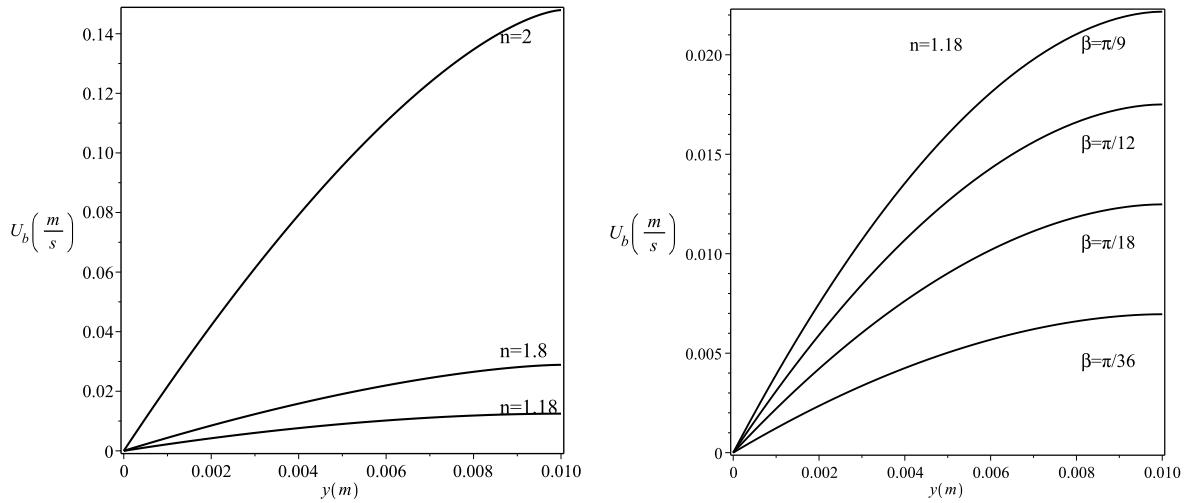
$$\tilde{K} = \frac{(1 + h_z^2)h_{xx} - 2h_xh_zh_{xz} + (1 + h_x^2)h_{zz}}{[(1 + h_x^2 + h_z^2)]^{3/2}}$$

La projection de la condition (1.7) par rapport à la normal nous donne la condition normale suivante :

$$P_a - P + \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = \sigma \tilde{K} \quad (1.8)$$

La projection selon les deux vecteurs tangents, $\mathbf{t}_x = \frac{(1, h_x, 0)^t}{\sqrt{1 + h_x^2}}$ et $\mathbf{t}_z = \frac{(0, h_z, 1)^t}{\sqrt{1 + h_z^2}}$, donne lieu aux deux conditions tangentielles suivantes

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{t}_i = 0 \quad i = x, z \quad (1.9)$$

FIGURE 1.3 – Influence de l'indice n sur la vitesse du profil de base.

1.1.4 Solution de l'écoulement de base

La solution stationnaire pour un écoulement parallèle du film de ce type de problème, s'écrit[24] :

$$U_b = \frac{n}{n+1} \left(\frac{\rho g \sin \beta}{K} \right)^{1/n} [h_0^{1+1/n} - (h_0 - y)^{1+1/n}] \quad (1.10)$$

$$V_b = W_b = 0 \quad (1.11)$$

$$P_b = P_a + \rho g \cot \beta (h_0 - y) \quad (1.12)$$

où h_0 désigne l'épaisseur du film.

Cette solution stationnaire simple est appelée solution de Nusselt[1]. Elle est sous forme d'une fonction puissance qui devient parabolique quand le fluide est newtonien ($n = 1$). La figure (1.3) indique l'influence de l'indice n sur le profil de vitesse avec une hauteur $h_0 = 1\text{cm}$ et des propriétés physiques correspondant aux valeurs données dans le tableau 1

1.1.5 Echelles caractéristiques et équations adimensionnées

La solution de Nusselt précédente donne lieu à un débit total établi à l'entrée de l'écoulement

$$Q_0 = \int_0^{h_0} U_b(y) dy = \frac{n}{2n+1} \left(\frac{\rho g \sin \beta}{K} \right)^{1/n} h_0^{2+1/n}.$$

Cela nous permet de définir une vitesse moyennée $u_m = \frac{Q_0}{h_0}$, choisie comme vitesse caractéristique. Par ailleurs, le problème étudié présente une anisotropie spatial due au domaine non borné. On fait alors intervenir deux échelles d'espace : la longueur d'onde typique l_0 , pour les directions longitudinale et transversale, et la hauteur $h_0 = \epsilon l_0$ pour la direction normale. L'introduction du petit paramètre ϵ vient du fait que les ondes observées sont à grandes longueurs d'ondes et à petites amplitudes. Une séparation entre l'échelle de variations suivant l'épaisseur du film y et les échelles de variations en temps t et en espace x, z est imposée.

Ainsi, les échelles caractéristiques sont $l_0, h_0, h_0/u_m$ et $Ku_m^n/\epsilon h_0^n$ pour x et z, y , le temps t et la pression p , respectivement. A partir de ces échelles caractéristiques, les variables adimensionnelles suivantes sont introduites :

$$\hat{x} = x/l_0, \hat{y} = y/h_0, \hat{z} = z/l_0, \hat{u} = u/u_m, \hat{v} = v/\epsilon u_m, \hat{w} = w/u_m, \hat{t} = tu_m/l_0, \hat{P} = \epsilon Ph_0^n/(Ku_m^n).$$

En utilisant ces variables adimensionnelles, les équations du mouvement (1.3,1.4) et les conditions aux limites (1.5,1.6,1.8,1.9) s'écrivent (en omettant le symbole " $\hat{}$ ") :

$$u_x + v_y + w_z = 0 \quad (1.13)$$

$$Re[u_t + uu_x + vu_y + wu_z] + P_x = G + 2\epsilon^2[\eta u_x]_x + [\eta(u_y + \epsilon^2 v_x)]_y + \epsilon^2[\eta(u_z + \epsilon w_x)]_z \quad (1.14)$$

$$Re^3[v_t + uv_x + vv_y + \epsilon wv_z] + P_y = -\epsilon GB + \epsilon^2[\eta(u_y + \epsilon^2 v_x)]_x + 2\epsilon^2[\eta v_y]_y + \epsilon^3[\eta(\epsilon v_z + w_y)]_z \quad (1.15)$$

$$Re^2[w_t + uw_x + vw_y + \epsilon ww_z] + P_z = \epsilon^2[\eta(u_z + \epsilon w_x)]_x + \epsilon[\eta(\epsilon v_z + w_y)]_y + 2\epsilon^3[\eta w_z]_z \quad (1.16)$$

tel que la viscosité est donnée par

$$\eta = \left\{ 2\epsilon^2(u_x^2 + v_y^2 + \epsilon^2 w_z^2) + (u_y + \epsilon^2 v_x)^2 + \epsilon^2(u_z + \epsilon w_x)^2 + \epsilon^2(\epsilon v_z + w_y)^2 \right\}^{(n-1)/2} \quad (1.17)$$

Les conditions aux limites correspondantes sont

– $y = 0$:

$$u = v = w = 0 \quad (1.18)$$

– $y = h(x, z, t)$:

$$v = h_t + u h_x + w h_z \quad (1.19)$$

$$\eta[2\epsilon^2 h_x(v_y - u_x) + (1 - \epsilon^2(h^2)_x)(u_y + \epsilon^2 v_x) - \epsilon^2 h_z(u_z + \epsilon w_x) - \epsilon^3 h_x h_z(\epsilon v_z + w_y)] = 0 \quad (1.20)$$

$$\eta[2\epsilon^2 h_z(v_y - w_z) + (1 - \epsilon^2(h^2)_z)(w_y + \epsilon^2 v_z) - \epsilon^2 h_x(u_z + \epsilon w_x) - \epsilon^3 h_x h_z(u_y + \epsilon w_y)] = 0 \quad (1.21)$$

$$P = \frac{2\eta}{(1 + h_x^2 + h_z^2)} \left\{ \begin{array}{l} \epsilon^3 (h^2)_x u_x + \epsilon^4 (h^2)_z w_z + \epsilon h_x h_z (u_z + \epsilon w_x) - \epsilon h_x (u_y + \epsilon^2 v_x) + \epsilon v_y \\ - \epsilon^2 h_z (\epsilon v_z + w_y) \end{array} \right\} - \frac{W}{(1 + h_x^2 + h_z^2)^{3/2}} ((1 + \epsilon^2 h_z^2) h_{xx} - 2\epsilon^2 h_x h_z h_{xz} + (1 + \epsilon h_x^2) h_{zz}) \quad (1.22)$$

Avec $G = \left(\frac{2n+1}{n}\right)^n$ traduisant l'effet de gravité [27].

Le groupe de nombres adimensionnels qui apparaissent sont :

- * le nombre de Reynolds $R = \rho h_0^n u_m^{2-n}/K$, mesure l'importance relative des effets inertIELS et visqueux dans l'écoulement.
- * le nombre de tension superficielle $W = \epsilon^2 R We$, qui est une autre formulation du nombre de Weber $We = \sigma/\rho h_0 u_m^2$ qui est le nombre de Weber, comparant les effets de la tension superficielle σ/h_0 et les effets d'inertie ρu_m^2 .
- * $B = \cot \beta$, rapport de la composante de l'accélération gravitationnelle normale au film et de sa composante dans le sens de l'écoulement.

1.2 Analyse de la stabilité linéaire

L'étude de la stabilité linéaire de l'écoulement de base, représenté par la solution de Nesselst, a été suffisamment étudiée par plusieurs auteurs pour le cas d'un film fluide Newtonien en écoulement sur un plan incliné [28], [29],[4],[30]. Les instabilités sont alors régies par les

équations d'Orr-Sommerfeld reliant les dérivées spatiales de la fonction du courant au profil de vitesse de l'état de base. Yih [31] en 1955 a été le premier à établir l'équation d'Orr-Sommerfeld pour un écoulement à surface libre, interface ou stratification. Benjamin [32], a par la suite, complété son étude en introduisant la tension de surface et a déterminé les conditions critiques d'instabilité.

Dans le cas non Newtonien, nous avons tout d'abord vérifié le théorème de Squire, qui énonce qu'une perturbation bidimensionnelle précède la perturbation tridimensionnelle. Nous avons ensuite établi un système d'équations linéaires type Orr-Sommerfeld pour un cas de fluides en loi de puissance, résolu numériquement et asymptotiquement.

1.2.1 Equations aux perturbations linéarisées

La solution de l'écoulement de base d'eqs (1.10)-(1.12), notée $\mathbf{V}_b = (U_b, V_b, W_b)^t$, P_b et H , une fois adimensionné s'écrit :

$$\mathbf{V}_b = \left(\frac{2n+1}{n+1} [1 - (1-y)^{1+1/n}], 0, 0 \right)^t$$

$$P_b = P_a + GB(1-y) \quad (1.23)$$

$$H = 1$$

Considérons l'écoulement perturbé par une perturbation infinitésimale $\mathbf{v}^* = (u^*, v^*, w^*)^t$, p^* et h^* de l'écoulement de base. Cette perturbation est définie par :

$$\mathbf{v}^* = \mathbf{v} - \mathbf{V}_b, \quad p^* = P - P_b(y), \quad h^* = h - 1 \quad (1.24)$$

où $\mathbf{v} = (u, v, w)$, p et h sont les champs perturbés.

Les équations de l'écoulement perturbé sont alors linéarisées, ce qui donne lieu à des équations aux perturbations linéaires sous forme

$$\operatorname{div} \nu \mathbf{v}^* = 0 \quad (1.25)$$

$$R(\partial_t + \mathbf{V}_b \partial_x) \mathbf{v}^* + U'_b v^* e_1 = -\operatorname{grad} p^* + \eta_0 \Delta \mathbf{v}^* + \eta_{0y} \tilde{\mathbf{v}}^* \quad (1.26)$$

où $\tilde{\mathbf{v}}^* = (u_y^* + v_x^*, 2v_y^*, v_z^* + w_z^*)^t$, $\eta_0 = (U'_b)^{n-1}$ et $e_1 = (1, 0, 0)^t$

Ces équations étant invariantes par translation suivant x , z et t , elles admettent une solution sous forme de modes normaux

$$[\mathbf{v}^*, p^*, h^*] = [\mathbf{v}_1, p_1(y), h_1] e^{i(\alpha x + \beta z - \omega t)} + c.c. \quad (1.27)$$

où $\mathbf{v}_1 = (u_1(y), v_1(y), w_1(y))^t$.

α et β représentent, respectivement, le nombre d'onde dans la direction longitudinale et transversale, et ω est la fréquence complexe.

En substituant (1.27) dans le système (1.25), (1.26), on obtient

$$i(\alpha u_1 + \beta w_1) + v'_1 = 0 \quad (1.28)$$

$$\begin{aligned} \alpha i R u_1(U - c) + R v_1 U' + i \alpha p_1 &= (U')^{n-1} [n u''_1 - (\alpha^2 + \beta^2) u_1 + (n-1) i \alpha v'_1] + \\ &\quad ((U')^{n-1})'(u'_1 + i \alpha v_1) \end{aligned} \quad (1.29)$$

$$\alpha i R v_1(U - c) + p'_1 = (U')^{n-1} [v''_1 - (\alpha^2 + \beta^2) v_1 + (n-1) i \alpha (u'_1 + i \alpha v_1)] + ((U')^{n-1})'(w'_1 + i \beta w_1) \quad (1.30)$$

$$\alpha i R w_1(U - c) + i \beta p_1 = (U')^{n-1} [w''_1 - (\alpha^2 + \beta^2) w_1] + ((U')^{n-1})'(w'_1 + i \beta w_1) \quad (1.31)$$

où la notation " ' " désigne la dérivée par rapport à la coordonnée normale y .

$c = \omega/\alpha$ est la vitesse de phase de la perturbation dans la direction de x .

Ainsi, nous avons quatre équations pour déterminer quatre amplitudes inconnues u_1 , v_1 , w_1 et p_1 satisfaisant les conditions aux limites suivantes

$$u_1(0) = v_1(0) = w_1(0) = 0 \quad (1.32)$$

$$v_1(1) + i \alpha (c - U_b(1)) h_1 = 0 \quad (1.33)$$

$$\lim_{y \rightarrow 1} \eta_0 [U''_b h_1 + u'_1 + i \alpha v_1] = 0 \quad (1.34)$$

$$\lim_{y \rightarrow 1} \eta_0 [w'_1 + i \beta v_1] = 0 \quad (1.35)$$

$$\lim_{y \rightarrow 1} \eta_0 [p_1 - GB h_1 - 2v'_1] + (\alpha^2 + \beta^2) W = 0 \quad (1.36)$$

Le système (1.28)-(1.36) constitue un problème aux valeurs propres généralisés qui n'admet de solution non nulle que si la fréquence ω et le vecteur d'onde (α, β) vérifient la relation de dispersion de la forme

$$D(\alpha, \beta, \omega, R, W, n, \dots) = 0. \quad (1.37)$$

Cette relation de dispersion (1.37) est à la base de l'étude de la stabilité linéaire. Dans le cas général, α , β et ω sont complexes. Pour simplifier, on se limite souvent à l'approche spatiale ou à l'approche temporelle. Dans l'approche spatiale, ω est réel et le nombre d'onde spatial α (ou β) est complexe. L'amplitude de la perturbation, dans ce cas, croît ou diminue dans l'espace alors que sa fréquence reste inchangée. L'utilisation de ce type d'approche permet d'étudier les instabilités convectives ou absolues. Dans l'approche temporelle, α et β sont des nombres d'onde réels et la fréquence est complexe $\omega = \omega_r + i\omega_i$, ω_r est la pulsation de la perturbation et ω_i est son taux de croissance. Les vitesses de phase dans les directions longitudinales et transversales sont définies respectivement par $c_x = \frac{\omega_r}{\alpha}$ et $c_z = \frac{\omega_r}{\beta}$.

Théorème 1.2.1. *À tout mode $((\alpha, \beta), \omega)$ instable de taux de croissance temporel ω_i pour un nombre de Reynolds R , peut être associé à un mode bidimensionnel $(\tilde{\alpha}, \tilde{\omega})$ de taux de croissance temporel $\tilde{\omega}_i = \omega_i \tilde{\alpha} / \alpha$ supérieur à ω_i , donc plus instable, pour le nombre de Reynolds $\tilde{R} = R\alpha / \tilde{\alpha}$ inférieur à R .*

Le théorème de Squire [33] permet de réduire le problème tridimensionnel à un problème bidimensionnel équivalent, comme cela a été vérifié dans le cas newtonien. Ici, nous allons vérifier que ce théorème reste vrai dans le cas des fluides en loi de puissance [34].

La transformation de Squire consiste à introduire le changement de variables suivant :

$$\tilde{\alpha}^2 = \alpha^2 + \beta^2, \quad \tilde{\alpha} \tilde{R} = \alpha R, \quad \tilde{\alpha} \tilde{u} = \alpha u_1 + \beta w_1, \quad \tilde{v} = v_1, \quad \tilde{p} = p_1,$$

$$\tilde{\omega} / \tilde{\alpha} = \omega / \alpha, \quad \tilde{W} / \tilde{\alpha} = W / \alpha, \quad \tilde{B} / \tilde{\alpha} = B / \alpha$$

En utilisant la transformation précédente, le système à quatre équations (1.28)-(1.31) se ramène alors en un système à trois équations

$$i\tilde{\alpha} \tilde{u} + \tilde{v}' = 0 \quad (1.38)$$

$$i\tilde{R}\tilde{u}(\tilde{\alpha}U - \tilde{\omega}) + \tilde{R}\tilde{v}U' + i\alpha\tilde{p} = (U')^{n-1}[n\tilde{u}'' - \tilde{\alpha}^2\tilde{u} + (n-1)i\tilde{\alpha}\tilde{v}'] + ((U')^{n-1})'(\tilde{u}' + i\tilde{\alpha}\tilde{v}) \quad (1.39)$$

$$i\tilde{R}\tilde{v}(\tilde{\alpha}U - \tilde{\omega}) + \tilde{p}' = (U')^{n-1}[\tilde{v}'' - \tilde{\alpha}^2\tilde{v} + (n-1)i\tilde{\alpha}(\tilde{u}' + i\tilde{\alpha}\tilde{v})] + 2((U')^{n-1})'\tilde{v}' \quad (1.40)$$

Le système (1.38)-(1.40) correspond à une perturbation bidimensionnelle avec un nombre de Reynolds $\tilde{R} = \frac{\alpha}{\tilde{\alpha}}R$ plus petit que le nombre de Reynolds tridimensionnel du système (1.28)-(1.31) puisque $\frac{\alpha}{\tilde{\alpha}} < 1$. Par conséquent, le théorème de Squire est vérifié.

1.2.2 Équations types d'Orr-Sommerfeld

On considère maintenant que l'écoulement perturbé est bidimensionnel dont la perturbation évolue selon la direction longitudinale. On pose alors, $c = c_x$ est la vitesse de phase.

On définit la fonction de courant Φ de la perturbation, par :

$$\Phi(x, y, t) = \Phi(y)e^{i\alpha(x-ct)} + c.c. \quad (1.41)$$

vérifiant

$$u = \Phi', \quad v = -i\alpha\Phi.$$

Ainsi, l'équation de conservation de la masse (1.38) est automatiquement vérifiée.

En substituant (1.41) dans (1.39) et (1.40), les équations linéaires de type Orr-Sommerfeld, pour les fluides en loi de puissance, s'écrivent :

$$\tau_n' = i\alpha\{[R(U_b - c) - 4i\alpha(U_b')^{n-1}]\Phi' - RU_b'\Phi + p^*\} \quad (1.42)$$

$$p^{*'} = i\alpha\tau_n - R\alpha^2(U_b - c)\Phi \quad (1.43)$$

où $\tau_n = n(U_b')^{n-1}(\Phi'' + \alpha^2\Phi)$ et $p^* = P + 2i\alpha(U')^{n-1}\Phi'$.

Les conditions aux limites sont :

$$\Phi(0) = \Phi'(0) = 0, \quad (1.44)$$

$$\tau_n(c - U_b) + ((U_b')^{n-1})'\Phi|_{y=1} = 0, \quad (1.45)$$

$$(U_b - c)p^* + (\alpha^2 W + G \cot \beta)\Phi|_{y=1} = 0. \quad (1.46)$$

L'utilisation du changement de variable τ_n dans les équations, nous a permis d'éliminer les singularités à l'interface $y = 1$.

On a utilisé la condition cinématique pour déterminer la valeur de h_1 , tel que

$$h_1 = \Re \left(\frac{\Phi(1)}{c - U_b} e^{i\alpha(x-ct)} \right) = \Re \left(\frac{\Phi(1)}{c - \frac{2n+1}{n+1}} e^{i\alpha(x-ct)} \right).$$

En éliminant la pression dans le système précédent, on obtient l'équation type Orr-Sommerfeld dans le cas :

a) $n > 1$:

$$\tau_n'' + \alpha^2 \tau_n - 4\alpha^2 [(U'_b)^{n-1} \Phi']' = i\alpha R \{(U_b - c)(\Phi'' - \alpha^2 \Phi) - U''_b \Phi\} \quad (1.47)$$

$$\Phi(0) = \Phi'(0) = 0, \quad (1.48)$$

$$\tau_n(1) - \frac{G}{c - \frac{2n+1}{n+1}} \Phi(1) = 0, \quad (1.49)$$

$$\alpha R \left(c - \frac{2n+1}{n+1} \right) \Phi'(1) - i\tau'_n(1) - \alpha \frac{\alpha^2 W + G \cot \beta}{c - \frac{2n+1}{n+1}} \Phi(1) = 0. \quad (1.50)$$

b) $n = 1$:

$$\tau_1'' + \alpha^2 \tau_1 - 4\alpha^2 \Phi'' = i\alpha R \{(U_b - c)(\Phi'' - \alpha^2 \Phi) - U''_b \Phi\} \quad (1.51)$$

où $\tau_1 = \Phi'' + \alpha^2 \Phi$.

$$\Phi(0) = \Phi'(0) = 0, \quad (1.52)$$

$$\tau_1(1) - \frac{3}{c - 3/2} \Phi(1) = 0, \quad (1.53)$$

$$\alpha R(c - 3/2) \Phi'(1) - i\tau'_1(1) = \alpha \frac{\alpha^2 W + 3 \cot \beta}{c - 3/2} \Phi(1) = 0. \quad (1.54)$$

avec

$$h_1 = \Re \left(\frac{\Phi(1)}{c - 3/2} e^{i\alpha(x-ct)} \right)$$

Le système d'équations avec les conditions aux limites représente un problème aux valeurs propres avec c comme valeur propre correspondante. L'intégration analytique de ce système d'équations est impossible dans le cas général. Elle peut être effectuée dans des situations asymptotiques pour les cas des courtes ($\alpha \gg 1$) et grandes ($\alpha \ll 1$) longueurs d'ondes.

Par conséquent, nous procédons par la méthode asymptotique, en cherchant une solution type grande longueur d'onde. Pour la résolution numérique, nous adoptons la méthode de Riccati[35].

1.2.3 Résolution Asymptotique (Onde Longue)

La difficulté consiste à déterminer les valeurs propres c (ou ω) ainsi que les fonctions propres Φ et ses dérivées associées au problème aux valeurs propres qui est définie par le système de type Orr-Sommerfeld et les conditions aux limites lorsque α appartient au voisinage de zéro. La solution est ainsi exprimée en séries de puissances de α [30] :

$$\tau_n = \tau_{n0} + i\alpha\tau_{n1} - \alpha^2\tau_{n2} + \dots \quad (1.55)$$

$$\Phi = \Phi_0 + i\alpha\Phi_1 - \alpha^2\Phi_2 + \dots \quad (1.56)$$

$$c = c_0 + i\alpha c_1 - \alpha^2 c_2 + \dots \quad (1.57)$$

En substituant (1.55)-(1.57) dans (1.47)-(1.50) et en collectant ordre par ordre, on obtient :
A l'ordre α^0 :

$$0 < y < 1 : \tau''_{n0} = 0 \text{ et } \tau_{n0} = n(U'_b)^{n-1}\Phi''_0 \quad (1.58)$$

$$y = 0 : \Phi_0 = \Phi'_0 = 0 \quad (1.59)$$

$$y = 1 : \tau'_{n0}(1) = 0 \quad (1.60)$$

$$c_0 = \frac{2n+1}{n+1} + G \frac{\Phi_0(1)}{\tau_{n0}(1)} \quad (1.61)$$

On pose $z = 1 - y$, la solution est

$$\Phi_0 = A_1 \frac{n}{G(2n+1)} \left(\frac{n}{n+1} z^{1+1/n} - z + \frac{1}{n+1} \right),$$

A_1 est une constante multiplicative arbitraire.

La contrainte tangentielle à la surface libre (1.61) détermine la vitesse de phase

$$c_0 = \frac{2n+1}{n}$$

et fait apparaître le caractère interfacial des ondes. Comme c_0 est réel positif alors les ondes se propagent dans le sens des x croissants et à une même célérité sans dispersion avec un taux de croissance nul. Donc, l'axe $\alpha = 0$ fait partie de la courbe de stabilité marginale et correspond à un saut hydraulique. Ceci est lié au fait que cet ordre d'approximation est sans inertie et correspond à un équilibre de forces gravité-visqueuse dont le champ des vitesses répond instantanément à toute perturbation interfacial sinusoïdale.

La figure 1.4 montre la variation de la vitesse de phase c_0 par rapport à l'indice du comportement non newtonien pour le cas limite des grandes ondes. Cette vitesse des ondes diminue quand l'indice n augmente et prend la valeur 2 comme cas limite. Quand n tend vers zéro la vitesse de phase croît vers l'infini.

A l'ordre α^1 :

$$0 < y < 1 : \tau''_{n1} = R \{(U_b - c_0)\Phi''_0 - U''_b\Phi_0\} \text{ et } \tau_{n1} = n(U'_b)^{n-1}\Phi''_1 \quad (1.62)$$

$$y = 0 : \Phi_1 = \Phi'_1 = 0 \quad (1.63)$$

$$y = 1 : \tau'_{n1} = B - \frac{(2n+1)^2}{n^2(n+1)} \quad (1.64)$$

$$c_1 = -\frac{2n+1}{n(n+1)}\tau_{n1} - G\Phi_1 \quad (1.65)$$

La fonction propre Φ_1 est considérée comme correction de Φ_0 , ce qui nous a permis d'annuler une constante d'intégration, donc on obtient :

$$c_1 = \frac{B}{n} - \frac{2(2n+1)^2R}{n^3(3n+2)G} \quad (1.66)$$

Cette équation montre que, pour α très proche de zéro, la partie imaginaire de la célérité change de signe par rapport au nombre de Reynolds R , supérieur ou inférieur à R_c [23], au-dessus duquel des perturbations ne sont pas atténuées :

$$R_c = \frac{n^2(3n+2)G}{2(2n+1)^2} \cot(\beta) \quad (1.67)$$

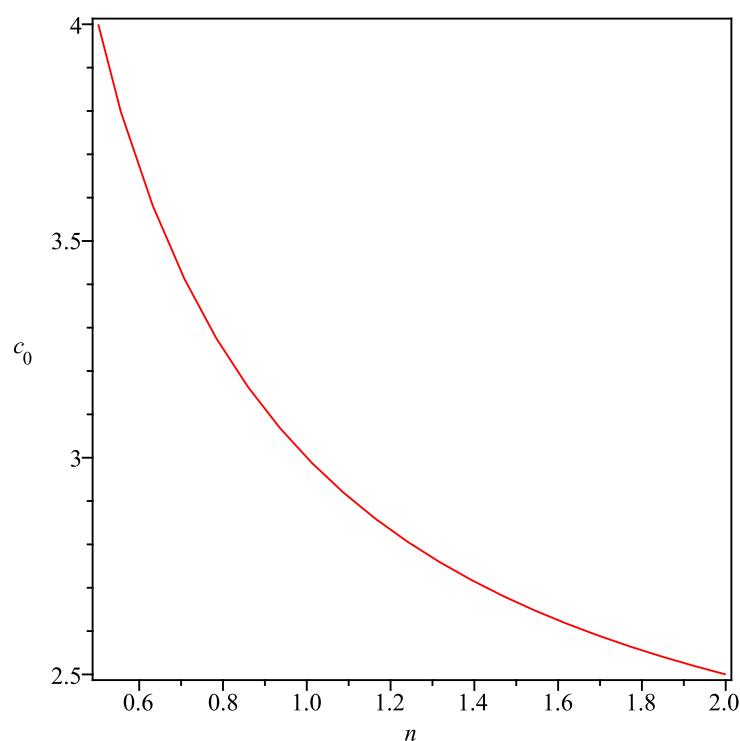


FIGURE 1.4 – variation de la vitesse de phase c_0 par rapport à l'indexe n

On remarque que le film peut être instable pour de faibles nombres de Reynolds, par exemple sur un plan vertical ($\beta = \pi/2$) $R_c = 0$.

A l'ordre α^2 et α^3 , on aura :

$$0 < y < 1 : \tau''_{n2} - \tau_{n0} + 4[(U'_b)^{n-1}\Phi'_0]' = R\{(c_0 - U_b)\Phi''_1 + c_1\Phi''_0 + U''_b\Phi_1\} \quad (1.68)$$

$$\tau_{n2} = n(U'_b)^{n-1}(\Phi''_2 - \Phi_0) \quad (1.69)$$

$$y = 0 : \Phi_2 = \Phi'_2 = 0 \quad (1.70)$$

$$y = 1 : \tau'_{n2} + R\left(\frac{2n+1}{n(n+1)}\Phi'_1 + c_1\Phi'_0\right) = \frac{n+1}{2n+1}B(nG\Phi_1 - c_1) \quad (1.71)$$

$$c_2 = -G\Phi_2 - c_1\tau_{n1} - \frac{2n+1}{n(n+1)}\tau_{n2} \quad (1.72)$$

$$0 < y < 1 : \tau''_{n3} - \tau_{n1} + 4[(U'_b)^{n-1}\Phi'_1]' = R\{(U_b - c_0)(\Phi''_2 + \Phi_0) - c_1\Phi''_1 - c_2\Phi''_0 - U''_b\Phi_2\} \quad (1.73)$$

$$\tau_{n3} = n(U'_b)^{n-1}(\Phi''_3 - \Phi_1) \quad (1.74)$$

$$y = 0 : \Phi_3 = \Phi'_3 = 0 \quad (1.75)$$

$y = 1$:

$$\begin{aligned} \tau'_{n3} + R\left(\frac{2n+1}{n(n+1)}\Phi'_2 + c_2\Phi'_0 + c_1\Phi'_1\right) &= -\frac{n(n+1)}{2n+1}\left[GB\Phi_2 - \left\{W - \frac{n(n+1)}{2n+1}c_2GB\right.\right. \\ &\quad \left.\left.- \frac{n^2(n+1)^2}{(2n+1)^2}c_1^2GB\right\}\Phi_0 + \frac{n(n+1)}{(2n+1)}c_1GB\Phi_{n1}\right] \end{aligned} \quad (1.76)$$

$$c_3 = -G\Phi_3 - c_2\tau_{n1} - c_1\tau_{n2} + \tau_{n3}(Ub - c_0) \quad (1.77)$$

Les résultats de chaque intégration nous informent, au seuil de la criticalité, sur les mécanismes physiques au début de l'instabilité. A l'ordre trois, la célérité c est donnée par :

$$c = c_0 + i\alpha c_1 - \alpha^2 c_2 - i\alpha^3 c_3 + \mathcal{O}(\alpha^3) \quad (1.78)$$

avec

$$c_0 = \frac{2n+1}{n} \quad (1.79)$$

$$c_1 = \frac{B}{n} - \frac{2(2n+1)^2 R}{n^3 (3n+2) G} \quad (1.80)$$

$$c_2 = \frac{(112n^3 + 260n^2 + 199n + 50)(2n+1)^3 R^2}{n^3 (5n+4) (4n+3) (3n+2) (n+1)^3 G^2} - \frac{(n+1)^2 B^2}{n^2 (2n+1)} \\ - \frac{(2n+1)(26n^5 + 8n^4 - 57n^3 - 68n^2 - 32n - 6) RB}{G n^4 (4n+3) (3n+2) (n+1)^2} \quad (1.81)$$

$$c_3 = d_0 R^3 + d_1 B R^2 + d_2 R^2 + d_3 R B^2 + \frac{n+1}{n(2n+1)} B^2 - \frac{(2n+1)}{G(n+1)n} W - \frac{(4n^2 - 16n - 3)}{3n(3n+1)(-1+2n)} \quad (1.82)$$

avec

$$d_0 = (460800 + 314549120n^4 + 36430720n^2 + 670864732n^6 + 640292694n^7 + 301013240n^9 + 484424793n^8 + 153021368n^{10} + 130880640n^3 + 6082560n + 535513848n^5 + 58936656n^{11} + 14678992n^{12} + 1710912n^{13})(2n+1)/(80n^7(3n+2)^2(5n+4)(6n+5)(4n+3)(n+1)^6(3n+4)(2+n)(2n+3)G^3)$$

$$d_1 = -(2n+1)^3(124032n^{11} + 829660n^{10} + 2732340n^9 + 6803361n^8 + 14799467n^7 + 25872826n^6 + 32838604n^5 + 28837600n^4 + 17009040n^3 + 6438720n^2 + 1416960n + 138240)/(60G^2 n^5 (3n+2)^2 (5n+4) (4n+3) (n+1)^5 (3n+4) (2+n) (2n+3) BR^2)$$

$$d_2 = -\frac{(2n+1)^3(2812n^4 + 10876n^3 + 14997n^2 + 8858n + 1904)}{24n^2(2+n)(n+1)^4(4n+3)(5n+4)(3n+2)G^2}$$

$$d_3 = -\frac{(n-2)(16n^3 + 47n^2 + 42n + 12)(2n+1)}{6n^3(2+n)(n+1)^2(3n+2)G}$$

La figure 1.5 présente la courbe de stabilité marginale, pour différentes valeurs de n , à l'ordre trois. Les solutions sont obtenues en annulant la partie imaginaire dans c . Cette solution asymptotique présente le même caractère qualitatif que celui dans le cas newtonien[36]. On constate qu'en s'éloignant légèrement du point critique ces dernières, calculées jusqu'à l'ordre trois, ne traduisent pas convenablement le mécanisme d'instabilité.

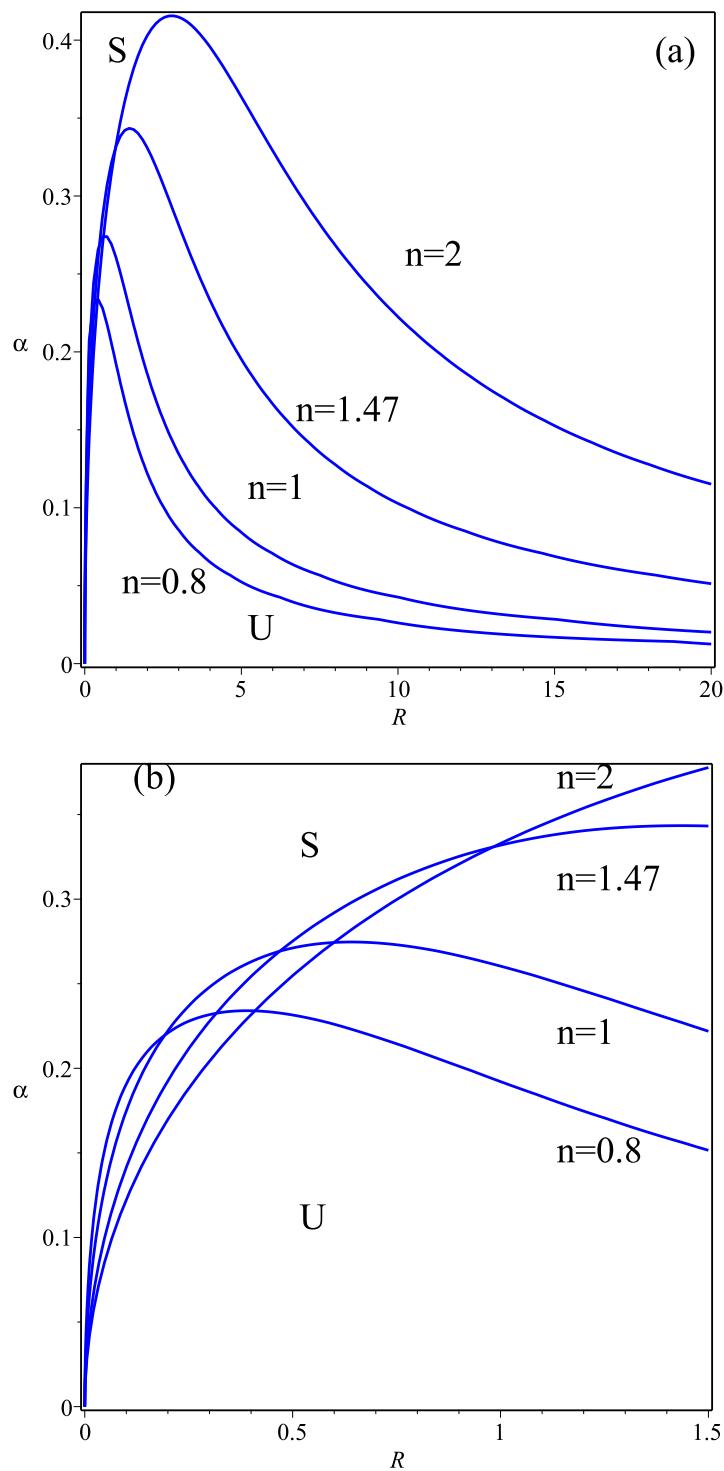


FIGURE 1.5 – Courbe de stabilité marginale donnés par le développement asymptotique pour différentes valeurs de n dans le cas $W = 10$ et $\beta = \pi/2$: (b) est un agrandissement de (a) au voisinage de zéro.

1.2.4 Résolution numérique

Dans la section précédente, nous avons adopté une méthode asymptotique pour résoudre le système de type Orr-Sommerfeld caractérisant l'instabilité qu'au voisinage du point critique. Les résultats de la section précédente sont insuffisants pour une étude de stabilité et pour valider les modèles qu'on aura à développer au chapitre suivant. La résolution numérique s'impose dans ce cas. Il est à noter que l'introduction de la variable τ_n n'est pas seulement une astuce numérique pour annuler la singularité liée à la divergence de la viscosité effective à la surface libre lorsque $n < 1$, mais aussi a une signification physique. En effet, τ_n représente l'amplitude de la perturbation des composantes du tenseur des contraintes de cisaillement $\tau_{xy} = \eta(u_y + v_x)$, qui doit rester finie non nulle à la surface libre malgré que la viscosité effective diverge. Le problème posé par cette singularité a déjà été remarqué, mais, celle-ci n'a pas été correctement traitée dans [25], en exprimant les conditions au niveau de la surface libre à une surface artificielle très proche de la surface libre, en utilisant la méthode de tir qui donne des résultats loin de la solution exacte.

Afin de surmonter les difficultés déjà citées, nous utilisons la méthode de Riccati pour chercher une solution numérique du problème type Orr-Sommerfeld. La théorie générale de cette méthode a été donnée initialement par Scott [37]. Davey [38] l'a appliquée à l'équation d'Orr-Sommerfeld, dans le cas d'une seule couche, pour le cas d'un fluide newtonien. Cette méthode a été aussi utilisée pour le même problème par Amaouche *et al.*[5] dans le cas de deux fluides superposés entre deux plaques infinies. Cette méthode permet de transformer notre problème aux valeurs propres en un problème non linéaire avec condition initiale ($z = 0$), dont les singularités en $y = 1$ seront traitées sans difficulté.

On considère le système d'Orr-Sommerfeld 1.42-1.46, réécrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{d}{dy} X = A_1 X + A_2 Y, \\ \frac{d}{dy} Y = B_1 X + B_2 Y \end{cases} . \quad (1.83)$$

où $X^t = (\Phi, \Phi')^t$, $Y^t = (\tau_n, p^*)^t$,

$$A1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha^2 & 0 \end{pmatrix}, A2 = \frac{1}{n}(U'_b)^{1-n} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B2 = i\alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$B1 = -i\alpha \begin{pmatrix} RU'_b & 4i\alpha(U'_b)^{n-1} - R(U_b - c) \\ -i\alpha R(U_b - c) & 0 \end{pmatrix}.$$

Introduisant maintenant, la matrice de Riccati \mathcal{R} à travers la transformation

$$X = \mathcal{R}Y. \quad (1.84)$$

En dérivant l'équation (1.84) par rapport à y , et en utilisant les équations (1.83), il s'ensuit que \mathcal{R} satisfait l'équation différentielle matricielle non linéaire du premier ordre, appelée équation de Riccati, suivante :

$$\frac{d}{dy}\mathcal{R} = -\mathcal{R}B1\mathcal{R} - \mathcal{R}B2 + A1\mathcal{R} + A2 \quad (1.85)$$

du fait que $X(0) = 0$ et $Y(0) \neq 0$ on a alors

$$\mathcal{R}(0) = 0, \quad (1.86)$$

Nous résolvons le problème aux valeurs initiales (1.85) et (1.86) par le schéma de Runge-Kutta d'ordre quatre. Pour remplir les conditions aux limites en $y = 1$, la valeur propre c doit être variée jusqu'à ce que

$$\det \left\{ \begin{pmatrix} (U'_b)^n(1) & 0 \\ \frac{c - U_b(1)}{\alpha^2 W + G \cot \beta} & 0 \end{pmatrix} \mathcal{R} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} = 0 \quad (1.87)$$

La courbe de stabilité marginale de la solution numérique présente la même allure que celle du cas newtonien. La figure 1.6 présente une comparaison entre les résultats de la résolution numérique avec les résultats du développement asymptotique pour les petits nombres d'ondes. Les nombres d'onde en fonction du nombre de Reynolds sont présentés pour deux classes de fluides représentées par l'indice n ($n = 0.8$ et $n = 1.47$) dans le cas d'un plan vertical $\beta = \pi/2$ et un $W = 10$. Les résultats numériques et asymptotiques concordent au voisinage de la criticalité. Au delà, la solution asymptotique diverge. Ces résultats mettent en évidence

la validité de la méthode proposée, utilisée pour la résolution numérique du système type Orr-Sommerfeld.

1.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons résolu asymptotiquement le problème linéaire dans le cas des grandes ondes ce qui nous a permis de donner explicitement le seuil d'instabilité de l'écoulement. En plus, nous avons aussi résolu numériquement les équations de type Orr-Sommerfeld en adoptant la méthode de Riccati. Une comparaison des résultats a été effectuée. Comme il est important de signaler que notre résolution numérique nous a permis de remédier au mauvais traitement de la singularité à la surface libre utilisé par plusieurs auteurs.

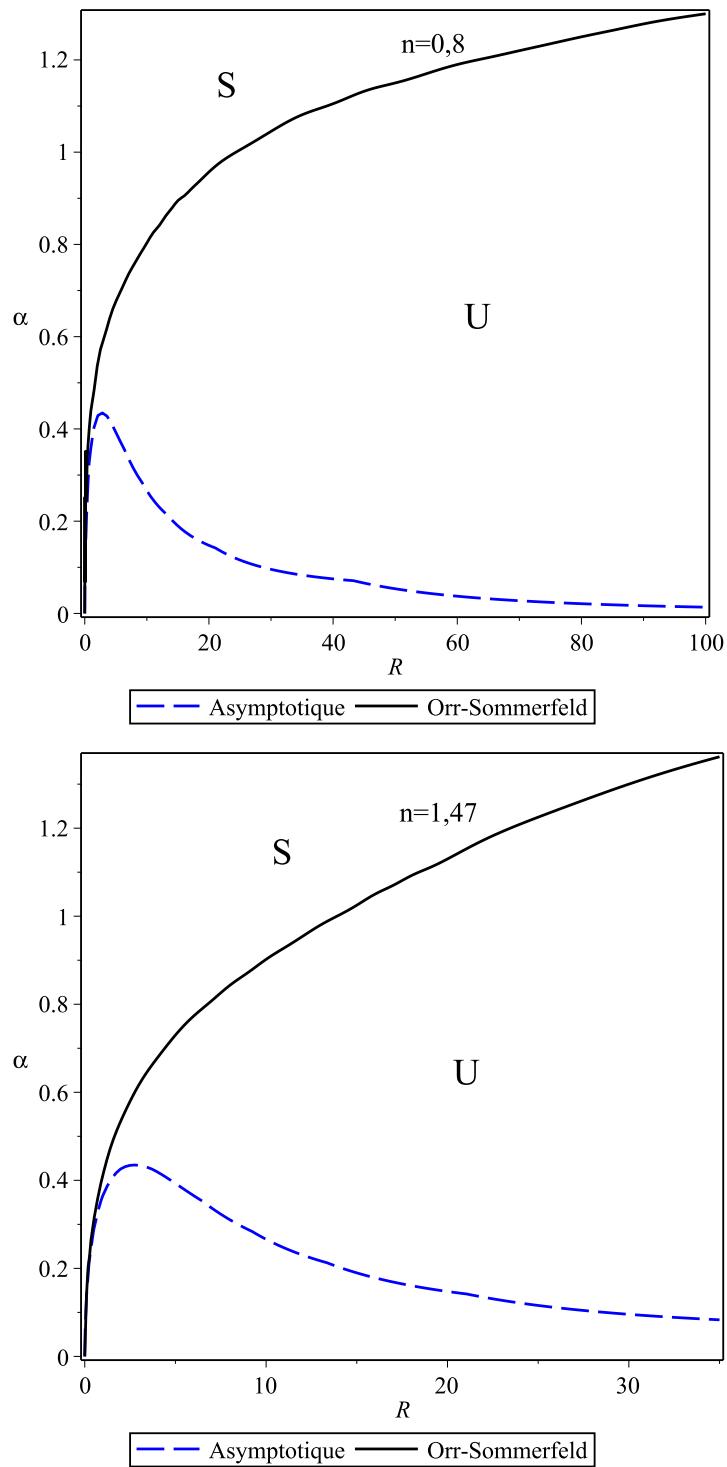


FIGURE 1.6 – Comparaison entre les résultats donnés par le développement asymptotique et la résolution numérique du système type Orr-Sommerfeld pour différentes valeurs de n .

Chapitre 2

Modélisation et Technique de Régularisation

L'analyse de stabilité menée au chapitre précédent a permis de déterminer le seuil d'instabilité (apparition d'ondes) ainsi que le nombre d'onde et la vitesse de phase associés. Au-delà du seuil, les ondes déclenchées par cette instabilité évoluent en aval en raison d'effets non linéaires, ce qui rend l'hypothèse de petites perturbations non valable. Les ondes se propagent beaucoup plus rapidement que la vitesse de phase calculée par la théorie linéaire. Dans le cas des domaines étendus de film liquide mince, la simulation de la dynamique non-linéaire du film est complexe et coûteuse en temps. Il est évident qu'on voudrait chercher des modèles à équations simples tout en gardant une bonne concordance avec les équations exactes. Dans ce chapitre, nous utilisons la modélisation asymptotique aux grandes longueurs d'ondes, combinée avec la technique des résidus pondérés. Cette méthode est relativement récente et elle décrit correctement aussi bien le début de l'instabilité que relativement loin du seuil. Cette approche a été suggérée par Ruyer-Quil et Manneville [39][3] et a été utilisée avec succès dans le cas des écoulements étendus de fluides newtoniens. Il s'agit alors de généraliser cette théorie au cas des fluides non newtoniens tout en introduisant des simplifications dans l'établissement des modèles. En premier, nous établirons des modèles complets d'ordre un et deux dans le cas 2D et 3D, ensuite, des modèles simplifiés sont proposés .

2.1 Equation de couche limite

Pour de faibles nombres de Reynolds à modérés, l'étude linéaire montre que l'instabilité de l'écoulement de Nusselt est entraînée par une distorsion interfaciale avec des longueurs d'ondes beaucoup plus grandes que l'épaisseur du film, sauf dans le cas des plans légèrement inclinés ($\beta < 1^\circ$)[40], ou bien pour des fluides avec une faible tension superficielle[40]. Nous ne tiendrons pas compte de ces situations extrêmes pour lesquelles l'instabilité devient une instabilité des ondes courtes.

On considère que l'écoulement est soumis à une perturbation de grande longueur d'onde λ dans la direction longitudinale. Dans ce cas, on pose $\epsilon = h_0 / \lambda$ ($\epsilon \ll 1$).

Ainsi, on a :

$$\partial_y \sim \epsilon^0 \text{ et } \partial_x \sim \partial_z \sim \partial_t \sim \epsilon^1$$

Système à l'ordre deux :

Le système d'équations (1.13)-(1.16) s'écrit à l'ordre ϵ^2 :

$$u_x + v_y + \epsilon w_z = 0 \quad (2.1)$$

$$Re [u_t + uu_x + vu_y + \epsilon w u_z] + P_x = G + (\eta u_y)_y + 2\epsilon^2 \{[\eta u_x]_x + [\eta v_x]_y + [\eta u_z]_z\} \quad (2.2)$$

$$P_y = -\epsilon GB + \epsilon^2 \{[\eta u_y]_x + 2[\eta v_y]_y\}, \quad (2.3)$$

$$Re^2 [w_t + uw_x + vw_y] + P_z = \epsilon [\eta w_y]_y + \epsilon^2 \{[\eta u_z]_x + [\eta v_z]_y\} \quad (2.4)$$

L'équation (2.2) tient compte des effets provenant des termes de dissipation visqueuse du second ordre $\sim u_{xx}$. Ces termes jouent un rôle important dans l'apparition des ondes de dispersion observées dans l'expérience. Dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement dans la direction normale à l'interface (2.3), les termes inertIELS sont négligés puisqu'ils sont d'ordres supérieurs.

Les conditions aux limites correspondantes sont

En $y = 0$:

$$u = v = w = 0 \quad (2.5)$$

En $y = h(x, z, t)$

$$v = h_t + uh_x + wh_z, \quad (2.6)$$

$$P = -2\eta v_y - \epsilon W(h_{xx} + h_{zz}), \quad (2.7)$$

$$\eta u_y = \epsilon^2 \eta (4u_x h_x - v_x) \quad (2.8)$$

$$\eta w_y = \epsilon \eta (u_z h_x - 2v_y h_z - v_z) \quad (2.9)$$

Introduction des débits locaux :

Afin de réécrire la condition cinématique en fonction du débit de l'écoulement, on définit les débits locaux dans la direction de l'écoulement et la direction transversale respectivement

$$q = \int_0^h u dy, \text{ et } \tilde{q} = \int_0^h w dy$$

En intégrant l'équation de continuité (2.1) par rapport à y sur l'intervalle $[0, h]$, on aura

$$\begin{aligned} \int_0^h (u_x + v_y + w_z) dy &= \int_0^h u_x dy + v(h) - v(0) + \int_0^h w_z dy \\ &= \frac{d}{dx} \left(\int_0^h u dy \right) - u(h) h_x + v(h) - v(0) + \frac{d}{dz} \left(\int_0^h w dy \right) - w(h) h_z = 0 \end{aligned}$$

En utilisant la condition cinématique à la surface libre (2.6) et la condition à la paroi (2.5), l'équation de continuité peut être écrite sous une forme intégrale suivante

$$h_t + q_x + \epsilon \tilde{q}_z = 0 \quad (2.10)$$

Elimination de la pression :

L'intégration de l'équation de la quantité de mouvement (2.3) le long de la direction normale (entre y et h) donne, en vertu de la condition normale à l'interface (2.7), l'expression de la pression

$$p(x, y, t) = -\epsilon W(h_{xx} + h_{zz}) + 2\eta (u_x + w_z) + \epsilon G \cot \beta (h - y) + \epsilon^2 \int_h^y (\eta u_y)_x dy.$$

En remplaçant cette expression dans les équations (2.2) et (2.4), on aboutit à l'élimination de la pression du problème initial :

$$Re(u_t + uu_x + vu_y + wu_z) = G + \epsilon(W(h_{xxx} + h_{zzx}) - G \cot \beta h_x) + (\eta u_y)_y \\ + \epsilon^2 \left(4\eta_x u_x + \eta_y v_x + 3\eta u_{xx} + (\eta u_z)_z + h_x(\eta u_y)_x|_{y=h} - \int_h^y (\eta u_y)_{xx} dy \right). \quad (2.11)$$

$$Re^2[w_t + uw_x + vw_y] = \epsilon W(h_{xxz} + h_{zzz}) - \epsilon G \cot \beta h_z + \epsilon(\eta w_y)_y \\ + \epsilon^2 \left(2\eta u_{xz} + 2\eta_z u_x + \eta_x u_z + \eta_y v_z + h_z(\eta u_y)_x|_{y=h} - \int_h^y (\eta u_y)_{xz} dy \right), \quad (2.12)$$

Finalement, la dynamique du film dans le cas tridimensionnel est régie par (2.1), (2.11) et (2.12) sous les conditions aux limites (2.5), (2.8), (2.9) et (2.10). Ce système est cohérent à l'ordre ϵ^2 .

L'expression de la viscosité est donnée à l'ordre deux par

$$\eta = \left\{ (u_y + \epsilon^2 v_x)^2 + \epsilon^2 (4u_x^2 + 2w_z^2 + u_z^2 + w_y^2) \right\}^{(n-1)/2}. \quad (2.13)$$

Et si on développe à l'ordre $\mathcal{O}(\epsilon^2)$, (2.13) devient

$$\eta = |u_y|^{n-1} + \epsilon^2(n-1)|u_y|^{n-3}(v_x u_y + 2u_x^2 + (u_z^2 + w_y^2)/2) \quad \text{si } 0 \leq y < h(x, t) \quad (2.14a)$$

et

$$\eta|_{y=h} = \epsilon^{n-1} \left(2u_x^2 + (u_z^2 + w_y^2)/2 \right)^{(n-1)/2} \quad \text{si } y = h(x, t). \quad (2.14b)$$

Système bidimensionnel :

Dans le cas bidimensionnel, en projetant les équations sur le plan (x, y) , fait que la dynamique du film à l'ordre ϵ^2 est régie par

$$u_x + v_y = 0 \quad (2.15)$$

$$Re(u_t + uu_x + vu_y) = G + \epsilon(W h_{xxx} - G \cot \beta h_x) + (\eta u_y)_y \\ + \epsilon^2(4\eta_x u_x + \eta_y v_x + 3\eta u_{xx} + h_x(\eta u_y)_x|_{y=h} - \int_h^y (\eta u_y)_{xx} dy). \quad (2.16)$$

avec les conditions aux limites

En $y = 0$:

$$u = v = 0 \quad (2.17)$$

En $y = h(x, t)$

$$\eta u_y = \epsilon^2 \eta (4u_x h_x - v_x) \quad (2.18)$$

$$q_x + h_t = 0. \quad (2.19)$$

L'équation (2.16) est appelée équation de couche limite [6][41] qui est cohérente à l'ordre ϵ^2 . Cette équation à l'ordre ϵ devient

$$Re(u_t + uu_x + vu_y) = G + \epsilon(Wh_{xxx} - G \cot \beta h_x) + (\eta u_y)_y. \quad (2.20)$$

Dans le cas bidimensionnel, l'expression sans dimension de la viscosité s'écrit

$$\eta = \{(u_y + \epsilon^2 v_x)^2 + 4\epsilon^2 u_x^2\}^{(n-1)/2}. \quad (2.21)$$

Ou encore

$$\eta = |u_y|^{n-1} + \epsilon^2(n-1)|u_y|^{n-3}(v_x u_y + 2u_x^2) \quad \text{si } 0 \leq y < h(x, t) \quad (2.22a)$$

et

$$\eta|_{y=h} = \epsilon^{n-1} (2|u_x|)^{n-1} \quad \text{si } y = h(x, t). \quad (2.22b)$$

On note finalement, que la dynamique du film est régie par (2.1), (2.19) et (2.16) avec les conditions aux limites (2.5) et (2.7).

Analyse des paramètres :

Rappelant que le paramètre W est une autre formulation assez courante du nombre de Weber. Il joue un rôle important dans le mécanisme qui produit des ondes plus courtes observables dans les écoulements de films minces qui sont des ondes de type capillaire-gravité. En effet, le rapport $W/G \cot \beta$, comme le montre l'équation (2.16), caractérise l'équilibre entre les effets du gradient de pression généré par la tension de superficie et les effets de gravité, ce qui nécessite $W/G \cot \beta$ doit être d'ordre de l'unité ou plus. Ce mécanisme qui empêche l'onde de rupture est rendu possible car We est généralement élevé. Des situations réelles peuvent donc exister pour que l'expansion de grande longueur d'onde sur laquelle repose le modèle actuel s'applique.

Pour caractériser ces cas réels, il est intéressant d'abord d'exprimer le nombre de Reynolds R en fonction de ϵ , W , β et les propriétés physiques du fluide, on obtient :

$$R = (\epsilon^2 Ka/W)^{\frac{n+2}{2n}} (G/\sin\beta)^{\frac{3n-2}{2n}}, \quad (2.23)$$

où

$$Ka = (\sigma/\rho)(\rho/K)^{\frac{4}{2+n}} g^{\frac{2-3n}{2+n}}$$

est le nombre de Kapitza.

En variant ϵ^2 au dessous d'une certaine borne supérieure, par exemple 0.1, l'expression ci-dessus permet de déterminer une bande de variation de R , pour un fluide donné et des valeurs fixés de W et β . En d'autres termes, les valeurs constantes de W peuvent être obtenues pour un fluide donné et β fixé, en changeant à la fois R (c'est-à-dire h_0) et ϵ .

les figures 2.1 montrent, pour $\beta = \pi/2$ et quelques valeurs représentatives de W , la gamme de R où le modèle peut être appliqué. Pour cela, nous avons choisi les caractéristiques physiques données dans le tableau 1 du chapitre1. Les figures illustrent bien l'existence de cas réels d'écoulements pour lesquels les hypothèses de base, modélisation aux grandes ondes, peuvent être posées.

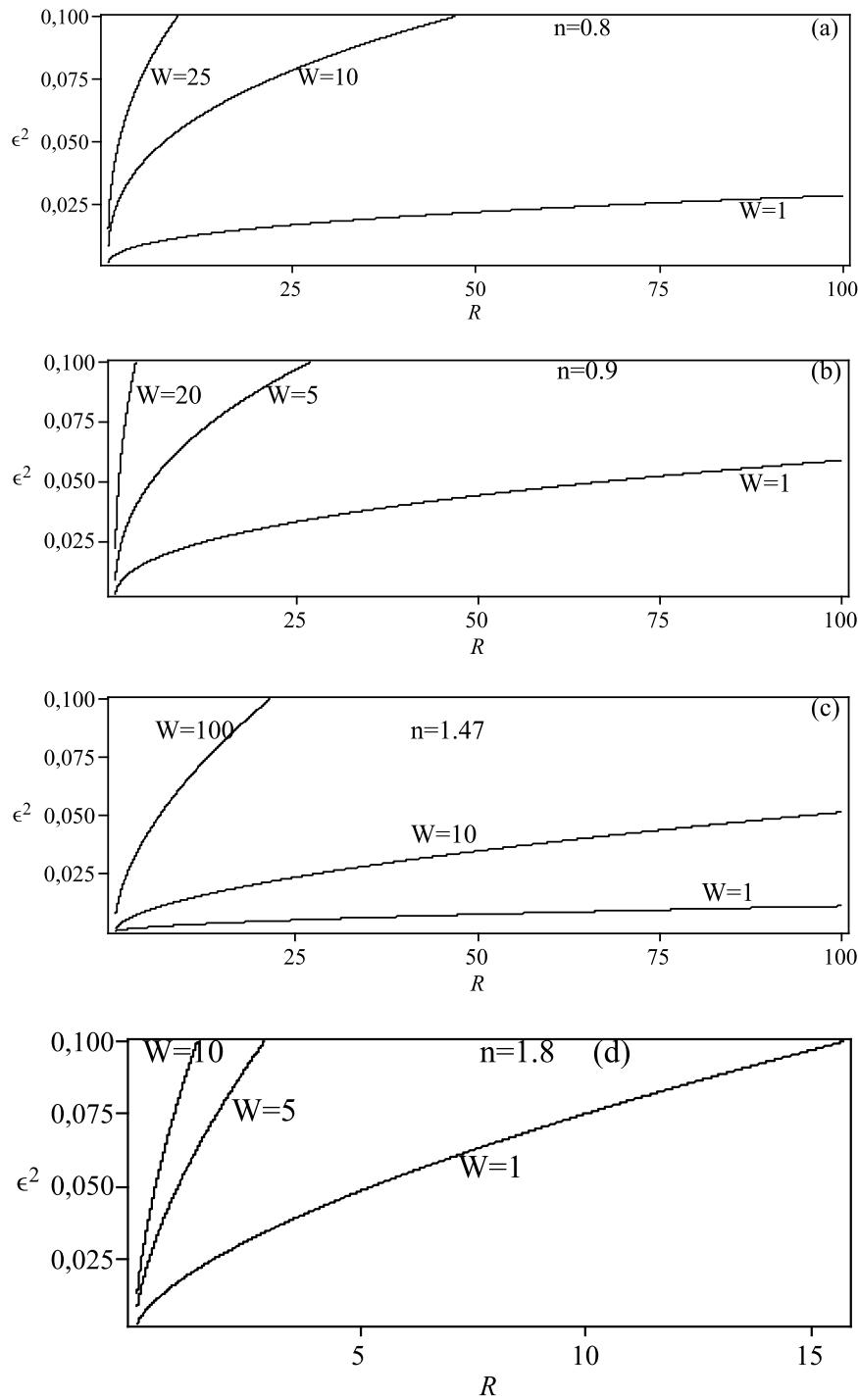


FIGURE 2.1 – le carré de ϵ en fonction du nombre de Reynolds R dans des situations réelles pour certaines valeurs représentatives de W et pour différentes n .

2.2 Les équations non-linéaires d'évolution

Dans cette section, on utilise la méthode des résidus pondérés combinée avec l'approche asymptotique de Benney. Ainsi le champ de vitesse peut s'écrire sous la forme suivante

$$u(x, y, z, t) = u_0^* + \epsilon u_1^* + \dots + \epsilon^M u_M^* + o(\epsilon^M) = \sum_{i=0}^{i=M} \epsilon^i u_i^* + o(\epsilon^M) \quad (2.24)$$

où u_i^* est la solution de notre problème au $i^{\text{ème}}$ ordre.

Comme dans le cas newtonien [18][3], il a été vérifié que la solution de notre problème au $i^{\text{ème}}$ ordre s'écrit sous la forme[42][27]

$$u_i^*(x, y, z, t) = \sum_{m=0}^{M_i} a_m(x, z, t) f_m(Z) \quad (2.25)$$

avec $\{f_m, m = 0..M_i\}$ est la famille génératrice du $i^{\text{ème}}$ espace de solution où M_i entier fini (c'est-à-dire, l'espace de solution à tout ordre est de dimension fini suivant la direction normale y), $Z = 1 - y/h(x, z, t)$ est une coordonnée réduite de la variable normale y et $a_m(x, z, t)$ sont des amplitudes à déterminer.

2.2.1 Modèles bidimensionnels

2.2.1.1 Modèle complet d'ordre un

Jusqu'à l'ordre $o(\epsilon)$, l'expression de u est donnée par

$$u(x, y, t) = u_0^* + \epsilon u_1^* + o(\epsilon) \quad (2.26)$$

où u_1^* est la correction au premier ordre du terme principal u_0^* (d'ordre zéro).

Afin de construire le modèle aux résidus pondérés à l'ordre un, premièrement on cherche la base de l'espace des solutions d'ordre zéro. En effet, l'introduction de l'expression (2.26) dans le système (2.15) et (2.16), et en collectant ordre par ordre, l'ordre zéro est donné par

$$(\eta u_{0y}^*)_y + G = 0 \quad (2.27)$$

$$u_0^*(0) = 0 \quad (2.28)$$

$$u_{0y}^*(h) = 0 \quad (2.29)$$

L'intégration de l'équation (2.45), permet de retrouver la famille génératrice $\{1, Z^{1/n}, Z^{1+1/n}\}$ de l'espace de solution d'ordre zéro. En utilisant les conditions aux limites (2.46) et (2.47) la base de l'espace des solutions est réduite à une seule fonction $f_0(z) = 1 - Z^{1+1/n}$. Par suite, le profil de vitesse est donné par

$$u = a(x, t) f_0(Z) + \epsilon u_1^* \quad (2.30)$$

Du moment que le débit local q apparaît dans l'équation (2.19) comme variable principale de la même façon que l'épaisseur du film, on peut prendre, alors, le couple (h, q) comme inconnue de notre modèle. Donc, on transforme le coefficient a en fonction de q et on réécrit l'équation (2.30) comme suit :

$$u = u_0 + \epsilon u_1 \quad (2.31)$$

où

$$u_0 = \frac{2n+1}{n+1} \frac{q}{h} f_0(Z)$$

et

$$u_1 = u_1^* - \left(\frac{2n+1}{n+1} \int_0^1 u_1^* dY \right) f_0(Z).$$

Notons que u_0 et u_1 sont tels que

$$\int_0^h u_0 dy = q \text{ et } \int_0^h u_1 dy = 0 \quad (2.32)$$

En multipliant l'équation de couche limite (2.16) par une fonction poids, notée F , et en intégrant entre 0 et h , on obtient

$$\int_0^h F(y) \left\{ (\eta u_y)_y^{(1)} + G + \epsilon Wh_{xxx} - Re(u_t + uu_x + vu_y)^{(0)} - \epsilon G \cot \beta h_x \right\} dy = 0 \quad (2.33)$$

Les indices supérieurs $^{(0)}$ et $^{(1)}$ indiquent l'ordre de l'approximation de u dans l'expression correspondante.

On remarque que le terme visqueux est le seul où la correction doit être tenue en compte.

Pour pouvoir simplifier la correction d'ordre un dans (2.33), deux intégrations par parties sont nécessaires. Ce qui donne

$$\int_0^h F(y)(\eta u_y)_y^{(1)} = [u_y^n F]_0^h - [(u_0 + n\epsilon u_1)u_{0y}^{n-1} F_y]_0^h + \int_0^h (u_0 + n\epsilon u_1)(u_{0y}^{n-1} F_y)_y dy \quad (2.34)$$

Ceci est obtenu en utilisant l'équation (2.22a) et le développement $u_y^n = u_{0y}^{n-1}(u_{0y} + n\epsilon u_1)$.

À présent, on peut montrer que la correction u_1 peut être éliminée du calcul par un simple choix d'une fonction adéquate F , telle que

$$F|_{y=0} = 0 \quad u_{0y}^{n-1} F_y|_{y=h} = 0 \quad (u_{0y}^{n-1} F_y)_y = -c(x, t) \quad (2.35)$$

où $c(x, t)$ est une fonction indépendante de y qui sera précisée ultérieurement.

Avec les relations (2.32), le membre de droite de l'équation (2.34) se réduit à $-qc$. De la seconde et de la troisième condition dans (2.35), on obtient, d'après l'expression de u_0

$$\frac{n+1}{n} G^{1-1/n} \frac{q^{n-1}}{h^{2n}} F_y = c f_{0y} \quad (2.36)$$

Cette équation est satisfaite avec $c = \frac{n+1}{n} G^{1-1/n} \frac{q^{n-1}}{h^{2n}}$ et par conséquent $F = f_0$.

Ainsi, l'équation (2.33), avec (2.34), prend la forme finale

$$\begin{aligned} & \frac{q^n}{h^{2n}} - h \left\{ 1 + \epsilon \left(\frac{W}{G} h_{xxx} - \cot \beta h_x \right) \right\} \\ & + 2\epsilon \frac{Re}{G} \frac{2n+1}{3n+2} \left\{ q_t + \frac{11n+6}{4n+3} \frac{qq_x}{h} - 3 \frac{2n+1}{4n+3} \frac{q^2}{h^2} h_x \right\} = 0 \end{aligned} \quad (2.37)$$

Ajoutée à l'équation (2.19), l'équation (2.37) complète notre modèle au premier ordre pour les deux inconnues h et q . On constate que dans le cas $n = 1$, pour un fluide newtonien, on retombe sur le modèle obtenu par Ruyer-Quil et Manneville [3, 19].

À présent, on valide notre modèle au voisinage de la criticalité par l'équation type Benney, qui est exacte au point critique. En injectant l'expression $q = q_0 + \epsilon q_1$ dans l'équation du modèle (2.37), on obtient

$$q_0 = h^{2+1/n} \quad (2.38)$$

$$q_1 = \frac{h^{2+1/n}}{n} \left\{ \left(2 \frac{Re G^{2/n-1}}{(3n+2)} h^{1+2/n} - \cot \beta \right) h_x + \frac{W}{G} h_{xxx} \right\} \quad (2.39)$$

Une fois remplacée dans l'équation cinématique (2.19) on obtient l'équation de type Benney, la même que celle établie par Miladinova *et al.* [24] :

$$h_t + \{h^{2+1/n} + \frac{\epsilon}{n} [(\frac{W}{G} h_{xxx} - \cot \beta h_x) h^{2+1/n} + \frac{2Re}{3n+2} G^{2/n-1} h^{3/n+3} h_x]\}_x = 0 \quad (2.40)$$

On remarque que si on remplace $n = 1$ on retrouve l'équation de Benney dans le cas d'un fluide Newtonien [14]. Dans ce cas (2.40) devient

$$h_t + \{h^3 + \epsilon [(\frac{W}{3} h_{xxx} - \cot \beta h_x) h^3 + \frac{6Re}{5} h^6 h_x]\}_x = 0 \quad (2.41)$$

Finalement, on voit bien que notre modèle est un modèle type Benney au voisinage de la criticalité.

Par ailleurs, loin du seuil d'instabilité, notre modèle garde les avantages de la méthode intégrale de Shkadov. En effet, Shkadov a utilisé, dans le cas Newtonien, la méthode intégrale de couche limite [18, 2] en intégrant directement l'équation (2.16) suivant l'épaisseur du film sans tenir compte de la correction d'ordre un du profil de vitesse u . Ceci correspond dans notre cas à considérer la fonction poids égale à la fonction constante 1. Par conséquent, on retombe sur le modèle type Shkadov dans le cas non-newtonien[25] donné ci-dessous, associée à l'équation(2.19) :

$$\frac{q^n}{h^{2n}} - h\{1 + \epsilon(\frac{W}{G} h_{xxx} - \cot \beta h_x)\} + \epsilon \frac{Re}{G} \{q_t + 2 \frac{2n+1}{3n+2} (2 \frac{qq_x}{h} - \frac{q^2}{h^2} h_x)\} = 0 \quad (2.42)$$

Pour le cas newtonien, il suffit de remplacer $n = 1$ et on obtient le modèle de Shkadov

$$h_t = -q_x \quad (2.43)$$

$$q_t = \frac{5}{2}h - \frac{5}{2}\frac{q}{h^2} - R\left(\frac{q^2}{h}\right)_x - \frac{5}{6}h(W h_{xxx} - 3Bh_x) \quad (2.44)$$

Il reste toujours à signaler que le modèle Shkadov ne solutionne pas correctement le point critique dans le cas non vertical. En effet, on ne retrouve pas l'équation de Benney (2.40) avec ce dernier modèle.

On note toute fois que le modèle proposé présente des insuffisances, notamment l'absence des termes de dispersion responsables de l'apparition d'ondes solitaires observable dans l'expérimentale [20]. Pour cela une théorie à l'ordre deux est nécessaire.

2.2.1.2 Modèle complet d'ordre deux

On procède de la même manière que le paragraphe précédent en tenant compte de l'ordre deux.

On a :

$$u(x, y, t) = u_0^* + \epsilon u_1^* + \epsilon^2 u_2^* + o(\epsilon^2)$$

u_0^* étant déterminé précédemment, on s'intéresse au calcul de u_1^* dont le système est donné par

$$(\eta u_{1y}^*)_y = R(u_{0t}^* + u_0^* u_{0x}^* + v_0^* u_{0y}^*) + Wh_{xxx} - G \cot \beta h_x \quad (2.45)$$

$$u_1^*(0) = 0 \quad (2.46)$$

$$u_{1y}^*(h) = 0 \quad (2.47)$$

On vérifie facilement que l'espace de solutions est engendré par l'ensemble des fonctions tests suivantes :

$$f_1^*(Z) = 1 - Z^{1+2/n}, f_2^*(Z) = 1 - Z^{2+2/n}, f_3^*(Z) = 1 - Z^{2+3/n} \text{ et } f_4^*(Z) = 1 - Z^{3+3/n}.$$

D'où, l'expression

$$u_1^* = \sum_{i=1}^4 a_i(x, t) f_i^*(Z) \quad (2.48)$$

En remplaçant cette expression dans (2.16) et en identifiant les termes d'ordre un, on obtient

$$a_1 = a_3 = 0$$

Ce qui signifie que deux champs sont requis pour représenter la correction u_1^* , c'est-à-dire, deux champs formant une base de l'espace de solutions du premier ordre, soit

$$u_1^* = a_2(x, t) f_2^*(Z) + a_4(x, t) f_4^*(Z) \quad (2.49)$$

De la même manière, on peut montrer en utilisant le développement de Taylor, jusqu'à l'ordre ϵ^2 , pour le terme visqueux dans (2.16) et en tenant compte de la condition de non glissement, que la correction u_2^* appartient à un sous-espace de fonctions, engendré par la famille de fonctions tests suivantes :

$$\{f_5^*, f_6^*, f_7^*, f_8^*, f_9^*\} = \{1 - Z^{1/n}, 1 - Z^{3+4/n}, 1 - Z^{4+4/n}, 1 - Z^{4+5/n}, 1 - Z^{5+5/n}\}.$$

Ces projections ne sont pas calculées arbitrairement, mais plutôt résultent des profils de vitesse de base et de la première correction. Donc, la description cohérente de la dynamique du film au second ordre exigerait, en plus des variables fondamentales h et q , tout au plus, sept autres inconnues dont deux amplitudes pour la correction du première ordre et cinq amplitudes pour le second ordre. On note que les amplitudes du second ordre ne sont pas toutes indépendantes. Ainsi, la correction d'ordre deux sera éliminée en choisissant des fonctions poids appropriées.

Par conséquent, le champ de vitesse peut s'écrire de cette façon :

$$u = a_0 f_0 + \epsilon (a_2 f_2^* + a_4 f_4^*) + \epsilon^2 u_2^* \quad (2.50)$$

Cette expression de u peut être reformulée, en utilisant le débit au lieu du coefficient a_0 , comme suit

$$u = u_0 + \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + \epsilon^2 u_2^* \quad (2.51)$$

avec

$$u_0 = \frac{2n+1}{n+1} \frac{q}{h} f_0, \quad u_1 = R(a f_1 + b f_2), \quad u_2 = u_2^* - \left(\int_0^h u_2^* dy / \int_0^h f_0 dy \right) f_0, \quad (2.52)$$

Où a et b sont utilisés par convention à la place de a_2 et a_4 respectivement, f_1 et f_2 sont deux combinaisons linéaires des fonctions tests données précédemment, elle seront définies dans la suite pour simplifier l'étude. On admet que

$$\int_0^h u_1 dy = \int_0^h u_2 dy = 0.$$

Par conséquent, à condition que u_2 soit éliminé, la formulation du modèle complet au second ordre exigerait quatre inconnues h , q , a et b . On aura besoin alors, en plus de l'équation cinématique (2.19), de trois équations aux résidus. Celles-ci sont obtenues en annulant les intégrales des résidus sur l'épaisseur du film :

$$\begin{aligned} \int_0^h \phi_i(y) \{ (\eta u_y)_y^{(2)} + G + Wh_{xxx} - Re(u_t + uu_x + vu_y)^{(1)} - \epsilon G \cot \beta h_x + \\ \epsilon^2 (D_1 + (1 - \delta_{n1}) D_0) \} dy = 0 \quad i = 0, 1, 2, \end{aligned} \quad (2.53)$$

où

$$D_0 = \left[4u_x\eta_x + \eta_y v_x + \eta(u_{xx} - u_{xx}|_{y=h}) - \int_h^y (\eta u_y)_{xx} dy \right]^{(0)}$$

et

$$D_1 = [\eta(2u_{xx} + (u_x|_{y=h})_x)]^{(0)};$$

Les indices supérieurs $^{(0)}$, $^{(1)}$ et $^{(2)}$ indiquent l'ordre de l'approximation de u dans l'expression correspondante, δ_{n1} est le symbole de Kronecker et ϕ_0 , ϕ_1 et ϕ_2 sont des fonctions poids linéairement indépendantes, sont choisies de telle manière à éliminer u_2 dans les résultats d'intégration.

Il est important de noter que le terme facteur de ϵ^2 dans (2.53) est écrit comme la somme de deux parties D_1 et D_0 ; la première correspond à la partie newtonienne des termes de diffusion selon la direction de l'écoulement et la seconde représente sa partie non-newtonienne.

On remarque que si $n = 1$ on aura $D_0 = 0$. Par contre, le calcul de son intégrale est non nulle,

$$\int_0^h D_0 f_0 dy \neq 0.$$

La décomposition ci-dessus est donc effectuée pour souligner l'inconvénient généré par la non-convergence uniforme de la suite à indice réel. En effet, le théorème d'intégration au sens de Lebesgue, dans le cas des suites d'indice réel, ne peut pas s'appliquer, en d'autres termes la limite et l'intégrale ne commutent pas $\left(\lim_{n \rightarrow 1} \int (\cdot) dy \neq \int \lim_{n \rightarrow 1} (\cdot) dy\right)$. Ceci explique la présence du facteur $(1 - \delta_{n1})$ de D_0 .

En intégrant ce terme par parties, on obtient

$$\int_0^h (\eta u_y)_y \phi_i(y) dy = [\eta u_y \phi_i]_{y=0}^{y=h} - \int_0^h \eta u_y \phi_{iy} dy. \quad (2.54)$$

En utilisant (2.22a), le second terme dans le côté droit de (2.54) devient

$$\int_0^h \eta u_y \phi_{iy} dy = \int_0^h |u_y|^{n-1} u_y \phi_{iy} dy + (n-1)\epsilon^2 \int_0^h |u_{0y}|^{n-3} (v_{0x} u_{0y} + 2u_{0x}^2) u_{0y} \phi_{iy} dy, \quad (2.55)$$

où

$$|u_y|^{n-1} u_y = |u_{0y}|^{n-1} (u_{0y} + n\epsilon u_{1y} + n\epsilon^2 u_{2y}) + \frac{1}{2} n(n-1)\epsilon^2 |u_{0y}|^{n-3} u_{0y} u_{1y}^2. \quad (2.56)$$

Maintenant, revenant à (2.54), et en concordance avec (2.55) et (2.56), on obtient après intégration par parties le terme qui contient u_{2y}

$$\begin{aligned} \int_0^h (\eta u_y)_y \phi_i(y) dy &= [\eta u_y \phi_i]_{y=0}^{y=h} - [(u_0 + n\epsilon u_1 + n\epsilon^2 u_2) |u_{0y}|^{n-1} \phi_{iy}]_{y=0}^{y=h} \\ &\quad + \int_0^h (u_0 + n\epsilon u_1 + n\epsilon^2 u_2) (|u_{0y}|^{n-1} \phi_{iy})_y dy \\ &\quad - (n-1)\epsilon^2 \int_0^h |u_{0y}|^{n-3} (v_{0x} u_{0y} + 2u_{0x}^2 + \frac{n}{2} u_{1y}^2) u_{0y} \phi_{iy} dy. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Le premier terme et le second terme du membre de droite de (2.57) peuvent s'écrire indépendamment de u_2 , en imposant simplement

$$\phi_i|_{y=0} = 0, \quad (|u_{0y}|^{n-1} \phi_{iy})|_{y=h} = 0, \quad (2.58)$$

En raison de la condition d'adhérence à la paroi $y = 0$, de la condition d'équilibre des contraintes tangentielles (2.18) et de l'expression (2.22b) du développement de la viscosité à l'interface, on peut écrire

$$\eta u_y \phi_i|_{y=h} = \epsilon^{n+1} (2|u_{0x}|)^{n-1} (4u_{0x} h_x - v_{0x}) \phi_i|_{y=h}. \quad (2.59)$$

Ainsi, les deux premiers termes se réduisent à l'expression (2.59).

La première intégrale du second membre de (2.57) est maintenant l'unique terme qui reste à examiner. De même, la correction u_2 peut être éliminée en utilisant le même argument que dans la formulation du premier ordre en posant $\phi_0 = f_0$ ou bien en imposant l'orthogonalité de u_2 par rapport à $(|u_{0y}|^{n-1} \phi_{iy})_y$, $i = 1, 2$, au sens de la norme $L^2(0, h)$.

Construction des fonctions tests :

Une simplification intéressante peut être obtenue par une construction appropriée des fonctions tests f_1 et f_2 , comme il a été mentionné précédemment.

En effet, la fonction test f_1 est déterminée comme combinaison de f_0 et f_2^* :

$$f_1 = f_2^* + c_1 f_0$$

tout en vérifiant la condition de nullité au sens de la moyenne

$$\int_0^h f_1 dy = 0$$

Ce qui conduit à

$$f_1 = f_2^* - 2 \frac{2n+1}{3n+2} f_0. \quad (2.60)$$

De même, la fonction test f_2 est déterminée comme combinaison linéaire de f_0 , f_2^* et f_4^* :

$$f_2 = f_4^* + c_2 f_2^* + c_3 f_0$$

où c_2 et c_3 sont deux constantes arbitraires.

En supposant que f_2 est nulle au sens de la moyenne, $\int_0^h f_2 dy = 0$,

et en imposant l'orthogonalité de f_2 par rapport à f_0 , $\int_0^h f_2 f_0 dy = 0$,

on obtient

$$f_2 = f_4^* - 3 \frac{3n+2}{5n+4} f_2^* + 3 \frac{(3n+2)(2n+1)}{(5n+4)(4n+3)} f_0, \quad (2.61)$$

Cette procédure doit être poursuivie pour la construction des autres fonctions tests afin de les annuler au sens de la moyenne et en imposant la condition d'orthogonalité suivante :

$$\begin{cases} \int_0^h f_k f_j dy = 0, & \text{si } j \neq k-1 \text{ et } j \neq k+1 \\ \int_0^h f_k f_j dy \neq 0, & \text{si non} \end{cases}$$

pour un $k \geq 1$ donné.

Contrairement à ce qui a été adopté dans les travaux précédents[3][4], dans cette présente étude, il apparaît que l'orthogonalisation complète n'est pas nécessaire pour éliminer la correction de second ordre de la vitesse de l'écoulement. Ceci peut être réalisé avec une orthogonalisation partielle réduisant significativement les calculs. Cela s'explique par le fait que la cohérence jusqu'à l'ordre deux n'est pas liée à une certaine forme particulière de la base de projection. Formellement, elle doit seulement être développée, étape par étape, à partir du

profil de vitesse de base et vérifiée les conditions aux limites.

Choix des fonctions poids :

L'élimination de la correction d'ordre deux de la vitesse et, par conséquent, la réduction de la dimensionnalité du problème est garantie par un choix convenable de fonctions poids. Rappelons le choix déjà adopté de la fonction poids $\phi_0 = f_0$. Par ailleurs, la fonction poids ϕ_1 est obtenue en résolvant l'équation

$$((u_{0y})^{n-1}\phi_{1y})_y = f_0 + c_0,$$

afin de satisfaire la condition à la limite (2.58). La constante c_0 est déterminée de tel sorte à satisfaire l'orthogonalité entre ϕ_1 et f_0 .

D'où

$$\phi_1 = f_1 + \frac{n(n+1)}{(3n+2)(4n+3)}f_0 \quad (2.62)$$

De la même manière la fonction poids ϕ_2 est obtenue en résolvant l'équation

$$((u_{0y})^{n-1}\phi_{2y})_y = f_1 + c_1 f_0 + c_2$$

Les constantes c_1 et c_2 sont déduites en imposant l'orthogonalité de ϕ_2 par rapport à f_0 et f_1 .

On deduit

$$\phi_2 = f_2 + 2 \frac{(2n+1)(n+1)}{(6n+5)(5n+4)}\phi_1. \quad (2.63)$$

Finalement, avec la procédure de simplification précédente, l'équation 2.53 donne lieu au système d'équations aux résidus suivant

$$\mathcal{A} \begin{pmatrix} q_t, & a_t, & b_t \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} Q, & A, & B \end{pmatrix}^t \quad (2.64)$$

où Q , A et B sont des opérateurs différentiels non linéaires donnés dans l'annexe.

La matrice \mathcal{A} est donnée par

$$\mathcal{A} = R \begin{pmatrix} 1 & -\frac{n(n+1)^2}{(3n+2)(4n+3)(2n+1)} Rh & 0 \\ 0 & Rh & -2\frac{(n+1)(2n+1)}{(6n+5)(5n+4)} Rh \\ 0 & 0 & Rh \end{pmatrix}.$$

2.2.2 Modèles tridimensionnels

2.2.2.1 Modèle complet d'ordre un

Les équations et les conditions aux limites au premier ordre sont données par

$$u_x + v_y + \epsilon w_z = 0 \quad (2.65)$$

$$\epsilon \{Re(u_t + uu_x + vu_y) + G \cot \beta h_x - Wh_{xxx}\} = (u_y^n)_y + G, \quad (2.66)$$

$$(\eta_0 w_y)_y = Bh_z - W(h_{zx^2} + h_{z^3}) \quad (2.67)$$

$$u|_{y=0} = v|_{y=0} = w|_{y=0} = 0 \quad (2.68)$$

$$(\eta_0 u_y)|_{y=h} = (\eta_0 w_y)|_{y=h} = 0 \quad (2.69)$$

En prenant, de la même manière que le cas bidimensionnel,

$$u = \frac{2n+1}{n+1} \frac{q}{h} f_0(Z) + u_1$$

avec

$$\int_0^h u_1 dy = 0$$

Alors la solution de l'équation (2.67) est

$$w = G^{1-n} (Bh_z - W(h_{zx^2} + h_{z^3})) \left(\frac{q^{1-n}}{h^{1-2n}} \right) f_0(Z) \quad (2.70)$$

L'intégration de l'équation (2.70) par rapport à y , entre 0 et h , donne l'expression de \tilde{q} :

$$\tilde{q} = \frac{n+1}{2n+1} G^{1-n} (Bh_z - W(h_{zx^2} + h_{z^3})) \left(\frac{h^{2n}}{q^{n-1}} \right) \quad (2.71)$$

En substituant (2.71) dans l'équation cinématique (2.10), on obtient

$$h_t + q_x + \epsilon \left(\frac{n+1}{2n+1} G^{1-n} (B h_z - W(h_{zx^2} + h_{z^3})) \left(\frac{h^{2n}}{q^{n-1}} \right) \right)_z = 0 \quad (2.72)$$

De la même manière que le cas 2D, l'équation aux résidus d'ordre un en 3D est donnée par

$$\begin{aligned} \frac{q^n}{h^{2n}} - h \{ 1 + \epsilon \left(\frac{W}{G} (h_{xxx} + h_{xz^2}) - \cot \beta h_x \right) \} \\ + 2\epsilon \frac{Re}{G} \frac{2n+1}{3n+2} \{ q_t + \frac{11n+6}{4n+3} \frac{qq_x}{h} - 3 \frac{2n+1}{4n+3} \frac{q^2}{h^2} h_x \} = 0 \end{aligned} \quad (2.73)$$

Finalement, le modèle tridimensionnel d'ordre un est constitué des deux équations (2.72) et (2.73) pour les champs h et q .

2.2.2.2 Modèle complet d'ordre deux

Rappelons les équations à l'ordre deux et les conditions aux limites correspondantes :

$$u_x + v_y + \epsilon w_z = 0 \quad (2.74)$$

$$\begin{aligned} Re(u_t + uu_x + vu_y + wu_z) = G + \epsilon(W(h_{xxx} + h_{zzx}) - G \cot \beta h_x) + (\eta u_y)_y \\ + \epsilon^2 \left(4\eta_x u_x + \eta_y v_x + 3\eta u_{xx} + (\eta u_z)_z + h_x(\eta u_y)_x|_{y=h} - \int_h^y (\eta u_y)_{xx} dy \right). \end{aligned} \quad (2.75)$$

$$\begin{aligned} Re^2[w_t + uw_x + vw_y] = \epsilon W(h_{xxz} + h_{zzz}) - \epsilon G \cot \beta h_z + \epsilon(\eta w_y)_y \\ + \epsilon^2 \left(2\eta u_{xz} + 2\eta_z u_x + \eta_x u_z + \eta_y v_z + h_z(\eta u_y)_x|_{y=h} - \int_h^y (\eta u_y)_{xz} dy \right), \end{aligned} \quad (2.76)$$

$$u|_{y=0} = v|_{y=0} = w|_{y=0} = 0 \quad (2.77)$$

$$\eta(u_y - \epsilon^2(4u_x h_x - v_x))|_{y=h} = 0 \quad (2.78)$$

$$\epsilon\eta(w_y - \epsilon(u_z h_x - 2v_y h_z - v_z))|_{y=h} = 0 \quad (2.79)$$

Construction des fonctions tests

L'obtention du modèle tridimensionnel d'ordre deux se fait avec le même raisonnement que

le cas bidimensionnel. On garde le même choix des fonctions tests pour le profil de vitesse u , c'est-à-dire

$$u = \frac{2n+1}{n+1} \frac{q(x, z, t)}{h(x, z, t)} f_0 + \epsilon (a(x, z, t) f_1 + b(x, z, t) f_2) + \epsilon^2 u_2^* \quad (2.80)$$

Avec f_0 , f_1 et f_2 définies dans la section précédente.

Le profil de vitesse w est de l'ordre ϵ , et s'écrit comme

$$w = \epsilon w_1 + \epsilon^2 w_2 + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (2.81)$$

En examinant l'équation (2.76), associée aux conditions aux limites, ordre par ordre, on montre que le terme d'ordre un w_1 est engendré par la seule fonction test f_0 comme suit :

$$w_1 = \frac{2n+1}{n+1} \frac{\tilde{q}}{h} f_0(Z)$$

La correction w_2 est, par contre, engendrée par quatre fonctions tests f_1 , f_2^* , f_3^* et f_4^* vérifiant :

$$\int_0^h w_2 dy = 0.$$

Ainsi, on constate que seule une variable inconnue supplémentaire est nécessaire par rapport au cas bidimensionnel, il s'agit du débit transversal \tilde{q} .

Choix des fonctions poids :

En plus de l'équation cinématique, on aura besoin de quatre équations aux résidus nécessitant quatre fonctions poids. Étant donné que les trois premières équations aux résidus sont déduites de l'équation de u (2.75), on garde alors les mêmes que le cas bidimensionnel, fonctions poids pour celles-ci.

Pour déterminer la quatrième équation aux résidus, on intègre sur l'épaisseur du film le produit de l'équation (2.76) avec un choix de la fonction poids. Le choix de cette fonction poids est pris égale à f_0 , puisque w_1 et w_2 sont traités de la même manière que u_0 et u_1 effectuée dans le cas bidimensionnel à l'ordre un, respectivement.

En intégrant, sur l'épaisseur du film, le produit de l'équation (2.76) par la fonction poids f_0 et

en suivant la même procédure , on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^h f_0 \left\{ \epsilon (R[w_t + uw_x + vw_y] - W(h_{xxz} + h_{zzz}) + G \cot \beta h_z) - \epsilon^2 (\tilde{D}_1 - (1 - \delta_{n1}) \tilde{D}_0) \right\} dy \\ = u_{0y}^{n-1} (u_z h_x - 2v_y h_z - v_z) |_{y=h} + \frac{G(n+1)}{2n+1} \left(\frac{q}{h^2} \right)^n \frac{\tilde{q}}{h^2} \quad (2.82) \end{aligned}$$

où

$$\tilde{D}_0 = 2\eta_z u_x + \eta_x u_z + \eta_y v_z + h_z (\eta u_y)_x |_{y=h} - \int_h^y (\eta u_y)_{xz} dy$$

et

$$\tilde{D}_1 = 2\eta u_{xz}$$

Nous obtenons finalement le modèle aux résidus suivant

$$\widetilde{\mathcal{A}} \begin{pmatrix} q_t, & a_t, & b_t, & \tilde{q}_t \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} Q_{3d}, & A_{3d}, & B_{3d}, & \tilde{Q}_{3d} \end{pmatrix}^t \quad (2.83)$$

où Q_{3d} , A_{3d} et B_{3d} sont des opérateurs différentiels non linéaires donnés dans l'annexe.

Et la matrice $\widetilde{\mathcal{A}}$ est donnée par

$$\widetilde{\mathcal{A}} = R \begin{pmatrix} 1 & -\frac{n(n+1)^2}{(3n+2)(4n+3)(2n+1)} Rh & 0 & 0 \\ 0 & Rh & -2\frac{(n+1)(2n+1)}{(6n+5)(5n+4)} Rh & 0 \\ 0 & 0 & Rh & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.3 Simplification du modèle complet 2D d'ordre deux

Le modèle complet bidimensionnel du second ordre, obtenu dans la section précédente, est de grande taille et par conséquent a peu d'intérêt pratique. Ainsi, un modèle simplifié, qui doit préserver les caractéristiques de la dynamique du film, lesquelles sont présentes dans le modèle en taille réelle, est à chercher.

Ce modèle simplifié devrait être asymptotique à l'équation unique de type Benney près de la criticalité, et devrait décrire avec précision la dynamique des écoulements à des nombres de Reynolds les plus modérés possibles. Suite au travail de Ruyer-Quil *et al.* [12], on peut montrer que, dans le présent travail, seuls les champs q et h joueront un rôle pertinent. Tandis que les autres champs les suivront dans leurs dynamique, au moins, pour une certaine gamme de nombres de Reynolds.

2.3.1 Modèle simplifié type simplification adiabatique

Un modèle beaucoup plus simple peut être obtenu en supposant que les champs a et b peuvent être au moins du second ordre. Cette hypothèse conduit à l'élimination adiabatique dans la première équation résiduelle, ce que nous appelons le modèle simplifié (SM). Ce modèle capte d'une manière satisfaisante tous les mécanismes physiques de l'écoulement. Dans ce cas, il suffit d'annuler les coefficients a et b dans la première équation aux résidus, on obtient un système de deux équations à deux inconnues h et q :

$$h_t = -q_x \quad (2.84)$$

$$R(q_t - Q_{I1}) = Q_0 + Q_{d1} + H_{n-1}Q_{d1}^* + (1 - \delta_{n1})Q_{dn} + (n - 1)Q_{d0}. \quad (2.85)$$

Ceci peut être obtenu en appliquant la procédure de Galerkin avec une seule fonction poids, soit ϕ_0 , et en admettant que le profil de vitesse est donné à l'ordre zéro $u = u_0$.

2.3.2 Modèle réduit

Une autre approche de réduction du modèle complet peut être obtenue en gardant les champs a et b . Premièrement, nous observons que, en raison du choix particulier des fonc-

tions tests f_1 et f_2 , les champs a et b ne figurent que dans la partie droite de la première équation du système (2.64) à travers les termes de second ordre Q_{I2} et Q_{d2} (voir annexe).

Le terme d'inertie Q_{I2} et le terme de diffusion Q_{d2} sont associés à l'advection, par l'écoulement de base, de la correction du premier ordre du profil de vitesse pour le premier et au caractère non linéaire de la loi de comportement du fluide (non newtonien) pour le deuxième. Par conséquent, on peut éliminer a et b de la première équation du (2.64), car ils sont déjà connus jusqu'au premier ordre.

En effet, en annulant les coefficients du terme d'ordre un de l'équation de la couche limite (2.16) on obtient

$$a = \frac{2n+1}{2G(n+1)^2} \left(\frac{h^2}{q} \right)^{n-1} \left(hq_t + 8 \frac{2n+1}{5n+4} q \left(q_x - \frac{3q}{4h} h_x \right) \right), \quad (2.86)$$

$$b = \frac{(2n+1)^3}{3G(n+1)^3(3n+2)} \left(\frac{h^2}{q} \right)^{n-1} \left\{ \frac{q^2}{h} h_x - \frac{n}{2n+1} qq_x \right\}. \quad (2.87)$$

On note que ces expressions, fonctionnelles de h et q , ne sont pas uniques en raison de leurs dépendance par rapport aux fonctions tests. Une autre famille de fonctions tests conduirait à des expressions formellement différentes. Mais tout en gardant à l'esprit que l'unicité de la première correction du profil de vitesse est vérifiée, quel que soit le choix des fonctions tests.

En insérant ces expressions dans le terme de diffusion Q_{d2} et le terme d'inertie

$$Q_{I2} + \frac{n(n+1)^2}{(3n+2)(4n+3)(2n+1)} R^2 h a_t$$

ce qui permet de les transformer en fonctions de h , q et de leurs dérivées spatiales et temporelles, on obtient

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{I2} = & \frac{1}{G} \frac{n(4n+3)^{-1}}{2(3n+2)} \left(\frac{q}{h^2} \right)^{1-n} \left\{ h^2 q_{tt} - (n-1) \frac{h^2}{q} q_t^2 + \frac{2n+1}{5n+4} \left(17hq q_{tx} + 6(4n-5)qq_t h_x \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{44n^2 - 50n - 39}{2n+1} hq_t q_x \right) + \frac{2n+1}{(4n+3)(6n+5)(5n+4)} \left(-6(180n^3 - 176n^2 - 477n - 180)qq_x^2 \right. \right. \\ & \left. \left. + 4(552n^3 - 332n^2 - 1150n - 435) \frac{q^2}{h} h_x q_x - 8(22n+17)(2n+1)(3n-5) \frac{q^3}{h^2} h_x^2 \right. \right. \\ & \left. \left. + 12(70n^2 + 93n + 30)q^2 q_{xx} - 12(22n+17)(2n+1) \frac{q^3}{h} h_{xx} \right) \right\} \end{aligned} \quad (2.88)$$

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{d2} = & \frac{1}{G} \frac{n(n-1)}{4(3n+2)(3+4n)} \left(\frac{q}{h^2} \right)^{1-n} \left\{ \frac{h^2 q_t^2}{q} + \frac{2n+1}{5n+4} (16hq_x - 12qh_x) q_t \right. \\ & \left. + \frac{4(2n+1)^2}{(3+4n)(6n+5)(5n+4)} \left((77n+60)qq_x^2 + 2(22n+17)\frac{q^3}{h^2}h_x^2 - 2(58n+45)\frac{q^2}{h}h_xq_x \right) \right\}. \quad (2.89) \end{aligned}$$

Avec ces approximations, on obtient ainsi une équation plus simple en h et q . Un modèle réduit (MR) qui gouverne la dynamique non linéaire de l'écoulement est construit :

$$\begin{aligned} R(q_t - Q_{I1}) = & Q_0 + Q_{d1} + H_{n-1}Q_{d1}^* + R^2\tilde{Q}_{I2} \\ & + (1 - \delta_{n1})Q_{dn} + (n-1)(Q_{d0} + R^2\tilde{Q}_{d2}) \quad (2.90) \end{aligned}$$

où \tilde{Q}_{I2} et \tilde{Q}_{d2} sont exprimés ci-dessus, tandis que les expressions de Q_0 , Q_{d0} , Q_{I1} , Q_{d1} , Q_{d1}^* et Q_{dn} sont données dans l'annexe.

Dans le cas d'un fluide newtonien ($n = 1$), (2.90) prend la forme :

$$\begin{aligned} Rq_t = & R \left(\frac{9}{7} \frac{q^2}{h^2} h_x - \frac{17}{7} \frac{q}{h} q_x \right) + \frac{5}{2} \left(h - \frac{q}{h^2} - \cot \beta h h_x + \frac{W}{3} h h_{xxx} \right) \\ & + \left(4 \frac{q}{h^2} h_x^2 - \frac{9}{2h} q_x h_x - 6qhh_{xx} + \frac{9}{2} q_{xx} \right) + R^2 \left(\frac{1}{210} h q_{tt} + \frac{17}{630} h q q_{xt} - \frac{1}{105} q h_x q_t + \right. \\ & \left. \frac{1}{42} h q_x q_t - \frac{26}{231} \frac{q^2}{h} h_x q_x + \frac{653}{8085} q q_x^2 + \frac{386}{8085} q^2 q_{xx} + \frac{104}{2695} \frac{q^3}{h^2} h_x^2 - \frac{78}{2695} \frac{q^3}{h} h_{xx} \right) \quad (2.91) \end{aligned}$$

Afin de comparer le modèle ci-dessus simplifié avec le modèle réduit donné par l'équation (5.5a) dans Ruyer-Quil *et al.* [21] pour un fluide newtonien, nous avons d'abord transformé cette équation en effectuant le changement de variables suivant :

$$(q, h, x, t, \Gamma) \rightarrow (Rq, (3R)^{1/3}h, (3R)^{1/3}x, (R/9)^{-1/3}t, W(R^2/3)^{1/3})$$

et en considérant le cas $Ma = 0$. Nous remarquons que seuls les termes d'ordre zéro et un qui sont concernés par ce changement de variables. La version transformée de l'équation (5.5a), où le terme Ine_q est donné par (6.3a)[21], coïncide avec le modèle (2.91).

2.3.3 Régularisation du modèle réduit

Du fait que \tilde{Q}_{I2} et \tilde{Q}_{dn} sont facteurs du nombre de Reynolds au carré dans l'équation du modèle réduit ci-dessus, invalide clairement l'hypothèse de base du rôle perturbatif de l'inertie pour des nombres de Reynolds suffisamment élevés. Le développement aux grandes ondes résultant peut être alors d'une faible convergence ou carrément divergent. Dans le cas d'un fluide newtonien, Scheid *et al.* [43] ont utilisé l'approximation de Padé afin d'obtenir une version affinée de leur modèle réduit qui est capable de capturer l'apparition d'écoulement inverse au niveau du front des ondes solitaires. La condition nécessaire de convergence est naturellement d'assurer la réduction de l'ordre de grandeur des termes \tilde{Q}_{I2} et \tilde{Q}_{d2} comparé aux termes d'inertie du premier ordre. Une façon simple d'y parvenir est, selon Ruyer-Quil *et al.* [21], est d'exprimer ces termes sous une forme aussi proche que possible de l'ordre de grandeur du terme d'inertie du premier ordre. Pour $n = 1$ ceci est rendu possible grâce à l'équivalence, à l'ordre zéro, entre q et $h^{2+1/n}$. Pour les fluides en loi de puissance, tandis que l'approximation de \tilde{Q}_{d2} comparée au terme d'inertie de premier ordre peut être obtenue de la même manière, ceci ne peut être pleinement atteint pour \tilde{Q}_{I2} en raison de la présence du terme proportionnel à h_{xx} dans ce cas précis.

En effet, après quelques étapes élémentaires, on obtient

$$\tilde{Q}_{I2} = \frac{2(2n+1)^2(3n+2)^{-1}}{Gn^2(5n+4)(4n+3)} \left(\frac{q}{h^2} \right)^{1-n} \left((n-1) \frac{q^3}{h} h_{xx} - \frac{n(20n^2+5n-16)}{4(2n+1)} q(q_t - Q_{I1})h_x \right) + \mathcal{O}(\epsilon)$$

$$\tilde{Q}_{d2} = \frac{(n-1)(2n+1)}{4Gn(3n+2)(4n+3)} \left(\frac{q}{h^2} \right)^{1-n} q(q_t - Q_{I1})h_x + \mathcal{O}(\epsilon)$$

En raison de la présence du terme $(n-1) \frac{q^3}{h^2} h_{xx}$ dans l'expression de \tilde{Q}_{I2} , celui-ci ne peut pas être en facteur du terme d'inertie du premier ordre $q_t - Q_{I1}$. Ainsi, à l'exception des fluides newtoniens, une régularisation complète n'est pas possible.

La substitution des expressions ci-dessus dans (2.90) conduit à un autre modèle réduit dénommé le modèle partiellement régularisé (PMR). Une simplification supplémentaire consistant à supprimer directement le terme indésirable ($\sim H_{xx}$) qui empêche la régularisation

complète, ce qui donne un modèle réduit régularisé (RRM)

$$\begin{aligned} R(q_t - Q_{I1}) \left(1 - \frac{(2n+1)(35n^2 + 11n - 28)}{4n(3n+2)(5n+4)(4n+3)} \frac{R}{G} \left(\frac{q}{h^2} \right)^{1-n} q h_x \right) &= Q_0 + Q_{d1} \\ &\quad + H_{n-1} Q_{d1}^* + (1 - \delta_{n1}) Q_{dn} + (n-1) Q_{d0} \end{aligned} \quad (2.92)$$

Nous observons que ce modèle coïncide, en dehors de la mise à l'échelle, avec le modèle régularisé donné dans [21] lorsque $n = 1$. En plus, on retrouve le modèle simplifié (SM) en éliminant les termes facteur de R^2 .

Nous constatons que les deux équations (2.92) et (2.85) ne diffèrent l'une de l'autre que par leurs termes d'inertie. Cependant, ces termes coïncident au stade linéaire, dû au terme quadratique $(q_t - Q_{I1}) q h_x$. Par conséquent, les modèles précédents reproduisent correctement le seuil de stabilité linéaire comme dans le cas d'un fluide newtonien. On note que, le modèle complet, modèle réduit et modèle partiellement régularisé reproduisent correctement l'expression asymptotique du débit en fonction de l'épaisseur du film jusqu'à $\mathcal{O}(\epsilon^2)$. Toutefois, le modèle simplifié et le modèle régularisé (pour $n \neq 1$) sont mis en défauts.

2.4 Conclusion

Dans ce chapitre, on a mis en évidence des modèles basés sur l'approche asymptotique de Benney combinée avec la technique des résidus pondérés permettant de décrire la dynamique non linéaire d'un écoulement de film mince d'un fluide en loi de puissance sur un plan incliné. Un modèle complet à l'ordre deux, de quatre équations d'évolution dans le cas bidimensionnel et de cinq équations d'évolutions dans le cas tridimensionnel, sont établis. Aussi, des modèles simplifiés de deux équations d'évolutions dans le cas bidimensionnel sont retrouvés. Ces modèles dérivés tiennent compte de la plupart des effets physiques importants.

Chapitre 3

Validation des modèles par analyse de stabilité

Ce chapitre sera consacré à la validation des modèles élaborés au chapitre précédent. En premier lieu, une comparaison avec les résultats de la stabilité linéaire, obtenus au premier chapitre, sera effectuée. Par la suite, une étude non linéaire de ces modèles sera abordée afin de rechercher l'existence de solutions d'ondes stationnaires comparables aux cas newtoniens.

3.1 Stabilité linéaire

Dans cette première partie, deux approches, temporelle et spatio-temporelle de stabilité linéaire, sont utilisées afin de tester les modèles proposés dans le chapitre précédent, une comparaison au spectre linéaire de la résolution numérique du système d'Orr-Sommerfeld établi initialement sera effectuée.

3.1.1 Approche temporelle

Pour évaluer la validité des modèles proposés, nous comparons les résultats de la stabilité linéaire de l'écoulement de base obtenus par ces modèles à ceux fournis par la résolution numérique du problème d'Orr-Sommerfeld. On sait qu'il y a à priori, une infinité de modes

(ω, α) , solutions non triviales du système (1.85). On s'intéresse pour l'instant à l'étude d'instabilité temporelle, qui détecte la naissance des premiers modes déstabilisant la solution de base et donne aussi le seuil d'instabilité en fonction des paramètres du problème. Il suffit de supposer que

$$\alpha \in \mathbb{R} \text{ et } \omega = \omega_r + i\omega_i \in \mathbb{C}.$$

Lorsque la perturbation n'est ni amplifiée ni atténuée, nous sommes dans les conditions de stabilité marginale qui sont atteintes pour $\omega_i = 0$.

L'écoulement de base est donné pour les modèles simplifiés de deux équations par $h = q = 1$, tandis que pour le modèle complet de quatre équations il est donné par $h = q = 1$ et $a = b = 0$. Nous présentons les perturbations sous forme des modes normaux comme

$$(h, q, a, b) - (1, 1, 0, 0) = (H, Q, A, B) e^{i(\alpha x - \omega t)} \quad (3.1)$$

Où H, Q, A et B sont des amplitudes des perturbations initiales, α est le nombre d'onde, $\omega = c\alpha$ est la fréquence, c étant la célérité complexe. Sa partie réelle représente la vitesse de phase et sa partie imaginaire représente le taux d'amplification des perturbations.

En substituant ces perturbations (3.1) dans les équations linéarisées et après élimination des amplitudes on aura comme conséquence la relation de dispersion pour le modèle correspondant, notée par

$$D(\alpha, \omega) = 0.$$

La relation de dispersion correspondant au modèle complet d'ordre deux est excessivement longue. A titre illustratif, on se limite ici à la présentation de celle du modèle régularisé(RRM) ; s'écrivant sous la forme

$$\omega = -\frac{3}{4} \left(1 + \frac{2}{3} \left(\frac{351}{35} R - \cot \beta \right) i\alpha \right) \delta_{n1} \alpha^3 + \sum_{j=1}^{j=4} a_j \alpha^j + o(\alpha^4) \quad (3.2)$$

où :

$$a_1 = \frac{(2n+1)}{n},$$

$$\begin{aligned}
a_2 &= \left(\frac{2(2n+1)^2}{(3n+2)n^3} \frac{R}{G} - \frac{\cot \beta}{n} \right) i, \\
a_3 &= -\frac{4}{3} \frac{(n+2)(2n+1)}{n(3n+1)(2n-1)} + 2 \frac{(2n+1)(5n^2+14n+6)}{Gn^3(4n+3)(3n+2)} R \cot \beta - 4 \frac{(5n^2+14n+6)(2n+1)^3}{G^2 n^5 (4n+3)(3n+2)^2} R^2 \\
a_4 &= \left[4 \frac{(25n^4+204n^3+384n^2+252n+54)(2n+1)^2}{(4n+3)^2(3n+2)^2 n^5 G^2} R^2 + \frac{(7+2n)(2n+1)}{3n(2n-1)(4n+1)} \right] i \cot \beta + \right. \\
&\quad \left[\frac{-2(128n^4+648n^3+944n^2+467n+69)(2n+1)^2}{3n^3 G(3n+2)(4n+3)(3n+1)(4n+1)(2n-1)} - \right. \\
&\quad \left. \left. \frac{8(25n^4+172n^3+320n^2+210n+45)(2n+1)^4}{n^7 G^3 (3n+2)^3 (4n+3)^2} R^2 \right] iR - \frac{iW}{nG}.
\end{aligned}$$

Les résolutions numériques sont effectuées pour diverses inclinaisons du substrat. Les résultats ci-dessous sont présentés pour deux cas d'angles d'inclinaison représentatifs, à savoir $\beta = \pi/2$ et $\pi/18$.

Dans la figure 3.1, la vitesse de phase c_r , et le facteur d'amplification αc_i , sont tracés en fonction du nombre d'onde dans les mêmes conditions que celles utilisées par Sisoev *et al.* [25], correspondant à $\beta = \pi/2$, $R = 4,69$, $W = 6,25$ pour $n = 2$ et $R = 1,93$, $W = 2,57$ pour $n = 0,8$.

Nous observons que les prédictions, à la fois, du modèle de second ordre complet et sa version réduite régularisée sont en bon accord avec les résultats numériques exacts (OS) pour un fluide dilatant ($n = 2$) aussi bien que pour un fluide pseudo-plastique ($n = 0,8$). Les courbes en tirets dans la figure 3.1 obtenues par l'application du modèle type Shkadov, dérivé par Dandapat *et al.* [24], coïncidant avec celles données par Sisoev *et al.* [25], divergent significativement de celles obtenues avec une solution numérique du problème Orr-Sommerfeld (OS) et avec nos modèles, en particulier loin du point critique.

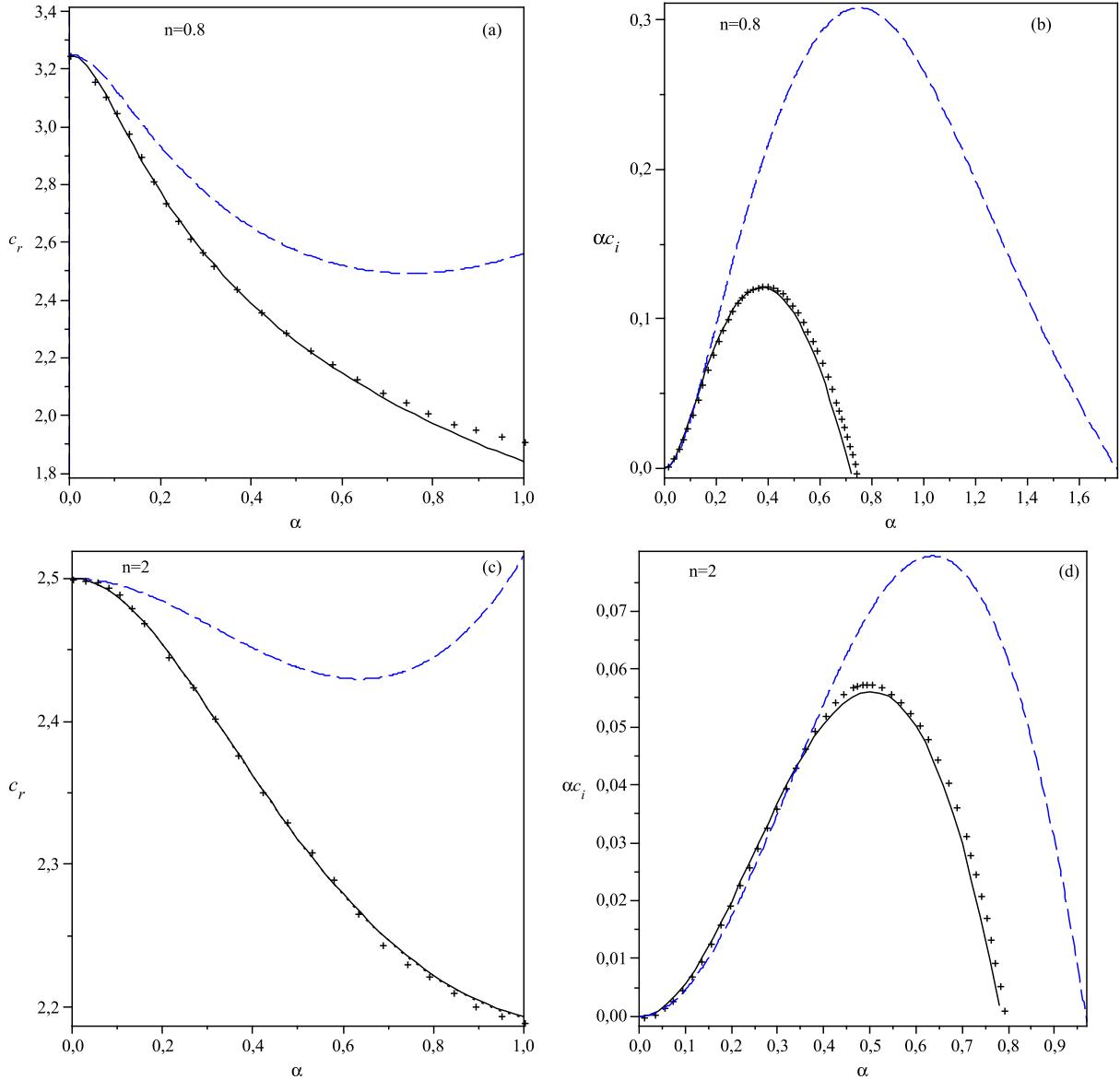


FIGURE 3.1 – Vitesse de phase (a), (c) et le taux d'amplification temporel (b), (d) en fonction du nombre d'onde pour $\beta = \pi/2$, et l'ensemble de paramètres : (a, b) $R = 4.69$ et $W = 6.25$ pour $n = 2$; (c, d) $R = 1.93$, $W = 2.57$ pour $n = 0.8$. (-) représente le modèle complet du second ordre, (+++) la solution numérique du système type Orr-Sommerfeld, (- - -) le modèle intégrale de Shkadov, et (.....) le modèle simplifier régularisé(confondu avec le modèle complet).

Figure 3.2 montre la variation du nombre d'onde marginal en fonction du nombre de Reynolds dans le cas $\beta = \pi/2$ et $n = 1,47$, pour deux valeurs distinctes de W , ($W = 1$ et $W = 10$). Les courbes séparent la zone instable U de la zone stable S . Une comparaison du modèle complet et ses versions réduites (RM, PRM, RRM) à la solution numérique exacte(lignes croisées) est représentée. Alors que le modèle complet suit d'assez près la solution Orr-Sommerfeld à de nombres de Reynolds modérés, en particulier lorsque le nombre de Weber est assez grand, les modèles réduits RM et PRM divergent pour des nombres de Reynolds au-delà d'environ $R = 20$. Par contre, le modèle MRR, qui asymptote le modèle SM au stade linéaire, présente la même tendance que la solution OS. Contrairement aux deux autres modèles réduits, le RRM ne divergence pas rapidement ; son écartement de la solution exacte et du modèle complet est relativement progressif et lent. Comme prévu, l'accord du modèle complet et le RRM avec la solution numérique exacte est mieux pour les grandes valeurs de W . En outre, on peut observer que, en gardant tout les paramètres fixés, l'effet de l'augmentation de W est de réduire la région instable. Il apparaît clairement que le modèle type Shkadov prédit avec précision le comportement d'écoulement seulement à proximité de la criticalité et diverge de manière significative de la solution numérique exacte lorsque le nombre de Reynolds augmente, quelque soit le nombre de Weber.

La figure 3.3 indique, pour $n = 0,8$, des résultats similaires à ceux de la figure 3.2, mais sans les spectres des modèles RM et PRM qui souffrent de la divergence rapide, comme il est indiqué ci-dessus. On peut remarquer que la diminution de l'indice n conduit à la réduction de la zone d'instabilité, en d'autres termes la décroissance de n a un effet stabilisant.

Pour un angle d'inclinaison $\beta = \frac{\pi}{18}$, la figure 3.4 présente des résultats similaires à ceux de la figure 3.2 et 3.3 pour $\beta = \frac{\pi}{2}$, sauf pour le cas du modèle de Shkadov ne prédit pas correctement le point critique.

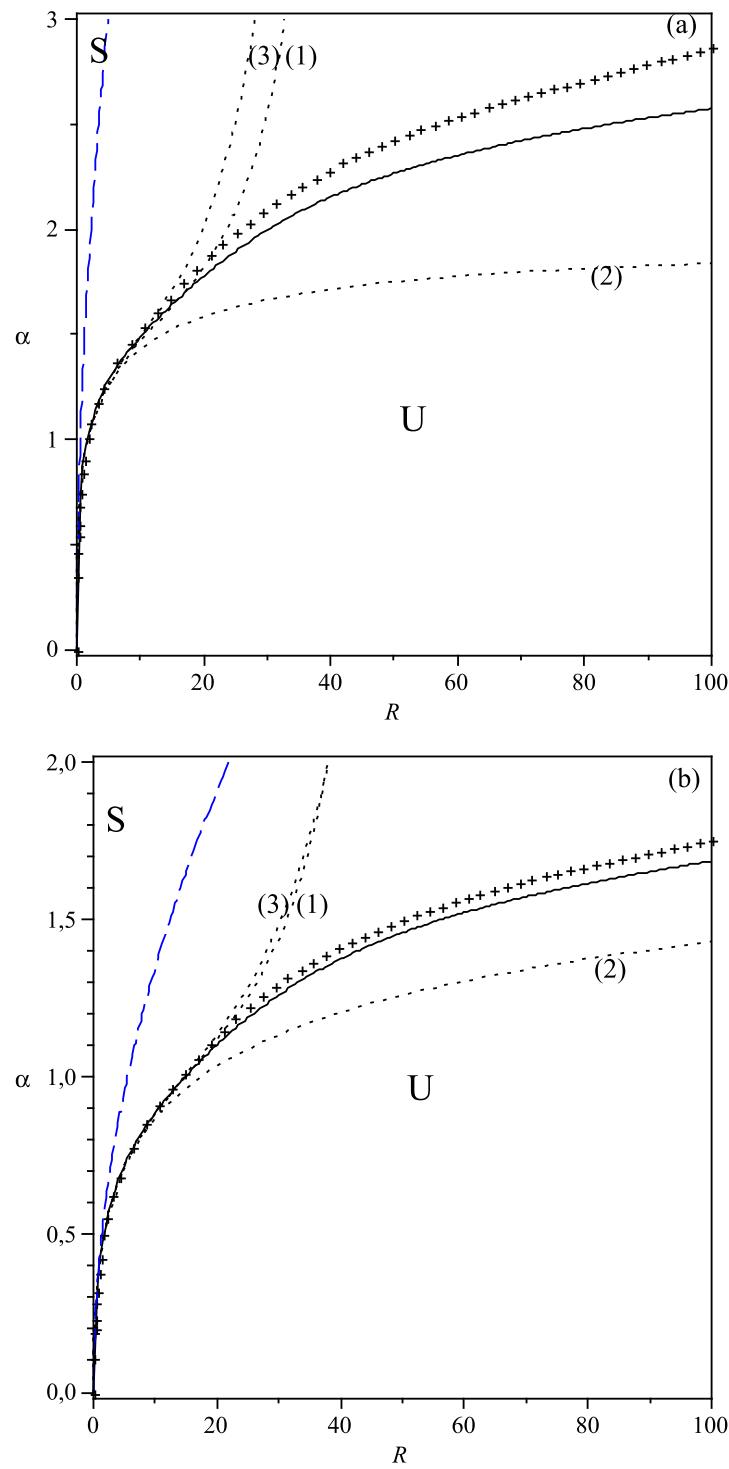


FIGURE 3.2 – Courbes de stabilité marginale dans le plan (R, α) pour $n = 1.47$ et $\beta = \pi/2$; (a) $W = 1$, (b) $W = 10$. (-) représente le modèle complet du second ordre, (+++) la solution numérique du système type Orr-Sommerfeld, (—) le modèle intégrale de Shkadov, et (.....) les modèles RM (1), PRM (3) RRM et SM (2).

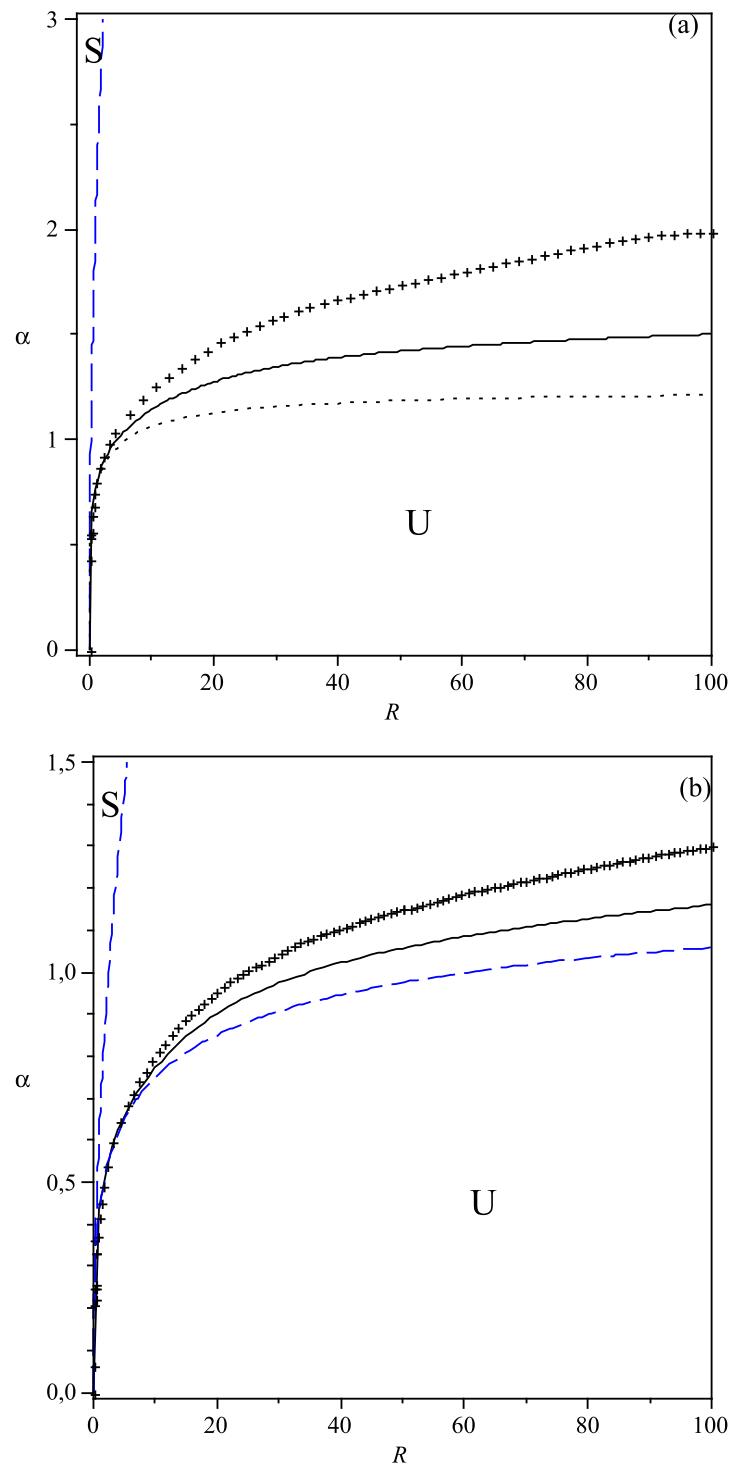


FIGURE 3.3 – Courbes de stabilité marginale dans le plan (R, α) pour $n = 0.8$ et $\beta = \pi/2$; (a) $W = 1$, (b) $W = 10$. (-) représente le modèle complet du second ordre, (+++) la solution numérique du système type Orr-Sommerfeld, (—) le modèle intégrale, et (.....) RRM et SM.

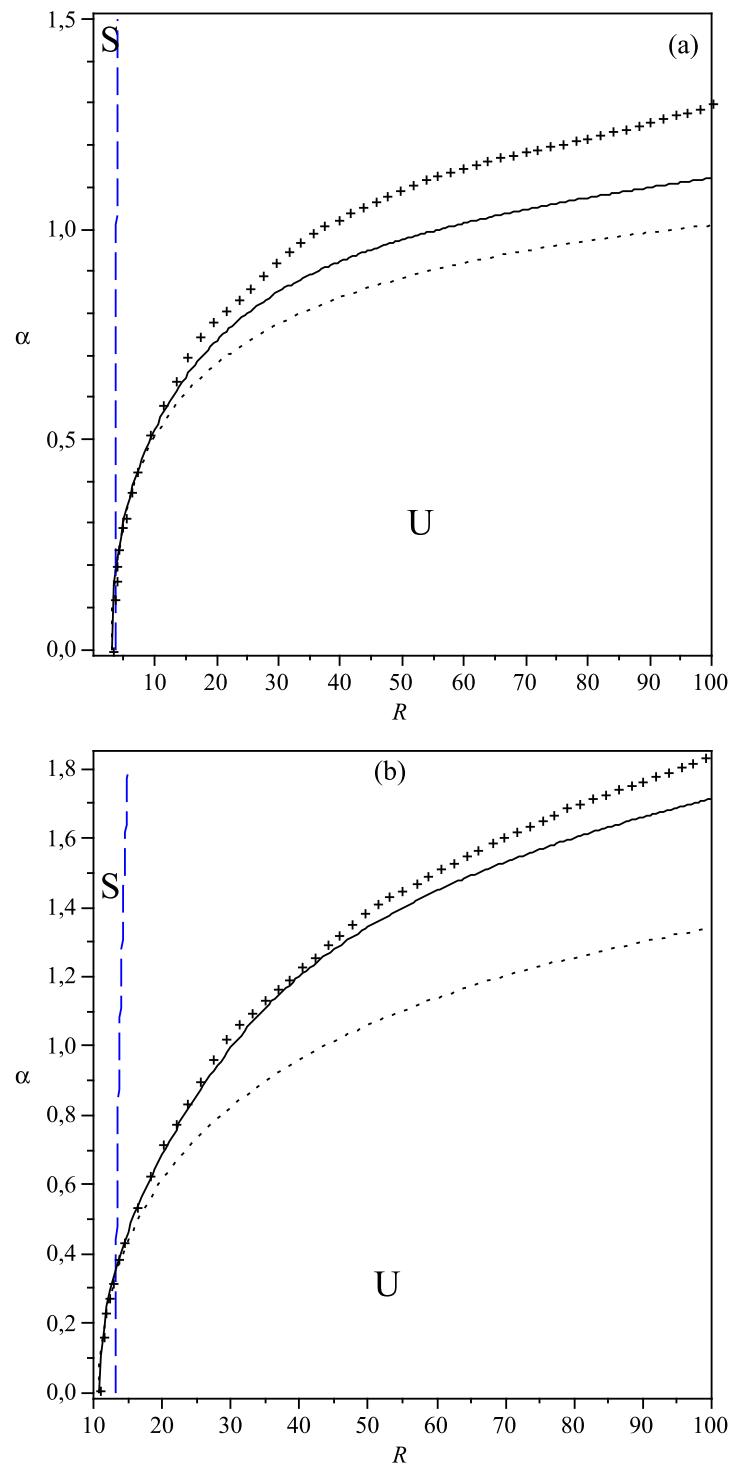


FIGURE 3.4 – Courbes de stabilité marginale dans le plan (R, α) pour $\beta = \pi/18$ et $W = 10$; (a) $n = 1.47$, (b) $n = 0.8$. (-) représente le modèle complet du second ordre, (+++) la solution numérique du système type Orr-Sommerfeld, (—) le modèle intégrale, et (.....) RRM et SM.

La figure 3.5_a illustre l'effet de la variation de n sur les courbes de stabilité marginale pour $W = 1$ près de la criticalité. On peut remarquer que, très proche de la criticalité, l'augmentation de n produit une diminution du nombre d'onde marginal. Cela signifie que, dans cette gamme de petits nombres de Reynolds, le comportement rhéofluidifiant favorise l'instabilité alors que le comportement rhéoépaississant est plutôt stabilisant. Ce phénomène est aisément déduit du fait que la viscosité effective est réduite en diminuant n pour les fluides pseudo-plastiques alors qu'elle est susceptible de croître avec l'augmentation de n pour les fluides dilatants. Une tendance inverse, illustrée dans la figure 3.5b, se produit loin de la criticalité quand l'inertie devient suffisamment importante. En effet, au nombre de Reynolds suffisamment élevé, l'augmentation de n accroît la gamme des nombres d'ondes instables, ce qui est un effet déstabilisant. Ce résultat semble suggérer que l'impact de la variation de n sur la stabilité de l'écoulement est non uniforme. La figure 3.5a est en réalité un agrandissement au voisinage de la criticalité de la figure 3.5b.

Alors que l'écoulement est toujours instable dans le cas vertical, l'instabilité se manifeste, pour $\beta \neq \pi/2$, seulement au-delà d'un certain nombre de Reynolds critique

$$Rc = \left(2 + \frac{1}{n}\right)^{n-2} \left(\frac{3}{2}n + 1\right) \cot \beta$$

qui est déjà trouvé par Miladinova *et al.* [23] en utilisant une approche asymptotique. Comme en témoigne la figure 3.6, l'impact de la variation de n sur les nombres d'ondes marginaux est qualitativement le même que pour le cas du plan vertical. En effet, en diminuant n les nombres d'ondes marginaux augmentent pour des faibles nombres de Reynolds alors qu'ils diminuent lorsque l'inertie devient importante. Au même temps, diminuer n réduit les nombres de Reynolds critiques synonyme d'un effet déstabilisant. Alors que l'effet de la diminution de n est soit déstabilisant pour les petits nombres de Reynolds (R moins d'environ 20) ou stabilisant lorsque l'inertie devient importante (R plus d'environ 100), cet effet est non uniforme dans la zone intermédiaire des nombres de Reynolds.

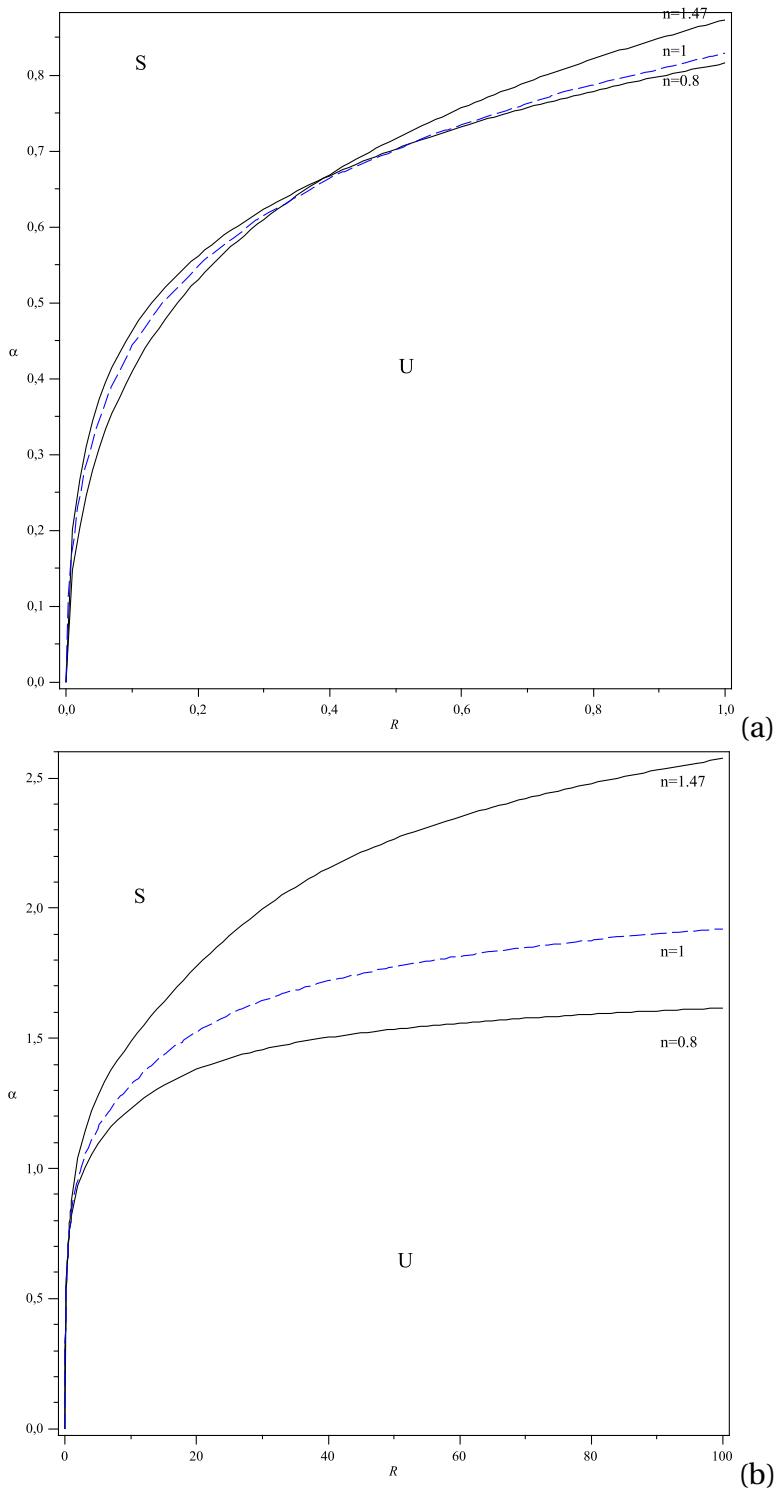
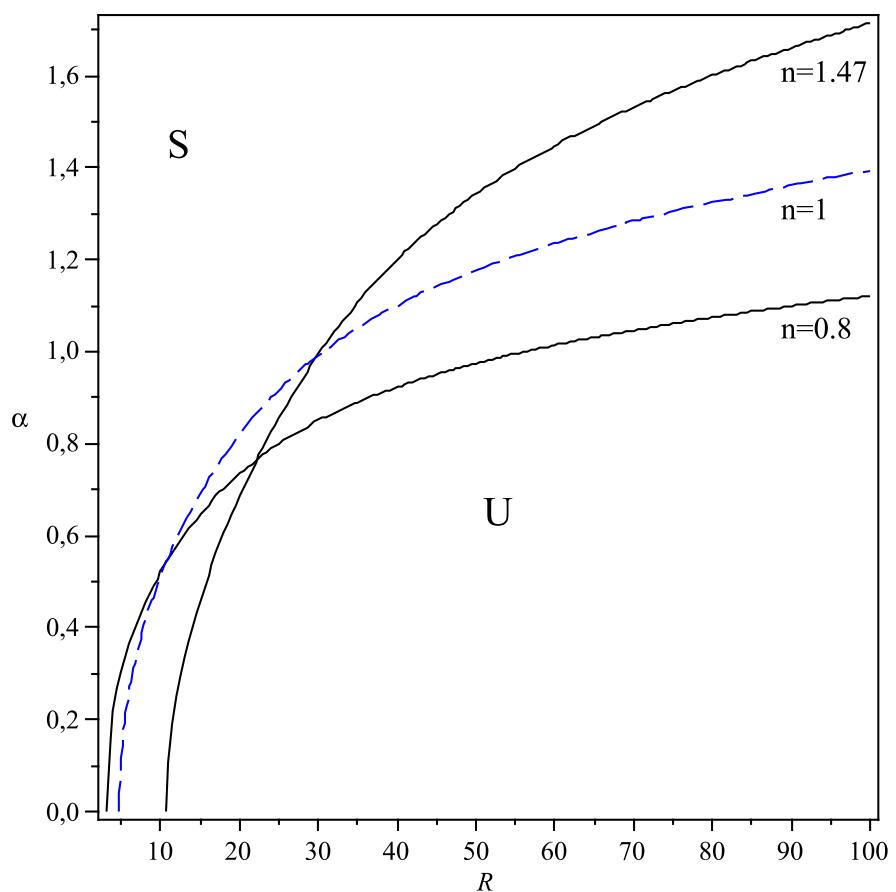


FIGURE 3.5 – Effet de la variation de n sur les courbes de stabilité marginale pour $W = 1$ et $\beta = \pi/2$. (a) proche de la criticalité, (b) au-delà de la criticalité.

FIGURE 3.6 – Même que la figure 3.5 avec $\beta = \pi/18$.

3.1.2 Approche spatio-temporelle

Dans la section précédente notre intérêt s'est porté sur l'évolution temporelle des perturbations, considérées spatialement périodiques. Mais, la plupart des dispositifs expérimentaux conçus pour les écoulements ouverts à surface libre fonctionnent par le biais de système de forçage, c'est-à-dire, en imposant une perturbation périodique de fréquence donnée, on observe son évolution spatiale. Il apparaît donc nécessaire de compléter l'étude de la stabilité linéaire par une approche spatiale. Dans ce cas, on a

$$\alpha = \alpha_r + i\alpha_i \in \mathbb{C} \text{ et } \omega = \omega_r + i\omega_i \in \mathbb{C}.$$

Cette approche met en évidence analytiquement une transition d'une instabilité de type convectif à une instabilité de type absolu, utilisé pour la première fois dans le cadre de l'hydrodynamique par Huerre et Monkewitz [44]. Toute perturbation localisée génère un paquet d'ondes qui peut progresser à la fois vers l'amont et vers l'aval. Lorsque ce paquet d'ondes s'accroît localement et contamine tout le domaine de l'écoulement, l'instabilité est appelée absolue et une dynamique auto-entretenue intrinsèque ou " mode global " peut s'installer, l'écoulement se comporte ainsi comme un oscillateur. En revanche, lorsque le paquet d'ondes est convecté en aval par l'écoulement principal, l'instabilité est appelée convective et le système se comporte comme un amplificateur de bruit.

A une position donnée, le comportement du paquet d'ondes est dominé par l'onde correspondant à une vitesse de groupe nulle,

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} = 0,$$

qui définit le nombre d'onde absolue α_0 et la fréquence ω_0 .

Dans le α -plan complexe, la condition $v_g = 0$ se produit au point col qui doit également résulter, selon le critère de collision de Briggs-Bers, de la collision de deux branches spatiales provenant des côtés opposés de l'axe réel ([45],[44]). Si le taux d'amplification absolue $\Im(\omega_0)$ est positif (négatif) l'instabilité est dite absolue (convective). Ce critère est nécessaire mais pas suffisant pour décrire la nature de l'instabilité : le nombre d'onde absolu et la fréquence,

(α_0, ω_0) , doivent aussi s'associer au pincement des deux branches de la relation de dispersion $\alpha^+(\omega)$ et $\alpha^-(\omega)$ provenant respectivement du demi α -plan complexe inférieur et supérieur (cf. [44]).

Afin d'étudier l'influence de l'indice n de loi de puissance sur la nature de l'instabilité, nous considérons d'abord le cas correspondant à l'expérience réalisée par Liu *et al.* [8] pour un fluide newtonien. La condition de pincement a été recherchée pour de larges gammes des nombres Weber et de Reynolds. La partie imaginaire de ω_0 est négative dans l'ensemble du domaine, ce qui est en accord avec l'affirmation de Brevdo *et al.* [46] qu'un film fluide s'écoulant le long d'un plan incliné est convectivement instable. Afin de comparer avec leurs résultats (les mêmes conditions d'écoulement sont considérées) nous avons représenté dans la Fig. 3.7 la solution de l'équation de dispersion correspondant au modèle complet du second ordre. La bonne concordance entre la figure. 3.7 et celle obtenue par Brevdo *et al.* [25] est remarquable. Dans la Fig. 3.7a, où la partie imaginaire de la fréquence complexe est posée égale à 0,03, la solution est composée de trois branches dans le demi plan supérieur et deux branches dans le demi plan inférieur. La figure 3.7b est un agrandissement, à l'origine, de la figure 3.7a qui montre que la branche, proche de l'axe de αR , est en fait entièrement incluse dans le demi plan supérieur. En diminuant la partie imaginaire de la fréquence vers zéro, aucun pincement entre les branches n'est observé, voir figure 3.7c. Ceci montre que le modèle complet de second ordre décrit avec précision la stabilité linéaire de l'écoulement.

Une analyse similaire a été effectuée pour $n = 1,47$ et $n = 0,8$ (voir figures 3.8 et 3.9). Une variation de l'indice n paraît n'avoir aucune influence sur le signe de la fréquence absolue qui reste négatif indépendamment de n . De plus, aucun pincement entre les branches dans le α -plan n'est observé, comme le montre les figures 3.8 et 3.9, ce qui suggère que l'indice n ne modifie pas le caractère convectif de l'instabilité.

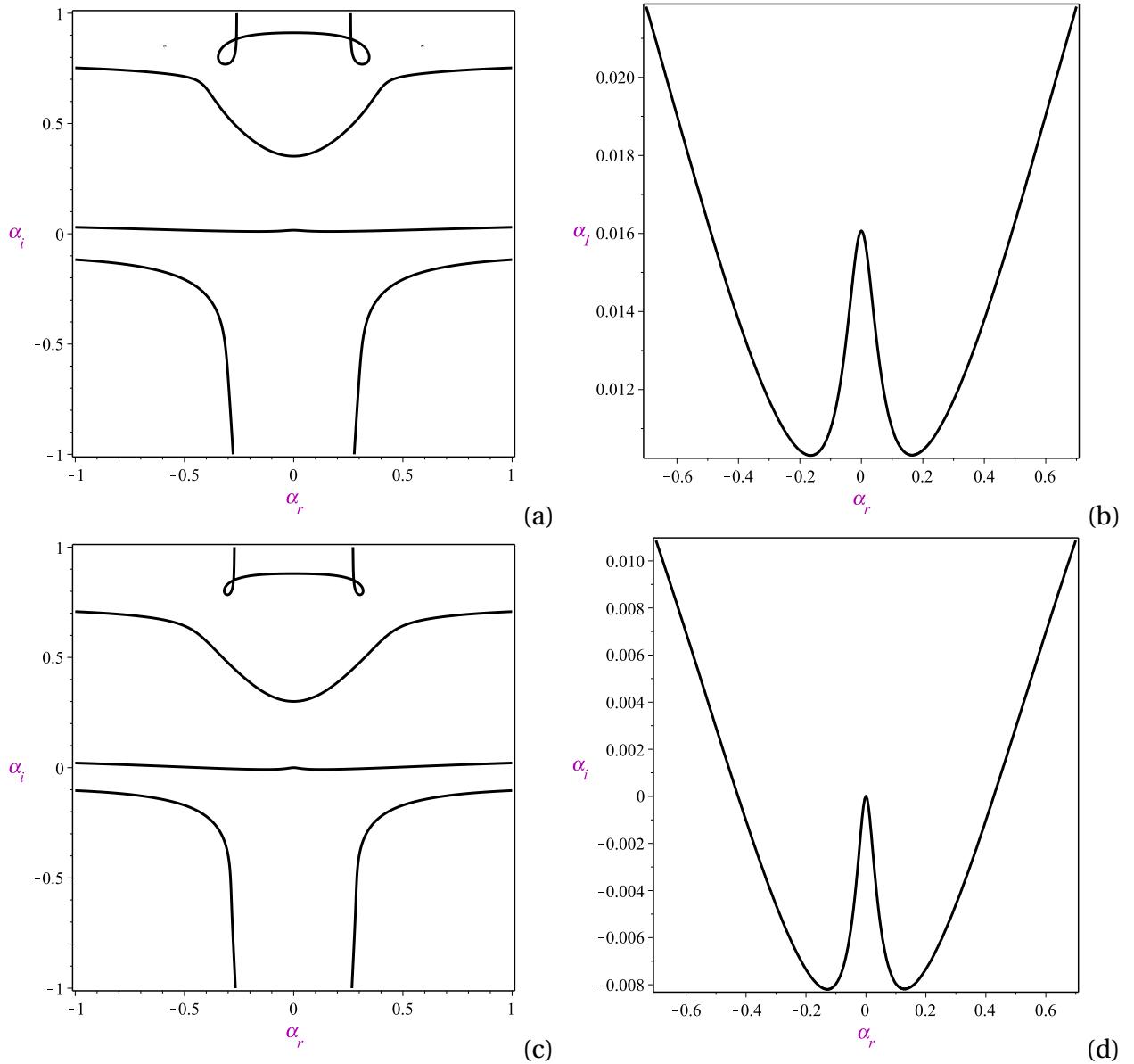
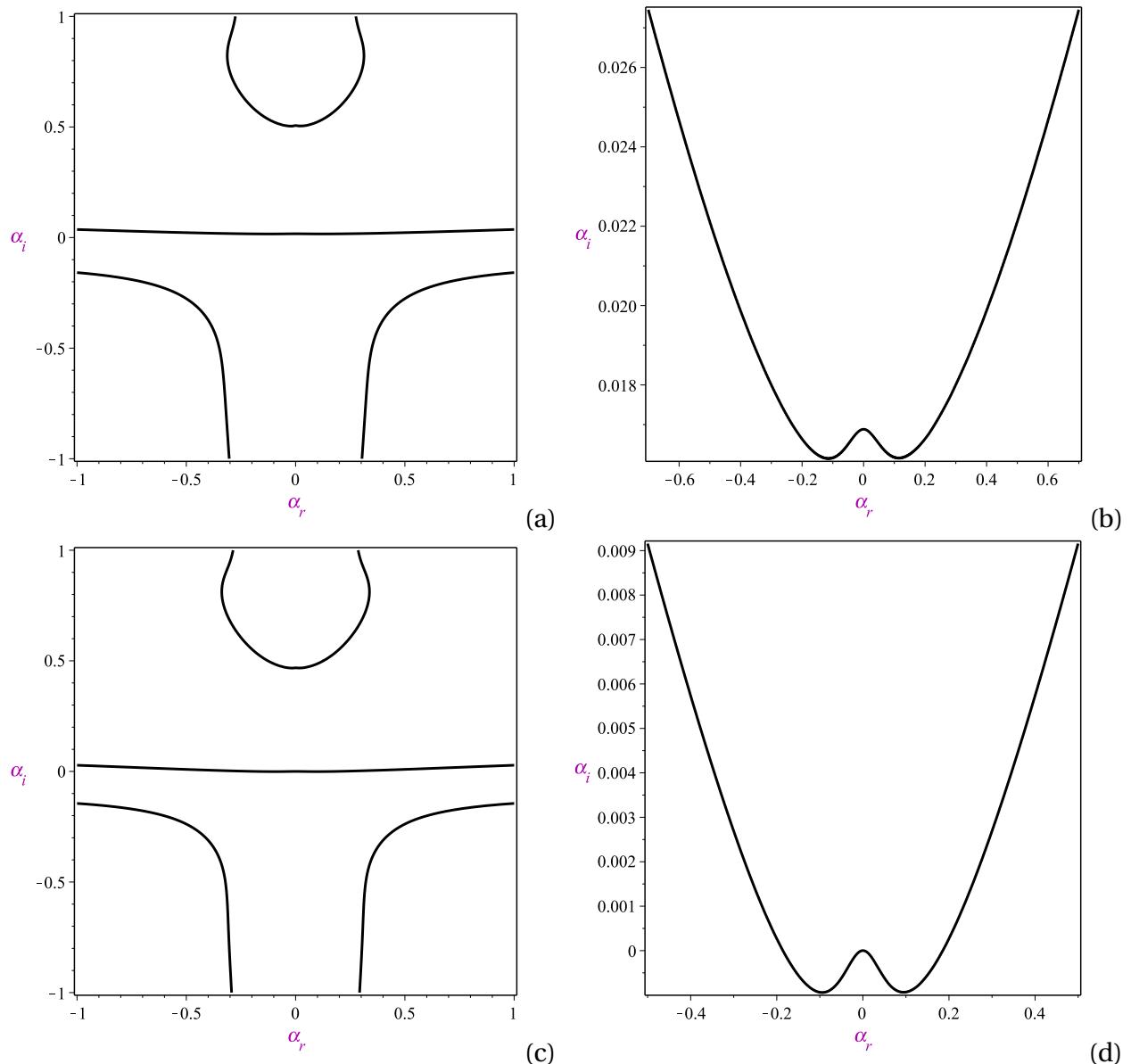
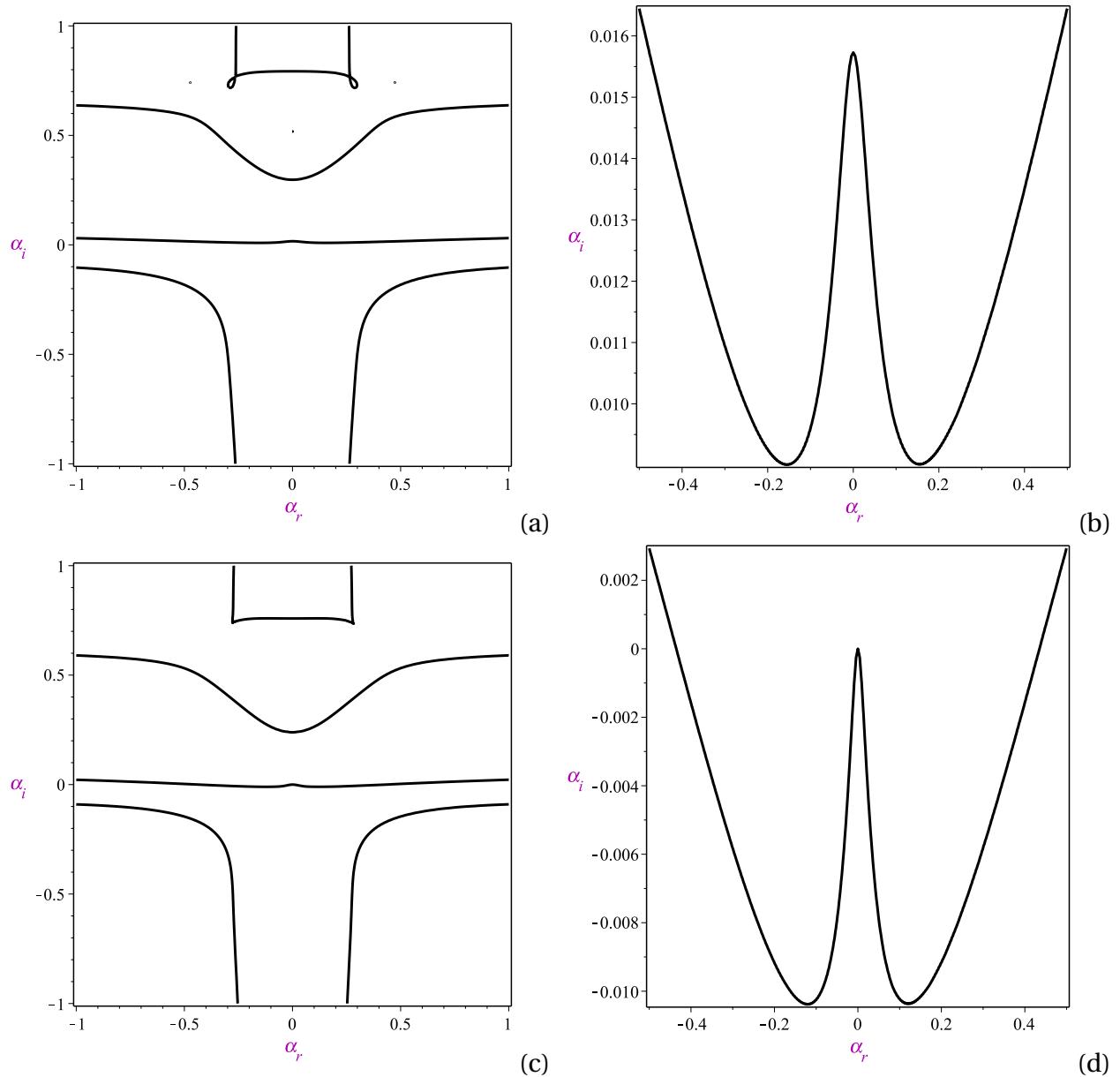


FIGURE 3.7 – Solution de la relation de dispersion dans le plan complexe α -plan avec $n = 1$
(a) $\Im(\omega) = 0.03$, (b) agrandissement de (a), (c) $\Im(\omega) = 0$, (d) agrandissement de (c). Pour les paramètres $W = 124.38$, $R = 26.67$, correspondant aux mêmes conditions que dans [46]

FIGURE 3.8 – Même que la figure 3.7 avec $n = 1, 47$

FIGURE 3.9 – Même que la figure 3.7 avec $n = 0,8$

3.2 Stabilité non linéaire : Ondes stationnaires

Dans cette section, nous nous intéressons à la résolution des systèmes non linéaires (2.19 et 2.90) établi au chapitre 2. Dans ce cas, les termes non linéaires seront pris en compte dans le but de rechercher des solutions sous forme d'ondes progressives qui ne se déforment pas dans un référentiel se mouvant à une vitesse constante c . Ce choix d'espace de solutions nous permet de réduire d'une dimension notre problème initial et le transformer à un système dynamique. L'étude de ce système va permettre d'analyser le scénario de la transition vers le chaos.

3.2.1 Formulation du système dynamique

Introduisons le changement de variables $\xi = x - c t$ et $\tau = t$, où ξ est une variable d'espace dans le référentiel en mouvement, dans le cadre des ondes qui se propagent à une vitesse constante c . Dans ce nouveau référentiel, le problème aux dérivées partielles (2.90) et (2.19), se transforme en un problème aux équations différentielles ordinaires. Il est bien de noter qu'un nouveau paramètre c est à prendre en considération. Les dérivées se transforment de manière suivante

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial t} = -c \frac{\partial}{\partial \xi}$$

L'équation cinématique (2.19) devient

$$q_\xi - ch_\xi = 0 \tag{3.3}$$

En intégrant l'équation ci-dessus, nous obtenons

$$q - ch = q_0 \tag{3.4}$$

Où q_0 est une constante d'intégration dépendante de la vitesse de phase c , qui représente le débit circulant sous l'onde dans son repère en mouvement. Ainsi q_0 est généralement négatif car la vitesse des ondes observées à la surface du film est plus grande que la vitesse moyenne du liquide [28]. L'équation (3.4) montre que dans ce référentiel en mouvement, le débit q et l'épaisseur du film h , sont linéairement dépendants.

La constante q_0 est déterminée par une condition au limite (on impose par exemple l'épaisseur du film au bord amont ou aval), c-à-d q_0 est fixée par la solution de base $q = h^{2+1/n}$, soit solution de l'équation

$$h^{2+1/n} - ch = q_0.$$

Cette dernière équation non linéaire admet plusieurs solutions, qui montre l'existence d'ondes en forme de ressaut hydraulique, c-à-d, l'existence de bifurcations hétéroclines.

Si on impose $\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} h(\xi) = 1$ (solution de base adimensionnelle), on obtient

$$q_0 = 1 - c, \quad (3.5)$$

par suite

$$q = 1 + c(h - 1). \quad (3.6)$$

En remplaçant par l'expression (3.4) dans l'équation (2.90) et en posant

$$H_1 = h, H_2 = h_\xi, H_3 = h_{\xi\xi}$$

on obtient le système dynamique suivant :

$$\frac{d\mathbf{H}}{d\xi} = \mathbf{F}(\mathbf{H}, c) \quad (3.7)$$

où $\mathbf{H} = (H_1, H_2, H_3)^t$, $\mathbf{F} = (H_2, H_3, F1)^t$.

Ou bien sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{dH_1}{d\xi} &= H_2 \\ \frac{dH_2}{d\xi} &= H_3 \\ \frac{dH_3}{d\xi} &= F1(H_1, H_2, H_3, c, B, R, W, n) \end{aligned} \quad (3.8)$$

avec

$$-\frac{3n+2}{2n+1} \frac{W}{2} H1F1 = F$$

où

$$\begin{aligned}
F = & R \left(c^2 H_2 + (6n+3) \frac{(1+c(\frac{5n+3}{6n+3}H_1+1))}{(4n+3)} \frac{qH_2}{H_1^2} \right) \left(1 - \frac{(2n+1)(35n^2+11n-28)}{4n(3n+2)(5n+4)(4n+3)} \frac{R}{G} \left(\frac{q}{H_1^2} \right)^{1-n} qH_2 \right) \\
& + \frac{3n+2}{2n+1} \frac{G}{2} \left(H_1 - \left(\frac{q}{H_1^2} \right)^n - \cot \beta H_1 H_2 \right) + \frac{(3n+2)(4n+1)^{-1}G}{(2n-1)(3n+1)(n+1)} \left(\frac{q}{H_1} \right)^n \left\{ \frac{1}{6}(36n^3+31n^2-1)H_1 H_3 \right. \\
& - \frac{1}{6} n(8n+5)(3n+1) \frac{cH_1^2 H_3}{q} - \frac{96n^5+90n^4-n^2-5n^3+5n+1}{3n(2n+1)} H_2^2 + \frac{36n^3+31n^2-1}{3} \frac{cH_1 H_2 H_3}{q} \} \\
& + H_{n-1} \frac{3n+2}{2(n+1)} \left(2 \frac{2n+1}{n+1} \left(\frac{cH_2}{H_1} - \frac{qH_2}{H_1^2} \right) \right)^{n-1} \left(c^2 H_3 + \frac{2n+1}{n+1} \left(\frac{2cH_2^2}{H_1} - \frac{qH_3}{H_1} - 2 \frac{qH_2^2}{H_1^2} \right) \right) + (1-\delta_{n1}) \\
& \frac{(3n+2)G}{(2n-1)(4n+1)} \left(\frac{q}{H_1} \right)^n \left\{ \frac{12n^5+88n^4-37n^3-115n^2-11n+3}{6(1+3n)(n+1)} \frac{cH_1 H_2^2}{q} - \frac{c^2}{12} n(n-1)(2n+15) H_2^2 \right. \\
& - \frac{1}{6} \frac{24n^7+164n^6-166n^5-331n^4-9n^3+25n^2-5n+1}{n(n+1)(3n+1)(2n+1)} H_2^2 \left. \right\} - \frac{(n-1)(3n+2)(2n+1)G}{12(2n-1)(3n+1)(4n+1)} \\
& \left(\frac{q}{H_1} \right)^n \{ (2n^3+4n^2-3n-1)c^2 qH_1^2 H_3 - (48n^3+40n^2+8n)c^2 H_2^2 \}
\end{aligned}$$

La valeur de q est donnée par la relation (3.6).

3.2.2 Les points fixes

Les points fixes d'un système dynamique, par définition, sont ses solutions stationnaires vérifiant

$$\frac{dH}{d\xi} = 0 \quad (3.9)$$

Ces solutions représentent les états d'équilibre du système physique, par exemple : le point fixe $H_I(1, 0, 0)$ représente l'écoulement de base dans notre cas.

Les points fixes du système dynamique (3.8) sont déterminés alors en annulant son membre de droite, soit

$$\begin{aligned}
H_2 &= 0, \quad H_3 = 0 \\
F_1 &= H_1^{2+1/n} - cH_1 - q_0 = 0
\end{aligned} \quad (3.10)$$

On remarque que l'équation (3.10) correspond à l'équation (3.4) pour un débit q pris dans le cas où l'épaisseur du film est uniforme. Comme on l'a déjà précisé, chaque point fixe correspond à un film d'épaisseur uniforme, ceci nous donne la possibilité de prendre le cas de

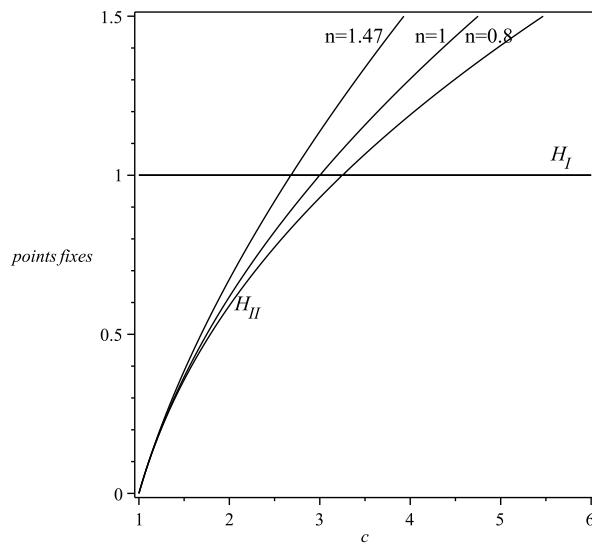


FIGURE 3.10 – Schéma représentant les points fixes H_I et H_{II} en fonction de la vitesse de phase c , pour différentes valeurs de l’indice n

l’écoulement de Nusselt ($c \rightarrow d$ $H_1 = 1$). Par conséquent, q_0 est fixé par la relation (3.5).

Ainsi, les autres points prennent la forme $H_i(r, 0, 0)$ avec r est le zéro de la fonction g définie par

$$g(x) = x^{2+1/n} - cx + c - 1, \quad (3.11)$$

avec

$$cx - c + 1 \geq 0$$

En plus du point fixe trivial $H_I = (1, 0, 0)$, la solution d’onde stationnaire présente un autre point fixe $H_{II}(r_2, 0, 0)$ qui dépend de c et de l’indice n . Avec r_2 est le deuxième zéro de la fonction g , dont on possède une signification physique seulement si $c > 1$ (voir la figure 3.10).

On peut montrer facilement en utilisant les théorèmes élémentaires d’analyse, que

$$\begin{cases} 0 < r_2 < 1, & \text{si } 1 < c < c_0 = 2 + 1/n; \\ r_2 = 1, & \text{si } c = c_0 \text{ (les deux points fixes sont confondus);} \\ r_2 > 1, & \text{si } c > c_0. \end{cases}$$

3.2.3 Stabilité et bifurcation des points fixes

Le système dynamique (3.8) est maintenant considéré pour localiser les régions de l'espace des paramètres dans lequel le mouvement périodique et chaotique peut se produire. L'étude complète du système dynamique nécessite une résolution numérique, en raison de sa non-linéarité, mais quelques indications sur le comportement de l'écoulement peuvent être obtenues à partir d'une analyse linéaire au voisinage des points fixes. Nous remarquons que, du fait des propriétés d'invariance du système dynamique, il est possible de se limiter aux propriétés de stabilité du point fixe en amont H_I . Le passage d'une solution du point fixe H_I à l'autre point fixe H_{II} peut être alors obtenu en faisant le changement de variables suivant

$$(\xi, h, c, R, W) = (H_2 \xi, r_2 h, r_2^2 c, R/r_2^3, W/r_2^8).$$

La linéarisation est justifiée pour les petites perturbations dont on peut négliger les produits issus des termes non linéaires, ce qui conduit alors à :

$$\frac{dH}{d\xi} = JH \quad (3.12)$$

où J est la matrice Jacobienne calculée au point fixe H_I donnée par

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{pmatrix}$$

Les éléments e_1 , e_2 et e_3 sont dépendants du modèle. Les valeurs propres de la matrice J déterminent la stabilité linéaire du point fixe et sont données par la résolution de l'équation caractéristique $\det(J - \lambda I_d) = 0$, donnée par

$$-\lambda^3 + e_3\lambda^2 + e_2\lambda + e_1 = 0 \quad (3.13)$$

avec les coefficients :

$$\begin{aligned} e_3 &= -\frac{2(2n+1)(4n+1)^{-1}}{(2n-1)(3n+1)(n+1)} \left\{ \frac{1}{6}(36n^3 + 31n^2 - 1) - \frac{1}{6}n(8n+5)(3n+1) \right\} \frac{G}{W} + \delta_{n1} \frac{1}{W} (c^2 + \frac{3}{2}) \\ &\quad - \frac{(n-1)(2n+1)^2(2n^3 + 4n^2 - 3n - 1)}{6(2n-1)(3n+1)(4n+1)} \frac{G}{W} c^2 \\ e_2 &= 2R/W \frac{(2n+1)}{(3n+2)} \left(\frac{-6n-3+c(11n+6)}{4n+3} - c^2 \right) + \frac{G}{W} \cot \beta \\ e_1 &= \frac{n(c-2)-1}{W} \end{aligned}$$

Le polynôme caractéristique est de troisième ordre et à coefficients réels constants, il admet donc soit 3 racines réelles ($\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$), soit une racine réelle et deux racines complexes conjuguées ($\lambda_0, \lambda_{1r} + i\lambda_{1i}, \lambda_{1r} - i\lambda_{1i}$). Le caractère stable ou instable de notre système linéarisé dépend de ces trois valeurs propres solution de (3.13). Si les parties réelles des valeurs propres sont toutes négatives, le point fixe est asymptotiquement stable. En revanche, il suffit que l'une des valeurs propres ait une partie réelle positive, c.-à-d. traverse l'axe imaginaire, pour que le point fixe soit instable. Dans chacun des deux cas le point fixe est dit hyperbolique. Une situation particulière est celle où les valeurs propres sont toutes à partie réelle négative sauf une ou plusieurs dont la partie réelle est nulle. Dans cette situation le point fixe est dit non Hyperbolique et l'étude de stabilité linéaire ne permet pas de conclure quand à la stabilité du point fixe. Si pour certaines valeurs fixées des paramètres (c, R, W) le point fixe est non hyperbolique on dit que le système subit une bifurcation du point fixe pour ces valeurs critiques des paramètres. Donc la bifurcation associée à l'instabilité intervient lorsqu'une valeur propre réelle ou bien deux valeurs propres complexes conjuguées franchissent l'axe imaginaire.

Afin d'illustrer l'influence de tous les paramètres sur l'apparition des attracteurs complexes par une procédure numérique, les propriétés qualitatives des valeurs propres sont représentées dans le plan $(\cot(\beta)/R, c)$ à travers la figures (3.11), pour différentes valeurs de R et W dans deux cas illustratifs $n = 0.8$ et $n = 1.47$. Nous pouvons limiter notre analyse au cas où le film est linéairement instable, soit :

$$\cot \beta / R < \frac{2(2n+1)^2}{n^2(3n+2)G}.$$

Par exemple, on a

$$\begin{cases} \cot \beta / R < 1.869981683, & \text{si } n = 0.8 \\ \cot \beta / R < 3, & \text{si } n = 1 \\ \cot \beta / R < 0.5261466098, & \text{si } n = 1.47 \end{cases}$$

Bifurcations transcritiques :

Cette bifurcation associée à l'instabilité intervient lorsqu'une valeur propre réelle franchit l'axe imaginaire. Dans notre cas, lorsque $c = 2 + 1/n$, les deux points fixes sont confondus et une racine du polynôme caractéristique (3.13) est nulle (car $e_1 = 0$). Quand cette valeur critique est franchie par une valeur propre réelle, les deux points fixes échangent de stabilité, il se produit alors une bifurcation transcritique. Dans le cas $c < 2 + 1/n$, le point fixe H_I est stable et le point fixe H_{II} est instable, et inversement si $c > 2 + 1/n$. Physiquement cette bifurcation donne naissance à une onde stationnaire de type saut hydraulique. Le lieu de cette bifurcation est représenté par la courbe (T) sur les figure3.11

Bifurcations Hopf :

Si la valeur critique est franchie par deux valeurs propres complexes conjuguées il s'agit d'une bifurcation de Hopf. A l'occurrence de celle-ci, un cycle limite apparaît autour du point fixe, ce qui signifie qu'une solution périodique peut bifurquer à partir d'un écoulement uniforme sous certaines conditions.

En substituant $\lambda_{1,2} = i\omega_0$ dans l'équation caractéristique (3.13), nous donne

$$-e_1 + \omega_0^2 e_3 = 0 \text{ et } \omega_0^3 + \omega_0 e_2 = 0$$

En éliminant ω_0 , on constate qu'une bifurcation de Hopf aura lieu sauf si on satisfait les trois conditions suivantes :

$$e_2 < 0, \quad e_3 < 0 \quad \text{et} \quad e_2 e_3 + e_1 = 0. \quad (3.14)$$

où ω_0 est la période d'amplitude de Hopf nul. Dans la condition de Hopf (3.14), on pose $h_0 = 1$ si $c < 2 + 1/n$ et $h_0 = r_2$ si $c > 2 + 1/n$. L'égalité dans (3.14) est représentée par la courbe (H) sur les figure3.11. Il est à noter que cette courbe n'est rien d'autre que la courbe de stabilité marginale dans le cas particulier des ondes stationnaires. En outre, les deux premières conditions sont satisfaites seulement dans le régime d'instabilité linéaire ($R > Rc$).

Attracteurs périodiques :

Il est intéressant encore d'identifier dans le plan $(\cot \beta / R, c)$ les zones d'existence d'attracteurs issus d'écoulement périodique, lorsque la ligne de Hopf est franchie. On considère le cas où la partie imaginaire des deux valeurs propres complexes conjuguées est nulle. On aura alors deux valeurs propres double $\lambda_{1,2} = a$ en plus de la valeur réelle $\lambda_3 = b$ et l'équation caractéristique prend forme :

$$(\lambda - a)^2(\lambda - b) = 0$$

Ce qui nous conduit à la relation suivante

$$4(e_3^2 + 3e_2)(e_2^2 - e_1 e_3) - (e_2 e_3 + 9e_1)^2 = 0 \quad (3.15)$$

qui est représentée par la courbe (B) sur la figure 3.11. Les frontières de la courbe (B) correspondent à une bifurcation nœud-col du point fixe H_I . Ce passage correspond quelquefois dans l'espace physique à la disparition des oscillations capillaires précédant les ondes solitaires. Nous avons également tracé la courbe (S), dans le cas d'un point fixe col-spiral, le long duquel la somme de la valeur propre réelle et de la partie réelle des valeurs propres complexes s'annule, conduisant à la relation, donnée par Amaouche *et al.*[4], suivante

$$2e_3^3 + (e_1 - e_1 e_2) = 0 \quad (3.16)$$

Cette courbe correspond à la frontière où le chaos homocline à la Shilnikov peut avoir lieu. Franchir cette courbe peut conduire au chaos homocline selon le théorème de Shilnikov qui énonce que l'existence d'une orbite homocline générée par un point fixe col-spirale implique l'existence de trajectoires non périodiques si la grandeur de la partie réelle de la valeur propre complexe est inférieure à celle de la valeur propre réelle.

La figure (3.11)(a) représente les propriétés qualitatives des valeurs propres pour $W = 5$ et $R = 10$, dans le cas $n = 0.8$. Les courbes des lieux de bifurcations séparent le plan $(\cot \beta / R, c)$ en différentes régions. La région délimitée par les deux courbes (T) et (H), $c_h < c < 13/4$ où c_h indique la valeur critique de c pour que se produise la bifurcation de Hopf, montre que le point fixe H_I est stable alors que le point fixe H_{II} est instable, pour une valeur donnée de $\cot \beta / R$. En augmentant c , le point fixe H_I perd sa stabilité lorsque c franchi la courbe (T)

et subit une bifurcation transcritique. Par contre, lorsque la courbe de Hopf est franchie en diminuant c , un cycle limite bifurque à partir du point fixe H_I . Des bifurcations encore plus compliquées peuvent exister si c est encore diminué tout en restant au-dessus d'une valeur limite c_{1b} située sur la courbe (B). En constate que la position de la frontière (B) est fortement dépendante du nombre de Reynolds pour un nombre de Weber donné. La figure (3.11(b)) présente les mêmes caractéristiques qualitatives des courbes de bifurcations pour le cas $n = 1.47$. Néanmoins, en constate que l'augmentation de l'indice n conduit à la réduction de la zone de stabilité du premier point fixe (entre les courbes T et H) et à l'élargissement de la zone d'existence des ondes périodiques pour des faibles valeurs de $\cot \beta / R$.

La Figure (3.12) indique, pour deux cas illustratifs $n = 0.8$ et $n = 1.47$, l'effet du paramètre W sur le seuil de la bifurcation de Hopf. Cette courbe converge naturellement vers le point critique :

$$(\cot \beta / R, c) = (1.869981683, 3.250000000) \text{ pour } n = 0.8$$

et

$$(\cot \beta / R, c) = (0.5261466098, 2.680272109) \text{ pour } n = 1.47$$

Elle se trouve dans une région, notée V , qui est délimitée par les courbes (T) et la courbe (C), d'équation $e_2 = 0$, et où les deux inégalités dans (3.14) sont vérifiées. On voit que, quand W est diminué, la courbe de Hopf converge vers la limite (C). Quand W tend vers zéro, la courbe de Hopf sort de la région V . Ceci, signifie que le nombre de Weber doit dépasser une certaine valeur minimale W_m pour l'existence d'une bifurcation de Hopf.

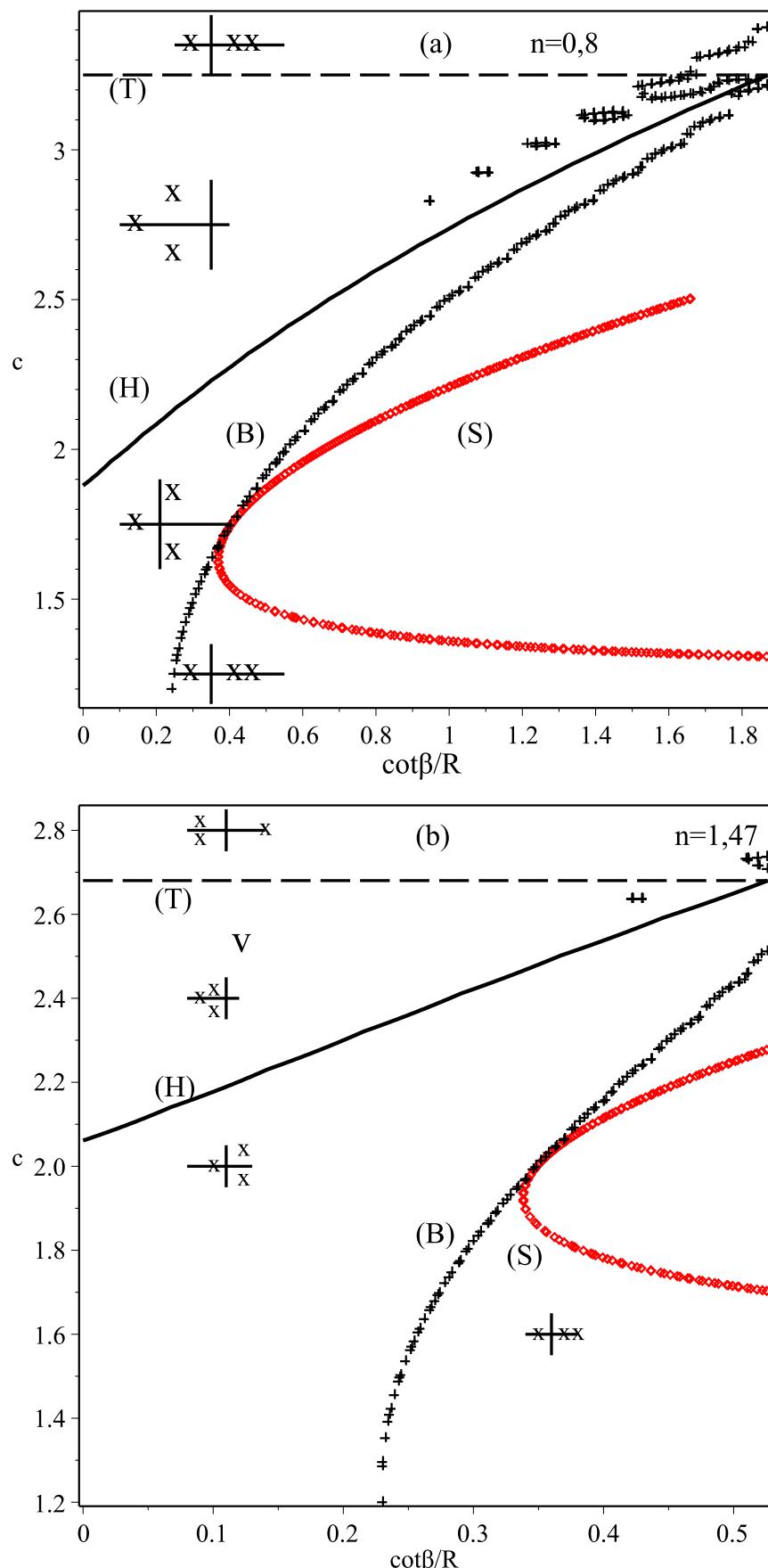
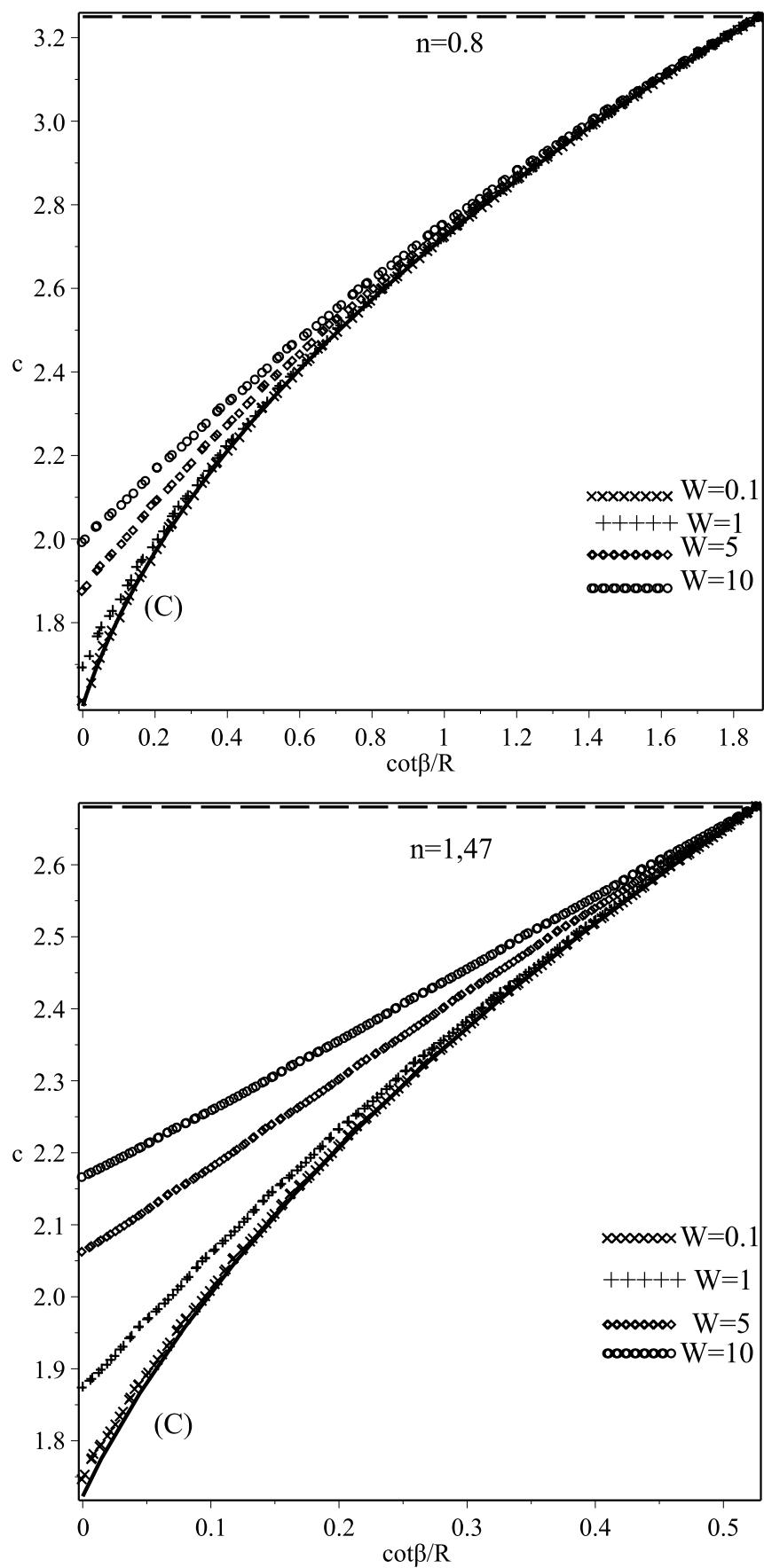


FIGURE 3.11 – Comportement des valeurs propres dans le plan $(\cot\beta/R, c)$ pour le cas du point fixe H_I .

FIGURE 3.12 – Lieu des bifurcations de Hopf, pour différentes valeurs de W .

3.2.4 Résolution numérique

Afin de pouvoir comprendre la dynamique spatio-temporelle du système (2.19 et 2.90) au-delà du seuil d'instabilité, c.-à-d, au stade non linéaire, une résolution numérique est nécessaire. On a fait varier ses conditions en imposant une faible perturbation arbitraire d'environ 0,01 de la solution de Nusselt, au voisinage du point fixe H_I . La résolution est réalisée par l'utilisation de la bibliothèque du logiciels Maple 14.

Dans ce qui suit nous nous limitons toujours au valeurs de $n = 0.8$ et $n = 1.47$. La recherche d'attracteur est effectuée par variation continue de la vitesse de phase c . Comme c'est mentionné précédemment, l'analyse de stabilité linéaire suggère également de prendre l'inclinaison β de sorte que $0 \leq \cot \beta / R \leq \frac{2(2n+1)^2}{n^2(3n+2)G}$. Ceci a été confirmé, à travers des tests numériques, qu'aucun attracteur non linéaire n'existe quand $\cot \beta / R > \frac{2(2n+1)^2}{n^2(3n+2)G}$.

Trajectoires hétéroclines :

Considérons d'abord la bifurcation transcritique de H_I à H_{II} lorsque la vitesse de phase critique $c = 2 + 1/n$ est franchie. Par conséquent, une ligne régulière peut relier les deux points fixes, à condition que c reste en dessous de sa valeur critique. Les Figures (3.13) et (3.14) montrent la forme de la surface libre lorsque H_I correspond à une orbite hétérocline allant de H_I vers H_{II} quant $W = 5$, $R = 10$, $\cot \theta / R = 0.4$, avec $c = 3.5$ pour $n = 0.8$, et $c = 2.7$ pour $n = 1.47$. Des résultats similaires peuvent être obtenus pour d'autres valeurs de $\cot \theta / R$ et c . Conformément aux résultats de l'analyse linéaire, il n'y a pas d'orbite hétérocline au-delà de la valeur critique de c .

Cascade de doublement de période :

Nous considérons maintenant la dynamique plus complexe résultant de la première brisure de symétrie via une bifurcation de Hopf. Afin d'illustrer les principales caractéristiques des scénarios de bifurcation au-delà des seuils de Hopf on présente, dans les figures (3.15) et (3.16), les attracteurs obtenus pour certaines valeurs de c et $\cot \beta / R$. Dans le cas, par exemple

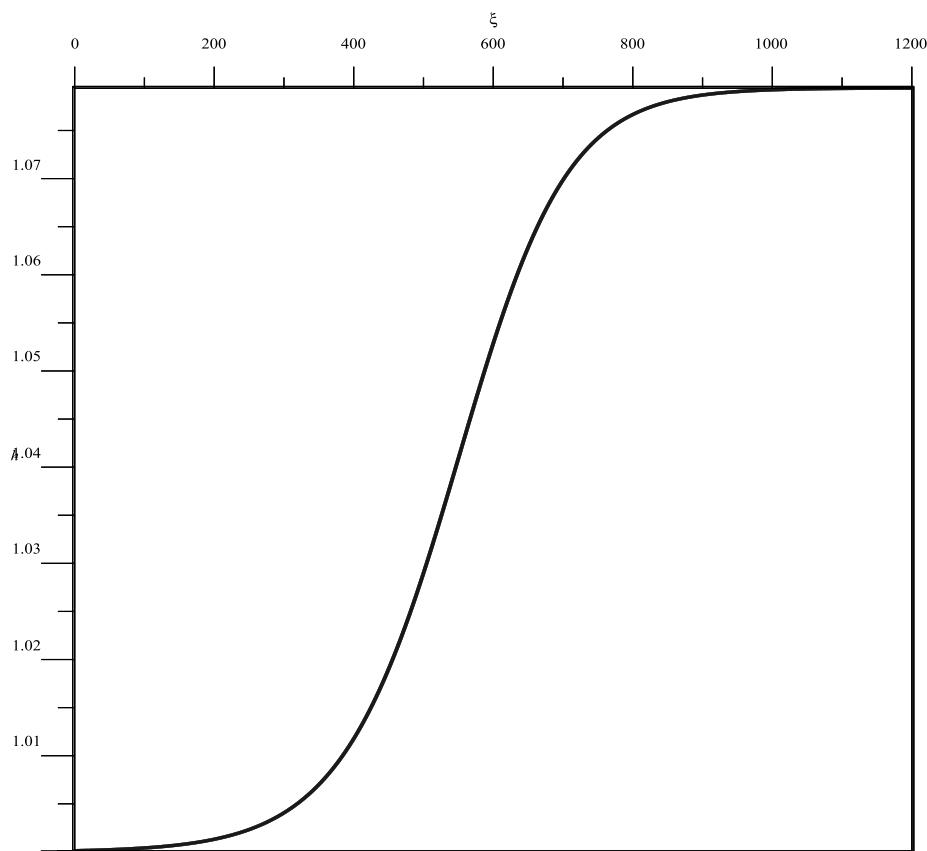


FIGURE 3.13 – Orbite hétérocline joignant $H_I = (1, 0, 0)$ à $H_{II} = (1.06652451375046, 0, 0)$. La transition s'effectue au voisinage de $c = 3.5$ pour $n = 0.8$ avec $W = 5$, $R = 10$ et $\cot \beta = 4$.

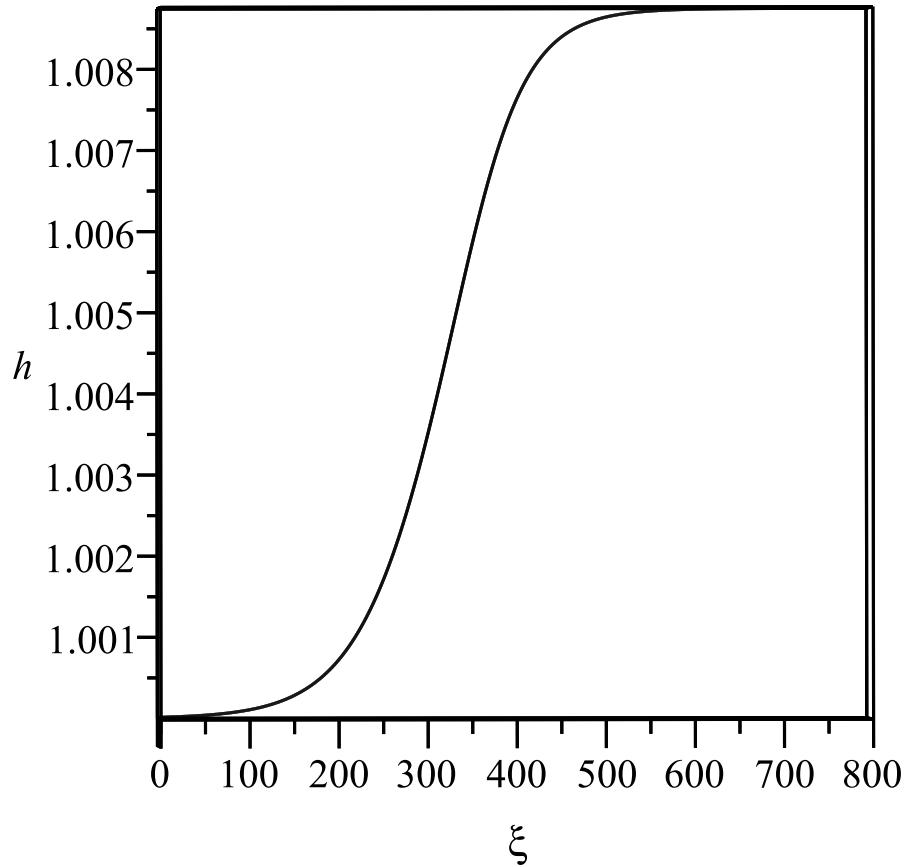
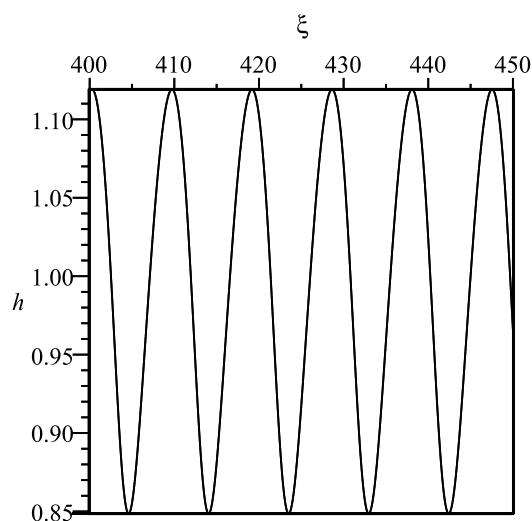
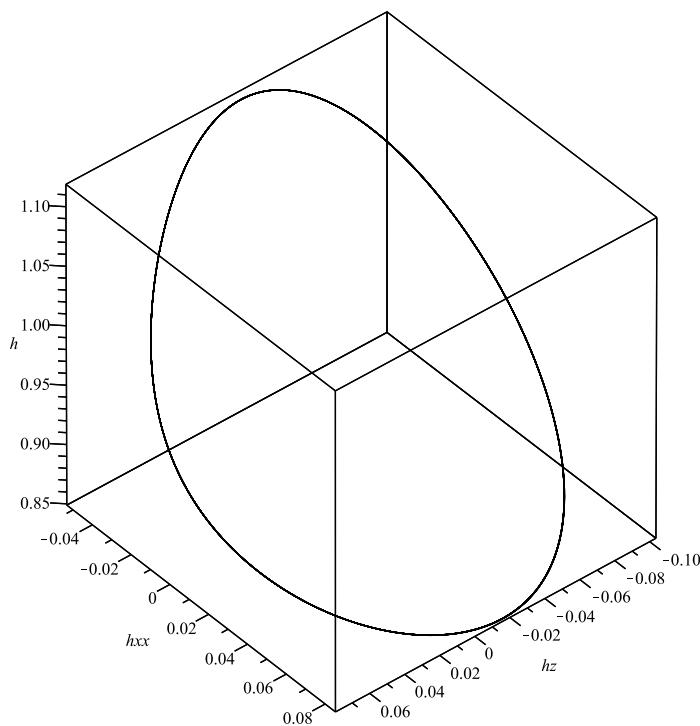
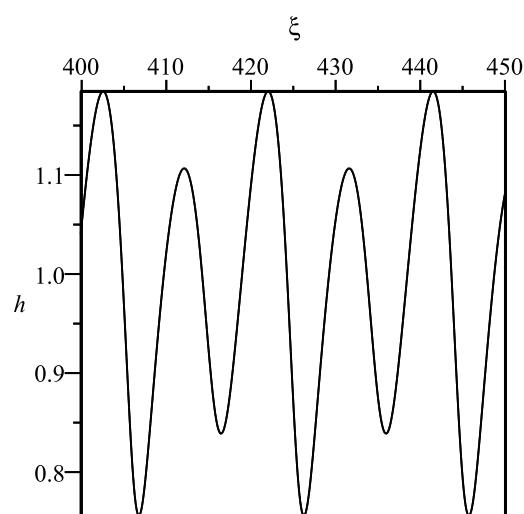
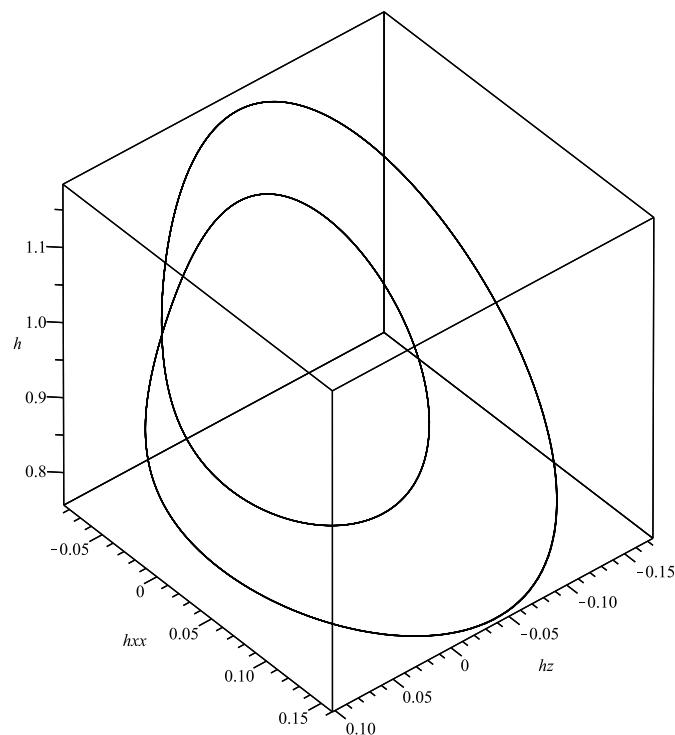


FIGURE 3.14 – Orbite hétérocline joignant $H_I = (1, 0, 0)$ à $H_{II} = (1.00874364537, 0, 0)$. La transition s'effectue au voisinage de $c = 2.7$ pour $n = 1.47$ avec $W = 5$, $R = 10$, $\cot \beta = 4$.

de $n = 0.8$ avec $\cot\theta/R = 0.1$, $W = 10$ et $R = 10$, la figure 3.15 indique que le premier point fixe subit une bifurcation de Hopf à $c_1 = 2,065$, ceci génère un cycle limite dont la période est de l'ordre $T = 9.5$. Quand c est diminué encore, l'amplitude et la longueur d'onde du cycle limite augmentent jusqu'à ce qu'une seconde valeur critique $c = 1,99$ est atteinte, où un autre cycle limite de période $2T$ aura lieu. Par conséquent, au lieu d'un seul maximum et minimum, le signal contiendra deux maxima et deux minima. Les solutions restent $2T$ -périodique quand la vitesse de phase décroît jusqu'à qu'une nouvelle bifurcation de doublement de période se produit à environ $c_3 = 1,984$, la solution étant maintenant périodique de période $4T$ dont le signal contient quatre maxima et quatre minima. Il a été établi qu'en diminuant davantage la vitesse de l'onde la route vers le chaos par dédoublement de période dicte la dynamique non linéaire du film selon le scénario Feigenbaum. Ce scénario de route vers le chaos a été aussi retrouvé dans le cas de fluides newtoniens [5][19]. Le diagramme de bifurcation est représenté sur la figure (3.17) où le maximum de la hauteur de l'onde y est illustré en fonction du paramètre c .



(a)



(b)

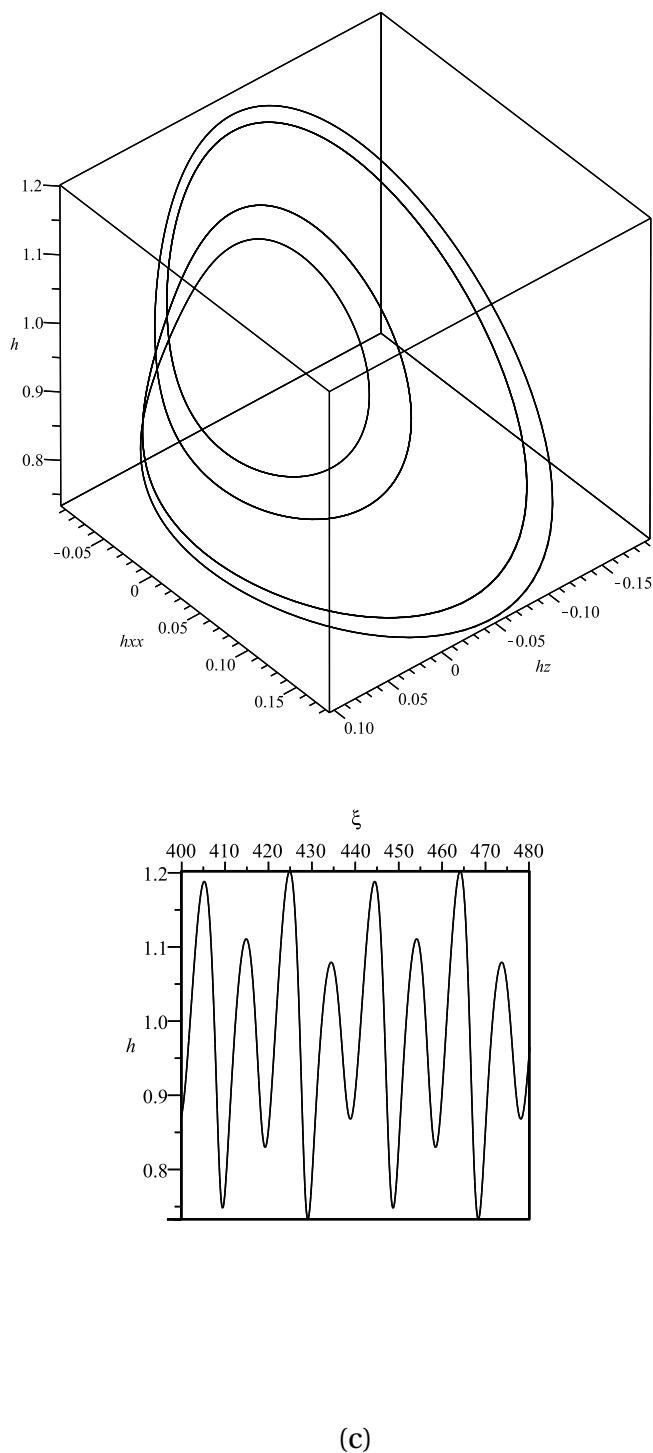
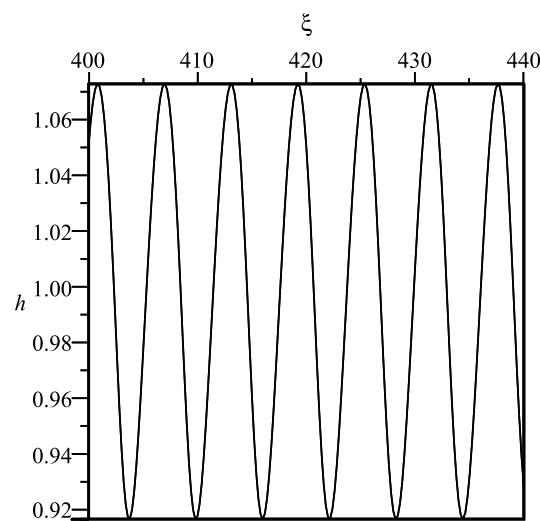
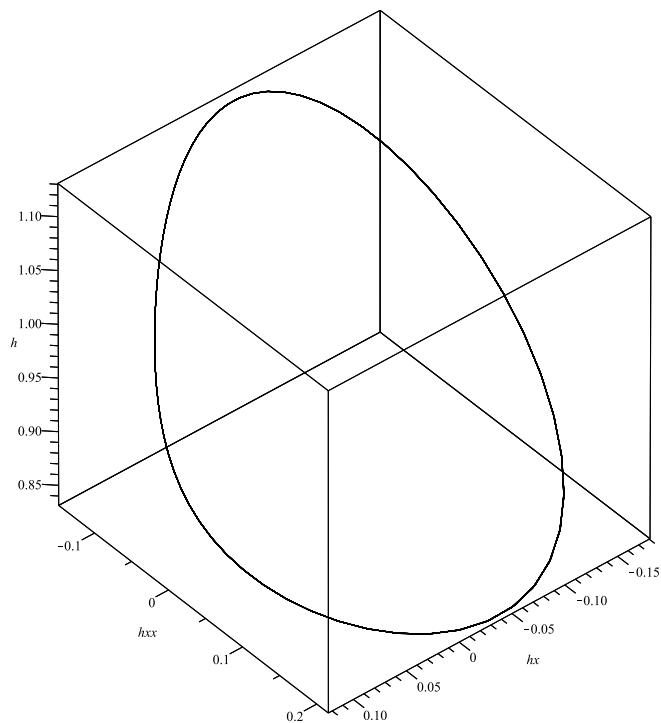
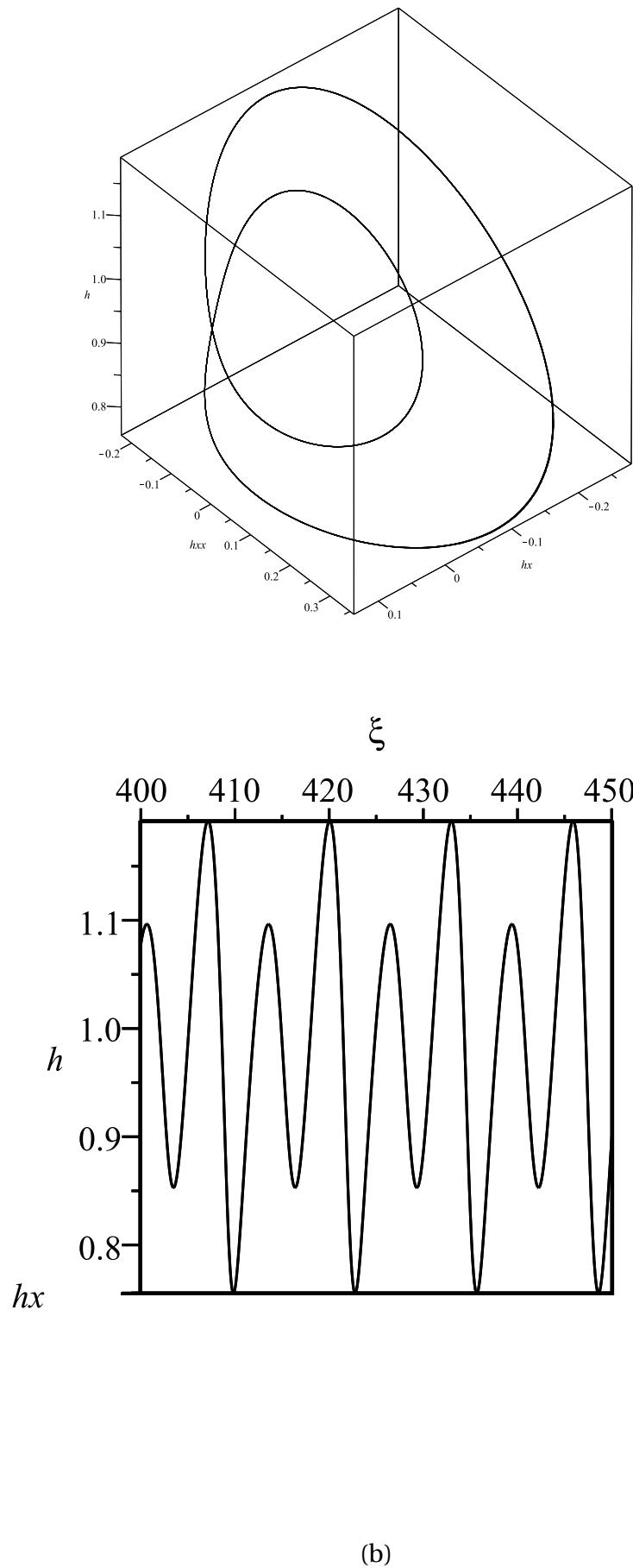


FIGURE 3.15 – Cascade de doublement de période pour $W = 10$, $R = 10$, $\cot\beta/R = 0.1$ et $n = 0.8$. (a) : $c = 2.065$, (b) $c = 1.9845$ et (c) $c = 1.98122$.



(a)



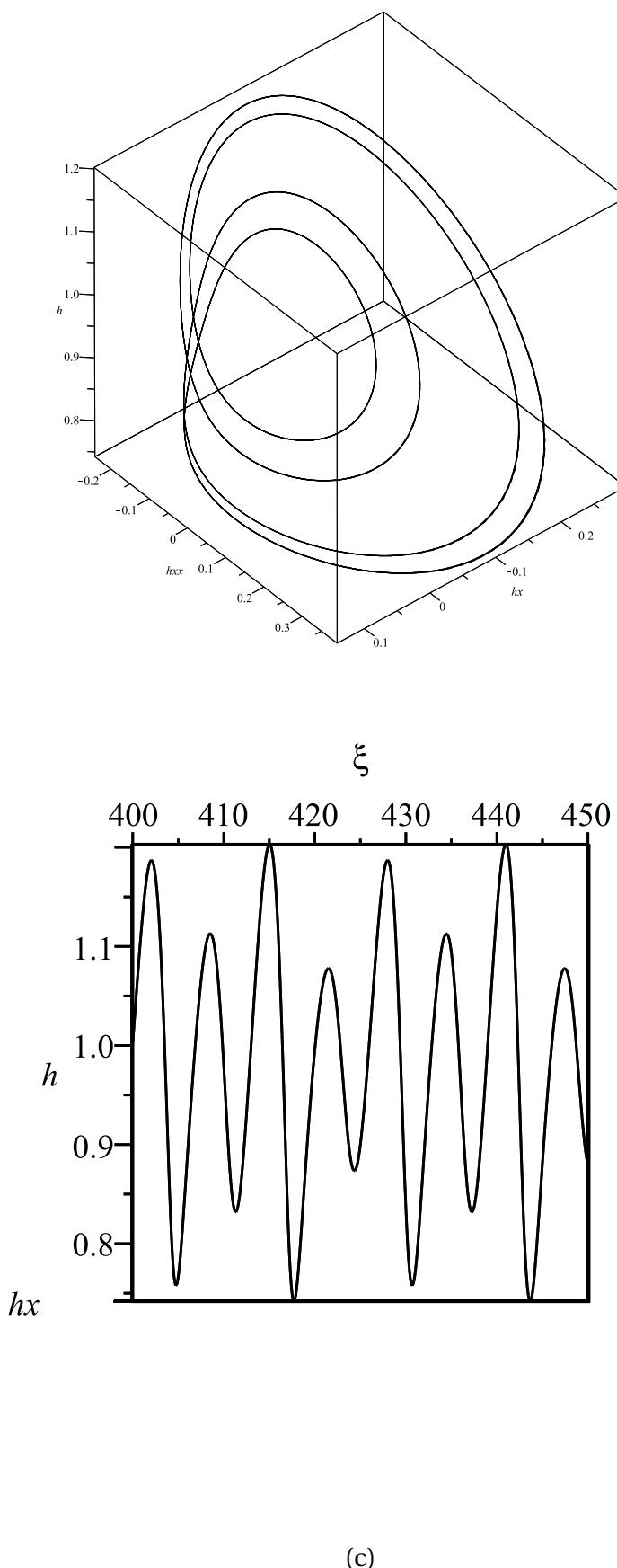


FIGURE 3.16 – Cascade de doublement de période pour $W = 5$, $R = 10$, $\cot \beta/R = 0.2$ et $n = 1.47$. (a) : $c = 2.045$, (b) : $c = 1.985$ et (c) : $c = 1.970$.

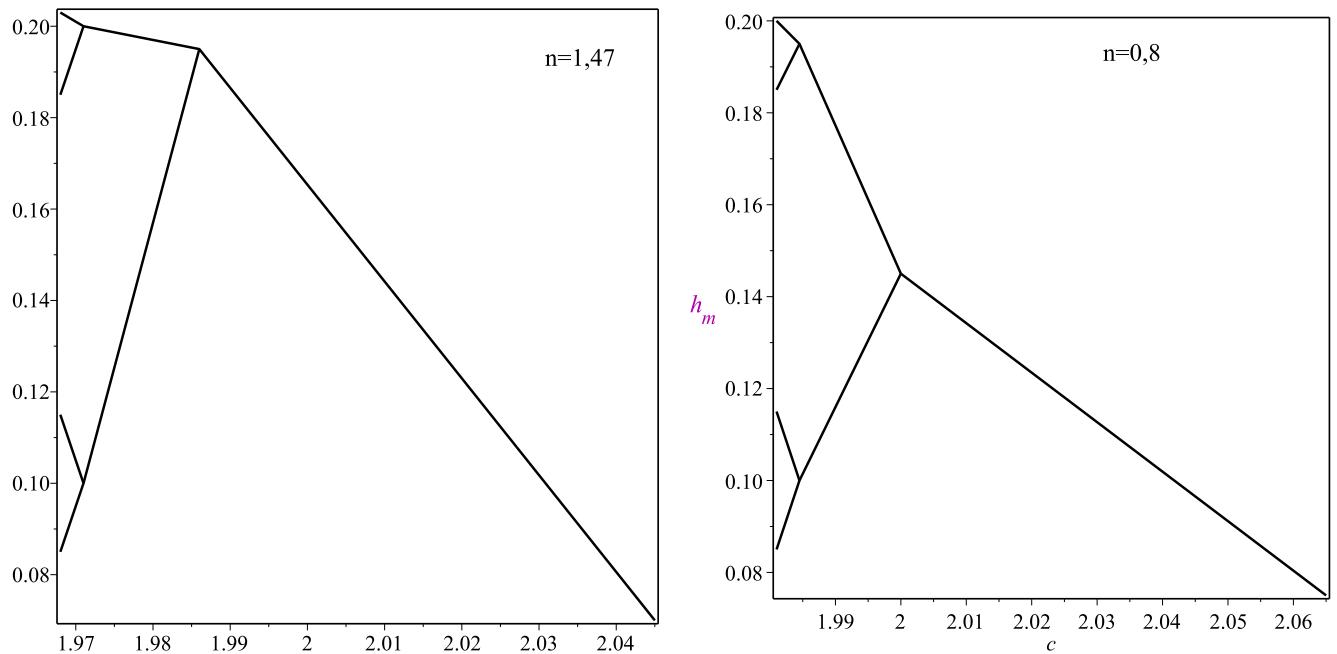


FIGURE 3.17 – Diagramme de bifurcation, h_m en fonction de c , pour $R = 10$, $W = 10$ et $\cot \beta = 1$ dans le cas $n = 0.8$ et pour $R = 10$, $W = 5$ et $\cot \beta = 2$ dans le cas $n = 1.47$.

Ondes solitaires :

Les figures (3.18)..(3.22) montrent des attracteurs constitués par de séries d'ondes solitaires formant un train d'ondes périodiques avec des périodes très longues, obtenues pour différentes valeurs de $\cot \beta / R$. Ces ondes sont caractérisées par un ou plusieurs pics importants, une faible pente du côté amont et un front d'onde raide dû à la gravité, et précédés par des ondulations capillaires. Ces formes particulières se manifestent près des bifurcations homoclines. En diminuant $\cot \beta / R$, la dynamique devient de plus en plus complexe et un chaos homocline est attendu en diminuant d'avantage $\cot \beta / R$.

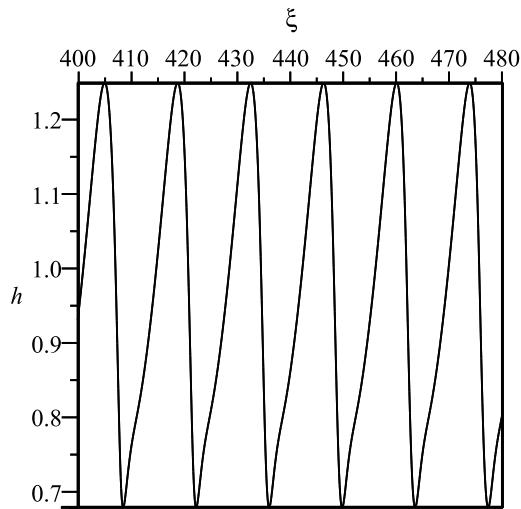
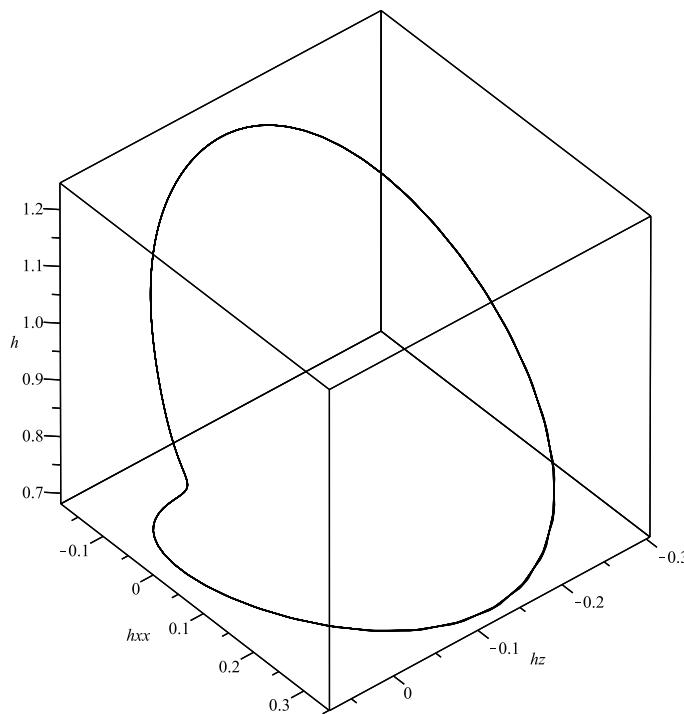


FIGURE 3.18 – Profil d’onde solitaire simple, qui précède le chaos homocline, se produisant pour $c = 1.9868$ dans le cas $n = 0.8$. Les autres paramètres sont $W = 5$, $R = 10$, $\cot \beta / R = 0.2$.

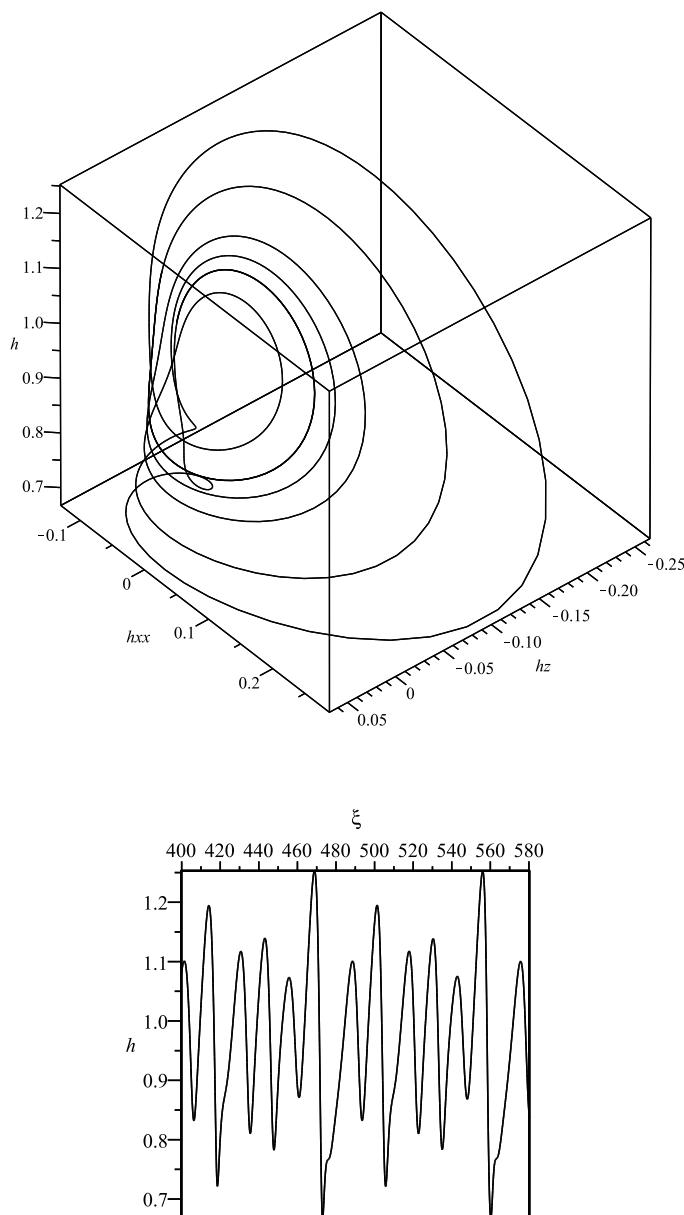


FIGURE 3.19 – Profil d’onde solitaire, qui précède le chaos homocline, se produisant pour $c = 2.145$ dans le cas $n = 0.8$. Les autres paramètres sont $W = 10$, $R = 10$, $\cot \beta / R = 0.3$.

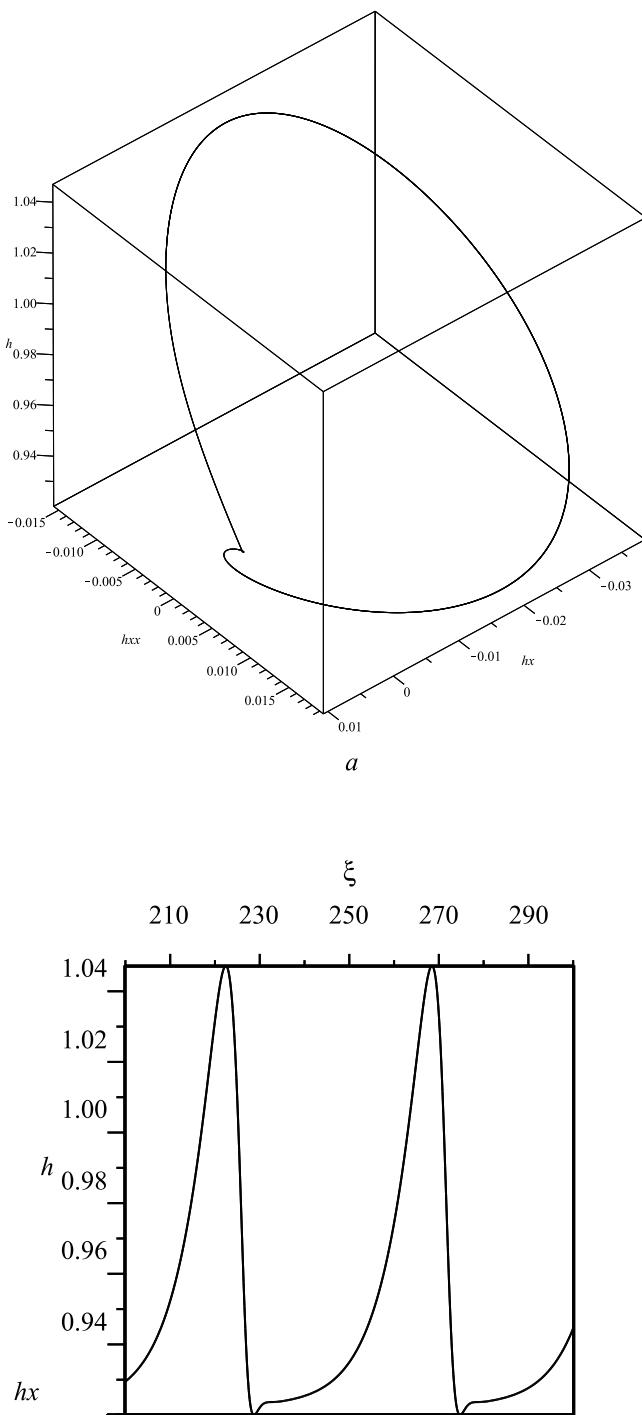


FIGURE 3.20 – Profil d’onde solitaire simple, qui précède le chaos homocline, se produisant pour $c = 2.5095$ dans le cas $n = 1.47$. Les autres paramètres sont $W = 5$, $R = 10$, $\cot \beta / R = 0.4$.

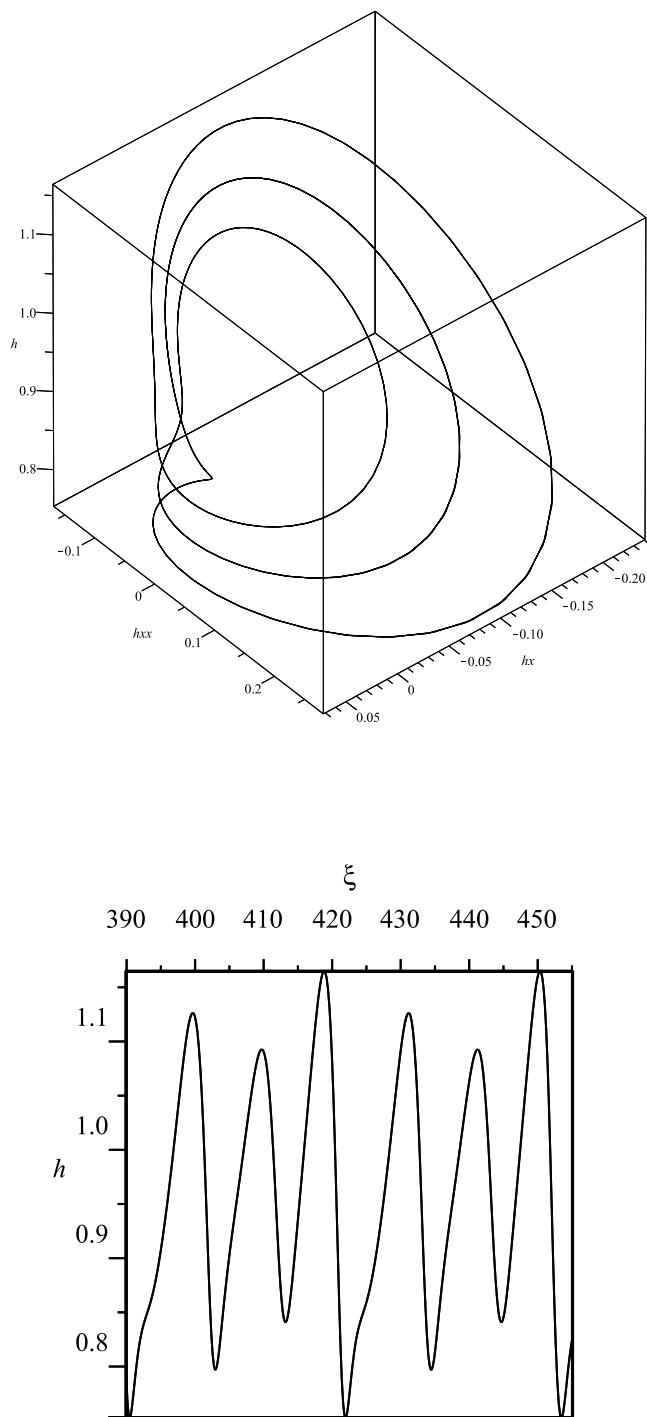


FIGURE 3.21 – Profil d’onde solitaire à trois bosses, qui précède le chaos homocline, se produisant pour $c = 2.1263$ dans le cas $n = 1.47$. Les autres paramètres sont $W = 5$, $R = 10$, $\cot \beta / R = 0.135$.

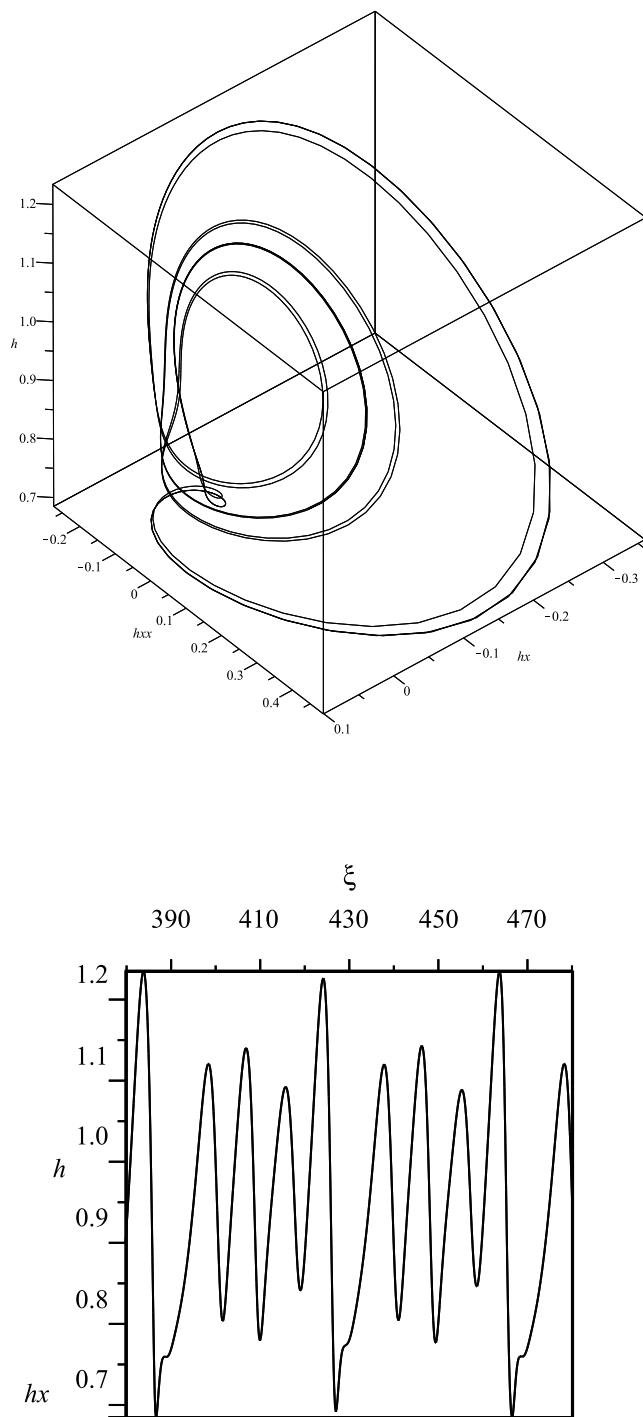


FIGURE 3.22 – Profil d'onde solitaire, qui précède le chaos homocline, se produisant pour $c = 2.074$ dans le cas $n = 1.47$. Les autres paramètres sont $W = 5$, $R = 10$, $\cot \beta / R = 0.1$.

Conclusion générale

Le présent travail de thèse traite de la modélisation d'un écoulement par gravité de film liquide non-newtonien, décrit par une loi de comportement type loi puissance, sur un plan incliné pour de faibles à modérés nombres de Reynolds. L'objectif principal de l'étude est la dérivation des équations d'évolution qui régissent la dynamique non linéaires du film.

La procédure de modélisation consiste en une combinaison de la théorie des grandes ondes (théorie de lubrification) et de l'approche des résidus pondérés. Une nouvelle manière de choisir les fonctions tests et poids, différente de celle proposée par Ruyer-Quil et al. pour le cas newtonien, est introduite permettant une réduction significative de la dimension du problème tout en gardant la cohérence du modèle à tout ordre. En effet, contrairement à ce qui a été fait dans des études précédentes dans la construction de modèles, l'orthogonalisation complète des fonctions tests n'est pas nécessaire pour éliminer la correction de la vitesse de l'écoulement. Ainsi, une série de modèles est proposée pour décrire le comportement non linéaire de l'écoulement. La cohérence des modèles proposés est assurée avec une orthogonalisation partielle permettant une réduction de la complexité de la procédure et par conséquent une simplification des calculs.

En effet, nous avons établi un modèle complet d'ordre deux de quatre équations d'évolution de la dynamique du film. Vu la taille du modèle complet, des simplifications sont effectuées et des modèles réduits (simplifiés) à deux équations, de l'épaisseur du film et du débit, sont proposés. Un premier modèle simplifié (SM) est obtenu par le moyen d'une élimination adiabatique de la première correction du champs de vitesse. Du fait que ce modèle ne tient pas compte correctement des termes non linéaires, un modèle réduit (RM) a été établi en gardant

le champs de vitesse jusqu'à l'ordre deux. Néanmoins, ce modèle diverge du modèle complet à partir d'une certaine valeur du nombre de Reynolds relativement faible. Une procédure de régularisation partielle, par une technique à la Padé, a été ensuite effectuée pour y remédier. Le modèle réduit régularisé (RRM) résultant donne un spectre linéaire identique à celui obtenu par le modèle simplifié (SM).

L'analyse de stabilité linéaire du modèle complet de deuxième ordre montre une assez bonne concordance avec la solution numérique du problème Orr-Sommerfeld pour de faibles à modérés nombres de Reynolds. Ce modèle complet et ses formes réduites ont tous l'avantage du modèle type Benney au voisinage de la criticalité. Loin du seuil d'instabilité, le modèle complet continue à suivre la solution Orr-Sommerfeld jusqu'à un assez grand nombre de Reynolds et donne de meilleures prévisions que le modèle type Shkadov. Le modèle réduit régularisé (RRM) pourrait être préféré dans la pratique au modèle complet en raison de sa relative simplicité, au moins au stade initial du régime non linéaire.

Les résultats de la stabilité linéaire des modèles proposés font apparaître que, pour de très faibles nombres de Reynolds, l'augmentation de l'indice de la loi de comportement n réduit d'une manière régulière la zone d'instabilité jusqu'à une certaine valeur critique du nombre de Reynolds. Cet effet s'inverse au-delà d'une autre valeur critique plus grande du nombre de Reynolds mais reste relativement faible. On retrouve cet effet sur la stabilité dans le cas d'un comportement rhéoépaississant ($n > 1$). Par contre, un effet contraire est observé dans le cas d'un comportement rhéofluidifiant ($n < 1$). On a également constaté que le caractère convectif de l'instabilité est insensible à la variation de l'indice de loi de puissance.

Les aspects non linéaires de l'écoulement du film sont ensuite examinés en utilisant une version simplifiée (RRM) du modèle complet tout en conservant ses principales caractéristiques et en tenant compte des états asymptotiques caractérisés par des ondes stationnaires. Dans le sous-espace relativement limité de paramètres que nous avons exploré, les solutions présentent les mêmes comportements qualitatifs que ceux du cas newtonien. Néanmoins, une influence de l'indice de loi de puissance sur les valeurs critiques d'apparition des bifurcations et de la transition vers le chaos a été observée.

Une poursuite d'investigation dans ce domaine paraît intéressante particulièrement sur le

plan d'exploitation du modèle tridimensionnel, établi dans ce travail, afin d'étudier les instabilités tridimensionnelles succédant les instabilités bidimensionnelles. Dans le but d'élargir le domaine d'application du travail de modélisation effectué, la recherche de modèles est nécessaire pour l'étude de la dynamique non linéaire de film fluides non newtoniens de différentes lois de comportement. Enfin, une extension de l'étude effectuée est envisageable pour une superposition de deux ou plusieurs couches de fluides à surface libre, à d'autres géométrie du substrat (cylindre, sphère, cône...) et à des problèmes où interviennent des effets spécifiques :

- Les effets non locaux intervenant via la transformée de Hilbert et induits par l'application d'un champ électrique. -les effets thermiques pouvant induire, soit une stratification de la viscosité qui est susceptible d'entraîner des comportements surprenants, ou bien, des forces thermocapillaires et thermogravitaires susceptibles de conduire à l'émergence d'une grande variété d'écoulements.

Annexe

Expressions de Q , A , et B

On note

$$\begin{aligned}
 CQ_0 &= \int_0^h \{\phi_i(y)(G + Wh_{xxx} - \epsilon G \cot \beta h_x) + (u_0 + n\epsilon u_1 + n\epsilon^2 u_2)(|u_{0y}|^{n-1} \phi_{iy})_y\} dy \\
 C(q_t - \frac{n(n+1)^2}{(3n+2)(4n+3)(2n+1)} Rh a_t - RQ_{I1} + R^2 Q_{I2}) &= \int_0^h \phi_i(y)\{-R\epsilon(u_t + uu_x + vu_y)\} dy, \\
 CQ_{d1} &= \int_0^h \phi_i(y) D_1 dy \\
 CQ_{d1}^* &= \epsilon^{n+1} (2|u_{0x}|)^{n-1} (4u_{0x}h_x - v_{0x}) \phi_i|_{y=h} \\
 CQ_{dn} &= \int_0^h \phi_i(y) D_0 dy \\
 C(Q_{d0} + R^2 Q_{d2}) &= -(n-1)\epsilon^2 \int_0^h |u_{0y}|^{n-3} (v_{0x}u_{0y} + 2u_{0x}^2 + \frac{n}{2}u_{1y}^2) u_{0y} \phi_{iy} dy
 \end{aligned}$$

avec C est le coefficient de q_t .

On peut écrire

$$Q = Q_0 + RQ_{I1} + R^2 Q_{I2} + Q_{d1} + H_{n-1} Q_{d1}^* + (1 - \delta_{n1}) Q_{dn} + (n-1)(Q_{d0} + R^2 Q_{d2})$$

$$A = A_0 + RA_{I1} + R^2 A_{I2} + (A_{d1} + H_{n-1} A_{d1}^*) + (1 - \delta_{n1}) A_{dn} + (n-1)(A_{d0} + R^2 A_{d2})$$

$$B = B_0 + R^2 B_{I2} + (B_{d1} + H_{n-1} B_{d1}^*) + (1 - \delta_{n1}) B_{dn} + (n-1)(B_{d0} + R^2 B_{d2})$$

où

$$\begin{aligned}
Q_0 &= \frac{3n+2}{2n+1} \frac{G}{2} \left(h - \left(\frac{q}{h^2} \right)^n - \cot \beta h h_x + \frac{W}{G} h h_{xxx} \right) \\
Q_{I1} &= \frac{1}{4n+3} \frac{q}{h} \left(3(2n+1) \frac{qh_x}{h} - (11n+6)q_x \right) \\
Q_{I2} &= - \frac{3n(n+1)^2(5n+4)^{-1}}{(3n+2)(4n+3)} \left(aq \frac{h_x}{h} - \frac{10}{3} aq_x - 3qa_x \right) + \\
&\quad \frac{3n(2n+1)(n+1)^3}{(6n+5)(5n+4)^2(4n+3)^2} \left(bq \frac{h_x}{h} - 2 \frac{5n+3}{2n+1} bq_x - 3qb_x \right) \\
Q_{d1} &= \frac{(3n+2)(4n+1)^{-1}G}{(2n-1)(3n+1)(n+1)} \left(\frac{q}{h} \right)^n \left\{ \frac{1}{6} (36n^3 + 31n^2 - 1) hh_{xx} - \frac{1}{6} n(8n+5)(3n+1) \frac{h^2}{q} q_{xx} \right. \\
&\quad \left. - \frac{(96n^5 + 90n^4 - n^2 - 5n^3 + 5n + 1)}{3n(2n+1)} h_x^2 + \frac{1}{3} (36n^3 + 31n^2 - 1) \frac{h}{q} h_x q_x \right\} \\
Q_{dn} &= \frac{(3n+2)G}{(2n-1)(4n+1)} \left(\frac{q}{h} \right)^n \left\{ \frac{12n^5 + 88n^4 - 37n^3 - 115n^2 - 11n + 3}{6(1+3n)(n+1)} \frac{h}{q} q_x h_x - \frac{1}{12} n(n-1)(2n+15) q_x^2 \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{6} \frac{24n^7 + 164n^6 - 166n^5 - 331n^4 - 9n^3 + 25n^2 - 5n + 1}{n(n+1)(3n+1)(2n+1)} h_x^2 \right\} \\
Q_{d0} &= - \frac{(n-1)(3n+2)(2n+1)G}{12(2n-1)(3n+1)(4n+1)} \left(\frac{q}{h} \right)^n \left\{ (2n^3 + 4n^2 - 3n - 1) h^2 q q_{xx} - (48n^3 + 40n^2 + 8n) q_x^2 \right. \\
&\quad \left. - (24n^3 - 4n^2 + 6n + 1) h q^2 h_{xx} + (144n^3 + 88n^2 + 4n - 2) h q h_x q_x - (-120n^3 - 36n^2 + 4n + 2) q^2 h_x^2 \right\} \\
Q_{d2} &= G \frac{(1-n)(n+1)^4 n}{(4n+3)(2n+1)(3n+2)} \left(\frac{h}{q} \right) \left(\frac{q}{h^2} \right)^n \left\{ a^2 + \frac{9(n+1)^2(3n+2)^2}{(6n+5)(5n+4)^2(4n+3)} b^2 \right\} \\
Q_{d1}^* &= \frac{3n+2}{2(n+1)} \left(2 \frac{2n+1}{n+1} \left(\frac{q_x}{h} - \frac{q}{h^2} h_x \right) \right)^{n-1} \left(q_{xx} + \frac{2n+1}{n+1} \left(\frac{2}{h} q_x h_x - \frac{q}{h} h_{xx} - 2 \frac{q}{h^2} h_x^2 \right) \right) \\
A_0 &= \frac{(5n+4)(4n+3)(2n+1)}{3(3n+2)(n+1)^2} \left(Q_0 - 2G \left(\frac{q}{h^2} \right)^{n-1} \frac{(n+1)^2}{2n+1} a \right) \\
A_{I1} &= - \frac{n(2n+1)}{(n+1)^2} \left(\frac{q}{h} q_x - \frac{2n+1}{n} \frac{q^2}{h^2} h_x \right) \\
A_{I2} &= \frac{(2n+1)}{(6n+5)} \left\{ \frac{10n+3}{3n+2} \left(\frac{14n+9}{10n+3} a \frac{h_x}{h} - \frac{4(3n+1)}{10n+3} \frac{aqq_x}{h} + qa_x \right) + \right. \\
&\quad \left. \frac{(n+1)(2n+1)}{(5n+4)(4n+3)(7n+6)} \left(-(43n+30) bq \frac{h_x}{h} + 6 \frac{3n+2}{2n+1} bq_x + (65n+42) qb_x \right) \right\}
\end{aligned}$$

$$A_{d1} = \frac{Gn(n+1)(3n+1)^{-1}(3n+2)^{-1}}{3(2n-1)(4n+1)(4n+3)(5n+2)(2n+1)} \left(\frac{q}{h^2}\right)^n \left\{ (3n+2)(264n^4 + 170n^3 - 143n^2 - 107n - 16)hh_{xx} \right. \\ \left. - ((3n+2)(2n+1)(3n+1)(32n^2 - 7n - 18)\frac{h^2}{q}q_{xx}) \right. \\ \left. - \frac{2}{n}(1008n^6 + 1446n^5 + 189n^4 - 559n^3 - 332n^2 - 68n - 4)h_x^2 \right. \\ \left. + 2(3n+2)(264n^4 + 170n^3 - 143n^2 - 107n - 16)\frac{h}{q}h_xq_x \right\}$$

$$A_{d1}^* = \frac{2n(n+1)}{(4n+3)(3n+2)} Q_{d1}^*$$

$$A_{dn} = \frac{G(5n+4)(3n+2)(2n+1)(4n+3)}{18n(2n-1)(5n+2)(3n+1)(4n+1)(n+1)^3} \left(\frac{q}{h^2}\right)^n \left\{ (42n^5 - 67n^4 - 89n^3 - 51n^2 + 19n + 6)\frac{h^2}{q}q_{xx} \right. \\ \left. - \frac{2n+1}{2}(168n^6 - 100n^5 - 502n^4 - 315n^3 + 55n^2 + 58n + 6)hh_{xx} \right. \\ \left. - \frac{168n^7 + 644n^6 - 286n^5 - 575n^4 + 372n^3 + 294n^2 + 19n - 6}{2n+1}q_x^2 \right. \\ \left. + \frac{504n^8 + 2052n^7 + 154n^6 - 2031n^5 - 23n^4 + 1130n^3 + 482n^2 + 46n - 4}{(3n+2)(2n+1)}h_xq_x \right. \\ \left. + \frac{1}{2}n(n-1)(n+1)(3n+1)(14n^2 + 41n - 48)h^2h_x^2 \right\}$$

$$A_{d0} = \frac{G(5n+4)(4n+3)}{36n(5n+2)(3n+1)(4n+1)(n+1)^2} \left(\frac{q}{h^2}\right)^n \left\{ ((3n+2)(108n^3 + 176n^2 + 67n + 6)hh_{xx} \right. \\ \left. - (3n+2)(2n+1)(27n^2 + 37n + 6)\frac{h^2}{q}q_{xx} - \frac{-3240n^5 - 6492n^4 - 4060n^2 - 786n^2 + 64n + 24}{2n-1}h_x^2 \right. \\ \left. - \frac{24n(3n+2)(2n+1)(3n+4)(3n+1)}{2n-1}h^2q_x^2 - \frac{(3n+2)(648n^4 + 1180n^3 + 510n^2 + 41n - 6)}{2n-1}\frac{h}{q}h_xq_x \right\}$$

$$A_{d2} = \frac{G(n+1)^2}{(2n+1)^2} \left(\frac{h}{q}\right) \left(\frac{q}{h^2}\right)^n \left\{ \frac{n(11n+8)}{3(3n+2)^2} a^2 + \frac{3(31n+24)(3n+2)(2n+1)}{(6n+5)(7n+6)(4n+3)(5n+4)^2} b^2 - \frac{(3n+1)(n+1)}{(6n+5)(5n+4)} ab \right\}$$

$$B_0 = \frac{(7n+6)(6n+5)(5n+4)(2n+1)}{12(3n+2)(n+1)^3} \left\{ Q_0 + \frac{G(n+1)^2}{2n+1} \left(\frac{q}{h^2}\right)^{n-1} \left(2a + 9 \frac{(n+1)(3n+2)}{(5n+4)(4n+3)(2n+1)} b \right) \right\}$$

$$B_{I2} = \frac{-1}{(n+1)} \left\{ aq_x + \frac{(2n+1)^2}{(3n+2)} \left(\frac{(4n+3)}{(2n+1)} \frac{qa}{h} h_x - qa_x \right) \right\} + \frac{(3n+2)(5n+1)}{(5n+4)(8n+7)} \left\{ 3bq_x \right. \\ \left. + \frac{(2n+1)}{(4n+3)(3n+2)(5n+1)} \left((7n+5)(17n+13) \frac{qb}{h} h_x - (97n^2 + 130n + 43)qb_x \right) \right\}$$

$$B_{d2} = -\frac{(n-1)(n+1)G}{(2n+1)^2} \left(\frac{h}{q}\right) \left(\frac{q}{h^2}\right)^n \left\{ \frac{(7n+6)(6n+5)(5n+4)}{12(3n+2)^2(7n+4)^{-1}} a^2 - \frac{2(6n^2 + n - 3)(n+1)}{(4n+3)} ab \right. \\ \left. + \frac{3(3n+2)(592n^3 + 1178n^2 + 789n + 180)}{4(4n+3)^2(8n+7)(5n+4)(n+1)^{-2}} b^2 \right\}$$

$$\begin{aligned}
B_{d1} = & \frac{Gn(n+1)^2((5n+4)(6n+5)(3n+1))^{-1}}{3(2n-1)(2n+1)(4n+1)(5n+3)(5n+2)} \left(\frac{q}{h^2}\right)^n \left\{ (600n^5 - 800n^4 - 1114n^3 + 671n^2 \right. \\
& + 727n + 138)hh_{xx} - (5n+3)(2n+1)(3n+1)(20n^3 - 36n^2 + n + 24) \frac{h^2}{q} q_{xx} \\
& - \frac{2(2n+1)}{(4n+3)(3n+2)} (3600n^7 - 3900n^6 - 16110n^5 - 6136n^4 + 7553n^3 + 5983n^2 \\
& + 1224n + 36)h_x^2 + 2(600n^5 - 800n^4 + 1114n^3 + 671n^2 + 727n + 138) \frac{h}{q} h_x q_x \Big\} \\
B_{d1}^* = & \frac{(5n+4)(6n+5)}{(4n+3)(2n+1)} A_{d1}^* \\
B_{dn} = & \frac{G(5n+4)(3n+2)(2n+1)(4n+3)(7n+6)(6n+5)}{288n(2n+1)^2(2n-1)(3n+1)(4n+1)(5n+2)(n+1)^4} \left(\frac{q}{h^2}\right)^n \left\{ (600n^5 - 860n^4 - 1114n^3 + 671n^2 \right. \\
& + 727n + 138) \frac{h^2}{q} q_{xx} - 2 \frac{600 - 100n^6 + 374n^5 + 2201n^4 + 1307n^3 - 319n^2 - 259n - 24}{5n+3} hh_{xx} \\
& - \frac{1200n^8 + 1000n^7 - 5192n^6 - 2518n^5 + 1409n^4 - 1940n^3 - 1509n^2 - 58n + 48}{5n+1} h_x q_x \\
& + (7200n^{10} + 16200n^9 - 18932n^8 - 63030n^7 - 46905n^6 - 19315n^5 - 15923n^4 - 10331n^3 \\
& - 1910n^2 + 378n + 108) \frac{1}{(3n+2)(2n+1)} h^2 h_x^2 + (20n^3 - 12n^2 - 63n - 64) h^2 q_x^2 \Big\} \\
B_{d0} = & \frac{G(4n+3)(6n+5)(7n+6)(5n+4)(3n+2)}{288n(n+1)^3(4n+1)(5n+2)(3n+1)(2n+1)^3} \left(\frac{q}{h^2}\right)^n \left\{ 576 \frac{n(3n+1)(n+1)}{(2n-1)} q_x^2 \right. \\
& - \frac{(302n^3 + 453n^2 + 174n + 16)}{(2n+1)} \frac{h^2}{q} q_{xx} + \frac{(1370n^3 + 1919n^2 + 650n + 48)}{(5n+3)} hh_{xx} \\
& + \frac{(91680n^6 + 259364n^5 + 278776n^4 + 138919n^3 + 29660n^2 + 1044n - 288)}{(3n+2)(4n+3)(5n+3)(2n-1)} h^2 h_x^2 \\
& + 2 \frac{(11380n^4 + 19172n^3 + 9173n^2 + 1174n - 48)}{(2n-1)(5n+3)} h_x q_x \Big\}
\end{aligned}$$

.0.4.1 Expressions de Q_{3d} , A_{3d} , B_{3d} et \tilde{Q}_{3d}

$$Q_{3d} = \tilde{Q}_0 + RQ_{I1} + R^2 Q_{I2} + \tilde{Q}_{d1} + H_{n-1} Q_{d1}^* + (1 - \delta_{n1}) \tilde{Q}_{dn} + (n-1)(\tilde{Q}_{d0} + R^2 Q_{d2})$$

$$A_{3d} = \tilde{A}_0 + RA_{I1} + R^2 \tilde{A}_{I2} + (\tilde{A}_{d1} + H_{n-1} A_{d1}^*) + (1 - \delta_{n1}) \tilde{A}_{dn} + (n-1)(\tilde{A}_{d0} + R^2 A_{d2})$$

$$B_{3d} = \tilde{B}_0 + R^2 \tilde{B}_{I2} + (\tilde{B}_{d1} + H_{n-1} B_{d1}^*) + (1 - \delta_{n1}) B_{dn} + (n-1)(B_{d0} + R^2 B_{d2})$$

$$\tilde{Q}_{3d} = \tilde{Q}_{3d0} + R\tilde{Q}_{3dI2} + \tilde{Q}_{3dd1} + H_{n-1} \tilde{Q}_{3dd1}^* + (1 - \delta_{n1}) \tilde{Q}_{3ddn}$$

Où :

$$\tilde{Q}_0 = Q_0 + \frac{3n+2}{2n+1} \frac{W}{2} hh_{zzx}$$

$$\tilde{Q}_{I2} = \tilde{Q}_{I2} + \frac{3(2n+1)}{4n+3} \frac{p}{h} q_z - \frac{(72n^4 + 200n^3 + 212n^2 + 101n + 18)}{6(4n+3)(n+1)^3} \frac{qp}{h^2} h_z$$

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{d1} &= Q_{d1} + \frac{Gn(3n+2)}{3(4n+1)(2n-1)} \left(\frac{q}{h^2} \right)^{n-1} \left\{ q_{zz} + \frac{216n^5 + 852n^4 + 778n^3 + 379n^2 + 104n + 11}{4(2n+1)(n+1)^2(3n+1)(3n+2)} hh_z q_z \right. \\ &\quad \left. + \frac{3(24n^3 + 16n^2 + 5n + 1)(2n^2 + 7n + 1)}{4(2n+1)(n+1)^2(3n+1)(3n+2)} \left[\frac{q}{h^2} hh_{zz} - 2 \frac{q}{h^2} h_z^2 \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{dn} &= Q_{dn} + \frac{G(3n+2)}{3(4n+1)(2n-1)} \left(\frac{q}{h^2} \right)^{n-1} \left\{ n(1-n) \frac{q_z^2}{q} - \frac{(48n^5 - 96n^4 - 2n^3 + 9n^2 - 3n - 1)}{2n(3n+1)(2n+1)} \frac{qh_z^2}{h^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(48n^3 - 76n^2 - 5n + 1)}{4(3n+1)} hh_z q_z \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{d0} + R^2 \tilde{Q}_{d2} &= Q_{d0} + R^2 Q_{d2} - \frac{G}{6} \left(\frac{q}{h^2} \right)^n \frac{(n-1)(n+1)}{(2n-1)(4n+1)} \left\{ \frac{(48n^3 + 8n^2 - 4n - 1)}{(2n+1)(1+3n)} h_z^2 \right. \\ &\quad \left. + 2n \left(\frac{hq_z}{q} \right)^2 - \frac{24n^2 - 1}{3n+1} \frac{hh_z q_z}{q} \right\} \end{aligned}$$

$$\tilde{A}_0 = A_0 + \frac{(5n+4)(4n+3)}{3(n+1)^2} \frac{W}{2} hh_{zzx}$$

$$\tilde{A}_{I2} = A_{I2} + \frac{(2n+1)^2}{24G(n+1)^2} \left\{ \frac{(24n^3 + 36n^2 + 11n - 2)(2n+1)}{(n+1)^4} \frac{pq}{h^2} h_z - 24 \frac{p}{h} q_z \right\}$$

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{d1} &= A_{d1} + \frac{n(n+1)^2}{3(5n+2)(4n+3)(4n+1)(2n-1)} \left(\frac{q}{h^2} \right)^n \left\{ 6(n-1) \frac{h^2}{q} q_{zz} - \frac{72n^3 - 16n^2 - 30n - 5}{(2n+1)(3n+1)} \right. \\ &\quad \left. \left(hh_{zz} + 2 \frac{h}{q} h_z q_z \right) + 2 \frac{324n^5 + 192n^4 - 79n^3 - 94n^2 - 26n - 2}{(2n+1)(3n+1)(3n+2)} h_z^2 \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{dn} &= A_{dn} + \frac{(n+1)^2}{6(5n+2)(4n+3)(4n+1)(2n-1)} \left(\frac{q}{h^2} \right)^n \left\{ \frac{864n^6 - 48n^5 + 208n^4 + 430n^3 + 129n^2 - 4n - 4}{(3n+1)(3n+2)(2n+1)} h_z \right. \\ &\quad \left. - \frac{288n^5 - 272n^4 + 176n^3 + 140n^2 - 11n - 6}{(2n+1)(3n+1)} \frac{h}{q} h_z q_z + 12(n-1)n \left(\frac{hq_z}{q} \right)^2 \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{A}_{d0} &= A_{d0} + \frac{(n-1)(n+1)^2}{6(2n-1)(4n+3)(4n+1)(5n+2)} \left(\frac{q}{h^2}\right)^n \left\{ \frac{1296n^5 + 2328n^4 + 1148n^3 + 45n^2 - 80n - 12}{(2n+1)(3n+1)(3n+2)} h_z^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{432n^4 + 712n^3 + 234n^2 - 7n - 6}{(2n+1)(3n+1)} \frac{h}{q} h_z q_z + 6n(3n+4) \left(\frac{hq_z}{q}\right)^2 - \frac{3n(2n-1)(4n+1)(5n+2)}{(2n+1)(3n+2)} q^2 \tilde{q}^2 \right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{B}_0 &= B_0 + \frac{(7n+6)(6n+5)(5n+4)}{24(n+1)^3} Wh h_{zzx} \\ \tilde{B}_{I2} &= B_{I2} + \frac{(4n+3)(3n+2)(2n+1)^2(6n+5)(5n+4)(7n+6)}{240(n+1)^8} \frac{pq}{h^2} h_z\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{B}_{d1} &= B_{d1} + \frac{(4n+3)(5n+4)(6n+5)(7n+6)(3n+2)}{9(5n+2)(4n+1)(2n-1)(2n+1)(n+1)^3} \left(\frac{q}{h^2}\right)^n \left\{ (n-1) \frac{h^2}{q} q_{zz} - \frac{(820n^3 - 116n^2 - 407n - 90)}{32(5n+3)(3n+1)} \right. \\ &\quad \left. \left(hh_{zz} + 2 \frac{h}{q} h_z q_z \right) + \frac{(2n+1)(6960n^5 + 6620n^4 - 1936n^3 - 3463n^2 - 900n - 36)}{16n(4n+3)(3n+2)(2n-1)(3n+1)} h_z^2 \right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{B}_{dn} &= B_{dn} + \frac{(6n+5)(4n+3)(3n+2)(7n+6)(5n+4)}{9(2n-1)(2n+1)(5n+2)(4n+1)(n+1)^3} \left(\frac{q}{h^2}\right)^n \left\{ (n-1)^2 \left(\frac{hq_z}{q}\right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{9840n^7 + 17108n^6 + 19192n^5 + 16161n^4 + 5626n^3 - 841n^2 - 828n - 108}{16n(4n+3)(3n+2)(3n+1)} h_z^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1780n^5 - 40n^4 + 1653n^3 + 617n^2 - 182n - 48}{32n(5n+3)(1+3n)} \frac{h}{q} h_z q_z \right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{B}_{d0} &= B_{d0} + \frac{(n-1)(n+1)^2}{6(2n-1)(4n+3)(4n+1)(5n+2)} \left(\frac{q}{h^2}\right)^n \left\{ \frac{1296n^5 + 2328n^4 + 1148n^3 + 45n^2 - 80n - 12}{(2n+1)(3n+1)(3n+2)} h_z^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{432n^4 + 712n^3 + 234n^2 - 7n - 6}{(2n+1)(3n+1)} \frac{h}{q} h_z q_z + 6n(3n+4) \left(\frac{hq_z}{q}\right)^2 - \frac{3n(2n-1)(4n+1)(5n+2)}{(2n+1)(3n+2)} q^2 \tilde{q}^2 \right\}\end{aligned}$$

$$\tilde{Q}_{3d0} = \frac{(3n+2)}{2(2n+1)} \left\{ G \left(\frac{q}{h^2}\right)^{n-1} \frac{\tilde{q}}{h^2} + W(h h_{xxz} + h h_{zzz}) + G \cot \beta h h_z \right\}$$

$$\tilde{Q}_{3dI2} = -3 \frac{2n+1}{4n+3} \left\{ \frac{q \tilde{q} h_x}{h^2} - \frac{q \tilde{q}_x}{h} - 3 \frac{5n+3}{2n+1} \frac{\tilde{q} q_x}{h} \right\}$$

$$\tilde{Q}_{3dd1}$$

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_{3dd1} = & \frac{2Gn(3n+2)}{3(4n+1)(2n-1)} \left(\frac{q}{h^2}\right)^{n-1} \left\{ q_{xz} + \frac{24(n-1)(n+1)}{9(3n+1)} (hh_z q_x + hh_x q_z + \frac{q}{h} h_{xz}) \right. \\ & \left. - \frac{72n^4 - 8n^3 - 6n^2 + 4n + 1}{(3n+1)} \frac{q}{h^2} h_z h_x \right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_{3ddn} = & \frac{G(3n+2)}{12(4n+1)(2n-1)} \left(\frac{q}{h^2}\right)^{n-1} \left\{ -(2n^2 + 5n - 1) q_{xz} + \frac{12n^4 + 52n^3 - 61n^2 - 8n + 2}{3n+1} \frac{q_z h_x}{h} \right. \\ & + (1-n)(2n+11)n \frac{q_x q_z}{q} + \frac{12n^4 + 52n^3 - 89n^2 - 11n + 3}{3n+1} \frac{h_z q_x}{h} \\ & \left. - 2 \frac{24n^6 + 92n^5 - 162n^4 - 5n^3 + 12n^2 - 7n - 2}{n(2n+1)(3n+1)} \frac{q h_z h_x}{h^2} \right\}\end{aligned}$$

Bibliographie

- [1] W. Nusselt. Die oberflachenkondensation des wasserdampfes. *Z.Ver.Dtsch.Ing.*, 60 :541–552, 1916.
- [2] V.Y. Shkadov. Solitary waves in a layer of viscous fluid. *Izv.Ak.Nauk SSSR Mekh.Zhidk.Gazal*, pages 63–66, 1977.
- [3] C. Ruyer-Quil and P. Manneville. Improved modeling of flows down inclined planes. *Eur.Phys.J.B*, 15 :357–369, 2000.
- [4] N. MEHIDI M. AMAOUCHE and N. AMATOUSSE. An accurate modeling of thin film flows down an incline for inertia dominated regimes. *European Journal of Mechanics B/Fluids*, 24 :49–70, 2005.
- [5] N. Mehidi M. Amaouche and N. Amatousse. Linear stability of a two-layer flow down an inclined channel : A second order weighted residual approach. *Phys.Fluids*, 19 :1–14, 2007.
- [6] H.C. CHANG . Wave evolution on a falling film. *Ann. Rev. Fluid Mech*, 1994.
- [7] A. Oron and O. Gottlieb. Nonlinear dynamics of temporally excited falling liquid films. *Phys. Fluids*, 14 (8) :2622–2636, 2002.
- [8] J.D. Paul J. Liu and J.P. Gollub. Measurements of the primary instabilities of film flows. *J.Fuid Mech.*, 220 :69–101, 1993.
- [9] S.W. Joo and S.H. Davis. Instabilities of vthree dimentional viscous falling films. *J. Fluid Mech.*, 242 :529–547, 1992.

- [10] E.A. DEMEKHIN H.C. CHANG and D.I. KOPELEVICH. Nonlinear evolution of waves on a vertically falling films. *Journal of fluid mechanics*, 1993.
- [11] J. Liu and J.P. Gollub. Solitary wave dynamics of film flows. *Phys. Fluids*, 6 :1702–1711, 1994.
- [12] J.B. Schneider J. Liu and J.P. Gollub. Three dimensional instabilities of film flows. *Phys. Fluids*, 7 :55–67, 1995.
- [13] M. Vlachogiannis N. Malamataris and V.Bontozoglou. Solitary waves on inclined films : flow structure and binary interactions. *Phys.Fluids*, 14 :1082–1094, 2002.
- [14] D.J. Benney. Long waves on liquid films. *J.Math.Phys*, 45 :150–155, 1966.
- [15] M.K.R. Panga and V. Balakotaiah. Low dimensional models for vertically falling viscous films. *Phys.Rev.Lett*, 15 :1–3, 2003.
- [16] C. Ruyer-Quil and P. Manneville. Comment on 'low dimensional models for vertically falling viscous films'. *Phys.Rev.Lett.*, 199401, 2004.
- [17] T. Ooshida. Surface equation of falling film flows with moderate reynolds number and large by finite weber number. *Phys. Fluids*, 11 :3247–3269, 1999.
- [18] V.Y. Shkadov. Wave conditions in the flow of thin layer of a viscous liquid under the action of gravity. *Izv.Akad.Nauk SSSR Mekh.Zhidk.Gazal*, pages 43–51, 1967.
- [19] C. Ruyer-Quil and P. Manneville. Further accuracy and convergence results on the modeling of flows down inclined planes by weighted residual approximations. *Phys.Fluids*, 14 :170–183, 2002.
- [20] P.L. Kapitza and S.P. Kapitza. Wave flow of thin layers of a viscous fluid, zh.eksper. *Teor.Fiz.*, 19 :105–120, 1949.
- [21] M.G. Velarde C. Ruyer-Quil B.Scheid, S. Kalliadasis and R.Kh. Zeytounian. Thermocapillary long waves in a liquid film flow. part1. low-dimensional formulation. *J.Fluid Mech.*, 538 :1–24, 2005.
- [22] J.S. Lin and C.C. Hwang. Finite amplitude long-wave instability of power-law liquid films. *Int.J.Non-linear Mech.*, 35 :769–777, 2000.

- [23] G. Lebon S. Miladinova and E. Toshev. Thin-film flow of a power-law liquid falling down an inclined plate. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 122 :69–78, 2004.
- [24] B.S. Dandapat and A. Mukhopadhyay. Waves on the surface of a falling power-law fluid film. *Int.J.Non-linear Mech.*, 38 :21–38, 2003.
- [25] K.S. Matveyev G.M. Sisoev, B.S. Dandapat and A. Mukhopadhyay. Bifurcation analysis of the travelling waves on a falling power-law fluid film. *J.Non-Newtonian Fluid Mech.*, 141 :128–137, 2007.
- [26] A. Davey. On the numerical solution of difficult eigenvalue problems. *J.Comp. Phys.*, 24 :331, 1977.
- [27] M. Amaouche A. Djema and H. Ait Abderrahmane. Film flow for power-law fluids : Modelling and linear stability. *European Journal of Mechanics B/Fluids*, 34 :70–84, 2012.
- [28] C.J. RUYER-QUIL. *Dynamique d'un film mince s'écoulant le long d'un plan incliné*. Thèse de doctorat, Ecole polytechnique, novembre, 1999.
- [29] H.C. CHANG et E.A. DEMEKHIN. *Complex Wave Dynamics on Thin Films*. Elsevier, Amsterdam, 2002.
- [30] C.S. Yih. Stability of liquid flow down an inclined plane. *Phys. Fluid*, 6, N3 :321–334, 1963.
- [31] C.S. Yih. Stability of two-dimensional parallel flows for three-dimensional disturbances. *Quart. Appl. Math.*, 12 :134, 1955.
- [32] T.B. Benjamin. Wave formation in laminar flow down an inclined plane. *J. of Fluid Mech.*, 2 :554–574, 1957.
- [33] H.B. SQUIRE. On the stability of tree-dimensional disturbances of viscous fluid between parallel flows. *Proc.R.S.Soc.Lond.*, A142, 1933.
- [34] V.V. Zametalin. Stability of a laminar boundary layer of a power-law non-newtonian liquid. *Novosibirsk. Translated from Zhurnal Prikladnoi Mekhaniki i Tekhnicheskoi Fiziki*, (1) :101–106, 1976.

- [35] P.G. DRAZIN and W.H. REID. *Hydrodynamic stability*. Cambridge University Press, Cambridge, deuxième édition, 2004.
- [36] *Nonlinear Dynamics of Thin Films and Fluid Interfaces*, Banff, Alberta, Canada, December 2003. Banff Fluids Workshop.
- [37] M.R. SCOTT. An initial value method for the eigenvalue problem for systems of ordinary differential equations. *J. Comput. Phys.*, (12) :334–347, 1973.
- [38] A. Davey. On the numerical solution of difficult boundary-value problems. *J. Comp. Phys.*, 35 :36–47, 1980.
- [39] C. RUYER-QUILL and P. MANNEVILLE. Modeling film flows down an inclined plane. *European Journal of Mechanics B/Fluids*, 15 :277–292, 1998.
- [40] S.H. DAVIS J.M. FLORYAN and R.E. KELLY. Instabilities of a liquid film flowing down a slightly inclined plane. *Physics of Fluids*, (30) :983–989, 1987.
- [41] I.A. Demekhin E.A. Demekhin and V.Y. Shkadov. Solitons in viscous films down a vertical wall. *Izv. Ak. Nauk SSSR, Mekh. Zhi. Gaza*, 4 :9–16, 1983.
- [42] A. Djema M. Amaouche and L. Bourdache. A modified shkadov's model for thin film flow of a power law fluid over an inclined surface. *C.R.Mecanique*, 337 :48–52, 2009.
- [43] C. Ruyer-Quil B. Scheid and P. Manneville. Wave patterns in film flows :modelling and three-dimensional waves. *J. Fluid Mech.*, 562 :183–222, 2006.
- [44] P. Huerre and M. Rossi. *Hydrodynamics and nonlinear instabilities*. Cambridge University Press[Chapter 2], 1998.
- [45] A. Bers. Handbook of plasma physics. *Amsterdam : North-Holland Publishing Company*, vol. 1 Chapter 3.2 :451–517, 1983.
- [46] F. Dias L. Brevdo, P. Laure and T.J. Bridges. Linear pulse structure and signalling in a film flow on an inclined plane. *J. Fluid Mech.*, 37 :396, 1999.
- [47] A. J. Roberts. Long-wave models of thin film fluid dynamics, 1994.
- [48] M. HUG. *Mécanique des fluides appliquée aux problèmes d'aménagement et d'énergie*. Eyrolles, 1975.

- [49] P. Bergé. *Le chaos, Théorie et Experiences.*, Eyrolles, Paris, 1988.
- [50] P.A. BOIS. *Introduction à la Mécanique théorique des fluides*. Ellipses Édition Marketing S.A, Paris, 2000.
- [51] A. BONNET and J. LUNEAU. *Aérodynamique-Théories de la dynamique des fluides*. Cépaduès, Toulouse, 1989.
- [52] J.D. JACKSON. *Électrodynamique classique-Cours et exercices corrigés*. Sciences Sup. Dunod, Paris, 2001.
- [53] R. BRACWELL. *The FOURIER Transform and its applications*. 2 edition, 1986.
- [54] Y. KURAMOTO. *Chemical oscillations, waves, and turbulence*, volume 19 of *Springer series in Synergetics*. Berlin, 1984.
- [55] S. L. HAHN. *Hilbert transforms*. C. R. C. Press L. L. C. , Boca Raton, Austria, 2 edition, 2000.
- [56] . L. Chia-Chiao. *Theory of Hydrodynamical*. IL-MOSCOU Press , 1958.
- [57] A.T. LISTROV. *Stability of parallel flow of non-Newtonian media*. DOKL. AKAD. NAUK SSSR Press 164, No. 5, 1965.
- [58] H.C. CHANG and E.A. DEMEKHIN. *Complex wave dynamics on thin films*. STUDIES IN INTERFACE SCIENCE Press No. 14, Elsevier, 2002.
- [59] H. Ait Abderrahmane M. Amaouche and L. Bourdache. Hydromagnetic thin film flow : Linear stability. *Physical review E*, 88, 023028 :48–70, August 2013.
- [60] C.C. CHOW B.M. BOGHOSIAN and T. HWA. Hydrodynamics of the Kuramoto-Sivashinsky equation in two dimensions. *Physical Review Letters*, 83(25) :2562–2565, December 1999.
- [61] K. BRAUER. *The Kortweg-de Vries Equation :History, exact solution, and graphical representation*. <http://www.usf.uni-osnabrueck.de/~kbrauer/solitons.html>, 2000.
- [62] I. Gombkötö G. Bognar and K. Hriczö. Non-newtonian fluid flow down an inclined plane. *Recent Advances in Fluid Mechanics and Heat and Mass Transfer*, 2007.

- [63] H.C. CHANG. Travelling waves on fluid interfaces : normal form analysis of the Kuramoto-Sivashinsky equation. *Physics of Fluids*, 29(10) :3142–3147, 1986.
- [64] J.A. DIEZ and L. KONDIC. Contact line instabilities of thin liquid films. *Phys.Rev.Lett. E*, 86(4) :632–634, 2001.
- [65] J. DUAN, V.J. ERVIN, and H. GAO. Trajectory and attractor convergence for a nonlocal kuramoto-sivashinsky equation. *Communications on Applied Nonlinear Analysis*, 5(4), 1998.
- [66] J. DUAN and V.J. ERVIN. Dynamics of a nonlocal Kuramoto-Sivashinsky equation. *Journal of Differential Equations*, (143) :243–266, 1998.
- [67] B.F. FENG and T. KAWAHARA. Multi-hump stationary waves for a korteweg-de vries equation with nonlocal perturbations. *Physica D*, (137) :237–246, 2000.
- [68] A. GONZÁLEZ and A. CASTELLANOS. Nonlinear electrohydrodynamic waves on films falling down an inclined plane. *Physical Review E*, 53(4) :3573–3578, 1996.
- [69] J.M. HYMAN and B. NICOLAENKO. The Kuramoto-Sivashinsky equation : a briage between pde's and dynamical systems. *Physica D*, 18(113), 1986.
- [70] J.M. HYMAN and B. NICOLAENKO. Cohenrence chaos in the Kuramoto- velarde equation. In *Nonlinear PDE's*, MRI, Madison, Wisc. (, New York).
- [71] D.y. HSIEH. Stability of a conducting fluid film flowing down inclined plane in a magnetic field. *Physics of fluids*, 8 :1785–1791, 1965.
- [72] S. KORSUNSKY. Long waves on a thin layer of conducting fluid flowing down an inclined plane in an electromagnetic field. *European journal of mechanics B/Fluids*, 18(2) :295–313, 1999.
- [73] Y. KURAMOTO and T. TSUZUKI. Persistent propagation of concentration waves in dissipative media far from thermal equilibrium. *Progr. Theoret. Phys*, 55 :356–369, 1976.
- [74] S.G. BANKOFF H. KIM and M.J. MIKSIS. The effect of an electrostatic field on film flow down an inclined plane. *Physics of Fluids A*, (4) :2117, 1992.

- [75] H. KIM. Long-wave instabilities of film flow under an electrostatic field : two-dimensional disturbance theory. *Korean J. Cem. Eng.*, 14(1) :1, 1997.
- [76] H. KIM. Characteristics of solitary waves on a running film down an inclined plane under an electrostatic field. *Korean J. Cem. Eng.*, 20(5) :803–811, 2003.
- [77] T. KERLE Z. LIN and T.P. RUSSELL. Electric field induced dewetting at polymer/polymer interfaces. *Macromolecules*, 35(16) :6255–6262, 2002.
- [78] Y.P. LADIKOV . Flow stability stability of a conducting liquid flowing down inclined plane in the presence of a magnetic field. *Fluid dynamics*, 1 :1–4, 1966.
- [79] P. Manneville and Y. Pomeau. On solitary waves running down an inclined plane. *J Fluid Mech*, 135 :27–50, 1983.
- [80] R. MOREAU. *Magnetohydrodynamics*. Kluwer Academic Publishers, Paris, 1990.
- [81] A. MUKHOPADHYAY and B .S. DANDAPAT. Nonlinear stability of conducting viscous film flowing down an inclined plane at moderate Reynolds number in the presence of a uniform normal electric field. *Journal of Physics D*, 38 :138–143, 2005.
- [82] P.H. CULTER N.M. MISKOVSKY, J.He. CULTER and M. CHUNG. Electrohydrodynamic study of the instability of a thin metal film :Application to planar liquid metal ion sources. *Journal of applied physics*, 69(4) :1956–1961, 1990.
- [83] L. ODDERSHED and S.R. NAGEL. Singularity during the onset of an electrohydrodynamic spout. *Physical review letters*, 85 :1234–1237, 2000.
- [84] A. Oron S.H. Davis and S.G. Bankoff. Long-scale evolution of thin liquid films. *Rev.Mod. Phys.*, 69 :931, 1997.
- [85] E. SCHÄFFER T.P. RUSSELL, Z. LIN and U. STEINER. Aspects of electrohydrodynamic instabilities at polymer interfaces. *Fibers and polymers*, 4(1) :1–7, 2003.
- [86] P. COLLINA U. THIELE B. SCHEID, A. ORON and J.C. LEGROS. Nonlinear evolution of nonuniformly heated falling liquid films. *Physics of fluids*, 14(12) :4130–4151, December 2002.

- [87] S. Kalliadasis M.G. Velarde B. Scheid, C. Ruyer-Quil and R.Kh. Zeytounian. Thermocapillary long waves in a liquid film flow. part2. linear stability and nonlinear waves. *J.Fluid Mech.*, 538 :223–244, 2005.
- [88] L.A. Spodareva. Stability of non-newtonian fluid flows. *J.Appl.Mech.Tech.Phys.*, 41 :446–451, 2000.
- [89] G.I. SIVASHINSKY. Nonlinear analysis of hydrodynamic instability in laminar flames. *Acta Astronaut*, 4(11-12) :1177–1206, 1977.
- [90] P.G. PETROPOULOS K. SAVETTASERANEE, D.T. PAPAGEORGIOU and B.S. TILLY. The effect of electric fields on the rupture of thin viscous films by Van Der Waals forces. *Physics of fluids*, 15(3) :641–652, March 2003.
- [91] L. TONKS. A theory of liquid surface rupture by a uniform electric field. *Physical Review*, 48 :562–568, 1935.
- [92] J.F. TOLAND. A few remarks about the Hilbert Transform. *Journal of functional analysis*, 145 :151–174, 1997.
- [93] L.s. TUCKERMAN and D. BARKLEY. Bifurcation analysis of the Eckhaus instability. *Physica D*, (46) :57–86, 1990.
- [94] R.Kh. ZEYTOUNIAN. Nonlinear long waves on water and solitons. *Physics-Uspekhi*, 38(12) :1403–1456, 1995.
- [95] D. Tseluiko. Mathematical problems arising in interfacial electrohydrodynamics. In New Jersey Institute of Technology Graduate Student Research Day, editor, G.S.R.D. ABSTRACTS, page 1, New Jersey Institute of Technology ,California,USA, March,6, 2006.
- [96] R. CONTE. Exact solutions of nonlinear partial differential equations by singularity analysis. In A. Greco, editor, *Direct and inverse methods in nonlinear evolution equations*. CIME school, Cetraro, Springer Verlag, december 5-12 2000.
- [97] R.M. MIURA. Solitons and the inverse scattering method : An historical view. In Nonlinear Dynamics Modelling and Irreversible Thermodynamics, editors, MIDIT-seminar 458, Technical University of Denmark, Building 321, DK-2800, Lyngby,Denmark, July, 15 1999.

- [98] S. BOTTIN. *Structures cohérentes et transition vers la turbulence par intermittence spatio-temporelle dans l'écoulement de Couette plan.* Thèse de doctorat, Université de Paris-Sud, Univérsité Paris XI,91405,Orsay cedex, France, juin 1998.
- [99] N. BOUAM. *Stabilité, bifurcation et comportement cahotique d'une interface entre deux fluides.* Thèse de doctorat, université de Béjaïa, U.A.M.B., Route Targa Ouzemmour,06000,Béjaïa, Algérie, 2007.
- [100] N. AMATOUSSE. *Contribution à l'étude des instabilités des film minces.* Thèse de doctorat, université de Béjaïa, U.A.M.B., Route Targa Ouzemmour,06000,Béjaïa, Algérie, 2007.
- [101] A.M BENSALAMA. *Modélisation numérique du comportement d'une particule sous champ électrique dans les microsystèmes : de la déformation au déplacement.* Thèse de doctorat, École Doctorale de Mécanique–Énergétique, Université Joseph Fourier, Grenoble I, France, décembre,2005.
- [102] B. SCHEID. *Evolution and stability of falling liquid films with thermocapillary effects.* Thèse de doctorat, Universit e Libre de Bruxelles, Février 2004.
- [103] S. HARKEMA. *Capillary instabilities in thin polymer films : Mecanism of structure formation and pattern replication.* PhD thesis, Univesité de Groningen, février 2006.
- [104] L. BOURDACHE. *Sur la dynamique des films minces en presence d'effets spéciaux.* Thèse de doctorat, Univesité A.Mira-Béjaïa, Juin 2015.
- [105] M. DORIN MORARIU. *Pattern formation by capillary instabilities in thin films.* PhD thesis, Univ rsite de Groningen, 2004.
- [106] M. P. BRUNET. *Structure et dynamique non-linéaire des liquides tombants.* Thèse de doctorat physique des liquides, Université Paris 6, U.P.M.C.4 place Jussieu ,75005,Paris,France, décembre 2002.
- [107] D. A. SAVILLE. *Electrokinetics and electrohydrodynamics in microfluidics.* In XXI International Congress of Theoritical and Applied Mecanics, Warsaw, Poland, August 15-21 2004.

ملخص

هذا يتناول دراسة جريان مائع لا نيوتوني على سطح مائل بتأثير الجاذبية. فمنا باقتراح نماذج رياضية من بينها لعملا نموذج كامل حتى الدرجة الثانية باستعمال نظرية الأمواج الطويلة. تمت مقارنة صلاحية النتائج عن طريق دراسة الاستقرار الخطى و أخرى لا خطية. لاحظنا آن النماذج المقترحة تقارب مع الحلول الرقمية لمعادلة Orr-Sommerfeld . النتائج تظهر نفس السلوك النوعي مقارنة بالمائع النيوتونى غير أن تأثير كمي ملحوظا على القيم الحرجة للاستقرار و ظهور الأضطرابات و الحالة العشوائية

Résumé

Le présent travail est consacré à la modélisation d'un écoulement par gravité de film non-newtonien en loi de puissance sur un plan incliné pour de faibles à modérés nombres de Reynolds. nous avons établi un modèle complet d'ordre deux de quatre équations d'évolution de la dynamique du film en présence des effets non-newtoniens. En plus, des modèles réduits (simplifiés) d'évolution à deux équations, de l'épaisseur du film et du débit, sont proposés; Le premier modèle (RM) a été obtenue en remplaçant les champs \$a\$ et \$b\$, corrections du débit local, par leurs approximations de premier ordre. Ce modèle diverge du modèle complet relativement à de faibles nombres de Reynolds. Une procédure de régularisation partielle a été ensuite effectuée pour y remédier. Le modèle résultant(RRM) asymptote, au stade linéaire, à celui obtenu par une élimination adiabatique de la correction de vitesse du premier ordre (SM). La procédure de modélisation de ces dernières consiste en une combinaison de la théorie des grandes ondes (théorie de lubrification) et l'approche des résidus pondérés en utilisant une base de projection appropriée. L'analyse de stabilité linéaire du modèle complet de deuxième ordre et modèle régularisé réduit (RRM) montre une assez bonne concordance avec le spectre du problème Orr-Sommerfeld pour de faibles à modérés nombres de Reynolds. L'aspect non linéaires de l'écoulement du film est ensuite examiné en utilisant une version simplifiée du modèle (RRM) qui conserve toutefois ses principales caractéristiques et en tenant compte des états asymptotiques caractérisées par des ondes stationnaires. Dans le sous-espace relativement limité de paramètres que nous avons explorés, les solutions présentent les mêmes comportements qualitatifs que ceux du cas newtonien. Quantitativement, une influence de l'indice de loi de puissance sur les valeurs critiques d'apparition des bifurcations et la transition vers le chaos.

Abstract

This work deals with modeling of a power-law fluid film flowing down an inclined plane for small to moderate Reynolds numbers. A model, accurate up to second order [first order] for dilatant [pseudoplastic] fluids is proposed to describe the nonlinear behavior of the flow. The modeling procedure consists of a combination of the lubrication theory and the weighted residual approach using an appropriate projection basis. A suitable choice of weighting functions allows a significant reduction of the dimension of the problem. The resulting model is naturally unique, i.e., independent of the particular form of the trial functions. Reduced models are proposed for the evolution of the local film thickness and flow rate; their linear spectra are compared to that obtained from the full Orr–Sommerfeld numerical solution. To obtain the latter, a new formulation of the eigenvalue problem is proposed to overcome the classical divergence of the apparent viscosity at the free surface. The full model and its reduced forms all have the advantage of the Benney like model close to criticality. Far from the instability threshold the full model continues to follow the Orr–Sommerfeld solution up to sufficiently large Reynolds numbers and gives better predictions than the depth averaging model. An incomplete regularization procedure is performed to cure the rapid divergence of the reduced two-equation model. Due to its relative simplicity the latter might be preferred in practice to the full model, at least at the initial stage of the nonlinear regime. It is also shown that the convective nature of the instability is not affected by the variation of the power law index. The nonlinear study of the film flow is then examined using a simplified version of the model (RRM) which, however, retains its main features and taking into account the asymptotic states characterized by traveling waves. In the relatively small subspace parameters we have explored, the solutions have the same qualitative behavior than those of the Newtonian case. Quantitatively, an influence of the power law index on the critical values of the occurrence of bifurcations and transition to chaos.