



Mémoire de Fin d'ETUDE

Présenté par :
BENALLAOUA Yanice
et
OUHAMMOU Messipsa

Pour l'obtention du diplôme de
MASTER EN ELECTROTECHNIQUE INDUSTRIELLE

Thème

**Etude et modélisation d'un carreau de sol
piézoélectrique**

Encadré par :
Pr. Bachir MAOUCHE
et
Dr . Badea IDIR

Année Universitaire 2022-2023

Remerciements

Nous commençons d'abord à remercier Dieu le tout puissant de nous avoir donné le courage, la santé, la volonté et la patience pour accomplir ce modeste travail.

*Nous nous pouvons, réellement, trouver les expressions élégantes que mérite nos encadrants **Mr MAOUCHE bachir** et **IDIR badea**.*

Afin de les remercier pour leur orientation, patience, encouragements, conseils, ainsi que leur aide, et pour la confiance qu'ils nous ont accordée.

Ainsi nous remercions tous les membres de jury d'avoir accepté d'examiner notre travail.

Nos sincères remerciements vont également aux enseignants du département de génie électrique, pour leurs conseils et leurs critiques constructives, qui nous ont permis d'évoluer tout au long de notre cursus.

Un grand merci à tous.

Dédicaces

je dédie ce modeste travail :

À mes parents bien-aimés, Nourdinne et Farida,

Je vous dédie ce mémoire avec une reconnaissance infinie. Votre amour inconditionnel, vos encouragements sans faille et votre soutien constant ont été les piliers de ma réussite. Votre confiance en moi m'a donné la force et la détermination nécessaires pour atteindre ce jalon académique.

À mes deux sœurs adorées, Lilia et Rima,

Vous avez toujours été mes compagnes de route les plus précieuses. Vos encouragements, votre soutien moral et vos discussions enrichissantes ont été une source de motivation inestimable. Merci d'avoir été là à chaque étape de ce parcours, apportant joie et réconfort dans ma vie.

À mes oncles et mes tantes

À tous les cousins, les voisins et les amis que j'ai connu jusqu'à maintenant. Merci pour leurs aides, encouragements et support dans les moments difficiles. Sans oublier mon binôme MESSIPSA pour son soutien moral, sa patience et sa Compréhension tout au long de ce projet.

À tous ceux que j'aime

✓ *BENALLAOUA Yanice*

Dédicaces

Chaleureusement je dédie ce modeste travail :

À la lumière de ma vie, mes chers parents en témoignage

pour leur amour et

Leur sacrifice sans limites à qui je souhaite la bonne santé et la garde du bon dieu.

À mes chères frères Anis, Amine, Islam, qui n'ont été une source de Motivation pour moi.

À mes oncles et mes tantes

À tous les cousins, les voisins et les amis que j'ai connu jusqu'à maintenant.

Merci pour leurs aides, encouragements et support dans les moments difficiles.

Sans oublier mon binôme YANIS pour son soutien moral, sa patience et sa

Compréhension tout au long de ce projet.

À tous ceux que j'aime

✓ OUHAMMOU Messipsa

Table des matières

Introduction générale.....	1
I Généralité sur la piézoélectricité.....	2
I-1 Introduction	2
I-2 La piézoélectricité.....	2
I-2-1 Historique	2
I-2-2 Définition	3
I-2-3 Polarisation des piézoélectriques	4
I-3 Principales catégories de matériaux piézoélectriques.....	5
I-3-1 Cristaux	5
I-3-2 Céramiques.....	5
I-3-3 Polymère PVDF	6
I-3-4 Composites piézoélectriques	6
I-4 Applications de la piézoélectricité.....	6
I-5 Les fonctions de la piézoélectricité	7
I-5-1 Transformateur	7
I-5-2 Capteur	7
I-5-3 Actionneur	8
I-5-4 Générateur	8
I-6 Conclusion	8
II - Modélisation du phénomène piézoélectrique	9
II-1 Introduction	9
II-2 Les équations de maxwell	9
II-1 Model électrostatique	9
II-1-1 Hypothèse.....	9
II-1-2 Théorème de Gauss dans le vide	9
II-1-3 Polarisation.....	10
II-1-4 Loi de comportement	11
II-1-5 Condition de passages	11
II-1-6 Potentiel vecteur électrique V	13
II-1-7 Tenseur de déplacement électrique	13
II-2 Model mécanique	14
II-2-1 Hypothèses	14
II-2-2 Action mécanique et force.....	14
II-2-3 Contrainte	14
II-2-4 Déformation	15

II-2-5	Relation entre les contraintes et les déformations	17
II-2-6	Tenseur	18
II-3	Couplage électromécanique	23
II-3-1	Approche thermodynamique	23
II-3-2	Relation de la piézoélectricité	24
II-3-3	Relation entre les coefficients piézoélectriques	27
II-3-4	Coefficients de couplage	28
II-3-5	Modes de couplage	28
II-4	Conclusion	29
III	Application à la récupération d'énergie électrique d'un sol piézoélectrique	31
III-1	Introduction	31
III-2	Modèle simplifié de Maxwell (Approximation quasi-statique)	31
III-3	Modèle géométrique et mode de couplage	31
III-4	Formulation du couplage	32
III-5	Grandeurs électriques en mode découple	33
III-5-1	Induction électrique	33
III-5-2	Charge électrique	33
III-5-3	Courant électrique	33
III-5-4	Densité de courant électrique	34
III-5-5	Champ électrique	34
III-5-6	Tension aux bornes des électrodes	34
III-5-7	Energie électrique	34
III-6	Modélisation du système sans charge électrique	35
III-7	Application à un sol piézoélectrique	36
III-7-1	Fonctionnement d'un sol piézoélectrique	36
III-7-2	Caractéristiques d'un élément piézoélectrique	36
III-7-3	Architecture d'un circuit d'un carreau sol piézoélectrique	38
III-8	Conclusion	40
	Conclusion générale	41
	Bibliographie	42

Liste des figures

Figure I-1 : Effet direct de la piézoélectricité	4
Figure I-2 : Effet inverse de la piézoélectricité	4
Figure I-3 :Polarisation par application d'un champ électrique dans les matériaux	5
Figure I-4 : structure d'un micro générateur d'un piézoélectrique	5
Figure II-1 : Représentation d'une géométrie cubique d'un milieu matériel.....	12
Figure II-2 : Surface de séparation entre deux milieux.....	13
Figure II-3 : Exemple Traction et Compression	16
Figure II-4 : Exemple du Cisaillement.....	16
Figure II-5 : Barre soumise à la torsion	17
Figure II-6 : Exemple de flexion.....	17
Figure II-7 : Les composantes du tenseur des contraintes	18
Figure II-8 : Les composantes du tenseur des contraintes	20
Figure II-9 : Directions des contraintes dans un cube	22
Figure II-10 : Interactions entre les grandeurs physiques d'un matériau piézoélectrique	24
Figure III-1 : Barreau piézoélectrique soumis à une force F	31
Figure III-2 : Élément piézoélectrique d'un sol.....	36
Figure III-3 : Géométrie cylindrique soumis à une contrainte mécanique	37
Figure III-4 : Élément piézoélectrique	37
Figure III-5 : Charge électrique en fonction du coefficient de charge d	38
Figure III-6 : Circuit d'un sol piézoélectrique.....	39

Liste des tableaux

Tableau I-1 : Différentes applications [8]	7
Tableau II-1 : Correspondance entre les notations tensorielles et celles de Voigt.	21
Tableau II-2 : Passage de la représentation tensorielle vers une représentation vectorielle...	22
Tableau II-3 : Les quatre formes d'écritures équivalentes du couple d'équations piézoélectriques	26
Tableau II-4 : Coefficients piézoélectriques	26
Tableau II-5 : Relation entre les constantes élastique, piézoélectrique et diélectriques.....	27
Tableau II-6 : Différents modes de vibration piézoélectrique	29
Tableau III-1 : Caractéristique piézoélectriques des matériaux sous test.....	38
Tableau III-2 : Comparaison des résultats pour différentes puissances et différents poids ...	40
Tableau III-3 : Résultat final de la conception du sol	40

Introduction générale

Ces dernières années, la récupération et la transformation d'énergie ont gagné en importance en tant qu'axe stratégique mondial. Les recherches actuelles visent à trouver des formes d'énergie adaptées aux besoins environnementaux et au développement durable. Malgré la disponibilité gratuite des sources d'énergie naturelle, leur exploitation pose des problèmes en termes de coûts de production et d'impacts environnementaux, qu'il s'agisse de sources thermiques, géothermiques, biomasse, marines, nucléaires, solaires ou mécaniques.

Parmi les sources d'énergie électrique issues de la mécanique, la piézoélectricité se distingue. Ce procédé constitue un modèle de production d'énergie alternative qui consiste à convertir l'énergie mécanique en énergie électrique en polarisant des matériaux minéraux soumis à des déformations mécaniques telles que la translation, la flexion ou la torsion. Cette approche trouve des applications variées telles que les capteurs, les actionneurs, les transformateurs ou les générateurs électriques.

Ce mémoire traite spécifiquement le générateur électrique qui vise à récupérer l'énergie à partir de sources mécaniques provenant de contraintes issues du poids de l'humain. Pour atteindre cet objectif, nous abordons le phénomène piézoélectrique d'un point de vue physique et mathématique.

Ainsi, il est structuré en trois chapitres, accompagnés d'une introduction, d'une conclusion et de références bibliographiques. Le premier chapitre retrace les principes fondamentaux de la piézoélectricité, en présentant son historique, les phénomènes impliqués, la classification des matériaux et quelques exemples d'applications.

Dans le deuxième chapitre, nous développons deux modèles couplés : un modèle électrostatique et un modèle mécanique. Le modèle électrostatique repose principalement sur le phénomène de polarisation et l'application du théorème de Gauss. Quant au modèle mécanique, il fait appel aux concepts de résistance des matériaux, de tenseur de Cauchy et de loi de Hooke pour exprimer la déformation en fonction de la contrainte. En utilisant le principe thermodynamique de Gibbs, nous établissons le couplage entre les modèles électrostatique et mécanique, ce qui nous permet d'obtenir un modèle électromécanique (ou piézoélectrique) de base.

Dans le but de concrétiser le travail de modélisation établi, on présente dans le troisième chapitre une application d'un sol piézoélectrique destiné à la récupération d'énergie électrique issue de la marche des êtres vivants.

1^{re} chapitre

I Généralité sur la piézoélectricité

I-1 Introduction

Dans cette première partie, nous présentons un aperçu complet de la piézoélectricité. Nous effectuons une synthèse qui couvre la description des phénomènes impliqués, les divers effets physiques, en mettant l'accent sur la polarisation, ainsi que les différents types de matériaux piézoélectriques tels que les céramiques, les polymères et les cristaux. En outre, nous abordons quelques applications qui exploitent ces matériaux.

I-2 La piézoélectricité

I-2-1 Historique

La piézoélectricité a été découverte en 1817 par l'abbé René Just Haüy, qui a observé que certains minéraux produisaient une polarisation électrique sous contraintes mécaniques.

En 1880, les frères Pierre et Jacques Curie ont découvert le phénomène de piézoélectricité en étudiant la polarisation électrique des cristaux de quartz, topaze, tourmaline sous contraintes mécaniques. Gabriel Lippmann a ensuite démontré que le phénomène était réversible et a établi mathématiquement la théorie des cristaux piézoélectriques en utilisant le principe fondamental de la thermodynamique. Si des signaux électriques sont appliqués sur le cristal, il se dilate et se comprime dans une certaine direction, favorisant les vibrations à une fréquence donnée. Les frères Curie ont également confirmé l'existence de l'effet piézoélectrique inverse en apportant une preuve quantitative de la réversibilité complète de la déformation électro-élasto-mécanique dans les cristaux piézoélectriques.

En 1917, Paul Langevin a eu l'idée d'utiliser des lames de quartz piézoélectriques pour créer des ondes ultrasonores qui pourraient être utilisées pour détecter des sous-marins ennemis. Cette invention, appelée "Sonar", a utilisé les effets piézoélectriques direct et inverse pour détecter les tensions électriques alternatives produites par les ultrasons.

En 1918 Walter G. Cady, réalisa le premier oscillateur électronique stabilisé par un cristal de quartz. Il établit le schéma électrique équivalent du résonateur piézoélectrique. Dès lors, la piézoélectricité devint l'associée de l'électronique naissante. Elle permit la génération de fréquences électriques, donc d'échelles de temps, extrêmement stables.

Pendant la seconde guerre mondiale la piézoélectricité a connu un développement majeur, lorsque cinquante millions de résonateurs à quartz piézoélectriques ont été produits aux États-Unis. Dès lors, des recherches ont été menées pour élaborer différents matériaux piézoélectriques, tels que des cristaux synthétiques et des céramiques ferroélectriques.

En 1954, les zircono titanates de plomb (PZT) ont été développés et ont rapidement remplacé les autres familles de composés piézoélectriques en raison de leurs propriétés supérieures. [1]

De 1965 à 1985, le Japon joue un rôle prépondérant et insufflé un certain renouveau. La collaboration université-industrie débouche sur la création de nouvelles applications et de nouveaux marchés pour le grand public. Elles se situent surtout dans le domaine de l'électronique avec la création de filtres à onde acoustique de surface (SAW) présents dans les télévisions, les radios, les équipements de communications, etc. sur la base de matériaux tels que LiNbO_3 et LiTaO_3 . On peut aussi noter leur utilisation dans le domaine de l'électronique haute fréquence avec la réalisation de dispositifs à base de films semi-conducteurs piézoélectriques mais aussi de polymères piézoélectriques. [2]

Depuis 1985 jusqu'à aujourd'hui, les industriels du monde entier ont été influencés par le succès commercial des entreprises japonaises dans le domaine des produits miniaturisés. Cette prise de conscience a stimulé un nouvel élan dans le développement de ces types de produits. En parallèle, la recherche de nouvelles applications et l'objectif de créer des systèmes miniaturisés ont conduit à de nombreuses avenues de recherche. C'est ainsi que la piézoélectricité a fait son entrée dans le domaine des micro-nanotechnologies.

I-2-2 Définition

Le terme "piézoélectricité" provient d'un mot grecs "piezein", qui signifie "presser ou appuyer". La piézoélectricité se réfère à la propriété que certains matériaux possèdent, à savoir la capacité de se polariser électriquement sous l'effet d'une contrainte mécanique, et réciproquement, de se déformer lorsqu'un champ électrique leur est appliqué. Les deux effets sont interdépendants, le premier étant appelé effet piézoélectrique direct et le second, effet piézoélectrique inverse.

I.2.2.1 Effet direct de la piézoélectricité

Lorsqu'une force est appliquée à un matériau piézoélectrique, cela engendre des contraintes mécaniques qui provoquent des déformations de sa structure cristalline. Ces déformations entraînent des déplacements relatifs des charges électriques des ions, ce qui se traduit par une polarisation électrique dans le matériau. En d'autres termes, l'état électrostatique du matériau est modifié par une action mécanique, et cela constitue l'effet piézoélectrique direct.



Figure I-1 : Effet direct de la piézoélectricité

I.2.2.2 Effet inverse de la piézoélectricité

Lorsqu'un champ électrique extérieur est appliqué à un matériau piézoélectrique, cela crée des forces électrostatiques sur les charges électriques liées aux molécules du cristal, entraînant ainsi leur déplacement relatif et la création de déformations dans le matériau. En d'autres termes, l'état mécanique du matériau est modifié par une action électrostatique, et cela constitue l'effet piézoélectrique inverse.



Figure I-2 : Effet inverse de la piézoélectricité

I-2-3 Polarisation des piézoélectriques

Le phénomène piézoélectrique apparaît par la déformation mécanique du dipôle élémentaire de la maille cristalline. Le matériau piézoélectrique est très souvent sous forme poly-cristalline, que ce soit en massif ou en couches minces. Ainsi, à l'état naturel ou après élaboration, les dipôles électriques sont orientés de façon aléatoire et le matériau ne présente aucun effet piézoélectrique. Pour ce faire, il est nécessaire de procéder à une étape dite de polarisation qui consiste à appliquer un champ électrique intense afin d'orienter les polarisations des microcristaux dans la même direction [3]

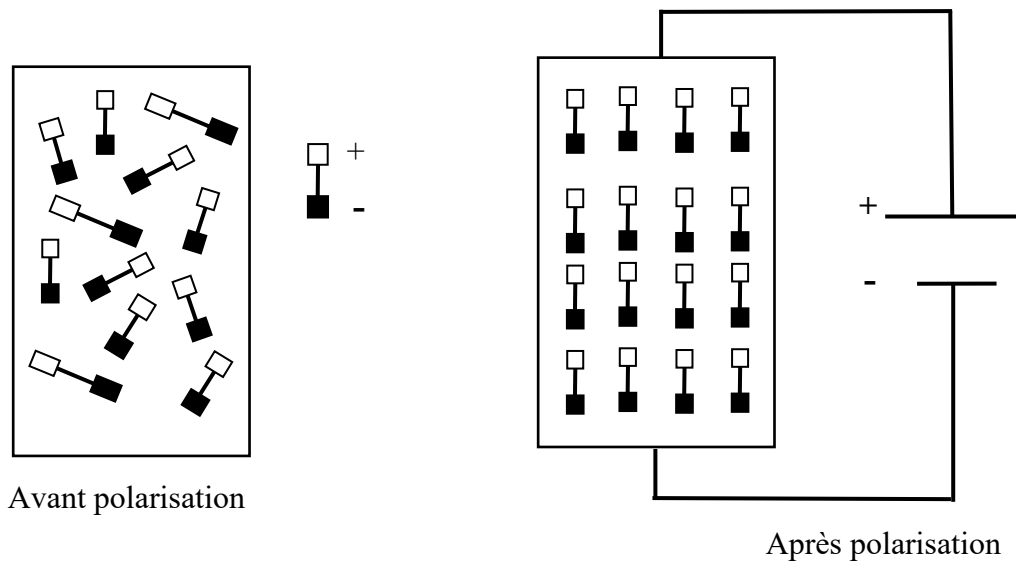


Figure I-3 : Polarisation par application d'un champ électrique dans les matériaux

I-3 Principales catégories de matériaux piézoélectriques

Pendant la deuxième guerre mondiale, des recherches sont menées sur le phénomène piézoélectrique. Elles montrent que certains matériaux piézoélectriques ont des constants diélectriques importants. Parmi ces différents matériaux, trois types sont distingués : les polymères, les céramiques et les cristaux [4]

I-3-1 Cristaux

Le cristal piézo-électrique le plus connu est le quartz mais ses propriétés sont peu attrayantes pour les applications de transducteurs médicaux : son impédance acoustique est relativement élevée et son coefficient de couplage très faible. D'autres cristaux, tel que le niobate de lithium (LiNbO_3) ou le tantalate de lithium (LiTaO_3) affichent des valeurs de KT plus élevées. Le coût élevé et la fragilité de ces cristaux expliquent que l'on ne les retrouve que très peu dans les produits actuels. Ils sont cependant utilisés en laboratoire dans des dispositifs à très haute résolution pour des raisons essentiellement technologiques [5]

I-3-2 Céramiques

Les céramiques piézo-électriques sont les matériaux les mieux adaptés à l'heure actuelle pour une utilisation échographique et entrent également dans la fabrication des composites que nous décrivons plus loin. Ce succès peut sembler paradoxal car, bien que les valeurs de KT soient élevées, leur impédance acoustique est bien plus élevée que celle des tissus biologiques. Il est dû au fait que ces matériaux sont d'un coût relativement faible, qu'ils sont usinables et faciles à transformer et surtout qu'ils offrent un éventail très large de performances. Parmi les céramiques les plus utilisées dans l'industrie on trouve la famille des

PZT (plomb, zirconate, titanate). Le piézoélectrique à base de PZT fait l'objet de la section suivant. [1]

I-3-3 Polymère PVDF

Certains polymères tel que le PVDF (PolyVinylDiFluorure) et des copolymères tel que les P(VDF-TrFE) peuvent acquérir des propriétés piézo-électriques. Ils se caractérisent par une faible impédance acoustique et sont donc supérieurs. Cependant jusqu'à une période récente, leurs coefficients de couplage étaient bien plus faibles que ceux des céramiques. L'amélioration des procédés de fabrication et plus particulièrement ceux des copolymères a abouti à des valeurs de KT de l'ordre de la moitié de ceux obtenus avec des céramiques. Les transducteurs à base de copolymères ont aujourd'hui des performances qui s'approchent de celles des capteurs à céramiques. Ils sont essentiellement utilisés dans les dispositifs haute fréquence à cause d'avantages technologiques. Quelques barrettes expérimentales fonctionnant au-dessus de 7MHz ont été réalisées, on peut les trouver dans des transducteurs pour l'échographie ophtalmologique, cutanée ou intravasculaire. Ils se prêtent bien, en outre, à une miniaturisation des sondes [6]

I-3-4 Composites piézoélectriques

Ces matériaux, d'abord développés pour des applications sonar, ont fait leur apparition au début des années 80 et représentent l'avancée majeure dans le domaine des matériaux piézo-électriques, depuis l'apparition des PZT dans les années 60. Leur origine provient du constat selon lequel aucun matériau existant n'avait à la fois une impédance acoustique assez faible pour bien transmettre son énergie aux tissus biologiques et une valeur de KT élevée. En effet, les céramiques souffrent d'une impédance acoustique trop élevée et les polymères d'une valeur de KT trop faible. L'idée est donc née qu'il fallait utiliser à la fois une céramique à KT élevée, associée à un matériau passif de faible impédance acoustique de sorte que le matériau résultant ait une impédance acoustique plus faible tout en gardant un KT comparable avec celui d'une céramique [7]

I-4 Applications de la piézoélectricité

Les domaines d'application des matériaux piézoélectriques sont de plus en plus nombreux et variés avec le temps. Voici un tableau résumant les domaines d'application de la piézoélectricité en fonction de l'effet utilisé :

Tableau I-1 : Différentes applications [8]

Effet piézoélectrique direct	Générateurs d'impulsion haute tension et micro générateurs	• Allumage des explosifs • Allumage des gaz • Chaussures piézoélectriques • Touches piézoélectriques d'un clavier d'ordinateur • Pavée, des dalles qui produisent de l'électricité en marchant dessus • Smartphone piézoélectrique flexible
	Capteurs	• Microphones • Télécommande • Accéléromètres • Jauges de dureté, de contraintes
Effet piézoélectrique inverse	Transducteurs ultrasonores de puissance	• Perçage et soudage par ultrasons • Nettoyage ultrasonore • Projecteur sonar
	Dispositifs de positionnement	• Contrôle des mouvements en mécanique • Actuateurs pour positionnement des miroirs • Moteurs piézoélectriques • Imprimante à jet d'encre
Effets direct et inverse	Transducteurs ultrasonores de faible puissance	• Contrôle non destructif • Lignes à retard Filtres électromécaniques • Capteurs sonar • Diagnostic médical

I-5 Les fonctions de la piézoélectricité

I-5-1 Transformateur

Les transformateurs piézoélectriques sont constitués d'une céramique piézoélectrique sur laquelle sont déposées des électrodes. Ces électrodes constituent alors le primaire et le secondaire du transformateur. En excitant le primaire avec une tension sinusoïdale à la résonance du transformateur, une onde stationnaire va s'établir dans la structure. La déformation va alors induire une tension sur les électrodes du secondaire. Le rapport de transformation, et plus généralement les performances du transformateur, dépendent alors de la géométrie et des modes de vibration mis en jeu au primaire et au secondaire. [9]

I-5-2 Capteur

Le capteur piézoélectrique est couramment utilisé comme détecteur de chocs ou de percussions, car il peut capter les vibrations mécaniques qui sont converties en signal électrique. Plusieurs types de capteurs piézoélectriques peuvent être utilisés pour différentes

applications, tels que des capteurs de vitesse, de force, de pression, d'ultrasons, de proximité, ou encore des capteurs de vibration. En captant les vibrations et en les transformant en signaux électriques, ces capteurs piézoélectriques peuvent être utilisés pour une variété de fonctions, allant de la mesure de la pression acoustique à la détection de mouvements et à la surveillance de structures.

I-5-3 Actionneur

Actionneur piézoélectrique est très utilisé dans le monde industriel. Cependant, le transfert entre la tension appliquée aux bornes du matériau et la déformation de celui-ci n'est cependant pas linéaire. Il est alors nécessaire de développer des commandes adaptées à ce type d'actionneur, en particulier pour compenser les non-linéarités. [10]

I-5-4 Générateur

Le principe d'un macro-générateur piézoélectrique est la déformation d'un matériau piézoélectrique de façon à transformer l'énergie mécanique en énergie électrique. Ce type de conversion d'énergie sera étudié plus profondément dans le chapitre suivant, cette thèse portant sur des générateurs piézoélectriques.

La structure habituelle des générateurs piézoélectriques est une poutre encastree libre, une couche de matériau piézoélectrique déposée et une masse sismique pour réduire la fréquence de résonance Figure I.4 : [3]

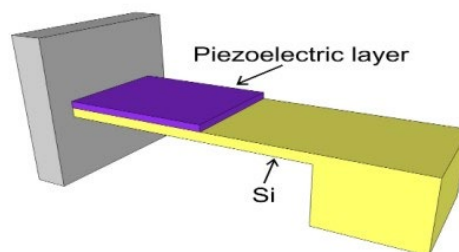


Figure I-4 : Structure d'un micro générateur d'un piézoélectrique

I-6 Conclusion

Au cours de ce chapitre, nous avons retracé l'origine du phénomène de la piézoélectricité et de ces effets direct et inverse. Nous avons également abordé les propriétés diélectriques et les différents effets physiques d'une polarisation. Plusieurs applications, dans différents domaines, mettant en œuvre les matériaux piézoélectriques ont été présentés. De plus, nous avons examiné diverses applications des matériaux piézoélectriques dans différents domaines. Dans le prochain chapitre, nous approfondirons la modélisation de la piézoélectricité en étudiant les modèles électrostatique et mécanique, ainsi que leur couplage.

2^{ème} chapitre

II - Modélisation du phénomène piézoélectrique

II-1 Introduction

La modélisation du phénomène piézoélectrique nécessite la prise en compte du phénomène électrostatique et du phénomène mécanique. Le modèle électrostatique utilise le théorème de Gauss et la polarisation dans les milieux anisotropes, tandis que le modèle mécanique s'appuie sur la résistance des matériaux et la thermodynamique, en utilisant des notions de tenseurs. Une fois les deux modèles établis, le couplage électromécanique décrit le phénomène piézoélectrique en tenant compte des interactions entre les variables électriques et mécaniques.

II-2 Les équations de maxwell

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{D} = \rho \\ \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

II-1 Model électrostatique

II-1-1 Hypothèse

Le modèle électrostatique du phénomène piézoélectrique repose sur des hypothèses simplificatrices, notamment celle selon laquelle le matériau piézoélectrique est linéaire, isotrope et homogène. On suppose également qu'il est sans pertes, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de dissipations d'énergie électrique. Ces hypothèses permettent de simplifier les calculs des systèmes idéaux.

Cependant, il est important de noter que dans certaines situations, des modèles plus complexes prenant en compte l'anisotropie, l'hétérogénéité ou les pertes d'énergie peuvent être nécessaires pour une modélisation plus précise du phénomène piézoélectrique. Malgré cela, le modèle électrostatique basé sur ces hypothèses reste une approche courante et utile pour comprendre et prédire les comportements électromécaniques des matériaux piézoélectriques.

II-1-2 Théorème de Gauss dans le vide

En exploitant la version locale du théorème de Gauss (équation de Maxwell-Gauss), le champ électrique E (V/m) s'exprime en tout point de l'espace où la densité volumique de charge est ρ (cm^3) [1] par :

$$\operatorname{div}(\varepsilon_0 E) = \rho \quad (\text{II.2})$$

$\varepsilon_0 = 10^{-19} / 36\pi$: permittivité du vide en F/m

En appliquant la formule d'Ostrogorski à l'équation (II.1) :

$$\iiint_{\partial\tau} \text{div}(\varepsilon_0 \vec{E}) \partial\tau = \iiint_{\partial\tau} \rho \partial\tau \quad (\text{II.3})$$

On obtient :

$$\iint_{\partial S} \vec{E} \cdot \vec{n} \partial S = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad (\text{II.4})$$

Le flux du champ électrique à travers une surface ∂S fermée est égale la somme des charges Q contenues dans le volume $\partial\tau$ délimité par cette surface divisée par la permittivité diélectrique du vide [1]

II-1-3 Polarisation

Le champ de polarisation P caractérise le déplacement des charges positives par rapport aux charges négatives dans un matériau. Sa variation non uniforme conduit à un excès de charges positives hors du volume considéré, ce qui peut être quantifié par la densité volumique de charge de polarisation ρ_p . Cette densité de charge de polarisation représente la quantité de charge électrique induite par la polarisation à l'intérieur du matériau :

$$\text{div} \vec{P} = -\rho_p \quad (\text{II.5})$$

Par rapport au vide, il peut exister deux types de charges électriques : les charges liées et les charges libres. Les charges liées sont issues de la polarisation induite par un champ électrique externe et sont représentées par la densité volumique de charge de polarisation ρ_p . Elles sont déplacées à l'intérieur du matériau mais ne peuvent pas se déplacer librement.

Les charges libres sont originaires de la polarisation permanente du matériau et peuvent se déplacer librement à l'intérieur du matériau. Elles sont caractérisées par la densité volumique de charge ρ . L'équation (II.1) devient dans le cas d'un milieu matériel comme suit :

$$\text{div}(\varepsilon_0 \vec{E}) = \rho + \rho_p \quad (\text{II.6})$$

En combinant les équation (II.5) et (II.6), on obtient :

$$\text{div}(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho \quad (\text{II.7})$$

Cette équation permet de définir le champ d'induction électrique $\vec{D}$ par :

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (\text{II.8})$$

En remplaçant l'équation (II.8) dans l'équation (II.7), on aboutit à l'équation de maxwell-gauss :

$$\text{div } \vec{D} = \rho \quad (\text{II.9})$$

Cette équation est le résultat de l'application du théorème de Gauss sous forme locale à un milieu matériel diélectrique.

II-1-4 Loi de comportement

On a :

$$\vec{E}_{pol} = \chi \vec{E} = \frac{\vec{P}}{\epsilon_0} \quad (\text{II.10})$$

où :

$\vec{E}_{pol}$: champ électrique lié à la polarisation et le champ E

χ : susceptibilité électrique

Relation entre la polarisation P et le champ E :

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E} \quad (\text{II.11})$$

En induisant l'équation (II.11) dans (II.8), on obtient :

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \chi \vec{E} = \epsilon_0 \vec{E} (\chi + 1) \quad (\text{II.12})$$

Cette équation nous a permis de définir la permittivité électrique relative ϵ_r du milieu donc :

$$\epsilon_r = 1 + \chi \quad (\text{II.13})$$

Le champ d'induit électrique D peut s'écrire en fonction de champ électrique E comme suit :

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (\text{II.14})$$

ϵ : permittivité diélectrique

Le théorème de Gauss dans un milieu matériel peut s'écrire de la manière suivante :

$$\iint_{ds} \vec{D} \cdot \vec{n} ds = Q \quad (\text{II.15})$$

II-1-5 Condition de passages

En utilisant la formule (II.15) de Gauss et en se référant à la géométrie cubique illustrée dans la Figure (II.1), on peut réécrire l'expression en exprimant le premier terme en fonction des surfaces latérales (Sh) et de base (Sb) de la manière suivante :

$$\iint_{ds} \vec{D} \cdot \vec{n} ds = \iint_{ds(h)} \vec{D} \cdot \vec{n} ds_h + \iint_{ds(b)} \vec{D} \cdot \vec{n} ds_b \quad (\text{II.16})$$

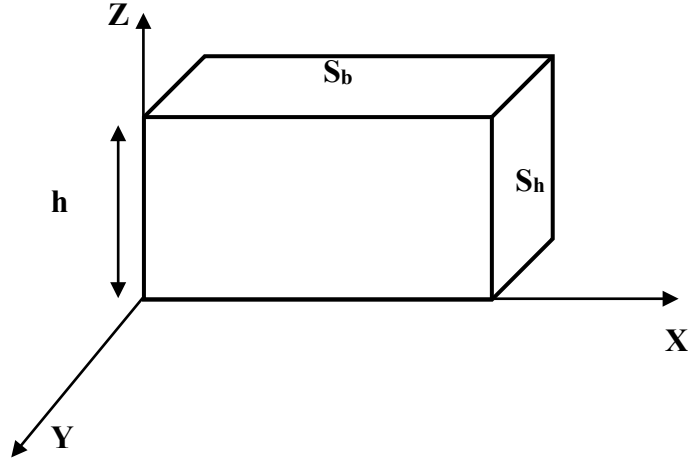


Figure II-1 : Représentation d'une géométrie cubique d'un milieu matériel

Lorsque h tend vers zéro, la surface latérale devient nulle.

$$\iint_{ds} \vec{D} \vec{n} ds = \iint_{ds(b)} \vec{D} \vec{n} ds_b = (\vec{D}_2 \vec{n}_{21} - \vec{D}_1 \vec{n}_{12}) S_b \quad (\text{II.17})$$

En combinant l'équation II.16 et II.17, on obtient l'équation suivante :

$$(\vec{D}_2 \cdot \vec{n}_{21} - \vec{D}_1 \cdot \vec{n}_{12}) S_b = Q$$

(II.18)

En utilisant la notation :

$$\sigma = \frac{Q}{S} \quad (\text{II.19})$$

σ : Densité surfacique de charges libres

$$n = n_2 = -n_1 \quad (\text{II.20})$$

n : Composante normale de la surface dirigée de 1 vers 2

$$(\vec{D}_1 - \vec{D}_2) \cdot \vec{n} = \sigma \quad (\text{II.21})$$

Par conséquent, il y a continuité de la composante tangentielle équation (II.21) et discontinuité de la composante normale équation (II.22) de l'induction électrique lors du passage à travers la surface de séparation.

$$D_{n2} - D_{n1} = \sigma \quad (\text{II.22})$$

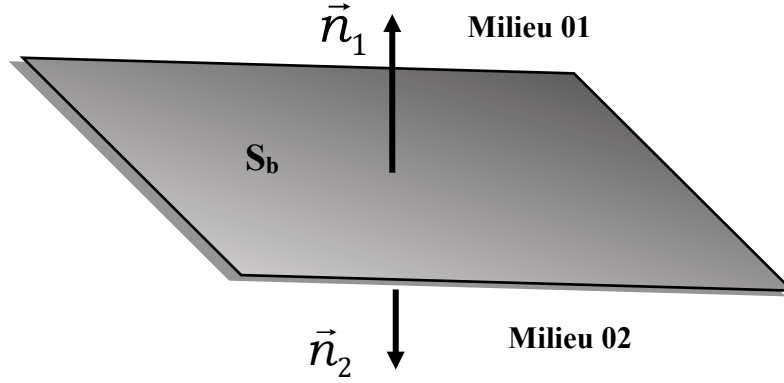


Figure II-2 : Surface de séparation entre deux milieux

II-1-6 Potentiel vecteur électrique V

L'équation de Maxwell-Faraday dans un milieu matériel s'écrit comme suit :

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{II.23})$$

Et dans l'hypothèse d'électrostatique, le potentiel vecteur électrique V et le champ électrique sont considérés comme nuls ce qui conduit à éliminer le second membre de l'équation précédente donc cette dernière devient :

$$\text{rot} \vec{E} = 0 \quad (\text{II.24})$$

En électrostatique, le champ électrique est irrotationnel et peut être décrit comme le gradient d'un potentiel électrostatique V telle que :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V \quad (\text{II.25})$$

On dit que, le champ électrique E dérive du potentiel électrique vecteur V.

II-1-7 Tenseur de déplacement électrique

Dans un matériau piézoélectrique anisotrope, la permittivité diélectrique est représentée par un tenseur d'ordre 2 pour tenir compte des variations de la relation entre le champ électrique appliqué et l'induction électrique résultante dans différentes directions.

Soit un volume représenté par un repère orthonormé (O,x,y,z), la relation diélectrique peut s'écrire :

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \quad (\text{II.26})$$

Si on note les repères par 1,2 et 3 on obtient :

$$\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} \quad (\text{II.27})$$

II-2 Model mécanique

II-2-1 Hypothèses

En mécanique, un matériau piézoélectrique utilise effectivement les notions de Résistance des Matériaux (RDM) pour décrire ses propriétés mécaniques et répondent aux hypothèses selon lesquelles le milieu doit être :

- **Homogène** : les propriétés macroscopiques doivent être les mêmes en tous points du volume et le matériau doit être de même nature dans toute sa masse.
- **Linéaire** : les déformations doivent être proportionnelles aux contraintes.
- **Anisotrope** : l'excitation suivant une direction doit donner naissance à des effets orientés dans l'autre direction.
- **Elastique** : la forme doit reprendre son état initial après un cycle de fonctionnement (chargement et déchargement). Cela s'oppose à la plasticité.

II-2-2 Action mécanique et force

L'action mécanique est l'effet qu'une force exerce sur un corps physique. Elle est décrite par la loi de Newton, qui exprime que si une force agit sur un objet, cet objet va subir une modification sur sa vitesse ou de le maintenir au repos et de le déformer. Ce concept regroupe les notions de force et de couple utilisées en mécanique générale.

On peut classer les actions mécaniques en deux grandes familles :

- **Les actions à distance** : Le poids et les forces électromagnétiques.
- **Les actions de contact** : résultant du contact entre deux objets.

De l'action mécanique, il en résulte ce qui suit :

- Traction ou compression
- Cisaillement
- Torsion
- Flexion

II-2-3 Contrainte

La contrainte détermine l'intensité de l'écartement ou de la compression des atomes du matériau. Pour une traction simple, cette grandeur correspond à la force qui agit sur chaque unité de surface du matériau. Ainsi, la contrainte est une mesure de la répartition des forces à

l'intérieur d'un matériau soumis à une sollicitation, et peut être utilisée pour évaluer sa résistance à la déformation ou à la rupture.

La contrainte est une densité surfacique de force exprimée en $[N/m^2]$, tel que :

$$T = \frac{F}{s} \quad (II.28)$$

F : La force en N

s : La surface en m^2

II-2-4 Déformation

Lorsqu'un corps est soumis à une contrainte, il subit des changements de forme, de position et d'orientation. Les déformations correspondent aux variations locales de forme en chaque point du matériau, indépendamment de sa nature et de ses propriétés de résistance. Elles permettent de caractériser l'impact de la sollicitation mécanique sur la structure du matériau.

Pour une traction simple, la déformation correspond au rapport entre l'allongement subi par le matériau et sa longueur initiale :

$$S = \frac{\Delta l}{l_0} \quad (II.29)$$

La capacité d'une pièce à se déformer et à résister aux efforts dépend de Trois paramètres :

- La forme de la pièce.
- La nature du matériau.
- Des processus de fabrication : traitement thermique, traitement de surface, etc

II.2.4.1 Mode de déformation

II.2.4.1.1 Déformation élastique

Elle est sensiblement proportionnelle à la force qui la provoque et qui disparaît après la suppression des charges qui l'ont provoquée (déformation réversible) [11]

II.2.4.1.2 Déformation plastique

Lorsqu'on applique une force (traction, compression ou cisaillement) à un corps, celui-ci commence par se déformer de manière réversible (déformation élastique) jusqu'à une force limite où une partie de la déformation subsiste lorsque l'action extérieure cesse. Cette déformation est irréversible et elle est la conséquence d'un réarrangement des éléments constitutifs du matériau. [11]

II.2.4.2 Types de déformation

II.2.4.2.1 Traction et compression

La traction et la compression sont des actions qui consistent à appliquer des forces égales et opposées aux extrémités du matériau, le long d'une même ligne. La traction provoque un allongement du matériau, tandis que la compression provoque une réduction de sa longueur.

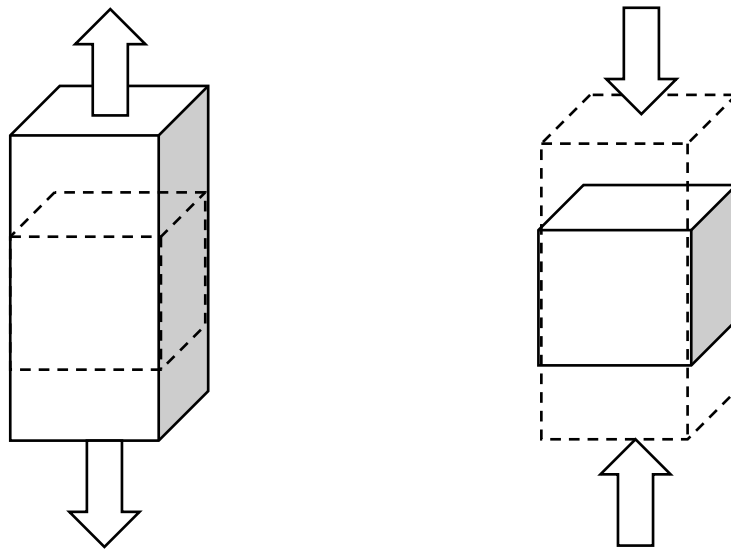


Figure II-3 : Exemple Traction et Compression

II.2.4.2.2 Cisaillement

La contrainte de cisaillement, également appelée contrainte tangentielle, due à la force qui s'exerce sur un objet dans une direction parallèle à sa surface.

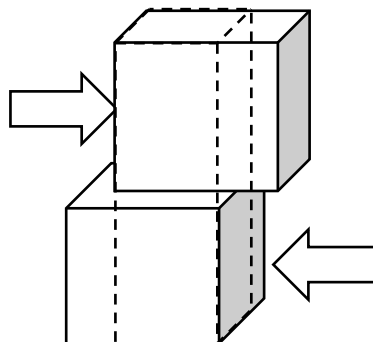


Figure II-4 : Exemple du Cisaillement

II.2.4.2.3 Torsion

La torsion est une sollicitation mécanique qui affecte un corps soumis à un couple de forces opposées agissant dans des plans parallèles. Le moment de force résultant agit alors dans

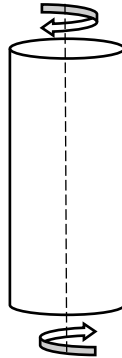


Figure II-5 : Barre soumise à la torsion

l'axe de la poutre, provoquant une déformation de torsion qui se traduit par un changement de l'angle de rotation de la section transversale du matériau

II.2.4.2.4 Flexion

La flexion correspond à la déformation d'un objet qui se manifeste par une courbure lorsqu'une force est appliquée. Dans le cas d'une poutre, cette déformation se traduit par une tendance à rapprocher les deux extrémités de la poutre.

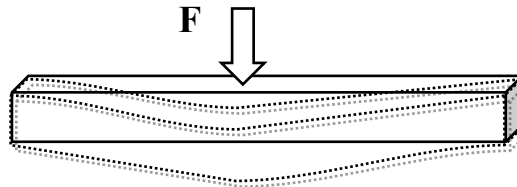


Figure II-6 : Exemple de flexion

II-2-5 Relation entre les contraintes et les déformations

La déformation et la contrainte sont deux concepts importants en mécanique des matériaux. La déformation fait référence à la modification de la forme d'un matériau en réponse à une charge ou une force appliquée, tandis que la contrainte mesure la force appliquée par unité de surface sur le matériau. Et cette relation est décrite par la loi de Hooke qui établit que la contrainte appliquée sur un matériau est proportionnelle à la déformation qu'il subit.

Cette relation entre la déformation S et la contrainte T on peut l'exprimer avec une équation mathématique :

$$T = cS \quad (\text{II.30})$$

c : Module de Young

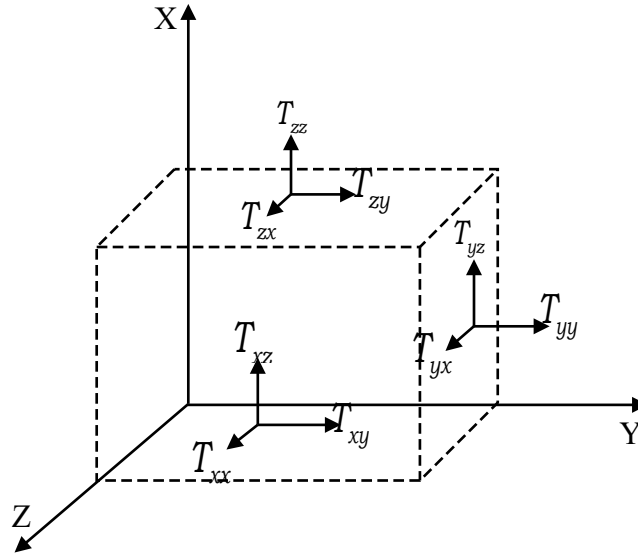


Figure II-7 : Les composantes du tenseur des contraintes

Cette relation montre que plus la contrainte appliquée sur un matériau est grande, plus la déformation qu'il subit est importante. En outre, la loi de Hooke montre que la relation entre la déformation et la contrainte est linéaire pour les matériaux élastiques. Cependant, pour les matériaux plastiques, la relation entre la déformation et la contrainte peut être non linéaire et dépendante du temps.

II-2-6 Tenseur

II.2.6.1 Définition

Un tenseur est un objet mathématique utilisé dans divers domaines, tels que les mathématiques, la physique. Il peut être considéré comme une généralisation des concepts de vecteur et de matrice.

II.2.6.2 Tenseur de déformation

Les corps solides subissent des déformations sous l'influence de forces externes, ce qui entraîne des changements de forme et de volume. Les déformations d'un objet sont couramment mesurées à partir d'une position initiale, qui correspond à la position de repos de l'objet lorsqu'aucune force n'est appliquée. Les composants du tenseur des déformations sont généralement définis par la relation suivante :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \text{ Avec } (x_1 = x ; x_2 = y ; x_3 = z) \quad (\text{II.31})$$

Le tenseur de déformation symétrique s'écrit :

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \quad (\text{II.32})$$

Les termes diagonaux de ce tenseur représentent les déformations d'élongation, indiquant les changements de longueur le long des axes x , y et z . Les termes non-diagonaux, notés ε_{xy} , ε_{yz} , ε_{zx} , représentent les variations d'angles entre les axes Ox , Oy et Oz .

Les composantes de la déformation sont exprimées sous forme de rapports de longueurs, ce qui signifie qu'elles n'ont pas de dimension propre.

II.2.6.3 Tenseur des contraintes

Les tenseurs des contraintes sont des outils mathématiques qui permettent d'analyser le comportement mécanique des matériaux en fonction des forces appliquées.

On va exprimer la force pour un point M en fonction du tenseur des contraintes $T(M)$ tel que :

$$d\vec{F} = \underline{T}(M)\vec{n} ds \quad (\text{II.33})$$

ds : Élément de section

La contrainte appliquée sur le matériau est en fonction du tenseur de la contrainte :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \underline{T}(M)\vec{n} \quad (\text{II.34})$$

Le vecteur de contrainte se décompose en une composante de contrainte normale, qui correspond à une sollicitation de type traction-compression, et une composante de contrainte tangentielle, qui correspond à une sollicitation de glissement ou de cisaillement :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \underline{T}_t(M)\vec{t} + \underline{T}_n(M)\vec{n} \quad (\text{II.35})$$

$\vec{t}$: Vecteur unitaire tangent à la surface

$\vec{n}$: Vecteur perpendiculaire à la surface

On note que σ est également représentée par une matrice 3×3 symétriques

$$\underline{T} = \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix} \quad (\text{II.36})$$

T_{ii} : représente les composantes normales de la contrainte

$T_{ij} (i \neq j)$: représente les composantes tangentielles

Les éléments diagonaux du tenseur représentent les composantes normales principales et correspondent aux valeurs propres du tenseur. Les éléments non-diagonaux du tenseur

représentent les composantes tangentielle. Il convient de noter que ces composantes tangentielles sont symétriques par paires (tenseur symétrique) : $T_{ij} = T_{ji}$ pour $i \neq j$

Le premier indice (i) indique la direction de la force et le deuxième indice (j) indique la normale à la facette sur laquelle cette force est appliquée

Les composantes T_{ii} sont appelées contraintes normales, car elles agissent perpendiculairement à une facette de normale 0x, Oy ou Oz. Les éléments $i \neq j$ sont les contraintes tangentielles puisqu'elles agissent dans le plan de la surface. Les composantes de la contrainte ont la dimension d'une force par unité de surface ou d'une énergie par unité de volume. [12]

Pour éliminer l'utilisation des variables x, y et z, on peut remplacer respectivement x par 1, y par 2 et z par 3 dans les indices i et j. Cela permet d'exprimer les directions sans recourir explicitement aux variables x, y et z, simplifiant ainsi la notation du tenseur des contraintes, on va le récrire sous la forme suivante :

$$\underline{T} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} \quad (\text{II.37})$$

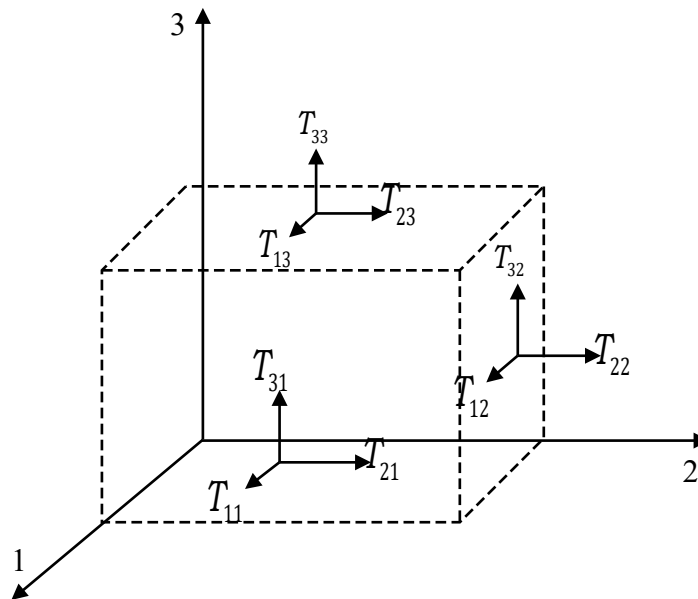


Figure II-8 : les composantes du tenseur des contraintes

Ce tenseur contient neuf (09) composants, mais en raison de sa symétrie, seuls six (06) composants sont pris en compte.

$$\underline{T} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ & T_{22} & T_{23} \\ & & T_{33} \end{pmatrix} \quad (\text{II.38})$$

Pour simplifier la notation et éliminer les indices doubles, on utilise la notation de Voigt, qui implique l'application de la règle de contraction des indices.

Tableau II-1 : Correspondance entre les notations tensorielles et celles de Voigt.

	Tensorielle ($i, j = 1, 2, 3$)	Voigt ($k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$)
Notation	T_{11}	T_1
	T_{22}	T_2
	T_{33}	T_3
	T_{23}	T_4
	T_{13}	T_5
	T_{12}	T_6

Il est possible de passer d'une représentation tensorielle (3×3) à une représentation vectorielle dans un espace à 6 dimensions en utilisant la notation de Voigt. Cette représentation vectorielle est obtenue en regroupant les contraintes de translation le long des axes 1, 2 et 3 en T1, T2 et T3, respectivement, et les contraintes d'équilibre de rotation autour des axes 1, 2 et 3 en T4, T5 et T6, comme illustré dans la figure II.9. Le tenseur des contraintes devient un vecteur de six composantes.

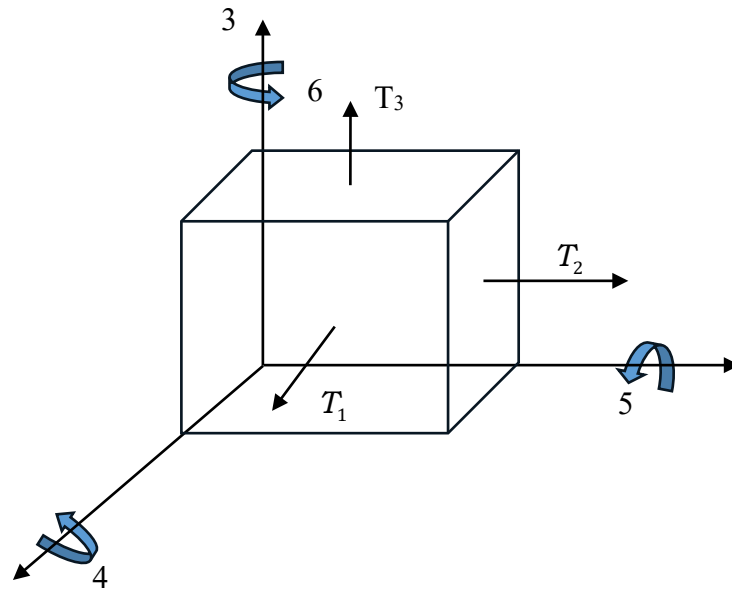


Figure II-9 : Directions des contraintes dans un cube

Tableau II-2 : Passage de la représentation tensorielle vers une représentation vectorielle

$(11) \Leftrightarrow (1)$	$(22) \Leftrightarrow (2)$	$(33) \Leftrightarrow (3)$
$(23) + (32) \Leftrightarrow (4)$	$(13) + (31) \Leftrightarrow (5)$	$(21) + (12) \Leftrightarrow (6)$

$$\underline{T} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow T = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{pmatrix} \quad (\text{II.39})$$

II.2.6.4 Relation entre les tenseurs de déformation et contrainte

La relation entre contraintes et déformations dans un corps parfaitement élastique est régie par la loi de Hooke, qui est une loi de comportement mécanique applicable à l'élasticité linéaire. Cette loi s'exprime en utilisant la notation de Voigt et pour des petites déformations, de la manière suivante: [13]

$$S_k = s_{kl} T_l ; k = \overline{1,6} \quad (\text{II.40})$$

s_{kl} sont des coefficients de souplesse ou de flexibilité. Ils traduisent la relation linéaire entre la déformation et la contrainte.

Les déformations dues aux contraintes de translations sont données par :

$$S_k = s_{kl} T_l \quad ; \quad k, l = 1, 2, 3 \quad (\text{II.41})$$

Les déformations dues aux contraintes de cisaillement sont données par :

$$S_k = 2s_{kl} T_l \quad ; \quad k, l = 4, 5, 6 \quad (\text{II.42})$$

L'équation suivante donne le passage de la notation tensorielle à la notation vectorielle.

$$S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow S = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{pmatrix} \quad (\text{II.43})$$

II-3 Couplage électromécanique

II-3-1 Approche thermodynamique

La piézoélectricité est un phénomène particulier de couplage entre les phénomènes élastiques et diélectriques d'un système, qui peut être expliqué à partir d'une approche thermodynamique. Selon les principes de la thermodynamique, les caractéristiques d'un système à l'équilibre peuvent être décrites par des variables extensives. Ces variables sont l'entropie η , la déformation $\mathbf{S}$ et la polarisation $\mathbf{P}$ du système. Ces trois grandeurs sont les paramètres du potentiel thermodynamique, dont les propriétés du système peuvent être déduites par des dérivations successives. Les autres potentiels thermodynamiques, qui dépendent de variables intensives, peuvent être obtenus en utilisant des transformations de Legendre. [14]

Les propriétés des matériaux piézoélectriques peuvent être modifiées par l'influence de la température, des contraintes mécaniques et des champs électriques. Ces variations se manifestent par des effets mécaniques, électriques ou thermiques. Il existe différentes relations thermodynamiques réversibles qui décrivent les liens entre les propriétés électriques, thermiques et mécaniques d'un cristal piézoélectrique sont représentées par le diagramme symbolique de la figure (III.1) [15]:

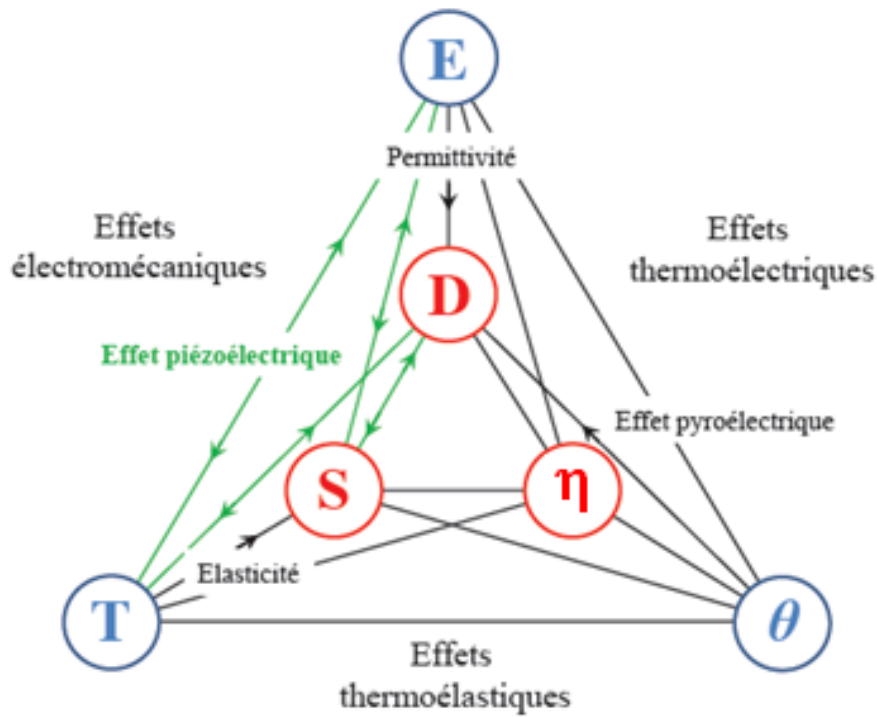


Figure II-10: Interactions entre les grandeurs physiques d'un matériau piézoélectrique

II-3-2 Relation de la piézoélectricité

La piézoélectricité est le résultat de l'interaction entre l'énergie électrique et l'énergie mécanique d'un matériau. Ces équations établissent une relation entre les variables mécaniques (déformation S ou contrainte T) et les variables électriques (induction électrique D ou champ électrique E). Dans un matériau piézoélectrique, l'induction électrique et les contraintes dépendent à la fois des déformations et du champ électrique. Différentes équations de couplage peuvent être formulées en fonction des paramètres choisis. [16]

Pour aborder ce sujet, nous allons considérer l'énergie libre de Gibbs qui est déterminée par des grandeurs intensives, notamment la température θ , le champ électrique E et les contraintes T . Son expression est la suivante :

$$G(\theta, E, T) = U - \theta\eta - T_{ij}S_{ij} - E_k D_k \quad (\text{II.44})$$

U : est l'énergie interne du système,

η : Entropie

Il n'est généralement pas nécessaire de prendre en compte la température (θ) dans la description thermodynamique de la piézoélectricité, car les effets de couplage thermique sont généralement négligeables. En d'autres termes, il n'est pas courant de faire une distinction entre les constantes piézoélectriques isothermes et adiabatiques.

Pour une transformation adiabatique et réversible, on a :

$$dU = T_{ij}dS_{ij} + E_k dD_k \quad (\text{II.45})$$

Dans ce cas, le principe thermodynamique de Gibbs s'exprime de la manière suivante :

$$dG = -S_{ij}dT_{ij} - D_k dE_k \quad (\text{II.46})$$

Si on développe le potentiel de Gibbs au premier ordre, on peut écrire :

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial T_{ij}} \right) dT_{ij} + \left(\frac{\partial G}{\partial E_k} \right) dE_k \quad (\text{II.47})$$

Par identification entre les équations (II.46) et (II.47), on en déduit :

$$\begin{cases} S_{ij} = - \left(\frac{\partial G}{\partial T_{ij}} \right)_E \\ D_k = - \left(\frac{\partial G}{\partial E_k} \right)_T \end{cases} \quad (\text{II.48})$$

En exprimant les dérivées totales de la déformation (S) et du déplacement électrique (D), nous obtenons les relations suivantes :

$$\begin{cases} dS_{ij} = - \left(\frac{\partial^2 G}{\partial T_{ij} \partial T_{kl}} \right)_E dT_{kl} - \left(\frac{\partial^2 G}{\partial T_{ij} \partial E_k} \right) dE_k \\ dD_k = - \left(\frac{\partial^2 G}{\partial E_k \partial T_{ij}} \right) dT_{ij} - \left(\frac{\partial^2 G}{\partial E_k \partial E_n} \right)_T dE_n \end{cases} \quad (\text{II.49})$$

Voici les expressions des coefficients de piézoélectricité :

$$\begin{cases} d_{ijk} = - \left(\frac{\partial^2 G}{\partial E_k \partial T_{ij}} \right) & (a) \\ s^E_{ijmn} = - \left(\frac{\partial^2 G}{\partial T_{ij} \partial T_{mn}} \right)_E & (b) \\ \epsilon^T_{kl} = - \left(\frac{\partial^2 G}{\partial E_k \partial E_l} \right)_T & (c) \end{cases} \quad (\text{II.50})$$

En introduisant, ces coefficients dans le système d'équations (II.48), on obtient :

$$\begin{cases} D_k = \epsilon^T_{kl} E_l + d_{knm} T_{mn} & (a) \\ S_{ij} = d_{ijl} E_l + s^E_{ijmn} T_{mn} & (b) \end{cases} \quad (\text{II.51})$$

Si on dérive à champ constant, l'équation (II.51.a) par rapport à la contrainte et à contrainte constante l'équation (II.51.b) par rapport au champ électrique, on obtient la relation suivante :

$$\left. \frac{\partial D_k}{\partial T_{ij}} \right|_E = \left. \frac{\partial S_{ij}}{\partial E_k} \right|_T = d_{ijk} \quad (\text{II.52})$$

Le même développement peut être appliqué pour exprimer d'autres couples de variables indépendantes. Les quatre possibilités sont résumées dans le tableau (II.3)

Tableau II-3 : Les quatre formes d'écritures équivalentes du couple d'équations piézoélectriques

Couple de variables indépendantes	Grandeurs électriques	Grandeurs mécaniques
(D, S) en fonction de (E, T)	$D = \varepsilon^T E + dT$	$S = d^t E + s^E T$
(D, T) en fonction de (E, S)	$D = \varepsilon^S E + e S$	$T = c^E S - e^t E$
(E, S) en fonction de (D, T)	$E = \beta^T D - gT$	$S = g^t D + s^D T$
(E, T) en fonction de (D, S)	$E = \beta^S D - hS$	$T = c^D S - h^t D$

Le tableau suivant présente les différents coefficients élastiques, piézoélectriques et diélectriques :

Tableau II-4 : Coefficients piézoélectriques

Coefficients	Définitions	Types	Unités	Tailles
D	Induction électrique	Electrique	C. m ⁻²	(3,1)
E	Champ électrique		V. m ⁻¹	(3,1)
ε	Permittivité électrique		F. m ⁻¹	(3,3)
B	Constante d'imperméabilité diélectrique		m. F ⁻¹	(3,3)
S	Déformation relative	Mécanique		(6,1)
T	Contrainte		N. m ⁻²	(6,1)
s	Souplesse		m ² .N ⁻¹	(6,6)
c	Raideur élastique		N. m ⁻²	(6,6)
d	Coefficient piézoélectrique (proportionnalité entre l'induction et la contrainte)	Piézoélectrique	C.N ⁻¹ ou m.	(3,6)

			V^{-1}	
E	Constante de charge (proportionnalité entre l'induction et la déformation à champ nul)		$C \cdot m^{-2}$	(3,6)
G	Constante de tension (proportionnalité entre le champ électrique et la contrainte à induction nulle)		$m^2 C^{-1}$	(3,6)
H	Coefficient piézoélectrique (proportionnalité entre la contrainte et induction à déformation nulle)		$V \cdot m^{-1}$ ou NC^{-1}	(3,6)

Les relations fondamentales de la piézoélectricité sont établies par la norme IEEE et elles sont identifiées par :

$$\begin{cases} D = \varepsilon^T E + d^t T & (a) \\ S = dE + s^E T & (b) \end{cases} \quad (II.53)$$

Les matrices s^E , ε^T et d s'écrivent comme suit :

$$s = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{21} & s_{31} & s_{41} & s_{51} & s_{61} \\ s_{12} & s_{22} & s_{32} & s_{42} & s_{52} & s_{62} \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} & s_{43} & s_{53} & s_{63} \\ s_{14} & s_{24} & s_{34} & s_{44} & s_{54} & s_{64} \\ s_{15} & s_{25} & s_{35} & s_{45} & s_{55} & s_{65} \\ s_{16} & s_{26} & s_{36} & s_{46} & s_{56} & s_{66} \end{pmatrix} \quad (II.54)$$

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{21} & \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \quad (II.55)$$

$$d = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36} \end{pmatrix} \quad (II.56)$$

II-3-3 Relation entre les coefficients piézoélectriques

Puisque les quatre couples d'équations sont équivalents ; il est possible d'écrire des relations matricielles entre les constantes piézoélectriques :

Tableau II-5 : Relation entre les constantes élastique, piézoélectrique et diélectriques

Elastique	Piézoélectrique	Diélectrique
$s^D = s^E - d^t g$	$d = \varepsilon^T g$	$\beta^T = (\varepsilon^T)^{-1}$

$c^E = (s^E)^{-1}$	$e = dc^E$	$\varepsilon^E = \varepsilon^T - ed^t$
$c^D = c^E + e^t h$	$h = \beta^E e$	$\beta^E = \beta^T + hg^t$
$c^D = (s^D)^{-1}$	$h = gc^D$	$\beta^E = (\varepsilon^E)^{-1}$

II-3-4 Coefficients de couplage

Le couplage électromécanique d'un matériau piézoélectrique représente son efficacité à convertir une énergie mécanique en une énergie électrique et vice versa.

Le couplage intrinsèque dépend de la qualité du matériau, qui est fortement lié à l'orientation du réseau cristallin. Il dépend aussi du mode de couplage électromécanique. Il est souvent plus intéressant d'utiliser sa valeur au carré, liée au rapport des énergies transférées et fournies. Selon l'étude thermodynamique d'un système linéaire et en négligeant les effets thermiques, ce coefficient s'écrit quantitativement comme suit : [17]

$$K^2 = \frac{\text{Energie fournie}}{\text{Energie transformée}} \quad (\text{II.57})$$

Le coefficient de couplage, compris entre 0 et 1, est souvent mesuré en pourcentage et considéré comme une sorte de rendement.

II-3-5 Modes de couplage

Les déformations induites dans un matériau piézoélectrique se produisent selon trois modes de couplage élémentaires : le mode transversal, le mode longitudinal et le mode de cisaillement. Chaque mode est identifié en fonction de la direction du champ électrique appliqué et de l'axe le long duquel le matériau se déforme

✓ Le mode longitudinal (ou mode {33})

Se caractérise par la création d'une déformation mécanique dans la même direction que le champ électrique appliqué. Ce mode est favorisé lorsque les rapports longueur/largeur et longueur/épaisseur sont largement supérieurs à l'unité.

✓ Le mode transversal (ou mode {31})

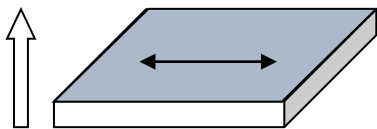
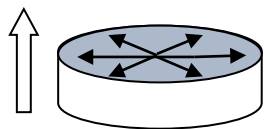
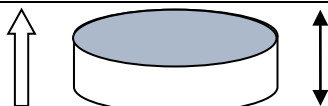
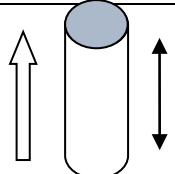
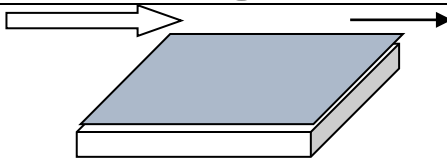
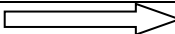
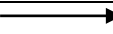
Se caractérise par une variation de la longueur de l'échantillon dans une direction perpendiculaire à la direction de polarisation.

✓ Le mode de cisaillement (ou mode {15})

Consiste à induire une torsion dans la structure en appliquant un champ électrique perpendiculaire à la direction de polarisation. [10]

En modifiant la géométrie de la céramique (parallélépipède, cylindre, tube, etc.) ainsi que le type de polarisation (uniforme, axiale, en épaisseur, radiale, etc.), il est possible de susciter des modes autres que les modes élémentaires tels que le mode en épaisseur et le mode radial.

Tableau II-6 : Différents modes de vibration piézoélectrique

Modes	Forme géométrique		Coefficient de couplage
	L : longueur ; l : largeur ; e : épaisseur ; d: diamètre		
Mode transversal		$e, l < L/5$	$k_{31} = \frac{d_{31}}{\sqrt{S_{11}^E \cdot \epsilon_{33}^T}}$
Mode Radial (planaire)		$d < 10l$	$k_p = k_{31} \sqrt{\frac{2}{1 + \frac{S_{12}^E}{S_{11}^E}}}$
Mode en épaisseur		$d > 10 e$	$k_t = \frac{e_{33}}{\sqrt{c_{33}^D \cdot \epsilon_{33}^S}}$
Mode longitudinal		$d < l/2.5$	$k_{33} = \frac{d_{33}}{\sqrt{S_{33}^E \cdot \epsilon_{33}^T}}$
Mode de cisaillement		$l > 3.5e$	$k_{15} = \frac{d_{15}}{\sqrt{S_{55}^E \cdot \epsilon_{11}^T}}$
Direction de polarisation  Direction de déplacement 			

II-4 Conclusion

Dans le cadre du modèle électrostatique, nous avons établi une relation proportionnelle entre l'induction électrique et le champ électrique appliqué, avec un coefficient de

proportionnalité représenté par un tenseur de permittivités diélectriques. De manière similaire pour le modèle mécanique, nous avons établi une relation entre la déformation et la contrainte, exprimées sous forme tensorielle. Afin de simplifier l'écriture et la compréhension des expressions, nous avons, à travers la notation de Voigt, récrit les relations électrostatique et mécanique sous forme matricielle.

Pour modéliser le phénomène piézoélectrique, nous avons réalisé un couplage électromécanique qui intègre les différents coefficients diélectriques, mécaniques et piézoélectriques.

3^{ème} chapitre

**III Application à la récupération d'énergie électrique d'un
sol piézoélectrique**

III-1 Introduction

Les applications des matériaux piézoélectriques présentent des spécificités mathématiques liées à la variation temporelle des grandeurs électromécaniques. Cette variation peut être classée en régime quasi-statique ou dynamique. Dans le régime quasi-statique, qui est utilisé pour des sollicitations mécaniques de choc ou impulsionnelles, les grandeurs électromécaniques peuvent être considérées de manière indépendante. On parle alors de mode découplé ou faiblement couplé.

III-2 Modèle simplifié de Maxwell (Approximation quasi-statique)

La déformation ou la contrainte se déplace beaucoup plus lentement que le champ électrique. Les ondes élastiques se propagent environ 10^4 à 10^5 fois moins vite que les ondes électromagnétiques. Étant donné que le champ électromagnétique lié au champ élastique est essentiellement statique, la variation temporelle du champ magnétique n'a aucun effet, et l'équation (II.1.d) [14] se simplifie à

$$r\vec{\partial t}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cong \vec{0} \quad (\text{III.1})$$

Étant donné que les matériaux piézoélectriques sont des diélectriques, le courant de conduction est nul, l'équation (II.1c) se réduit à :

$$r\vec{\partial t}\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{J}_D \quad (\text{III.2})$$

J_D : Courant de déplacement

III-3 Modèle géométrique et mode de couplage

Ce système d'équation (II.53), ne fournit pas une compréhension simple du comportement physique d'un matériau piézoélectrique.

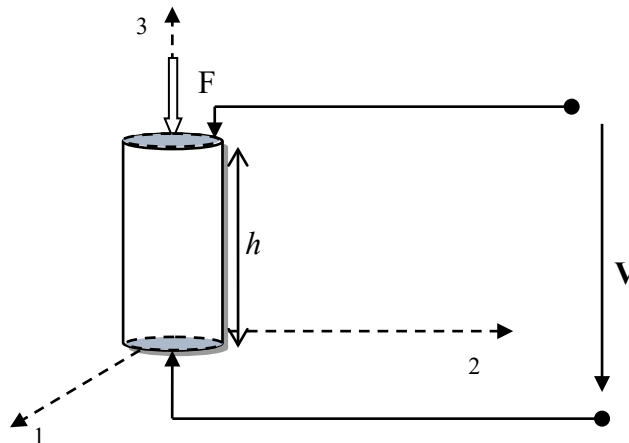


Figure III-1 : Barreau piézoélectrique soumis à une force F

Pour simplifier le modèle, nous choisirons l'un des trois modes de couplage disponibles, à savoir le mode longitudinal. Dans ce mode, la compression et la polarisation se produisent le long du même axe. Dans cette situation spécifique, un barreau piézoélectrique cylindrique de section **A** et de longueur **h** et de rayon **r** est soumis à une force **F** qui est alignée avec son axe de polarisation, comme représenté dans la figure (III.1).

III-4 Formulation du couplage

Les matrices s_E , ϵ_T et d , décrites respectivement dans les équations (II.54), (II.55) et (II.58), prennent les formes suivantes lorsque la polarisation suit l'axe 3 :

$$s^E = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{11} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ s_{11} & s_{11} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ s_{13} & s_{13} & s_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{66} \end{pmatrix} \quad (III.3)$$

$$\epsilon^T = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{pmatrix} \quad (III.4)$$

$$d = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (III.5)$$

Dans cette situation, le système matriciel décrivant le phénomène est le suivant :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ S_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{11} & s_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{31} \\ s_{11} & s_{11} & s_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{31} \\ s_{13} & s_{13} & s_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{33} \\ 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 & d_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 & 0 & 0 & \epsilon_{11} & 0 \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ T_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (III.6)$$

En déduisant du système matriciel (III.6), on obtient les équations à résoudre :

$$\begin{cases} S_3 = s_{33}T_3 + d_{33}'E_3 & (a) \\ D_3 = d_{33}T_3 + \varepsilon_{33}E_3 & (b) \end{cases} \quad (III.7)$$

III-5 Grandeurs électriques en mode découple

Dans le régime découplé, connu sous le nom de couplage faible, seul le coefficient piézoélectrique de charge est impliqué dans la relation entre les grandeurs électriques et mécaniques. Dans cette configuration, le système (III.7) se divise en deux sous-systèmes différents :

$$\begin{cases} S_3 = s_{33}T_3 & (a) \\ D_3 = d_{33}T_3 & (b) \end{cases} \quad (III.8)$$

$$\begin{cases} S_3 = d_{33}'E_3 & (a) \\ D_3 = \varepsilon_{33}E_3 & (b) \end{cases} \quad (III.9)$$

III-5-1 Induction électrique

L'induction électrique est :

$$D_3 = d_{33}T_3 \quad (III.10)$$

III-5-2 Charge électrique

En utilisant l'équation (II.18), dérivée dans le chapitre II et concernant les conditions aux limites, on peut formuler ce qui suit :

$$D = \frac{Q}{A} \quad (III.11)$$

Où A est la surface sur laquelle sont réparties les charges.

En combinant entre les équations (II.28), (III.10) et (III.11), on aboutit à l'équation suivante :

$$Q = d_{33}F \quad (III.12)$$

De cette manière, la charge Q récupérée par un élément piézoélectrique peut être exprimée comme une fonction du coefficient de charge et de la force appliquée à cet élément.

III-5-3 Courant électrique

Pour obtenir l'expression du courant électrique, il suffit de dériver la charge Q par rapport au temps.

$$I = \frac{dQ}{dt} = d_{33} \frac{dF}{dt} \quad (III.13)$$

Dans le cas linéaire, l'expression du courant est la suivante :

$$I = d_{33} \frac{\Delta F}{\Delta t} \quad (\text{III.14})$$

III-5-4 Densité de courant électrique

Pour exprimer la densité de courant électrique, on utilise l'équation (II.14) :

$$J = d_{33} \frac{dT_3}{dt} \quad (\text{III.15})$$

Dans un cas de linéarité, la formulation suivante est utilisée :

$$J = d_{33} \frac{\Delta T}{\Delta t} \quad (\text{III.16})$$

III-5-5 Champ électrique

Le champ électrique E de l'élément piézoélectrique est obtenu à partir des équations (II.14) et (III.11), et on écrit :

$$E = \frac{d_{33}}{\epsilon_{33}} T \quad (\text{III.17})$$

III-5-6 Tension aux bornes des électrodes

En exploitant les équations (II.24) et (III.17), on exprime la tension aux bornes de deux électrodes de l'élément piézoélectrique (Fig. III.1):

$$V = \frac{d_{33}}{\epsilon_{33}} h T \quad (\text{III.18})$$

III-5-7 Energie électrique

Il est possible d'exprimer la puissance électrique en multipliant la tension par le courant électrique, ce qui peut être résumé par l'équation suivante :

$$P = V \frac{dQ}{dt} \quad (\text{III.19})$$

En remplaçant les termes de la charge et de la tension, on parvient à obtenir l'équation suivante:

$$W = \frac{1}{\epsilon_{33}} \tau (d_{33} T)^2 \quad (\text{III.20})$$

Où $\tau = Ah$ le volume du matériau.

De cette manière, pour exprimer la densité d'énergie par unité de volume et avec une contrainte unitaire, nous avons l'expression suivante :

$$\frac{dw}{d\tau} = \frac{1}{\varepsilon_{33}} (d_{33})^2 \quad (\text{III.21})$$

Ainsi, lors du choix d'un matériau énergétique optimal, on se concentre sur le rapport $d_{33}^2 / \varepsilon_{33}$.

III-6 Modélisation du système sans charge électrique

Pour analyser le comportement dynamique d'un matériau piézoélectrique soumis à une contrainte mécanique, on utilise le système d'équations ci-dessous.

$$\begin{cases} T = c^E S - e^t E & (a) \\ D = eS + \varepsilon^S E & (b) \end{cases} \quad (\text{III.22})$$

En effectuant la dérivation temporelle de l'équation (III.26.b), en substituant les expressions préalablement établies des grandeurs électromécaniques (T, S, E, D), et supposant que le courant de sortie est nul, nous obtenons

$$\begin{cases} F_p = c^E \frac{A}{h} x + e^t \frac{A}{h} V & (a) \\ e \frac{A}{h} \frac{\partial x}{\partial t} = \varepsilon^S \frac{A}{h} \frac{\partial V}{\partial t} & (b) \end{cases} \quad (\text{III.23})$$

En utilisant des coefficients différents, le système précédent peut être reformulé de la manière suivante :

$$\begin{cases} F_p = k_p x + \alpha V & (a) \\ \alpha \dot{x} = C_p \dot{V} & (b) \end{cases} \quad (\text{III.24})$$

F_p est la force appliquée au piézoélectrique,

$\dot{x}$ et $\dot{V}$ Sont respectivement le dérivé par rapport au temps du déplacement x et de la tension V

$$\begin{cases} C_p = \varepsilon \frac{A}{h} & (a) \\ k_p = c \frac{A}{h} & (b) \\ \alpha = e \frac{A}{h} & (c) \end{cases} \quad (\text{III.25})$$

C_p : Capacité du piézoélectrique

K_p : Constante de raideur du piézoélectrique

α : Facteur de couplage ou rapport de transformation électromécanique

III-7 Application à un sol piézoélectrique

III-7-1 Fonctionnement d'un sol piézoélectrique

Le fonctionnement d'un sol piézoélectrique repose sur l'utilisation de matériaux piézoélectriques qui génèrent de l'électricité lorsqu'ils sont soumis à une contrainte mécanique. Ce sol est généralement composé de cristaux piézoélectriques tels que le quartz, la tourmaline ou le polyvinylidène-fluorure (PVDF), disposés entre deux électrodes. Lorsqu'une force est exercée sur le sol, les cristaux piézoélectriques se déforment, ce qui entraîne une séparation des charges électriques à travers le matériau.

Cette séparation des charges crée une différence de potentiel électrique, produisant ainsi une tension entre les électrodes. Cette tension peut être collectée et utilisée comme source d'énergie électrique. Dans le cas d'un sol piézoélectrique, cette énergie est générée lorsque les piétons marchent ou exercent une pression sur la surface du sol.

La quantité d'énergie électrique produite dépend de différents facteurs, tels que la force exercée par les piétons, la densité du sol installées et les propriétés piézoélectriques du matériau utilisé.

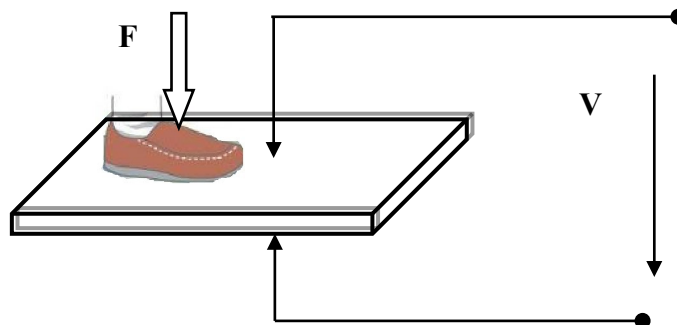


Figure III-2 : Élément piézoélectrique d'un sol

III-7-2 Caractéristiques d'un élément piézoélectrique

Dans le but d'évaluer divers matériaux piézoélectriques soumis à une contrainte mécanique, une approche basée sur une géométrie cylindrique est employée (Fig.III.3) [18] :

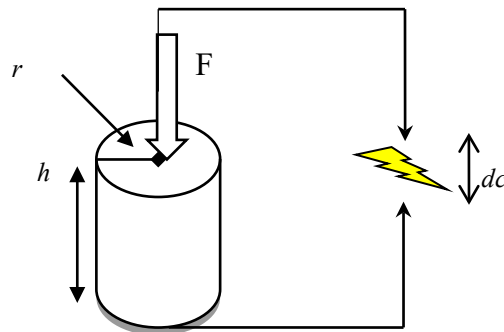


Figure III-3: Géométrie cylindrique soumise à une contrainte mécanique

F : Force appliquée ;

h : la hauteur du barreau piézoélectrique ;

dc : Distance entre les électrodes ;

Le dispositif de la Figure (III 3) est un élément piézoélectrique qui est constitué de La céramique PZT qui a été largement utilisée pour les buzzers et les capteurs à ultrasons il est formé avec une dimension de 9,0mm x 0,12 mm qui est fixe à une fine plaque de laiton 12,0 mm x 0,10 mm [19]

L'élément piézoélectrique a une valeur de d_{33} égale à $560 (10^{-12} \text{ C/N})$, ce qui signifie que lorsqu'une force de 1 Newton est exercée, la déformation résultante génère une charge électrique de $560 \times 10^{-12} \text{ C}$. Dans ce cas, une force est appliquée le long de l'axe neutre (y) d'un cristal, et les charges sont générées le long de la direction (x), qui est perpendiculaire à la ligne de force. La quantité de charges produites dépend des dimensions géométriques de l'élément piézoélectrique concerné et de la pression appliquée.

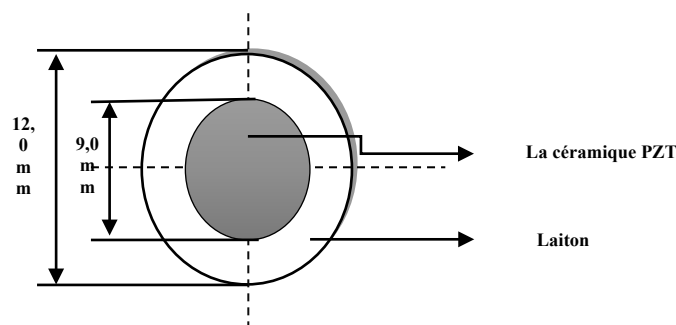


Figure III-4 : Élément piézoélectrique

La figures ci-dessus exprime la charge électrique en fonction du coefficient de charge [14] :

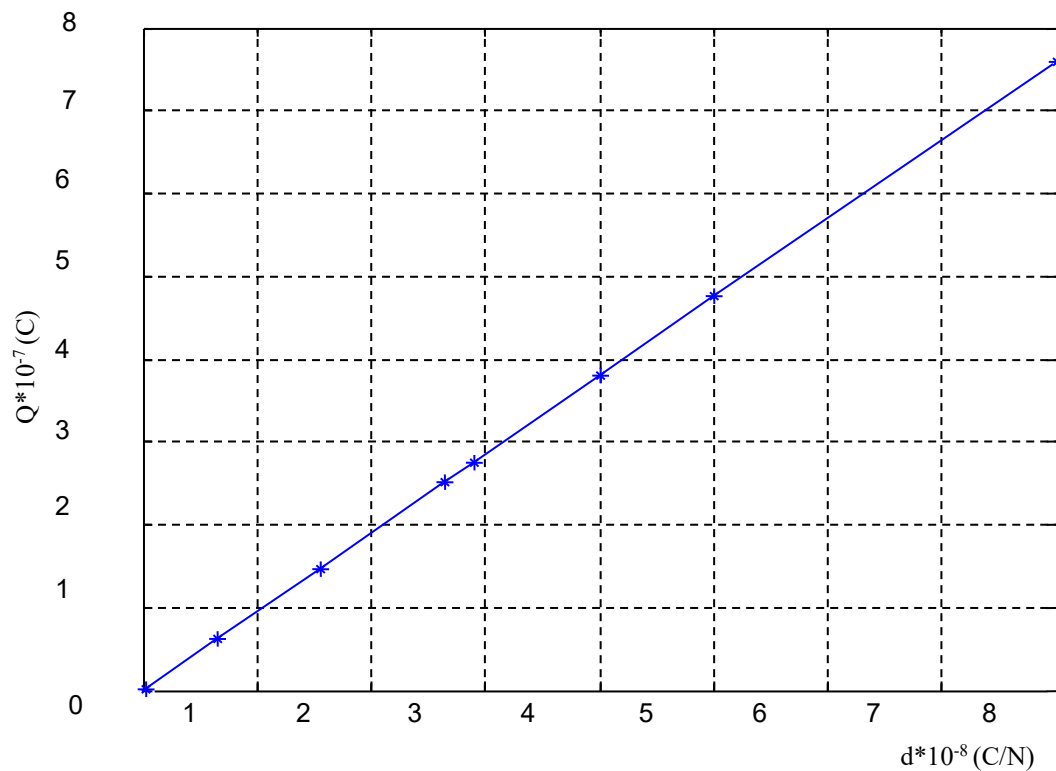


Figure III-5 : Charge électrique en fonction du coefficient de charge d

Les caractéristiques (permittivité relative ϵ_r et coefficient de charge d) des différents matériaux piézoélectriques tels que les céramiques, les polymères et le quartz, sont donnée dans le tableau suivant : [21]

Tableau III-1:Caractéristique piézoélectriques des matériaux sous test

	Cristaux	Polymères	Céramiques					
Matériau	Quartz	PbTiO ₃	PZT 155	PZT 181	PZT 241	PZT 255	PZT 151	PZT PT
ϵ_r	5	175	1050	1200	1500	1750	2400	4310
$d_{33} (10^{-12} \text{ (C/N)})$	2.3	65	155	265	290	400	500	800

III-7-3 Architecture d'un circuit d'un carreau sol piézoélectrique

Ce circuit contient :

- ✓ 54 pastilles piézoélectriques
- ✓ Un circuit de redresseur en pont pour redresser la tension de toutes fréquences.

- ✓ Un circuit capacitif qui récupère la tension de crête maximale générée par les pastilles piézoélectriques
- ✓ Condensateur :
 - ♦ en parallèle : la valeur de la capacité augmente tandis que la tension reste la même.
 - ♦ en série : la tension augmente tandis que la capacité reste la même.
- Tous les condensateurs de chaque redresseur sont connectés en série, puis en parallèle
- ✓ Une batterie au plomb

Les condensateurs de valeur supérieure ont une capacité de charge plus importante et un temps de décharge plus long. Cependant, il est crucial de souligner que la capacité de charge de la batterie de condensateurs doit être supérieure à celle de la batterie. C'est seulement dans cette configuration que la batterie se charge. De plus, l'adaptation de l'impédance entre les pastilles piézoélectriques et le condensateur est essentielle pour assurer un transfert de puissance maximal. [19]

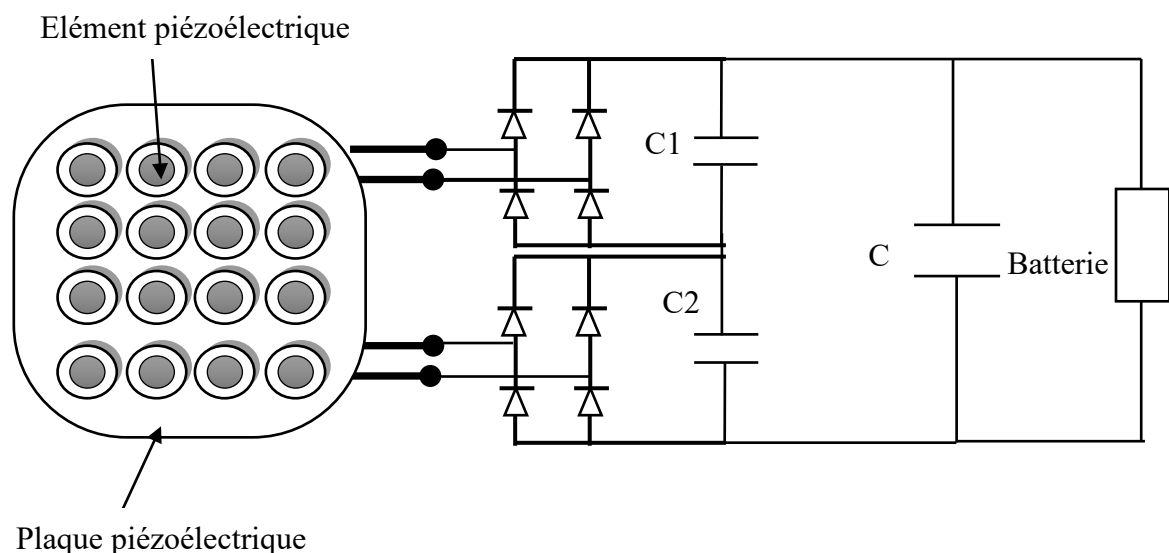


Figure III-6 : Circuit d'un sol piézoélectrique

Puisque la pression est proportionnelle à la quantité de puissance générée ($T \propto P_u$), tel que :

$$P_u = K \times m$$

Où P_u est la puissance, m la masse du marcheur et K = constante proportionnalité

Pour $m=50\text{kg}$, nous obtenons la valeur de la tension est $V=4\text{V}$ et $I=0.015$

$$P_u = V \times I_{eq} = 4 \times 0.015 = 0.06\text{W}$$

Ce qui signifie que pour 50kg , nous obtenons une puissance (P_u) = $0,06\text{W}$, à partir de là, nous pouvons trouver la valeur de K .

$$K = \frac{Pu}{m} = \frac{0.06}{50} = 0.0012$$

Le tableau montre la relation entre la pression et le poids. Pour les dimensions finales des carreaux du sol de 55cm×35cm, les résultats sont présentés dans le Tableau (III.2) et Tableau (III.3) [19].

Tableau III-2 : Comparaison des résultats pour différentes puissances et différents poids

SL N°	Pu en Watts	m en Kg
1	0 .012	10
2	0 .024	20
3	0 .06	50
4	0 .09	75

Tableau III-3 : Résultat final de la conception du sol

SL. NO	NO du disque connecté	Condensateur utilisé à la sortie	Temps de charge en minutes (Sortie 5.75V)	Temps de décharge en minutes (Sortie 2V)
1	54	9500 µf, Max 63V	90	30

III-8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons utilisé le modèle électromécanique général établi précédemment, en le simplifiant pour le cas spécifique du couplage en mode longitudinal. Afin de l'appliquer au cas du sol piézoélectrique, nous avons encore simplifié le modèle en réalisant un découplage entre les grandeurs électrostatiques et mécaniques. À partir de ce modèle, nous avons exprimé toutes les grandeurs électriques (charges, tension, courant et énergie) en fonction de la géométrie du matériau, de la contrainte appliquée et des constantes diélectriques et piézoélectriques.

Conclusion générale

Ce travail a retracé l'histoire et les fondements de la piézoélectricité en mettant en évidence les effets directs et inverse de ce phénomène. Nous avons traité les propriétés diélectriques et les divers effets physiques liés à la polarisation des matériaux. De plus, nous avons examiné les applications des matériaux piézoélectriques dans différents domaines. Une modélisation de la piézoélectricité est établie en explorant les modèles électrostatique et mécanique, ainsi que leur couplage. Nous avons établi des équations mathématiques reliant l'induction électrique, le champ électrique, la déformation et la contrainte, en tenant compte des coefficients diélectriques, mécaniques et piézoélectriques.

Nous nous sommes intéressés à la modélisation d'un carreau de sol piézoélectriques. Ce dernier est composé de 54 capsule piézoélectrique élémentaire disposées en parallèles. L'ensemble nous délivre une tension de 4V et un courant de 0.015A. En fonction des besoins en tension ou en courant, on peut disposer les carreaux en série ou en tension.

Bibliographie

- [1] T. Mouna, « Mesure des constantes piézoélectrique de PZT par des moyens électriques» mémoire de magistère de l'université Mohamed Boudiaf - M'sila 2016.
- [2] C. Castille, « Etude de MEMS piézoélectriques libérés et microstructurés par sérigraphie. Application à la détection en milieu gazeux et en milieu liquide » thèse doctorat de Université Sciences et Technologies-Bordeaux I, 2010.
- [3] M. DEFOSSEUX, «Conception et caractérisation de microgénérateurs piézoélectriques pour microsystèmes autonomes » thèse doctorat l'université des Grenoble micro et nano électrique , 2006.
- [4] M. BENAÏSSA Alaeddine, «Analyse de la modélisation et le contrôle d'une pompe piézoélectrique» mémoire de magistère de université ferhat abbas — setif 2011.
- [5] G. Haertling:, «Ceramic materials electronics» *Journal of the American Ceramic Society*, vol. 82, n° 14, pp. 797-818, 1999.
- [6] A. Benayad, «Matériaux monocristallins à forte activité piézoélectrique: élaboration, caractérisation et application» Laboratoire de Génie électrique et de ferroélectricité, INSA de Lyon, 2005.
- [7] F. Pata, «Phénomène de piézo-électricité» Habilitation à diriger des recherches, université de savoie, 2000.
- [8] K. BENAMARA, S. IDIR, «Etude et optimisation de l'energie piezoelectrique par la technique non lineaire parallele» mémoire de magistère université de bejaia , 2017.
- [9] T. Martinez, «Etude d'un transformateur piézoélectrique à onde progressive et des application aux convertisseurs de puissance» » thèse doctorat l'université Paris Saclay, 2019.
- [10] I. Daoudi, A. Kara , «Analyse en mode actionneur des plaques composites piézoélectriques» » mémoire de magistère de l'université saad dahlab de blida 1, 2019.
- [11] Y. Debar, «Elasticité : méthodes énergétiques, méthode des éléments finis» cours a l'Institut Universitaire de Technologie du Mans, Juin 2011.
- [12] S. KIRATI, «Etude des Propriétés Structurales, Elastiques et Thermodynamiques des Semi-conducteurs Binaires PbX (X=S, Se et Te) » Mémoire de Fin d'Etudes Master a Université 8 mai 1945 Guelma , 2021

- [13] Loi de Hooke : définition et explications. (s. d.). TechnoScience.net. <https://www.techno-science.net/definition/6765.html>
- [14] B. MAOUCHE, «Cours de conversion électromécanique d'énergie,» [En ligne]. Available: <https://elearning.univ-bejaia.dz/course/view.php?id=7204>.
- [15] M. Thomas, «Contribution à l'étude des générateurs piézoélectriques pour la génération des décharges plasmas,» thèse doctorat l'université Toulouse III Paul Sabatier , Toulouse, 2015.
- [16] M. Lam, «Formalisme d'octet appliqué à la propagation d'ondes dans des milieux piézoélectriques inhomogènes,» thèse doctorat l'université de Tours, 2008.
- [17] M. MEDDAD, «Etude de l'énergie renouvelable dans l'environnement humain pour alimenter les systèmes électroniques portables» thèse de doctorat, setif, universite ferhat abbas, 2012.
- [18] A. Parent, «Apport de nouveaux matériaux piézoélectrique dans le domaine des micro-géomètres vibrants,» Thèse de doctorat, Université de Paris- sud, 2008.
- [19] Shreeshayana R, Raghavendra L, «Piezoelectric Energy Harvesting using PZT in Floor Tile Design,» International Journal of Advanced Research in Electrical, Electronics and Instrumentation Engineering, December 2017 .
- [20] S. Ghorbel, «Couplage électromécanique effectif dans les structures piézoélectriques,» thèse de doctorat a Ecole Centrale Paris, 2009.