République Algérienne Démocratique et Populaire
Université Abderrahmane MIRA de Béjaia
Faculté des Sciences Exactes

Département de Recherche Opérationnelle

Mémoire Présenté pour L'obtention du Diplôme de Master
en Mathématiques Appliquées

Spécialité : Modélisation Optimisation et aide a la décision

Optimisation de contrats de crédits immobiliers par la théorie des jeux : Cas de la Banque BNA Béjaia

Présenté par :
Mr MESSAOUDI Sid Ali

Défendu le 30/06/2025, devant le jury composé de :

Mr M.S. Radjef	**Professeur**	**Président**	**UAMB - Bejaia.**
Mr N. Khimoum	**M.C. Classe/ A**	**Examinateur**	**UAMB - Bejaia**
Mme A. Anzi	**M.C. Classe/ A**	**Promotrice**	**UAMB - Bejaia.**
Mlle K. Bouibed	**M.C. Classe/ B**	**Promotrice**	**UAMB - Bejaia.**
Mme Y. Younsioui	**Doctorante**	**Examinatrice**	**UAMB - Bejaia.**

Année Universitaire 2024 – 2025

Remerciements

Ce travail a été réalisé au sein du Département de Recherche Opérationnelle de l'Université Abderrahmane Mira, campus Targa Ouzemour, Béjaïa.

Avant toute chose, nous remercions Dieu Tout-Puissant qui nous a accordé la force, la patience et la volonté nécessaires pour mener à bien ce travail.

Nous exprimons notre profonde gratitude à nos encadrantes, Madame Bouibed Karima et Madame Anzi Aïcha, pour leur encadrement bienveillant, leurs conseils avisés, et leur disponibilité tout au long de la réalisation de ce mémoire. Le choix du thème, leurs critiques constructives et leur soutien constant ont été essentiels à l'aboutissement de ce travail.

Nos remerciements s'adressent également aux membres du jury, pour l'honneur qu'ils nous font en acceptant d'évaluer ce mémoire, ainsi que pour leurs remarques pertinentes et enrichissantes.

Nous tenons à remercier sincèrement l'ensemble des enseignants qui nous ont transmis leur savoir tout au long de notre parcours universitaire, en particulier durant les deux années du Master.

Nos pensées reconnaissantes vont aussi au personnel administratif du département de recherche opérationnelle pour leur accueil et leur soutien.

Enfin, nous adressons nos remerciements les plus sincères à nos parents, nos frères et sœurs, nos amis, et à toutes les personnes qui, de près ou de loin, ont contribué à l'élaboration de ce travail.

Dédicaces

Je dédie ce travail :

À mes parents, lumière de mon chemin depuis mes premiers pas d'élève jusqu'à aujourd'hui. Vous m'avez soutenue sans relâche, encouragée sans condition. Que ces lignes soient le témoignage de ma profonde reconnaissance et de mon amour infini.

À mes sœurs, trésors inestimables, et à mon unique et grand frère : merci pour votre soutien chaleureux, vos encouragements constants, et votre présence précieuse tout au long de cette aventure. Vous avez partagé avec moi chaque émotion, chaque étape, et je vous en suis éternellement reconnaissante.

À mes amis, pour leur disponibilité, leur écoute et leur bienveillance, en particulier à mes deux chers amis d'enfance : mille mercis à vous tous.

À mes compagnons de la promotion 2024-2025, à tous ceux qui ont partagé cette belle aventure universitaire à mes côtés.

Je dédie également ce travail :

À mes parents, devant qui tous les mots du monde restent insuffisants pour exprimer l'amour et la gratitude que je ressens. Merci pour votre soutien indéfectible tout au long de ma vie. Que Dieu me donne la force de vous rendre ne serait-ce qu'une infime part de vos sacrifices.

À ma chère CH ,pour sa présence fidèle et son aide constante depuis toujours.

À mes cousins, cousines, et mes douces sœurs, pour leur soutien chaleureux jusqu'au dernier moment de la réalisation de ce travail.

À mes tantes bien-aimées, Keltoum et Nawel, ces anges gardiens qui veillent sur moi.

À mes précieuses amies, Sabri Hamou, ainsi qu'à toute ma famille : merci du fond du cœur.

Table des Matières

Liste des Tableaux

Liste des Figures

Introduction Générale

Les banques sont des institutions financières essentielles au fonctionnement de l'économie. Elles jouent un rôle clé en collectant l'argent des particuliers, entreprises ou organisations sous forme de dépôts, qu'elles utilisent pour accorder des prêts ou faciliter les transactions. Leurs principales missions incluent la gestion sécurisée des fonds, l'octroi de crédits pour financer des projets personnels ou professionnels, et la fourniture de services comme les paiements, la gestion de patrimoine ou les assurances.

En agissant comme intermédiaires, les banques soutiennent la croissance économique en reliant ceux qui ont des fonds disponibles à ceux qui en ont besoin. Elles contribuent également à la stabilité financière, bien que leur rôle dans certaines crises économiques ait suscité des débats sur la nécessité de régulations strictes [10].

Cependant, ces contrats ne sont pas toujours optimaux. Ils doivent faire face à des problèmes récurrents tels que l'asymétrie d'information, les aléas moraux ou encore les incitations contradictoires entre les agents. Dès lors, se pose la question fondamentale :

> Comment concevoir des contrats bancaires efficaces, équilibrés et robustes face à ces incertitudes et interactions stratégiques ?

C'est dans cette optique que s'inscrit ce projet de fin d'études, en explorant une piste originale et prometteuse : l'application de la théorie des jeux à l'optimisation des contrats bancaires.

La théorie des jeux offre un cadre formel pour modéliser les comportements d'agents économiques en interaction stratégique. Elle permet d'analyser les situations où les décisions de l'un dépendent des anticipations sur les choix de l'autre, comme c'est souvent le cas dans les relations bancaires.

À travers ce travail, nous cherchons à :

— Identifier les limites des contrats bancaires actuels, en particulier dans le domaine du crédit .

— Étudier différents modèles de la théorie des jeux (équilibre de Nash, jeux du principal-agent, jeux coopératifs ou non coopératifs) .

— Appliquer ces modèles à des cas concrets pour proposer des pistes d'optimisation réalistes.

Ce mémoire s'articule autour de quatre chapitres : Le premier présente le contexte général et une typologie des contrats bancaires. Le deuxième introduit les concepts fondamentaux de la théorie des jeux et leur pertinence pour notre sujet. Le troisième chapitre est consacré à une étude de cas centrée sur le crédit immobilier, analysé à la lumière des outils théoriques présentés. Enfin, le dernier chapitre propose une approche de modélisation et des recommandations pour la conception de contrats bancaires optimisés.

Chapitre 1

Banque et contrats bancaires

Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons la classification et le fonctionnement des contrats bancaires, en mettant particulièrement l'accent sur le crédit immobilier. Ces contrats, essentiels à l'activité des établissements financiers, remplissent diverses fonctions économiques et soulèvent plusieurs problématiques liées à leur gestion et à leur optimisation.

1.1 Définition de la banque

La banque est une entreprise d'un type particulier qui produit de nombreux services destinés à sa clientèle [1]. Elle reçoit d'abord les dépôts apportés par ses clients (soit dépôt à vue ou à terme),elle assure ensuite la gestion des moyens des paiements pour les comptes de ses clients tel que recevoir des chèques à l'occasion d'ouverture d'un compte, retrait de monnaie auprès des guichets bancaires,la banque distribue surtout des crédits [1].

1.2 Rôle de la banque

Le rôle de la banque se résume essentiellement à la collecte des fonds du public et à la distribution de ceux-ci sous forme de crédits.

La nécessité et l'importance de cette activité sont d'autant plus ressenties avec le développement économique et le besoin en financement sans cesse croissant.

En effet, la banque n'intervient pas seule avec ses propres capitaux, puisqu'elle utilise des capitaux qui appartiennent au public.

Ainsi, la banque se trouve-t-elle amenée à optimiser les emplois des ressources qui lui sont confiées. Pour ce faire, elle s'appuie sur une structure organisationnelle en phase avec les exigences de cette mission et un personnel suffisamment qualifié.

Les banques produisent de la monnaie selon l'adage(les crédits font les dépôts),ce qui veut dire donc, lorsqu'une banque accorde un prêt, elle ne prend pas nécessairement de l'argent déjà existant dans ses coffres.Elle crée un nouveau dépôt sur le compte du client.Ce dépôt devient de la monnaie nouvelle dans l'économie.Tout crédit accordé par une banque augmente la masse monétaire en créant les dépôts bancaires de montant équivalent, tout crédit remboursé réduit la monnaie en circulation.

Les banques contribuent, de même que le marché financier, à orienter l'argent de ceux qui en ont momentanément trop vers ceux qui en ont besoin et présentent des garanties suffisantes. Elles jouent un rôle important dans la sélection des projets en fonction de leurs perspectives économiques [1].

En termes d'importance, les banques offrent de nombreux services aux entreprises comme aux particuliers :

— Les marchands peuvent circuler avec plus de sérénité sans avoir à transporter des sommes importantes sur des routes peu sûres.
— Les banques permettent aux particuliers de financer leurs projets en leur octroyant des prêts, soit immobiliers, soit à la consommation. Cette distinction dépend de l'objet du bien financé, du montant et de la durée.
— Elles délivrent les moyens de paiement à leurs clients.
— Elles sont les lieux où les clients peuvent déposer ou placer leurs liquidités et économies.

1.3 Différents types de banques

1.3.1 Banques commerciales

Ce sont des banques de dépôts ou de crédits. Elles font appel à l'épargne des multiples déposants : elles acceptent ainsi de garder les fonds à la place des particuliers, qui effectuent soit des dépôts à vue, soit des dépôts à terme. Dans ce dernier cas, la banque conserve les fonds pendant un certain délai durant lequel le client ne peut les retirer.

L'activité principale des banques commerciales consiste donc à recevoir du public des dépôts de toute forme et de toute durée, et à consentir toutes opérations de crédit sans limitation de durée ni de forme [3].

1.3.2 Banques d'investissement (ou d'affaires)

Leur fonction principale est l'octroi de crédits à moyen et à long terme, le financement des régions développées, des projets d'intérêt commun, la modernisation et la conversion d'entreprises ou encore la création d'activités nouvelles.

Pour ce faire, les banques d'investissement font appel aux fonds des épargnants, mais dans la majorité des cas, elles utilisent principalement leurs capitaux propres, qui sont généralement très importants [3].

1.3.3 Banques d'épargne et de prévoyance

Ces banques sont spécialisées dans la collecte des ressources, notamment de la petite épargne, ainsi que dans la distribution de crédits et le financement d'opérations d'intérêt national. Leurs dépôts sont, la plupart du temps, à court terme, sous la forme de livrets d'épargne. Elles peuvent aussi recevoir des dépôts à terme prenant la forme de bons de caisse ou d'obligations [3].

1.4 Banque d'algerie

En Algérie ; la loi 90/10 du 14/01/1990 relative à la monnaie et au crédit [5], dans son article 110, stipule :" les opérations de banque comprennent la réception des fonds publics, les opérations de crédit ainsi que la mise à la disposition de la clientèle des moyens de paiements et la gestion de ceux-ci :

Outre ces trois catégories de services bancaires, les banques peuvent effectuer les opérations connexes à leur activité : les opérations de change, les opérations sur or, les placements, la souscription, l'achat et la gestion financière. Les banques peuvent aussi recevoir du public des fonds destinés à être placés en participation auprès d'une entreprise [5]. Enfin, l'ensemble des

FIGURE 1.1 – La banque d'algérie

banques jouent un rôle économique fondamental : elles assurent le financement de l'économie notamment grâce à la possibilité qui leur est offerte de créer de la monnaie [5].

La banque centrale d'Algérie, dénommée « Banque d'Algérie » depuis la promulgation de la loi du 14 avril 1990 relative à la monnaie et au crédit, a été créée par la loi du 12 décembre 1962, avec un capital initial totalement souscrit par l'État. Elle n'a pas de relation avec la clientèle mais uniquement avec les banques. C'est une « banque des banques » ; ainsi, le législateur a tenu à préciser la responsabilité de la Banque d'Algérie dans l'orientation de la politique monétaire et la tutelle sur l'ensemble du système bancaire.

C'est une « banque d'émission » ; elle règle l'émission monétaire mais en fonction des impératifs de la politique monétaire.

C'est une « banque d'État » ; car elle apporte son concours à l'État (Trésor public).

C'est une « banque de réserve » ; elle gère les réserves en devises du pays, et veille à l'application de la législation et de la réglementation des opérations de change [5].

1.5 Présentation de l'agence d'accueil (BNA 356)

L'agence principale est dirigée par un directeur assisté par deux directeurs adjoints nommés par le Président Directeur Général (PDG) [7].

Elle fait partie intégrante du réseau d'exploitation de la banque dont elle assure la représentation au niveau local. Elle est rattachée hiérarchiquement à une direction de Réseau d'exploitation (DRE) et entretient des relations avec l'ensemble de la banque, selon les attributions qui lui sont conférées.

L'agence principale est structurée en cinq compartiments, à savoir :

— Compartiment commercial et juridique .

— Compartiment caisse et porte-feuille .

— Compartiment étranger .

— Compartiment crédit et engagement .

— Compartiment contrôle comptable, informatique et gestion administrative.

L'agence est essentiellement un organe d'action commerciale qui se doit d'attirer la population en drainant le maximum de ressources vers ses caisses, tout en assurant le financement de l'économie.

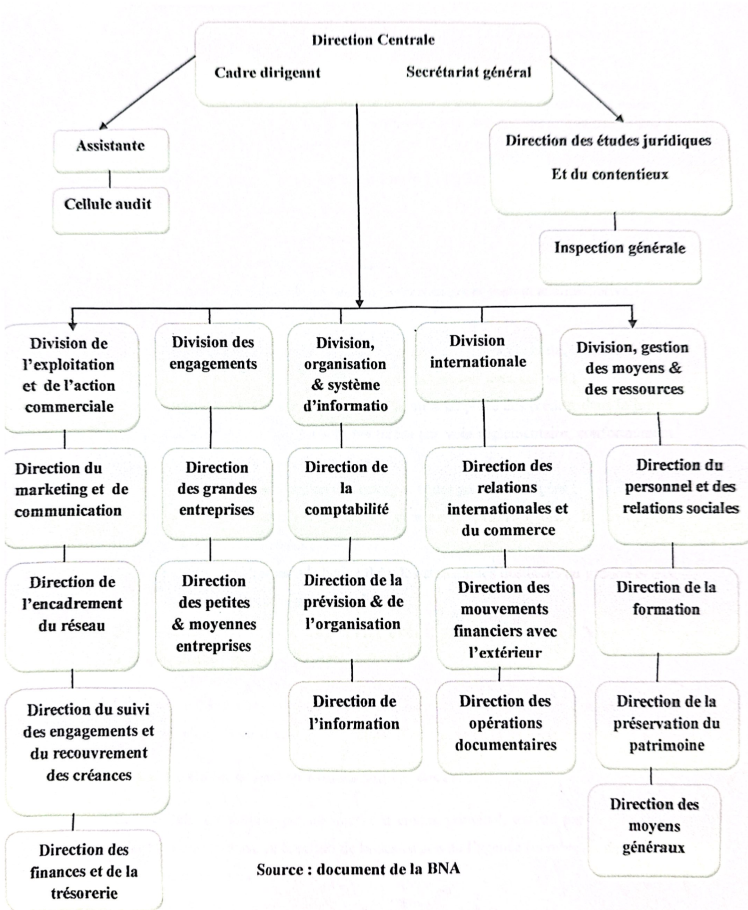


FIGURE 1.2 – Organigramme de l'agence principal de béjaia BNA 356

1.6 Contrats bancaires

1.6.1 Définition des contrats bancaires

Un contrat bancaire est un accord juridique conclu entre une banque et son client, en vertu duquel la banque fournit un service financier (comme l'ouverture d'un compte, l'octroi d'un crédit ou la gestion d'épargne), et le client s'engage à respecter certaines obligations (paiement d'intérêts, remboursement, etc.).

Ces contrats peuvent prendre différentes formes :

— Les contrats de dépôt : tels que le compte courant ou le compte d'épargne .

— Les contrats de crédit : comme le crédit à la consommation ou le crédit immobilier .

— Les contrats de services : tels que la carte bancaire, le coffre-fort ou la gestion de portefeuille.

Les contrats bancaires sont régis par les principes du droit civil et commercial, et doivent respecter les conditions de validité du contrat : consentement libre, capacité juridique, objet licite et cause licite.

1.6.2 Classification des contrats bancaires

Les contrats bancaires peuvent être classés selon leur nature juridique et leur finalité économique. On distingue principalement les catégories suivantes :

1. **Les contrats de dépôt** :
   — Dépôt à vue (compte courant), permettant les opérations courantes .
   — Dépôt à terme, avec des intérêts et une échéance convenue.
   — Livret d'épargne, destiné à la constitution d'une épargne rémunérée.
2. **Les contrats de crédit** :
   — Crédit à la consommation, accordé pour des achats de biens ou services .
   — Crédit immobilier, destiné au financement de l'achat ou la construction d'un bien immobilier
   — Découvert autorisé, permettant un solde débiteur temporaire sur un compte courant.
3. **Les contrats de services bancaires** :
   — Convention de compte encadrant l'ouverture et la gestion d'un compte .
   — Carte bancaire (débit, crédit, retrait) .
   — Services de paiement : virements, prélèvements, chèques.
4. **Les contrats de gestion** :
   — Gestion sous mandat, où la banque gère un portefeuille pour le compte du client .
   — Gestion conseillée, avec des recommandations régulières au client.

1.6.3 Contrat de crédit immobilier

Le crédit immobilier est un contrat bancaire à long terme où la banque et le client agissent selon leurs propres intérêts. Le crédit immobilier est une opération par laquelle un prêteur (banque ou établissement de crédit) met à la disposition d'un emprunteur (personne physique) une somme d'argent sur une longue durée. Il est destiné à financer l'achat d'un logement, d'un terrain ou des travaux de rénovation ou d'aménagement [14].

Les différents crédits, dont le crédit immobilier, sont en général classés en fonction de la nature du bien qu'ils financent et de leur durée. Le crédit immobilier entre dans le cadre des crédits à long terme. Un prêt relais est un crédit à court terme (généralement 6 mois à 2 ans) accordé par une banque pour financer l'achat d'un nouveau bien (ex. : maison, appartement) pendant que l'emprunteur attend de vendre son bien actuel.

• Les caractéristiques du crédit immobilier [14]

Un crédit immobilier est le plus souvent :

- Établi sous forme de prêt d'un montant précis, accordé par une banque ou un organisme financier spécialisé.
- Contracté sur une durée longue (plusieurs années ou décennies), sauf dans le cas du prêt relais, qui couvre une période d'attente entre l'achat d'un bien immobilier et la revente d'un autre bien (ou une rentrée financière attendue).
- À taux fixe (le cas le plus courant) ou à taux révisable.
- Lié à un apport personnel.
- Remboursable par mensualités constantes.
- Garanti par une sûreté obligatoire sur le bien financé.
- Accompagné d'une assurance décès-invalidité obligatoire sur l'emprunteur, et de frais de dossier.
- Limité à une partie de la valeur du bien ; en général, un apport personnel situé entre 10% et 30% est exigé.

• Les éléments du crédit immobilier [3]

- **Le montant** : Il n'est pas limité de manière stricte, mais peut atteindre jusqu'à 85 % du coût d'achat du logement. Il est défini dès le départ en fonction du revenu et de l'âge de l'emprunteur.
- **La durée de remboursement** : Généralement limitée à 30 ans, et souvent conditionnée par l'âge maximal de 70 ans à la fin du crédit. Elle est fixée selon la réglementation en vigueur, les conditions d'éligibilité au marché hypothécaire, ainsi que la capacité de remboursement de chaque client.
- **Le taux d'intérêt** : Élément essentiel du crédit immobilier, au même titre que la durée, car il détermine le montant des mensualités. Il peut être :
  - **Fixe** : Taux classique, défini à la signature du contrat et valable durant toute la durée du prêt. Plusieurs formules existent.
  - **Variable** : Peut évoluer en fonction d'un indice de référence.

  Le Taux Effectif Global (TEG) [5]prend en compte tous les frais : intérêts, assurance-crédit, frais de dossier et de garantie.

1.6.4 Les étapes du processus de crédit immobilier

Étape 1 : Documents constitutifs du dossier de crédit [14]

L'emprunteur soumet un dossier de crédit comprenant les pièces suivantes :

- Une demande de crédit complétée selon le modèle fourni.
- Une copie de la pièce d'identité.
- Une fiche familiale.

— Un extrait d'acte de naissance.
— Un certificat de résidence.
— Une attestation d'intérêts, selon le modèle.
— Une copie de la carte d'identification fiscale pour les entrepreneurs individuels (commerçants, artisans, professions libérales, etc.).
— Une attestation de travail récente, accompagnée des trois dernières fiches de paie, ou, pour les salariés, du relevé des émoluments (original + copie).
— Un relevé de compte bancaire ou postal des douze derniers mois.
— Les trois derniers avis d'imposition ou tout autre justificatif de revenus pour les non-salariés.
— Les bilans et comptes de résultat des trois derniers exercices pour les non-salariés (commerçants) sollicitant un crédit supérieur à 20 000 000 DA.
— Un extrait de rôle daté de moins de trois mois pour les non-salariés.
— Une autorisation de consultation de la Centrale des Risques Entreprises et Ménages (CREM).

Étape 2 : Simulation de crédit [15]

La première étape consiste en la présentation du client auprès de la banque, généralement au niveau du chargé de clientèle. Ce dernier procède à une simulation de crédit en recueillant les informations personnelles de l'emprunteur, telles que le nom, le prénom, l'âge, ainsi que d'autres données requises sur la fiche de simulation.

Une fois la simulation effectuée, deux éléments sont pris en considération : d'une part, la validation technique du projet par le logiciel de simulation (étape 1) ; d'autre part, l'acceptation ou non, par le client, des résultats proposés, notamment en ce qui concerne le montant de la mensualité et la durée du crédit. Ces éléments permettent de vérifier si l'offre est compatible avec les attentes et les capacités de remboursement du client.

Étape 3 : Dépôt et étude du dossier

Le client fournit l'ensemble des documents requis et les dépose auprès du service Crédit, où les chargés d'étude procèdent à l'examen du dossier. Si leur avis est favorable, le dossier est transmis au comité de décision pour validation finale [15].

Après accord définitif du comité, la banque contacte le client pour l'informer de l'acceptation de sa demande de prêt et l'invite à se présenter au service « Engagement » afin de constituer les garanties suivantes :
— prime SGCI.
— commission de gestion.
— assurance décès.

— frais de dossier.

Le client signe alors la convention de crédit. Le dossier est ensuite transmis aux services fiscaux et au notaire pour la mise en place de l'hypothèque au nom de la banque, puis à la conservation foncière pour enregistrement. Enfin, les fonds sont mobilisés et débloqués dans les meilleurs délais.

1.6.5 Modalités de remboursement du crédit

1. Le remboursement du crédit se fait par mensualités constantes.
2. Le compte de chèques de l'emprunteur doit être régulièrement alimenté du montant de chaque échéance pour assurer le paiement à bonne date.
3. En cas de remboursement anticipé total, une indemnité de 4 % du capital restant dû à la date de l'opération est due par l'emprunteur.
4. En cas de remboursement anticipé partiel, l'emprunteur peut choisir entre :
   — réduction du montant des mensualités tout en conservant la durée initiale ;
   — réduction de la durée de remboursement tout en maintenant le montant des mensualités [15].
5. Un nouveau tableau d'amortissement est alors édité et remis à l'emprunteur.
6. En cas de retard de paiement, une pénalité de 1 % est appliquée, calculée à partir du premier jour d'exigibilité de l'échéance jusqu'à son règlement effectif.
7. En cas de décès de l'emprunteur ou du co-emprunteur, constaté par acte de décès, l'agence procède :
   — au virement du capital restant dû au Centre de Garantie des Risques Immobiliers (CCIR).
   — à la déclaration du sinistre auprès de la compagnie d'assurance concernée [15].

1.7 Problématiques classiques dans les contrats bancaires

Les contrats bancaires sont souvent confrontés à plusieurs problématiques qui peuvent nuire à leur efficacité. Parmi les plus courantes, on trouve :

Comment peut-on optimiser les contrats bancaires de manière à maximiser le profit de la banque tout en les rendant acceptables pour les clients ?

Comment la banque peut-elle concevoir un contrat optimal alors qu'elle ne connaît pas parfaitement la solvabilité ou l'intention réelle du client ?

Une fois le contrat signé, comment inciter le client à adopter un comportement prudent (ne pas prendre trop de risques) ?

Exemple : Un emprunteur utilise le crédit pour un projet risqué, espérant maximiser son gain si ça réussit, et faire défaut sinon.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les principales catégories de contrats bancaires, en méttant en lumière le crédit immobilier, ses caractéristiques, son processus d'octroi ainsi que ses modalités de remboursement, posant ainsi les bases pour l'analyse des problématiques d'optimisation qui y sont liées.

Chapitre 2

Approche stratégique des contrats bancaires à travers la théorie des jeux

Introduction

Comme dans toute situation réelle, un jeu est défini par un ensemble de règles précises qui encadrent l'interaction entre les joueurs. Ces règles indiquent notamment le nombre de participants, les choix possibles pour chacun, la possibilité éventuelle de coopération entre eux, ainsi que l'ordre de prise de décision. Elles permettent ainsi de déterminer qui agit, à quel moment, et de quelle manière.

Au fil des dernières décennies, la théorie des jeux a connu une évolution importante. Si elle est née dans le champ de l'économie, ses applications s'étendent aujourd'hui à des domaines variés tels que les sciences politiques, l'analyse stratégique, et la finance, notamment dans les secteurs de l'assurance et du crédit bancaire [5].

Ce chapitre est divisé en deux sections. La première est consacrée à la présentation des principales notions de base de la théorie des jeux, incluant les catégories de jeux, leurs formes de représentation, ainsi que les concepts de solution associés.
La seconde portera plus spécifiquement sur une classe particulière : les jeux bayésiens.

2.1 Définition d'un jeu

Un jeu est une situation d'interaction stratégique entre deux joueurs ou plus, dans laquelle chacun prend des décisions qui peuvent influencer le résultat global. Un jeu est défini par trois éléments essentiels : les joueurs, leurs stratégies possibles, et les gains (ou récompenses) associés à chaque combinaison d'actions.

2.2 Elément de base d'un jeux

La théorie des jeux étudie des situations dans lesquelles plusieurs joueurs prennent des décisions stratégiques en fonction d'un ensemble d'actions possibles, dans un cadre précis défini par des règles établies à l'avance. Le résultat d'un jeu dépend des choix combinés des joueurs, et détermine pour chacun un certain gain ou une perte.

Dans la suite de ce travail, nous introduirons les principaux concepts de cette théorie, ainsi que les notations utilisées pour modéliser les interactions entre les acteurs. Nous commencerons par définir la notion de joueur, puis les éléments constituant la structure du jeu dans laquelle ces décisions s'inscrivent.

•**Le joueur** Un joueur peut être une personne, un groupe d'individus, une entreprise, un État, voire même un agent extérieur comme la nature. Autrement dit, il s'agit de tout acteur participant au jeu, capable de prendre des décisions et d'influencer l'issue des interactions.

•**Stratégie** Une stratégie dans un jeu représente un plan d'action complet qu'un joueur adopte en choisissant, parmi les options disponibles, celle qui correspond le mieux à ses préférences ou à son intérêt. La combinaison des choix effectués par l'ensemble des joueurs constitue ce que l'on appelle une issue du jeu, ou encore un profil stratégique. Il existe différents types de stratégies, parmi lesquels on peut citer :

1. **Stratégie pure :** une stratégie pure d'un joueur est un plan d'actions qui prescrit une action de ce joueur pour chaque fois qu'il est susceptible de jouer.
2. **Stratégie mixte :** une stratégie mixte d'un joueur est une distribution de probabilité sur son ensemble de stratégies pures.

•**L'utilité** L'utilité d'un joueur correspond au résultat qu'il obtient à l'issue du jeu, pouvant être soit un gain (bénéfice positif), soit une perte (bénéfice négatif). Elle dépend non seulement des décisions qu'il prend, mais aussi de celles de l'ensemble des autres joueurs impliqués dans le jeu. Selon le contexte, l'utilité peut prendre différentes formes : un prix de marché, le montant d'une enchère, un score, ou toute autre grandeur mesurable reflétant l'intérêt du joueur.

•**Rationnalité** la rationnalité individuelle d'un joueur est une régle de maximisation du gain individuel, cette notion est fondamentale en théorie des jeux.

2.3 Classification des jeux

La théorie des jeux permet de classer les jeux en différentes catégories selon plusieurs critères. Voici les classifications les plus courantes :

2.3.1 Selon l'ordre du jeu

Ce critère distingue les jeux selon le moment où les joueurs prennent leurs décisions :

• **Jeux simultanés (ou stratégiques) :** dans ces jeux, tous les joueurs choisissent leur stratégie en même temps, sans connaître au préalable les choix des autres. Il s'agit généralement de jeux en un seul coup, comme le dilemme du prisonnier. L'analyse de ces jeux repose souvent sur la recherche d'un équilibre de Nash.

• **Jeux séquentiels :** ces jeux se déroulent en plusieurs étapes ou coups successifs. Les joueurs agissent à tour de rôle, en respectant un ordre déterminé. Ils peuvent parfois observer les actions précédentes de leurs adversaires avant de faire leurs propres choix. Un exemple classique est le jeu d'échecs, où chaque joueur joue après avoir vu le coup précédent de son adversaire. L'analyse de ces jeux s'appuie sur des outils comme l'arbre de jeu ou le raisonnement rétrograde.

2.3.2 Selon l'information

L'information dont disposent les joueurs influence fortement leurs stratégies. On distingue ici deux axes de classification :

• **Information complète :** le jeu est dit à information complète si chaque joueur connaît l'ors de la prise de décision :

— Ses propres stratégies disponibles.

— L'ensemble des stratégies possibles des autres joueurs.

— Les gains (ou pertes) associés à toutes les combinaisons de stratégies.

Les joueurs ont donc une connaissance totale de la structure du jeu, ce qui permet de modéliser précisément leurs décisions.

• **Information incomplète :** si au moins un de ces éléments est inconnu pour un joueur, alors le jeu est dit à information incomplète. Ce type de jeu implique une incertitude sur les caractéristiques du jeu, souvent modélisée à l'aide de jeux bayésiens, où les croyances jouent un rôle central dans les décisions.

• **Information parfaite :** un jeu est à information parfaite si, à chaque étape, tous les joueurs connaissent tous les coups précédemment joués. Ainsi, aucune incertitude ne subsiste quant au déroulement passé du jeu.

• **Information imparfaite :** un jeu est à information imparfaite si, à un moment donné, au moins un joueur ne sait pas ce qu'a fait un autre joueur précédemment. Il devra alors anticiper ou estimer les actions des autres, souvent à l'aide de probabilités.

2.3.3 Selon la coopération entre joueurs

Ce critère distingue les jeux selon que les joueurs peuvent ou non s'allier :

• **Jeux coopératifs :** dans ces jeux, les joueurs peuvent former des coalitions, c'est-à-dire s'engager à coopérer pour maximiser un gain collectif. Les membres d'une coalition cherchent un compromis bénéfique à tous, et peuvent partager les gains obtenus. La théorie des jeux coopératifs s'intéresse notamment à la répartition équitable des gains, par des concepts comme le noyau ou la valeur de Shapley.

• **Jeux non coopératifs :** les joueurs agissent de manière indépendante et cherchent uniquement à maximiser leur gain personnel, même s'ils peuvent parfois communiquer ou négocier. Toutefois, aucune alliance contraignante n'est possible. L'analyse porte sur les équilibres stratégiques obtenus lorsque chacun agit dans son propre intérêt.

Autres critères de classification

D'autres critères peuvent affiner la classification des jeux, notamment :

1. **Selon le nombre de stratégies**
   — **Jeux finis :** chaque joueur dispose d'un nombre fini de stratégies. Ce type de jeu est le plus étudié, car il est plus simple à modéliser et permet souvent une analyse complète à l'aide de tableaux de gains.
   — **Jeux infinis :** un ou plusieurs joueurs ont un ensemble infini de stratégies, souvent continu (comme des quantités, des prix, etc.). Ces jeux nécessitent des outils plus avancés, tels que le calcul différentiel, les fonctions utilité continues, ou les intégrales.
2. **Selon le nombre de joueurs**
   — **Jeux à deux joueurs :** appelés jeux bimatriciels, ils sont plus faciles à analyser, et de nombreux outils ont été développés spécifiquement pour eux.
   — **Jeux à n joueurs :** lorsque le nombre de joueurs est supérieur à deux, l'analyse devient plus complexe. Des comportements comme la formation de coalitions, la coopération partielle, ou les effets externes doivent être pris en compte.
3. **Selon la forme des fonctions de gain**

   • **Jeux à somme nulle :** les gains des uns sont exactement égaux aux pertes des autres. Ce sont des jeux strictement compétitifs, comme la plupart des jeux de stratégie militaire.

   • **Jeux à somme non nulle :** les intérêts des joueurs peuvent être partiellement alignés. La coopération ou la compétition peuvent coexister, et les équilibres peuvent être plus nuancés.

2.3.4 Présentation d'un jeu en forme normale

Un jeu sous forme normale (ou stratégique) est défini par un triplet :

$$\langle I, \{X_i\}_{i\in I}, \{f_i\}_{i\in I}\rangle \tag{1.3}$$

où :
- — $I = \{1, 2, \dots, n\}$ représente l'ensemble des joueurs.
- — X_i est l'ensemble des stratégies disponibles pour le joueur i.
  Une issue du jeu est représentée par un vecteur $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, où chaque $x_i \in X_i$ indique la stratégie choisie par le joueur i.
- — $f_i : X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \to \mathbb{R}$ est la fonction de gain (ou d'utilité) du joueur i,
  définie sur l'ensemble des issues possibles $x \in X = \prod_{i=1}^{n} X_i$.

2.4 Concepts de solutions des jeux stratégiques

Une fois les jeux stratégiques définis, une question essentielle se pose : quelle est la solution d'un tel modèle ? Un concept de solution désigne l'ensemble des stratégies adoptées par les joueurs, menant à un résultat stable du jeu.Dans un jeu non coopératif, chaque joueur cherche à maximiser son gain individuel, et la solution correspond à un état où aucun joueur n'a intérêt à changer de stratégie : c'est ce qu'on appelle un équilibre. Lorsque cet équilibre est unique, la solution est prévisible ; cependant, il peut exister plusieurs équilibres, et parfois il n'en existe pas

2.4.1 Équilibre en stratégies dominantes

On dit qu'un jeu possède un équilibre en stratégies dominantes s'il admet un profil de stratégies dans lequel chaque joueur adopte une stratégie dominante.

Définition 1.1 : Stratégie dominée Une stratégie $x_i \in X_i$ du joueur i est dite *dominée* par une autre stratégie $x_i' \in X_i$ si :

$$\forall x_{-i} \in X_{-i},\ f_i(x_i, x_{-i}) \leq f_i(x_i', x_{-i})$$

Cette condition signifie que, quelle que soit la stratégie choisie par les autres joueurs x_{-i}, le joueur i n'a jamais intérêt à jouer x_i, car il obtiendrait un gain inférieur ou au mieux égal à celui obtenu avec la stratégie x_i'. Autrement dit, la stratégie x_i est inefficace et devrait être évitée. Elle est dite faiblement dominée.

Définition 1.2 : Stratégie strictement dominée Une stratégie $x_i \in X_i$ du joueur i est *strictement dominée* par $x_i' \in X_i$ si :

$$\forall x_{-i} \in X_{-i},\ f_i(x_i, x_{-i}) < f_i(x'_i, x_{-i})$$

La stratégie x_i donne toujours un résultat strictement inférieur à la stratégie x'_i, peu importe ce que choisissent les autres joueurs. Cela signifie que x'_i est une bien meilleure option dans tous les cas, et que x_i doit être systématiquement écartée. Elle est dite strictement dominée.

Définition 1.3 : Stratégie dominante Une stratégie $x_i \in X_i$ est *dominante* si elle apporte au joueur i un gain supérieur ou égal à toute autre stratégie, peu importe les actions des autres joueurs :

$$\forall x'_i \in X_i,\ \forall x_{-i} \in X_{-i},\ f_i(x_i, x_{-i}) \geq f_i(x'_i, x_{-i})$$

Exemple 1.1 Soit le jeu suivant donné sous forme normale :

J1\J2	**b1**	**b2**	**b3**
a1	$(7,\ 5)$	$(4,\ 7)$	$(1,\ 8)$
a2	$(9,\ 4)$	$(6,\ 3)$	$(4,\ 6)$

On remarque que :

$$9 > 7, \quad 6 > 4, \quad 4 > 1$$

Ce qui signifie que la stratégie $a2$ domine strictement $a1$ pour le joueur 1. Ainsi, la stratégie dominante du joueur 1 est $a2$. Par le même raisonnement, on déduit que la stratégie dominante du joueur 2 est $b3$, car :

$$\begin{matrix} 8 > 7 \\ 8 > 5 \end{matrix} \quad \text{et} \quad \begin{matrix} 6 > 3 \\ 6 > 4 \end{matrix}$$

Elle procure un gain supérieur aux autres colonnes, quel que soit le choix du joueur 1. Pour trouver un équilibre en stratégies (strictement) dominantes (ESD), on peut procéder à l'élimination successive des stratégies strictement dominées, tant qu'il en existe.Cette méthode permet :soit de réduire le jeu pour appliquer ensuite d'autres concepts d'équilibre (par exemple, un équilibre de Nash), soit de déterminer directement une solution du jeu. Ce processus est appelé méthode de la dominance itérée.

2.4.2 Stratégie de meilleure réponse

Une stratégie est dite de meilleure réponse pour un joueur si elle maximise son utilité en tenant compte des choix des autres joueurs. Plus formellement, une stratégie $x_i \in X_i$ est une meilleure réponse aux stratégies des autres joueurs x^*_{-i} si :

$$f_i(x_i, x^*_{-i}) \geq f_i(y_i, x^*_{-i}) \quad \forall y_i \in X_i$$

L'ensemble des meilleures réponses de i face à x^*_{-i} est :

$$B(x^*_{-i}) = \left\{x_i \in X_i \;\middle|\; f_i(x_i, x^*_{-i}) \geq f_i(y_i, x^*_{-i}),\ \forall y_i \in X_i\right\}$$

2.4.3 Équilibre de Nash

Par équilibre, on entend une situation dans laquelle aucun joueur ne souhaite modifier son comportement, étant donné les choix des autres joueurs. Une fois atteint, l'équilibre reste stable : il n'y a aucune raison de le quitter. L'équilibre de Nash, aussi appelé équilibre non coopératif, a été introduit par le mathématicien et économiste américain John Nash en 1950 [10]. Il constitue un concept central en théorie des jeux, fondé sur le principe de rationalité individuelle. Un équilibre de Nash est une combinaison de stratégies telle qu'aucun joueur n'a intérêt à modifier sa stratégie de façon unilatérale, après avoir pris connaissance de celles des autres.

Définition 1.4 : Équilibre de Nash en stratégies pures

Un profil de stratégies $x^* = (x^*_i, x^*_{-i}) \in X$ est un équilibre de Nash en stratégies pures pour le jeu (1.3) si et seulement si :

$$f_i(x^*_i, x^*_{-i}) \geq f_i(x_i, x^*_{-i}), \quad \forall x_i \in X_i,\ \forall i\{\in 1, \ldots, n\}$$

Autrement dit, aucun joueur ne peut améliorer son gain en changeant unilatéralement de stratégie.

Définition 1.5 : Équilibre de Nash strict

Un profil de stratégies $x^* = (x^*_i, x^*_{-i}) \in X$ est un équilibre de Nash strict si et seulement si :

$$f_i(x^*_i, x^*_{-i}) > f_i(x_i, x^*_{-i}), \quad \forall x_i \in X_i,\ \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

Existence de l'équilibre de Nash

Comme mentionné précédemment, un jeu peut admettre :

— plusieurs équilibres de Nash,

— un équilibre unique,

— ou aucun équilibre en stratégies pures.

Théorème 1.1 (Théorème de Nash [10]) Considérons le jeu sous forme normale (1.3). Un équilibre de Nash (en stratégies pures) existe si :

1. $\forall i \in I,\ X_i$ est un ensemble convexe et compact .
2. $\forall i \in I,\ f_i : X \to \mathbb{R}$ est une fonction continue .
3. $\forall i \in I$, la fonction $f_i(\cdot, x_{-i}) : X \to \mathbb{R}$ est concave.

Alors, le jeu défini admet au moins un équilibre de Nash.

Si un jeu admet un équilibre de Nash en stratégies pures, l'une des méthodes pour le (ou les) déterminer consiste à vérifier, pour chaque combinaison de stratégies possibles, si un joueur a intérêt à modifier sa stratégie de manière unilatérale.

Une autre méthode consiste à repérer, dans la matrice des gains, les meilleures réponses de chaque joueur face aux stratégies de ses adversaires.

2.4.4 Equilibre de Nash en stratégie mixtes

Stratégies mixtes

On suppose qu'un joueur i dispose d'un ensemble X_i de m stratégies pures tel que :

$$X_i = \{x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^m\}$$

et qu'il doit en jouer une. Ce joueur décide de choisir une stratégie particulière x_i^j pour $j = 1, \dots, m$, qu'il jouera selon une *distribution de probabilité*.

Le joueur i associe alors à chaque stratégie pure x_i^j un coefficient α_i^j représentant la probabilité de la jouer. Ainsi, il choisit les valeurs :

$$\alpha_i^1, \alpha_i^2, \dots, \alpha_i^m$$

Le vecteur $\alpha_i = (\alpha_i^1, \alpha_i^2, \dots, \alpha_i^m)$ est appelé une *stratégie mixte* du joueur i.

Puisque α_i est une distribution de probabilité, les coefficients doivent vérifier les conditions suivantes :

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_i^j = 1 \quad \text{et} \quad 0 \leq \alpha_i^j \leq 1, \quad \text{pour tout } j = 1, \dots, m.$$

Définition 1.6 : Équilibre de Nash en stratégies mixtes

Un équilibre de Nash en stratégies mixtes pour l'extension mixte du jeu (1.3) est un profil de stratégies mixtes $\alpha^* = (\alpha_i^*, \alpha_{-i}^*) \in \Delta = \prod_{i=1}^{n} \Delta_i$ tel que :

$$\forall i \in I,\ \forall \alpha_i \in \Delta_i : \quad E_i(\alpha_i, \alpha_{-i}^*) \leq E_i(\alpha_i^*, \alpha_{-i}^*),$$

où E_i représente le gain espéré du joueur i.

Autrement dit, un profil de stratégies mixtes $\alpha^* = (\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_n^*) = (\alpha_i^*, \alpha_{-i}^*)$ est un équilibre de Nash en stratégies mixtes pour le jeu (1.3) si, pour chaque joueur $i \in N$, la stratégie mixte α_i^* constitue une meilleure réponse aux stratégies mixtes des autres joueurs $(\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_{i-1}^*, \alpha_{i+1}^*, \dots, \alpha_n^*)$.

Théorème 1.2. Tout jeu statique fini possède au moins un équilibre de Nash si les stratégies mixtes sont autorisées [10].

Ce résultat est fondamental car il garantit l'*existence d'un équilibre de Nash*. Toutefois, cette existence n'est assurée que si l'on considère les stratégies mixtes, ce qui constitue une garantie précieuse pour les utilisateurs de la théorie des jeux, en particulier les économistes.

2.5 Jeux sous forme extensive

La modélisation en forme extensive représente un jeu comme une séquence d'événements où les joueurs prennent leurs décisions de manière séquentielle, c'est-à-dire les uns après les autres. Il s'agit d'une des représentations les plus simples et intuitives pour modéliser un jeu fini.

Un jeu sous forme extensive est défini par les éléments suivants :

- Un ensemble N de n joueurs.
- Un arbre fini composé :
  - d'un nœud initial.
  - de nœuds de décision (où les joueurs font leurs choix).
  - de nœuds terminaux (représentant les issues du jeu).
  - et de branches reliant les nœuds selon les décisions possibles.
- Pour chaque nœud de décision, on associe le joueur qui doit choisir une action à ce stade du jeu.
- Pour chaque joueur i, la spécification de l'ensemble des actions permises à chaque nœud de décision où il est susceptible d'intervenir.
- La spécification des gains (ou utilités) de chaque joueur i pour chaque nœud terminal.

Exemple 1.2 : Jeu d'entrée sur un marché

Une firme A est en situation de monopole sur un marché. Une autre firme B doit choisir entre deux options : entrer sur le marché ou ne pas entrer.

- Si B choisit de ne pas entrer, alors A obtient un gain de 10 et B un gain de 0.
- Si B décide d'entrer, la firme A doit à son tour choisir entre deux comportements : être agressive ou rester neutre.
  - Si A choisit d'être agressive, les deux entreprises subissent une perte : les gains sont $(-8, -8)$.
  - Si A reste neutre, les deux entreprises réalisent un gain : $(8, 8)$.

La représentation de ce jeu en forme extensive est donnée ci-dessous.

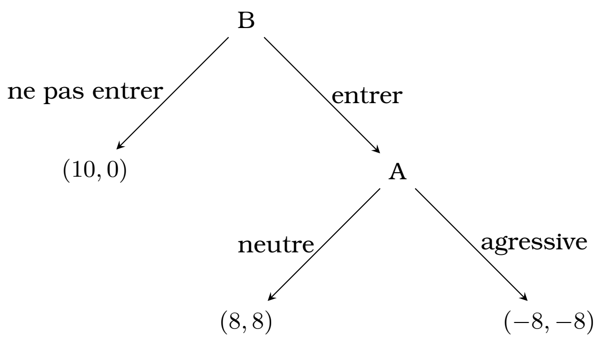


Figure 1.1 – Arbre du jeu d'entrée

Définition 1.7 : Ensemble d'information

L'ensemble d'information à une étape donnée d'un jeu sous forme extensive est l'ensemble de tous les nœuds que le joueur à qui c'est le tour de jouer ne peut pas distinguer entre eux.

Les actions possibles sur les nœuds appartenant à un même ensemble d'information doivent être strictement identiques.

Un jeu sous forme extensive peut être :

— un jeu à information parfaite : chaque ensemble d'information contient un seul nœud.

— un jeu à information imparfaite : un ou plusieurs ensembles d'information contiennent plusieurs nœuds.

2.6 La relation entre un jeu stratégique et un jeu sous forme extensive

Proposition 1.1

Chaque jeu sous forme extensive correspond à un seul jeu sous forme normale, dans lequel les joueurs choisissent leurs stratégies de manière simultanée [11].

Exemple 1.3

Considérons le jeu à deux joueurs J_1 et J_2 dont la forme normale est donnée par la matrice suivante :

J1\J2	U	V
X	(1, 2)	(0, 6)
Y	(4, 3)	(9, 8)

Ce jeu peut correspondre au jeu sous forme extensive suivant :

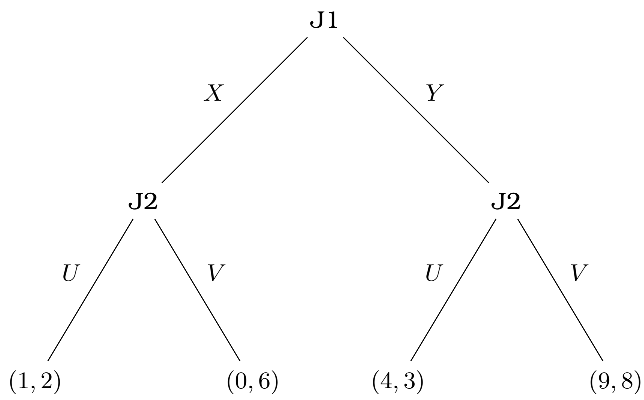


FIGURE 2.1 – Forme extensive du jeu de l'Exemple 1.3

Ce jeu peut être représenté sous forme extensive comme suit :

On ne trouvera pas de représentation sous forme normale correspondante à ce jeu autre que celle qu'on a mentionnée dans le tableau précédemment.
Nous allons maintenant mettre le point sur un type de jeu qui nous intéresse tout particulièrement. Ce type de jeu fait l'objet de plusieurs études dernièrement, et ce, en raison de sa grande utilité dans la modélisation et sa principale caractéristique qui est le manque d'information, qui n'est pas négligeable de nos jours.

2.7 Les jeux a information incompléte

2.7.1 Jeux à information incomplète

Dans les jeux que nous avons étudiés dans la première partie, toutes les caractéristiques du jeu étaient connues de l'ensemble des joueurs. C'est par exemple le cas du jeu d'échecs, où les règles sont communes et chaque joueur peut observer l'intégralité des coups joués avant de prendre une décision.

Ce n'est cependant pas le cas dans certains jeux comme le poker, où chaque joueur possède une information privée (ses cartes) inaccessible aux autres. Dans ce type de situation, un joueur doit non seulement anticiper les stratégies de ses adversaires, mais aussi deviner les informations qu'ils détiennent.

Les jeux à information incomplète cherchent à analyser ce type de situation, dans lesquelles les joueurs ne disposent pas de toutes les données relatives au jeu. Il s'agit d'un cas très fréquent dans la vie réelle.

Par exemple, dans les enchères au second prix (ou enchères de Vickrey), le gagnant paie la deuxième offre la plus élevée. Les enchérisseurs ignorent les offres exactes des autres participants, ce qui influence leurs gains potentiels. De même, l'octroi d'un crédit par une banque à un client peut être modélisé comme un jeu à information incomplète : la banque ne sait pas, au moment de l'accord, si le client remboursera effectivement son emprunt [12].

Les acteurs de ce type de jeux sont appelés joueurs bayésiens, et le jeu lui-même est appelé *jeu bayésien.*

Dans cette partie, nous présenterons le modèle le plus célèbre et le plus utilisé dans la littérature : le modèle de Harsanyi. Nous étudierons ensuite la notion d'équilibre bayésien, que nous illustrerons à l'aide de quelques exemples.

2.7.2 Modèle de Harsanyi et déroulement du jeu

John Harsanyi a proposé de traiter les jeux à information incomplète en les transformant en jeux à information complète, mais à information imparfaite. Il introduit un joueur fictif, appelé Nature, qui choisit au hasard les types des joueurs selon une distribution de probabilité connue de tous.

Chaque joueur observe uniquement son propre type et fonde ses décisions sur des croyances concernant les types des autres, en se basant sur cette distribution [18].

John Harsanyi [1] a proposé une solution pour traiter les jeux à information incomplète dans son article [18]. L'approche proposée par Harsanyi consiste à transformer un jeu à information incomplète en un jeu à information complète, mais imparfaite. Pour cela, Harsanyi a proposé des modifications consistant à supposer que certains des paramètres du modèle à information incomplète prennent des valeurs aléatoires, et donc suivent une distribution de probabilités. Dans ce cas, il faut introduire un nouveau joueur appelé « la Nature », qui est totalement indifférent à l'issue du jeu. C'est un joueur non rationnel qui tire au hasard les valeurs des paramètres inconnus du jeu. Cependant, les probabilités de chacune des actions de la Nature sont spécifiées. Si, dans un jeu sous forme stratégique $\langle I, (X_i)_{i\in I}, (f_i)_{i\in I}\rangle$, au moins un joueur ne dispose que d'informations partielles sur les données du jeu et/ou sur les autres joueurs, alors le jeu se déroule comme suit :

1. Le jeu commence par le mouvement de la Nature, qui procède au tirage aléatoire de tous les types $\theta_1, \ldots, \theta_n$, selon une distribution de probabilité P qui est de connaissance commune pour tous les joueurs.
2. La Nature révèle le type θ_i au joueur i, c'est-à-dire que chaque joueur ne prendra connaissance que de son propre type. Cette connaissance constitue une information privée pour le joueur.
3. En ne connaissant que la distribution $p(\theta)$, où $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$, et son propre type θ_i, chaque joueur i ne peut que se référer à des croyances. Ces croyances correspondent à des probabilités sur la valeur θ_{-i} du type des autres joueurs, sachant que lui-même est de type θ_i. Nous notons ces probabilités du joueur i, $i \in I$:..

   i, $i \in I$:

$$p_i(\theta_1, \ldots, \theta_{i-1}, \theta_{i+1}, \ldots, \theta_n \mid \theta_i) = p_i(\theta_{-i} \mid \theta_i)$$

1. Prix Nobel d'économie en 1994

4. Chaque joueur i choisit une stratégie dans son espace X_i. Ce choix se fait en fonction du type θ_i révélé au début du jeu, on peut donc écrire $x_i(\theta_i)$.
5. Le gain de chaque joueur i dépend non seulement du profil de stratégies pures $x = (x_1, \dots, x_n)$, mais également de sa caractéristique privée θ_i. Il devient alors une espérance de gain qui sera définie par la suite.

Le jeu bayésien peut alors être modélisé par le 6-Tuplet suivant [13] :

$$\langle I, \{\Theta_i\}_{i\in I}, \{A_i\}_{i\in I}, pP, \{X_i\}_{i\in I}, \{f_i\}_{i\in I}\rangle$$

Où :

— $I = \{1, \dots, n\}$ est l'ensemble des joueurs ;

— Θ_i est l'ensemble des types du joueur i et $\Theta = \prod_{i=1}^{n} \Theta_i$ est l'ensemble des profils de types ;

— A_i est l'ensemble des actions du joueur i, et $A = \prod_{i=1}^{n} A_i$ est l'ensemble des profils d'actions ;

— p est la distribution de probabilité jointe sur le profil de types, avec $p : \Theta \to [0, 1]$;

— X_i est l'ensemble des stratégies pures du joueur i, tel que $X_i : \Theta_i \to A_i$;

— f_i est la fonction de gain du joueur i, telle que $f_i : A \times \Theta \to \mathbb{R}$.

Plus précisément, on a :

— **Le type** : dans le formalise d'un jeu bayésien, le joueur possède une information privée, propre à lui seul, appelée le type, qu'il est le seul à connaître, et qu'il n'a pas forcément intérêt à révéler.

— **Les croyances** : le joueur ne possédant pas l'information privée de ses adversaires, il construit ce qu'on appelle des croyances sur leurs types, afin de compléter l'information manquante. Ces croyances sont représentées par une distribution de probabilités sur l'ensemble des types des autres joueurs.

2.7.3 Jeux statiques bayésiens

Dans un jeu bayésien, un joueur fictif appelé Nature détermine de manière aléatoire les types des joueurs, selon une distribution de probabilité commune à tous. Chaque joueur connaît uniquement son propre type, ce qui constitue une information privée, et forme des croyances sur les types des autres joueurs.

Le jeu est modélisé par un 6-uplet :

$$\langle I, \{\Theta_i\}_{i\in I}, \{A_i\}_{i\in I}, p, \{X_i\}_{i\in I}, \{f_i\}_{i\in I}\rangle$$

où :

— $I = \{1, \dots, n\}$ est l'ensemble des joueurs .

— Θ_i est l'ensemble des types du joueur i, et $\Theta = \Theta_1 \times \cdots \times \Theta_n$ l'ensemble des profils de types .

— A_i est l'ensemble des actions du joueur i, et $A = A_1 \times \cdots \times A_n$.

— p est la distribution de probabilité sur Θ, avec $p : \Theta \to [0, 1]$.
— X_i est l'ensemble des stratégies pures du joueur i, où $X_i : \Theta_i \to A_i$.
— $f_i : A \times \Theta \to \mathbb{R}$ est la fonction de gain du joueur i.

Chaque joueur, ne connaissant que son propre type θ_i, agit en fonction de celui-ci et forme des croyances sur les types θ_{-i} des autres. Ces croyances sont représentées par des distributions conditionnelles $P_i(\theta_{-i} \mid \theta_i)$.

Stratégies et gains espérés dans un jeu bayésien

Dans un jeu bayésien, une stratégie pure du joueur i est une fonction qui associe à chaque type θ_i une action de l'ensemble A_i :

$$x_i : \Theta_i \to A_i, \quad \theta_i \mapsto x_i(\theta_i)$$

Un profil de stratégies est défini comme une fonction $s : \Theta \to A$ telle que :

$$\forall \theta \in \Theta, \quad x(\theta) = (x_1(\theta_1), \ldots, x_n(\theta_n))$$

Le gain du joueur i dépend de sa stratégie, de celles des autres et de son type θ_i. Comme il ne connaît pas les types des autres joueurs, il forme une croyance $P_i(\theta_{-i} \mid \theta_i)$ à partir de la distribution jointe $P(\theta)$, selon la formule de Bayes :

$$P_i(\theta_{-i} \mid \theta_i) = \frac{P(\theta_{-i}, \theta_i)}{P(\theta_i)} \quad \text{avec} \quad P(\theta_i) = \sum_{\theta_{-i}} P(\theta_{-i}, \theta_i)$$

L'espérance de gain du joueur i pour une stratégie s_i donnée est :

$$\tilde{f}_i(x_i(\theta_i), x_{-i}(\theta_{-i})) = \sum_{\theta_{-i} \in \Theta_{-i}} f_i(x_i(\theta_i), x_{-i}(\theta_{-i}), \theta) \cdot P_i(\theta_{-i} \mid \theta_i)$$

Ainsi, le jeu bayésien peut être représenté sous la forme normale suivante avec des utilités espérées :

$$\left\langle I, (X_i)_{i \in I}, (\tilde{f}_i)_{i \in I} \right\rangle$$

Par exemple, dans un jeu de poker, le type d'un joueur correspond aux cartes qu'il a en main, et sa stratégie indique comment il joue selon ces cartes.

2.7.4 Équilibre de Nash bayésien

Dans un jeu bayésien, chaque joueur prend connaissance de son type, puis choisit la stratégie qui maximise son gain espéré, en tenant compte des types possibles des autres joueurs et des probabilités associées.

Un équilibre de Nash bayésien correspond à une situation dans laquelle chaque joueur anticipe correctement les choix des autres, en fonction de leurs types et de leurs réactions. Cela implique que les stratégies choisies sont mutuellement optimales, compte tenu des croyances de chacun.

Ces croyances sont fondées sur la distribution commune des types et doivent être cohérentes avec la règle de Bayes. Ainsi, un équilibre bayésien se caractérise par un profil de stratégies où, pour chaque joueur, aucune déviation unilatérale ne peut améliorer son espérance de gain, étant donné son type et ses croyances sur les autres.

2.7.5 Équilibre de Nash bayésien en stratégies pures

Définition 1.9 (Équilibre de Nash bayésien) Un profil de stratégies x^* est un équilibre de Nash bayésien en stratégies pures pour le jeu (1.6) si :

$$\forall i \in I, \forall x_i \in X_i, \forall \theta_i \in \Theta_i \quad \tilde{f}_i(x_i^*(\theta_i), x_{-i}^*(\theta_{-i})) \geq \tilde{f}_i(x_i(\theta_i), x_{-i}^*(\theta_{-i}))$$

Dans ce qui suit, nous cherchons l'équilibre de Nash bayésien à travers un exemple afin de mieux comprendre ce concept.

2.7.6 Équilibre de Nash bayésien en stratégies mixtes

Le théorème de Nash [10] établit deux conditions suffisantes pour garantir l'existence d'un équilibre de Nash dans un jeu statique : un nombre fini de joueurs et un nombre fini de stratégies pures disponibles pour chacun d'eux. Ce théorème peut être appliqué à la version étendue du jeu bayésien, laquelle modélise la situation d'information incomplète.

Dans ce cadre, la deuxième condition impose que chaque joueur i dispose d'un ensemble fini de types et d'actions. Ainsi, il suffit que le nombre de types possibles $\theta_i \in \Theta_i$ et le nombre d'actions $a_i \in A_i$ soient tous deux finis pour garantir l'existence d'un équilibre dans le jeu étendu.

Définition 1.10 Une stratégie mixte du joueur i dans le jeu bayésien (1.4) est une application :

$$\alpha_i : \Theta_i \to \Delta(X_i),$$

où $\alpha_i(\theta_i)(x_i)$, notée aussi $\alpha_i(x_i|\theta_i)$, représente la probabilité que le joueur i de type θ_i choisisse l'action x_i.

Définition 1.9 Un profil de stratégies mixtes $(\alpha_1^*, \ldots, \alpha_i^*, \ldots, \alpha_n^*)$ constitue un équilibre bayésien en stratégies mixtes si, pour chaque joueur $i \in I$, la stratégie α_i^* est une meilleure réponse aux stratégies mixtes $(\alpha_1^*, \ldots, \alpha_{i-1}^*, \alpha_{i+1}^*, \ldots, \alpha_n^*)$ des autres joueurs.

2.8 Application de la théorie des jeux dans le domaine de la banque

La théorie des jeux, initialement développée pour modéliser des situations de conflit ou de coopération entre plusieurs agents rationnels, trouve aujourd'hui de nombreuses applications dans le domaine de l'économie. L'un des secteurs où cette approche est particulièrement utile est celui de la banque, où les interactions entre la banque, les clients, les régulateurs ou d'autres institutions financières sont souvent de nature stratégique. La théorie des jeux permet alors d'analyser et de prédire les comportements dans des situations complexes, marquées par l'incertitude, l'information asymétrique et des intérêts divergents.

2.8.1 Le modèle de Diamond–Dybvig (1983)

La panique bancaire est l'un des modèles les plus célèbres en théorie bancaire. Il explique comment une banque peut être victime d'un « bank run », c'est-à-dire un retrait massif des dépôts, même si elle est fondamentalement solvable. Les déposants, par peur que d'autres retirent leur argent, sont incités à faire de même, créant une crise auto-réalisatrice. Ce phénomène est modélisé comme un jeu avec équilibres multiples, où la panique peut devenir un équilibre rationnel. Le modèle justifie la nécessité d'une assurance des dépôts pour prévenir ce type de crise [12].

2.8.2 Jeux à champ moyen

L'analyse du risque systémique devient essentielle dans les systèmes où un très grand nombre d'acteurs interagissent, comme c'est le cas dans les systèmes bancaires interconnectés. Les jeux de champ moyen permettent de modéliser le comportement global du système.

Chaque banque (ou déposant) optimise ses propres décisions, mais ces décisions influencent l'ensemble du système. Cette approche est particulièrement pertinente pour modéliser le risque systémique, comme lors des crises financières [11].

2.8.3 Jeux évolutifs dynamiques : FinTech et financement agricole

Dans un environnement en constante évolution, comme celui de la FinTech ou du financement des PME agricoles, les jeux évolutifs modélisent les stratégies des banques et des entreprises dans le temps.

Les acteurs adaptent leurs décisions selon les résultats obtenus dans le passé, un peu comme dans la théorie de l'évolution. Ce cadre permet d'analyser l'impact des nouvelles technologies ou des nouvelles pratiques financières sur les comportements stratégiques [13].

2.8.4 Théorie des contrats implicites : relation à long terme banque-client

Contrairement à une relation ponctuelle, une banque peut maintenir une relation de long terme avec un client. Par exemple, elle peut accepter temporairement un défaut de paiement si elle croit que le client sera solvable à l'avenir.

Cela constitue un contrat implicite, non écrit, mais basé sur la confiance mutuelle et les anticipations stratégiques. Ce type de jeu répété permet d'expliquer pourquoi certaines banques continuent à prêter à des clients « fidèles », malgré des retards de paiement passagers [13].

2.9 Conclusion

Ce chapitre a été consacré à l'introduction des concepts fondamentaux de la théorie des jeux, un outil mathématique puissant permettant d'analyser et de modéliser des situations d'interaction stratégique entre plusieurs agents.

Dans une première partie, nous avons présenté les jeux non coopératifs à information complète. Ensuite, la seconde partie a été dédiée aux jeux à information incomplète, également appelés jeux bayésiens, qui constituent une classe essentielle pour la suite de notre étude.

L'analyse de ces deux types de jeux a permis d'établir un lien formel entre certaines situations réelles de conflit et les mécanismes proposés par la théorie des jeux. Cette approche ouvre la voie à une modélisation rigoureuse des interactions entre la banque et le client dans le cadre des contrats de crédit immobilier, que nous aborderons dans le chapitre suivant.

Chapitre 3

Application des jeux bayésiens aux contrats de crédit immobilier

3.1 Introduction

Lorsqu'un client manifeste un besoin de financement, le processus de crédit débute généralement par un entretien avec un conseiller bancaire. Au cours de cet échange, le client expose son projet (achat immobilier, besoin de trésorerie, investissement professionnel, etc.) ainsi que sa situation financière (revenus, charges, patrimoine, antécédents bancaires).

La banque procède ensuite à une analyse approfondie du dossier, en évaluant la solvabilité du client à l'aide de plusieurs indicateurs : taux d'endettement, stabilité des revenus, capacité de remboursement et profil de risque. En fonction de cette évaluation, elle détermine si le client est éligible à un crédit et, le cas échéant, élabore une ou plusieurs propositions personnalisées sous forme de contrats adaptés à son profil.

Ces contrats varient selon plusieurs paramètres : le montant du prêt, la durée de remboursement, le taux d'intérêt (fixe ou variable), les garanties exigées (hypothèque, caution, etc.), ainsi que les éventuelles assurances associées(inclut dans les cout de frais que le client dois payer au cours de la procédure). L'objectif de la banque est de proposer un contrat à la fois rentable (en intégrant le risque de défaut) et acceptable pour le client, assurant ainsi un équilibre entre sécurité financière et attractivité commerciale.

3.2 Description du modèle

Le modèle étudié repose sur une interaction stratégique entre deux acteurs principaux : la banque et le client.Le client se rend à la banque pour solliciter un financement en vue d'acheter ou de construire un bien immobilier. Dans ce cadre, la banque propose un ensemble fini de contrats caractérisés par un taux d'intérêt et une durée de remboursement. Il exprime son besoin et présente les grandes lignes de son projet (type de bien, montant souhaité, apport personnel, revenus, etc.).

La banque entame alors une étude du dossier en collectant des pièces justificatives (carte d'identité, bulletins de salaire, relevés bancaires, contrat de travail, etc.) afin d'évaluer la capacité de remboursement et la solvabilité du client. Sur cette base, elle peut proposer différents contrats de prêt, avec des taux d'intérêt, des durées et des mensualités variables.

Le client choisit ensuite une offre en fonction de ses préférences et contraintes. Une fois l'offre acceptée et signée, la banque soumet le dossier à une commission de crédit, qui émet un avis favorable ou non. Si l'accord est validé, les fonds sont débloqués soit chez le notaire, soit sur le compte du client, selon la nature du projet.

La particularité de ce modèle repose sur l'asymétrie d'information : la banque ne connaît pas parfaitement le type du client (solvable ou non solvable) et doit donc concevoir des contrats incitatifs lui permettant de maximiser son profit tout en limitant le risque de défaut. De son côté, le client agit de manière rationnelle afin de sélectionner un contrat qui maximise son utilité, en fonction de son apport personnel, de ses revenus et des conditions proposées.

Le modèle s'inscrit dans un cadre théorique inspiré des jeux bayésiens. Il permet de représenter les stratégies possibles de chaque acteur, et d'identifier les équilibres où ni la banque ni le client n'ont intérêt à modifier leur choix de manière unilatérale. Les gains respectifs des deux parties sont modélisés à l'aide de matrices de gain, tenant compte des paramètres du contrat, de la probabilité de solvabilité et des conditions économiques du client.

Ce modèle constitue ainsi une base pour analyser et simuler les comportements des acteurs, et pour optimiser les offres contractuelles dans un contexte de crédit immobilier.

3.2.1 Les hypothèses du modèle

— Une durée de remboursement $T > 0$ plus longue diminue les mensualités, ce qui peut faciliter le remboursement pour le client, mais accroît l'exposition de la banque au risque de défaut dans le temps.

— La banque propose un menu de contrats $C_i = (r_i, T_i)$, où :

  — r_i est le taux d'intérêt,

  — T_i est la durée de remboursement demandée en cas de succès.

— D représente le salaire mensuel du client.

— La banque fixe une capacité mensuelle de remboursement selon le contrat C_i :

$$\text{Capacité}_i = \alpha_i \times D$$

où α_i est un pourcentage dépendant du contrat et du salaire.

3.2.2 Paramétres du modèle

Les paramètres utilisés dans ce modèle sont définis comme suit :

• **Les variables de la banque**

— T : durée de remboursement (en mois).

— G : garantie exigée (bien immobilier).

• **Les variables du client**

— Z : taux d'endéttement

— a : âge de l'emprunteur.

— a_m : âge maximal autorisé pour l'emprunt.

— M : mensualité, c'est-à-dire le montant que le client est tenu de verser à la banque chaque mois.

— W : apport personnel de l'emprunteur.

— P : montant du prêt.

— C_{frais} et C_{gestion} : coûts supportés respectivement par le client et la banque.

— $V(G)$: valeur de la garantie.

3.3 Le déroulement du jeu

Considérons une situation où un client souhaite acheter un bien immobilier. Il se présente à la banque pour demander un crédit afin de financer son achat. La banque lui propose un ensemble de contrats, sans savoir à l'avance si le client est solvable ou non, alors que celui-ci connaît son propre type.

L'objectif est donc de déterminer un mécanisme permettant au client de choisir un contrat qui minimise ses pertes, tout en maximisant le profit de la banque.

Étant donné que le type réel du client est inconnu pour la banque, le problème se formule comme un jeu à information incomplète. Ce type de jeu est appelé jeu bayésien, car il repose sur l'introduction de probabilités pour modéliser l'incertitude sur le type du client.

• **Les joueurs :**

Les acteurs impliqués dans cette situation sont, d'une part, le client potentiel (l'emprunteur), et d'autre part, la banque. Nous désignons la banque comme le joueur 1 et l'emprunteur comme le joueur 2, notés respectivement J_1 et J_2.

Ainsi, l'ensemble des joueurs est donné par :

$$I = \{J_1, J_2\}$$

• **Le type du joueur 2 :**

L'emprunteur peut appartenir à l'un des deux types suivants : solvable (s) ou non solvable ($\bar{s}$).

Nous notons ces types respectivement θ_1 et θ_2, d'où l'ensemble des types est défini par :

$$\Theta = \{\theta_1, \theta_2\} = \{s, \bar{s}\}$$

On suppose que la probabilité que le client soit solvable est notée p_s, et la probabilité qu'il soit non solvable est notée $p_{\bar{s}}$. Ainsi :

$$p_s = p \quad \text{et} \quad p_{\bar{s}} = 1 - p$$

où $p \in [0, 1]$ représente la probabilité a priori que le client soit de type solvable, selon la croyance de la banque.

• **Stratégies des joueurs :**

La banque propose un ensemble de contrats C_i au client. Le client dispose de deux stratégies pures : accepter (A) le contrat C_i proposé, ou refuser (R).

L'ensemble des stratégies pures du joueur 1 (la banque) correspond aux différents contrats qu'elle peut proposer. Il est noté par

$$X_1 = \{C_i(r_i, T_i)\}$$

où r_i désigne le taux d'intérêt et T_i la durée du contrat.

L'ensemble des stratégies pures du joueur 2 est donné par

$$X_2 = \{x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^2\} = \{AR, RA, RR, AA\}$$

où AR signifie que le joueur 2 choisit la stratégie Accepter s'il est du type solvable, et la stratégie Refuser s'il est du type non solvable. Il en est de même pour les autres stratégies.

La banque propose un ensemble de contrats bancaires, chacun caractérisé par un couple (r_i, T_i).

3.3.1 Définition des contrats bancaires

— **Contrat C**$_1$:
  — Salaire : $20\,000 < D < 120\,000$ DA
  — Taux d'intérêt : $r = 1\%$
  — Taux d'endettement Z :
    — Si $D < 60\,000$ DA ⇒ Taux d'endettement Z = $30\%.D$
    — Si 60 000 $\leq D < 120\,000 DA$ ⇒ Taux d'endettement Z = $45\%.D$
— **Contrat C**$_2$:
  — Salaire : $120\,000 \leq D < 240\,000$ DA
  — Taux d'intérêt : $r = 3\%$
  — Taux d'endettement Z : $50\%.D$
— **Contrat C**$_3$:
— Salaire : $D \geq 240\,000$ DA
— Taux d'intérêt : $r = 6{,}25\%$
— Taux d'endettement Z : $50\%.D$

La mensualité M, c'est-à-dire le montant que le client doit rembourser chaque mois selon les termes du contrat C_i, dépend du contrat choisi. Elle ne doit pas dépasser le taux d'endéttement Z du client, laquelle dépend à la fois de ses revenus et de son apport personnel W

Cette mensualité permet ensuite d'évaluer le taux d'endettement du client et de vérifier sa capacité réelle de remboursement.

L'âge du client détermine la durée maximale de remboursement autorisée par la banque. Cette durée est donnée par la formule :

$$T = (75 - \text{âge}) \times 12 \tag{3.1}$$

où T est exprimé en mois. La capacité de remboursement correspond à la mensualité, laquelle est déterminée comme un pourcentage du salaire mensuel du client, appelé *taux d'endettement*. Ce montant représente la part du revenu consacrée chaque mois au financement du crédit.

Chaque contrat C_i est défini par un taux d'intérêt annuel fixe r_i, ainsi qu'une durée de remboursement T_i, qui dépend de l'âge du client. Plus le client est jeune, plus la durée T_i est longue, ce qui permet un étalement du remboursement sur une période plus importante.

De plus, chaque contrat impose une contrainte de capacité de remboursement : la mensualité ne doit pas dépasser un pourcentage maximal α_i du salaire$D$. Cette condition s'écrit :

$$M \leq \alpha_i \cdot D, \quad i \in \{1, 2, 3\}$$

Les gains des joueurs :

• **Type** $\theta_1 = s$ **(Solvable)**

Banque \ Client	Accepter (A)	Refuser (R)
Contrat $\mathbf{C_1}$	(a_1, b_1)	(c_1, d_1)
Contrat $\mathbf{C_2}$	(a_2, b_2)	(c_2, d_2)
Contrat $\mathbf{C_3}$	(a_3, b_3)	(c_3, d_3)

TABLE 3.1 – Matrice des gains (Banque, Client) pour les différentes stratégies et contrats

— (a_1, b_1) : correspend au gains du profils de la strategie (C_1, A) avec a1 le gain de la banque et b1 le gain du client

— (c_1, d_1) : gain de la banque $= c_1$, gain du client solvable $= d_1$, si la banque propose C_1 et le client refuse (souvent, le refus signifie un gain nul pour les deux).

Cas 1 : Le client accepte le contrat $C_1 = (r_1, T_1)$

$$\begin{cases} a_1 = f_b^s(C_1, A) = P \cdot r_1 \cdot T_1 + C_{\text{frais}} - C_{\text{gestion}} \\ b_1 = f_c^s(C_1, A) = P - \left(P \cdot r_1 \cdot T_1 + C_{\text{frais}}\right) \end{cases}$$

Cas 2 : Le client refuse le contrat $C_1 = (r_1, T_1)$

$$\begin{cases} c_1 = f_b^s(C_1, R) = 0 \\ d_1 = f_c(C_1, R) = 0 \end{cases}$$

Banque\Client	Accepter	Refuser
C_1	$(\text{P} \cdot r_1 \cdot T_1 + C_{\text{frais}} - C_{\text{gestion}}, P - \left(P \cdot r_1 \cdot T_1 + C_{\text{frais}}\right))$	$(0, 0)$
C_2	$(P \cdot r_2 \cdot T_2 + C_{\text{frais}} - C_{\text{gestion}}, P - \left(P \cdot r_2 \cdot T_2 + C_{\text{frais}}\right))$	$(0, 0)$
C_3	$(P \cdot r_3 \cdot T_3 + C_{\text{frais}} - C_{\text{gestion}}, P - \left(P \cdot r_3 \cdot T_3 + C_{\text{frais}}\right))$	$(0, 0)$

TABLE 3.2 – Tableau des gains banque et client du type solvable

• **Type** $\theta_2 = \bar{s}$ **(Non Solvable)**

Banque \ Client	**Accepter (A)**	**Refuser (R)**
Contrat C_1	(e_1, j_1)	(g_1, h_1)
Contrat C_2	(e_2, j_2)	(g_2, h_2)
Contrat C_3	(e_3, j_3)	(g_3, h_3)

TABLE 3.3 – Matrice initiale des gains (Banque, Client) pour le type non solvable

Cas 1 : Le client accepte le contrat $C_1 = (r_1, T_1)$

$$\begin{cases} e_1 = f_b^{\bar{s}}(C_1, A) = V(G) - P - C_{\text{gestion}} \\ j_1 = f_c^{\bar{s}}(C_1, A) = P - C_{\text{frais}} - W - V(G) \end{cases}$$

Cas 2 : Le client refuse le contrat $C_1 = (r_1, T_1)$

$$\begin{cases} g_1 = f_b^{\bar{s}}(C_1, R) = 0 \\ h_1 = f_c^{\bar{s}}(C_1, R) = 0 \end{cases}$$

Banque\Client	**Accepter**	**Refuser**
C_1	$(V(G) - P - C_{\text{gestion}}, P - C_{\text{frais}} - W - V(G))$	$(0, 0)$
C_2	$(V(G) - P - C_{\text{gestion}}, P - C_{\text{frais}} - W - V(G))$	$(0, 0)$
C_3	$(V(G) - P - C_{\text{gestion}}, P - C_{\text{frais}} - W - V(G))$	$(0, 0)$

TABLE 3.4 – Tableau des gains banque et client du type non solvable

• **Gains espérés du joueur 1 (banque) :**

$$\bar{f}_b(C_i,\ \text{AA}) = p \cdot P \cdot r_i \cdot T_i + (1-p)(V(G) - P) + p \cdot C_{\text{frais}} - C_{\text{gestion}}$$
$$\bar{f}_b(C_i,\ \text{AR}) = p \cdot (P \cdot r_i \cdot T_i + C_{\text{frais}} - C_{\text{gestion}})$$
$$\bar{f}_b(C_i,\ \text{RA}) = (1-p)(V(G) - P - C_{\text{gestion}})$$
$$\bar{f}_b(C_i,\ \text{RR}) = 0$$

• **Gains espérés du joueur 2 (client) :**

$$\bar{f}_c(C_i,\ \text{AA}) = P - p \cdot P \cdot r_i \cdot T_i - (1-p)(W + V(G))$$
$$\bar{f}_c(C_i,\ \text{AR}) = p \cdot (P - P \cdot r_i \cdot T_i - C_{\text{frais}})$$
$$\bar{f}_c(C_i,\ \text{RA}) = (1-p) \cdot (P - C_{\text{frais}} - W - V(G))$$
$$\bar{f}_c(C_i,\ \text{RR}) = 0$$

Contrat	**AA**	**AR**	**RA**	**RR**
C_1	$(p_s a_1 + p_{\bar{s}} e_1,\ p_s b_1 + p_{\bar{s}} j_1)$	$(p_s a_1 + p_{\bar{s}} g_1,\ p_s b_1 + p_{\bar{s}} h_1)$	$(p_s c_1 + p_{\bar{s}} e_1,\ p_s d_1 + p_{\bar{s}} j_1)$	$(p_s c_1 + p_{\bar{s}} g_1,\ p_s d_1 + p_{\bar{s}} h_1)$
C_2	$(p_s a_2 + p_{\bar{s}} e_2,\ p_s b_2 + p_{\bar{s}} j_2)$	$(p_s a_2 + p_{\bar{s}} g_2,\ p_s b_2 + p_{\bar{s}} h_2)$	$(p_s c_2 + p_{\bar{s}} e_2,\ p_s d_2 + p_{\bar{s}} j_2)$	$(p_s c_2 + p_{\bar{s}} g_2,\ p_s d_2 + p_{\bar{s}} h_2)$
C_3	$(p_s a_3 + p_{\bar{s}} e_3,\ p_s b_3 + p_{\bar{s}} j_3)$	$(p_s a_3 + p_{\bar{s}} g_3,\ p_s b_3 + p_{\bar{s}} h_3)$	$(p_s c_3 + p_{\bar{s}} e_3,\ p_s d_3 + p_{\bar{s}} j_3)$	$(p_s c_3 + p_{\bar{s}} g_3,\ p_s d_3 + p_{\bar{s}} h_3)$

TABLE 3.5 – Matrice bayésienne des gains (Banque, Client) selon les stratégies et contrats disponible

$$\mathrm{f}_b(C_1, AA) = p_s.a_1 + p_{\bar{s}}.e_1 = (p_s \left(P \cdot r_1 \cdot T_1 + C_{\text{frais}} - C_{\text{gestion}}\right) + p_{\bar{s}} \left(V(G) - P - C_{\text{gestion}}\right))$$
$$\mathrm{f}_c(C_1, AA) = p_s.b_1 + p_{\bar{s}}.j_1 = (p_s \left(P - (P \cdot r_1 \cdot T_1 + C_{\text{frais}})\right) + p_{\bar{s}} \left(P - C_{\text{frais}} - W - V(G)\right))$$
$$\mathrm{f}_b(C_2, AA) = p_s.a_2 + p_{\bar{s}}.e_2 = (p_s \left(P \cdot r_2 \cdot T_2 + C_{\text{frais}} - C_{\text{gestion}}\right) + p_{\bar{s}} \left(V(G) - P - C_{\text{gestion}}\right))$$
$$\mathrm{f}_c(C_2, AA) = p_s.b_2 + p_{\bar{s}}.j_2 = (p_s \left(P - (P \cdot r_1 \cdot T_1 + C_{\text{frais}})\right) + p_{\bar{s}} \left(P - C_{\text{frais}} - W - V(G)\right))$$
$$\mathrm{f}_b(C_3, AA) = p_s.a_3 + p_{\bar{s}}.e_3 = (p_s \left(P \cdot r_3 \cdot T_3 + C_{\text{frais}} - C_{\text{gestion}}\right) + p_{\bar{s}} \left(V(G) - P - C_{\text{gestion}}\right))$$
$$\mathrm{f}_c(C_3, AA) = p_s.b_1 + p_{\bar{s}}.j_1 = (p_s \left(P - (P \cdot r_3 \cdot T_3 + C_{\text{frais}})\right) + p_{\bar{s}} \left(P - C_{\text{frais}} - W - V(G)\right))$$
$$\mathrm{f}_b(C_1, AR) = p_s.a_1 + p_{\bar{s}}.g_1 = (p_s \left(P \cdot r_1 \cdot T_1 + C_{\text{frais}} - C_{\text{gestion}}\right) + p_{\bar{s}}.0)$$
$$\mathrm{f}_c(C_1, AR) = (p_s.b_1 + p_{\bar{s}}.h_1 = p_s \left(P - (P \cdot r_1 \cdot T_1 + C_{\text{frais}})\right) + p_{\bar{s}}.0)$$
$$\mathrm{f}_b(C_2, AR) = p_s.a_2 + p_{\bar{s}}.g_2 = (p_s \left(P \cdot r_2 \cdot T_2 - C_{\text{frais}} - C_{\text{gestion}}\right) + p_{\bar{s}}.0)$$
$$\mathrm{f}_c(C_2, AR) = p_s.b_2 + p_{\bar{s}}.h_2 = (p_s \left(P - (P \cdot r_2 \cdot T_2 + C_{\text{frais}})\right) + p_{\bar{s}}.0)$$
$$\mathrm{f}_b(C_3, AR) = p_s.a_3 + p_{\bar{s}}.g_3 = (p_s \left(P - (P \cdot r_3 \cdot T_3 + C_{\text{frais}})\right) + p_{\bar{s}}.0)$$
$$f_c(C_3, AR) = p_s.b_3 + p_{\bar{s}}.h_3 = (p_s \left(P - (P \cdot r_3 \cdot T_3 + C_{\text{frais}})\right) + p_{\bar{s}}.0)$$
$$f_b(C_1, RA) = p_s.c_1 + p_{\bar{s}}.e_1 = (p_s.0 + p_{\bar{s}} \left(V(G) - P - C_{\text{gestion}}\right))$$
$$f_c(C_1, RA) = p_s.d_1 + p_{\bar{s}}.j_1 = (p_s.0 + p_{\bar{s}} \left(P - C_{\text{frais}} - W - V(G)\right))$$
$$f_b(C_2, RA) = p_s.c_2 + p_{\bar{s}}.e_2 = (p_s.0 + p_{\bar{s}} \left(V(G) - P - C_{\text{gestion}}\right))$$
$$f_c(C_2, RA) = p_s.d_2 + p_{\bar{s}}.j_2 = (p_s.0 + p_{\bar{s}} \left(P - C_{\text{frais}} - W - V(G)\right))$$
$$f_b(C_3, RA) = p_s.c_3 + p_{\bar{s}}.e_3 = (p_s.0 + p_{\bar{s}} \left(V(G) - P - C_{\text{gestion}}\right))$$
$$f_c(C_3, RA) = p_s.d_3 + p_{\bar{s}}.j_3 = (p_s.0 + p_{\bar{s}} \left(P - C_{\text{frais}} - W - V(G)\right))$$
$$f_b(C_1, RR) = p_s.c_1 + p_{\bar{s}}.g_1 = 0$$
$$f_c(C_1, RR) = p_s.d_1 + p_{\bar{s}}.h_1 = 0$$
$$f_b(C_2, RR) = p_s.c_2 + p_{\bar{s}}.g_2 = 0$$
$$f_c(C_2, RR) = p_s.d_2 + p_{\bar{s}}.h_2 = 0$$
$$f_b(C_3, RR) = p_s.c_3 + p_{\bar{s}}.g_3 = 0$$
$$f_c(C_3, RR) = p_s.d_3 + p_{\bar{s}}.h_3 = 0$$

$c_i = d_i = g_i = h_i = 0$

Les couples (c_i, d_i) et (g_i, h_i) prennent la valeur $(0, 0)$, car ils traduisent respectivement les gains nuls correspondant à la stratégie de refus pour le type solvable et pour le type non solvable.

Contrat	**AA**	**AR**	**RA**	**RR**
C$_1$	$(p_s a_1 + p_{\bar{s}} e_1,\ p_s b_1 + p_{\bar{s}} j_1)$	$(p_s a_1,\ p_s b_1)$	$(p_{\bar{s}} e_1,\ p_{\bar{s}} j_1)$	$(0,\ 0)$
C$_2$	$(p_s a_2 + p_{\bar{s}} e_2,\ p_s b_2 + p_{\bar{s}} j_2)$	$(p_s a_2,\ p_s b_2)$	$(p_{\bar{s}} e_2,\ p_{\bar{s}} j_2)$	$(0,\ 0)$
C$_3$	$(p_s a_3 + p_{\bar{s}} e_3,\ p_s b_3 + p_{\bar{s}} j_3)$	$(p_s a_3,\ p_s b_3)$	$(p_{\bar{s}} e_3,\ p_{\bar{s}} j_3)$	$(0,\ 0)$

TABLE 3.6 – Matrice bayésienne des gains (Banque, Client) selon les stratégies et contrats disponibles

En calculant le reste des gains espérés des deux joueurs, on obtient le tableau suivant,ce tableau ci-dessous présente la matrice finale des gains pour l'ensemble des stratégies envisagées. C'est à partir de cette matrice que nous déterminerons l'équilibre du jeu entre la banque et le client.

Déterminons les gains des deux joueurs selon leurs choix de stratégies et leurs types.

Contrat	**AA**	**AR**	**RA**	**RR**
C$_1$	$(p.P \cdot r_1 \cdot T_1 + (1-p)(V(G)-P) + p.C_{\text{frais}} - C_{\text{gestion}}$ $, P - p \cdot P \cdot r_1 \cdot T_1 - (1-p)(W+V(G)))$	$p(P.r_2.T_2 + C_{frais} - C_{gestion}), p(P - P.r_2.T_2 - C_{frais})$	$(1-p)\big(V(G) - P - C_{\text{gestion}}), (1-p)\big(P - C_{\text{frais}} - W - V(G)\big)$	$(0,0)$
C$_2$	$p.P \cdot r_2 \cdot T_2 + (1-p)(V(G)-P) + p.C_{\text{frais}} - C_{\text{gestion}}$ $, P - p \cdot P \cdot r_2 \cdot T_2 - (1-p)(W+V(G)$	$p(P.r_2.T_2 + C_{frais} - C_{gestion}), p(P - P.r_2.T_2 - C_{frais})$	$(1-p)\big(V(G) - P - C_{\text{gestion}}), (1-p)\big(P - C_{\text{frais}} - W - V(G)\big)$	$(0,0)$
C$_3$	$p.P \cdot r_3 \cdot T_3 + (1-p)(V(G)-P) + p.C_{\text{frais}} - C_{\text{gestion}}$ $, P - p \cdot P \cdot r_3 \cdot T_3 - (1-p)(W+V(G)$	$p(P.r_3.T_3 + C_{frais} - C_{gestion}), p(P - P.r_3.T_3 - C_{frais})$	$(1-p)\big(V(G) - P - C_{\text{gestion}}), (1-p)\big(P - C_{\text{frais}} - W - V(G)\big)$	$(0,0)$

Tableau 3.7- matrice des gains finales

Après une analyse de ce tableau, nous remarquons que la stratégie RR est dominée par la stratégie AA pour tout les contrat, donc cette stratégie ne sera pas jouée.

Contrat	**AA**	**AR**	**RA**
C_1	$(p.P\cdot r_1\cdot T_1+(1-p)(V(G)-P)+p.C_{\text{frais}}-C_{\text{gestion}}$ $,P-p\cdot P\cdot r_1\cdot T_1-(1-p)(W+V(G))$	$p(P.r_2.T_2+C_{frais}-C_{gestion}),p(P-P.r_2.T_2-C_{frais})$	$(1-p)\big(V(G)-P-C_{\text{gestion}}),(1-p)\big(P-C_{\text{frais}}-W-V(G)\big)$
C_2	$(p.P\cdot r_2\cdot T_2+(1-p)(V(G)-P)+p.C_{\text{frais}}-C_{\text{gestion}}$ $,P-p\cdot P\cdot r_2\cdot T_2-(1-p)(W+V(G))$	$(p(P.r_2.T_2+C_{frais}-C_{gestion}),p(P-P.r_2.T_2-C_{frais})$	$((1-p)\big(V(G)-P-C_{\text{gestion}}),(1-p)\big(P-C_{\text{frais}}-W-V(G))))$
C_3	$(p.P\cdot r_3\cdot T_3+(1-p)(V(G)-P)+p.C_{\text{frais}}-C_{\text{gestion}}$ $,P-p\cdot P\cdot r_3\cdot T_3-(1-p)(W+V(G))$	$p(P.r_3.T_3+C_{frais}-C_{gestion}),p(P-P.r_3.T_3-C_{frais})$	$(1-p)\big(V(G)-P-C_{\text{gestion}}),(1-p)\big(P-C_{\text{frais}}-W-V(G)\big)$

Tableau 3.7- matrice des gains finales avec l'élimination de la stratégie RR

3.4 Analyse et calcul d'équilibre

L'équilibre est une issue de jeu dont aucun des deux joueurs n'a intérét a dévier unilatéralement, dans le cadre de cette étude, la recherche d'un équilibre de Nash entre la banque et le client s'avère particulièrement complexe. En effet, la nature du jeu modélisé repose sur des éléments d'incertitude notamment la probabilité que le client soit solvable ainsi que sur des stratégies conditionnelles et des fonctions de gains asymétriques. Cette configuration rend le calcul analytique de l'équilibre difficilement réalisable, d'ou pas possible avec.

Face à cette complexité, nous avons opté pour une approche numérique. Celle-ci permet de simuler toutes les combinaisons possibles de contrats et de stratégies, de calculer automatiquement les gains attendus pour chaque joueur, puis d'identifier les équilibres de Nash purs. L'avantage de cette méthode est double : elle permet d'obtenir des résultats concrets pour un client donné, et elle autorise également une analyse de sensibilité en faisant varier certains paramètres clés, comme la probabilité de solvabilité.

L'approche numérique n'est donc pas simplement une alternative technique, mais une nécessité méthodologique qui s'impose dès lors que l'analyse analytique est inapplicable. Elle permet d'obtenir une lecture claire et opérationnelle des situations d'équilibre dans un contexte réaliste, tel que celui des contrats bancaires dans un environnement incertain.

3.5 Application numérique

Suite à la difficulté rencontrée lors de la recherche analytique de l'équilibre du jeu, nous avons choisi de traiter quelques exemples numériques concrets, issus de données réelles collectées lors de mon stage pratique au niveau de l'agence BNA de Béjaïa.

À partir de ce cas réel, nous avons simulé les choix stratégiques du client et de la banque à l'aide de notre modèle, en intégrant les paramètres suivants :

— Montant à emprunter : $P = 9\,236\,000$ DA

— Valeur de la garantie : $V(G) = 10\,362\,500$ DA

— Apport personnel : $W = 1\,069\,500$ DA

— Âge du client : $a = 47$ ans

— $D = 88000$ DA

Les taux d'intéréts, les frais de dossier et les coûts de gestion ont été fixés selon les paramètres standards définis dans notre modèle. Ces données ont été intégrées dans la simulation afin de déterminer l'équilibre de Nash associé à ce profil.

Le salaire mensuel D a été pris en compte pour déterminer l'admissibilité des contrats proposés, en fonction de la capacité de remboursement du client. Cependant, il n'intervient pas directement dans le calcul des gains de la banque ou du client.

Dans notre cas, la durée du crédit T joue un rôle fondamental dans le calcul des gains des deux joueurs (la banque et le client), notamment à travers les intérêts générés par les contrats proposés.

Ce paramètre est ensuite utilisé dans les formules de gains de la banque, notamment pour l'expression du gain espéré sous la forme $P \cdot r_i \cdot T$, ainsi que dans les gains du client, car il conditionne le montant total à rembourser selon la stratégie choisie.

Les résultats suivants représentent les issues obtenues à partir des simulations réalisées en utilisant le langage de programmation Python.

```
=== Résultats pour p = 0.20 ===

📊 Matrice des gains (Banque, Client) :
                      AA                      AR                  RA  
RR
C1    (7092172, -6086672)    (6266572, -4402272)  (825600, -1686400)  (0, 
0)
C2  (19626316, -18620816)  (18800716, -16936416)  (825600, -1686400)  (0, 
0)
C3  (39994300, -38988800)  (39168700, -37304400)  (825600, -1686400)  (0, 
0)

✅ Contrats non dominés pour la banque : ['C3']

📊 Matrice des gains (Banque, Client) :
                      AA                      AR                  RA  
RR
C3  (39994300, -38988800)  (39168700, -37304400)  (825600, -1686400)  (0, 
0)

=== Résultats pour p = 0.40 ===

📊 Matrice des gains (Banque, Client) :
                      AA                      AR                  RA  
RR
C1  (13152344, -10067344)   (12533144, -8804544)  (619200, -1264800)  (0, 
0)
C2  (38220632, -35135632)  (37601432, -33872832)  (619200, -1264800)  (0, 
0)
C3  (78956600, -75871600)  (78337400, -74608800)  (619200, -1264800)  (0, 
0)

✅ Contrats non dominés pour la banque : ['C3']

📊 Matrice des gains (Banque, Client) :
                      AA                      AR                  RA  
RR
C3  (78956600, -75871600)  (78337400, -74608800)  (619200, -1264800)  (0, 
0)

=== Résultats pour p = 0.60 ===

📊 Matrice des gains (Banque, Client) :
                        AA                        AR                  RA  
\
C1    (19212516, -14048016)    (18799716, -13206816)  (412800, -843200)   
C2    (56814948, -51650448)    (56402148, -50809248)  (412800, -843200)   
C3  (117918900, -112754400)  (117506100, -111913200)  (412800, -843200)   

        RR  
C1  (0, 0)  
C2  (0, 0)  
C3  (0, 0)  

✅ Contrats non dominés pour la banque : ['C3']

📊 Matrice des gains (Banque, Client) :
                        AA                        AR                  RA  
\
C3  (117918900, -112754400)  (117506100, -111913200)  (412800, -843200)   
```

```
        RR
C3  (0, 0)

=== Résultats pour p = 0.80 ===

📊 Matrice des gains (Banque, Client) :
                        AA                        AR                  RA  \
C1    (25272688, -18028688)    (25066288, -17609088)  (206400, -421600)
C2    (75409264, -68165264)    (75202864, -67745664)  (206400, -421600)
C3  (156881200, -149637200)  (156674800, -149217600)  (206400, -421600)

        RR
C1  (0, 0)
C2  (0, 0)
C3  (0, 0)

✅ Contrats non dominés pour la banque : ['C3']

📊 Matrice des gains (Banque, Client) :
                        AA                        AR                  RA  \
C3  (156881200, -149637200)  (156674800, -149217600)  (206400, -421600)

        RR
C3  (0, 0)

=== Résultats pour p = 1.00 ===

📊 Matrice des gains (Banque, Client) :
                        AA                        AR        RA      RR
C1    (31332860, -22009360)    (31332860, -22011360)  (0, -0)  (0, 0)
C2    (94003580, -84680080)    (94003580, -84682080)  (0, -0)  (0, 0)
C3  (195843500, -186520000)  (195843500, -186522000)  (0, -0)  (0, 0)

✅ Contrats non dominés pour la banque : ['C3']

📊 Matrice des gains (Banque, Client) :
                        AA                        AR        RA      RR
C3  (195843500, -186520000)  (195843500, -186522000)  (0, -0)  (0, 0)
```

FIGURE 3.1 – Résultat de simulation du client 1 avec un approche de probabilité variable

Après une simulation avec des probabilités de solvabilité variant de 0,2 à 1, nous avons constaté que la stratégie de la banque associée au contrat C_3 domine systématiquement les deux autres, quel que soit la probabilité choisi. Autrement dit, même en faisant varier p, le contrat C_3 reste toujours celui qui maximise le gain de la banque. Ainsi, dans notre analyse, nous conservons uniquement la dernière ligne de la matrice des gains quelque soit p, car elle reflète la situation finale, où toutes les stratégies dominées ont été éliminées, il est représenté comme ceci

Contrat	**AA**	**AR**	**RA**
C_3	$(117918900, -11275440)$	$(117506100, -111913200)$	$(412800, -843200)$

Dans ces résultats, nous constatons que la stratégie qui maximise le gain de la banque est associée au contrat C_3. Si l'on cherche maintenant une stratégie du client qui minimise ses pertes (ou maximise faiblement son gain), nous trouvons que la stratégie RA est la plus rationnelle.

En effet, c'est pour cette combinaison $(C_3,\ RA)$ que le gain du client est le plus faible en valeur absolue, ce qui correspond à une perte minimisée.

Afin d'éviter de tirer une conclusion hâtive à partir d'un seul cas, nous proposerons d'autres exemples issus de données différentes, afin de vérifier la stabilité de l'équilibre et la robustesse de la stratégie optimale identifiée.

Voici un second exemple basé sur les données réelles d'un client, recueillies auprès de la banque BNA de Béjaïa. À partir de ce cas concret, nous avons simulé les choix stratégiques du client et de la banque à l'aide de notre modèle, en prenant en compte les paramètres suivants :

— Montant à emprunter : $P = 1\,300\,000$ DA

— Valeur de la garantie : $V(G) = 6\,632\,150$ DA

— Apport personnel : $W = 4\,632\,150$ DA

— Âge du client : $a = 37$ ans

— Salaire mensuel : $D = 23\,000$ DA/mois

```
=== Résultats pour p = 0.20 ===

📊 Matrice des gains (Banque, Client) :
                       AA                    AR                    RA
RR
C1    (5447220, -8897040)   (1185100, -926000)  (4262120, -7973040)  (0,
0)
C2   (7818420, -11268240)  (3556300, -3297200)  (4262120, -7973040)  (0,
0)
C3  (11671620, -15121440)  (7409500, -7150400)  (4262120, -7973040)  (0,
0)

✅ Contrats non dominés pour la banque : ['C3']

📊 Matrice des gains (Banque, Client) :
                       AA                    AR                    RA
RR
C3  (11671620, -15121440)  (7409500, -7150400)  (4262120, -7973040)  (0,
0)

=== Résultats pour p = 0.40 ===

📊 Matrice des gains (Banque, Client) :
                       AA                      AR                    RA
RR
C1    (5566790, -7829780)    (2370200, -1852000)  (3196590, -5979780)
(0, 0)
C2  (10309190, -12572180)    (7112600, -6594400)  (3196590, -5979780)
(0, 0)
C3  (18015590, -20278580)  (14819000, -14300800)  (3196590, -5979780)
(0, 0)

✅ Contrats non dominés pour la banque : ['C3']

📊 Matrice des gains (Banque, Client) :
                       AA                      AR                    RA
RR
C3  (18015590, -20278580)  (14819000, -14300800)  (3196590, -5979780)
(0, 0)

=== Résultats pour p = 0.60 ===

📊 Matrice des gains (Banque, Client) :
                       AA                      AR                    RA
RR
C1    (5686360, -6762520)    (3555300, -2778000)  (2131060, -3986520)
(0, 0)
C2  (12799960, -13876120)   (10668900, -9891600)  (2131060, -3986520)
(0, 0)
C3  (24359560, -25435720)  (22228500, -21451200)  (2131060, -3986520)
(0, 0)

✅ Contrats non dominés pour la banque : ['C3']

📊 Matrice des gains (Banque, Client) :
                       AA                      AR                    RA
RR
C3  (24359560, -25435720)  (22228500, -21451200)  (2131060, -3986520)
(0, 0)
```

```
=== Résultats pour p = 0.80 ===

📊 Matrice des gains (Banque, Client) :
                        AA                     AR                   RA
RR
C1    (5805930, -5695260)    (4740400, -3704000)  (1065530, -1993260)
(0, 0)
C2  (15290730, -15180060)  (14225200, -13188800)  (1065530, -1993260)
(0, 0)
C3  (30703530, -30592860)  (29638000, -28601600)  (1065530, -1993260)
(0, 0)

✅ Contrats non dominés pour la banque : ['C3']

📊 Matrice des gains (Banque, Client) :
                        AA                     AR                   RA
RR
C3  (30703530, -30592860)  (29638000, -28601600)  (1065530, -1993260)
(0, 0)

=== Résultats pour p = 1.00 ===

📊 Matrice des gains (Banque, Client) :
                        AA                     AR        RA       RR
C1    (5925500, -4628000)    (5925500, -4630000)  (0, -0)  (0, 0)
C2  (17781500, -16484000)  (17781500, -16486000)  (0, -0)  (0, 0)
C3  (37047500, -35750000)  (37047500, -35752000)  (0, -0)  (0, 0)

✅ Contrats non dominés pour la banque : ['C3']

📊 Matrice des gains (Banque, Client) :
                        AA                     AR        RA       RR
C3  (37047500, -35750000)  (37047500, -35752000)  (0, -0)  (0, 0)
```

FIGURE 3.2 – Résultat de simulation du client 2 avec un approche de probabilité variable

L'analyse du deuxième exemple confirme les résultats obtenus précédemment : la stratégie de la banque C_3 ressort de nouveau comme étant le plus favorable à la banque, tout en minimisant les pertes du client dans le contexte donné.

Cela renforce l'idée que le contrat C_3, bien que plus coûteux en termes d'intérêts, permet à la banque de maximiser ses gains, tandis que la stratégie RA du client limite son risque en cas d'insolvabilité.

Cependant, afin de vérifier si cet équilibre persiste dans d'autres configurations de clients, nous poursuivons avec un troisième exemple.

Les données utilisées pour cette simulation sont les suivantes :

Le troisième client analysé présente les caractéristiques suivantes : le montant à emprunter est de $P = 8\,110\,000$ DA, la valeur de la garantie proposée est $V(G) = 9\,018\,000$ DA, l'apport personnel du client s'élève à $W = 908\,000$ DA, et son âge est de 44 ans.

Ces paramètres seront utilisés dans la simulation afin de calculer la durée du prêt ainsi que les gains associés aux différentes stratégies possibles.

Dans notre modèle, la durée du crédit T joue un rôle fondamental dans le calcul des gains des deux joueurs (la banque et le client), notamment à travers les intérêts générés par les contrats proposés.

La durée T est déterminée selon l'âge du client, en supposant que la fin de remboursement ne peut dépasser l'âge de 75 ans. Ainsi, pour un client âgé de a ans, la durée maximale admissible est calculée par la relation :

$$T = (75 - a) \times 12 \text{ mois}$$

Ce paramètre est ensuite utilisé dans les formules de gains de la banque, notamment pour l'expression du gain espéré sous la forme $P \cdot r_i \cdot T$, ainsi que dans les gains du client, car il conditionne le montant total à rembourser selon la stratégie choisie.

```
=== Résultats pour p = 0.20 ===

📊 Matrice des gains (Banque, Client) :
                       AA                     AR                   RA
RR
C1    (6756140, -5864640)    (6033340, -4412240)  (722800, -1454400)  (0,
0)
C2  (18823820, -17932320)  (18101020, -16479920)  (722800, -1454400)  (0,
0)
C3  (38433800, -37542300)  (37711000, -36089900)  (722800, -1454400)  (0,
0)

✅ Contrats non dominés pour la banque : ['C3']

📊 Matrice des gains (Banque, Client) :
                       AA                     AR                   RA
RR
C3  (38433800, -37542300)  (37711000, -36089900)  (722800, -1454400)  (0,
0)

=== Résultats pour p = 0.40 ===

📊 Matrice des gains (Banque, Client) :
                       AA                     AR                   RA
RR
C1   (12608780, -9913280)   (12066680, -8824480)  (542100, -1090800)  (0,
0)
C2  (36744140, -34048640)  (36202040, -32959840)  (542100, -1090800)  (0,
0)
C3  (75964100, -73268600)  (75422000, -72179800)  (542100, -1090800)  (0,
0)

✅ Contrats non dominés pour la banque : ['C3']

📊 Matrice des gains (Banque, Client) :
                       AA                     AR                   RA
RR
C3  (75964100, -73268600)  (75422000, -72179800)  (542100, -1090800)  (0,
0)

=== Résultats pour p = 0.60 ===

📊 Matrice des gains (Banque, Client) :
                         AA                        AR                 RA
\
C1    (18461420, -13961920)    (18100020, -13236720)  (361400, -727200)
C2    (54664460, -50164960)    (54303060, -49439760)  (361400, -727200)
C3  (113494400, -108994900)  (113133000, -108269700)  (361400, -727200)

        RR
C1  (0, 0)
C2  (0, 0)
C3  (0, 0)

✅ Contrats non dominés pour la banque : ['C3']

📊 Matrice des gains (Banque, Client) :
                         AA                        AR                 RA
\
C3  (113494400, -108994900)  (113133000, -108269700)  (361400, -727200)
```

```
        RR
C3  (0, 0)

=== Résultats pour p = 0.80 ===

📊 Matrice des gains (Banque, Client) :
                         AA                        AR                  RA
\
C1    (24314060, -18010560)    (24133360, -17648960)  (180700, -363600)
C2    (72584780, -66281280)    (72404080, -65919680)  (180700, -363600)
C3  (151024700, -144721200)  (150844000, -144359600)  (180700, -363600)

        RR
C1  (0, 0)
C2  (0, 0)
C3  (0, 0)

✅ Contrats non dominés pour la banque : ['C3']

📊 Matrice des gains (Banque, Client) :
                         AA                        AR                  RA
\
C3  (151024700, -144721200)  (150844000, -144359600)  (180700, -363600)

        RR
C3  (0, 0)

=== Résultats pour p = 1.00 ===

📊 Matrice des gains (Banque, Client) :
                         AA                        AR        RA      RR
C1    (30166700, -22059200)    (30166700, -22061200)  (0, -0)  (0, 0)
C2    (90505100, -82397600)    (90505100, -82399600)  (0, -0)  (0, 0)
C3  (188555000, -180447500)  (188555000, -180449500)  (0, -0)  (0, 0)

✅ Contrats non dominés pour la banque : ['C3']

📊 Matrice des gains (Banque, Client) :
                         AA                        AR        RA      RR
C3  (188555000, -180447500)  (188555000, -180449500)  (0, -0)  (0, 0)
```

FIGURE 3.3 – Résultat de simulation du client 3 avec un approche de probabilité variable

Synthèse des simulations

Les trois exemples étudié mettent en évidence une tendance récurrente dans les choix stratégiques entre la banque et le client. Dans tous les cas étudiés, le contrat C_3, caractérisé par un taux d'intérêt r_3 plus élevé, ressort comme la stratégie dominante pour la banque, car il maximise systématiquement sa fonction de gain définie par :

$$f_b(C_i, x) = \begin{cases} p \cdot P \cdot r_i \cdot T + (1-p)(V(G) - P) + p \cdot C_{\text{frais}} - C_{\text{gestion}} & \text{si } x = AA \\ p \cdot (P \cdot r_i \cdot T + C_{\text{frais}} - C_{\text{gestion}}) & \text{si } x = AR \\ (1-p) \cdot (V(G) - P - C_{\text{gestion}}) & \text{si } x = RA \\ 0 & \text{si } x = RR \end{cases}$$

quelle que soit la probabilité de solvabilité $p \in [0, 1]$.

Du côté du client, la stratégie RA (refus s'il est solvable, acceptation s'il est non solvable) apparaît souvent comme celle qui minimise ses pertes, ce qui correspond à la minimisation de sa fonction de gain :

$$f_c(C_i, x) = \begin{cases} P - p \cdot P \cdot r_i \cdot T - (1-p)(W + V(G)) & \text{si } x = AA \\ p \cdot (P - P \cdot r_i \cdot T - C_{\text{frais}}) & \text{si } x = AR \\ (1-p) \cdot (P - C_{\text{frais}} - W - V(G)) & \text{si } x = RA \\ 0 & \text{si } x = RR \end{cases}$$

Cela reflète un comportement stratégique visant à limiter le risque en cas d'insolvabilité.

Après une analyse des différents cas simulés, l'équilibre de nash bayésien trouvé dans notre étude est : $(C_3,\ RA)$
d'ou le contrat C_3 qui maximise le profit de la banque et RA c'est la stratégie qui vas étre joué par le client. Ce résultat indique que le contrat optimal pour la banque est C_3, tandis que la stratégie la plus rationnelle pour le client est RA, c'est-à-dire refuser le contrat s'il est solvable, et l'accepter dans le cas contraire.

3.6 Conclusion

Ce chapitre a été consacré à la modélisation, à l'aide d'un jeu bayésien, du processus de décision entre une banque et un client dans le cadre de l'octroi d'un crédit immobilier. Le modèle que nous avons proposé repose sur des hypothèses simplificatrices, dans le but de rendre la modélisation plus accessible et de ne pas alourdir les mécanismes de résolution liés aux jeux bayésiens.

L'approche par jeu bayésien s'est révélée efficace pour modéliser l'interaction stratégique entre une banque et un client dans le cadre de l'octroi d'un crédit immobilier. Grâce à cette modélisation, nous avons pu étudier les gains espérés des deux joueurs et identifier un équilibre de Nash bayésien.

Nos simulations numériques, basées sur des données réelles, ont confirmé que la stratégie optimale pour la banque est de proposer le contrat C_3, tandis que, pour le client, la stratégie RA minimise ses pertes en cas d'insolvabilité.

Ainsi, les jeux bayésiens s'avèrent être un outil puissant pour analyser les situations d'asymétrie d'information dans le domaine bancaire, et peuvent orienter les décisions stratégiques des institutions financières.

Chapitre 4

Conclusion générale

Dans ce travail, nous avons étudié l'interaction stratégique entre une banque et un client dans un contexte de contrat de crédit immobilier, en nous appuyant sur la théorie des jeux bayésiens. Cette approche nous a permis de représenter de manière rigoureuse l'asymétrie d'information qui caractérise la relation entre les deux parties, notamment le fait que la banque ne connaît pas avec certitude le type réel du client, c'est-à-dire s'il est solvable ou non.

À travers une modélisation formelle du jeu, nous avons introduit différents contrats de crédit différenciés par leurs taux d'intérêt et leurs durées, et nous avons évalué les stratégies possibles de chaque acteur : la banque propose menu ude contrat, et le client décide de l'accepter ou non, en fonction de ses caractéristiques et de ses anticipations.

Une implémentation algorithmique en Python nous a permis de simuler ces interactions et d'identifier, pour des cas spécifiques, les contrats les plus avantageux pour la banque, tout en tenant compte de la rentabilité pour le client. L'analyse des résultats a permis de mettre en évidence des équilibre de nash bayésien, où aucun des deux acteurs n'a intérêt à modifier unilatéralement sa stratégie.

Ce travail montre ainsi l'intérêt de la théorie des jeux dans la modélisation des comportements économiques sous incertitude. Il met en lumière l'utilité de la simulation pour soutenir les décisions financières, en particulier dans le cadre des politiques de crédit. Enfin, cette étude ouvre la voie à de futures extensions, telles que la prise en compte de jeux répétés, de profils clients plus diversifiés, ou l'intégration d'outils d'apprentissage pour affiner la prédiction de la solvabilité.

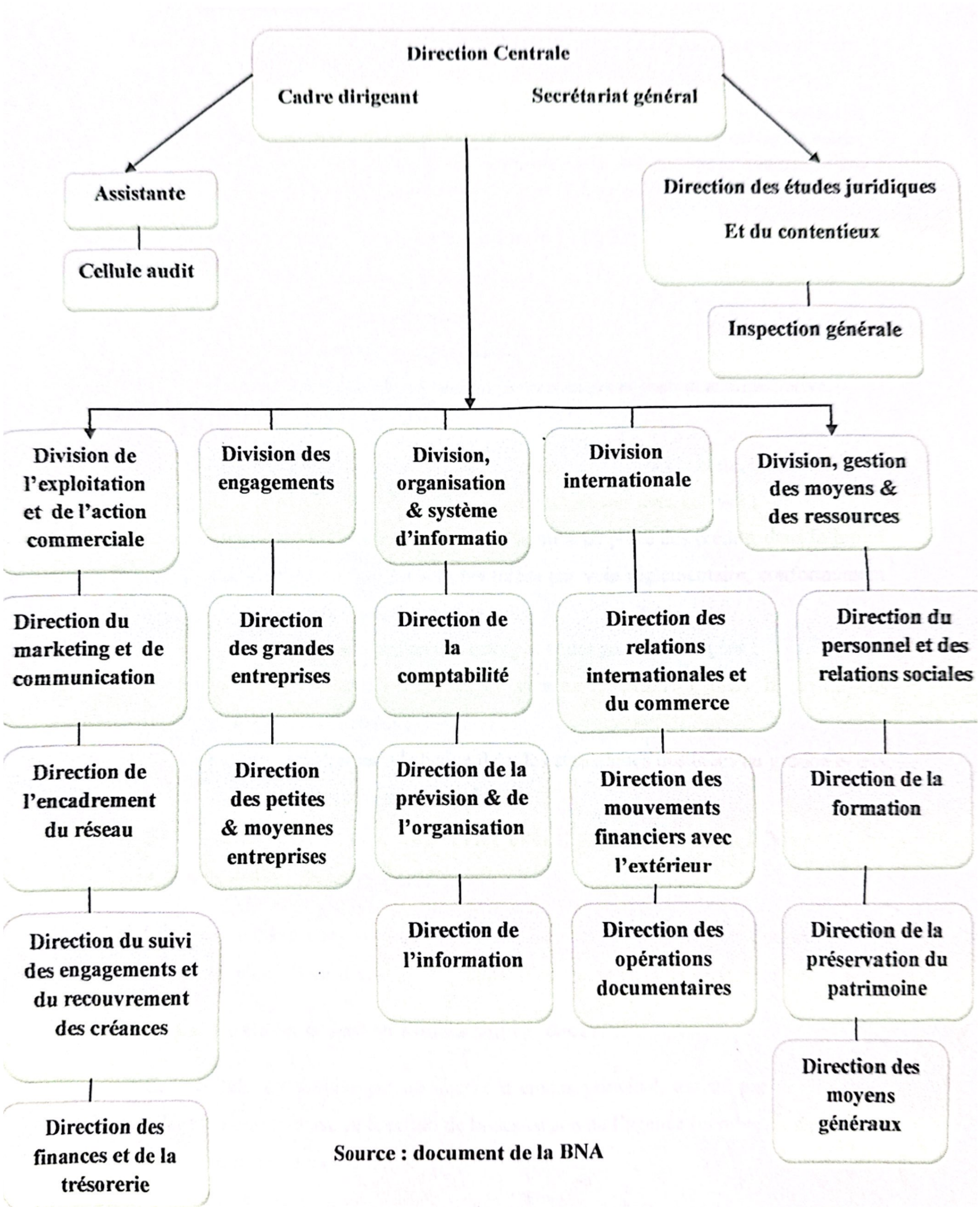


FIGURE 4.1 – Organigramme de la BNA 356

Banque Nationale d'Algérie BNA

"SIMULATION CREDIT IMMOBILIER"

Nom de l'emprunteur	
Prénom de l'emprunteur	
Date de naissance :	
Revenu de l'emprunteur :	
Bénéficiare epargnant BNA :	
Coût du logement :	
Apport personnel :	
Durée maximum du crédit :	

RESULTAT DE LA SIMULATION

Montant du crédit accordé par la banque :	
Taux de l'apport personnel du client :	0,00 %
Dont un différé de remboursement de (Mois) :	0 mois
Taux d'interêt :	1,00 %
Prime SGCI en TTC :	
Montant de la commission gestion en (DA) :	
Montant de la mensualité du crédit :	
Mensualité TOTALE en (DA) :	
Etat final de la demande de crédit :	

TVA 19 %

Ceci n'est qu'une simulation et ne peut être considérée comme un accord de financement. Les paramètres de calcul peuvent être revus entre le moment de la simulation et celui de la formalisation du dossier de crédit.

FIGURE 4.2 – Fiche de simulation d'un crédit immobilier

البنك الوطني الجزائري
BNA
BANQUE NATIONALE D'ALGERIE

Annexe III à la circulaire

DRE :
AGENCE :

DEMANDE DE PRET IMMOBILIER BONIFIE

I.L'EMPRUNTEUR

1- IDENTIFICATION :

Nom :..
Prénom :..
Fils (fille) de :...............................et de ....
Date et lieu de naissance :...
Situation familiale :célibataire ☐ marié (e)☐ veuf (ve) ☐
Adresse du domicile actuel :...
N° tél (mobile, fixe) :..
Pièce d'identité N° :......................délivrée le :...............à :..........................
N° sécurité sociale :..
Registre de commerce N° :....................Identification fiscale :........................
Domiciliation bancaire : banque☐ CCP ☐
RIB/RIP :..

2- SITUATION PROFESSIONNELLE :

Nom et adresse de l'employeur :..............................N° Tél :.........................
Date de recrutement :..
Situation : permanent (e) ☐ contractuel (le) ☐
Poste occupé :..

3- SITUATION FINANCIERE :

a. Revenus :
Revenu mensuel de l'intéressé (emprunteur): ....DA.
Revenu du conjoint :.. DA.
Revenu des enfants :.. DA.
Autres (à détailler):.. DA.
Nombre de personnes à charge :............

b. Crédit en cours :
Nature du crédit :..
Banque :..
Montant de l'échéance :...
Date de la dernière échéance :...
1/3

FIGURE 4.3 – Formulaire de demande de prêt immobilier

البنك الوطني الجزائري

BANQUE NATIONALE D'ALGERIE

AUTORISATION DE CONSULTATION DE LA CENTRALE DES RISQUES ENTREPRISES ET MENAGES DE LA BANQUE D'ALGERIE (PERSONNES PHYSIQUES)

« Clientèle de Particuliers »

Je soussigné (e) Mr, Mme, Melle :

Nom :..

Nom de jeune fille :..

Prénoms :...

Né (e) le :........./........./...........à ....commune....................

....Wilaya de naissance :....................................

Pays de naissance : ....

Fils (fille) de :...

Et de :..

Acte de naissance n° ....

Adresse :..

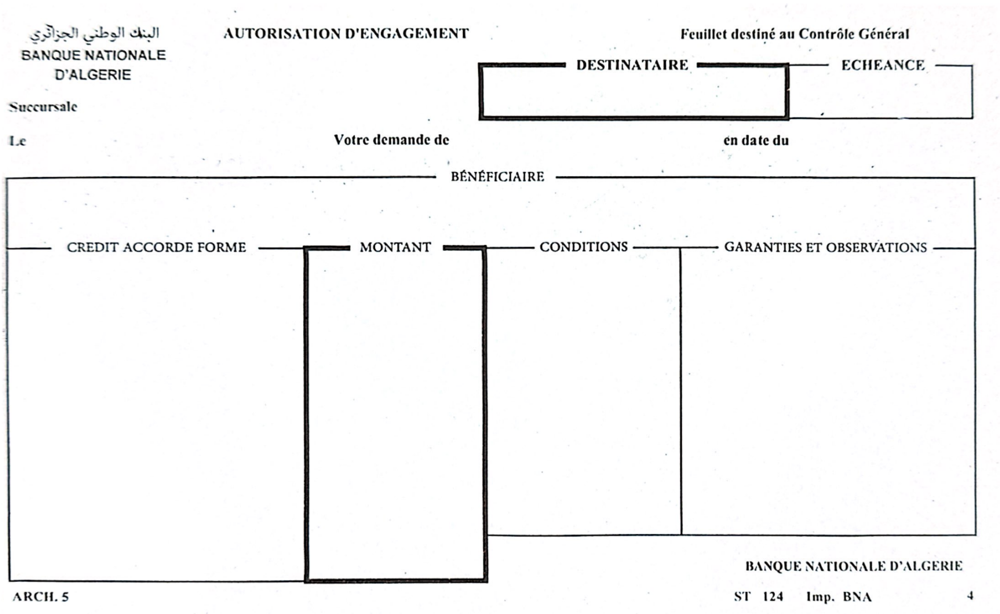
NIN : / / / / / / / / / / / / / / / /

Autorise la Banque Nationale d'Algérie, agence de : ....à consulter la Centrale des Risques Entreprises et Ménages « CREM » et autorise cette dernière à lui communiquer les renseignements me concernant.

Fait à .... le ....

(Signature de l'intéressé(e))

FIGURE 4.4 – Autorisation de consultation de la centrale des risques



البنك الوطني الجزائري
BANQUE NATIONALE
D'ALGERIE

AUTORISATION D'ENGAGEMENT

Feuillet destiné au Contrôle Général

DESTINATAIRE	ECHEANCE

Succursale

Le

Votre demande de

en date du

BÉNÉFICIAIRE

CREDIT ACCORDE FORME	MONTANT	CONDITIONS	GARANTIES ET OBSERVATIONS

BANQUE NATIONALE D'ALGERIE

ARCH. 5

ST 124 Imp. BNA 4

FIGURE 4.5 – Autorisation d'engagements

البنك الوطني الجزائري
BANQUE NATIONALE D'ALGERIE
Société par actions au capital de 300.000.000.000,00 DA
8, Boulevard Ernesto « CHE » GUEVARA
Adresse Télégraphique : WATANI – Télex 61.227
AP BEJAIA 356 TOBBAL BEJAIA

BEJAIA, 22/04/2025

Notification d'accord de crédit

M. MESSAOUDI SIDALI

OBJET : Votre demande de crédit immobilier du 21/04/2025.

Monsieur,

Faisant suite à votre demande en objet, nous vous informons que les membres du Comité de Crédit Agence réunis le 22/04/2025 à l'unanimité, ont émis un avis favorable pour la mise en place d'un Crédit immobilier en logement promotionnel Vente Sur Plan comme suit :

- Montant de crédit : 6.543.000,00 DA ;
- Durée de remboursement : 405 mois dont 36 mois de différé de remboursement ;
- Mensualité : 23.339,76 DA ;
- Echéance finale : 31/01/2059 ;
- Taux d'intérêt à appliquer : 1% l'an.

Conditions d'utilisations :
- Mobilisation de l'apport personnel ;
- Signature de la convention de crédit immobilier ;
- Souscription de l'assurance-crédit SGCI+ 4.000 DA frais de traitement de dossier ;
- Souscription d'une assurance décès invalidité avec subrogation au profit de notre banque ;
- Hypothèque 1er rang sur le bien financé ;
- Contrat de vente sur plan ;
- Délégation police d'assurance CAT/NAT **à posteriori**.

Dans cette attente, veuillez agréer ; Monsieur, l'expression de notre parfaite considération.

Le Directeur

AGENCE PRINCIPALE DE BEJAIA « 356 » CITE TOBBAL - BEJAIA TEL: 034 16 07 81/84 Fax Direction: 034 16 00 22

FIGURE 4.6 – Notification d'accord de crédit

Bibliographie

[1] *BAKLI, A. Mémoire de fin d'études : L'octroi d'un crédit d'investissement à l'agence BNA 356, Faculté des sciences économiques, Algérie (2011).*

[2] *SALMI, C. Mémoire de fin de cycle : Étude de la BNA 356, Faculté des sciences économiques, Algérie. (2009)*

[3] Tirole, J. *Théorie de l'organisation industrielle.* Tome 1 et 2. Paris : Economica. (1993).

[4] BanqueNationaled'Algérie.*Présentation institutionnelle.* Direction Générale, Alger. Consulté sur : `https://www.bna.dz/fr/presentation-de-la-bna/`(2024).

[5] Banque d'Algérie. *Rôles et missions de la Banque d'Algérie.* Site officiel. Consulté sur : `https://www.bank-of-algeria.dz/role-et-mission/`(2024)

[6] *K. BOUIBED. Theorie des jeux et strategie manageriale. Cours de Master 1 Mathematiques Financieres, Universite Abderrahmane Mira de Bejaia, 2019/2020.*

[7] Senouci, Kouider, Guerriche, Benallal & Douch, Leila. *Évaluation de la performance financière des banques commerciales – Cas de la Banque Nationale d'Algérie.* Les cahiers du POIDEX, 11(01), 557–579.(2022).

[8] *B. GUERRIEN. La theorie des jeux. Economica , 2002.*

[9] *Jean STREIFF et Michel DIDIER, Droit bancaire, Dalloz, 20e édition, 2020.*

[10] *Nash, J. Non cooperative games. Annals of Mathematic, 54, 286-295, 1951.*

[11] *Konieczny, S. Introduction à la téorie des jeux. Université d'Artois- Lens, 2011*

[12] *Ekeland, I. La théorie des jeux et ses applications 'a l'économie mathématique. Presse Universitaire de France, 1974.*

[13] *Yildizoglu, M. Introduction a la théorie des jeux manuels et exercices corrigés. DUNOD, Paris, 2011*

[14] Université de Béjaïa *Les déterminants stratégiques de la localisation des banques dans la wilaya de Béjaïa.* Étude d'enquête interne : répartition des agences (BADR, BNA, CPA. . .) — voir Scribd.(2013)

[15] Ichallal, L., Toutou, L. & Ziane, L. *Les déterminants du choix du lieu d'implantation des agences bancaires dans la région d'Akbou.* Mémoire de Master, Université AbderrahmaneMira de Béjaïa. (2019).

[16] *Jean STREIFF et Michel DIDIER, Droit bancaire, Dalloz, 20e édition, 2020.*

[17] *"Les Banques, acteurs de l'économie" par Jézabel Couppey-Soubeyran (2015, collection "Doc en poche")*

[18] *Harsanyi, J. C. (1967-1968). Games with Incomplete Information Played by Bayesian Players I–III.* Management Science, 14(3), 159-182.

Résumé :

Ce travail de fin d'études analyse l'optimisation des contrats bancaires en situation d'incertitude, à l'aide de la théorie des jeux bayésiens. L'interaction stratégique entre une banque et un client, pouvant être solvable ou non, est modélisée dans un contexte d'asymétrie d'information. La banque propose trois contrats de crédit, et le client choisit selon sa situation. En s'appuyant sur une estimation de la probabilité de solvabilité à partir de données réelles, une simulation Python permet d'évaluer les gains espérés des deux parties. L'étude identifie des équilibres de Nash et recommande des choix de contrats qui maximisent le profit de la banque tout en minimisant les pertes du client, soulignant l'utilité de la modélisation mathématique dans les décisions financières.

.

Mots clès :

Théorie des jeux, banque, Jeux bayésiens, Asymétrie d'information, Équilibre de Nash bayésien.

Abstract :

This final project analyzes the optimization of banking contracts under uncertainty using Bayesian game theory. It models the strategic interaction between a bank and a client, who may be either solvent or insolvent, in a context of information asymmetry. The bank offers three credit contracts, and the client chooses based on their financial situation. Using real data to estimate the probability of solvency, a Python-based simulation evaluates the expected payoffs for both players. The analysis identifies Nash equilibria and recommends contract choices that maximize the bank's profit while minimizing the client's losses, highlighting the effectiveness of mathematical modeling in financial decision-making.

.

Keywords :

Game theory, bank, Bayesian games, Information asymmetry, Bayesian Nash equilibrium.