

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Université Abderrahmane MIRA de Béjaïa  
Faculté des Sciences Exactes

---

**Département de Recherche Opérationnelle**



Mémoire Présenté pour L'obtention du Diplôme de Master  
en Mathématiques Appliquées

**Spécialité : Mathématiques Financières**

---

**Optimisation de portefeuille avec contrainte de chance sur la  
Value-at-Risk : Approche de décomposition**

---

Présenté par :  
**BOUZARARI Adem**  
**BENDRIS Hamza**

**Sous la direction de : Dr. GHAZLI Kahina**

Défendu le 30/06/2025, devant le jury composé de :

M <sup>r</sup> M. Soufit	M.C. Classe B	Président de jury	UAMB - Bejaia.
M <sup>r</sup> L. Asli	M.C. Classe A	Examineur	UAMB - Bejaia
M <sup>m</sup> <sup>e</sup> K. Hassaini	M.A. Classe A	Examineur	UAMB - Bejaia.
M <sup>e</sup> Z. Bouzria	Doctorante	Examineur	UAMB - Bejaia.

**Année Universitaire 2024 – 2025**

# Remerciements

Nous tenons à exprimer notre profonde gratitude à toutes les personnes qui ont contribué, de près ou de loin, à la réalisation de ce mémoire.

Nous souhaitons également nous adresser nos propres remerciements pour l'implication constante, la ténacité et les efforts soutenus que nous avons investis tout au long de l'élaboration de ce mémoire, reflet d'un travail rigoureux et d'une collaboration enrichissante.

Nous remercions tout particulièrement madame **Ghazli Kahina**, notre encadrante, pour son accompagnement constant, sa disponibilité, ses conseils avisés et son soutien tout au long de ce travail. Sa rigueur scientifique et sa bienveillance ont été pour nous une source d'inspiration et de motivation.

Nos remerciements s'adressent également à l'ensemble du corps enseignant du Master de Mathématiques Financières de l'Université pour la qualité de l'enseignement dispensé et pour les compétences précieuses que nous avons acquises durant ces années.

Enfin, nous adressons une pensée reconnaissante à nos familles et à nos proches pour leur soutien moral et leurs encouragements tout au long de ce parcours.

À toutes et à tous, merci.

# Dédicace

Nous dédions ce mémoire :

À nos familles respectives, pour leur amour inconditionnel, leur patience, et leur soutien sans faille tout au long de notre parcours académique. À mon frère bien-aimé Nadjim , pour sa présence inspirante et ses encouragements qui m'ont accompagné dans les moments décisifs.

À nos enseignants, pour leur transmission du savoir, leur encadrement, et leur engagement constant envers notre réussite.

À nos amis et collègues, pour leur présence, leurs encouragements et leurs conseils, précieux à chaque étape de ce travail.

Et enfin, à nous-mêmes, pour notre persévérance, notre engagement mutuel et le travail rigoureux accompli avec solidarité, malgré les défis rencontrés.

# Table des matières

Remerciements . . . . .	I
Dédicace . . . . .	II
<b>Table des figures</b>	<b>VI</b>
Liste des figures . . . . .	VI
Liste des algorithmes . . . . .	VII
<b>Liste des tableaux</b>	<b>VIII</b>
Liste des tables . . . . .	VIII
Liste d'abréviations et notations . . . . .	IX
<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>1 Gestion de portefeuille</b>	<b>4</b>
Introduction . . . . .	4
1.1 Modèle de Markowitz . . . . .	5
1.1.1 Diversification . . . . .	5
1.1.2 Hypothèses de base . . . . .	5
1.1.2.1 Hypothèses relatives aux actifs financiers . . . . .	5
1.1.2.2 Hypothèses relatives aux comportements des investisseurs . . . . .	6
1.1.3 Frontière efficiente . . . . .	6
1.1.4 Présentation mathématique du modèle . . . . .	7
1.1.5 Limites du modèle de Markowitz . . . . .	8
1.2 Mesures de risque . . . . .	9
1.2.1 Volatilité . . . . .	9
1.2.2 Variance . . . . .	10
1.2.3 Covariance . . . . .	10
1.2.4 Coefficient de corrélation . . . . .	10
1.2.5 Valeur à risque (VaR) . . . . .	11
1.2.6 La Conditional Value-at-Risk (CVaR) . . . . .	11
Conclusion . . . . .	14
<b>2 Optimisation stochastique</b>	<b>15</b>
Introduction . . . . .	15
2.1 L'incertitude dans la programmation mathématique . . . . .	15
2.2 Formulation générale d'un problème linéaire stochastique . . . . .	16
2.3 Approche chance-constrained . . . . .	17

2.4	Définition d'un problème d'optimisation sous contrainte de chance . . . . .	17
2.5	Typologie des contraintes de chance . . . . .	18
2.5.1	Contraintes de chance individuelles et jointes . . . . .	18
2.5.2	Nature de l'incertitude : côté gauche (LHS) et côté droit (RHS) . . . . .	19
2.5.3	Structure de décision : problèmes à une ou deux étapes . . . . .	20
2.5.4	Variables de décision discrètes . . . . .	20
2.6	Complexité et intractabilité des CCP . . . . .	20
2.6.1	Non-convexité de l'ensemble admissible . . . . .	20
2.6.2	Difficulté d'évaluation de la probabilité de violation . . . . .	23
2.7	Reformulations classiques des contraintes de chance . . . . .	24
2.7.1	Approximation par la Conditional Value-at-Risk (CVaR) . . . . .	24
2.7.2	Reformulations en programmation en nombres entiers mixtes (MIP) . . . . .	26
2.7.3	Approximation par scénarios . . . . .	29
2.7.4	Méthode SAA (Sample Average Approximation) . . . . .	30
2.8	Résolution par la programmation en nombres entiers . . . . .	31
2.8.1	Méthodes exactes classiques de résolution des MIP . . . . .	31
2.8.2	Méthode de Décomposition de Benders Généralisée . . . . .	33
2.8.3	Algorithme de Décomposition de Benders Généralisé . . . . .	38
	Conclusion . . . . .	40
<b>3</b>	<b>Problème de gestion de portefeuille avec contrainte de chance</b>	<b>41</b>
	Introduction . . . . .	41
3.1	Revue de littérature . . . . .	42
3.2	Définition et formulation mathématique du modèle considéré . . . . .	42
3.3	Reformulation quadratique en nombres entiers mixtes (MIQP) . . . . .	44
3.4	Difficulté du modèle MIQP . . . . .	46
3.5	Reformulation par Approximation CVaR . . . . .	47
3.6	Application de l'algorithme de décomposition de benders généralisée au problème de portefeuille . . . . .	48
3.6.1	Principe et déroulement de l'algorithme GBD . . . . .	48
3.6.2	Problème Maître (PM) . . . . .	49
3.6.3	Sous-Problème (SP) . . . . .	49
3.6.4	Génération des coupes de Benders . . . . .	49
	Conclusion . . . . .	55
<b>4</b>	<b>Implémentation numérique et analyse des résultats</b>	<b>56</b>
	Introduction . . . . .	56
4.1	Présentation des outils et environnement de développement . . . . .	57
4.1.1	Génération des données(problèmes-test) . . . . .	57
4.1.2	Choix des paramètres . . . . .	59
4.2	Resultats et analyse GBD sur une instance CCPP . . . . .	60
4.3	Analyse comparative des approches Benders, CVaR et directe . . . . .	65
4.3.1	Analyse comparative des Performances algorithmique . . . . .	68
4.3.2	Analyse comparative des performances financières . . . . .	69
4.3.3	Discussion . . . . .	71
	Conclusion . . . . .	72

<b>TABLE DES MATIÈRES</b>	<b>V</b>
<b>Conclusion générale</b>	<b>73</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>75</b>
<b>Résumé</b>	<b>80</b>

# Table des figures

1.1	La frontière efficiente de Markowitz . . . . .	6
1.2	Forte et faible volatilité . . . . .	9
1.3	Présentation graphique de la VaR et de la CVaR . . . . .	13
2.1	Classification des méthodes de résolution pour les MIP issus de contraintes de chance. . . . .	32
2.2	Schéma itératif de la décomposition de Benders . . . . .	37
2.3	Diagramme Algorithme de décomposition de Benders généralisé. . . . .	39
3.1	Algorithme GBD pour l'optimisation de portefeuille sous contrainte de chance	51
4.1	Allocation des actifs significatives . . . . .	63
4.2	Convergence de l'algorithme GBD . . . . .	64
4.3	Evolution du nombres de scenarios exclu . . . . .	64
4.4	Comparaison des temps d'exécution des méthodes en fonction du nombre d'actifs	68
4.5	Écarts relatifs des objectifs . . . . .	69
4.6	Comparaison des rendements des mportefeuilles : CVaR, Benders et Directe . .	70
4.7	Comparaison des risques des portefeuilles : CVaR, Benders et Directe . . . . .	70

# Liste des Algorithmes

1	Décomposition de Benders Généralisé . . . . .	38
2	Procédure de génération des rendements simulés . . . . .	59

## Liste des tableaux

4.1	Extrait de la matrice des rendements (10 scénarios $\times$ 10 actifs) . . . . .	61
4.2	Vecteur des rendements moyens des actifs . . . . .	61
4.3	Matrice variance-covariance (5 $\times$ 5) des rendements d'actifs . . . . .	62
4.4	Tableau détaillé des résultats de l'optimisation . . . . .	62
4.5	Analyse des allocations . . . . .	62
4.6	Analyse des scénarios exclus . . . . .	63
4.7	Comparaison des méthodes d'optimisation avec $\alpha = 0.1$ . . . . .	66
4.8	Comparaison des méthodes d'optimisation avec ( $\alpha = 0.05$ ) . . . . .	67

# Liste d'abréviations et notations

- CCP** Chance-Constrained Programming.
- CCPO** Chance-Constrained Portfolio Optimization.
- CQP** Programmation Quadratique Conique (Conic Quadratic Programming).
- CVaR** Conditional Value-at-Risk.
- GBD** Décomposition Généralisée de Benders.
- LHS** Left-Hand Side.
- LP** Programmation Linéaire (Linear Programming).
- MIP** Mixed Integer Programming.
- MIQP** Programme Quadratique Mixte-Entier (Mixed-Integer Quadratic Program).
- MPT** Théorie Moderne de Portefeuille (Modern Portfolio Theory).
- PM** Problème Maître (Master Problem).
- QP** Programmation Quadratique (Quadratic Programming).
- RHS** Right-Hand Side.
- SAA** Sample Average Approximation.
- SDP** Programmation Semi-Définie Positive (Semidefinite Programming).
- SLP** Programmation Linéaire Stochastique (Stochastic Linear Programming).
- SOCP** Programme Conique du Second Ordre (Second-Order Cone Program).
- SP** Sous-Problème (Subproblem).
- VaR** Value-at-Risk.

# Introduction générale

Dans un environnement économique caractérisé par une incertitude croissante et une volatilité accrue des marchés financiers, la gestion optimale d'un portefeuille constitue un enjeu fondamental pour les investisseurs. L'objectif principal de l'optimisation de portefeuille est de répartir les ressources entre différents actifs afin de maximiser le rendement attendu tout en maîtrisant le risque associé. Cette problématique a suscité un grand intérêt dans le domaine de la finance quantitative, notamment à travers le développement de modèles mathématiques capables d'intégrer de manière rigoureuse les différentes sources d'incertitude.

Parmi ces modèles, le plus emblématique demeure celui de *Markowitz (1952)*, qui a fondé la théorie moderne du portefeuille. Ce modèle repose sur l'hypothèse que les investisseurs sont rationnels et cherchent à maximiser le rendement espéré tout en minimisant la variance des rendements, considérée comme une mesure du risque. La diversification et les corrélations entre actifs sont au cœur de cette approche, permettant de construire un portefeuille efficient.

Cependant, le modèle moyenne-variance présente plusieurs limites importantes. D'une part, il suppose que les rendements suivent une distribution normale et que la variance est une mesure suffisante du risque, ce qui s'avère souvent irréaliste. Or, dans la réalité des marchés financiers, les rendements ne suivent pas toujours une distribution normale : ils présentent souvent une asymétrie, une concentration autour de la moyenne plus forte que celle de la loi normale, ainsi que des événements extrêmes beaucoup plus fréquents que ce que prévoit le modèle gaussien. D'autre part, il ne tient pas compte de manière explicite de l'incertitude et des fluctuations imprévisibles affectant les marchés. Enfin, il est sensible aux erreurs d'estimation des paramètres, ce qui peut conduire à des portefeuilles instables.

Face à ces limites, des approches alternatives ont été développées, notamment celles basées sur la Valeur à Risque (VaR). La *VaR* permet d'estimer la perte potentielle maximale d'un portefeuille pour un niveau de confiance donné, fournissant ainsi une mesure plus intuitive et souvent mieux adaptée à la réalité des marchés. Toutefois, l'incorporation de la VaR dans des modèles d'optimisation soulève des défis majeurs, notamment liés à la non-linéarité et à la complexité computationnelle des formulations.

Dans ce contexte, *l'optimisation de portefeuille sous contraintes de chance (Chance-Constrained Portfolio Optimization, CCPO)* émerge comme une approche robuste permettant d'intégrer l'incertitude de manière probabiliste. En imposant que la probabilité de subir une perte excédant un certain seuil soit inférieure à un niveau prédéfini, le modèle *CCPO* garantit un contrôle plus rigoureux du risque. Cette approche repose souvent sur l'utilisation de la VaR comme contrainte probabiliste, offrant une vision réaliste et flexible de la gestion du risque financier.

Sur le plan mathématique, le recours à des contraintes de chance s'inscrit dans le cadre de la programmation stochastique, où l'incertitude est modélisée explicitement. Toutefois, ces problèmes sont souvent difficiles à résoudre, notamment en raison de leur complexité non linéaire et de leur taille croissante. Pour surmonter ces difficultés, des techniques de décomposition, telles que l'approche de *Benders*, permettent de diviser le problème initial en sous-problèmes plus simples et plus rapides à résoudre, tout en exploitant la structure particulière des contraintes.

Dans ce mémoire, nous proposons de formuler un modèle d'optimisation de portefeuille intégrant une contrainte de chance basée sur la VaR, et de le résoudre à l'aide d'une approche de décomposition. L'objectif est de développer une méthode robuste et efficace pour optimiser l'allocation d'actifs dans un environnement incertain, et de valider ce modèle par une étude empirique sur données simulées.

## Objectifs du mémoire

Ce mémoire a pour objectifs de :

- Présenter les fondements théoriques de l'optimisation de portefeuille sous contrainte de chance ;
- Illustrer l'intégration de la Value-at-Risk (VaR) comme mesure de risque dans ce cadre ;
- Mettre en œuvre une reformulation en programmation en nombres entiers mixtes (MIP) du problème étudié ;
- Appliquer une méthode de décomposition (GBD) pour en faciliter la résolution ;
- Analyser les résultats obtenus à travers une étude empirique sur données simulées.

## Structure du mémoire

Ce mémoire est structuré en trois chapitres :

- **Chapitre 1** : Gestion de portefeuille.  
Ce chapitre introduit le modèle de Markowitz, en présentant sa formulation mathématique et les principales mesures de risque, ainsi que les motivations menant à l'usage de la programmation linéaire stochastique.
- **Chapitre 2** : Optimisation sous contraintes de chance.  
Il présente les fondements de l'optimisation sous contraintes de chance, les différents types de contraintes (simples vs jointes), les techniques classiques de reformulation (convexes, MIP), ainsi qu'une introduction à l'algorithme de Benders généralisé.
- **Chapitre 3** : Modélisation du problème.  
Ce chapitre décrit la formulation mathématique du problème de gestion de portefeuille avec contrainte de chance, la reformulation MIP détaillée, les difficultés du modèle, et l'application de l'algorithme de décomposition de Benders généralisé.

- **Implémentation et résultats** : Il détaille les outils utilisés (Python, Pyomo, Gurobi/CPLEX), la génération des scénarios de rendement, les paramètres choisis, et analyse les résultats issus de la résolution numérique.
- **Conclusion générale** : Elle résume les contributions du mémoire, discute les limites du modèle proposé, et suggère des pistes pour des recherches futures.

## 1

# Gestion de portefeuille

## Introduction

Le concept de marché, issu des échanges traditionnels, s'est progressivement structuré jusqu'à former les marchés financiers actuels. La gestion de portefeuille, autrefois fondée sur des pratiques empiriques, a évolué vers une approche scientifique à partir du milieu du XXe siècle.

C'est en 1952 qu'Harry Markowitz a posé les bases de la théorie moderne du portefeuille, en introduisant une approche quantitative de la gestion des investissements. Son modèle intègre explicitement la notion de risque dans la sélection des actifs.

Aujourd'hui encore, cette théorie constitue un pilier fondamental de la finance moderne. Elle sert de référence et d'outil d'aide à la décision pour les institutions financières et les gestionnaires d'actifs.

Le modèle de Markowitz repose sur la modélisation du risque à travers la variance (ou l'écart-type) des rendements, en supposant que ceux-ci suivent une distribution normale et que les investisseurs agissent de manière rationnelle. Cette approche permet d'évaluer et de comparer des portefeuilles selon leur performance attendue et le risque associé.

Ce premier chapitre est consacré à la présentation des principes fondamentaux de la théorie moderne du portefeuille, en mettant l'accent sur *le modèle de Markowitz* et l'introduction de *Valeur à Risque (VaR)* comme alternative de mesure du risque. Nous aborderons également les principales méthodes de calcul de la rentabilité d'un actif financier et d'un portefeuille, ainsi que les outils permettant d'évaluer leur risque .[22]

## 1.1 Modèle de Markowitz

Avec les travaux de *Harry Markowitz* (1952, 1959), et la publication de son premier article dans le *Journal of Finance*, le modèle de Markowitz est supposé être un modèle de référence pour la construction de portefeuilles efficients. L'objectif fondamental de l'optimisation Moyenne-Variance est la détermination des pondérations des différentes classes d'actifs pour permettre une meilleure allocation de la richesse. Le résultat de cette optimisation est un portefeuille de référence (dit autrement, un benchmark pour l'allocation stratégique d'actifs).

Le principe de base du modèle repose sur une logique de domination : entre deux portefeuilles caractérisés par leur rendement (supposé aléatoire), on privilégiera, à risque identique, celui dont l'espérance de rendement est la plus élevée, et à espérance de rendement identique, celui qui présente le risque le plus faible. Ce principe conduit naturellement à éliminer les portefeuilles inefficients, c'est-à-dire ceux qui sont dominés à la fois en termes de rendement espéré et de risque [22, 44, 4].

### 1.1.1 Diversification

En finance, la diversification est une stratégie de gestion de portefeuille consistant à répartir les investissements sur plusieurs actifs afin de réduire le risque global. Elle repose sur le principe que les actifs ne réagissent pas tous de la même manière face aux fluctuations du marché. Ainsi, en combinant des actifs dont les rendements ne sont pas parfaitement corrélés, il est possible de minimiser la volatilité du portefeuille sans nécessairement sacrifier la rentabilité espérée.

### 1.1.2 Hypothèses de base

Comme tout modèle, le choix de portefeuille à la Markowitz est fondé sur plusieurs hypothèses quant aux comportements des individus ainsi qu'au contexte d'incertitude. Il y a généralement plusieurs (pas toujours les mêmes) hypothèses mentionnées, les plus importantes sont résumées ici :

#### 1.1.2.1 Hypothèses relatives aux actifs financiers

— *Hypothèse 1 :*

Tout investissement est une décision prise dans une situation de risque : le rendement  $R_i$  d'un actif financier  $i$  pour toute une période future est par conséquent une variable aléatoire, dont on fait l'hypothèse qu'elle est distribuée selon une loi normale, c'est à dire une distribution symétrique stable entièrement définie par deux paramètres : l'espérance mathématique  $\bar{r}_i = E(R_i)$  du rendement et l'écart-type  $\sigma = \sigma(R_i)$ .

— *Hypothèse 2 :*

Les rendements des différents actifs financiers ne fluctuent pas indépendamment les uns des autres :

ils sont corrélés ( $cov(R_i, R_j) \neq 0$  où  $\rho_{ij} = \frac{cov(R_i, R_j)}{\sigma_{R_i} \sigma_{R_j}} \neq 0$ ,

$\rho_{ij}$  est le coefficient de corrélation des rendements des actifs  $i$  et  $j$ .

### 1.1.2.2 Hypothèses relatives aux comportements des investisseurs

— *Hypothèse 3 :*

Le comportement des investisseurs est caractérisé par un degré plus ou moins prononcé d'aversion au risque. Ce dernier est mesuré par l'écart-type de la distribution de la probabilité du rendement.

— *Hypothèse 4 :*

Les investisseurs sont rationnels : bien que leur fonction de préférence soit purement subjective, ils opèrent, en référence à celle-ci, des choix strictement transitifs.

— *Hypothèse 5 :*

Tous les investisseurs ont le même horizon de décision, qui comporte une seule période. Cette simplification, qui peut paraître exagérée, permet de mettre en œuvre un modèle.

### 1.1.3 Frontière efficiente

La *frontière efficiente* est l'ensemble des portefeuilles optimaux offrant le rendement maximal pour un risque donné (ou le risque minimal pour un rendement cible). Elle est obtenue en résolvant un programme d'optimisation quadratique combinant  $n$  titres risqués.

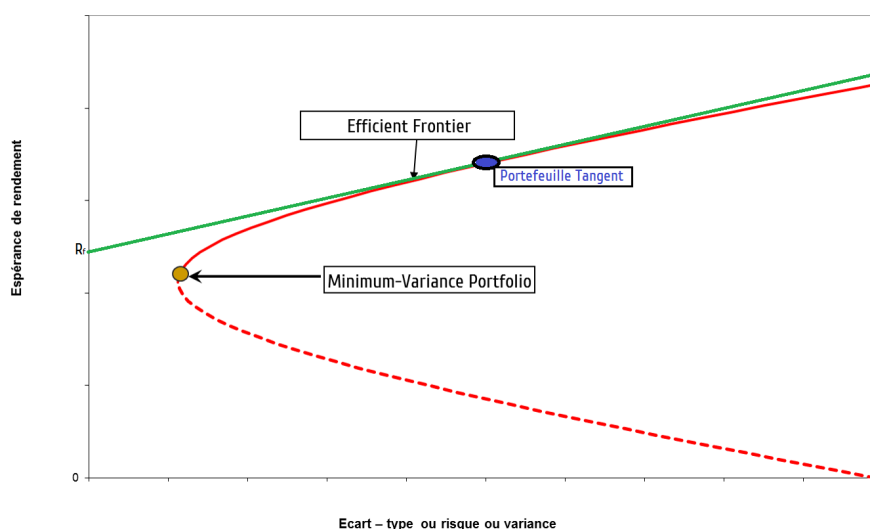


FIGURE 1.1 – La frontière efficiente de Markowitz

- *Chaque point sur la courbe rouge (Efficient Frontier) :* Chaque point sur cette courbe représente un portefeuille efficient (appelé frontière de Markowitz).
- *Point clé (Minimum-Variance Portfolio) :* Le portefeuille situé à l'extrême gauche de la courbe, minimisant le risque (variance).
- *Portefeuille Tangent :* Point d'intersection avec la droite de marché.
- *Région Inférieure :* Zone des portefeuilles non-efficents

## Portefeuilles non-efficients

Tout portefeuille situé *sous la courbe efficiente* est non optimal car :

- Pour son niveau de rendement, il existe un portefeuille efficient avec *moins de risque*.
- Pour son niveau de risque, il existe un portefeuille efficient avec *plus de rendement*.

## Choix de l'investisseur

L'investisseur sélectionne un portefeuille *sur la courbe efficiente* selon :

- Sa *tolérance au risque* (mesurée par l'écart-type)
- Son *objectif de rendement* (maximisation de l'utilité espérée).[1]

### 1.1.4 Présentation mathématique du modèle

Soit  $S$  un portefeuille composé de  $n$  titres ayant respectivement des rendements  $R_1, R_2, \dots, R_n$ . D'après les hypothèses du modèle de Markowitz, chaque  $R_i$  suit une loi normale de moyenne  $\mu_i$  avec un écart-type  $\sigma_i$ .

En outre, on suppose que chaque actif  $i$  a une proportion  $x_i$  dans la composition du portefeuille  $S$ , telle que :

- Le rendement du portefeuille  $S$ , noté  $R_S$ , est donné par la relation suivante :

$$R_S = x_1 R_1 + x_2 R_2 + \dots + x_n R_n = \sum_{i=1}^n x_i R_i$$

avec  $\sum_{i=1}^n x_i = 1$

- L'espérance du portefeuille est donné par :

$$\mu_S = \mathbb{E}(R_S) = \sum_{i=1}^n x_i \mathbb{E}(R_i) = \sum_{i=1}^n \mu_i x_i = \mu' \mathbf{x}$$

où  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  et  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$  sont des  $n$  - vecteurs.

- La variance du portefeuille  $S$  est donnée par :

$$\sigma_S^2 = \mathbb{V}(R_S) = \sum_{i=1}^n x_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n x_i x_j \sigma_{ij}$$

La forme matricielle du risque s'écrit sous la forme :

$$\sigma_S^2 = \mathbf{x}^T \Sigma \mathbf{x}$$

où  $\Sigma$  est la matrice de variance-covariance des rendements des différents titres qui est carrée d'ordre  $n$ , symétrique et définie positive, telle que :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

Donc, on résout ce problème d'optimisation quadratique suivant pour sélectionner un portefeuille optimal :

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & \beta \frac{1}{2} x^T \Sigma x \\ \text{s.c.} \quad & \mu^T x \geq \bar{r}, \\ & e^T x = 1, \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

où :

- $e \in \mathbb{R}^n$  dont toutes les composantes sont égales à 1.
- $\beta$  est un paramètre qui représente le degré d'aversion au risque des investisseurs. Pour  $\beta = 0$ , l'investisseur cherche à minimiser le risque de son portefeuille et lorsque le risque est très grand, dans ce cas l'investisseur cherche à maximiser le rendement de son portefeuille [14].

### 1.1.5 Limites du modèle de Markowitz

La théorie moderne du portefeuille (MPT) de Markowitz constitue un cadre fondamental pour diversifier les investissements tout en équilibrant rendement et risque. Toutefois, elle présente plusieurs limites importantes :

- **Hypothèse de distribution normale** : La MPT suppose que les rendements suivent une distribution normale, ce qui est souvent irréaliste. Les marchés financiers présentent fréquemment des asymétries, des biais ou des événements extrêmes qui ne sont pas capturés par ce modèle.
- **Fiabilité des estimations** : Le modèle repose fortement sur des estimations précises des rendements, volatilités et corrélations, généralement fondées sur des données historiques. Ces estimations peuvent être inexactes, menant à des erreurs dans la construction du portefeuille optimal.
- **Préférences et contraintes ignorées** : La MPT considère uniquement le couple rendement- risque, négligeant d'autres facteurs comme les préférences individuelles, les investissements éthiques ou les contraintes de liquidité, qui peuvent pourtant influencer les décisions d'investissement.
- **Hypothèse de marchés parfaits** : Elle suppose un accès illimité à tous les actifs et l'absence de coûts de transaction ou de taxes, ce qui est rarement vérifié dans la réalité.

Ainsi, bien que la MPT fournisse une base robuste pour l'optimisation des portefeuilles, elle ne permet pas de saisir entièrement les risques liés aux événements extrêmes. C'est pourquoi des mesures complémentaires, telles que la *Value at Risk* (VaR), sont nécessaires. La VaR quantifie la perte maximale potentielle sur un horizon donné avec un certain niveau de confiance, offrant ainsi une vision plus complète du risque en se focalisant sur les pertes extrêmes plutôt que sur la seule volatilité globale [23].

## 1.2 Mesures de risque

La mesure du risque en gestion de portefeuille repose sur le couple moyenne-variance, introduit par Markowitz, sous l'hypothèse que les rendements suivent une distribution normale. Le risque financier désigne la possibilité de perte liée à des variations de marchés (actions, taux d'intérêt, devises, matières premières). Dans la théorie moderne du portefeuille, ce risque est représenté par la volatilité. Aujourd'hui, les outils de mesure du risque sont devenus indispensables pour anticiper l'évolution du capital, parmi lesquels certains sont particulièrement reconnus et largement utilisés.

### 1.2.1 Volatilité

La volatilité est une mesure des variations du rendement d'un actif pendant une période définie. Si la volatilité est élevée, la possibilité de gain est plus importante, mais le risque de perte l'est aussi. Sinon, si la volatilité est faible, la possibilité de risque de perte est moins importante, mais le gain l'est aussi.

Mathématiquement, la volatilité (l'écart-type) se traduit par la formule suivante :

$$\sigma_i = \sqrt{V(R_i)} = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (R_{i,t} - \mu_i)^2}$$

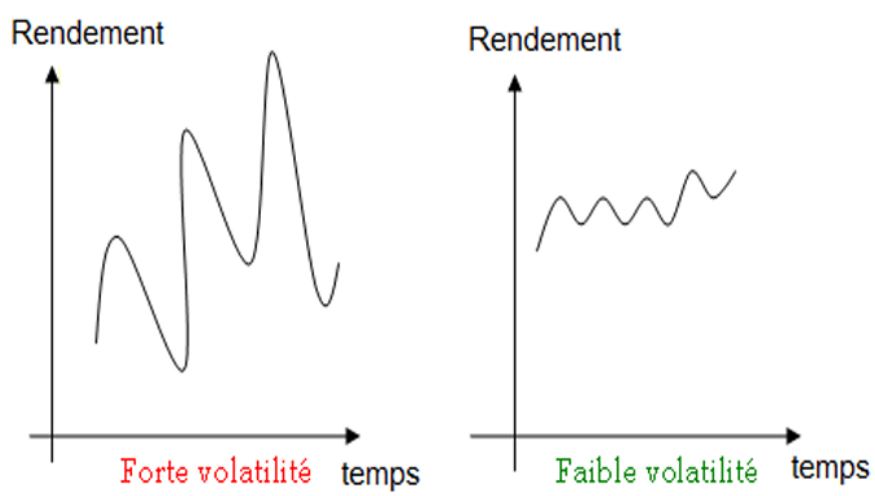


FIGURE 1.2 – Forte et faible volatilité

### 1.2.2 Variance

Une mesure classique de risque est la variance. Il est bien connu que *Markowitz* est la première personne qui a utilisé la variance comme une mesure de risque. La variance d'une variable aléatoire mesure la dispersion des valeurs autour de sa moyenne. Pour une variable aléatoire  $X$ , sa variance est définie comme suit :

$$\text{Var}(X) = E(X - E(X))^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$$

L'analyse des performances d'un titre  $i$  à partir d'un échantillon d'observations sur un horizon de  $T$  périodes nous permet de calculer sa variance  $\sigma_i^2$  par :

$$\sigma_i^2 = \text{Var}(R_i) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (R_{i,t} - \mu_i)^2$$

où

$$\mu_i = E(R_i) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R_{i,t}$$

est le rendement espéré. [1]

### 1.2.3 Covariance

La covariance permet d'étudier les variations simultanées de deux variables par rapport à leur moyenne respective.

En finance, cette notion permet de mesurer le degré de liaison des fluctuations de deux titres entre eux, ou encore d'un titre avec un indice. Mathématiquement, sur un échantillon de  $T$  périodes, la covariance est définie comme suit :

$$\sigma_{ij} = \text{Cov}(R_i, R_j) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (R_{i,t} - \mu_i)(R_{j,t} - \mu_j)$$

Avec :

—  $R_{j,t}$  : le rendement du titre  $j$

### 1.2.4 Coefficient de corrélation

Le coefficient de corrélation entre deux actifs financiers, ou plus généralement entre deux variables aléatoires, est l'intensité de la liaison qu'il y a entre ces deux variables.

Il est calculé par la formule suivante :

$$\rho_{i,j} = \frac{\text{Cov}(R_i, R_j)}{\sigma_i \sigma_j}$$

où  $\sigma_i$  et  $\sigma_j$  représentent respectivement les volatilités des titres  $i$  et  $j$ .

### 1.2.5 Valeur à risque (VaR)

**Définition 1.2.1** (Value at Risk). La *Value at Risk* d'un portefeuille d'actifs pour une période  $[t, t + 1]$  avec un degré de confiance  $\alpha \in (0, 1)$  est définie comme un montant, noté  $\text{VaR}(\alpha)$ , tel que la variation  $X_i$  observée ne sera supérieure à ce montant qu'avec une probabilité inférieure ou égale à  $(1 - \alpha)$  :

$$\text{VaR}(\alpha) \equiv \inf\{x : P(X_i > x) \leq 1 - \alpha\}$$

ou encore

$$\text{VaR}(\alpha) \equiv F^{-1}(\alpha) \equiv \inf\{x : F(x) \geq \alpha\}$$

où  $F(x) = P(X_i \leq x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  est la fonction de répartition de  $X_i$  et  $F^{-1}$  l'inverse généralisé de  $F$ .

### La VaR en optimisation de portefeuille

La *Value at Risk* (VaR) est un indicateur de risque largement utilisé pour quantifier, à un niveau de confiance donné  $\alpha$ , la perte maximale qu'un portefeuille pourrait subir sur un horizon donné. Elle est définie par la condition probabiliste :

$$P(R \leq \text{VaR}_\alpha) \geq \alpha$$

Cette propriété rend la VaR naturellement compatible avec les contraintes de chance, en traduisant des objectifs de maîtrise du risque en inégalités probabilistes. De plus, son expression en unités monétaires facilite son interprétation et son intégration dans les modèles de décision [52].

Dans le cadre de l'optimisation de portefeuille, la VaR joue un rôle essentiel en fournissant des informations clés sur le compromis entre rendement et risque. Elle permet aux gestionnaires de risques de rechercher un *équilibre optimal entre risque et performance*, en allouant stratégiquement des actifs dans différentes classes d'investissement [4, 24]. Par son usage, il devient possible de construire des portefeuilles diversifiés répondant à des objectifs de rendement tout en limitant l'exposition aux pertes extrêmes.

Enfin, la VaR constitue un *outil de contrôle efficace*, en permettant de fixer des limites de risque ou des budgets d'investissement. Elle peut être utilisée pour définir un plafond de capital à allouer à certaines classes d'actifs ou zones géographiques, avec la possibilité de rééquilibrer dynamiquement le portefeuille lorsque les seuils de risque sont franchis [4, 24].

Dans ce mémoire, la VaR constitue la base probabiliste de notre modèle de portefeuille sous incertitude. Elle sera intégrée à travers une contrainte de chance, puis reformulée de manière déterministe afin d'en permettre la résolution via des approches adaptées, notamment la décomposition de Benders que nous développerons dans les chapitres suivants.

### 1.2.6 La Conditional Value-at-Risk (CVaR)

**Définition 1.2.2.** La *Conditional Value-at-Risk* (CVaR), également appelée *Expected Shortfall*, est une mesure de risque cohérente qui évalue la perte moyenne subie au-delà d'un certain

quantile d'un niveau de confiance  $\alpha \in (0, 1)$ . Contrairement à la *Value-at-Risk* (VaR), qui fournit uniquement un seuil de perte ne devant être dépassé qu'avec une faible probabilité  $1 - \alpha$ , la CVaR tient compte de la gravité des pertes extrêmes dans la queue de distribution.

Formellement, pour une variable aléatoire  $L$  représentant la perte, la CVaR au niveau  $\alpha$  est définie comme :

$$\text{CVaR}_\alpha(L) = \mathbb{E}[L \mid L \geq \text{VaR}_\alpha(L)]. \quad (1.2)$$

En capturant l'information sur les pertes extrêmes, la CVaR offre une mesure plus prudente et robuste du risque. Elle est particulièrement utile dans les problèmes d'optimisation stochastique, notamment pour approximer les contraintes de chance, souvent non convexes et complexes à manipuler directement [47].

Soit la variable aléatoire  $\xi$  représentant la perte, la CVaR au niveau de confiance  $\alpha \in (0, 1)$  en introduisant une variable auxiliaire  $t \in \mathbb{R}$  est définie par :  
 $\exists t \in \mathbb{R}$  tel que :

$$\text{CVaR}_\alpha(\xi) = \min_{t \in \mathbb{R}} \left\{ t + \frac{1}{\alpha} \mathbb{E}[(\xi - t)_+] \right\}, \quad (1.3)$$

où  $(\cdot)_+ = \max\{0, \cdot\}$ .

### Avantages de la valeur à risque (VaR) et de la valeur conditionnelle à risque (CVaR)

La Valeur à Risque (VaR) et la Valeur Conditionnelle à Risque (CVaR) offrent des perspectives complémentaires et quantifiables sur l'ampleur des pertes potentielles d'un portefeuille, sur un horizon de temps défini, avec un certain niveau de confiance. Alors que la VaR permet d'estimer directement le montant maximal des pertes attendues dans des conditions normales de marché, la CVaR affine cette mesure en évaluant la perte moyenne au-delà du seuil critique de la VaR, ce qui la rend particulièrement utile en cas de scénarios extrêmes.

Contrairement aux mesures traditionnelles du risque, telles que l'écart-type ou la bêta, qui se contentent d'indiquer la dispersion des rendements ou la sensibilité d'un actif aux fluctuations, la VaR et la CVaR traduisent ces risques sous la forme d'un chiffre monétaire explicite. Elles fournissent ainsi un outil de communication clair et simple à interpréter, facilitant la prise de décision pour les gestionnaires d'actifs et les investisseurs.

Un autre atout majeur réside dans la flexibilité des méthodes de calcul de la VaR et de la CVaR, permettant de s'adapter aux distributions de rendements souvent asymétriques ou présentant des queues épaisses, comme celles observées sur les marchés financiers. Cela les rend particulièrement pertinentes pour les portefeuilles contenant des produits dérivés ou des actifs aux profils de rendement atypiques.

Enfin, en combinant la VaR et la CVaR, les investisseurs bénéficient d'une vision plus complète : la VaR quantifie la perte maximale à un seuil de confiance donné, tandis que la CVaR mesure la gravité moyenne des pertes au-delà de ce seuil, renforçant ainsi la robustesse de l'analyse des risques. [52]

**Exemple 1.2.1** (Exemple illustratif de la VaR et de la CVaR). Si la Valeur à Risque (VaR) d'un portefeuille à un horizon de 10 jours est de 5000 €, avec un intervalle de confiance de 95%, cela signifie que sur les 10 prochains jours, il y a 95% de chances que le portefeuille ne perde pas plus de 5000 € de sa valeur. Autrement dit, il y a 5% de probabilité que la perte dépasse ce seuil de 5000 €.

Supposons que l'on construise une distribution de probabilité des pertes potentielles du portefeuille sur la période considérée (10 jours). En abscisse, on représente les pertes potentielles, et en ordonnée, la probabilité d'occurrence. On obtient une courbe de densité de probabilité semblable à celle-ci :

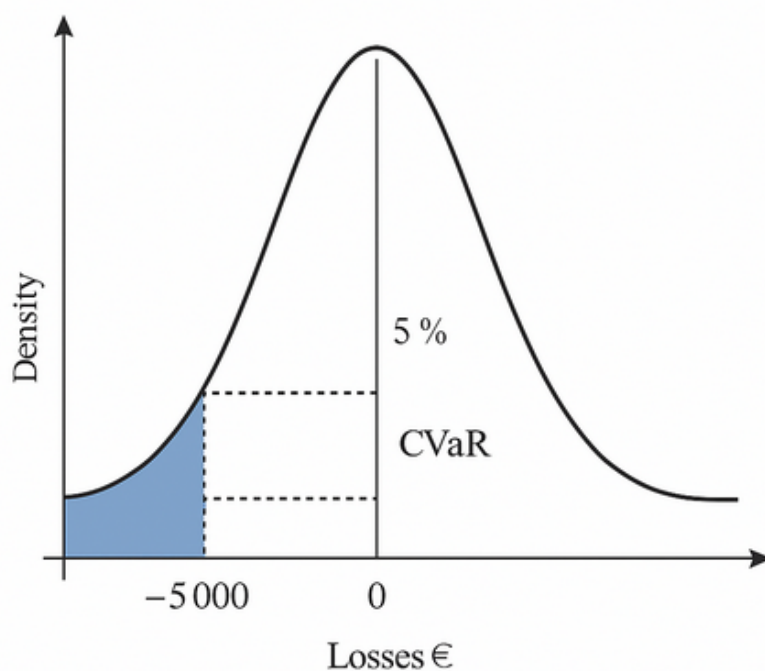


FIGURE 1.3 – Présentation graphique de la VaR et de la CVaR

La VaR peut être lue directement sur cette courbe à partir de l'ordonnée 5% : ici, on lit une perte potentielle de 5000 €. Les 95% restants, à droite de ce seuil, représentent les cas où la perte est inférieure à 5000 € ou le portefeuille réalise un gain.

Cependant, la VaR ne donne aucune information sur l'ampleur des pertes au-delà du seuil. Pour cela, on utilise la *Valeur conditionnelle à risque (CVaR)*, également appelée *Expected Shortfall*.

La CVaR mesure la perte moyenne en cas de dépassement de la VaR. Elle quantifie donc la perte attendue si le scénario extrême (pire que la VaR) se réalise.

Dans cet exemple, la CVaR correspond à la perte moyenne sachant que la perte dépasse 5000 €. Visuellement, elle est représentée par la moyenne de la zone ombrée en bleu dans la queue gauche de la distribution (au-delà de la VaR).

Ainsi, la CVaR complète la VaR en apportant une mesure de la gravité des pertes extrêmes. [25]

*La VaR repose sur trois éléments fondamentaux :*

- Un *horizon temporel fixe* (ici, 10 jours),
- Un *intervalle de confiance* (ici, 95%),
- Un *montant maximal de perte* (ici, 5000 €).

*Méthodes d'estimation de la distribution des pertes :*

- Méthode paramétrique,
- Méthode historique,
- Méthode des simulations de Monte Carlo.

## Conclusion

Ce premier chapitre a présenté les bases théoriques de la gestion de portefeuille, en s'appuyant sur la théorie moderne de Markowitz qui établit un lien entre rendement espéré et risque, notamment à travers le principe de diversification. Bien que cette approche soit largement utilisée, elle repose sur des hypothèses simplificatrices, comme la normalité des rendements et l'usage exclusif de la variance comme mesure du risque. Pour surmonter ces limites, la Valeur à Risque (*VaR*) a été introduite comme outil complémentaire, permettant d'évaluer les pertes maximales potentielles avec un certain niveau de confiance. Toutefois, malgré son utilité, la *VaR* reste insuffisante pour appréhender toute l'incertitude des marchés financiers.

Le chapitre suivant se penchera sur l'optimisation de portefeuille sous contrainte de chance, une approche plus rigoureuse qui intègre directement des contraintes probabilistes dans le processus d'allocation. Ces contraintes visent à limiter la probabilité de dépasser un seuil de perte fixé à l'avance, offrant ainsi une meilleure maîtrise du risque. Nous explorerons les techniques d'optimisation stochastique permettant de résoudre ces modèles, notamment à travers des reformulations mathématiques telles que la programmation quadratique mixte (*MIQP*) et l'application de méthodes de décomposition comme l'algorithme de Benders, afin de construire des portefeuilles à la fois performants et robustes face à l'incertitude.

## 2

# Optimisation stochastique

## Introduction

Dans de nombreux contextes réels, les problèmes d'optimisation doivent être formulés à partir de données incertaines. Cette incertitude résulte souvent de facteurs non observables ou liés à des événements futurs, rendant les paramètres du modèle difficiles à connaître avec précision. Pour modéliser cette variabilité, il est courant de représenter certains paramètres à l'aide de variables aléatoires.

Ce cadre conduit naturellement à la programmation stochastique, qui vise à intégrer cette incertitude dans la formulation du problème. Parmi les approches existantes, le modèle avec contrainte probabiliste, aussi appelé modèle sous contrainte de chance, occupe une place centrale. Ce type de formulation permet d'exprimer les contraintes de manière probabiliste, en tenant compte explicitement du caractère aléatoire des données.

Dans ce chapitre, nous nous concentrons sur ce type de modèles. Nous en décrivons les principaux éléments, les motivations pratiques, ainsi que les méthodes classiques de reformulation et de résolution dans un cadre discret à support fini.

## 2.1 L'incertitude dans la programmation mathématique

La notion d'incertitude en programmation mathématique a été introduite dans les années 1950, notamment à travers les travaux de Dantzig, Cooper, Charnes et Beale. Cette problématique occupe aujourd'hui une place centrale en finance, où l'incertitude affecte de manière significative les décisions d'investissement et de gestion de portefeuille.

Les paramètres incertains sont généralement modélisés à l'aide de variables aléatoires ou

décrits à partir de lois de probabilité, de scénarios<sup>1</sup> historiques ou de caractéristiques statistiques. Pour mieux maîtriser ces incertitudes, la finance a développé des mesures de risque, définies au préalable la Value-at-Risk (VaR) et la Conditional Value-at-Risk (CVaR). Ces outils permettent d'intégrer le risque dans les modèles d'optimisation et d'élaborer des stratégies plus robustes face à l'aléa.[28]

## 2.2 Formulation générale d'un problème linéaire stochastique

On parle de programmation linéaire stochastique (SLP : Stochastic Linear Programming) lorsque la fonction objectif ainsi que les contraintes dépendent linéairement de la variable  $x$ , et que l'ensemble  $\mathcal{X}$  est un polyèdre<sup>2</sup> convexe. Ce type de problème est défini comme suit :

$$(P) \quad \begin{cases} \min & Z = C(\xi)x \\ \text{s.c.} & T(\xi)x = h(\xi) \\ & x \in \mathcal{X} \end{cases} \quad (2.1)$$

où :

- L'ensemble  $\mathcal{X} = \{Ax = b; x \geq 0\}$  est un polyèdre convexe.
- Les objets suivants sont des vecteurs déterministes :
  - $x \in \mathbb{R}^{n_1}$  de dimension  $(n_1, 1)$ ;
  - $A \in \mathbb{R}^{m_1 \times n_1}$  de dimension  $(m_1, n_1)$ ;
  - $b \in \mathbb{R}^{m_1}$  de dimension  $(m_1, 1)$ .
- Les objets suivants sont des vecteurs aléatoires définis sur l'espace de probabilités  $(\Xi, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  :
  - $C(\xi) \in \mathbb{R}^{1 \times n_1}$  de dimension  $(1, n_1)$ ;
  - $T(\xi) \in \mathbb{R}^{m_2 \times n_1}$  de dimension  $(m_2, n_1)$ ;
  - $h(\xi) \in \mathbb{R}^{m_2}$  de dimension  $(m_2, 1)$ .

La littérature autour de la programmation stochastique devient de plus en plus riche; les ouvrages les plus importants dans ce domaine sont ceux de Birge et Louveaux [7], Kall et Mayer [30] ainsi que Kall et Wallace [31].

Les approches dominantes en matière de modélisation et de résolution des problèmes de programmation stochastique sont les suivantes :

- Modèle avec des contraintes probabilistes.
- Modèle de recours.

Dans ce mémoire, nous nous concentrons sur le modèle avec des contraintes probabilistes dite approche *chance-constrained*.

1. Un *scénario* est une suite d'événements possibles. Pour fixer les idées,  $s$  désignera un scénario.

2. Un *ensemble polyédrique* est un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$  défini comme l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces fermés, c'est-à-dire un ensemble de la forme  $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ , où  $A$  est une matrice réelle et  $b$  un vecteur réel.

## 2.3 Approche chance-constrained

Dans de nombreux problèmes d'optimisation réels, les paramètres du modèle sont affectés par une incertitude inhérente. Exiger la faisabilité pour toutes les réalisations possibles de ces incertitudes peut conduire à des solutions trop conservatrices et peu performantes. Pour pallier cette limitation, la *programmation sous contraintes de chance* (*Chance-Constrained Programming, CCP*) propose une alternative efficace, en autorisant une faible probabilité de violation des contraintes. Ce formalisme introduit une tolérance explicite au risque, permettant ainsi de mieux équilibrer robustesse et performance.

Ce cadre est particulièrement pertinent en gestion de portefeuille, où l'incertitude sur les rendements futurs rend les modèles purement robustes inefficaces. L'intégration d'une contrainte de chance, par exemple via la *Value-at-Risk (VaR)*, permet de limiter le risque de perte au-delà d'un certain seuil avec une probabilité donnée, tout en conservant des perspectives de rendement intéressantes.

Depuis les travaux fondateurs de *Charnes et Cooper* (1959)[16] sur les programmes probabilistes, la CCP a connu un développement théorique significatif. *Prékopa* (1970, 1995)[45, 46] a apporté des résultats majeurs sur la convexité dans le cas de distributions log-concaves, tandis que *Miller et Wagner* (1965)[39] ont étendu le cadre aux contraintes jointes. *Kall et Wallace* (1986)[31] ont intégré ces concepts dans la programmation stochastique, posant les bases d'un cadre unifié. Plus récemment, les travaux de *Rockafellar et Uryasev* (2000)[47] avec la CVaR et ceux de *Calafiore et Campi* (2006) [10] sur les méthodes scénariques ont permis de rendre ces modèles plus accessibles. Les recherches les plus récentes, telles que celles de *Küçükyavuz et Jiang* (2022)[34], se sont focalisées sur la résolution efficace de problèmes combinatoires via des formulations mixtes.

L'ensemble de ces contributions a permis de structurer un champ d'étude riche, à la croisée de l'optimisation stochastique, de la théorie des risques et de l'algorithmique avancée, avec des applications concrètes en finance, logistique, énergie ou ingénierie des systèmes complexes.

## 2.4 Définition d'un problème d'optimisation sous contrainte de chance

Considérons un problème d'optimisation où les contraintes dépendent de paramètres incertains. Une formulation générale d'un programme sous contrainte de chance (*Chance-Constrained Program, CCP*) est donnée par :

$$(CCP) \quad \begin{cases} \min_{x \in \mathcal{X}} & f(x) \\ \text{s.c.} & \mathbb{P}(G(x, \xi) \geq r(\xi)) \geq 1 - \alpha \end{cases} \quad (2.2)$$

où :

- $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction objectif,
- $G : \mathbb{R}^n \times \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}^m$  avec  $\xi \in \mathbb{R}^d$ , est un vecteur de fonctions contraintes ( $G_1, \dots, G_m$ ) décrivant les contraintes de chance,

- $x \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur des variables de décision,
- $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$  est un ensemble déterministe (typiquement polyédrique),
- $\xi \in \mathbb{R}^d$  est un vecteur aléatoire représentant l'incertitude du système, défini sur un ensemble  $\Xi \subset \mathbb{R}^d$  avec une distribution de probabilité  $\mathbb{P}$ ,
- $r(\xi) \in \mathbb{R}^m$  est un vecteur aléatoire de seconds membres.
- $\alpha \in (0, 1)$  est un paramètre de confiance fixé par le décideur, représentant la probabilité maximale de violation autorisée.

Les contraintes :

$$\mathbb{P}(G(x, \xi) \geq r(\xi)) \geq 1 - \alpha \quad (2.3)$$

dites '*chance constraint*', constituent un compromis entre la faisabilité stricte pour toutes les réalisations de l'aléa  $\xi$ , souvent trop coûteuse ou irréalisable, et une approche plus souple tolérant un faible niveau de risque  $\alpha$ [42].

Nous nous concentrons principalement sur les contraintes de chance linéaires, soit :

$$P(\xi) = \{x : T(\xi)x \geq r(\xi)\} \quad (2.4)$$

où  $T(\xi)$  est une matrice aléatoire de taille  $m \times n$  de coefficients de contraintes.

## 2.5 Typologie des contraintes de chance

La programmation sous contrainte de chance se décline en plusieurs catégories selon la structure des contraintes probabilistes (2.3), la nature de l'incertitude et la forme de la décision. On distingue principalement :

### 2.5.1 Contraintes de chance individuelles et jointes

Selon le nombre de fonctions dans le vecteur  $G$ , on distingue deux grandes classes de contraintes de chance :

**Définition 2.5.1.** Contrainte de chance individuelle : lorsque  $m = 1$ , la contrainte porte sur un seul événement probabiliste. Par exemple :

$$\mathbb{P}(g_1(x, \xi) \geq r(\xi)) \geq 1 - \alpha.$$

Ce cas est fréquent dans les problèmes financiers, notamment lorsqu'on impose une borne sur la Value-at-Risk (VaR) du portefeuille. Dans ce contexte, nous imposons une seule contrainte probabiliste sur l'ensemble des lignes, plutôt que d'exiger que chaque ligne soit satisfaite indépendamment avec une forte probabilité. Une telle contrainte est appelée contrainte probabiliste conjointe : elle est particulièrement adaptée lorsqu'il est essentiel que toutes les contraintes soient satisfaites simultanément, et qu'il existe une dépendance entre les variables aléatoires associées aux différentes lignes.

**Définition 2.5.2.** Contrainte de chance jointe : lorsque  $m > 1$ , toutes les contraintes doivent être satisfaites simultanément avec une forte probabilité :

$$\mathbb{P}(g_1(x, \xi) \geq r(\xi), \dots, g_m(x, \xi) \geq r(\xi)) \geq 1 - \alpha.$$

Ce type de contrainte est plus conservateur, car il impose un contrôle global du risque sur plusieurs dimensions du problème (par exemple, plusieurs mesures de performance ou différents scénarios économiques).

### 2.5.2 Nature de l'incertitude : côté gauche (LHS) et côté droit (RHS)

Une autre distinction importante concerne la manière dont l'incertitude affecte la contrainte. On distingue deux formes :

**Définition 2.5.3.** Incertitude du second membre (Right-Hand Side, RHS) : Une contrainte de chance est dite *RHS* (*Right-Hand Side*) lorsque l'incertitude affecte uniquement le second membre  $r(\xi)$ , tandis que la matrice  $T$  est déterministe est de la forme :

$$P_{\text{RHS}}(\xi) := \{x : Tx \geq r(\xi)\} \quad (2.5)$$

où :

- $T \in \mathbb{R}^{m \times n}$  est une matrice déterministe
- $r(\xi) \in \mathbb{R}^m$  est un vecteur aléatoire

Cela correspond typiquement à des seuils ou exigences aléatoires à satisfaire. Ce cas est très courant dans la modélisation des rendements financiers.

**Définition 2.5.4.** Incertitude du premier membre (Left-Hand Side, LHS) : Lorsque l'incertitude affecte uniquement la matrice des coefficients  $T(\xi)$ , tandis que le second membre  $r$  est déterministe :

$$P_{\text{LHS}}(\xi) := \{x : T(\xi)x \geq r\} \quad (2.6)$$

où :

- $T(\xi) \in \mathbb{R}^{m \times n}$  est une matrice aléatoire
- $r \in \mathbb{R}^m$  est un vecteur déterministe

Ce type d'incertitude est plus complexe à modéliser et se retrouve dans les applications industrielles ou logistiques, lorsque les technologies, ressources ou coefficients de production sont incertains.

### 2.5.3 Structure de décision : problèmes à une ou deux étapes

La plupart des modèles CCP sont *mon-étape* (ou *statiques*), c'est-à-dire que la décision  $x$  est prise avant l'observation de  $\xi$ , et aucune action corrective n'est possible après la réalisation de l'incertitude. Cela correspond bien au cadre de notre modèle d'optimisation de portefeuille : les proportions d'actifs sont choisies une fois pour toutes, sans ajustement dynamique.

Il existe cependant des extensions en deux étapes (*two-stage CCP*), où une première décision est suivie d'une décision de « rattrapage » après observation de  $\xi$ . Ces modèles sont particulièrement utiles dans la gestion de chaîne logistique ou la planification énergétique.

### 2.5.4 Variables de décision discrètes

Enfin, dans certaines applications comme la sélection d'actifs ou les problèmes de logistique, les variables de décision peuvent être discrètes (notamment binaires). Lorsque le vecteur  $x \in \{0, 1\}^d$ , on parle de problème de chance-constrained combinatoire, qui est bien plus difficile à résoudre. Ces modèles nécessitent des reformulations et des algorithmes spécialisés, notamment des méthodes de décomposition ou de génération de colonnes qui sera présenté en détail dans les sections suivantes.

## 2.6 Complexité et intractabilité des CCP

Malgré leur intérêt historique et leur adoption croissante en pratique, les programmes sous contrainte de chance (CCP) demeurent l'une des classes de problèmes les plus difficiles à résoudre en optimisation stochastique [34].

Deux défis majeurs se posent dans ce cadre :

### 2.6.1 Non-convexité de l'ensemble admissible

La nature probabiliste des contraintes conduit, en général, à un ensemble de faisabilité non convexe, même lorsque  $x$  est continu,  $X$  polyédrique et l'incertitude porte uniquement sur le second membre [51, 42]. Seuls quelques cas particuliers, notamment les CCP jointes avec des distributions log-concaves sur le RHS ou les CCP individuelles sous certaines lois gaussiennes admettent une reformulation convexe exacte [42, 10]. Dans le cas général, la région réalisable peut se décomposer en une union de polyèdres dont les points extrêmes sont les points  $(1 - \alpha)$ -efficients, ce qui rend le problème NP-difficile à optimiser [51, 34].

Pour pallier cette intractabilité, plusieurs auteurs proposent des approximations convexes internes, comme l'approximation CVaR ou les coupes stochastiques de Benders, garantissant une faisabilité à haute probabilité mais souvent au prix d'une solution très conservatrice [10, 41].

Par ailleurs, un autre défi majeur réside dans la non-différentiabilité de la fonction de probabilité associée. En effet, la fonction

$$x \mapsto \mathbb{P}(G(x, \xi) \geq r(\xi))$$

est, en général, Une fonction non lisse (ou non différentiable)<sup>3</sup>, notamment lorsque l'incertitude est modélisée par des variables discrètes ou lorsque la contrainte aléatoire induit une discontinuité dans l'espace des décisions. Cela complique davantage l'utilisation de méthodes d'optimisation basées sur des gradients. Ce phénomène est particulièrement accentué dans les formulations avec variables binaires ou à seuils probabilistes stricts.

**Exemple 2.6.1** (Non-convexité induite par une contrainte de chance avec incertitude sur le premier membre (RHS)). Considérons un exemple élémentaire d'optimisation avec une unique contrainte de chance, où l'incertitude affecte uniquement le second membre de l'inégalité (*RHS uncertainty*). Soit une variable de décision scalaire  $x \in \mathbb{R}$  et une variable aléatoire  $\xi$  suivant une loi normale centrée réduite, c'est-à-dire  $\xi \sim \mathcal{N}(0, 1)$ . Supposons que la contrainte de chance soit formulée comme suit :

$$\mathbb{P}(x \geq \xi) \geq 1 - \alpha, \quad \text{avec } \alpha \in (0, 1). \quad (2.7)$$

Cette contrainte impose que la probabilité que la décision  $x$  dépasse la réalisation de la variable aléatoire  $\xi$  soit suffisamment grande (au moins  $1 - \alpha$ ). En d'autres termes,  $x$  doit se situer au-dessus d'un quantile donné de la distribution normale. On peut alors réécrire la contrainte (2.7) sous une forme déterministe équivalente en utilisant la fonction de répartition inverse de la loi normale  $\Phi^{-1}$  :

$$x \geq \Phi^{-1}(1 - \alpha), \quad (2.8)$$

ce qui définit une région faisable convexe dans ce cas très simple.

Cependant, lorsque l'on passe à des dimensions supérieures ou à des formulations avec plusieurs contraintes aléatoires, même en gardant une structure linéaire dans les coefficients déterministes et une incertitude seulement sur le second membre, la région faisable résultante peut devenir non convexe. Illustrons cela dans le cas de deux variables de décision  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  et une contrainte de chance conjointe :

$$\mathbb{P}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}\right) \geq 1 - \alpha, \quad (2.9)$$

où  $\xi = (\xi_1, \xi_2)$  suit une loi normale bidimensionnelle centrée avec matrice de covariance  $\Sigma$ .

Contrairement à l'exemple unidimensionnel, cette contrainte de chance conjointe ne peut pas être reformulée exactement en une contrainte convexe en  $x$ , sauf sous certaines hypothèses restrictives (e.g., indépendance des composantes et seuils égaux). La région faisable décrite par (2.9) peut présenter des formes complexes, non convexes, voire disjointes, en fonction de la distribution jointe de  $\xi$  et du niveau de tolérance  $\alpha$ .

**Exemple 2.6.2** (Non-convexité induite par une contrainte de chance avec incertitude sur le premier membre (LHS)). Considérons un problème d'optimisation avec une contrainte de chance où l'incertitude affecte les coefficients des variables de décision, c'est-à-dire le premier membre

3. Non différentiable : est une fonction qui n'admet pas de dérivée en au moins un point de son domaine, souvent en raison de discontinuités ou de points anguleux

de l'inégalité. Soit une variable de décision scalaire  $x \in \mathbb{R}$  et une variable aléatoire  $\xi$  suivant une loi normale centrée réduite, c'est-à-dire  $\xi \sim \mathcal{N}(0, 1)$ . Supposons que la contrainte de chance soit formulée comme suit :

$$\mathbb{P}(\xi x \geq 1) \geq 1 - \alpha, \quad \text{avec } \alpha \in (0, 1).$$

Cette contrainte impose que la probabilité que le produit  $\xi x$  dépasse 1 soit au moins égale à  $1 - \alpha$ . Pour analyser cette contrainte, examinons la distribution de  $\xi x$ . Étant donné que  $\xi \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , le produit  $\xi x$  suit une distribution normale  $\mathcal{N}(0, x^2)$  si  $x \neq 0$ .

La contrainte peut être réécrite en termes de la fonction de répartition  $\Phi$  de la loi normale standard :

$$\mathbb{P}(\xi x \geq 1) = 1 - \Phi\left(\frac{1}{|x|}\right) \geq 1 - \alpha.$$

Cela implique :

$$\Phi\left(\frac{1}{|x|}\right) \leq \alpha.$$

En inversant la fonction de répartition, on obtient :

$$\frac{1}{|x|} \leq \Phi^{-1}(\alpha) \quad \Rightarrow \quad |x| \geq \frac{1}{\Phi^{-1}(\alpha)}.$$

Cette inégalité définit deux intervalles disjoints pour  $x$  :

$$x \leq -\frac{1}{\Phi^{-1}(\alpha)} \quad \text{ou} \quad x \geq \frac{1}{\Phi^{-1}(\alpha)}.$$

La région faisable est donc l'union de deux intervalles disjoints, ce qui est une région non convexe.

Cette non-convexité complique la résolution du problème d'optimisation, car les méthodes classiques d'optimisation convexe ne sont pas directement applicables.

Cela met en évidence l'un des principaux défis posés par l'optimisation sous contraintes de chance : la perte de convexité dans l'espace des décisions, ce qui rend la résolution du problème plus difficile, en particulier dans les contextes de grande dimension ou lorsque les distributions ne possèdent pas de propriétés favorables telles que la log-concavité.

### 2.6.2 Difficulté d'évaluation de la probabilité de violation

L'évaluation de la probabilité de violation  $\mathbb{P}(G(x, \xi) \geq r(\xi))$  soulève plusieurs défis majeurs. En particulier, la loi de probabilité  $\mathbb{P}$  peut ne pas être connue explicitement et n'être accessible que par l'intermédiaire d'un simulateur considéré comme une *boîte noire* [13, 34]. Ce cadre complexifie considérablement l'estimation de la probabilité, car :

- Il interdit le recours à des méthodes analytiques directes
- Il nécessite des approches par échantillonnage souvent coûteuses
- Il introduit des incertitudes supplémentaires dans l'évaluation des risques que nous analysons systématiquement.

#### Calcul d'intégrales multidimensionnelles

Le calcul de la probabilité implique une intégrale sur le support de  $\xi$  :

$$\mathbb{P}(G(x, \xi) \geq r(\xi)) = \int_{\Xi} \mathbb{I}_{\{G(x, \xi) \geq r(\xi)\}} d\mathbb{P}(\xi) \quad (2.10)$$

Deux obstacles principaux apparaissent :

- *Malédiction de la dimension* : Pour  $d \gg 1$  (typiquement  $d \geq 5$ ), les méthodes d'intégration numériques deviennent impraticables. Le coût computationnel croît exponentiellement avec  $d$ .
- *Absence de forme analytique* : Même pour des distributions communes, cette intégrale n'admet généralement pas de solution fermée.
- *La complexité des contraintes de chance* dépend fortement de la distribution de la variable aléatoire  $\xi$ .
- *Distributions continues complexes* :
  - *Mélanges gaussiens* : flexibles, mais nécessitent des méthodes de Monte Carlo coûteuses.
  - *Copules* : modélisent des dépendances complexes, mais requièrent des simulations intensives.
- *Distributions discrètes à support fini* :
  - La probabilité peut être reformulée comme suit :

$$\mathbb{P}(G(x, \xi) \geq 0) = \sum_{i=1}^N p_i \cdot \mathbb{I}_{\{G(x, \xi^i) \geq 0\}}.$$

- Cette reformulation permet un traitement explicite des contraintes probabilistes.
- Toutefois, si  $N$  est très grand (ex.  $N \sim 10^6$ ), l'évaluation devient prohibitive en pratique.

Dans ce travail, nous considérons un problème d'optimisation sous contrainte de chance de type *jointes*, dans lequel l'incertitude affecte le premier membre (*Left-Hand Side, LHS*) de la contrainte. Le vecteur de décision est supposé continu, soit  $x \in \mathbb{R}^d$ , et le cadre d'analyse est statique, à une seule période. Une formalisation précise de ce modèle sera présentée dans la section suivante.

Nous nous intéressons plus particulièrement aux situations où l'information disponible sur la distribution des paramètres aléatoires est limitée. Ainsi, notre approche repose sur des hypothèses minimales, sans supposer l'indépendance identiquement distribuée (*i.i.d.*) des réalisations aléatoires, ce qui s'inscrit dans un contexte d'incertitude distributionnelle.

## 2.7 Reformulations classiques des contraintes de chance

Face à la complexité inhérente des problèmes d'optimisation sous contraintes de chance (CCP), diverses méthodes d'approximation ont été développées pour obtenir des solutions réalisables de manière plus efficiente. Ces approches incluent notamment les approximations convexes sûres, telles que l'optimisation robuste, la valeur conditionnelle à risque (CVaR) et l'approximation de Bernstein [26, 18, 17, 43], ainsi que les méthodes basées sur des scénarios [10, 13], où la contrainte probabiliste est remplacée par un ensemble fini d'échantillons.

Bien que ces méthodes garantissent souvent la faisabilité, elles n'offrent généralement pas de garanties sur l'optimalité. En particulier, les solutions obtenues peuvent être arbitrairement éloignées de l'optimum. Des recherches récentes se sont également penchées sur les cas combinatoires avec variables binaires, où certaines garanties théoriques peuvent être établies.

Dans ce mémoire, nous nous concentrons sur un cas particulier : l'optimisation de portefeuille sous contrainte de chance de type Value-at-Risk (VaR). Nous étudierons les formulations correspondantes, les techniques d'approximation utilisées dans la littérature, ainsi que les méthodes de résolution associées.

### 2.7.1 Approximation par la Conditional Value-at-Risk (CVaR)

L'approximation des contraintes de chance par la *Conditional Value-at-Risk* (CVaR) (1.2.2), introduite par Rockafellar et Uryasev [47], constitue une alternative efficace face à la non-convexité des contraintes probabilistes. Cette méthode a été utilisée avec succès en optimisation de portefeuille [33] et dans d'autres domaines comme la gestion des ressources [55].

Compte tenu de ses propriétés convexes et de sa formulation en programme d'optimisation, la CVaR permet une reformulation déterministe des contraintes probabilistes difficilement traitables. Dans notre étude, nous adopterons cette approche pour approximer les contraintes de chance du modèle présenté dans les chapitres suivants.

Dans cette section, nous nous intéressons à l'approximation des contraintes probabilistes individuelles, formulées comme des inégalités linéaires, à partir de la contrainte de chance générale donnée en (2.2).

On peut facilement constater que la  $\text{CVaR}_{1-\alpha}(\xi)$  (Conditional Value at Risk au niveau  $1-\alpha$ ), définie en (1.2.2), est une fonctionnelle convexe et monotone, définie sur l'ensemble des variables aléatoires ayant un moment d'ordre un fini. Par ailleurs, le quantile d'ordre  $1-\alpha$ , appelé également "Value at Risk" (VaR) (1.2.1), de la distribution de  $\xi$  est donné par :

$$\text{VaR}_\alpha(\xi) := \inf \{t \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(\xi \leq t) \geq 1 - \alpha\}.$$

Ce quantile admet un minimum dans le membre de droite de l'équation (1.3). Lorsque la distribution de  $\xi$  est continue, la fonction objectif de la définition de la CVaR est minimisée en  $t = \text{VaR}_\alpha(\xi)$ , ce qui donne :

$$\text{CVaR}_\alpha(\xi) = \text{VaR}_\alpha(\xi) + \frac{1}{\alpha} \mathbb{E}[(\xi - \text{VaR}_{1-\alpha}(\xi))^+],$$

d'où l'inégalité naturelle :

$$\text{CVaR}_\alpha(\xi) \geq \text{VaR}_{1-\alpha}(\xi).$$

Puisque la contrainte de chance donnée dans (2.2) n'est rien d'autre que :

$$\text{VaR}_\alpha[G(x, \xi)] \geq 0,$$

on remplace souvent cette contrainte par une contrainte plus conservatrice, basée sur la CVaR :

$$\text{CVaR}_\alpha[G(x, \xi)] \geq 0. \quad (2.11)$$

Puisque  $\text{CVaR}_\alpha(\xi) \geq \text{VaR}_\alpha(\xi)$ , il est facile de voir que pour une variable aléatoire continue  $\xi$  :

$$\mathbb{P}\{\xi \leq 0\} \geq 1 - \alpha \iff \begin{cases} \text{VaR}_\alpha(\xi) \geq 0 \\ \text{CVaR}_\alpha(\xi) \geq 0 \end{cases}$$

$$\exists t : t + \frac{1}{1-\alpha} \mathbb{E}[(\xi - t)_+] \geq 0.$$

Cette approximation est justifiée par le fait que si la CVaR est inférieure ou égale à zéro, alors la probabilité que  $g(x, \xi) > 0$  est au plus  $\alpha$ , assurant ainsi la satisfaction de la contrainte de chance initiale. De plus, la contrainte (3.12) est convexe en  $x$  lorsque  $g(x, \xi)$  est convexe en  $x$ , ce qui facilite son intégration dans des programmes d'optimisation convexes [47].

Dans le cas où la distribution de  $\xi$  est discrète avec un ensemble fini de scénarios  $\{\xi^i\}_{i=1}^N$  et des probabilités associées  $p_i = \frac{1}{N}$  (avec  $\sum_{i=1}^N p_i = 1$ ), tous les scénarios étant équiprobables, l'espérance peut être approximée par :

$$t + \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^N p_i \max\{g(x, \xi^i) - t, 0\} \geq 0. \quad (2.12)$$

Cette formulation est particulièrement adaptée aux méthodes d'approximation par échantillonnage, telles que la *Sample Average Approximation* (SAA) [49] qui sera présentée dans la section (2.7.4).

L'approximation par la *Conditional Value-at-Risk (CVaR)* présente plusieurs atouts pour l'optimisation sous incertitude. Elle est appréciée pour sa formulation convexe et sa facilité de résolution numérique à l'aide de solveurs standards, tout en assurant un certain conservatisme dans le respect des contraintes probabilistes [47].

Cette approche n'est toutefois pas exempte de limites. Elle peut se révéler trop conservatrice, excluant des solutions potentiellement acceptables [42], et sa performance dépend de la qualité de l'information sur la distribution des incertitudes.

La CVaR est appliquée dans des domaines variés, notamment la gestion des risques financiers [47], la planification énergétique [56], et l'optimisation logistique.

Par ailleurs, elle a connu des développements importants dans le cadre de la programmation stochastique multi-étapes [2] et de l'optimisation robuste distributionnelle [20], étendant ainsi son champ d'application au-delà des modèles classiques.

### 2.7.2 Reformulations en programmation en nombres entiers mixtes (MIP)

Lorsque l'ensemble  $P(\cdot)$  est polyédral, tel que défini dans l'équation (2.4), la formulation d'un problème d'optimisation sous contrainte de chance avec une distribution discrète peut être reformulée en un programme mixte en nombres entiers (MIP) équivalent, en introduisant des variables binaires.

Cette reformulation permet de représenter la région de faisabilité non convexe du problème initial dans l'espace des variables comme un MIP de taille polynomiale, grâce à l'ajout d'un nombre modéré de variables binaires. Bien que la région admissible résultante reste non convexe, cette reformulation MIP permet l'utilisation directe des solveurs de programmation mixte en nombres entiers disponibles sur le marché.

Considérons le problème (CCP) (2.2) avec des distributions discrètes finies du vecteur aléatoire  $\xi^i$ ,  $i \in [S]$ , c'est-à-dire que, pour chaque  $i$ , il existe des probabilités  $\pi^i > 0$ , tels que

$$\mathbb{P}(\xi = \xi^i) = \pi^i, \forall i \in [S] \quad \sum_{i=1}^S \pi^i = 1.$$

Dans ce cadre, une approche standard reformule les contraintes de chance individuelles via une programmation linéaire mixte en nombres entiers (MIP), comme établi par Luedtke et al. [37].

Nous introduisons des variables binaires  $z_i$  pour  $i \in [S]$ , où  $z_i = 1$  garantit que dans le scénario  $i$ , l'inégalité  $G(x, \xi^i) \geq r(\xi^i)$  est satisfaite. Alors, (CCP) peut être formulé sous la forme d'un programme linéaire en nombres entiers mixtes (MIP) comme suit :

$$\text{(CCP\_MIP)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \min c^\top x \\ \text{s.t. } G(x, \xi^i) \geq r(\xi^i)(1 - z^i), \quad \forall i \in [S] \quad (2a) \\ \sum_{i \in [S]} \pi^i z^i \geq 1 - \alpha \quad (2b) \\ x \in X \subseteq \mathbb{R}_+^n \quad (2c) \\ z^i \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in [S] \quad (2d) \end{array} \right. \quad (2.13)$$

Lorsque  $z_i = 0$ , la contrainte (2a) impose  $G(x, \xi_i) \geq r(\xi_i)$ ; sinon, elle se réduit à l'inégalité triviale  $G(x, \xi^i) \geq 0$ . Les contraintes (2a) sont appelées contraintes de type big-M, avec un coefficient big-M égal à 1; voir [34]. On remarque que les contraintes (2a), (2b) et (2d) garantissent que la probabilité  $\mathbb{P}(G(x, \xi) \geq r(\xi))$  est au moins égale à  $1 - \alpha$ .

Le problème (2.13) se réécrit sous forme matricielle compacte :

$$\min\{f(x) : G(x) \geq Hz, z \in Z, x \in X\} \quad (2.14)$$

avec :

- $G(x) = [G(x, \xi^1), \dots, G(x, \xi^S)]^\top \in \mathbb{R}^S$
- $H = (r(\xi^1), \dots, r(\xi^S)) \in \mathbb{R}^{S \times S}$
- $Z = \{z \in \{0, 1\}^S \mid \sum_{i=1}^S \pi_i z_i \leq \alpha\}$
- $X \subseteq \mathbb{R}_+^n$  compact convexe

*Interprétation* : La contrainte  $G(x) \geq Hz$  encapsule les  $S$  contraintes conjointes originales via un produit matriciel.

Dans ce qui suit, nous présentons la formulations MIP dans le cadre de l'incertitude affectant le membre de droite (RHS) et le membre de gauche (LHS) des contraintes.

### Incertitude sur le second membre (Right-Hand Side, RHS)

Commençons par examiner le problème avec incertitude sur le second membre(RHS). Dans ce contexte, le programme linéaire conjoint sous contrainte de chance (2.5) est reformulé en un programme linéaire mixte en nombres entiers.

En introduisant une variable binaire  $z_i \in \{0, 1\}$  pour chaque scénario  $i \in [S]$  qui indique si la contrainte est respectée ( $z_i = 1$ ) ou relâchée ( $z_i = 0$ ), on obtient la reformulation MIP suivante :

$$\min_{x,z} f(x) \quad (1a)$$

$$\text{s.t. } x \in X, \quad (1b)$$

$$Tx \geq r_i(1 - z_i), \quad \forall i \in [S], \quad (1c)$$

$$\sum_{i=1}^N \pi_i z_i \leq \alpha, \quad (1d)$$

$$z_i \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in [S]. \quad (1e)$$

où :

- $r_i \in \mathbb{R}^m$  : réalisation de  $r(\xi)$  pour le scénario  $i \in [S]$ .
- Si  $z_i = 1$ , la contrainte  $Tx \geq r_i$  est imposée.
- Si  $z_i = 0$ , la contrainte est relâchée via le terme  $(1 - z_i)$ .
- La contrainte (1d) garantit que les contraintes aléatoires sont satisfaites dans au moins une proportion  $1 - \alpha$  des scénarios, pondérée par les probabilités associées  $\pi_i$ . En d'autres termes, la probabilité totale des scénarios violant la contrainte ne dépasse pas le niveau de risque acceptable  $\alpha$ .

### Incertitude sur le membre de gauche (Left-Hand Side, LHS)

On considère maintenant le problème avec incertitude sur le membre de gauche (LHS). Dans ce contexte, le programme linéaire conjoint sous contrainte de chance (2.6) est reformulé en un programme linéaire mixte en nombres entiers :

$$\min_{x,z} f(x) \quad (2a)$$

$$\text{s.t. } x \in X, \quad (2b)$$

$$T(\xi)x \geq r(1 - z_i), \quad \forall i \in [S], \quad (2c)$$

$$\sum_{i=1}^S \pi_i z_i \leq \alpha, \quad (2d)$$

$$z_i \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in [S]. \quad (2e)$$

ou :

- $T(\xi) \in \mathbb{R}^{m \times n}$  est une matrice aléatoire (contrairement au cas RHS où c'était le vecteur  $r(\xi)$  qui était aléatoire),
- $r$  est déterministe.

Cas particulier : probabilités uniformes

Si  $\pi_i = \frac{1}{S}$  (c'est-à-dire que tous les scénarios sont équiprobables), alors la contrainte (1d) et (2d) deviennent :

$$\sum_{i=1}^S z_i \leq \alpha \cdot S$$

Cette contrainte impose que le nombre de scénarios violant la contrainte soit inférieur ou égal à  $\alpha \cdot S$ , ce qui revient à satisfaire la contrainte dans au moins  $(1 - \alpha) \cdot S$  scénarios.

### Propriétés de la reformulation MIP

Lorsque l'incertitude affecte la matrice  $T(\xi)$ , le produit  $T(\xi)x$  introduit une *structure bilinéaire*<sup>4</sup>, dans laquelle la variable aléatoire  $\xi$  interagit avec la variable de décision  $x$ . Cette

4. Une structure bilinéaire désigne une expression mathématique où une variable de décision  $x$  et aléatoire  $\xi$  interagissent de manière multiplicative, typiquement sous la forme d'un produit  $T(\xi)x$ , ce qui génère des termes

bilinéarité engendre des non-linéarités complexes qui compliquent à la fois l'analyse théorique et la résolution numérique du problème.

Par comparaison avec l'incertitude sur le membre droit (Right-Hand Side), *le traitement d'une incertitude sur le membre gauche (Left-Hand Side, LHS)* est plus exigeant. Il requiert des techniques de linéarisation avancées, souvent difficiles à mettre en œuvre ou peu efficaces selon le contexte.

De plus, *l'introduction d'incertitude dans une matrice*, notamment de grande dimension, implique la gestion simultanée des lignes et des colonnes, ce qui peut entraîner une *explosion combinatoire* du nombre de variables et de contraintes, surtout en présence d'un grand nombre de scénarios.

Face à ces difficultés, l'approche de *reformulation en programme mixte entier (MIP)* présente les propriétés suivantes :

- *Exactitude* : En présence d'une distribution discrète, la reformulation MIP est rigoureusement équivalente au problème initial sous contrainte de chance. Toute solution réalisable du modèle MIP satisfait les exigences probabilistes du modèle d'origine.
- *Complexité algorithmique* : Le problème MIP reste de nature NP-difficile. Toutefois, les solveurs modernes comme Gurobi ou CPLEX permettent d'obtenir des solutions performantes tant que la taille du modèle reste maîtrisée.
- *Scalabilité* : Le nombre de variables binaires croît proportionnellement avec le nombre de scénarios  $S$ . Au-delà d'un certain seuil, il devient nécessaire d'appliquer des *méthodes de décomposition*, comme l'algorithme de Benders, pour conserver une résolution efficace.

*Remarque* : Bien que supposer une distribution discrète puisse sembler limitatif, cette hypothèse est largement adoptée dans la pratique. En effet, des techniques comme l'échantillonnage de Monte Carlo permettent d'approximer une distribution continue par un ensemble fini de scénarios, rendant le problème plus accessible sans sacrifier la fidélité du modèle. Cette approche sera illustrée dans la section suivante.

### 2.7.3 Approximation par scénarios

L'approche d'approximation par scénarios (Scenario Approximation, SA) [10, 11, 12, 48] consiste à approximer la distribution de probabilité initiale  $\mathbb{P}$  par une distribution discrète  $\mathbb{P}_N$ , définie sur un ensemble fini de scénarios  $\Xi = \{\xi_1, \dots, \xi_N\}$ . Contrairement à l'approche SAA (Sample Average Approximation), qui consiste à approximer directement les probabilités dans la contrainte de chance, l'approche SA résout un programme stochastique classique dans lequel la contrainte aléatoire est remplacée par un ensemble déterministe de contraintes, appliquées à chaque scénario individuellement.

---

non linéaires par rapport aux deux variables.

Le problème SA prend donc la forme suivante :

$$\min_x f(x) \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} \text{s.c. } & x \in \mathcal{P}(\xi), \quad \forall \xi \in \Xi, \\ & x \in X, \end{aligned} \quad (2.16)$$

où  $\mathcal{P}(\xi) = \{x \in X : G(x, \xi) \geq r(\xi)\}$  représente les contraintes aléatoires devenues déterministes pour chaque scénario  $\xi$ , et  $X$  désigne l'ensemble des contraintes structurelles (par exemple : budget, bornes, convexité).

Lorsque  $\mathcal{P}(\xi)$  est un ensemble polyédrique et que la variable de décision  $x$  est continue, le programme SA résultant est un programme linéaire de grande dimension. Les auteurs ayant étudié cette approche ont pu démontrer qu'il existe une garantie probabiliste finie : avec un nombre suffisamment grand de scénarios, la solution obtenue sera réalisable pour le problème d'origine sous contrainte de chance avec une forte probabilité.

Un résultat intéressant est que, sous certaines hypothèses, la taille minimale de l'échantillon  $N$  ne dépend pas de la dimension  $m$  de l'espace de décision, mais uniquement du niveau de risque et de la confiance souhaitée [11]. Cependant, cette taille est souvent très grande dans la pratique, ce qui rend la solution très conservatrice (i.e. trop prudente).

Pour pallier cet excès de conservatisme, l'approche SAA [37, 36] propose une alternative plus souple. Au lieu d'imposer les contraintes pour chaque scénario comme dans SA, la SAA applique directement la contrainte de chance sur la distribution  $\mathbb{P}_N$  approchée, mais avec un niveau de risque légèrement plus faible (afin de conserver la faisabilité pour  $\mathbb{P}$ ). Cette formulation devient alors un programme mixte-entier (MIP), plus complexe à résoudre qu'un programme linéaire, mais souvent moins conservateur.

#### 2.7.4 Méthode SAA (Sample Average Approximation)

En complément des approches précédentes, la méthode d'approximation par moyenne d'échantillons (SAA, Sample Average Approximation) offre une alternative numériquement viable pour les problèmes à contraintes de chance. Contrairement à la relaxation MIP, la SAA repose sur une discrétisation de l'espace aléatoire via des scénarios, ce qui permet une résolution efficace pour des distributions complexes ou lorsque les fonctions génératrices des moments sont difficiles à calculer.

L'étude présentée dans [48] porte sur un problème d'optimisation avec contrainte de chance, formulé comme suit :

$$\begin{aligned} \min_{x \in X} & f(x) \\ \text{s.t. } & \mathbb{P}(G(x, \xi) \geq 0) \geq 1 - \alpha. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Nous supposons que  $\xi$  est un vecteur aléatoire dont la distribution de probabilité  $\mathbb{P}$  est supportée sur un ensemble  $\mathbb{R}^d$ , et que la fonction  $G: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction de Carathéodory<sup>5</sup>. Pour

5. Une fonction de Carathéodory est une fonction  $G(x, \xi)$  définie sur  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d$  qui est mesurable par rapport à la variable aléatoire  $\xi$ , et continue par rapport à la variable de décision  $x$ , pour presque tout  $\xi$ .

simplifier, nous considérons que la fonction objectif  $f(x)$  est explicite, et seules les contraintes probabilistes nécessitent une approximation. La probabilité  $p(x) = \mathbb{P}(G(x, \xi) \geq 0)$  peut s'exprimer comme une espérance mathématique :

$$p(x) = \mathbb{E} [\mathbb{I}_{(0, \infty)}(G(x, \xi))]$$

et estimer cette probabilité à l'aide de la fonction SAA correspondante.

$$\hat{p}(x) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbb{I}_{(0, \infty)}(G(x, \xi^j))$$

Par conséquent, nous pouvons formuler le problème d'approximation stochastique (SAA) correspondant comme :

$$\begin{aligned} \min_{x \in X} \quad & f(x) \\ \text{s.c.} \quad & \hat{p}_N(x) \geq 1 - \alpha \end{aligned} \tag{2.18}$$

Soient  $v^*$  et  $S^*$  respectivement la valeur optimale et l'ensemble des solutions optimales du problème (2.17), et  $\hat{v}_N$  et  $\hat{S}_N$  respectivement la valeur optimale et l'ensemble des solutions optimales du problème (2.18). Nous avons alors les propriétés de consistance suivantes pour la valeur optimale  $\hat{v}_N$  et l'ensemble  $\hat{S}_N$  des solutions optimales du problème d'approximation stochastique (SAA) (2.18).

## 2.8 Résolution par la programmation en nombres entiers

Après avoir étudié les différentes formes de contraintes de chance ainsi que leurs reformulations possibles, cette section s'intéresse à la résolution des modèles ainsi obtenus par le biais de la programmation en nombres entiers. L'objectif est de présenter les méthodes exactes permettant de traiter efficacement les formulations issues de la modélisation des contraintes probabilistes sous forme de programmes en nombres entiers mixtes (MIP).

La reformulation MIP, détaillée dans la section précédente, constitue la base de notre stratégie de résolution. Celle-ci repose sur une approche de décomposition permettant de faire face à la complexité combinatoire induite par la présence de variables binaires associées aux scénarios ( $z_i$ ). Plus précisément, nous faisons appel à la décomposition généralisée de Benders (Generalized Benders Decomposition, GBD), une méthode particulièrement adaptée aux problèmes d'optimisation sous incertitude discrète avec contraintes probabilistes. Cette approche permet de séparer la résolution du problème maître (portant sur les variables entières) de celle des sous-problèmes (portant sur les variables continues), facilitant ainsi l'obtention d'une solution optimale tout en réduisant considérablement le temps de calcul.

### 2.8.1 Méthodes exactes classiques de résolution des MIP

Les problèmes MIP sont NP-difficiles et ne peuvent être résolus efficacement que pour des instances de taille raisonnable [2].

Un grand nombre de méthodes de résolution existe en recherche opérationnelle pour l'optimisation combinatoire. Nous distinguons deux grandes familles : les *méthodes exactes* qui garantissent la complétude de la résolution (optimalité) à des temps de calcul parfois prohibitifs; et les *méthodes approchées* qui peuvent perdre la complétude de résolution mais qui fournissent souvent des solutions approchées de bonne qualité en temps raisonnable.

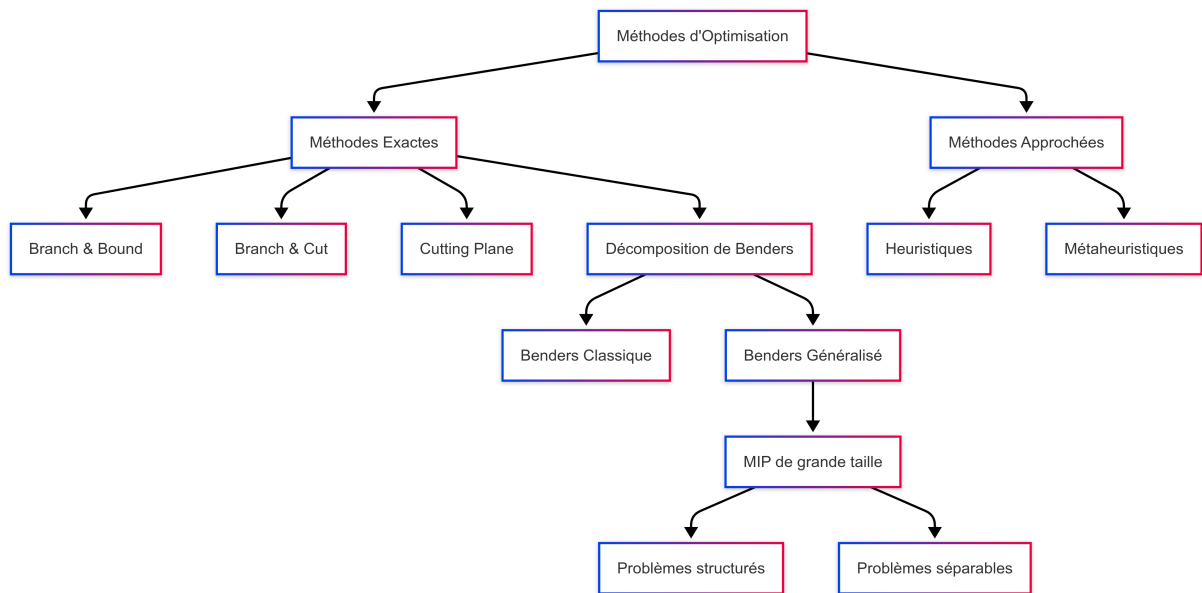


FIGURE 2.1 – Classification des méthodes de résolution pour les MIP issus de contraintes de chance.

Les méthodes exactes sont des méthodes de résolution qui permettent d'obtenir la solution optimale à un problème d'optimisation en parcourant, de manière implicite, toutes les combinaisons possibles. Dans cette famille, nous citons les méthodes de *séparation et évaluation* (*Branch and Bound*) [35]. Leur principe de base consiste à diviser le problème initial en un certain nombre de sous-problèmes pour constituer l'arbre de recherche. À chaque itération, un sous-problème est sélectionné :

1. pour déterminer l'optimum de l'ensemble des solutions réalisables associées au sous-problème en question, ou
2. pour prouver que cet ensemble ne contient pas de solution optimale.

La méthode la plus générale pour prouver l'optimum consiste à déterminer un minorant (majorant pour une maximisation) des solutions contenues dans l'ensemble, en résolvant une relaxation du sous-problème courant. Si le minorant est supérieur à la valeur de la meilleure solution trouvée, cela affirme que le sous-ensemble ne contient pas l'optimum. Par contre, si les deux bornes supérieure et inférieure sont égales, alors une solution optimale est trouvée.

Plusieurs améliorations de l'algorithme de *Branch and Bound* ont été proposées. Nous citons la méthode de *Branch and Cut* [40] qui utilise, en plus de la méthode de séparation et

d'évaluation, la méthode des plans sécants. L'objectif de cette dernière consiste à ajouter des contraintes au programme linéaire pour le raffiner et le rapprocher des solutions intégrales. Elle est appliquée au niveau de chaque nœud de l'arbre de recherche lorsque la résolution du problème relaxé donne une solution fractionnaire.

Comme inconvénient majeur, ces méthodes exactes d'énumération sont parfois caractérisées par un temps de calcul prohibitif. Pour réduire le temps d'évaluation d'un nœud et améliorer son efficacité, des méthodes de décomposition sont utilisées, comme :

- La décomposition de Benders [6] et,
- La décomposition de Dantzig-Wolfe [19].

Les problèmes décomposés avec ce dernier type utilisent dans leurs résolutions la méthode de génération de colonnes, appelée *Branch and Price* [3] lorsqu'elle est combinée avec la méthode de *Branch and Bound*.

L'idée centrale de la méthode de génération de colonnes est de commencer la résolution d'un problème linéaire de grande taille avec un sous-ensemble de colonnes de petite taille. Puis de générer, au sein d'un algorithme à plusieurs étapes, les variables (colonnes) qui sont susceptibles d'améliorer la solution courante. En général, le principe de décomposition est le même pour toutes les méthodes de décomposition : le problème initial est décomposé en un ou plusieurs sous-problèmes faciles, généralement coordonnés par un problème maître.

## 2.8.2 Méthode de Décomposition de Benders Généralisée

Dans cette section, nous présentons la *décomposition de Benders généralisée (GBD)* [6], une méthode exacte particulièrement efficace pour la résolution des problèmes d'optimisation sous contraintes de chance reformulés en programmation en nombres entiers mixtes (MIP).

La GBD repose sur une stratégie itérative alternant entre un problème maître (entier) et un ou plusieurs sous-problèmes (continus). Le problème maître constitue une relaxation du problème initial, tandis que les sous-problèmes servent à générer des coupes valides permettant de raffiner progressivement cette relaxation. Cette approche améliore la méthode des plans sécants en l'adaptant à des fonctions convexes non différentiables sur des ensembles combinatoires.

Grâce à la séparation entre variables discrètes et continues, ainsi qu'à l'exploitation de la dualité et de techniques combinatoires, la méthode permet de surmonter la complexité du problème et d'accélérer la convergence vers une solution optimale [53].

### Sous-Problème (SP)

Résolution du problème en  $x$  pour un  $z$  fixé

Considérons le problème MIP (2.14) :

$$\min\{f(x) : G(x) \leq Hz, z \in Z, x \in X\}$$

Les variables binaires  $z$  sont appelées variables compliquantes, car si on fixe  $z$ , le problème se réduit à un problème d'optimisation quadratique convexe (QCP) uniquement en  $x$ , qui est plus facile à résoudre.

$$v(z) := \min_x \{f(x) \mid G(x) \leq Hz, x \in X\} \quad (2.19)$$

C'est l'idée centrale derrière la *décomposition de Benders généralisée* (GBD) : une fois que la fonction valeur  $v(z)$  est obtenue pour un  $z$  donné, elle est utilisée dans le problème maître.

### Problème Maître (PM)

Une fois la fonction valeur  $v(z)$  définie à partir du sous-problème pour un  $z$  donné, le problème maître cherche à minimiser cette fonction valeur  $v(z)$  sur l'ensemble des  $z$  possibles. Le problème maître est formulé comme suit :

$$v^* := \min_{z \in Z} v(z) \quad (2.20)$$

Ainsi, le problème maître consiste à choisir la meilleure valeur de  $z$  qui minimise  $v(z)$ , tout en respectant les contraintes imposées sur  $z$ . Ce problème est une optimisation discrète, où l'on cherche la combinaison optimale des variables binaires  $z$  tout en prenant en compte les informations de  $v(z)$  obtenues à partir du sous-problème.

Le lien entre le sous-problème et le problème maître est donc crucial : le sous-problème fournit les valeurs de  $v(z)$  nécessaires à l'optimisation du problème maître, et le problème maître permet de trouver la solution optimale globale.

Dans cette approche, le problème est résolu de manière itérative : pour chaque  $z$ , nous résolvons le sous-problème afin de déterminer  $v(z)$ , puis nous utilisons ces valeurs pour mettre à jour et optimiser  $z$  dans le problème maître. Ce processus est répété jusqu'à ce que la solution optimale soit atteinte.

En utilisant la fonction valeur  $v: \{0, 1\}^m \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  du problème non linéaire (2.19), les valeurs optimales de (2.14) et (2.20) coïncident : si  $z^*$  résout (2.20) et  $x^*$  résout (2.19) avec  $z = z^*$ , alors  $(x^*, z^*)$  résout (2.14). Nous rappelons dans le lemme suivant quelques propriétés connues de  $v$ .

Dans cette formulation,  $v(z)$  est la fonction valeur obtenue à partir du sous-problème pour un  $z$  donné. L'objectif est de trouver la meilleure combinaison de  $z$  qui minimise  $v(z)$ , tout en respectant les contraintes liées à  $z$ .

**Lemme 2.8.1** (Propriétés de la fonction valeur). Soit  $z \in \text{dom}(v)$ , défini comme l'ensemble des points où la fonction valeur est finie :

$$\text{dom}(v) := \{z \in Z \mid v(z) < +\infty\}.$$

La fonction valeur  $v$  associée au problème (2.19) satisfait les propriétés suivantes :

1. **Propreté** : La fonction  $v$  est dite propre, c'est-à-dire qu'elle ne prend pas uniquement les valeurs  $\pm\infty$  et qu'il existe au moins un  $z \in Z$  tel que  $v(z) < +\infty$ .
2. **Convexité et caractérisation de la sous-différentielle** : La fonction  $v$  est convexe, ce qui implique que sa sous-différentielle  $\partial v(z)$  est non vide en tout point où  $v$  est sous-différentiable. Plus précisément, si l'ensemble des multiplicateurs de Lagrange optimaux associés aux contraintes  $G(x) \leq Hz$  dans le problème (4), noté  $\Lambda(z) \subset \mathbb{R}_+^p$ , est non vide, alors la sous-différentielle de  $v$  est donnée par :

$$\partial v(z) = -H^\top \Lambda(z).$$

Ainsi, pour tout  $z \in \text{dom}(v)$ , la sous-différentielle est bien définie :

$$\forall z \in \text{dom}(v), \quad \partial v(z) \neq \emptyset.$$

De plus, la convexité de  $v$  implique que, pour tout  $z_1, z_2 \in \text{dom}(v)$  et tout  $\lambda \in [0, 1]$ , on a :

$$v(\lambda z_1 + (1 - \lambda)z_2) \leq \lambda v(z_1) + (1 - \lambda)v(z_2).$$

Cette propriété fondamentale garantit que  $v$  peut être approximée par des coupes linéaires, un aspect clé des méthodes de décomposition comme celle de Benders.

3. **Borne inférieure** : La fonction  $v$  est bornée inférieurement, c'est-à-dire qu'il existe une constante  $v_{\min} > -\infty$  telle que :

$$\forall z \in Z, \quad v(z) \geq v_{\min}.$$

## Conditions de qualification des contraintes et multiplicateurs de Lagrange

Afin de garantir l'existence de multiplicateurs de Lagrange optimaux, le problème d'optimisation sous-jacent doit satisfaire une condition de qualification des contraintes. Une condition classique utilisée dans ce cadre est la *condition de Slater*, qui est formalisée ci-dessous.

**Définition 2.8.1** (Condition de Slater). Une *condition de Slater* est un critère standard en optimisation convexe qui assure l'existence de multiplicateurs de Lagrange optimaux. Elle stipule qu'il existe un point  $\hat{x}$  strictement admissible pour les contraintes inégalitaires, c'est-à-dire :

$$G(\hat{x}) < Hz, \quad \hat{x} \in X. \quad (2.21)$$

**Note** : Ici, on utilise généralement une inégalité stricte pour les contraintes inégalitaires actives. Cependant, dans le texte original, il y avait une inégalité large. Nous corrigeons en inégalité stricte pour respecter la condition de Slater standard.

Lorsque cette condition est satisfaite, l'ensemble des multiplicateurs de Lagrange optimaux, noté  $\Lambda^*(z)$ , est non vide, et est donné par :

$$\Lambda^*(z) := \{\lambda \geq 0 \mid \lambda \text{ est un multiplicateur optimal pour } G(x) \leq Hz\}.$$

Lorsque la condition de Slater est vérifiée, cet ensemble possède des propriétés fondamentales que nous résumons dans le théorème suivant.

**Théorème 2.8.2** (Propriétés des multiplicateurs de Lagrange). *Si la condition de Slater est satisfaite pour un paramètre  $z \in \text{dom}(v)$ , alors :*

1. *Dualité forte : La valeur optimale du problème primal coïncide avec celle du problème dual.*
2. *Expression du problème primal via le dual : La valeur optimale  $v(z)$  peut être obtenue en résolvant le problème dual lagrangien.*

L'approche la plus élémentaire pour résoudre les problèmes d'optimisation non lisse (NSO, caractérisés par la non-différentiabilité de la fonction objectif), indépendamment de la nature continue ou discrète de  $z$ , est probablement la *Méthode des Plans Sécants* (MPS) [32]. Cette technique exploite l'information du premier ordre fournie par la résolution du sous-problème (2.19) pour construire un modèle de  $v$ . À l'itération  $k$ , un ensemble de points  $\{z_1, \dots, z_{k-1}\}$  est généré, et un sous-ensemble d'indices  $O_k \subseteq \{1, \dots, k-1\}$  regroupe les points  $z_j$  pour lesquels l'information du sous-problème ( $v_j = v(z_j)$ ,  $w_j \in \partial v(z_j)$ ) reste disponible. Le modèle standard s'écrit :

$$\check{v}_k(z) := \max_{j \in O_k} \{v_j + \langle w_j, z - z_j \rangle\} \leq v(z) \quad (2.22)$$

où l'inégalité découle de la convexité de  $v$ . Chaque contrainte dans (2.22) constitue une *coupe d'optimalité*. La minimisation de  $\check{v}_k$  sur  $Z$  fournit une borne inférieure  $v_k^{\text{low}}$  pour  $v^*$  et une solution candidate  $z_k$  pour (2.20), évaluée via le sous-problème. Si  $\check{v}_k(z_k) = v(z_k)$ , alors  $z_k$  est optimal pour (2.20) puisque  $v_k^{\text{low}} = \check{v}_k(z_k) \leq v^* \leq v(z_k)$ . Sinon, les nouvelles informations mettent à jour le modèle, et le processus itère. Ce schéma correspond à l'application de la MPS à (2.20), soit la méthode de Benders appliquée à (2.14).

Notons que ce processus est indépendant de la nature discrète ou continue de  $Z$ , sous réserve de pouvoir minimiser efficacement  $\check{v}_k$  sur  $Z$ . Des différences opérationnelles subsistent néanmoins. Par exemple, si  $z_{k+1} \notin \text{Dom}(v)$  (i.e., si le sous-problème (2.19) est irréalisable),  $z_{k+1}$  doit être éliminé via une *coupe de faisabilité*. Dans le cas binaire, on peut utiliser une coupe de type *no-good*. Soient  $S(z) = \{s : z_s = 0\}$  et  $S_k = S(z_k)$ , la coupe :

$$\sum_{s \in S_k} z_s \geq 1 \quad (2.23)$$

exclut  $z_k$  de l'ensemble admissible de (2.20). Ceci définit  $Z_{k+1} \supseteq \text{Dom}(v)$ , forçant  $\check{v}_{k+1}$  à coïncider avec  $v$  en  $z_k$ . Ainsi, avec  $O_k$  pour les coupes d'optimalité, on maintient  $\mathcal{F}_k \subseteq \{1, \dots, k-1\}$  pour les coupes de faisabilité, définissant le problème maître :

$$\begin{aligned}
 z_{k+1} \in \arg \min_{z \in Z_k} \check{v}_k(z) \equiv \min_{z,r} \quad & r \\
 \text{s.c.} \quad & r \geq v_j + \langle w_j, z - z_j \rangle, \quad j \in O_k \\
 & \sum_{s \in S_j} z_s \geq 1, \quad j \in \mathcal{F}_k \\
 & z \in Z, \quad r \in \mathbb{R}
 \end{aligned}
 \tag{2.24}$$

On vérifie qu'aucune solution optimale n'est éliminée par les coupes de faisabilité, et que la MPS résout (2.20) [donc (2.14)]. Notons que (2.20) est non borné inférieurement si  $O_k = \emptyset$ , situation certaine à  $k = 0$ . Pour y remédier, on ajoute temporairement  $r \geq 0$  lorsque  $O_k = \emptyset$ , contrainte retirée dès qu'une coupe d'optimalité est générée.

Cette méthode s'articule autour d'un processus itératif illustré dans la figure 2.2 ci-dessous, mettant en lumière l'interaction entre les composants maître/sous-problème et le rôle clé des coupes :

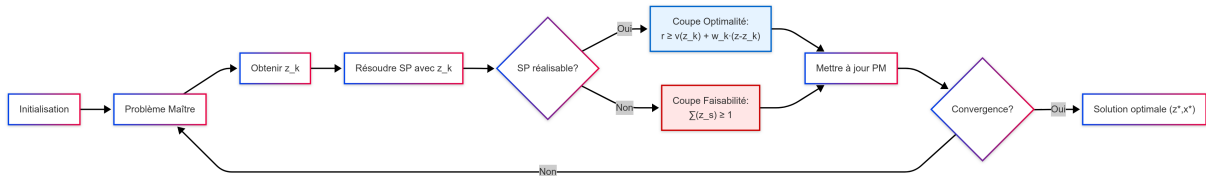


FIGURE 2.2 – Schéma itératif de la décomposition de Benders

### 2.8.3 Algorithme de Décomposition de Benders Généralisé

L'algorithme suivant résume le fonctionnement de la méthode de décomposition de Benders dans sa version combinatoire, telle qu'elle est appliquée dans le cadre de notre problème. Il présente les différentes étapes itératives permettant de construire progressivement une solution optimale en exploitant la structure du problème.

---

#### Algorithme 1 : Décomposition de Benders Généralisé

---

- 1 **Étape 0 (Initialisation)** : Soit  $\delta_{\text{Tol}} \geq 0$  la tolérance d'arrêt.
  - 2  $v_0^{\text{up}} \leftarrow \infty$ ,  $\mathcal{O}_1 = \mathcal{F}_1 \leftarrow \emptyset$ , et  $k \leftarrow 1$ .
  - 3 **Étape 1 (Problème maître)** : Trouver  $z_k$  en résolvant le problème (2.24), et soit  $v_k^{\text{low}}$  sa valeur optimale.
  - 4 **Étape 2 (Test d'arrêt)** :  $\Delta_k \leftarrow v_{k-1}^{\text{up}} - v_k^{\text{low}}$ .
  - 5 Si  $\Delta_k \leq \delta_{\text{Tol}}$ , arrêter :  $z^{\text{up}}$  est une solution  $\delta_{\text{Tol}}$ -optimale.
  - 6 **Étape 3 (Appel à l'oracle)** : Résoudre (2.19) avec  $z$  remplacé par  $z_k$ .
  - 7 Si (2.19) est infaisable alors  $\mathcal{F}_{k+1} \leftarrow \mathcal{F}_k \cup \{k\}$ ,  $\mathcal{O}_{k+1} \leftarrow \mathcal{O}_k$ ,  $v_k^{\text{up}} \leftarrow v_{k-1}^{\text{up}}$ , et aller à l'étape 4.
  - 8 Sinon, obtenir  $v_k = v(z_k)$  et un sous-gradient  $w_k$  comme dans le Lemme 1,
  - 9  $\mathcal{F}_{k+1} \leftarrow \mathcal{F}_k$ ,  $\mathcal{O}_{k+1} \leftarrow \mathcal{O}_k \cup \{k\}$ .
  - 10  $v_k^{\text{up}} \leftarrow \min\{v_k, v_{k-1}^{\text{up}}\}$ .
  - 11 Si  $v_k = v_k^{\text{up}}$  alors  $z^{\text{up}} \leftarrow z_k$ .
  - 12 **Étape 4 (Boucle)** :  $k \leftarrow k + 1$  et aller à l'étape 1.
- 

La Figure 2.3 présente l'algorithme de décomposition de Benders généralisé sous forme de diagramme. Cette représentation visuelle permet de mieux appréhender le flux des opérations, mettant en évidence les quatre étapes clés (initialisation, problème maître, appel à l'oracle et boucle) ainsi que les conditions de convergence.

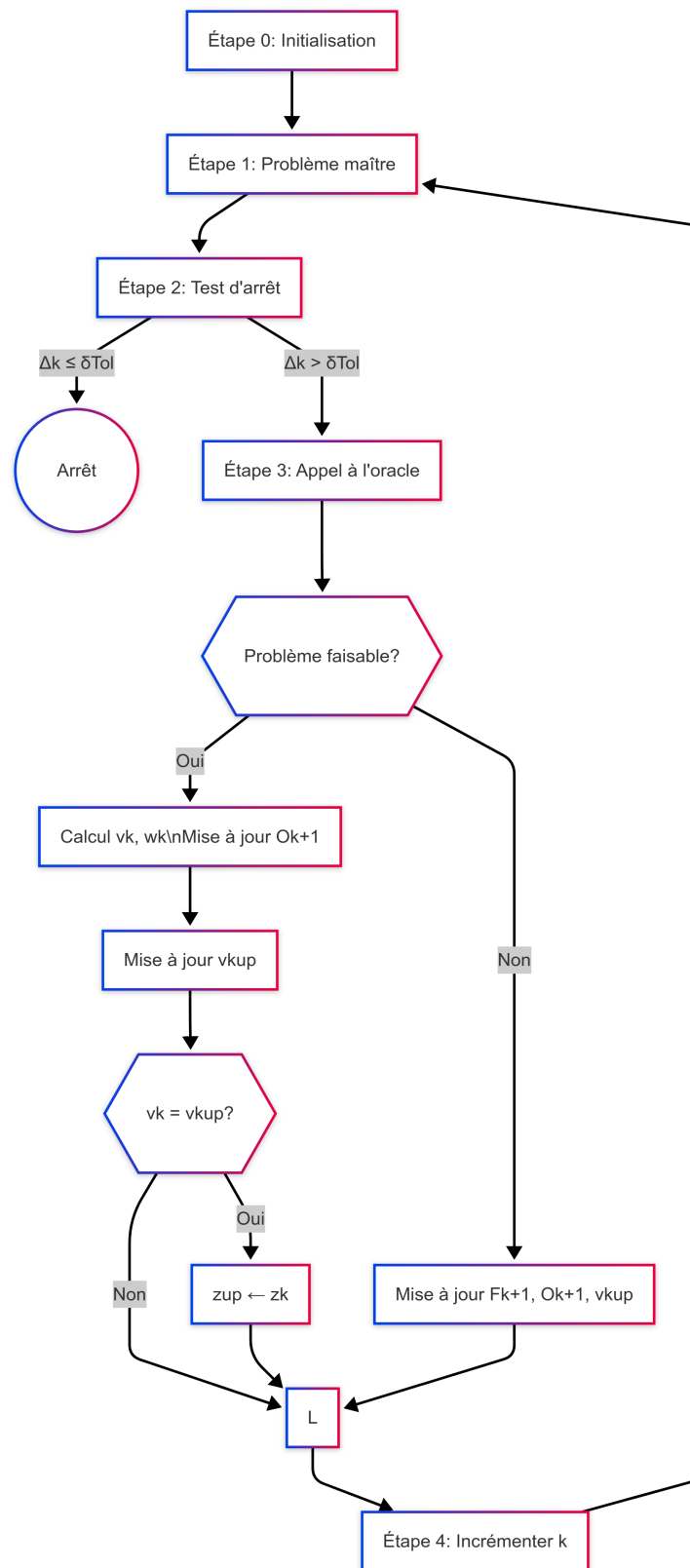


FIGURE 2.3 – Diagramme Algorithme de décomposition de Benders généralisé.

## Conclusion

Ce deuxième chapitre a permis d'approfondir les fondements de l'optimisation stochastique, en mettant en lumière la manière dont l'incertitude peut être intégrée dans les modèles de programmation mathématique. À travers la formalisation des problèmes stochastiques et l'introduction des contraintes de chance (chance constraints), nous avons vu comment il est possible de modéliser le risque sous forme probabiliste, en tenant compte explicitement des dépassements de seuils critiques. Les différentes typologies de contraintes (individuelles ou jointes, avec incertitudes côté gauche ou droit), ainsi que les difficultés théoriques et numériques qu'elles soulèvent (non-convexité, évaluation de probabilités, complexité computationnelle), ont été détaillées. Ce chapitre a également présenté plusieurs reformulations classiques, notamment via la Conditional Value-at-Risk (CVaR), les approches MIP (Mixed-Integer Programming), et les méthodes d'approximation comme la SAA (Sample Average Approximation), avant d'introduire la méthode de décomposition de Benders, outil puissant pour résoudre des problèmes complexes à grande échelle.

Fort de ces bases théoriques et méthodologiques, le chapitre suivant se concentrera spécifiquement sur l'application de ces concepts au problème de gestion de portefeuille sous contrainte de chance. L'objectif sera de modéliser un portefeuille d'actifs financiers en intégrant les incertitudes sur les rendements à travers des contraintes probabilistes rigoureuses, et d'explorer des formulations avancées telles que la programmation quadratique mixte (MIQP). En mobilisant des techniques comme la décomposition de Benders, nous chercherons à construire des portefeuilles robustes et optimaux, capables de répondre aux exigences de rendement tout en respectant un niveau de risque défini avec précision. Ce cadre constituera une passerelle entre la théorie de l'optimisation stochastique et sa mise en œuvre concrète dans un contexte financier réel.

# 3

## Problème de gestion de portefeuille avec contrainte de chance

### Introduction

Après avoir présenté, dans le Chapitre 1, les bases de la gestion de portefeuille et les principales mesures de risque, puis introduit, dans le Chapitre 2, les concepts fondamentaux de l'optimisation stochastique et les contraintes de chance, ce chapitre se consacre à la formulation mathématique du problème de gestion de portefeuille sous contrainte de chance.

Nous proposons ici une modélisation rigoureuse du problème d'optimisation de portefeuille sous incertitude, tenant compte à la fois du rendement espéré et du risque mesuré de manière probabiliste. Cette formulation s'appuie sur la Value-at-Risk comme seuil de performance à ne pas violer avec une certaine probabilité, et fait appel à une discrétisation de l'espace des rendements afin de rendre le problème traitable numériquement.

La démarche consiste à transformer la contrainte de chance initiale en un ensemble fini de contraintes déterministes, en introduisant des variables binaires pour modéliser explicitement les violations de scénario. Cette reformulation conduit à un programme quadratique mixte en nombres entiers (MIQP), dont la structure pose plusieurs défis computationnels.

Ce chapitre présente en détail les différentes étapes de modélisation, depuis la génération de scénarios jusqu'à la formulation finale du problème, en préparant ainsi le terrain pour le Chapitre 4, qui portera sur l'implémentation numérique, les méthodes de résolution (notamment par décomposition), ainsi que l'analyse des résultats obtenus.

## 3.1 Revue de littérature

Le cadre théorique du CCPO ayant été présenté au chapitre 2, cette section s'intéresse aux méthodes de résolution existantes. Plusieurs travaux ont adopté une reformulation MIQP pour modéliser des portefeuilles complexes : Cesarone, Scozzari et Tardella (2013, 2023)[15] proposent des modèles moyenne-variance et moyenne-variance-VaR avec contraintes de cardinalité, tandis que Guastaroba et al. (2022)[27] développent des variantes hybrides intégrant le CVaR et l'index tracking.

Bien que performantes, ces approches restent limitées à des cas de taille modérée. Pour surmonter cette complexité, LiXingmei et al. (2018)[54] appliquent la décomposition de Benders à un problème de sélection de portefeuilles multi-projets stochastiques.

À notre connaissance, aucun travail n'a encore appliqué la décomposition généralisée de Benders (GBD) à un modèle CCPO. Toutefois, van Ackooij, Frangioni et de Oliveira (2016)[53] proposent une version inexacte et stabilisée de la GBD adaptée aux contraintes de chance avec support fini, en suggérant son applicabilité à la gestion de portefeuille sans en fournir de cas pratique.

Dans ce contexte, ce mémoire propose une première application de la GBD à un problème de portefeuille sous contrainte de chance (VaR), en combinant formulation MIQP, scénarios finis, et coupes no-good.

## 3.2 Définition et formulation mathématique du modèle considéré

Nous considérons un investisseur souhaitant allouer un capital initial  $W_0$  entre  $n$  actifs financiers. Chaque actif  $i$  est associé à un taux de rendement aléatoire  $r_i$ , pour  $i \in \{1, \dots, n\}$ , inconnu au moment de la décision. L'objectif est de formuler un modèle d'optimisation qui capture le compromis fondamental entre rendement et risque.

Le compromis entre rendement espéré et risque est ici formulé comme un problème d'optimisation mono-objectif, obtenu par scalarisation d'un modèle bi-objectif de type Markowitz. La fonction objectif pondère le risque (variance) et le rendement espéré à l'aide d'un paramètre  $\beta$  :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \beta x^T \Sigma x - (1 - \beta) \mu^T x \quad (3.1)$$

où :

- $x \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur des proportions investies dans chaque actif,
- $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est la matrice de covariance des rendements,
- $\mu \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur des espérances de rendement,
- $\beta \in [0, 1]$  est un paramètre reflétant l'aversion au risque de l'investisseur.

Contrairement au modèle classique de Markowitz introduit au premier chapitre, où le risque est minimisé sous contrainte d'un rendement cible fixé, notre formulation intègre directement ce

compromis dans la fonction objectif via une pondération scalaire. Cela offre plus de flexibilité pour explorer le front de Pareto sans recourir à une contrainte explicite sur le rendement.

Afin d'intégrer explicitement la dimension du risque dans notre modèle, nous introduisons la Value-at-Risk (VaR) comme mesure centrale.

Dans notre cadre, la VaR est utilisée pour imposer une contrainte de sécurité sur le rendement du portefeuille. Plus précisément, nous exigeons que le rendement total du portefeuille, noté  $x^T r$ , dépasse un certain seuil  $\bar{r}$  avec une probabilité d'au moins  $\alpha$ . Cette exigence se formalise par la contrainte de chance suivante :

$$\mathbb{P}(x^T r \geq \bar{r}) \leq 1 - \alpha. \quad (3.2)$$

Cette contrainte permet de limiter la probabilité de réaliser un rendement inférieur à un seuil critique, tout en conservant une certaine flexibilité dans la prise de décision. Elle constitue ainsi un compromis efficace entre rigueur statistique et adaptabilité, en garantissant un niveau minimal de performance du portefeuille dans un environnement incertain.

Les contraintes déterministes de notre problème sont regroupées dans l'ensemble suivant :

**Définition 3.2.1** (Ensemble  $X$ ). L'ensemble admissible des proportions d'investissement :

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid e^T x = 1, \quad x \geq 0\}$$

C'est le simplexe standard représentant les allocations admissibles .

où  $e \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur dont toutes les composantes valent 1.

La contrainte  $e^T x = 1$  impose que l'intégralité du capital initial soit investie, tandis que la contrainte  $x \geq 0$  interdit les ventes à découvert.

Formellement, notre programme à contraintes de chance (CCP) est donné par :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \beta x^T \Sigma x - (1 - \beta) \mu^T x \quad (3.3)$$

$$\text{s.c. } \mathbb{P}(x^T r \geq \bar{r}) \geq 1 - \alpha, \quad (3.4)$$

$$x \in X. \quad (3.5)$$

où

— Si  $\beta$  est grand, l'optimisation privilégie un portefeuille peu risqué.

— Si  $\beta$  est petit, l'optimisation privilégie le rendement au détriment du risque.

### 3.3 Reformulation quadratique en nombres entiers mixtes (MIQP)

Dans la formulation initiale (3.4), la contrainte de chance est difficile à manipuler directement dans un cadre d'optimisation. Pour surmonter cette difficulté, nous nous appuyons sur la reformulation en programmation en nombres entiers mixtes (MIP) présentée dans la section (2.7.2), que nous allons exploiter pour construire notre modèle et aborder efficacement le problème d'optimisation considéré.

Pour cela, nous adoptons une reformulation en programmation quadratique en nombres entiers mixtes (MIQP), motivée par la présence d'un terme quadratique représentant le risque du portefeuille dans la fonction objectif.

Cette reformulation améliore à la fois la flexibilité et l'applicabilité du modèle, tout en conservant une structure mathématique adaptée à une résolution efficace via la programmation quadratique en nombres entiers mixtes, comme introduit dans le chapitre 2 (section 2.8). De plus, elle permet de tirer parti de la méthode de décomposition de Benders généralisée, présentée également dans ce chapitre (section 2.8.2), afin de résoudre le problème de manière modulaire et scalable. Voici les étapes détaillées de cette reformulation :

#### Étape 1 : Discrétisation de l'espace des rendements

Afin de rendre le problème probabiliste initial numériquement tractable, nous considérons une approximation discrète de la distribution des rendements aléatoires. Plus précisément, le vecteur est supposé prendre ses valeurs dans un ensemble fini de scénarios  $\Xi = \{r^s : s \in S\} \subseteq \mathbb{R}^n$ , chacun étant associé à une probabilité  $\pi_s$ , telle que :

$$\sum_{s \in S} \pi_s = 1.$$

Cette discrétisation, fondée sur des données historiques, des simulations de Monte Carlo ou d'autres techniques d'échantillonnage, permet de remplacer la distribution continue par une distribution empirique à support fini. Elle est largement utilisée en optimisation stochastique (voir *Birge & Louveaux, 2011*).

Dans le cadre spécifique de la Décomposition Généralisée de Benders (GBD), cette hypothèse présente plusieurs avantages. D'une part, elle permet de reformuler les contraintes de chance sous forme déterministe.[42]<sup>1</sup>. D'autre part, elle facilite la séparation explicite entre les variables binaires  $z_s$ , indicatrices de violation des scénarios, et les variables continues de décision  $x$ , condition clé pour appliquer efficacement la GBD.

Enfin, le caractère fini du support assure la convexité du sous-problème pour un vecteur  $z$  donné, garantit la validité de la dualité forte, et permet la génération ciblée de coupes de Benders, améliorant la convergence de l'algorithme.

1. Il s'agit d'une reformulation déterministe d'une contrainte de chance discrète, où les violations de chaque scénario sont pondérées par leur probabilité dans une somme convexe, facilitant ainsi la modélisation sous forme linéaire.

## Étape 2 : Réécriture de la contrainte de chance sous forme déterministe

La contrainte de chance initiale (3.2) où  $r$  est le vecteur aléatoire des rendements et  $\bar{r}$  le seuil minimal exigé. Pour la rendre exploitable, on la reformule à l'aide de l'ensemble fini de scénarios  $\{r^s : s \in S\}$  muni des probabilités  $\{\pi_s\}$ .

En remplaçant la probabilité par la somme pondérée sur les scénarios, on obtient :

$$\sum_{s \in S} \pi_s \mathbf{1}_{\{r^s \top x \geq \bar{r}\}} \geq \alpha$$

où  $\mathbf{1}_{\{(r^s)^\top x \geq \bar{r}\}}$  vaut 1 si, dans le scénario  $s$ , le rendement  $(r^s)^\top x$  atteint au moins  $\bar{r}$ , et 0 sinon.

Pour la linéariser, nous introduisons, dans l'étape suivante, une variable binaire  $z_s$  associée à chaque scénario.[46]

## Étape 3 : Introduction des variables binaires pour modéliser les violations

Pour capturer explicitement la violation d'un scénario et linéariser l'indicatrice, on définit, pour chaque scénario  $s$ , la variable binaire  $z_s \in \{0, 1\}$  de la façon suivante :

- $z_s = 0$  si  $r^\top x \geq \bar{r}$  (le scénario  $s$  respecte le seuil) ;
- $z_s = 1$  si  $r^\top x < \bar{r}$  (le scénario  $s$  viole le seuil).

La contrainte de chance se traduit alors exactement par :

$$\sum_{s \in S} \pi_s z_s \leq \alpha$$

Cette inégalité garantit que la somme des probabilités des scénarios violés n'excède pas  $\alpha$ , c'est-à-dire que la probabilité totale des scénarios où  $(r^s)^\top x < \bar{r}$  reste au plus égale à  $\alpha$ . [2]

## Étape 4 : Reformulation finale en MIQP

Le problème d'optimisation de portefeuille se reformule alors comme un programme quadratique mixte en nombres entiers (MIQP) :

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & \beta x^\top \Sigma x - (1 - \beta) \mu^\top x \\ \text{s.t.} \quad & r_s^\top x \geq \bar{r}(1 - z_s), \quad \forall s = 1, \dots, S, \\ & x \in X, \quad z \in Z. \end{aligned} \tag{3.6}$$

où :

**Définition 3.3.1** (Ensemble  $Z$ ).

$$Z = \left\{ z \in \{0, 1\}^S \mid \sum_{i=1}^S \pi_i z_i \leq \alpha \right\}$$

Cet ensemble est fini et défini par une seule contrainte linéaire en  $z$ .

avec

- $z \in \{0, 1\}^S$  sont les variables binaires indiquant la violation éventuelle de chaque scénario.

Dans cette version, la contrainte  $r^\top x \geq \bar{r}(1 - z_s)$  assure que, dès qu'un scénario  $s$  n'est pas violé ( $z_s = 0$ ), le rendement  $(r^s)^\top x$  est au moins  $\bar{r}$ . Si  $z_s = 1$ , la contrainte est relâchée automatiquement, sans faire appel à une constante « Big M ».[36]

### 3.4 Difficulté du modèle MIQP

La formulation du problème d'optimisation de portefeuille sous contraintes de chance avec reformulation en MIP (Mixed-Integer Programming) présente plusieurs défis qui rendent la résolution numérique particulièrement complexe.

- **Complexité combinatoire :** La présence des variables binaires  $z$  introduites pour modéliser la violation des contraintes de chance rend le problème intrinsèquement combinatoire. Chaque scénario  $s$  est associé à une variable binaire  $z_s$  qui peut prendre la valeur 0 ou 1, ce qui génère un espace de solutions exponentiel en fonction du nombre de scénarios considérés. Cette explosion combinatoire complique la recherche d'une solution optimale, en particulier lorsque le nombre de scénarios  $S$  est grand.[8]
- **Non-convexité :** Bien que la fonction objectif soit quadratique (variance pondérée des rendements), la présence des variables binaires fait perdre la convexité au problème global. Cela empêche l'application directe des méthodes de programmation quadratique convexe (QP) ou de l'optimisation continue classique, nécessitant l'utilisation de solveurs MIP spécialisés.[9]
- **Choix de  $\bar{r}$  :** Le seuil  $\bar{r}$  utilisé pour la Value-at-Risk doit être déterminé avec soin, car il influence directement la faisabilité et la qualité de la solution. Selon la méthode d'estimation (historique, paramétrique, simulation), l'approximation de  $\bar{r}$  peut introduire des biais ou des écarts importants.[29]
- **Impact du nombre de scénarios :** La précision de la modélisation dépend du nombre de scénarios considérés. Un grand nombre de scénarios augmente la fidélité de l'approximation de la distribution des rendements, mais accroît considérablement la taille et la complexité du problème MIP.[50]
- **Contraintes de chance et robustesse :** Le modèle doit satisfaire la contrainte de chance en maintenant la probabilité de violation sous le seuil  $\epsilon$ . Cette exigence de robustesse impose un compromis délicat entre le rendement espéré, la variance (risque) et le respect des scénarios défavorables.[21]
- **Temps de calcul et ressources :** En pratique, la résolution d'un tel MIP pour des portefeuilles réels (avec un grand nombre d'actifs et de scénarios) nécessite des ressources

computationnelles importantes et des temps de calcul élevés, même en utilisant des solveurs performants tels que CPLEX ou Gurobi.[38]

## 3.5 Reformulation par Approximation CVaR

Afin de mettre en perspective notre approche de résolution du problème d'optimisation de portefeuille sous contrainte de chance, reformulé en programme mixte-entier et résolu par décomposition généralisée de Benders (GBD), nous présentons ici une méthode alternative fondée sur une approximation conservatrice via la Conditional Value-at-Risk (CVaR), telle que détaillée dans la section 3.5.

Considérons le problème d'optimisation de portefeuille avec contrainte de chance défini par les équations (3.3)-(3.5). Pour surmonter les difficultés de non-convexité associées à la contrainte de chance, nous proposons une reformulation conservatrice basée sur la Conditional Value-at-Risk (CVaR).

### Formulation générale

Définissons la fonction de contrainte :

$$G(x, r) = \bar{r} - x^T r \quad (3.7)$$

La contrainte de chance  $\mathbb{P}(x^T r \geq \bar{r}) \geq \alpha$  est équivalente à :

$$\mathbb{P}(G(x, r) \leq 0) \geq \alpha \quad (3.8)$$

En utilisant l'approximation par CVaR, nous obtenons la contrainte conservative :

$$\text{CVaR}_\alpha(G(x, r)) \leq 0 \quad (3.9)$$

qui implique la satisfaction de la contrainte de chance originale. Cette contrainte s'exprime comme :

$$\exists t \in \mathbb{R} : t + \frac{1}{\alpha} \mathbb{E} \left[ \left( \bar{r} - x^T r - t \right)_+ \right] \leq 0 \quad (3.10)$$

Le problème reformulé s'écrit alors :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}} \lambda x^T \Sigma x - (1 - \lambda) \mu^T x \quad (3.11)$$

$$\text{s.t.} \quad t + \frac{1}{\alpha} \mathbb{E} \left[ \left( \bar{r} - x^T r - t \right)_+ \right] \leq 0 \quad (3.12)$$

$$x_i \in X, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.13)$$

### Formulation discrète pour implémentation numérique

Pour un ensemble de  $N$  scénarios de rendements  $r^i$  équiprobables ( $p_i = \frac{1}{N}$ ), nous introduisons des variables d'écart  $s_i \geq 0$  et obtenons le programme quadratique convexe suivant :

$$\min_{x,t,s} \quad \beta x^T \Sigma x - (1 - \beta) \mu^T x \quad (3.14)$$

$$\text{s.c.} \quad t + \frac{1}{\alpha N} \sum_{i=1}^N s_i \leq 0 \quad (3.15)$$

$$s_i \geq \bar{r} - x^T r^i - t, \quad i = 1, \dots, N \quad (3.16)$$

$$s_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (3.17)$$

$$x \in X \quad (3.18)$$

où  $s = [s_1, \dots, s_N]^T$  est le vecteur des variables d'écart. Cette formulation préserve la convexité du problème et peut être résolue efficacement avec des solveurs d'optimisation convexe standard.

## 3.6 Application de l'algorithme de décomposition de benders généralisée au problème de portefeuille

Dans cette section, nous mettons en œuvre l'algorithme de Décomposition Généralisée de Benders (GBD) pour résoudre le problème d'optimisation de portefeuille, préalablement reformulé sous la forme d'un programme quadratique mixte en nombres entiers (MIQP) (3.6).

### 3.6.1 Principe et déroulement de l'algorithme GBD

La méthode de Décomposition Généralisée de Benders (GBD) repose sur le principe de séparation des variables en deux catégories :

- $z_i \in \{0, 1\}$  : indicateur de violation du scénario  $i$ ,
- $x_j \geq 0$  : proportion investie dans l'actif  $j$  ( $\sum_j x_j = 1$ ).

Cette séparation permet de tirer parti de la structure particulière du problème pour en faciliter la résolution via une approche itérative.

L'algorithme GBD repose sur une résolution itérative alternant entre :

- un **problème maître** : (PM) en variables entières  $z \in \{0, 1\}^n$ , approximant le problème d'origine, et
- un **sous-problème** (SP) paramétré par la solution entière  $z^k$  obtenue.

Cette approche est détaillée théoriquement dans la section 2.8.2 du chapitre 2.

### 3.6.2 Problème Maître (PM)

À chaque itération  $k$ , le PM résout :

$$\begin{aligned}
 \text{(PM)} \quad & \min_{z \in Z, \theta \geq 0} \theta \\
 \text{s.c.} \quad & z \in Z \\
 & \sum_{i \in S(z^k)} z_i \geq 1 \quad (\text{no-good cut}) \\
 & \theta \geq v^k + \sum_{i=1}^n \lambda_i^k (z_i - z_i^k)
 \end{aligned}$$

(coupes de Benders précédemment générées voir 3.6.4) où :

- $\theta \in \mathbb{R}$  est une variable auxiliaire représentant une approximation inférieure de la fonction valeur du sous-problème,
- $z \in Z = \{0, 1\}^n$  est le vecteur de décision binaire,
- La contrainte  $\theta \geq 0$  est initialement ajoutée lorsque aucune coupe d'optimalité n'est encore générée.

### 3.6.3 Sous-Problème (SP)

Pour une solution  $z^k \in Z$  donnée, le sous-problème consiste à résoudre :

$$\begin{aligned}
 \text{(SP)} \quad & v(z^k) = \min_{x \in X} \beta x^\top \Sigma x - (1 - \beta) \mu^\top x \\
 \text{s.c.} \quad & r_i^\top x \geq \bar{r}(1 - z_i^k), \quad \forall i \in \{1, \dots, S\}
 \end{aligned}$$

### 3.6.4 Génération des coupes de Benders

Deux cas peuvent se présenter après la résolution de (SP) :

**1. Cas réalisable (SP admet une solution optimale) :** Soit  $x^k$  solution optimale de (SP) et  $v^k = v(z^k)$ . En appliquant la dualité forte et les résultats du lemme sur les multiplicateurs de Lagrange (voir section 2.8.2), on peut en déduire les multiplicateurs  $\lambda_i^k$  associés aux contraintes couplées. La **fonction valeur** ainsi obtenue satisfait les propriétés énoncées dans le théorème 2.8.1. Une **coupe d'optimalité** est alors ajoutée au PM :

$$\theta \geq v^k + \sum_{i=1}^n \lambda_i^k (z_i - z_i^k)$$

Cette inégalité affine permet de corriger la sous-estimation de  $\theta$  dans le PM.

**2. Cas infaisable (SP n'admet pas de solution) :** Dans ce cas, une **coupe de faisabilité** est ajoutée pour éliminer la configuration actuelle  $z^k$ .

**Coupe no-good (cas binaire) :**

Soit  $S(z^k) = \{i \in \{1, \dots, S\} \mid z_i^k = 0\}$ . On introduit la coupe suivante :

$$\sum_{i \in S(z^k)} z_i \geq 1 \quad (\text{no-good cut})$$

Cette coupe garantit que la configuration  $z^k$  ne sera plus sélectionnée, en imposant qu'au moins une des variables binaires fixées à 0 dans  $z^k$  soit activée à l'itération suivante.

**Remarque :** Cette coupe est simple, efficace, et adaptée aux problèmes avec des variables purement binaires. Elle permet de :

- éviter la répétition des solutions infaisables,
- accélérer la convergence de l'algorithme,
- contourner le besoin d'une analyse duale du sous-problème.

Ce processus est répété jusqu'à convergence, c'est-à-dire jusqu'à ce que la valeur estimée par le PM et la valeur réelle calculée dans le SP soient suffisamment proches. Ainsi, GBD permet d'itérer efficacement sur l'espace discret  $z$ , tout en exploitant les propriétés convexes de la partie continue  $x$ , ce qui rend la méthode particulièrement adaptée aux problèmes d'optimisation avec contraintes probabilistes disjonctives (voir Section 2.8.2).

**Critère d'arrêt :** L'algorithme s'arrête lorsque l'écart entre l'approximation  $v(z^k)$  donnée par le sous-problème et sa borne inférieure actuelle issue du problème maître devient suffisamment petit. Formellement, on impose :

$$|v(z^k) - v(z)| \leq \delta_{Tol},$$

où  $\delta_{Tol} > 0$  est une tolérance de convergence fixée.

**Théorème 3.6.1 (Convergence).** *Sous les hypothèses standards (convexité de la fonction objectif du sous-problème et compacité de l'ensemble  $X$ ), la méthode de décomposition généralisée de Benders (GBD) converge vers la solution optimale en un nombre fini d'itérations.*

Comme illustré dans la figure 3.1, celle-ci présente une vue d'ensemble du fonctionnement de l'algorithme de décomposition de Benders généralisée (GBD). Ce schéma met en évidence les différentes étapes clés de l'algorithme :

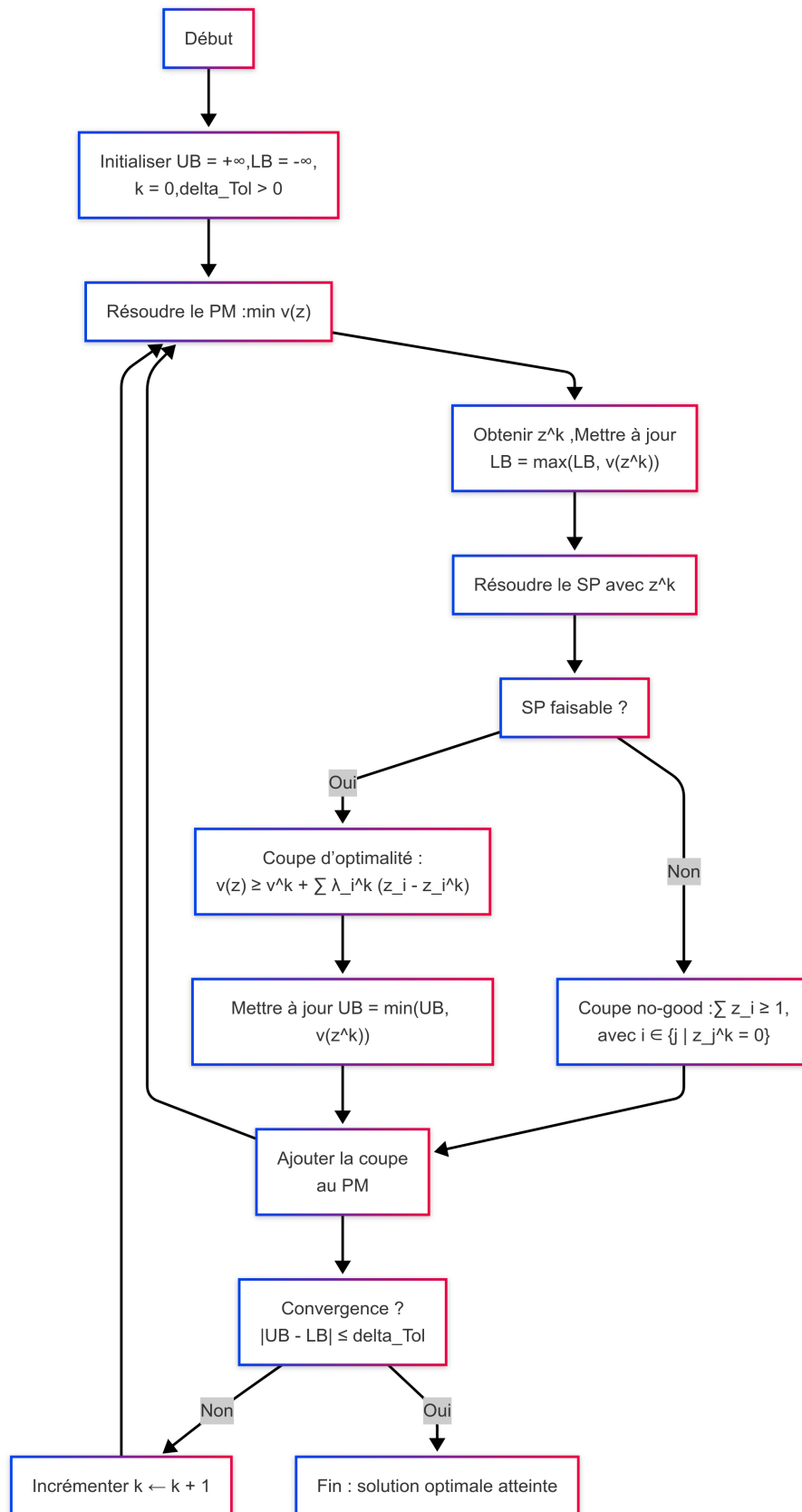


FIGURE 3.1 – Algorithme GBD pour l'optimisation de portefeuille sous contrainte de chance

**Exemple 3.6.1.** (Illustration de l'algorithme GBD)**Données utilisées :** Nous considérons un exemple avec :

- Nombre d'actifs :  $n = 3$
- Nombre de scénarios :  $S = 5$
- Probabilités uniformes :  $\pi_s = 0,2$
- Seuil de violation :  $\alpha = 0,4$  (donc au plus 2 scénarios peuvent être exclus)
- Rendement minimal requis :  $\bar{r} = 0,04$
- Paramètre de compromis :  $\beta = 0,5$

**Matrice des rendements simulés**  $r \in \mathbb{R}^{5 \times 3}$  :

$$r = \begin{bmatrix} 0,05 & 0,04 & 0,03 \\ 0,02 & 0,03 & 0,01 \\ 0,06 & 0,05 & 0,04 \\ -0,01 & 0,00 & -0,02 \\ 0,07 & 0,06 & 0,05 \end{bmatrix}$$

**Vecteur des rendements moyens**  $\mu \in \mathbb{R}^3$  :

$$\mu = \begin{bmatrix} 0,038 \\ 0,036 \\ 0,022 \end{bmatrix}$$

**Matrice de covariance**  $\Sigma \in \mathbb{R}_+^{3 \times 3}$  (semi-définie positive) :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0,0025 & 0,0012 & 0,0008 \\ 0,0012 & 0,0020 & 0,0011 \\ 0,0008 & 0,0011 & 0,0018 \end{bmatrix}$$

**Itération 1 :**

- problème maître :

$$\min \theta \quad \text{s.c. } \theta \geq 0 (\text{borne sur } r \text{ si } \mathcal{O} = \emptyset), \quad \sum \pi_s z_s \leq \alpha$$

Solution du problème maître :  $z^{(1)} = [0, 0, 0, 1, 1]$

— sous-problème :

$$\begin{aligned} \min_{x \in X} \quad & \frac{1}{2} x^T \Sigma x - \frac{1}{2} \mu^T x \\ \text{s.c.} \quad & r_i^T x \geq \bar{r}(1 - z_i^1), \quad \forall i \in \{1, \dots, 3\}, \\ & x \in X \end{aligned}$$

Le sous-problème est faisable, solution optimale :

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 0,4 \\ 0,4 \\ 0,2 \end{bmatrix}, \quad v^{(1)} = 0,012$$

— Multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes  $r_s^T x \geq \bar{r}(1 - z_s)$  pour les scénarios non exclus  $s = 1, 2, 3$  :

$$\lambda^{(1)} = [\lambda_1 = 2,5, \lambda_2 = 1,2, \lambda_3 = 0]$$

— Coupe d'optimalité :

$$\theta \geq 0,012 + \bar{r}(2,5z_1 + 1,2z_2) = 0,012 + 0,1z_1 + 0,048z_2$$

— Résultat :

- $UB^{(1)} = 0,012$
- $LB^{(1)} = 0$
- Gap = 100%

### Itération 2 :

— Problème maître avec la coupe précédente :

$$\min \theta \quad \text{s.c.} \quad \theta \geq 0,012 + 0,1z_1 + 0,048z_2, \quad \sum \pi_s z_s \leq \alpha$$

— Nouvelle solution :  $z^{(2)} = [1, 0, 0, 0, 1]$  Le sous-problème est infaisable : les contraintes de rendement ne peuvent être satisfaites.

— Coupe de faisabilité ajoutée :

$$z_2 + z_3 + z_4 \geq 1$$

(car ces scénarios doivent être exclus au moins partiellement pour rendre le problème faisable)

### Itération 3 :

— Problème maître avec les deux coupes :

$$\min \theta \quad \text{s.c.} \quad \begin{cases} \theta \geq 0,012 + 0,1z_1 + 0,048z_2 \\ z_2 + z_3 + z_4 \geq 1 \\ \sum \pi_s z_s \leq 0,4 \end{cases}$$

### 3.6 Application de l'algorithme de décomposition de benders généralisée au problème de portefeuille

54

— Nouvelle solution :  $z^{(3)} = [1, 1, 0, 0, 0]$  le sous-problème est faisable, solution optimale :

$$x^{(3)} = \begin{bmatrix} 0,3 \\ 0,5 \\ 0,2 \end{bmatrix}, \quad v^{(3)} = 0,0105$$

— Multiplicateurs de Lagrange :

$$\lambda^{(3)} = [0, 1,8, 0, 0, 0]$$

— Nouvelle coupe d'optimalité :

$$\theta \geq 0,0105 + 1,8 \cdot 0,04 \cdot (z_2 - 1) = 0,0105 - 0,072(1 - z_2)$$

— Résultats :

—  $UB^{(3)} = 0,0105$

—  $LB^{(3)} = 0,0102$

—  $\text{Gap} \approx 0,3\% \Rightarrow$  convergence atteinte

Cette illustration montre comment l'algorithme de Benders généralisé construit progressivement des coupes d'optimalité et de faisabilité pour encadrer la valeur optimale et identifier les scénarios critiques pour le respect de la contrainte de chance. L'utilisation des multiplicateurs de Lagrange permet de construire des coupes d'optimalité rigoureuses basées sur la sensibilité du problème aux exclusions de scénarios.

## Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté la reformulation du modèle d'optimisation de portefeuille sous contrainte de chance afin de le rendre exploitable par des outils de programmation mathématique. En remplaçant la formulation probabiliste initiale par une version déterministe à l'aide d'un ensemble fini de scénarios, nous avons obtenu un modèle de type MIQP, intégrant l'incertitude à travers des pondérations sur les scénarios.

L'introduction de variables binaires permet de modéliser explicitement les violations de la contrainte de rendement minimal, et la structure du problème ainsi obtenue permet de maîtriser le risque tout en restant dans un cadre de résolution robuste.

Cette modélisation ouvre ainsi la voie au chapitre suivant, qui sera consacré à l'implémentation numérique du modèle, ainsi qu'à une analyse comparative des deux méthodes de résolution présentées, avec un accent particulier sur les performances de la décomposition de Benders généralisée.

## 4

# Implémentation numérique et analyse des résultats

## Introduction

Ce chapitre est dédié à l'implémentation numérique et à l'analyse comparative des approches de résolution CVaR et Benders, avec un benchmark de résolution directe utilisant le solveur GUROBI

Trois stratégies de résolution sont implémentées et comparées :

- *Une méthode directe*, qui consiste à résoudre le problème MIQP global à l'aide d'un solveur d'optimisation sans aucune décomposition.
- *Une approche basée sur le Conditional Value-at-Risk (CVaR)*, qui constitue une relaxation convexe du problème initial, plus simple à résoudre tout en fournissant une approximation pertinente du risque extrême.
- *L'algorithme de décomposition de Benders généralisée (GBD)*, qui décompose le problème en une composante maître et un ensemble de sous-problèmes, permettant une résolution plus efficace en cas de grande taille ou de forte complexité.

L'ensemble des modèles est implémenté en Python en utilisant *Pyomo* pour la formulation mathématique, et *Gurobi* comme solveur. Le processus d'implémentation comprend :

- La définition de l'environnement de travail,
- Le choix des paramètres d'optimisation (nombre d'actifs, nombre de scénarios, seuil de VaR, etc.)
- Les résultats numériques ont mis en évidence les avantages et les limites de chaque méthode en termes de temps de calcul, qualité des solutions, et capacité à maîtriser le risque.

Cette analyse comparative a permis d'éclairer le choix méthodologique à adopter en fonction des priorités de l'investisseur (précision, temps, robustesse).

Ce chapitre a pour objectif de mettre en lumière les forces et faiblesses de chaque méthode dans le contexte de l'optimisation de portefeuille, et de démontrer l'efficacité de l'approche GBD face aux alternatives plus classiques.

## 4.1 Présentation des outils et environnement de développement

L'ensemble des expériences numériques a été réalisé sur une machine équipée du système d'exploitation *Microsoft Windows 11 Professionnel* (version 10.0.26100), avec une architecture *64 bits*. Le processeur utilisé est un *Intel(R) Core(TM) i5-10310U CPU* cadencé à *1.70 GHz*, et la mémoire vive disponible est de *7.61 Go*.

L'implémentation a été effectuée en *Python 3.12.3 (64-bit)* au moyen de l'environnement de développement intégré *Spyder IDE* (issu de la distribution scientifique *Spyder – The Scientific Python Development Environment*). *Spyder* repose sur *Qt 5.15.2* et *PyQt5 5.15.10*, ce qui en fait un outil adapté pour le prototypage scientifique et le développement rapide de modèles.

La modélisation mathématique a été prise en charge par le langage de modélisation *Pyomo*, tandis que la résolution des programmes quadratiques mixtes (MIQP) et mixtes-entiers (MIP) a été confiée au solveur *Gurobi*, réputé pour son efficacité dans les problèmes d'optimisation de grande taille.

Informations Gurobi :

- Version de Gurobi : *12.0.2*
- Licence Académique restreinte – *restricted license – for non-production use only*
- Date d'expiration de la licence : *23 novembre 2026*

### 4.1.1 Génération des données(problèmes-test)

Afin de valider nos modèles d'optimisation de portefeuille, nous avons adopté une approche de simulation basée sur un *modèle factoriel*, permettant de générer des rendements d'actifs synthétiques tout en maîtrisant leurs propriétés statistiques. Ce cadre offre à la fois réalisme et contrôle, en reproduisant certaines caractéristiques fondamentales des marchés financiers. L'inspiration de ce modèle factoriel provient des travaux sur l'optimisation robuste présentés par Ben-Tal, Ghaoui et Nemirovski [5, 42], où de telles méthodes de génération de scénarios sont couramment utilisées pour simuler des incertitudes de marché de manière structurée.

Les rendements sont ainsi construits selon une *structure factorielle*, dans laquelle :

- les espérances de rendement sont tirées d'une loi uniforme ;
- les facteurs communs suivent une loi log-normale centrée ;
- les sensibilités des actifs sont calibrées en fonction du niveau de rendement cible ;

- la composante idiosyncratique est modélisée par une loi log-normale, ajustée pour garantir la cohérence avec les rendements moyens visés.

Ce schéma de génération assure des données à la fois cohérentes, réalistes et pertinentes pour l'étude de l'optimisation de portefeuille en contexte incertain.

Le rendement  $r_i$  de l'actif  $i$  est décomposé en deux composantes :

$$r_i = \underbrace{\sum_{l=1}^L \zeta_l \gamma_l}_{\text{composante systématique}} + \underbrace{\eta_i}_{\text{composante idiosyncratique}} \quad (4.1)$$

où :

- $L$  est le nombre de facteurs latents.
- $\zeta_l$  est le choc du facteur  $l$ .
- $\gamma_l$  est la sensibilité de l'actif au facteur  $l$ .
- $\eta_i$  est la composante spécifique à l'actif  $i$ .

#### Distribution des Variables :

1. Rendements moyens cible :

$$\bar{r}_i \sim \mathcal{U}(0, 0.1)$$

2. Chocs factoriels :

$$\log(\zeta_l) \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\zeta), \quad \sigma_\zeta = \sqrt{0.12}$$

$$\Rightarrow \zeta_l = \exp(\varepsilon_l), \quad \varepsilon_l \sim \mathcal{N}(0, \sqrt{0.12})$$

3. Sensibilités aux facteurs :

$$\gamma_l = \frac{\bar{r}_i}{2} \cdot \frac{w_l}{\sum_{k=1}^L w_k}, \quad w_l \sim \mathcal{U}(0, 1)$$

4. Composante idiosyncratique :

$$\log(\eta_i) \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i), \quad \sigma_i = \mu_i$$

avec  $\mu_i$  solution de :

$$\exp\left(\mu_i + \frac{\mu_i^2}{2}\right) = 1 + \frac{\bar{r}_i}{2}$$

L'algorithme de génération des données suit les étapes suivantes :

**Algorithme 2** : Procédure de génération des rendements simulés

---

```

1 [H] Initialiser la graine aléatoire : seed ← 42 pour  $i = 1$  to  $n$  faire
2 fin
3 Boucle sur chaque actif Générer  $\bar{r}_i \sim \mathcal{U}(0, 0.1)$  Pour  $l = 1$  à  $L$  : Générer
 $w_l \sim \mathcal{U}(0, 1)$  Calculer  $\sum_{k=1}^L w_k$  Pour  $l = 1$  à  $L$  : Calculer  $\gamma_l \leftarrow \frac{\bar{r}_i}{2} \cdot \frac{w_l}{\sum_{k=1}^L w_k}$  pour  $s = 1$ 
to  $S$  faire
4 fin
5 Boucle sur les scénarios Pour  $l = 1$  à  $L$  : Générer  $\varepsilon_l^{(s)} \sim \mathcal{N}(0, \sqrt{0.12})$  Pour  $l = 1$  à
 $L$  : Calculer  $\zeta_l^{(s)} \leftarrow \exp(\varepsilon_l^{(s)})$  Calculer  $c_i^{(s)} \leftarrow \sum_{l=1}^L \zeta_l^{(s)} \gamma_l$  Résoudre  $\mu_i$  tel que
 $\exp\left(\mu_i + \frac{\mu_i^2}{2}\right) = 1 + \frac{\bar{r}_i}{2}$  Générer  $\log(\eta_i^{(s)}) \sim \mathcal{N}(\mu_i, \mu_i)$  Calculer  $r_i^{(s)} \leftarrow c_i^{(s)} + \exp(\log(\eta_i^{(s)}))$ 
Construire la matrice des rendements  $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{S \times n}$ 

```

---

**Post-traitement des données :** Après génération des rendements, nous calculons et normalisons la matrice de covariance :

$$\Sigma = \text{Cov}(\mathbf{R}), \quad \Sigma_{\text{norm}} = \frac{\Sigma}{\max(\Sigma)}$$

Une correction est ensuite appliquée pour garantir la semi-définie positive de la matrice :

$$\Sigma_{\text{PSD}} = \mathbf{V} \mathbf{\Lambda}^+ \mathbf{V}^T$$

où  $\mathbf{\Lambda}^+ = \max(\lambda_k, 10^{-8})$  et  $\lambda_k$  sont les valeurs propres de  $\Sigma_{\text{norm}}$ .

Un extrait de cette matrice normalisée et corrigée est présenté dans le **Tableau 4.3**, illustrant les relations statistiques entre un sous-ensemble d'actifs simulés.

### 4.1.2 Choix des paramètres

Le bon choix des paramètres est essentiel à la fois pour la qualité des données simulées et pour la performance de l'algorithme de Décompositions de Benders généralisées. Nous distinguons ici deux catégories de paramètres : ceux utilisés pour la génération des données de rendement, et ceux liés à la résolution du modèle d'optimisation sous contrainte de chance.

**I. Paramètres de génération des données simulées** Les données de rendement des actifs financiers sont générées selon un modèle à composantes multiplicatives aléatoires. Les paramètres utilisés pour cette étape sont les suivants :

- Nombre d'actifs  $n$
- Nombre de scénarios  $s$
- Nombre de facteurs latents :  $L = 8$
- Seed (graine aléatoire) : 42, afin d'assurer la reproductibilité des résultats

**II. Paramètres du modèle d'optimisation avec GBD**

Les paramètres adoptés sont :

- $\lambda = 0.5$  : paramètre d'équilibre entre le risque (variance) et le rendement espéré
- $\alpha = 0.05$  : niveau de tolérance de la contrainte de chance (soit un niveau de confiance de 95%)
- Nombre maximal d'itérations : 700
- Tolérance de convergence :  $\delta = 10^{-4}$
- Choix du paramètre  $\bar{r}$  (le seuil utilisé dans la contrainte de chance) : afin d'assurer une cohérence avec la distribution empirique des rendements simulés, nous avons opté pour une estimation basée sur un portefeuille équipondéré.  
Plus précisément, nous avons d'abord calculé les rendements d'un portefeuille composé de parts égales dans chacun des actifs simulés :

$$w^{eq} = \left( \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} \right)$$

$$r_s^{eq} = r_s^T w^{eq}, \quad \forall s \in \{1, \dots, S\}$$

où  $r_s$  désigne le vecteur de rendements du scénario  $s$ , et  $S$  le nombre total de scénarios. Le seuil  $\bar{r}$  est ensuite défini comme le **percentile empirique** (par exemple le 5<sup>e</sup> percentile) de la distribution des rendements  $r_s^{eq}$  :

$$\bar{r} = \text{percentile}_\alpha \left( \{r_s^{eq}\}_{s=1}^S \right)$$

Cette méthode permet d'obtenir une valeur de référence statistiquement fondée, représentative d'un niveau de rendement « raisonnablement faible », servant de seuil dans l'expression de la contrainte de chance.

## 4.2 Resultats et analyse GBD sur une instance CCP

À titre illustratif, les données simulées pour une instance CCP de taille  $n = 150$  actifs et  $S = 1500$  scénarios, générées à partir de l'algorithme expérimental (présenté en Section 4.1.2) dans l'environnement décrit en Section 4.1, sont présentées ci-après. Elles serviront de base pour l'implémentation de la décomposition de Benders généralisée (GBD).

Le tableau 4.1 présente un extrait simulé de la matrice des rendements, générée à l'aide de notre algorithme de simulation basé sur un modèle factoriel. Cette matrice capture les rendements hypothétiques de 10 actifs pour 10 scénarios de marché, illustrant la variabilité des performances sous différentes conditions économiques.

Scénario	Actifs									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1.030	1.114	1.073	1.085	1.011	1.003	1.006	1.158	1.054	1.138
2	1.062	1.186	1.112	1.031	1.012	1.014	1.009	1.108	1.077	1.107
3	1.067	1.083	1.038	1.102	1.027	1.016	1.008	1.130	1.016	1.065
4	1.030	1.089	1.088	1.065	1.018	1.018	1.007	1.052	1.067	1.003
5	1.028	1.106	1.143	1.080	1.028	1.015	1.005	1.065	1.005	1.077
6	1.036	1.075	1.065	1.099	1.019	1.010	1.008	1.049	1.054	1.076
7	1.011	1.134	1.042	1.024	1.007	1.014	1.005	1.107	1.084	1.116
8	1.020	1.021	1.053	1.062	1.003	1.003	1.003	1.058	1.046	1.125
9	1.017	1.052	1.037	1.045	1.007	1.028	1.006	1.118	1.024	1.052
10	1.021	1.054	1.055	1.019	1.020	1.013	1.007	1.037	1.089	1.098

TABLE 4.1 – Extrait de la matrice des rendements (10 scénarios  $\times$  10 actifs)

Le vecteur des rendements moyens, noté  $\mu$  et présenté dans le Tableau 4.2, résume la performance attendue des 10 actifs sur la base des 10 scénarios simulés. Calculé comme la moyenne arithmétique des rendements par actif, ce vecteur joue un rôle central dans notre problème d'optimisation de portefeuille, où il intervient directement dans la fonction objectif pour maximiser le rendement espéré.

Actif	Rendement moyen
Actif 1	1.032
Actif 2	1.091
Actif 3	1.071
Actif 4	1.061
Actif 5	1.015
Actif 6	1.013
Actif 7	1.006
Actif 8	1.088
Actif 9	1.052
Actif 10	1.086

TABLE 4.2 – Vecteur des rendements moyens des actifs

Le Tableau 4.3 présente un extrait de la matrice de variance-covariance (5 scénarios  $\times$  5 actifs) générée par notre algorithme factoriel. Cette matrice subit un prétraitement crucial avant son utilisation dans les calculs d'optimisation, comme spécifié dans la section 5.

	Actif 1	Actif 2	Actif 3	Actif 4	Actif 5
Actif 1	0,124 918 63	0,083 420 50	0,001 236 50	-0,002 337 08	0,007 809 75
Actif 2	0,083 420 50	1,000 000 00	-0,100 632 11	0,060 037 01	0,011 210 32
Actif 3	0,001 236 50	-0,100 632 11	0,507 043 80	-0,048 530 06	0,001 450 28
Actif 4	-0,002 337 08	0,060 037 01	-0,048 530 06	0,368 360 07	0,008 989 74
Actif 5	0,007 809 75	0,011 210 32	0,001 450 28	0,008 989 74	0,020 962 22

TABLE 4.3 – Matrice variance-covariance (5×5) des rendements d’actifs

Nous procédons à l’implémentation de la (GBD) sur l’instance considérée. Cette section expose les résultats obtenus ainsi qu’une analyse des performances de la méthode sur le problème de portefeuille sous contrainte de chance simulé.

Métrique	Valeur
Valeur optimale (UB)	-0.099049
Borne inférieure (LB)	-0.104044
Gap final	(0.50%)
Rendement moyen du portefeuille	1.062414
Risque du portefeuille (écart-type)	0.049474
Ratio de sharpe	4.4530
Scénarios exclus	75 (5.00%)
Temps total d’exécution	6828.76 secondes
Nombre d’itérations	1300
Nombre de coupes d’optimalité	42
Nombre de coupes de faisabilité	8

TABLE 4.4 – Tableau détaillé des résultats de l’optimisation

Le tableau 4.4 présente les principaux indicateurs de performance de l’optimisation. On observe un rendement supérieur à la cible (1.062 vs 1.054) avec un risque modéré (écart-type de 0.049). Après 1300 itérations.

<b>Top 5 actifs (poids élevés)</b>	Actif 128 : 3.8%	Actif 90 : 2.8%	Actif 108 : 2.3%	Actif 139 : 9.6%	Actif 127 : 2.2%
<b>Actifs marginaux (poids faibles)</b>	Actif 33 : 0.003%	Actif 129 : 0.02%	Actif 78 : 0.002%	Actif 59 : 0.01%	Actif 73 : 0.001%
<b>Nombre d’actifs avec allocation nulle</b>	0				

TABLE 4.5 – Analyse des allocations

Le tableau 4.5 révèle une allocation relativement équilibrée avec une légère concentration autour de l’actif 128 (3,8%). Aucun actif n’est totalement exclu, et bien que certains présentent

des poids marginaux, l'ensemble du portefeuille reste diversifié. Cette distribution indique une répartition des investissements sur plusieurs actifs, permettant une atténuation du risque.

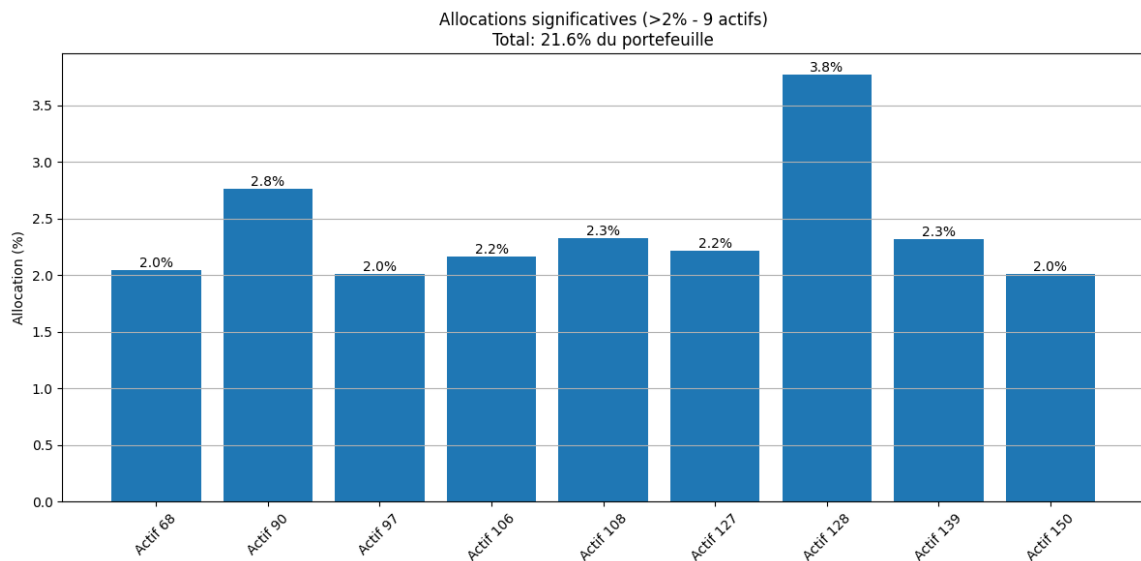


FIGURE 4.1 – Allocation des actifs significatives

TABLE 4.6 – Analyse des scénarios exclus

Métrique	Valeur
Rendement moyen des scénarios exclus	1.0401
Rendement moyen des scénarios retenus	1.0523
Différence de rendement moyen	0.0045
% scénarios exclus sous le rendement cible	100.00%
% scénarios retenus sous le rendement cible	50.93%

Comme le montre le tableau 4.6, les scénarios exclus (5% du total) présentent un rendement inférieur aux autres. La quasi-totalité des scénarios (99.93) est sous le rendement cible, indiquant des objectifs potentiellement trop ambitieux.

**Convergence de l'algorithme** La figure 4.2 illustre l'évolution de l'algorithme de décomposition généralisée de Benders (GBD) au fil des itérations. Bien que la convergence puisse être progressive, elle demeure certaine : la borne inférieure (LB) issue du Problème Maître s'approche itérativement de la borne supérieure (UB) obtenue par le Sous-Problème. Ce comportement garantit qu'après un nombre fini d'itérations, l'algorithme converge vers une solution optimale. Le graphique permet ainsi de visualiser cette dynamique de convergence.

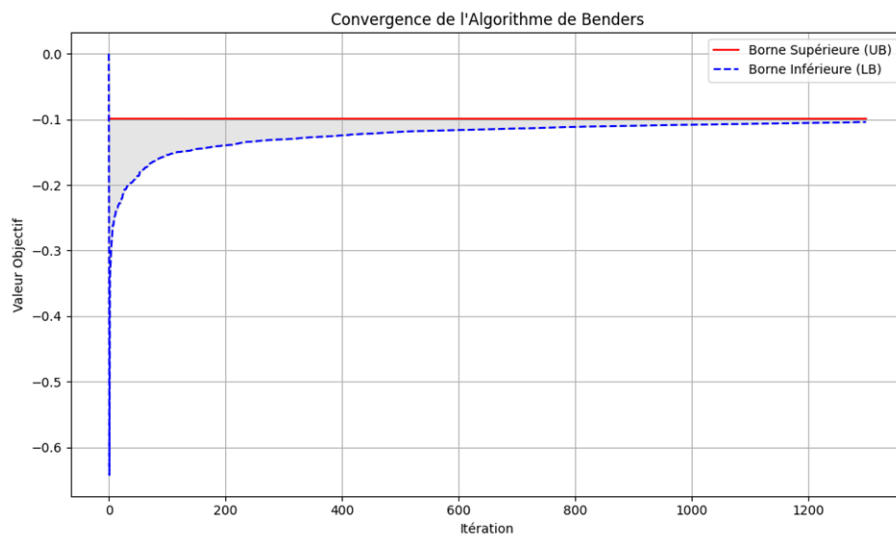


FIGURE 4.2 – Convergence de l’algorithme GBD

Le comportement observé est le suivant :

- Les bornes supérieure ( $v_{up}$ ) et inférieure ( $v_{low}$ ) deviennent rapidement stables ;
- Le mécanisme d’exclusion de scénarios défavorables agit de manière contrôlée, contribuant à stabiliser les bornes.

**Interprétation :** Le gap diminue de façon rapide au démarrage, puis se stabilise autour de **0,76%**, ce qui indique que l’algorithme converge efficacement vers une solution quasi-optimale. Ce niveau de gap final traduit à la fois une bonne précision et un coût computationnel maîtrisé.

**2. Évolution du nombre de scénarios exclus :** Ce graphique (4.3) suit la dynamique du nombre de scénarios qui violent la contrainte de chance au cours des itérations. Cela reflète la capacité du portefeuille à respecter le seuil de risque imposé.

**Interprétation :** Le nombre de scénarios exclus diminue de façon progressive, démontrant l’amélioration de la robustesse du portefeuille aux pires cas, en conformité avec la contrainte de chance.

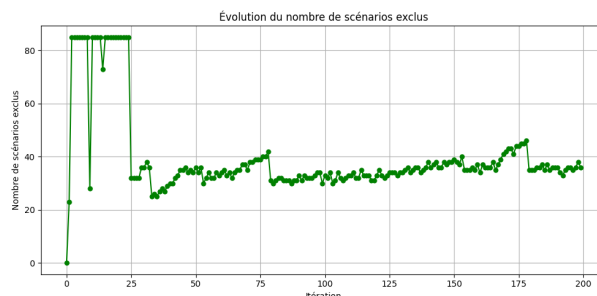


FIGURE 4.3 – Evolution du nombres de scenarios exclu

D’autre part, la structure du portefeuille optimisé reflète une allocation parcimonieuse avec seulement *59 actifs significatifs* (c’est-à-dire ayant une allocation supérieure à 2%), favorisant

une gestion ciblée tout en assurant une diversification satisfaisante ( $HHI = 0,0153$ ). L'analyse de la distribution empirique des rendements montre un portefeuille performant, avec un rendement moyen élevé de 1.062414, un risque faible (écart-type de 0.049474) et un *ratio de Sharpe remarquable* de 15,22, soulignant un excellent compromis rendement/risque.

### 4.3 Analyse comparative des approches Benders, CVaR et directe

L'objectif de cette étude est d'évaluer les performances de l'approche GBD appliquée à un problème d'optimisation de portefeuille sous contrainte de chance, en la comparant à deux approches de référence : l'approximation par la CVaR (voir Section 3.5 et la résolution directe à l'aide d'un solveur. L'analyse est menée sur plusieurs instances simulées du problème test CCPP, en faisant varier le nombre d'actifs  $n$ , le nombre de scénarios  $S$ , ainsi que le seuil de tolérance au risque  $\alpha$ . L'évaluation porte sur quatre dimensions :

- l'efficacité computationnelle,
- la performance absolue (rendement, risque),
- les caractéristiques structurelles du portefeuille (diversification, concentration),
- et la satisfaction effective de la contrainte de chance.

Les résultats obtenus sont synthétisés dans les Tableaux 4.7 et 4.8.

n	Méthode CVaR				Méthode Benders				Méthode Direct			
	Temps	Objectif	Écart	Rendement	Temps	Objectif	Écart	Rendement	Temps	Objectif	Écart	Rendement
50	500	0,0790	-0,548 529	0,000 420	1,097 568	2,003	-0,548 949	<b>0,000000</b>	1,098 711	0,0419	-0,548 949	1,098 711
	800	0,1886	-0,549 216	0,000 848	1,099 012	3,062	-0,549 815	<b>0,000249</b>	1,100 376	0,3929	-0,550 064	1,101 570
	1200	0,0451	-0,548 106	0,001 155	1,096 634	3,964	-0,548 969	<b>0,000292</b>	1,096 768	0,4682	-0,549 261	1,099 391
	1500	0,0952	-0,548 541	0,001 345	1,097 510	4,895	-0,548 961	<b>0,000925</b>	1,098 203	0,7319	-0,549 886	1,101 045
200	500	0,3166	-0,550 877	0,000 701	1,102 205	13,743	-0,551 536	<b>0,000042</b>	1,103 918	0,3033	-0,551 578	1,104 107
	800	0,7165	-0,549 931	0,000 187	1,100 319	19,100	-0,550 112	<b>0,000006</b>	1,100 773	0,5318	-0,550 119	1,100 851
	1200	0,3370	-0,550 347	0,000 711	1,101 182	24,824	-0,550 882	<b>0,000176</b>	1,102 593	0,9599	-0,551 058	1,103 672
	1500	0,3059	-0,550 014	0,000 007	1,100 417	21,065	-0,550 051	<b>0,000030</b>	1,100 420	0,5375	-0,550 021	1,100 445
400	500	0,7813	-0,551 666	0,000 248	1,103 802	37,994	-0,551 903	<b>0,000011</b>	1,104 759	0,9335	-0,551 914	1,104 861
	800	1,4716	-0,550 906	0,000 125	1,102 268	49,389	-0,551 015	<b>0,000016</b>	1,102 517	0,8582	-0,551 031	1,102 811
	1200	3,2943	-0,550 798	0,000 141	1,101 963	69,272	-0,550 945	<b>0,000006</b>	1,102 102	0,8826	-0,550 939	1,102 488
	1500	4,7319	-0,550 513	0,000 153	1,101 436	67,008	-0,550 641	<b>0,000025</b>	1,101 538	0,8036	-0,550 666	1,102 082
600	500	1,1902	-0,552 231	0,000 065	1,104 930	75,048	-0,552 296	<b>0,000000</b>	1,105 327	0,6291	-0,552 296	1,105 343
	800	2,7221	-0,551 746	0,000 000	1,103 910	70,591	-0,551 795	<b>0,000049</b>	1,104 106	0,6355	-0,551 746	1,103 910
	1200	4,9156	-0,551 730	0,000 059	1,103 949	94,083	-0,551 788	<b>0,000001</b>	1,104 266	1,1276	-0,551 789	1,104 295
	800	2,1056	-0,552 242	0,000 035	1,104 936	89,033	-0,552 297	<b>0,000020</b>	1,105 126	0,5782	-0,552 277	1,105 062
800	800	3,6158	-0,552 039	0,000 197	1,104 513	107,539	-0,552 224	<b>0,000012</b>	1,105 196	1,5844	-0,552 236	1,105 311
	1200					173,665	-0,551 755	<b>0,000011</b>	1,104 261	3,8292	-0,551 766	1,104 431

**Note :**

résultats pour  $\alpha = 0.1$

Écart = Écart absolu entre la valeur objectif de Benders, CVaR et Dirrect

Temps en secondes

TABLE 4.7 – Comparaison des méthodes d'optimisation avec  $\alpha = 0.1$

n	Méthode CVaR				Méthode Benders				Méthode Direct			
	Temps	Objectif	Écart	Rendement	Temps	Objectif	Écart	Rendement	Temps	Objectif	Écart	Rendement
50	500	0,0753	-0,548 384	0,000 878	1,097 204	1,934	-0,549 183	<b>0,000079</b>	1,099 044	0,0281	-0,549 262	1,099 408
	800	0,1300	-0,548 524	0,008 82	1,097 530	2,918	-0,549 202	<b>0,000204</b>	1,098 473	0,4032	-0,549 406	1,100 087
	1200	0,0444	-0,549 017	0,000 462	1,098 547	4,028	-0,549 466	<b>0,000013</b>	1,099 388	0,1052	-0,549 479	1,099 712
200	500	0,0438	-0,548 182	0,000 953	1,096 822	4,545	-0,548 820	<b>0,000315</b>	1,097 539	0,5843	-0,549 135	1,099 605
	800	0,2105	-0,550 492	0,000 405	1,101 461	8,693	-0,550 850	<b>0,000048</b>	1,102 662	0,2691	-0,550 898	1,103 086
	1200	0,4121	-0,550 156	0,000 141	1,100 786	12,668	-0,550 257	<b>0,000040</b>	1,101 011	0,3008	-0,550 297	1,101 419
400	500	0,1814	-0,550 326	0,000 070	1,101 104	15,825	-0,550 393	<b>0,000003</b>	1,101 344	0,2952	-0,550 396	1,101 369
	800	0,2312	-0,549 550	0,000 282	1,099 490	18,588	-0,549 777	<b>0,000055</b>	1,100 174	0,3635	-0,549 832	1,100 573
	1200	0,5403	-0,551 328	0,000 073	1,103 276	25,561	-0,551 398	<b>0,000003</b>	1,103 625	0,3253	-0,551 401	1,103 728
600	500	0,8959	-0,550 604	0,000 111	1,101 602	33,624	-0,550 715	<b>0,000000</b>	1,102 066	0,5923	-0,550 715	1,102 064
	800	2,7564	-0,550 640	0,000 107	1,101 675	45,835	-0,550 742	<b>0,000005</b>	1,102 074	0,8048	-0,550 747	1,102 097
	1200	4,2638	-0,550 137	0,000 219	1,100 632	62,076	-0,550 322	<b>0,000034</b>	1,101 006	0,8138	-0,550 355	1,101 402
800	500	1,2872	-0,551 508	0,000 000	1,103 558	59,143	-0,551 535	<b>0,000027</b>	1,103 724	0,4689	-0,551 508	1,103 558
	800	2,1997	-0,551 508	0,000 000	1,103 467	67,814	-0,551 535	<b>0,000027</b>	1,103 722	0,6126	-0,551 508	1,103 467
	1200	4,0952	-0,551 358	0,000 062	1,103 073	64,561	-0,551 421	<b>0,000001</b>	1,103 079	1,1323	-0,551 420	1,103 339
1200	500	2,1208	-0,552 107	0,000 000	1,104 731	91,581	-0,552 151	<b>0,000044</b>	1,104 950	0,5553	-0,552 107	1,104 732
	800	3,8102	-0,552 169	0,000 304	1,104 976	108,997	-0,552 374	<b>0,000099</b>	1,105 607	2,3118	-0,552 473	1,106 107
	1200					139,292	-0,551 458	<b>0,000027</b>	1,103 276	1,4045	-0,551 431	1,103 265

**Note :**  
 Écart = |Objectif méthode - Objectif Direct|  
 Temps en secondes  
 Données pour :  $\alpha = 0.05$

TABLE 4.8 – Comparaison des méthodes d'optimisation avec ( $\alpha = 0.05$ )

### 4.3.1 Analyse comparative des Performances algorithmique

L'analyse des temps de résolution met en lumière plusieurs enseignements :

- **Méthode CVaR** : Elle présente des temps de calcul généralement faibles et une structure algorithmique simple, ce qui la rend opérationnellement efficace pour des tailles modérées. Toutefois, lorsque le nombre de scénarios dépasse un certain seuil (environ 2000 dans notre cas), des limitations techniques liées à la licence du solveur utilisé compromettent sa capacité à traiter des instances plus volumineuses, ce qui restreint sa scalabilité effective dans notre environnement expérimental.
- **Méthode Benders** : Notre méthode, basée sur la décomposition généralisée de Benders, présente un coût de calcul plus élevé pour les tailles modérées, mais elle demeure bien scalable. Son architecture en deux niveaux problème maître et sous-problèmes permet de gérer efficacement la complexité disjonctive du modèle. Notamment, pour des instances de très grande taille (au-delà de 2000 scénarios), la méthode montre une convergence stable et produit des solutions de qualité, confirmant ainsi sa robustesse algorithmique face à l'augmentation de la dimension du problème.
- **Méthode directe** : En résolvant le problème d'optimisation de bout en bout, sans décomposition, cette approche tire parti des capacités de Gurobi. Elle obtient les meilleurs temps de calcul sur les petites et moyennes instances. Cependant, son utilisation devient problématique pour les très grandes tailles ( $n = 50, S = 2000$ ), où des erreurs de mémoire et des limitations de licence apparaissent.
- L'influence du niveau de confiance  $\alpha$  sur les performances de résolution Figure (4.4). En effet, lorsque  $\alpha = 0,05$ , la contrainte de chance devient plus stricte, ce qui augmente significativement le temps de calcul. En revanche, pour  $\alpha = 0,10$ , la contrainte est moins contraignante, ce qui réduit notablement les temps de résolution par rapport au cas précédent.

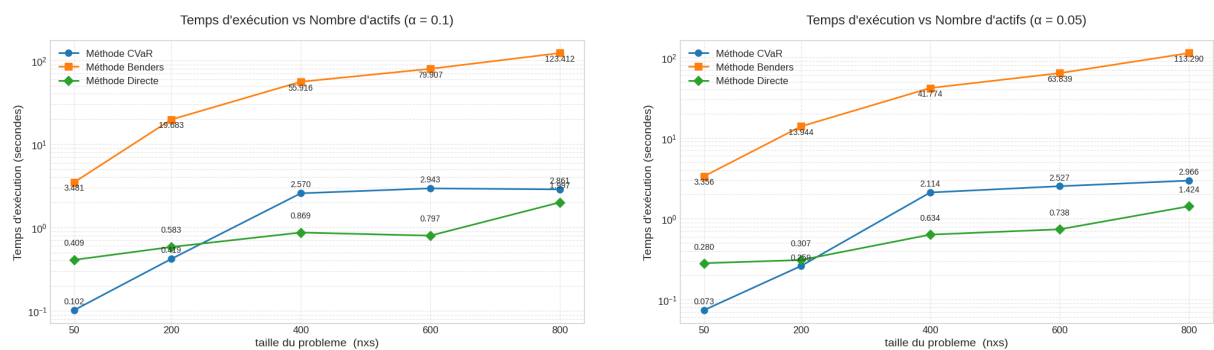


FIGURE 4.4 – Comparaison des temps d'exécution des méthodes en fonction du nombre d'actifs

Sur le plan algorithmique, la méthode directe s'illustre par sa grande rapidité sur les instances de petite à moyenne taille, tout en garantissant des solutions exactes. De son côté, l'approche

CVaR bénéficie d'une structure convexe particulièrement efficace, offrant également de très bons temps de calcul dans ces mêmes cas, bien qu'elle soit globalement moins robuste, notamment en termes de précision et de maîtrise du risque. En revanche, elle montre ses limites dès que les instances grandissent.

À l'opposé, la méthode de décomposition généralisée de Benders fait preuve d'une scalabilité remarquable : un peu plus lente, certes, mais capable de traiter avec succès des problèmes de très grande dimension tout en conservant l'exactitude propre à la méthode directe voir Figure (4.5). De plus, en termes de qualité de résultats (valeur objectif, respect des contraintes), Benders se rapproche fortement de la méthode directe. Ce juste équilibre entre performance algorithmique, rigueur financière et capacité à gérer de larges volumes motive pleinement son choix dans le cadre de ce mémoire.

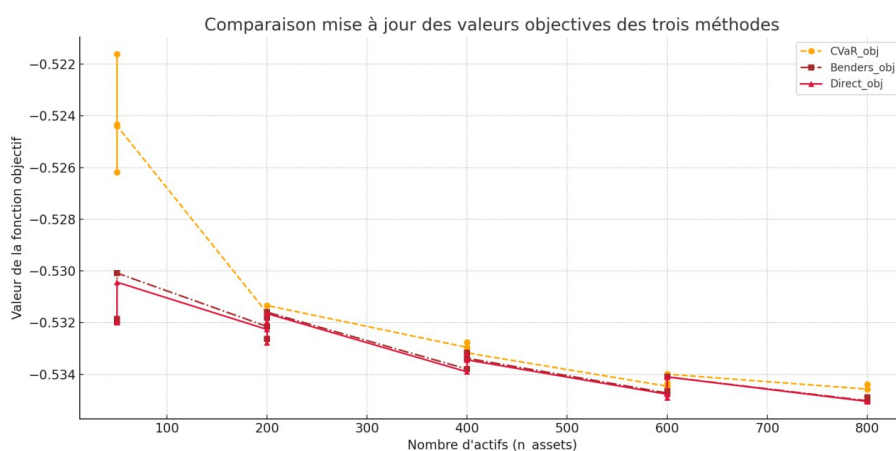


FIGURE 4.5 – Écarts relatifs des objectifs

### 4.3.2 Analyse comparative des performances financières

L'évaluation financière repose sur les indicateurs suivant : le rendement moyen, le risque, et la probabilité de satisfaction de la contrainte de chance ainsi que le nombre d'actifs sélectionnées.

**Rendement :** Les trois méthodes délivrent des rendements moyens similaires. Par exemple, pour l'instance  $n = 50$ ,  $S = 500$ , on observe un rendement de l'ordre de 1.099 pour le portefeuille de obtenu avec GBD et direct, et un rendement légèrement faible pour le portefeuille obtenu par l'approche CVaR 1,097. La méthode Benders tend toutefois à générer des portefeuilles plus rentables que CVaR Figure 4.6, avec une performance proche de la méthode directe.

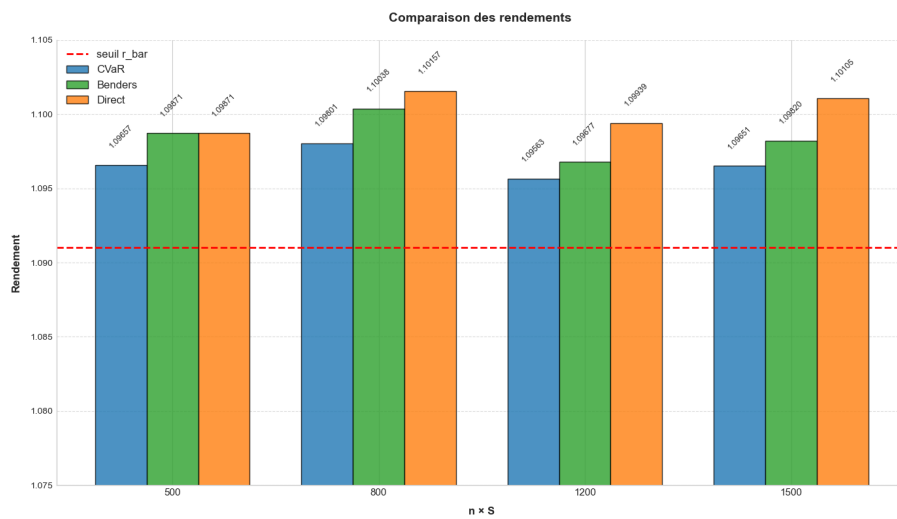


FIGURE 4.6 – Comparaison des rendements des mportefeuilles : CVaR, Benders et Directe

**Comparaison des niveaux de risque :** L’analyse des résultats expérimentaux met en évidence des différences notables entre les trois approches en termes de contrôle du risque. Pour les instances de petite et moyenne taille, la méthode CVaR fournit systématiquement les portefeuilles les moins risqués, devançant à la fois Benders et la méthode directe. Cette dernière présente généralement les niveaux de risque les plus élevés, en particulier lorsque le nombre de scénarios augmente.

En revanche, pour les grandes tailles de problèmes, la méthode de Benders tend à surpasser CVaR, offrant une meilleure maîtrise du risque grâce à sa modélisation exacte des contraintes de chance. Ainsi, Benders s’impose comme une méthode robuste et efficace pour les applications de grande échelle, tandis que CVaR reste plus adaptée aux problèmes de taille modérée. Les résultats détaillés sont synthétisés dans la Figure (4.7).

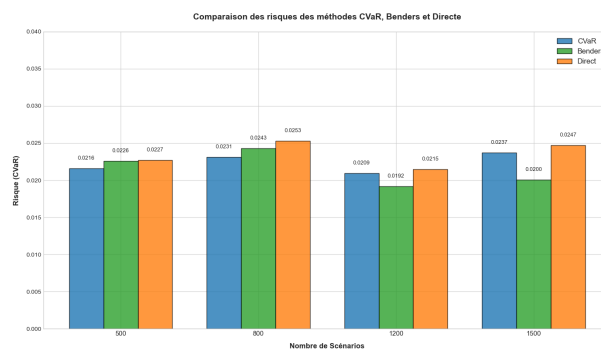


FIGURE 4.7 – Comparaison des risques des portefeuilles : CVaR, Benders et Directe

**Respect de la contrainte de chance :** Les trois méthodes respectent les contraintes de probabilité imposées ( $1 - \alpha$ ), fixées dans la majorité des cas à 0.9 ou 0.95. La méthode directe atteint parfois des niveaux supérieurs (jusqu’à 0.99), indiquant une sur-couverture des pertes potentielles. Benders offre un respect strict et contrôlé, ce qui confirme la rigueur de sa modélisation

probabiliste.

**Comparaison des stratégies de diversification : CVaR vs. Benders :** L'analyse des résultats révèle des différences significatives entre les portefeuilles générés par le CVaR et ceux obtenus via la méthode Benders, tant en termes de concentration que de diversification.

CVaR conduit systématiquement à des portefeuilles plus concentrés, caractérisés par une répartition des investissements resserrée sur un nombre réduit d'actifs, comprenant entre 32 et 120 actifs selon les instances étudiées. Cette concentration reflète une logique de minimisation du risque extrême, où l'approche convexe favorise une sélection restrictive d'actifs perçus comme les plus sûrs ou les moins corrélés aux scénarios défavorables. Bien que cette stratégie puisse réduire l'exposition aux pertes sévères, elle limite mécaniquement la diversification, ce qui peut augmenter la vulnérabilité du portefeuille à des risques idiosyncratiques.

Alignement avec la méthode exacte à l'inverse, la méthode Benders produit des portefeuilles plus diversifiés, incluant entre 35 et 123 actifs, soit une gamme légèrement plus large que celle du CVaR. Surtout, cette diversification correspond étroitement à celle obtenue par la méthode directe (dont les portefeuilles varient entre 33 et 123 actifs), confirmant que Benders préserve une répartition optimale des actifs sans sacrifier la robustesse. Cette tendance s'explique par la capacité de Benders à intégrer rigoureusement les contraintes de chance, traduisant fidèlement la volonté de l'investisseur de maximiser la probabilité d'atteindre un rendement cible, tout en équilibrant le risque.

### 4.3.3 Discussion

Les résultats confirment que la méthode de décomposition généralisée de Benders constitue un excellent compromis entre rigueur théorique, flexibilité numérique et performance financière. Contrairement à la méthode CVaR, qui repose sur une approximation convexifiée du problème, l'approche Benders permet une prise en compte explicite de la nature disjonctive de la contrainte de chance, à l'aide d'une reformulation mixte-entière.

En termes de temps d'exécution et de scalabilité, notamment pour des instances de grande taille ( $n > 800$ ,  $S > 1500$ ), les approches classiques basées sur l'approximation CVaR ou la résolution directe rencontrent d'importantes limitations computationnelles, liées aux capacités du solveur et à la gestion de la mémoire. À l'inverse, la méthode de décomposition de Benders généralisée, bien que plus lente, parvient à résoudre ces instances avec succès, en maintenant des performances satisfaisantes en termes de qualité de solution et de respect des contraintes.

Ainsi, la méthode Benders se révèle être une solution robuste et rigoureuse, particulièrement adaptée aux problématiques de gestion d'actifs réels de grande dimension où l'investisseur souhaite garantir, de manière explicite, que la probabilité d'atteindre un rendement supérieur à un seuil donné dépasse une tolérance fixée. Contrairement au CVaR, qui repose sur une approximation convexe de cette condition, Benders permet une traduction exacte de l'objectif du décideur à travers la contrainte de chance, préservant ainsi la nature probabiliste du problème. Cette précision fait de la méthode Benders un modèle de référence pour la planification d'investissement

sous incertitude, là où d'autres approches nécessitent des relaxations.

## Conclusion

Ce chapitre a permis de passer de la formulation théorique à l'application numérique concrète des différentes approches d'optimisation de portefeuille étudiées. Après avoir présenté les outils, les paramètres et les données simulées nécessaires à l'expérimentation, nous avons implémenté la méthode de décomposition de Benders généralisée avec la méthode basée sur la CVaR. Une analyse comparative a été menée avec l'approche directe .

Les résultats obtenus mettent en évidence les forces et limites de chaque méthode, selon la taille du problème et les exigences en matière de gestion du risque. La méthode de Benders se distingue par sa capacité à traiter des problèmes de grande taille, tandis que la CVaR reste plus performante pour des instances de taille modérée. L'analyse des performances financières complète cette étude en offrant une vision plus opérationnelle de l'efficacité des portefeuilles générés.

Cette étude expérimentale constitue ainsi un lien essentiel entre la modélisation mathématique et les applications pratiques, en offrant des éléments d'aide à la décision pour la gestion de portefeuilles sous incertitude.

# Conclusion générale

Ce mémoire s'inscrit dans le cadre de la gestion de portefeuille sous incertitude, en particulier dans le contexte de l'optimisation sous contrainte de chance appliquée à la Value-at-Risk (VaR). Notre objectif principal était d'analyser, modéliser et résoudre un problème de portefeuille financier en prenant en compte le risque de manière probabiliste, tout en comparant différentes approches numériques pour en évaluer la pertinence.

Nous avons proposé une modélisation rigoureuse du problème de gestion de portefeuille avec contrainte de chance, en partant du modèle classique de Markowitz, enrichi par une contrainte probabiliste sur le rendement minimal souhaité. Ce problème a été formulé sous forme de programme quadratique en nombres entiers mixtes, puis résolu selon trois approches principales :

- (i) Une méthode de décomposition de Benders généralisée,
- (ii) Une approximation par la CVaR,
- (iii) Une résolution directe via un solveur.

L'analyse numérique approfondie a montré que la méthode de décomposition de Benders présente une convergence rapide et une capacité de traitement efficace même pour de grandes dimensions, tout en fournissant des portefeuilles à risque maîtrisé. En comparaison, l'approche par CVaR s'est révélée plus conservatrice, engendrant un risque plus élevé en contrepartie d'une meilleure maîtrise des pertes extrêmes. Quant à la résolution directe, elle a produit des résultats similaires à Benders, mais au prix d'un coût computationnel nettement plus élevé pour des instances complexes.

La problématique centrale portait sur la manière de formuler et de résoudre efficacement un problème d'optimisation de portefeuille intégrant une contrainte de chance, tout en respectant les exigences de robustesse et de performance. Les méthodes étudiées ont permis de répondre à cette question sous différents angles, en mettant en évidence les compromis entre précision, complexité algorithmique et qualité de solution. Notre étude a confirmé que la décomposition de Benders constitue une méthode pertinente et équilibrée, capable d'offrir à la fois robustesse, performance financière et scalabilité.

Les résultats obtenus ont des implications pratiques importantes pour les institutions financières, les gestionnaires d'actifs et les analystes quantitatifs. En intégrant une contrainte de chance sur la VaR, le modèle permet de réduire le risque de pertes extrêmes tout en maintenant un niveau de rendement satisfaisant. La mise en œuvre de la méthode de décomposition, notamment dans des environnements de type Python + Gurobi, démontre la faisabilité concrète

---

d'utiliser de telles approches dans des systèmes de gestion d'actifs réels, notamment dans des contextes soumis à forte incertitude.

Sur le plan théorique, ce travail contribue à la compréhension de l'articulation entre modélisation stochastique, programmation quadratique mixte et méthodes de décomposition dans le cadre des contraintes probabilistes. Il met en évidence les forces et limites des approximations classiques comme la CVaR, tout en soulignant l'intérêt d'approches plus exactes et modulaires, comme la décomposition de Benders, dans des problèmes complexes.

Ce mémoire comporte néanmoins certaines limites. Tout d'abord, nous avons supposé que les rendements des actifs suivaient une distribution discrète à support fini, simulée artificiellement, ce qui peut ne pas refléter parfaitement les dynamiques réelles du marché. De plus, notre modèle ne prend pas en compte les frais de transaction, les contraintes de liquidité ni les limitations de cardinalité, qui sont pourtant essentiels en gestion pratique de portefeuille. Enfin, la méthode de Benders, bien qu'efficace, reste dépendante de certains paramètres algorithmiques (tels que les tolérances, le choix des coupes, etc.) dont l'optimisation mériterait une étude dédiée.

Plusieurs pistes s'offrent pour approfondir ce travail. D'une part, il serait pertinent d'intégrer des contraintes de cardinalité, des frais fixes ou proportionnels, et des asymétries dans les rendements pour rendre le modèle plus réaliste. D'autre part, l'application du modèle à des données réelles de marché sur de longues périodes permettrait d'évaluer sa robustesse en conditions réelles. Par ailleurs, le développement d'une version parallèle ou décentralisée de la méthode de Benders pourrait améliorer davantage la scalabilité. Enfin, l'utilisation d'approches d'apprentissage automatique pour prédire les rendements ou ajuster dynamiquement les contraintes probabilistes constituerait une extension innovante.

En définitive, ce mémoire montre qu'il est possible d'allier rigueur théorique, efficacité algorithmique et pertinence pratique dans la résolution de problèmes d'optimisation de portefeuille avec incertitude. L'approche de décomposition appliquée aux contraintes de chance offre une alternative puissante aux approximations classiques, en particulier dans un contexte où le respect des seuils de risque est crucial. Cette recherche constitue une étape importante vers des modèles plus adaptatifs, robustes et applicables au monde financier, tout en ouvrant la voie à de nombreuses extensions futures.

# Bibliographie

- [1] AGOUNE, L., AND BOUDJELDA, S. Méthode directe de support pour l'optimisation multi-objectifs d'un portefeuille financier. Mémoire de master, Université Abderrahmane Mira de Béjaïa, Algérie, 2017.
- [2] AHMED, S. Convexity and decomposition of mean-risk stochastic programs. *Mathematical Programming* 106, 1 (2006), 433–446.
- [3] BARNHART, C., JOHNSON, E. L., NEMHAUSER, G. L., SAVELSBERGH, M. W. P., AND VANCE, P. H. Branch-and-price : Column generation for solving huge integer programs. *Operations Research* 46, 3 (1998), 316–329.
- [4] BEN SALAH, H. *Gestion des actifs financiers : de l'approche classique à la modélisation non paramétrique en estimation du downside risk pour la constitution d'un portefeuille efficient*. Thèse de doctorat en sciences économiques et gestion, Université Lyon 1 et Université Tunis 1, 2015. Soumise le 11 décembre 2015, consultée le 8 avril 2025.
- [5] BEN-TAL, A., AND NEMIROVSKI, A. Robust optimization of large-scale systems. *Operations Research* 50 (2000), 1–38.
- [6] BENDERS, J. F. Partitioning procedures for solving mixed-variables programming problems. *Numerische Mathematik* 4 (1962), 238–252.
- [7] BIRGE, J. R., AND LOUVEAUX, F. *Introduction to Stochastic Programming*. Springer-Verlag, New York, 1997.
- [8] BONAMI, P., AND LEJEUNE, M. A. An exact solution approach for portfolio optimization problems under stochastic and integer constraints. *Operations Research* 57, 3 (2009), 650–670.
- [9] BOYD, S., AND VANDENBERGHE, L. *Convex Optimization*. Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- [10] CALAFIORE, G. C., AND CAMPI, M. C. The scenario approach to robust control design. *IEEE Transactions on Automatic Control* 51, 5 (2006), 742–753.
- [11] CAMPI, M. C., AND GARATTI, S. The exact feasibility of randomized solutions of uncertain convex programs. *SIAM Journal on Optimization* 19, 3 (2008), 1211–1230.
- [12] CAMPI, M. C., AND GARATTI, S. Sampling and optimization : A randomized approach to control and uncertain systems. *Foundations and Trends in Systems and Control* 1, 1 (2011), 1–133.
- [13] CAMPI, M. C., AND GOULART, P. Scenario-based approximations for robust optimization. *Mathematical Programming* 182, 1 (2020), 139–174.
- [14] CENTRALCHARTS. Théorie du portefeuille selon markowitz, 2023. Consulté le 9 avril 2025.

- [15] CESARONE, F., SCOZZARI, A., AND TARDELLA, F. Cardinality-constrained portfolio optimization via benders decomposition. *Computational Management Science* 17 (2020), 1–28.
- [16] CHARNES, A., AND COOPER, W. Chance-constrained programming. *Management Science* 6, 1 (1959), 73–79.
- [17] CHEN, X., AND LIN, G. CVaR-based formulation and approximation method for stochastic variational inequalities. *Mathematical Methods of Operations Research* 73, 3 (2011), 345–362.
- [18] CHERUKURI, A. Sample average approximation of conditional value-at-risk based variational inequalities. *arXiv preprint arXiv :2208.11403* (2022). Available at <https://arxiv.org/abs/2208.11403>.
- [19] DANTZIG, G. B., AND WOLFE, P. Decomposition principle for linear programs. *Operations Research* 8, 1 (1960), 101–111.
- [20] DELAGE, E., AND YE, Y. Distributionally robust optimization under moment uncertainty with application to data-driven problems. *Operations Research* 58, 3 (2010), 595–612.
- [21] DENTCHEVA, D., AND RUSZCZYŃSKI, A. Optimization with stochastic dominance constraints. *SIAM Journal on Optimization* 14, 2 (2003), 548–566.
- [22] FARBER, A., LAURENT, M.-P., AND OSTERLINCK, K. *Finance du marché*, 2 ed. Pearson, 2010.
- [23] FASTERCAPITAL. Contraintes et limites de la théorie du portefeuille de markowitz, 2023. Consulté le 8 avril 2025.
- [24] FASTERCAPITAL. Valeur à risque (var) – qu’est-ce que la valeur à risque et comment l’utiliser pour l’analyse des risques d’investissement, 2023. Consulté le 13 avril 2025.
- [25] FINANCE HÉROS. Value at risk (var) : définition, calcul, limites, 2025. Consulté le 9 avril 2025.
- [26] GOH, J., AND SIM, M. Distributionally robust optimization and its tractable approximations. *Operations Research* 58, 4 (2010), 902–917.
- [27] GUASTAROBA, G., AND SPERANZA, M. G. Hybrid benders decomposition for large-scale portfolio optimization. *European Journal of Operational Research* 299 (2022), 1–18.
- [28] GUENOUN, N., AND BAKHALI, F. Z. Optimisation multi-objectif stochastique. Mémoire de master, Université M’hamed Bougara de Boumerdes, Faculté des Sciences, Département de Mathématiques, Boumerdes, Algérie, 2018. Soutenu publiquement le 16 septembre 2018.
- [29] JORION, P. *Value at Risk : The New Benchmark for Managing Financial Risk*, 3 ed. McGraw-Hill, New York, 2007.
- [30] KALL, P., AND MAYER, J. *Stochastic Linear Programming*. Springer, New York, 2005.
- [31] KALL, P., AND WALLACE, S. W. *Stochastic Programming*. Wiley, Chichester, etc., 1994.
- [32] KELLEY, J. E., J. The cutting-plane method for solving convex programs. *SIAM Journal on Applied Mathematics* 8, 4 (1960), 703–712.
- [33] KROKHMAL, P., PALMQUIST, J., AND URYASEV, S. Portfolio optimization with conditional value-at-risk objective and constraints. *Journal of Risk* 4, 2 (2002), 11–27.
- [34] KÜÇÜKYAVUZ, S., AND JIANG, R. Chance-constrained optimization under limited distributional information : A review of reformulations based on sampling and distributional robustness. *International Transactions in Operational Research* 29, 1 (2022), 3–41.

- [35] LAND, A. H., AND DOIG, A. G. An automatic method for solving discrete programming problems. *Econometrica* 28, 3 (1960), 497–520.
- [36] LUEDTKE, J., AND AHMED, S. A sample approximation approach for chance constraints. *SIAM Journal on Optimization, Mathematical Programming* 107, 1-2 (2008), 189–223.
- [37] LUEDTKE, J., AND AHMED, S. Sample average approximation of chance-constrained programs. *SIAM Journal on Optimization* 19, 2 (2008), 674–699.
- [38] LÜBBECKE, M. E., AND DESROSIERS, J. Selected topics in column generation. *Operations Research* 53, 6 (2005), 1007–1023.
- [39] MILLER, L., AND WAGNER, H. Chance-constrained programming with joint constraints. *Operations Research* 13, 6 (1965), 930–945.
- [40] MITCHELL, J. E. *Branch-and-Cut Algorithms for Combinatorial Optimization Problems*. Wiley, New York, 2011.
- [41] NEMIROVSKI, A. Safe tractable approximations of chance constrained programs. *Mathematical Programming, Series B* 112, 1 (2011), 73–98.
- [42] NEMIROVSKI, A., AND SHAPIRO, A. Convex approximations of chance constrained programs. *SIAM Journal on Optimization* 17, 4 (2006), 969–996.
- [43] NEMIROVSKI, A., AND SHAPIRO, A. Convex approximations of chance constrained programs. *SIAM Journal on Optimization* 17 (2007), 969–996.
- [44] OSTERLINCK, K., PIROTTE, H., FARBER, A., AND LAURENT, M.-P. *Finance*. Pearson, France, 2009.
- [45] PRÉKOPA, A. On probabilistic constrained programming. In *Proceedings of the Princeton Symposium on Mathematical Programming* (Princeton, NJ, 1970), vol. 113, p. 138.
- [46] PRÉKOPA, A. *Stochastic Programming*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1995.
- [47] ROCKAFELLAR, R. T., AND URYASEV, S. Optimization of conditional value-at-risk. *Journal of Risk* 2, 3 (2000), 21–41.
- [48] SHAPIRO, A., DENTCHEVA, D., AND RUSZCZYŃSKI, A. *Lectures on Stochastic Programming : Modeling and Theory*. SIAM, Philadelphia, 2009.
- [49] SHAPIRO, A., DENTCHEVA, D., AND RUSZCZYŃSKI, A. *Lectures on Stochastic Programming : Modeling and Theory*. SIAM, 2009.
- [50] SHAPIRO, A., DENTCHEVA, D., AND RUSZCZYŃSKI, A. *Lectures on Stochastic Programming : Modeling and Theory*, 2 ed., vol. 16 of *MOS-SIAM Series on Optimization*. SIAM, Philadelphia, 2014.
- [51] SHAPIRO, A., AND NEMIROVSKI, A. On complexity of stochastic programming problems. *Mathematical Programming* 108, 1 (2004), 1–14.
- [52] SYDOR, T. La value at risk. Mémoire de master, HEC Paris, 2007. Promotion 2007.
- [53] VAN ACKOOIJ, W., FRANGIONI, A., AND DE OLIVEIRA, W. Inexact stabilized benders’ decomposition approaches with application to chance-constrained problems with finite support. *Computational Optimization and Applications* 65, 3 (2016), 637–669.
- [54] XINGMEI, L., ZHIMING, Z., AND QIUHONG, Z. Benders decomposition algorithm for multi-project portfolio selection. *Systems Engineering – Theory & Practice* 38, 11 (2018), 2863–2873.

- 
- [55] YAMOUT, G. M., HATFIELD, K., AND ELSAYED, E. A. Comparison of robust optimization approaches for portfolio selection. *Journal of Risk Finance* 8, 1 (2007), 69–83.
- [56] ZYMLER, S., KUHN, D., AND RUSTEM, B. Tractable approximations of distributionally robust chance constraints. *Operations Research* 61 (2013), 899–913.

# Résumé

Ce mémoire s'inscrit dans le domaine de la gestion de portefeuille sous incertitude, en mettant l'accent sur l'intégration d'une contrainte de chance appliquée à la Value-at-Risk (VaR), critère de risque largement utilisé en finance. L'objectif principal est de construire un portefeuille optimal dont le rendement dépasse un seuil prédéfini avec une probabilité minimale donnée, tout en assurant un bon compromis entre rendement et risque.

La contribution centrale de ce travail repose sur l'utilisation d'une méthode de décomposition de Benders généralisée pour résoudre efficacement le problème d'optimisation quadratique en nombres entiers mixtes (MIQP) qui en résulte. Cette approche permet de traiter séparément les variables binaires de sélection d'actifs et les contraintes stochastiques issues des scénarios de rendement, en alternant entre un problème maître (PM) et un sous-problème (SP), ce qui améliore la scalabilité et la convergence.

L'algorithme démontre une efficacité algorithmique remarquable, convergeant vers la solution optimale en un nombre fini d'itérations, avec des temps de calcul raisonnables y compris pour des instances de grande taille. Le portefeuille obtenu présente une structure robuste, un rendement élevé, un risque modéré et satisfait rigoureusement la contrainte de chance. Ces résultats confirment l'adéquation de la décomposition de Benders pour la résolution exacte de problèmes d'optimisation stochastique à grande échelle.

À des fins de comparaison, deux autres méthodes ont également été implémentées : une approximation par la CVaR, plus simple mais conservatrice, et une résolution directe, plus coûteuse en temps. Ces comparaisons renforcent la pertinence de Benders comme solution équilibrée entre exactitude, performance et efficacité.

Mots-clés : Problème de gestion de portefeuille, Valeur à Risque (VaR), Approche Chance-Constrained, Programmation Quadratique Mixte en nombres Entiers, Décomposition de Benders.

# Abstract

This thesis addresses portfolio management under uncertainty, focusing on integrating a chance constraint applied to Value-at-Risk (VaR) a widely used risk measure in finance. The primary objective is to construct an optimal portfolio whose return exceeds a predefined threshold with a given minimum probability, while ensuring a balanced trade-off between return and risk.

The core contribution of this work lies in employing a generalized Benders decomposition method to efficiently solve the resulting mixed-integer quadratic programming (MIQP) problem. This approach separately handles binary asset selection variables and stochastic constraints from return scenarios by alternating between a master problem (MP) and a subproblem (SP), enhancing scalability and convergence.

The algorithm demonstrates remarkable computational efficiency, converging to the exact optimal solution in a finite number of iterations, with reasonable computing times even for large-scale instances. The resulting portfolio exhibits a robust structure, delivers high returns, maintains moderate risk, and rigorously satisfies the chance constraint. These results confirm the suitability of Benders decomposition for solving large-scale stochastic optimization problems to exact optimality.

For comparison, two alternative methods were implemented : a simpler but conservative CVaR approximation, and a direct approach requiring greater computational effort. These comparisons reinforce Benders decomposition as a balanced solution between accuracy, performance, and efficiency.

Keywords : portfolio Selection Problem, Value-at-Risk (VaR), Chance-Constrained Approach, Mixed Integer Quadratic Problem, Benders Decomposition.