

République Algérienne Démocratique et Populaire
Université Abderrahmane MIRA de Béjaïa
Faculté des Sciences Exactes

Département de Recherche Opérationnelle



Mémoire Présenté pour L'obtention du Diplôme de Master
en Mathématiques Appliquées

Spécialité : Mathématiques financières

**Formule de Kirk en pratique : Couverture du Risque de Marge
chez Cevital**

Présenté par :
Charif Ilham
Gherbi Amina

Sous la direction de : Dr B. Takhedmit
Et de : Dr F. Cheurfa

Défendu le 29/06/2025, devant le jury composé de :

M ^r K. Abbas	Professeur	Président de jury	UAMB - Bejaia.
M ^r M. Soufit	M.C. classe/ B	Examineur	UAMB - Bejaia.
M ^r M. Soukane	Doctorant	Examineur	UAMB - Bejaia
M ^{elle} A. Cherchour	Doctorante	Examineur	UAMB - Bejaia

Année Universitaire 2024 – 2025

Remerciements

Toute notre gratitude, grâce et remerciement vont à **Allah**, le Plus Puissant, qui nous a donné la force, le courage et la volonté pour mener à bien ce modeste travail.

À **nos parents**, ces âmes courageuses dont les prières silencieuses et les sacrifices discrets nous accompagnent comme une armure invisible. Aucun mot ne suffira jamais à traduire ce que nous leur devons.

À **nos frères et sœurs**, pour leur affection sincère, leur soutien constant et leur présence réconfortante dans les moments les plus intenses de ce parcours.

À **nos amies**, ces cœurs choisis, qui ont su écouter nos doutes, relire nos pages, et croire en nous même lorsque nous doutions de nous-mêmes. Merci d'avoir été là.

À **nos enseignants**, passeurs de savoirs mais surtout éveilleurs d'esprits, qui nous ont appris que comprendre, c'est aussi savoir douter, chercher, et recommencer.

C'est avec une profonde reconnaissance et une considération particulière que nous remercions notre promotrice, **Madame Takhedmit Baya**, pour la sollicitude avec laquelle elle a suivi et guidé ce travail.

Nous adressons également nos sincères remerciements à **Monsieur Cheurfa Fateh**, notre co-encadrant, pour ses conseils pertinents, sa disponibilité et son accompagnement tout au long de cette démarche.

Nous tenons à exprimer notre profonde gratitude aux **membres du jury** de notre soutenance pour leur temps, leurs conseils et leurs remarques précieuses.

Merci aussi à tous les membres du **Recherche Opérationnelle** pour leurs soutiens et leurs aides tout au long de notre parcours.

Nous tenons à remercier tout spécialement **le groupe Cevital**, et plus particulièrement **la direction des Finances et Comptabilité**, pour nous avoir accueillis au sein de leur équipe et mis à notre disposition les données opérationnelles essentielles à notre étude. Merci à **Monsieur Yacine Brahmi** et **Madame Fahima Idrissou** pour leur accueil chaleureux, leur grande disponibilité et la qualité de leurs explications techniques, dont les conseils avisés et le soutien constant ont grandement facilité la conduite de ce travail.

Enfin, à tous ceux qui, de près ou de loin, ont laissé une trace dans cette aventure : un mot, un regard, une pause-café, un sourire... Merci. Que ce mémoire vous appartienne un peu.

Table des matières

Remerciments	I
Liste des figures	VI
Liste des algorithmes	VII
Liste des tables	VIII
Introduction générale	1
1 Complexe Cevital	3
Introduction	3
1.1 Présentation et historique de l'entreprise	3
1.2 Organisation de l'entreprise	4
1.3 Organisation de la Direction des Finances et Comptabilité	9
1.3.1 Direction de la Comptabilité Financière	10
1.3.2 Direction du Contrôle de Gestion	10
1.3.3 Direction du Contrôle Interne	10
Conclusion	10
2 Concepts fondamentaux aux modèles financiers	12
Introduction	12
2.1 Notions élémentaires en mathématiques financières	12
2.2 Généralités sur les options	14
2.2.1 Valeur d'une option	14
2.2.2 Déterminants d'une option	16
2.2.3 Prix d'option européenne	17
2.3 Option sur un seul actif	19
2.3.1 Hypothèses du modèle de Black-Scholes	19
2.3.2 Formule du modèle de Black-Scholes	19
2.4 Les grecques	20
2.4.1 Delta	20
2.4.2 Gamma	21
2.4.3 Thêta	22
2.4.4 Rho	22
2.4.5 Vega	23
2.5 Options sur plusieurs actifs	24
2.5.1 Option basket	24
2.5.2 Option asiatique	24
2.5.3 Option d'échange	25

2.5.4	Option sur spread	25
	Conclusion	27
3	Approche appliquée	28
	Introduction	28
3.1	Quelques notions de probabilité et statistiques	28
3.1.1	Lois statistiques	30
3.1.2	Coefficient d'asymétrie	32
3.1.3	Coefficient d'aplatissement	33
3.1.4	Test de normalité	33
3.1.5	Règle des trois sigma	34
3.2	Valeur à risque	35
3.3	Incertitude	36
3.3.1	Types d'incertitudes	36
3.3.2	Méthode de propagation d'incertitude	37
3.4	Analyse de sensibilité	37
3.4.1	Analyse de sensibilité local	37
3.4.2	Analyse de sensibilité global	38
3.5	Estimation des indices de sensibilité	40
3.5.1	Technique de simulation Monte-Carlo	40
3.5.2	Estimation des indices de sobol par la méthode Monte-Carlo	41
	Conclusion	42
4	Application	43
	Introduction	43
4.1	Collecte des données	43
4.2	Modélisation	44
4.2.1	Modèle utilisé : formule de Kirk	44
4.3	Évaluation d'une option Put spread en fonction du strike	48
4.4	Calcul des grecques	49
4.5	Analyse de sensibilité du modèle	51
4.5.1	Analyse de sensibilité globale	51
	Conclusion	57
	Conclusion générale	58
	Bibliographie	61
	Résumé	62

Table des figures

1.1	Organigramme général de Cevital Food	4
1.2	Produit de la direction des boissons.	6
1.3	Sucre.	6
1.4	Huiles végétales conditionnées par Cevital.	7
1.5	Boite de 500g de Smen MEDINA.	8
1.6	Organigramme de la direction finance et comptabilité.	9
2.1	Valeur intrinsèque d'un Call	15
2.2	Valeur intrinsèque d'un Put	15
2.3	Valeur temps d'un Call.	16
2.4	Flux de trésorerie selon le cours sous-jacent	17
2.5	Profit des gains/pertes de l'achat d'un Call.	18
2.6	Profit des gains/pertes de l'achat d'un put.	18
2.7	Évolution du Delta par rapport au sous-jacent $S_0 = 70, \dots, 120; K = 95; T = 0.4; r = 0.05; \sigma = 0.2$	21
2.8	Évolution du Gamma par rapport au sous-jacent $S_0 = 70, \dots, 120; K = 95; T = 0.4; r = 0.05; \sigma = 0.2$	21
2.9	Évolution du Thêta par rapport au sous-jacent $S_0 = 70, \dots, 120; K = 95; T = 0.4; r = 0.05; \sigma = 0.2$	22
2.10	Évolution du Rho par rapport au sous-jacent $S_0 = 70, \dots, 120; K = 95; T = 0.4; r = 0.05; \sigma = 0.2$	23
2.11	Évolution du Vega par rapport au sous-jacent $S_0 = 70, \dots, 120; K = 95; T = 0.4; r = 0.05; \sigma = 0.2$	23
3.1	Courbe de la loi normale.	31
3.2	Densité de la loi Log-normale.	31
3.3	Densité de la loi de Student à deux degrés de liberté.	32
3.4	Distribution d'une loi de probabilité selon le Skewness.	32
3.5	Représentation graphique d'une distribution de probabilité selon le coefficient d'aplatissement.	33
3.6	Illustration de la règle empirique.	35
3.7	Value at Risque.	36
4.1	La distribution des rendements log pour S_1 et S_2	47
4.2	Courbe des prix du put spread en fonction des valeur de K	49
4.3	Sensibilité de P_t par rapport a σ_1, σ_2, ρ et r	50
4.4	Simulation des paramètres incertains selon la loi normale.	53

4.5	Simulation des paramètres incertains selon la loi student.	54
4.6	Loi Normale	55
4.7	Loi de Student	55
4.8	Histogrammes des prix simulés selon différentes lois de perturbation	55
4.9	Indice de Sobol.	56

Liste des Algorithmes

1	Test de normalité des rendements logarithmiques (Jarque-Bera)	47
2	Valorisation d'un Put Spread selon la formule de Kirk (strikes dans un intervalle)	48
3	Calcul symbolique de la prime et des grecques d'un put spread (formule de Kirk)	50
4	Simulation Monte Carlo du prix d'un put spread selon la formule de Kirk	54
5	Sobol par Monte Carlo classique – modèle de Kirk	56

Liste des tableaux

3.1	Exemples des valeurs critiques de test de Jarque Bera	34
4.1	Résultats du test de Jarque-Bera sur les rendements logarithmiques	47
4.2	Valeur actuelle d'un Put Spread selon la formule de Kirk	48
4.3	Sensibilité de l'option Put Spread par rapport aux volatilités, taux d'intérêt et corrélation	51
4.4	Tableau des volatilités calculés	52
4.5	Statistiques du prix simulé du put spread selon différentes lois de perturbation .	55
4.6	Indices de Sobol	57
4.7	Interactions entre paramètres (S_{ij}) significatives	57

Introduction générale

Dans un contexte économique marqué par des incertitudes croissantes et des fluctuations continues des prix, la gestion du risque financier constitue un enjeu stratégique pour les entreprises industrielles. Les variations du prix des matières premières, des taux d'intérêt, ou encore des coûts de production peuvent affecter la rentabilité d'une activité, en particulier lorsque la marge entre le prix de vente d'un produit et son coût de revient devient instable. Pour faire face à ces risques, les instruments financiers dérivés, et notamment les options [16], sont de plus en plus utilisés comme outils de couverture [32]. Sur le plan académique, la valorisation des options financières a donné lieu à une littérature abondante, dominée par le modèle de Black-Scholes, qui offre une approche analytique rigoureuse dans le cas d'options sur un seul actif [3]. Toutefois, de nombreuses situations réelles exigent des modèles plus élaborés, capables de prendre en compte plusieurs variables corrélées. C'est le cas des options sur spread, conçues pour se couvrir contre l'écart entre deux actifs sous-jacents [23].

Lors de notre stage à la Direction Finance et Comptabilité de Cevital, nous avons été confrontées à une question concrète : comment protéger la marge entre le prix de vente du smen 500g et son coût de production, tous deux soumis à des variations incertaines ?

À partir de cette situation réelle, nous avons formulé la problématique suivante : *"Dans quelle mesure une option européenne de type put sur spread, modélisée à l'aide de la formule de Kirk, peut-elle aider une entreprise comme Cevital à évaluer et sécuriser sa marge bénéficiaire en présence d'incertitudes sur les paramètres économique ?"*

Pour répondre à cette problématique, nous avons adopté une méthodologie fondée sur une modélisation mathématique rigoureuse, associée à une analyse statistique appliquée. Les données exploitées proviennent de l'entreprise Cevital et couvrent plusieurs années de prix de vente et de coûts de production du smen 500g. Après avoir estimé les paramètres nécessaires, notamment les volatilités, le taux sans risque et la corrélation entre les actifs, la valorisation de l'option put sur spread a été effectuée à l'aide de la formule de Kirk [18], en testant plusieurs niveaux de prix d'exercice K .

Dans un second temps, une simulation Monte Carlo [6] a été utilisée afin d'introduire une variabilité réaliste sur certains paramètres, ce qui nous a permis d'observer l'effet de ces fluctuations sur le prix de l'option. Une analyse de sensibilité a ensuite été menée, à la fois de manière locale, à travers l'étude des "grecques", et de manière globale, à l'aide des indices de Sobol [28], afin d'identifier les variables les plus influentes ainsi que leurs interactions. Cette approche permet de mieux comprendre le comportement du modèle face à l'incertitude [6] et d'évaluer la fiabilité de l'option comme outil de protection contre une baisse de la marge.

Ce mémoire est structuré en quatre chapitres, chacun apportant une contribution essentielle à la compréhension et à l'application du sujet traité.

Le premier chapitre est consacré à la présentation de l'entreprise Cevital. Il en retrace l'historique, expose son organisation interne et décrit ses principales directions, en mettant en évidence la place stratégique de la Direction des Finances et Comptabilité, cadre dans lequel notre étude a été menée.

Le deuxième chapitre constitue une revue de littérature. Il présente les notions fondamentales en mathématiques financières, les différents types d'actifs et d'instruments financiers, ainsi que les options et leurs caractéristiques. Ce chapitre aborde également le modèle de Black-Scholes, les "grecques", et introduit les options sur deux actifs, notamment l'option put sur spread qui constitue le cœur de notre travail.

Le troisième chapitre traite des méthodes et outils utilisés. Il présente les notions de probabilité, de statistique, la valeur à risque et l'analyse de l'incertitude. Il décrit ensuite les méthodes de propagation d'incertitude, l'analyse de sensibilité locale [31] et globale [19], et s'attarde particulièrement sur la méthode de Monte Carlo ainsi que l'estimation des indices de Sobol [28].

Le quatrième chapitre est dédié à la partie pratique. Il s'appuie sur des données réelles fournies par Cevital pour évaluer une option put sur spread à l'aide de la formule de Kirk. Ce chapitre comporte une analyse du comportement de l'option en fonction du strike, ainsi qu'une double analyse de sensibilité : une analyse locale basée sur les grecques, et une analyse globale effectuée à l'aide de la simulation Monte Carlo et des indices de Sobol. Il se conclut par une discussion des résultats obtenus.

1

Complexe Cevital

Introduction

Ce chapitre est consacré à la présentation de l'entreprise dans laquelle s'est déroulée notre étude. Il s'agit du groupe Cevital, acteur majeur de l'économie algérienne. Une attention particulière sera ensuite portée à la Direction Finance et Comptabilité, dont le rôle est central dans le pilotage financier du groupe, ainsi qu'aux services directement liés à notre étude.

Sommaire

Introduction	3
1.1 Présentation et historique de l'entreprise	3
1.2 Organisation de l'entreprise	4
1.3 Organisation de la Direction des Finances et Comptabilité	9
Conclusion	10

1.1 Présentation et historique de l'entreprise

Cevital est un groupe familial qui s'est bâti sur une histoire, un parcours et des valeurs qui ont fait sa réussite et sa renommée. Première entreprise privée algérienne à avoir investi dans des secteurs d'activités diversifiés, elle a traversé d'importantes étapes historiques pour atteindre sa taille et sa notoriété actuelle.

Fondé en 1998 par Issad Rebrab, le Groupe Cevital est un conglomérat privé algérien basé à Béjaïa. Il opère dans plusieurs domaines clés tels que l'agroalimentaire, l'industrie, les services et la grande distribution. Cevital est aujourd'hui structuré en Société par Actions (SPA) au capital privé de 68,760 milliards de dinars, et son siège est situé à l'extrémité est du port de Béjaïa. Sa croissance continue, soutenue par des investissements dans des équipements de pointe, lui a

permis de se positionner parmi les plus grandes entreprises algériennes, occupant actuellement le troisième rang en termes de chiffre d'affaires.

Leader continental dans le domaine agroalimentaire, Cevital a élargi son champ d'action tout en développant plusieurs marques emblématiques, telles que Fleurial (huile et margarine). Parmi ses principales réalisations figurent la création de raffineries d'huile et de sucre, l'acquisition de sources, d'eaux minérales comme Lalla Khedidja, ainsi que l'implantation de diverses unités industrielles.

L'expansion du groupe s'est également traduite par une dynamique de création d'emplois : de 500 salariés en 1999, sa branche agroalimentaire en comptait près de 3 850 en 2018. Aujourd'hui, Cevital continue d'étendre ses activités à l'échelle nationale et africaine, consolidant ainsi son rôle de pilier majeur de l'économie algérienne.

1.2 Organisation de l'entreprise

Comme toute grande entreprise, Cevital est structurée selon une organisation hiérarchique bien définie. Le complexe agroalimentaire est dirigé par un Directeur Général, assisté par deux Directeurs Généraux Adjoints (DGA 1 et DGA 2) ainsi que par des assistantes de direction. La direction générale assure la coordination entre les différentes directions spécialisées du complexe, afin de garantir la performance, la sécurité et l'optimisation des ressources.

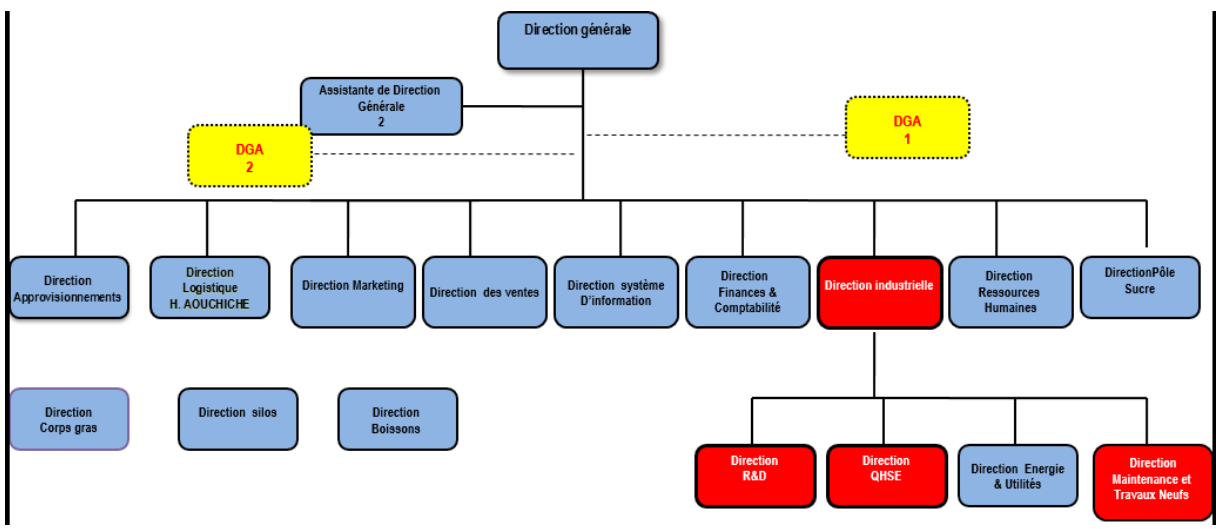


FIGURE 1.1 – Organigramme général de Cevital Food .

Direction Industrielle

Chargé du développement industriel des sites de production en fixant, avec la direction générale, les objectifs et les budgets. Il analyse les dysfonctionnements et propose des solutions techniques ou humaines pour améliorer la productivité, la qualité et les conditions de travail. Il

anticipe les besoins en équipements, supervise leur acquisition et installation, veille à l'application de la politique environnementale et de sécurité, et participe aux études de faisabilité de nouveaux produits.

Direction des Ressources Humaines

La direction des Ressources Humaines définit les principes de gestion du personnel en cohérence avec la stratégie du groupe et les objectifs de Cevital Food. Elle assure un support administratif à l'ensemble des employés, gère le recrutement, les carrières, la mobilité, la performance et les rémunérations. Elle pilote les actions sociales, la formation, et accompagne les managers dans la gestion disciplinaire. Elle veille également à l'élaboration d'une politique de communication interne favorisant l'adhésion du personnel aux objectifs de l'entreprise.

Direction Approvisionnements

Elle met en œuvre la stratégie d'approvisionnement en respectant les budgets alloués. Elle s'assure de satisfaire les besoins en matières premières et en services dans les meilleurs délais, avec une qualité optimale et à moindre coût, afin d'atteindre les objectifs de production et de vente.

Direction Logistique

Elle assure l'expédition des produits finis (sucre, huile, margarine, eau minérale...) vers les clients et dépôts. Elle gère le transport (propre, affrété ou client), alimente les unités de production en matières premières et prend en charge le transport pour certaines filiales du groupe. Elle gère également les stocks de produits finis à Béjaïa et dans d'autres régions (Alger, Oran, Sétif...).

Direction des Silos

Elle décharge les matières premières en vrac arrivées par navires ou camions, les stocke dans de bonnes conditions, et les expédie vers les utilisateurs (raffinerie de sucre, unités de trituration). Elle est aussi responsable de l'entretien des installations de stockage.

Direction des Boissons

Elle regroupe trois unités industrielles :

- **Lalla Khedidja (Tizi Ouzou)** : production d'eau minérale et boissons carbonatées.
- **Unité plastique (Tizi Ouzou)** : production d'emballages pour margarine, huiles, palettes, étiquettes.
- **COJEK (El Kseur)** : transformation de fruits/légumes en jus, nectars et conserves, avec ambition de leadership dans ce domaine.



FIGURE 1.2 – Produit de la direction des boissons.

Direction Pôle Sucre

Elle comprend quatre unités : deux raffineries de sucre solide (2000 T/J et 3000 T/J), une unité de sucre liquide (600 T/J), et une unité de conditionnement (2000 T/J). Elle produit du sucre solide et liquide en respectant les normes de qualité, de sécurité et d'environnement, pour répondre à la demande locale et à l'exportation.

Direction Marketing

Elle pilote les marques et gammes de produits. Son action repose sur la connaissance des consommateurs et des marchés, l'analyse de la concurrence et la veille internationale. Elle propose des innovations et coordonne leur mise en œuvre avec les autres départements jusqu'au lancement.



FIGURE 1.3 – Sucre.

Direction des Ventes et Commerciale

Elle commercialise toutes les gammes de produits et développe le fichier clients. En relation directe avec les clients, elle mène des démarches pour attirer de nouveaux clients et valoriser les produits, en s'appuyant sur une bonne maîtrise de la communication commerciale.

Direction Système d'Informations

Elle assure la mise en place et le bon fonctionnement des technologies de l'information au service de la stratégie de l'entreprise. Elle veille à la cohérence, la sécurité, la disponibilité et l'évolution des systèmes informatiques et de communication selon les besoins de l'entreprise.

Après avoir présenté les principales directions du Groupe Cevital, nous nous concentrons désormais sur la Direction Finance et Comptabilité (DFC), qui constitue le cadre principal de notre stage et la source essentielle des données exploitées dans le cadre de notre étude.

Direction Corps Gras

Elle comprend plusieurs unités : raffinerie d'huile (1800 T/J), conditionnement (2200 T/J), margarinerie (600 T/J) et d'autres en construction (pâte chocolatée, hydrogénation, etc.). Elle produit des huiles et margarines pour le marché local et l'export, avec une priorité sur la qualité et la satisfaction de la demande.

1.2.0.1 L'unité de raffinage

Le raffinage constitue une étape clé de la technologie de production des huiles et des margarines. L'opération de raffinage sert à éliminer les composés indésirables dans les huiles brutes.

1.2.0.2 L'unité de conditionnement

Cette unité permet de mettre en bouteilles les huiles raffinées qui seront ensuite stockées pour la livraison.



FIGURE 1.4 – Huiles végétales conditionnées par Cevital.

1.2.0.3 L'unité de margarinerie

Cevital s'est engagée dans la production de margarines variées telles que Matina, Fleurial, Rania, Beur, margarine de feuilletage, Smen, Shortening, ainsi que les graisses de coco et de palmiste.

Les lignes de production

Le complexe dispose de cinq lignes de production :

- Une ligne pour les barquettes de 250 g et 500 g (MATINA, FLEURIAL, RANIA, margarine de feuilletage – 4800 kg/h).
- Une ligne dédiée aux barquettes de 250 g et 500 g de FLEURIAL.
- Une ligne pour les barquettes de 5 kg destinées à la pâtisserie.
- Une ligne pour les barquettes de 5 kg destinées aux biscuits, ainsi que la graisse de coco et de palmiste.
- Une ligne pour les boîtes de Smen.



FIGURE 1.5 – Boîte de 500g de Smen MEDINA.

Le processus de fabrication

La fabrication suit deux étapes principales :

- **La phase aqueuse** : mélange d'eau, amidon, acide citrique, conservateurs, antiseptiques, sels et lait. Le lait est pasteurisé puis refroidi à plusieurs reprises pour empêcher la prolifération bactérienne.

- **La phase grasse** : mélange d’huiles raffinées, émulsifiants, mono glycérides, colorants, arômes et vitamines.

Conditionnement et stockage

Avant livraison, les produits sont conditionnés, palettisés et bandés. Ils sont ensuite stockés dans des chambres froides d’une capacité de 12 000 palettes.

Hygiène et nettoyage

Pour alterner la production entre les différentes margarines, un lavage des conduites est nécessaire à chaque changement.

1.3 Organisation de la Direction des Finances et Comptabilité

La direction Finance et Comptabilité joue un rôle très important dans l’entreprise dont la mission principale est de donner une image exacte sur la situation financière et économique de l’entreprise et ainsi de fournir de toutes les données nécessaires à la prise de décision, entre autre sa mission principale est d’assurer la comptabilisation des flux financiers et de produire les documents comptables obligatoires : bilan, compte de résultat, annexe. La saisie des opérations est assurée par les comptables et les responsables de chaque service doivent contrôler et valider les travaux.

Elle effectue également :

- Préparer et mettre à jour les budgets.
- Tenir la comptabilité et préparer les états comptables et financiers selon les normes.
- Pratiquer le contrôle de gestion.
- Faire le Reporting périodique.

Organigramme de la structure :

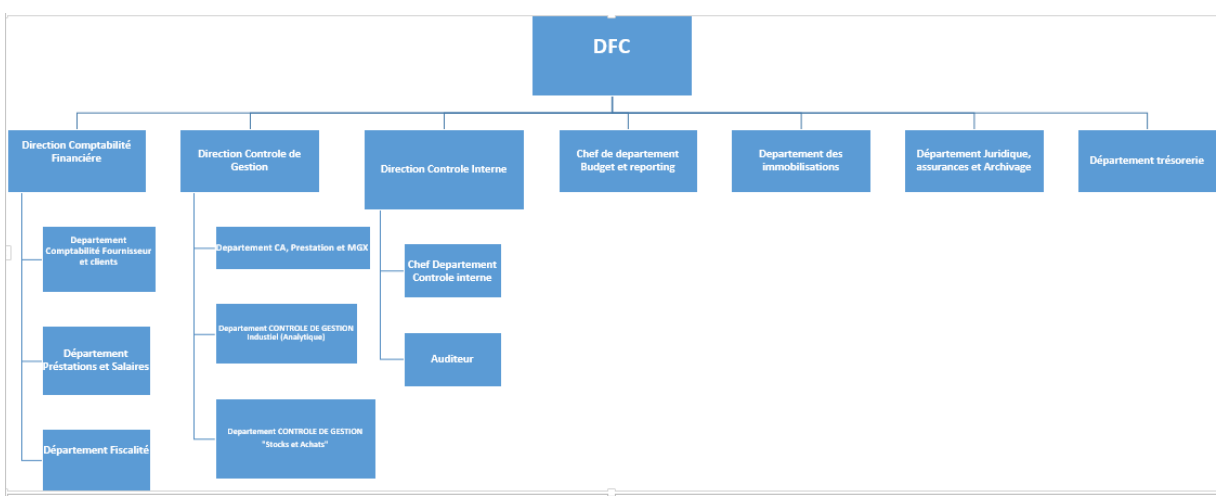


FIGURE 1.6 – Organigramme de la direction finance et comptabilité.

Après avoir présenté la Direction Finance et Comptabilité (DFC) en tant qu'entité centrale au sein du Groupe Cevital, nous nous intéressons maintenant plus en détail aux principales directions qui la composent. Ce sont notamment la direction de la comptabilité financière et celle du contrôle de gestion, qui ont joué un rôle déterminant dans le cadre de notre stage et qui ont constitué la principale source des données exploitées dans cette étude.

1.3.1 Direction de la Comptabilité Financière

La direction de la comptabilité financière est responsable de l'enregistrement, du suivi et de la production de toutes les informations comptables et financières de l'entreprise, selon les normes en vigueur (comme le Plan Comptable National).

Rôle au sein de Cevital

- Elle établit les états financiers (bilan, compte de résultat, etc.) de manière régulière.
- Elle assure la conformité légale des opérations comptables.
- Elle conserve les pièces justificatives et prépare les documents pour les audits.
- Elle permet d'avoir une image fidèle de la situation financière de chaque activité du groupe.

1.3.2 Direction du Contrôle de Gestion

Le contrôle de gestion est une fonction de pilotage qui vise à analyser les écarts entre les objectifs fixés et les résultats réels afin d'aider à la prise de décision et à l'optimisation des performances économiques.

Rôle au sein de Cevital

- Elle élabore les budgets prévisionnels en lien avec les directions opérationnelles.
- Elle produit des tableaux de bord et indicateurs de performance.
- Elle analyse les écarts (budgets/réel) et identifie les causes.
- Elle recommande des ajustements pour améliorer la rentabilité ou réduire les coûts.

1.3.3 Direction du Contrôle Interne

Le contrôle interne regroupe l'ensemble des procédures mises en place pour sécuriser les opérations, garantir la fiabilité des informations, et assurer le respect des lois et règles internes.

Rôle au sein de Cevital

- Elle définit et surveille les procédures internes.
- Elle veille à la séparation des tâches pour éviter les erreurs et fraudes.
- Elle identifie les risques et propose des plans d'action pour les limiter.
- Elle contribue à la bonne gouvernance de l'entreprise.

Conclusion

Ce chapitre nous a permis de découvrir le Groupe Cevital, premier groupe privé en Algérie, en mettant en lumière son histoire, son organisation, ainsi que ses principales directions. L'accent a été mis sur la Direction Finance et Comptabilité (DFC), cadre de notre stage et source des données utilisées dans ce mémoire, lesquelles ont ensuite été exploitées dans le chapitre d'application.

2

Concepts fondamentaux aux modèles financiers

Introduction

La maîtrise des instruments financiers constitue une base essentielle pour l'étude des produits dérivés et leur valorisation. Ce chapitre propose une vue d'ensemble des concepts fondamentaux liés aux marchés financiers, ainsi qu'aux principaux instruments tels que les actions et les obligations. Une attention particulière est accordée aux options, à leurs spécificités, et aux modèles mathématiques permettant leur évaluation. Les hypothèses et la formule du modèle de Black-Scholes sont présentées, de même que ses extensions, notamment les formules de Margrabe et de Kirk, applicables aux options sur plusieurs actifs.

2.1 Notions élémentaires en mathématiques financières

Marché financier

Un marché financier est le lieu où se rencontrent les agents à capacité de financement et les agents à besoins de financement. C'est un marché de capitaux à long terme sur lequel s'échangent des produits financiers, telles que les valeurs mobilières, actions et obligations [34].

Produits financiers

Les produits (instruments) financiers désignent des titres ou des contrats, négociables ou non, utilisés dans une optique de placement ou de couverture. Ils permettent d'anticiper un rendement futur ou de gérer des risques financiers. On les regroupe principalement en deux catégories : les actifs financiers et les produits dérivés.

Actif financier

Un actif financier est un titre ou un contrat généralement transmissible et négociable sur un marché financier [34].

Actions

Une action est un titre de propriété sur une fraction du capital qu'une entreprise décide de vendre aux investisseurs [24]. Elle donne droit :

- À la participation dans la gestion de la société (une action = une voix dans les votes en assemblée générale).
- Bénéfices sous forme dividendes.
- À l'accès aux informations de la société, le prix d'action cotée en bourse et exprimée en valeur monétaire.

L'action est l'actif le plus négocié sur les marchés financiers.

Obligation

L'obligation est un titre boursier correspondant à un emprunt pendant un temps fixé dont le risque de défaut est supposé inexistant lorsque l'obligation est émise par l'État. Celle-ci est échangée sur les marchés obligataires. Elle est vendue sur le marché primaire à un prix proche du montant nominal (la somme empruntée), puis elle est échangée sur le marché secondaire à un prix qui fluctue. Une obligation est déterminée par [6] :

Une durée,

Un taux d'intérêt.

Placements

Les placements financiers sont des investissements immatériels visant à obtenir un revenu ou une plus-value, sous forme de titres ou de droits financiers.

Produit dérivé

Un produit dérivé est un actif financier dépendant de la valeur d'autres actifs tel que des actions obligatoires, des indices boursiers. Les produits dérivés se répartissent en trois catégories : Les swaps, les contrats à terme et les options [5].

Couverture

C'est une pratique qui consiste à se protéger contre un risque non désiré. C'est-à-dire trouver une stratégie financière basée sur les actifs du marché dont la valeur à chaque date t est égale au *pay-off* de l'option [32].

Actif sous-jacent

C'est l'actif sur lequel porte *l'option de vente ou d'achat*. L'actif sous-jacent d'un contrat d'option peut être physique (matière première) ou monétaire (devises), ou bien financier (actions obligatoires, indices boursier...) [23].

2.2 Généralités sur les options

Une option est un contrat conférant à son détenteur le droit et non l'obligation d'acheter ou de vendre une certaine quantité d'un actif sous-jacent à un prix convenu à l'avance pendant une période de temps donnée. En contre partie, l'acheteur verse immédiatement au vendeur une prime qui est le prix de l'option [16].

On distingue deux types d'options : options d'achat (*Call*) et options de vente (*Put*).

Call

Un *call* est un contrat qui donne à son détenteur le droit d'acheter une certaine quantité d'un actif sous-jacent à un prix prédéterminé pendant une période donnée.

Put

Un *put* est un contrat qui donne à son détenteur le droit de vendre une certaine quantité d'un actif sous-jacent à un prix prédéterminé pendant une période donnée.

Il existe deux types *d'options* selon le style de leur exercice :

Options européennes

L'exercice de *l'option* n'est possible qu'à la date d'échéance T .

Options américaines

L'exercice peut se faire durant toute la période $t < T$. Le droit d'acheter ou de vendre expire après la date fixée.

2.2.1 Valeur d'une option

Le prix d'une option résulte de l'offre, de la demande et des anticipations sur la valeur future de l'actif sous-jacent. Il se compose de la valeur intrinsèque et de la valeur temps.

$$\text{Prime} = \text{Valeur intrinsèque} + \text{Valeur temps}$$

- **Valeur intrinsèque**

La valeur intrinsèque représente le profit immédiat qu'on obtiendrait en exerçant l'option. Elle correspond à la différence positive ou nulle entre le prix de l'actif sous-jacent et le prix d'exercice, dans le cas d'un Call.

$$\text{Valeur intrinsèque d'un Call} = \max(S_t - K, 0) = (S_t - K)^+$$

où S_t désigne le prix du sous-jacent au cours du temps et K le prix d'exercice.

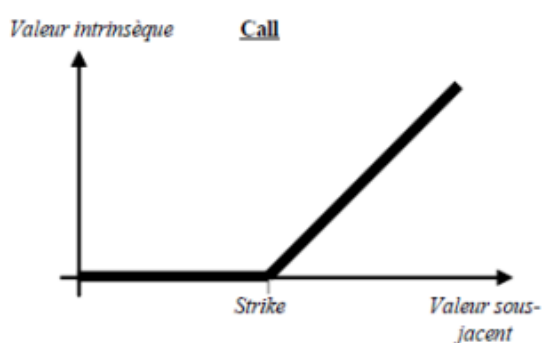


FIGURE 2.1 – Valeur intrinsèque d'un Call

Et dans le cas d'un Put, elle est la différence positive ou nulle entre le prix d'exercice et le cours de l'actif sous-jacent.

$$\text{Valeur intrinsèque d'un Put} = \max(K - S_t, 0) = (K - S_t)^+$$

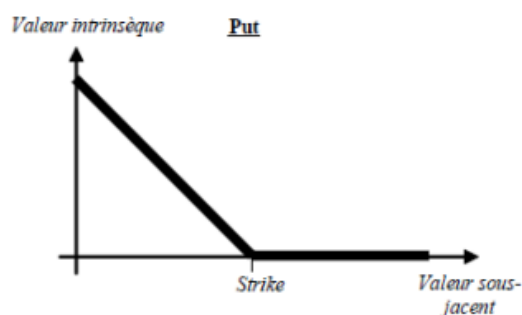


FIGURE 2.2 – Valeur intrinsèque d'un Put

- **Valeur temps**

La valeur temps représente le surplus de la valeur de l'option par rapport à sa valeur intrinsèque. D'une autre façon, elle représente la probabilité que l'option soit exercée avant sa date d'échéance [6].

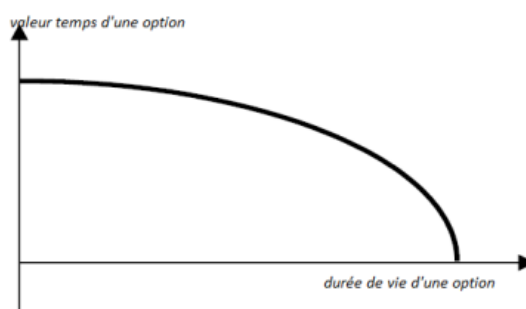


FIGURE 2.3 – Valeur temps d'un Call.

2.2.2 Déterminants d'une option

La valeur d'une *option* dépend du prix de l'actif sous-jacent, le prix d'exercice, le taux d'intérêt sans risque, la date d'échéance et de la volatilité du prix de l'action [14].

Cours du sous-jacent

Le cours du sous-jacent agit directement sur la valeur intrinsèque, en cas d'augmentation du cours de l'actif sous-jacent, le *call* aura plus de valeur et le *put* en perdra. Inversement, en cas de baisse du cours de l'actif sous-jacent, la valeur du *call* diminuera et celle du *put* augmentera.

Prix d'exercice d'une option

Le prix d'exercice de l'*option* (STRIKE) est le prix pour lequel le vendeur de l'*option* devrait livrer (pour un *Call*) ou acheter (pour un *Put*) l'actif sous-jacent si l'acheteur exerce son droit. Il est déterminé lors de la négociation de l'*option* et constant jusqu'à son échéance. L'exercice de l'*option* dépend du positionnement du strike par rapport au prix du sous-jacent qui varie. Ainsi l'*option d'achat* est dite :

- **”À la monnaie”** : si le prix d'exercice est égal au prix du sous-jacent (ATM) (At the money);
- **”Hors de la monnaie”** : si le prix d'exercice est supérieur au prix du sous-jacent (OTM) (Out the money);
- **”Dans la monnaie”** : si le prix d'exercice est inférieur au prix du sous-jacent (ITM) (In the money).

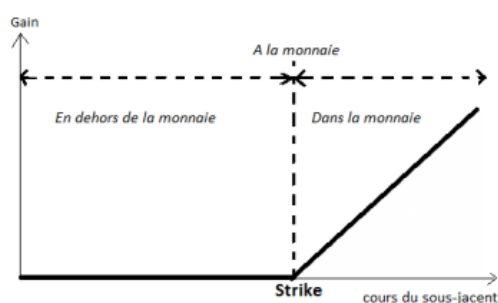


FIGURE 2.4 – Flux de trésorerie selon le cours sous-jacent

Le coût d'un *call* diminue quand son prix d'exercice augmente. Au contraire, celui d'un *put* augmente avec son prix d'exercice.

Date d'échéance

L'échéance d'un contrat est la date à partir de laquelle la validité du contrat prend fin. Elle joue un rôle important dans le calcul de la valeur de *l'option*. En effet, plus la maturité de *l'option* est lointaine, plus la chance d'anticipation augmente et plus la prime est chère en *call* qu'en *put*.

En fonction de la date d'échéance, *les options* peuvent être classées en *options à court terme* qui ont des échéances qui sont très rarement supérieures à 6 mois, et en *options à long terme*.

Taux d'intérêt sans risque

Acheter un *Call* revient à acheter un actif et le payer plus tard en cas d'exercice avec un taux d'intérêt sans risque. Ainsi, plus les taux d'intérêt sont élevés plus les *Call* sont plus chers tandis que les *Put* sont moins chers [6].

Volatilité du cours du sous-jacent

Elle est mesurée par l'écart-type de la distribution du taux de rentabilité de l'actif. Plus le cours de l'actif est volatil, il a des chances de s'élever en-dessus du prix d'exercice (ce qui est favorable au *Call*) ou en descendre au-dessous (ce qui est favorable au *Put*). Donc, plus la volatilité est forte plus *l'option* est chère [6].

2.2.3 Prix d'option européenne

Dans tout ce qui suit, nous considérons les notations suivantes :

- S_0 : cours actuel de l'actif sous-jacent ;
- K : prix d'exercice de *l'option* ;

- T : date d'échéance de l'option ;
- r : taux d'intérêt sans risque ;
- σ : volatilité du cours du sous-jacent.

La valeur théorique d'une option d'achat (Call) de prix d'exercice K , jusqu'à une date d'échéance T , est donnée par son flux de trésorerie (Pay-off).

$$\max(S_t - K, 0) = (S_t - K, 0)^+ \tag{2.1}$$

Le résultat d'une option européenne d'achat a son échéance est représenté dans le graphe ci-dessus.

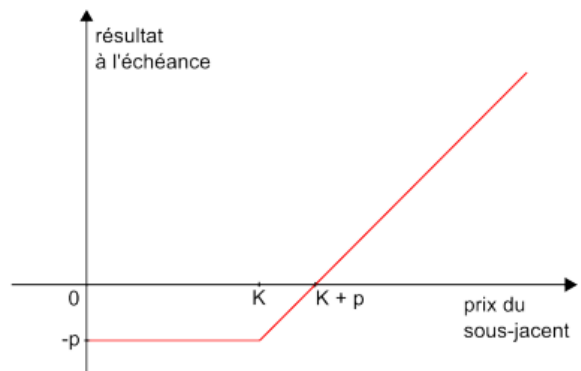


FIGURE 2.5 – Profit des gains/pertes de l'achat d'un Call.

Le prix théorique d'une option de vente (Put) de prix d'exercice K , jusqu'à une date d'échéance T , est :

$$\max(0, K - S_t) = (0, S_t - K)^- \tag{2.2}$$

Le résultat d'une option européenne d'achat d'un put à son échéance est représenté dans le graphe ci-dessus.

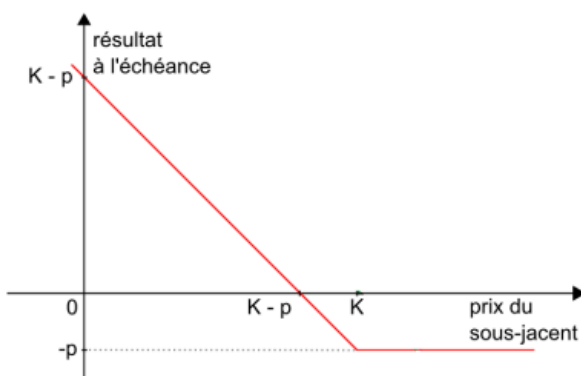


FIGURE 2.6 – Profit des gains/pertes de l'achat d'un put.

2.3 Option sur un seul actif

2.3.1 Hypothèses du modèle de Black-Scholes

Le modèle de *Black-Scholes-Merton* pour une option d'achat européenne repose sur les hypothèses suivantes [16, 21] :

Le marché est considéré :

- Fonctionne en continu ;
- Liquide ;
- Viable (absence d'opportunité d'arbitrage) ;
- Ne possède pas de coûts de transaction ni d'impôts ou taxes.

On suppose qu'il existe un actif sans risque tel que :

- On peut prêter et emprunter à un même taux d'intérêt r ;
- Le taux d'intérêt sans risque r est constant.

L'actif sous-jacent est supposé :

- Indéfiniment fractionnable ;
- Ne verse pas de dividendes ;
- Son cours suit la dynamique :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \quad (2.3)$$

Où les constantes μ et σ désignent respectivement le rendement et la volatilité instantanés de l'actif, et W_t est un mouvement brownien modélisant les accroissements relatifs au prix de l'actif.

2.3.2 Formule du modèle de Black-Scholes

Sous les hypothèses précédentes, on peut établir la formule de *Black-Scholes-Merton* qui permet de calculer la valeur théorique d'une option européenne à partir des cinq données S_0 , K , σ , r , T .

Le prix de l'option d'achat (*Call*) est donné par l'espérance sous la probabilité risque-neutre du *pay-off* terminal actualisé [3].

$$C_T = E[\max(S_T - K, 0)e^{-rT}] \quad (2.4)$$

Soit les formules de *Black-Scholes-Merton* :

Pour un Call :

$$C_T = S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2) \quad (2.5)$$

Tel que : $N(x)$ correspond à la fonction de répartition de la loi normale permettant de prendre en compte l'évolution aléatoire des cours futurs du sous-jacent.

$$N(d_1) = \int_{-\infty}^{d_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad (2.6)$$

Tel que :

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left[r + \frac{\sigma^2}{2}\right]T}{\sigma\sqrt{T}} \quad (2.7)$$

Et :

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left[r - \frac{\sigma^2}{2}\right]T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T} \quad (2.8)$$

Pour un Put : Le prix d'une *option de vente (put)* de *pay-off* :

$$P_T = E[\max(K - S_T, 0)e^{-rT}] \quad (2.9)$$

Et :

$$P_T = Ke^{-rT}N(-d_2) - S_0N(-d_1) \quad (2.10)$$

2.4 Les grecques

Pour utiliser les options de manière optimale, il est essentiel d'évaluer l'impact des variations des différentes variables qui influencent leur valeur. C'est ici qu'interviennent les «grecques», des indicateurs permettant de mesurer la sensibilité du prix d'une option par rapport à un paramètre donné.

2.4.1 Delta

Le Delta d'une option représente la variation du prix de l'option par rapport à une variation monétaire du prix de l'actif sous-jacent, i.e. [15].

$$\Delta = \frac{\partial C_T}{\partial S} \quad (2.11)$$

Dans le cas de l'option d'achat européenne, on a :

$$\Delta = \frac{\partial C_T}{\partial S} = N(d_1) > 0 \quad (2.12)$$

Le Delta d'une option d'achat varie entre 0 et 1 tandis que celui de l'option de vente varie entre 0 et -1. L'option d'achat dont le sous-jacent ne verse pas de dividende verra son Delta évoluer avec sa valeur. Ainsi Delta tendra vers 0 lorsque que l'option sera hors de la monnaie et tendra vers 1 lorsque l'option sera dans la monnaie.

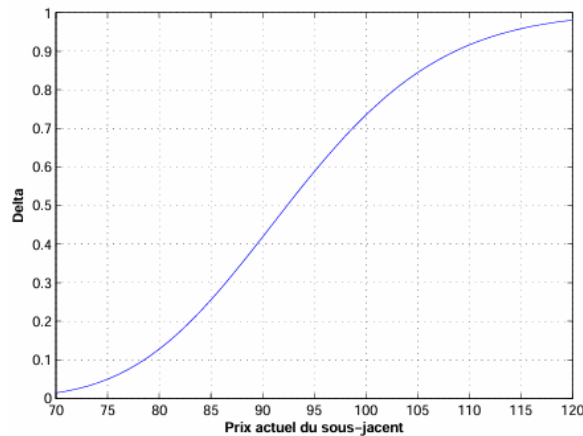


FIGURE 2.7 – Évolution du Delta par rapport au sous-jacent $S_0 = 70, \dots, 120; K = 95; T = 0.4; r = 0.05; \sigma = 0.2$.

2.4.2 Gamma

Le Gamma mesure la sensibilité du Delta aux variations du prix du sous-jacent. Il correspond à la dérivée seconde du prix de l’option par rapport à ce dernier :

$$\Gamma = \frac{\partial C_T}{\partial \Delta} = \frac{\partial^2 C_T}{\partial S_0^2} = \frac{1}{S\sigma\sqrt{T}}N'(d_1) > 0. \tag{2.13}$$

Le Gamma d’une option est à son maximum lorsque celle-ci est à la monnaie. Lorsque l’option est hors de la monnaie ou dans la monnaie, le Gamma tend vers 0.

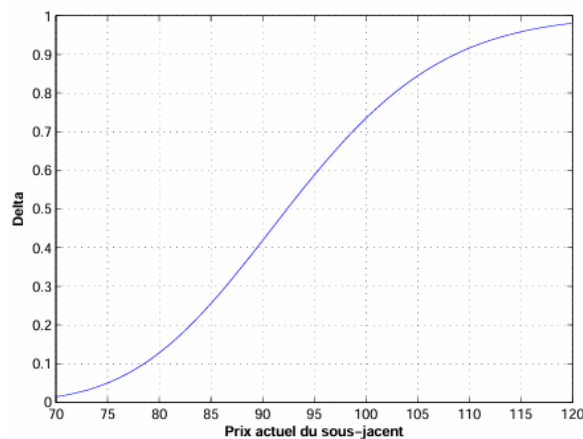


FIGURE 2.8 – Évolution du Gamma par rapport au sous-jacent $S_0 = 70, \dots, 120; K = 95; T = 0.4; r = 0.05; \sigma = 0.2$.

2.4.3 Thêta

Le *Thêta* est l'indicateur qui mesure la sensibilité de la prime à la maturité restante :

$$\Theta = \frac{\partial C_T}{\partial T} = -\frac{S\sigma}{2\sqrt{T}}N(d_1) - rKe^{-rT}N(d_2) < 0. \tag{2.14}$$

La valeur des options est d'autant plus élevée que la maturité est éloignée. De ce fait, le passage de temps influence négativement la valeur d'une option [27].

Autrement dit, *Le Thêta* fournit une indication sur la vitesse à laquelle le prix de l'option décroît plus la date d'échéance approche [15].

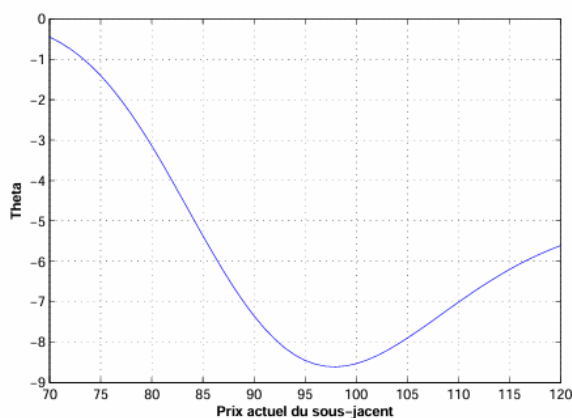


FIGURE 2.9 – Évolution du Thêta par rapport au sous-jacent $S_0 = 70, \dots, 120; K = 95; T = 0.4; r = 0.05; \sigma = 0.2$.

2.4.4 Rho

Rho permet de mesurer la variabilité d'une option par rapport au niveau des taux d'intérêt sans risque [15] :

$$\rho = \frac{\partial C_T}{\partial r} = TKe^{-rT}N(d_2) > 0 \tag{2.15}$$

L'achat d'un Call peut être interprété comme un achat à crédit du sous-jacent pendant une durée égale à la maturité de l'option. Par conséquent, une hausse des taux d'intérêt augmente le coût de ce financement implicite, ce qui tend à renforcer la valeur du Call.

Rho a un impact relativement faible sur la valeur de l'option comparée aux autres dérivées partielles. La date d'échéance approche [15].

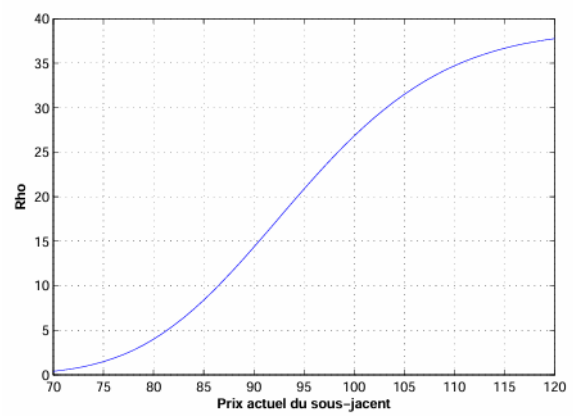


FIGURE 2.10 – Évolution du Rho par rapport au sous-jacent $S_0 = 70, \dots, 120; K = 95; T = 0.4; r = 0.05; \sigma = 0.2$.

2.4.5 Vega

Vega représente la sensibilité de l’option par rapport à la volatilité du sous-jacent [15].

$$V = \frac{\partial C_T}{\partial \sigma} = SN(d_1)\sqrt{T}. \tag{2.16}$$

Bien que la formule de Black-Scholes-Merton suppose une volatilité constante, celle-ci est en réalité souvent variable sur les marchés. Ainsi, la valeur de l’option est directement influencée par les fluctuations de la volatilité du sous-jacent. Le *Vega* d’un Call étant positif, une augmentation de la volatilité entraîne généralement une hausse de la prime de l’option, car des mouvements de prix plus importants augmentent les chances que l’option termine ”dans la monnaie”.

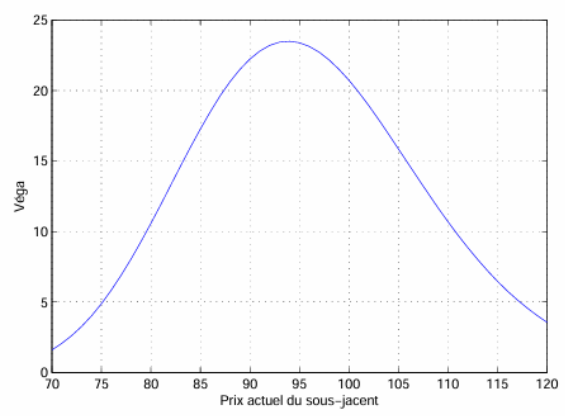


FIGURE 2.11 – Évolution du Vega par rapport au sous-jacent $S_0 = 70, \dots, 120; K = 95; T = 0.4; r = 0.05; \sigma = 0.2$.

2.5 Options sur plusieurs actifs

Bien que cette section porte sur l'ensemble des options sur plusieurs actifs, l'étude s'est naturellement recentrée sur le cas particulier des options sur deux actifs, qui occupent une place centrale dans la suite de ce travail. En effet, certaines situations financières impliquent que deux actifs évoluent ensemble, ce qui conduit à l'utilisation d'options sur deux actifs, dont la valeur dépend à la fois de ces deux éléments. Parmi les instruments développés dans ce cadre, on retrouve notamment l'option d'échange, l'option sur spread, ainsi que des formes plus complexes comme les options basket ou les options asiatiques sur deux actifs, qui seront brièvement présentées dans cette section.

2.5.1 Option basket

Une option basket est une option dont le sous-jacent correspond à un panier pondéré de plusieurs actifs financiers. Elle permet de prendre position sur l'évolution conjointe de plusieurs actifs, en combinant leurs prix selon des pondérations déterminées à l'avance [12].

Le payoff d'un *call européen sur panier* s'écrit :

$$\max \left(\sum_{i=1}^n \omega_i S_i - K, 0 \right)$$

tandis que celui d'un *put européen sur panier* est :

$$\max \left(K - \sum_{i=1}^n \omega_i S_i, 0 \right)$$

où :

S_i désigne le prix du i ème actif sous-jacent, ω_i son poids dans le panier, et K le prix d'exercice.

Le **cas particulier à deux actifs** est fréquemment rencontré dans la pratique. Lorsque le panier contient exactement deux actifs, avec des pondérations opposées comme $\omega_1 = 1$ et $\omega_2 = -1$, le sous-jacent devient $S_1 - S_2$, ce qui rapproche la structure de celle d'une option sur spread.

2.5.2 Option asiatique

Les options asiatiques sont des options dont le pay-off dépend de la moyenne arithmétique du prix de l'actif sous-jacent pendant la durée de vie de l'option.

Le pay-off d'un **call à prix moyen** est :

$$\max (0, \bar{S} - K)$$

et celui d'un **put à prix moyen** est :

$$\max (0, K - \bar{S})$$

Où :

\bar{S} représente le prix moyen de l'actif sous-jacent [12].

2.5.3 Option d'échange

Une option d'échange est un contrat dérivé qui donne à son détenteur le droit, à une date donnée, d'échanger un actif financier S_1 contre un autre actif financier S_2 . Elle permet donc de recevoir l'actif S_2 en remettant l'actif S_1 , sans impliquer de paiement monétaire direct.

L'option d'échange est couramment observée sur le marché de l'énergie. C'est un type particulier d'option de spread lorsque le prix d'exercice est nul. C'est aussi l'une des options multi-actifs les plus simples. Le rendement de l'option d'échange est :

$$\max(S_1 - S_2, 0) \quad (2.17)$$

Comme l'option d'échange ne comporte pas de prix d'exercice, elle ne peut pas être classée comme une option d'achat ou de vente au sens classique. Toutefois, on peut l'interpréter comme un mécanisme permettant d'acheter le premier actif S_1 en le payant avec le second actif S_2 .

2.5.3.1 Formule de Margrabe

En 1978, Margrabe a développé une formule de solution analytique à l'équation de Black-Scholes pour l'option d'échange. Supposons que $C(t, S_1, S_2)$ soit le prix de l'option d'échange à l'instant t avec les prix des deux actifs étant S_1 et S_2 . La formule est donnée par [20] :

$$C(t, S_1, S_2) = S_1 N(d_1) - S_2 N(d_2)$$

où

$$\begin{aligned} \sigma &= \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}, \\ d_1 &= \frac{\ln\left(\frac{S_1}{S_2}\right) + \frac{\sigma^2}{2}(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \\ d_2 &= \frac{\ln\left(\frac{S_1}{S_2}\right) - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}. \end{aligned}$$

2.5.4 Option sur spread

L'option sur spread est une option à deux actifs basée sur la différence entre les prix de deux entités sous-jacentes. Elle est largement utilisée sur les marchés des devises, les marchés de l'énergie, etc.

Les options sur spread sont couramment utilisées sur les marchés des devises, en particulier entre deux monnaies de pays économiquement liés. Un exemple typique est l'option de change croisé, qui permet d'échanger deux devises étrangères mesurées par rapport à une devise de base. Dans ce cas, S_1 et S_2 représentent les taux de change de ces devises par rapport à la devise de référence.

Sur le marché de l'énergie, les options spread sont utilisées pour se protéger contre les variations des marges de prix, notamment dans le secteur du raffinage. Deux types d'options spread sont particulièrement courants :

- **Crack Spread** : elle concerne le raffinage du pétrole. Elle permet de se couvrir contre les variations entre le prix du pétrole brut et celui des produits pétroliers raffinés (comme l'essence ou le diesel).
- **Spark Spread** : utilisée dans le secteur de l'électricité, elle reflète la différence entre le prix de l'électricité et le coût du gaz naturel nécessaire à sa production. Elle sert à évaluer ou couvrir le coût de conversion du gaz en électricité.

Le rendement de l'option spread est

$$\max(S_1 - S_2 - K, 0) \quad \text{pour une option d'achat spread} \quad (2.18)$$

$$\max(K - (S_1 - S_2), 0) \quad \text{pour une option de vente spread} \quad (2.19)$$

où K est le prix d'exercice.

2.5.4.1 Formule de Kirk

En 1995, Kirk a proposé une approximation sous forme fermée pour le prix d'une option d'achat spread. Elle se lit comme suit [18] :

$$C(t, S_1, S_2) \approx S_1 N(d_1) - (S_2 + K e^{-r(T-t)}) N(d_2) \quad (2.20)$$

où,

$$\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 \left(\frac{S_2}{S_2 + K} \right)^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 \left(\frac{S_2}{S_2 + K} \right)} \quad (2.21)$$

$$d_1 = \frac{\log\left(\frac{S_1}{S_2 + K}\right) + \frac{\sigma^2}{2}(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad (2.22)$$

$$d_2 = \frac{\log\left(\frac{S_1}{S_2 + K}\right) - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}. \quad (2.23)$$

Et le prix d'une option de vente spread :

$$P_t \approx (S_2 + K e^{-r(T-t)}) N(-d_2) - S_1 N(-d_1) \quad (2.24)$$

2.5.4.2 Hypothèses du modèle de Kirk

Le modèle de Kirk pour valoriser une option sur spread est basé sur les hypothèses suivantes :

1. Les actifs sous-jacents S_1 et S_2 suivent chacun un *mouvement brownien géométrique*, donc sont *log-normaux* sous la mesure risque-neutre ;
2. Les *volatilités* σ_1 et σ_2 sont *constantes* pendant toute la durée de vie de l'option ;
3. Le *taux d'intérêt sans risque* r est *constant* ;
4. Il existe une *corrélation constante* ρ entre les deux actifs ;
5. L'option est de *type européen*, c'est-à-dire *exerçable uniquement à l'échéance* ;

6. Afin de permettre une formule fermée, la formule de Kirk *approxime le quotient*

$$\frac{S_1}{S_2 + K}$$

par une *variable log-normale*, ce qui permet d'utiliser une structure similaire à celle de Black–Scholes.

Ces hypothèses sont utilisées dans la formule de Kirk pour dériver une approximation analytique du prix de l'option sur spread entre deux actifs log-normaux [8].

Conclusion

Tout au long de ce chapitre, nous avons présenté les concepts fondamentaux liés aux actifs financiers, aux instruments dérivés et aux mécanismes de valorisation des options. Cela a permis de mieux comprendre les éléments qui influencent leur fonctionnement et leur évaluation. Une attention particulière a été portée aux options sur deux actifs, en particulier l'option sur spread, qui constitue le cœur de notre étude. Nous avons également présenté les principales formules de valorisation disponibles dans la littérature, telles que celles de Black-Scholes et de Margrabe, ainsi que la formule de Kirk, que nous utiliserons dans la suite du mémoire pour évaluer le prix d'une option put sur spread à partir de données réelles.

3

Approche appliquée

Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons les notions de base en probabilité, en statistique et en analyse d'incertitude, nécessaires pour la suite de notre travail. Nous commençons par rappeler les éléments fondamentaux comme la variable aléatoire, l'espérance, la variance et la corrélation. Ensuite, nous abordons quelques lois statistiques ainsi que des outils comme les tests de normalité et la règle des trois sigma. Enfin, nous introduisons les méthodes d'analyse de sensibilité et la simulation Monte Carlo, qui nous serviront à étudier l'impact des paramètres incertains sur les résultats du modèle.

Sommaire

Introduction	28
3.1 Quelques notions de probabilité et statistiques	28
3.2 Valeur à risque	35
3.3 Incertitude	36
3.4 Analyse de sensibilité	37
3.5 Estimation des indices de sensibilité	40
Conclusion	42

3.1 Quelques notions de probabilité et statistiques

Espace probabiliste

La notion d'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ a été introduite par **Kolmogorov** en 1933 pour formaliser la notion d'espérance conditionnelle. Ces trois éléments représentent :

- Ω : l'espace de tous les résultats possibles de l'expérience aléatoire que l'on observe.

- \mathcal{F} : la tribu des événements aléatoires, dont la probabilité de réalisation est mesurée par \mathbb{P} .
- \mathbb{P} : est une mesure de probabilité sur (Ω, \mathcal{F}) telle que $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ [29].

Variable aléatoire

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Une fonction $X(\cdot)$ définie sur Ω à valeurs dans \mathbb{R} est dite **variable aléatoire** sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ si, pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq a\}$ appartient à \mathcal{F} [29].

Espérance mathématique

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. L'espérance mathématique de X est, si elle existe, l'intégrale de X par rapport à la mesure de probabilité \mathbb{P} :

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\Omega} X d\mathbb{P}$$

Pour une variable aléatoire discrète avec des probabilités associées $p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$, on définit l'espérance $\mathbb{E}(X)$ par la formule :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_i x_i p_i$$

$\mathbb{E}(X)$ représente la moyenne arithmétique des différentes valeurs de X , pondérées par leurs probabilités.

Pour une variable aléatoire continue admettant une densité de probabilité $f(x)$, l'espérance $\mathbb{E}(X)$ est donnée par :

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

Variance

La variance d'une variable aléatoire $\mathbb{V}(X)$ est l'espérance mathématique du carré de l'écart à l'espérance mathématique [26].

On appelle variance de X noté $\mathbb{V}(X)$ la quantité définie par :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}([X - \mathbb{E}(X)]^2)$$

Écart-type

L'écart type d'une variable aléatoire X noté σ_X est la racine carré de la variance, exprimé par :

$$\sigma_X = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$$

il représente une mesure de la dispersion des valeurs autour de leur moyenne arithmétique [26] [30].

Corrélation

Soit X et Y deux variables aléatoires, la corrélation entre X et Y est définie par [30] :

$$\rho_{X,Y} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$$

Avec :

- $\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])]$
- σ_X : est l'écart-type de X .
- σ_Y : est l'écart-type de Y .

La corrélation mesure l'intensité de la relation linéaire entre deux variables aléatoires, avec une valeur comprise entre -1 et $+1$.

3.1.1 Lois statistiques

3.1.1.1 Loi uniforme

Soit X une variable aléatoire continue sur l'intervalle $[a, b]$. On dit que la variable aléatoire X est uniformément distribuée sur l'intervalle $[a, b]$ et on note $X \sim \mathcal{U}_{[a,b]}$, si sa densité de probabilité s'écrit sous la forme [17] :

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{Si } x < a; \\ \frac{1}{b-a}, & \text{Si } a \leq x \leq b; \\ 0, & \text{Si } x > b. \end{cases} \quad (3.1)$$

3.1.1.2 Loi normale

Une variable aléatoire X est dite normalement distribuée, si la densité s'écrit sous la forme [17] :

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.2)$$

On note $X \sim \mathcal{N}_{(m,\sigma^2)}$, où m est la moyenne et σ^2 la variance.

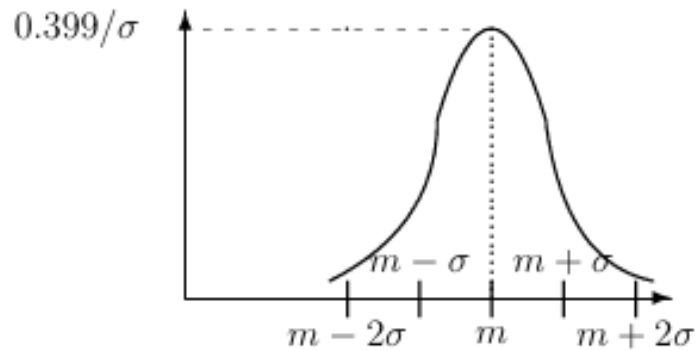


FIGURE 3.1 – Courbe de la loi normale.

3.1.1.3 Loi Log-normale

Une variable aléatoire X à valeurs dans $]0, +\infty[$ suit la loi log-normale de paramètres $N(m, \sigma)$ si $Y = \ln(X)$ suit la loi $N(m, \sigma^2)$. X admet alors une densité donnée par [17] :

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma x \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln(x)-m}{\sigma}\right)^2\right) & \text{Si } x > 0; \\ 0, & \text{Sinon.} \end{cases} \quad (3.3)$$

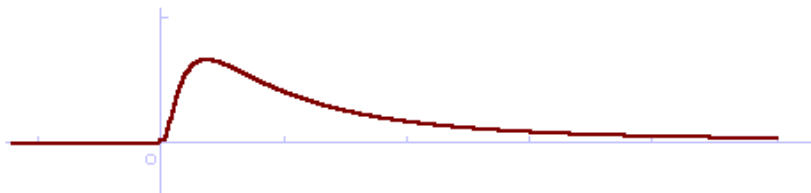


FIGURE 3.2 – Densité de la loi Log-normale.

3.1.1.4 Loi de Student

Une variable aléatoire X suit la loi de Student à n degrés de liberté si elle est absolument continue et admet pour densité [17] :

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \quad (3.4)$$

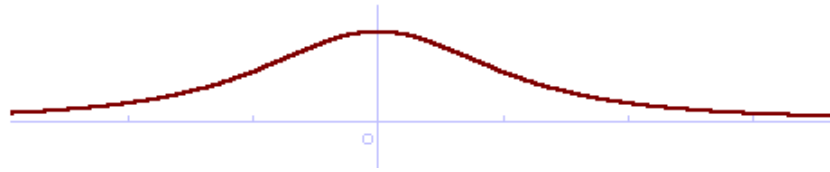


FIGURE 3.3 – Densité de la loi de Student à deux degrés de liberté.

3.1.2 Coefficient d'asymétrie

Le coefficient d'asymétrie ou le Skewness mesure le degré d'asymétrie d'une distribution autour de sa moyenne [4]. C'est le premier des paramètres de forme donné. On a 3 cas de forme de distribution :

- Un coefficient positif indique une distribution décalée à gauche de la moyenne et donc une queue de distribution étalée vers la droite.
- Un coefficient négatif indique une distribution décalée à droite de la moyenne et donc une queue de distribution étalée vers la gauche.
- Un coefficient nul indique une distribution symétrique : comme la loi normale ce coefficient est définie par :

$$\text{SKEW} = \mathbb{E} \left[\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \right)^3 \right] = \frac{\mu^3}{\sigma^3} \quad (3.5)$$

Où : X variable aléatoire d'espérance μ et variance σ^2 .

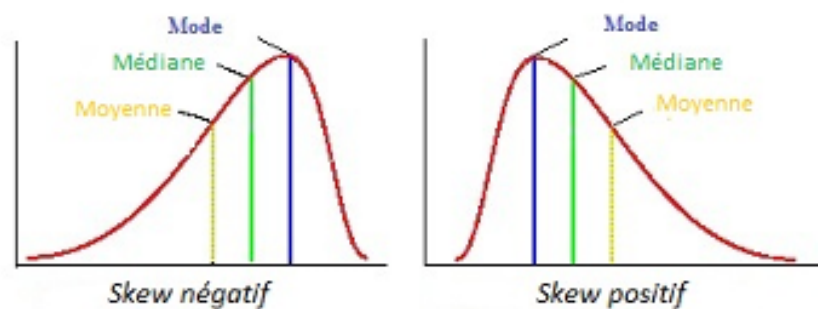


FIGURE 3.4 – Distribution d'une loi de probabilité selon le Skewness.

Dans le cas d'un Skewness négatif, la moyenne est inférieure à la médiane qui est inférieure au mode, et inversement dans le cas d'une distribution asymétrique à droite.

3.1.3 Coefficient d'aplatissement

Le coefficient d'aplatissement c'est le 2^{eme} des paramètres de forme. Les valeurs peuvent être concentrée au voisinage de la moyenne et dans ce cas le pic représentatif est aigu. D'autre distribution peuvent être plates, donc le coefficient d'aplatissement donne une évaluation de l'importance du pic, il a pour expression [4] :

$$K_{URTO} = \mathbb{E} \left[\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \right)^4 \right] = \frac{\mu^4}{\sigma^4} \quad (3.6)$$

Une distribution est dite platicurtique ($Kurto < 3$) si elle est plus aplatie que la distribution normale et leptocurtique ($Kurto > 3$) si elle est moins aplatie que la distribution normale. La distribution normale est dite mesocurtique ($Kurto = 3$).

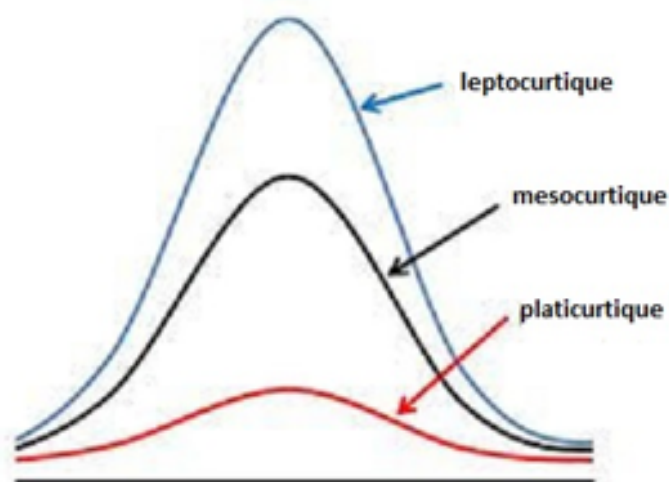


FIGURE 3.5 – Représentation graphique d'une distribution de probabilité selon le coefficient d'aplatissement.

3.1.4 Test de normalité

Un test de normalité est une procédure statistique utilisée pour déterminer si un ensemble de données suit une loi normale (ou distribution normale). Ces tests comparent la distribution empirique des données à une distribution normale théorique, afin de vérifier l'hypothèse nulle selon laquelle les données sont normalement distribuées.

Parmi les tests de normalité les plus couramment utilisés, on peut citer le test de Shapiro-Wilk, le test de Kolmogorov-Smirnov, le test d'Anderson-Darling et le test de Jarque-Bera. Dans le cadre de ce travail, nous avons choisi d'utiliser le test de Jarque-Bera en raison de sa simplicité et de son adéquation aux séries temporelles.

3.1.4.1 Test de Jarque-Bera

Le test de normalité de Jarque-Bera est fondé sur les coefficients d’asymétrie et d’aplatissement. Il évalue les écarts simultanés de ces coefficients avec les valeurs de référence de la loi normale [25].

L’hypothèse de ce test : elle basé sur les deux coefficient d asymétrie et d’aplatissement.

$$\begin{cases} H_0 : G_s = 0 \text{ et } G_k = 3 \\ H_1 : G_s \neq 0 \text{ et } G_k \neq 3 \end{cases} \quad (3.7)$$

La statistique T : la statistique de Jarque-Bera s’écrit :

$$T = \frac{n}{6} \left(G_s^2 + \frac{(G_k - 3)^2}{4} \right) \quad (3.8)$$

Avec :

- n : est la taille de l’échantillon.
- $G_s = \frac{\hat{\mu}^3}{\hat{\sigma}^3}$ est l’estimateur du coefficient d’asymétrie.
- $G_k = \frac{\hat{\mu}^4}{\hat{\sigma}^4}$ est l’estimateur du coefficient d’aplatissement.

La région critique : nous observons que la statistique T est une somme de deux variables aléatoires indépendantes de loi du χ^2 à 2 degrés de liberté. Alors la région critique pour un risque du test est définie par :

$$P(T \geq \chi^2_{1-\alpha}(2)) = \alpha$$

Où, $\chi^2_{1-\alpha}(2)$ est une valeur théorique lu à partir la table de χ^2

La p-value : Malgré la statistique T suit la loi de χ^2 , on peut rejeter H_0 ou l’accepter à partir une comparaison entre la p-value et le niveau de risque.

α	$\chi^2_{1-\alpha}(2)$
0,05	5,99
0,01	9,21

TABLE 3.1 – Exemples des valeurs critiques de test de Jarque Bera

3.1.5 Règle des trois sigma

En statistique, la règle 68-95-99,7 (appelée aussi la règle des trois sigmas ou règle empirique) indique que pour une loi normale, presque toutes les valeurs se situent dans un intervalle centré autour de la moyenne et dont les bornes se situent à 3 écarts-types de part et d’autre [22].

En résumé, cette règle stipule que :

1. 68,27 % des valeurs se situent à moins de 1 écart-type de la moyenne.

- 2. 95,45 % des valeurs se situent à moins de 2 écarts-types de la moyenne.
- 3. 99,73 % des valeurs se situent à moins de 3 écarts-types de la moyenne.

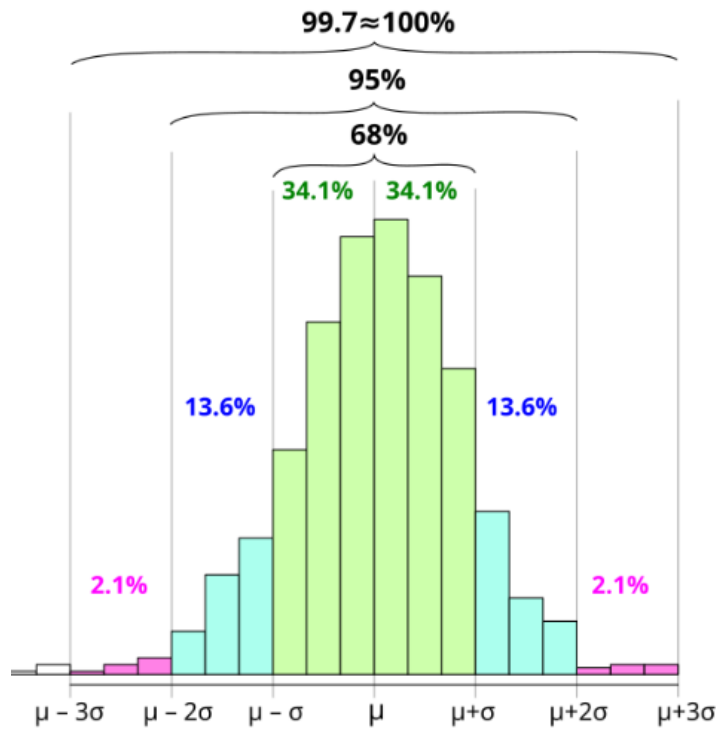


FIGURE 3.6 – Illustration de la règle empirique.

3.2 Valeur à risque

La notion de valeur a risque (Value at Risk VaR en anglais) est apparue pour la première fois dans le secteur des assurances a la fin des années 1980. Elle est une approche moderne qui est développée pour répondre aux besoins des instruments financiers d’une mesure de risque sur les marchés financiers [1].

Par définition, la VaR est le niveau de perte maximal qui ne sera dépassé qu’a une probabilité bien déterminée sur une période de temps.

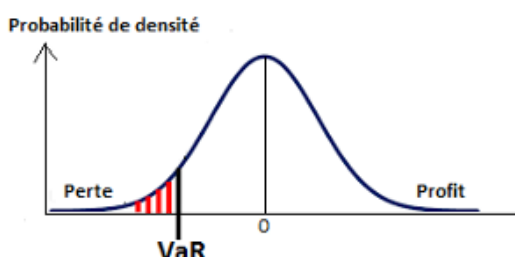


FIGURE 3.7 – Value at Risque.

3.3 Incertitude

La modélisation de phénomènes réels repose sur des paramètres qui ne sont généralement pas connus avec précision. Plutôt que d'attribuer une seule valeur fixe à chaque paramètre, on considère un ensemble de valeurs possibles, souvent décrit par une distribution de probabilité, afin de mieux tenir compte de l'incertitude inhérente aux données. Le terme "Incertitude" désigne le doute lié à une mesure ; elle traduit le fait qu'il est impossible de connaître avec exactitude la véritable valeur mesurée.

Définition

L'incertitude est l'insuffisance du savoir relatif à l'état ou aux processus de la nature, l'incertitude statistique est le caractère stochastique ou l'erreur provenant de diverses sources, tels qu'ils sont décrits par la méthodologie statistique [6].

3.3.1 Types d'incertitudes

On peut classer l'incertitude en plusieurs catégories :

3.3.1.1 Incertitude de modélisation

Cette incertitude surgit au moment du passage du phénomène réel au modèle mathématique. En effet, les modèles mathématiques sont une représentation approximative de la réalité. Cette approximation est basée sur plusieurs hypothèses simplificatrices qui constituent des sources d'incertitude.

3.3.1.2 Incertitude paramétrique

L'incertitude paramétrique est l'incertitude des valeurs observées ou mesurées. Ces valeurs servent les inputs d'un modèle. Leur incertitude se propage dans ce dernier et engendre une incertitude dans les outputs [11].

L'incertitude aléatoire : Cette incertitude est due à la variabilité naturelle de toute quantité physique mesurée car il appartient à l'estimation des paramètres du modèle. Elle s'explique

parfois comme l'incertitude responsable de l'obtention de résultats différents lorsque l'on répète une expérience dans les mêmes conditions.

L'incertitude épistémique : L'incertitude épistémique découle du manque de données, de connaissance, telle qu'une estimation basée sur un échantillon insuffisant ou non représentatif. Cette incertitude peut être réduite en recueillant des informations supplémentaires.

3.3.2 Méthode de propagation d'incertitude

La propagation des incertitudes vise à comprendre comment l'incertitude globale des paramètres d'entrée se transmet à la sortie d'un modèle.

Parmi les méthodes utilisées, le **développement en série de Taylor** repose sur des hypothèses de normalité, de linéarité et d'indépendance, permettant d'exprimer la variance de la sortie en fonction des variances des entrées et de leurs dérivées. La méthode du **Latin Hypercube Sampling (LHS)** [9] améliore la qualité de l'échantillonnage en garantissant une meilleure couverture de l'espace des paramètres que **la méthode de Monte Carlo classique**. Cette dernière, bien que simple à implémenter et largement utilisée, reste plus coûteuse en temps de calcul car elle nécessite un grand nombre d'échantillons pour obtenir des estimations fiables des statistiques du modèle.

3.4 Analyse de sensibilité

L'analyse de sensibilité est un outil fondamental dans de nombreux domaines d'application faisant appel à des modèles numériques. Elle permet d'étudier comment les variations des variables d'entrée influencent la variabilité de la réponse du modèle.

Lors de l'élaboration, la construction ou l'exploitation d'un modèle mathématique ou numérique, les méthodes d'analyse de sensibilité s'avèrent particulièrement utiles. Elles permettent notamment de :

- identifier les variables d'entrée ayant le plus d'impact sur une quantité d'intérêt en sortie ;
- détecter celles qui ont peu ou pas d'influence ;
- mettre en évidence les éventuelles interactions entre les variables.

Pour un ingénieur, l'intérêt de ces méthodes est indéniable : elles permettent de simplifier le modèle, de mieux le comprendre, voire de le valider, quel que soit le domaine scientifique concerné.

Il existe plusieurs types d'analyse de sensibilité, chacun adapté à des objectifs spécifiques ou à des types de modèles différents.

3.4.1 Analyse de sensibilité local

L'analyse de sensibilité locale, étudie comment des petites perturbations sur les entrées du modèle répercutent sur la valeur de la sortie. Bien qu'elle est très classique et souvent utilisée dans divers domaines, ne permet pas de considérer les interactions paramétriques [31]. Autrement dit elle examine la sensibilité de la sortie du modèle à de petites perturbations des variables d'entrée.

Bien qu'elle soit classique et largement utilisée dans de nombreux domaines, cette méthode ne permet pas de prendre en compte les interactions entre les paramètres.

La méthode locale la plus courante est l'approche *One-At-a-Time* (OAT), qui consiste à faire varier une seule variable d'entrée à la fois, les autres étant maintenues constantes. Les indices de sensibilité sont alors estimés à l'aide des dérivées partielles de la fonction de sortie $M(x)$ évaluée au point nominal x_0 :

$$S_i = \frac{\partial M(x)}{\partial x_i} \Big|_{x=x_0} \quad (3.9)$$

Cette approche fournit une indication de l'influence locale de chaque variable, mais reste limitée lorsqu'il s'agit de modéliser des effets globaux ou des interactions non linéaires.

3.4.2 Analyse de sensibilité global

L'analyse de sensibilité globale étudie comment la variabilité des entrées se répercute sur celle de la sortie, en déterminant la part de variance de la sortie due à chacune des entrées [19].

Saltelli regroupe les méthodes d'analyse de sensibilité en plusieurs catégories : méthodes graphiques, méthodes bayésiennes, méthodes fiabilistes (*FORM*, *SORM*), méthodes basées sur l'étude de la variance.

Dans ce mémoire, nous nous intéressons uniquement à la méthode **ANOVA** (*ANalysis Of VAriance*), qui étudie l'influence des composantes de X sur la variabilité de Y à partir de la décomposition de Sobol-Hoeffding.

Considérons un modèle mathématique qui associe, à un ensemble de variables d'entrée aléatoires X , une variable de sortie (ou réponse) aléatoire Y via une fonction déterministe M :

$$M : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}, \quad X \mapsto Y = M(X) \quad (3.10)$$

Théorème (*Théorème de la variance totale*)

Soit un couple (X, Y) de variables aléatoires, où (Y) prend ses valeurs dans (\mathbb{R}) et (X_i) dans un ensemble fini ou dénombrable, ou dans (\mathbb{R}) ou (\mathbb{R}^p) . Si la variance de (Y) est finie, alors[33] :

$$\text{Var}(Y) = \text{Var}(\mathbb{E}(Y | X)) + \mathbb{E}(\text{Var}(Y | X)) \quad (3.11)$$

Ce terme $(\text{Var}(\mathbb{E}(Y | X_i)))$ correspond à la variance de l'espérance de (Y) conditionnellement à (X_i) . Il mesure la part de la variabilité de (Y) qui est expliquée par (X_i) . Autrement dit, plus cette quantité est élevée, plus (X_i) influence fortement la variabilité de (Y) .

Pour évaluer cette influence de manière relative et comparable entre différents paramètres, on introduit un indicateur normalisé appelé *indice de sobol*

3.4.2.1 Indice de sobol

Soit le modèle

$$M : \Omega_p \rightarrow \mathbb{R}, \quad X \mapsto Y = M(X)$$

où $(X = (X_1, \dots, X_p))$ est un vecteur de variables aléatoires et $(M(X) \in L^2)$.

En 1993, Sobol a proposé une décomposition de (Y) en une somme de $(2^p - 1)$ fonctions à dimension croissante, basée sur la décomposition de Hoeffding [28] :

$$Y = M(X_1, \dots, X_p) = M_0 + \sum_{i=1}^p M_i(X_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq p} M_{ij}(X_i, X_j) + \dots + M_{1, \dots, p}(X_1, \dots, X_p) \quad (3.12)$$

où

$$M_0 = \int_{\Omega_p} M(X) dX = \mathbb{E}[Y],$$

$$M_i(X_i) = \int_{\Omega_p} M(X) dX_{\sim i} - M_0 = \mathbb{E}[Y | X_i] - \mathbb{E}[Y],$$

$$M_{ij}(X_i, X_j) = \int_{\Omega_p} M(X) dX_{\sim ij} - M_i(X_i) - M_j(X_j) - M_0$$

$$= \mathbb{E}[Y | X_i, X_j] - \mathbb{E}[Y | X_i] - \mathbb{E}[Y | X_j] - \mathbb{E}[Y],$$

où $(X_{\sim i})$ désigne le vecteur contenant tous les paramètres sauf le paramètre (X_i) .

Pour assurer l'unicité de l'équation (3.12), il convient d'imposer des contraintes d'orthogonalité sur les composantes, qui se traduisent par les conditions suivantes[28] :

$$\int_{\Omega^p} M_{i_1, \dots, i_s}(X_{i_1}, \dots, X_{i_s}) dX_{i_k} = 0 \quad \text{pour } 1 \leq k \leq s \text{ et } 1 \leq s \leq p, \quad (3.13)$$

ou bien,

$$\int_{\Omega^p} M_{i_1, \dots, i_s} \cdot M_{j_1, \dots, j_l} dX = 0 \quad \text{pour } 1 \leq l \leq p. \quad (3.14)$$

où, $M(X)$ intégrable sur Ω^p .

Théorème (Décomposition de sobol de la variance)

La variance du modèle à entrées indépendantes peut être décomposer en une somme de variance partielle comme donné ci-dessus [13] :

$$\text{Var}(Y) = \int_{\Omega^p} M^2(X) dX - M_0^2 = V = \sum_{i=1}^p V_i + \sum_{1 \leq i < j \leq p} V_{ij} + \dots + V_{1, \dots, p} \quad (3.15)$$

où :

$$V_i = \text{Var}(\mathbb{E}[Y | X_i]),$$

$$V_{ij} = \text{Var}(\mathbb{E}[Y | X_i, X_j]) - V_i - V_j,$$

⋮

$$V_{1, \dots, p} = V - \sum_{i=1}^p V_i - \sum_{1 \leq i < j \leq p} V_{ij} - \dots - \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{p-1} \leq p} V_{i_1, \dots, i_{p-1}}.$$

On définit l'indice de sobol de premier ordre comme suit : À partir de cette décomposition, on peut calculer les différents indices de sobol jusqu'à l'ordre p .

$$S_i = \frac{\text{Var}(\mathbb{E}[Y | X_i])}{\text{Var}(Y)} = \frac{V_i}{V}, \quad (3.16)$$

qui permet de mesurer l'influence de paramètre X sur la variabilité de Y .

La valeur de (S_i) est toujours comprise entre 0 et 1. Plus cet indice s'approche de 1, plus la variable (X_i) explique une part importante de la variance de (Y) . L'indice de sobol d'ordre p peut être donné par [13] :

$$S_{1,\dots,p} = \frac{V_{1,\dots,p}}{V} \quad (3.17)$$

où $V_{1,\dots,p}$ est la variance de l'espérance conditionnant p variables. Le fait $S_i = 0$, n'implique pas que le paramètre X_i n'a aucune influence sur Y . Il peut agir uniquement par interaction avec d'autres variables. Pour en tenir compte, Homma et Saltelli ont introduit l'*indice de sensibilité total*, qui mesure l'effet global de X_i y compris ses interactions.

Définition

L'indice de sensibilité totale, noté S_i^{tot} est défini par [34] :

$$S_i^{\text{tot}} = \frac{\mathbb{E}_{X_{\sim i}}(\text{Var}_{X_i}[Y | X_{\sim i}])}{\text{Var}(Y)} = \frac{\sum_{i \in \{i_1, \dots, i_s\}} V_{i_1, \dots, i_s}}{V} = \sum_{i \in \{i_1, \dots, i_s\}} S_{i_1, \dots, i_s} \quad (3.18)$$

où $(X_{\sim i})$ désigne le vecteur $((X_1, \dots, X_p))$ privé de la variable (X_i) . Cet indice quantifie l'influence globale de paramètre X_i sur Y , en prenant en compte à la fois son effet direct et toutes ses interactions avec les autres paramètres.

3.5 Estimation des indices de sensibilité

Dans certains cas où les équations du modèle sont complexes ou que le nombre de paramètres est élevé, il devient difficile, voire impossible, de calculer analytiquement les indices de Sobol. Il est donc indispensable de passer à des méthodes d'estimation numérique. Parmi celles-ci, on trouve la méthode FAST (Fourier Amplitude Sensitivity Test) et les approches basées sur des échantillons Monte Carlo, proposées par Sobol, qui sont les plus simples et les plus couramment utilisées.

3.5.1 Technique de simulation Monte-Carlo

La simulation de Monte Carlo a été largement utilisée dans l'analyse de sensibilité par plusieurs auteurs et dans divers domaines au fil des années. Elle est particulièrement populaire pour estimer les indices de Sobol, mais aussi pour d'autres types d'analyses de variance et d'incertitude. Elle repose sur l'échantillonnage aléatoire d'un grand nombre de points dans l'espace des variables d'entrée, afin d'évaluer la variance de la sortie du modèle. Grâce à ces échantillons,

on peut approximer numériquement les quantités nécessaires, comme les espérances conditionnelles ou les variances, qui sont souvent inaccessibles analytiquement.. Pour un problème contenant p paramètres incertains, le principe de base de la méthode est le suivant [6] :

- Générer un échantillon de N réalisations du vecteur aléatoire $X^{(i)} = (X_1^{(i)}, \dots, X_p^{(i)})$ à partir de leur densité de probabilité ;
- Calculer la sortie du modèle déterministe $M(X^{(i)})$ pour chaque réalisation du vecteur aléatoire (X_1, \dots, X_p) ;
- Calculer les statistiques de la distribution de la sortie : moyenne, variance, le coefficient d'asymétrie, densité de probabilité, etc.

Il est possible d'estimer l'espérance et la variance de la sortie Y en utilisant les expressions suivantes :

$$\mathbb{E}[Y] \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N M(x^{(i)}) \quad (3.19)$$

$$\text{Var}[Y] \approx \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N \left(M(x^{(i)}) - \mathbb{E}[Y] \right)^2 \quad (3.20)$$

3.5.2 Estimation des indices de sobol par la méthode Monte-Carlo

L'estimation des indices de sensibilité nécessite l'estimation de la variance de l'espérance conditionnelle :

$$V_i = \text{Var}(\mathbb{E}[Y | X_i])$$

Pour cette estimation, on considère deux matrices indépendantes A et B de taille $N \times p$, contenant des réalisations de variables d'entrée indépendantes $X = (X_1, X_2, \dots, X_p)$, simulées selon leurs lois respectives. L'espérance de Y , $\mathbb{E}[Y] = f_0$ et sa variance totale $\mathbb{V}(Y) = V$ du modèle de sortie $Y = M(X)$ sont estimés à partir des lignes de la matrice A à l'aide des formules suivantes :

$$M_0 \approx \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N M(X_k^{(A)}) \quad (3.21)$$

$$V \approx \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N M^2(X_k^{(A)}) - M_0^2 \quad (3.22)$$

Pour chaque paramètre X_i , on construit une matrice mixte notée $A_B^{(i)}$, obtenue en remplaçant la i -ème colonne de A par celle de B . Chaque ligne de cette matrice est notée $X_k^{(i)}$, dans laquelle le paramètre X_i provient de B et les autres de A .

Ainsi, la variance partielle associée au paramètre X_i est estimée par :

$$V_i = V - \frac{1}{2} \int_{\Omega^p} \left[M(X^{(A)}) - M(X_k^{(i)}) \right]^2 dX^{(A)} dX^{(i)} \approx V - \frac{1}{2N} \sum_{k=1}^N \left[M(X_k^{(A)}) - M(X_k^{(i)}) \right]^2 \quad (3.23)$$

L'indice de Sobol du premier ordre est alors estimé par :

$$S_i = \frac{V_i}{V} \quad (3.24)$$

Inversement, pour mesurer l'effet total de X_i y compris ses interactions avec les autres paramètres, nous estimons la variance partielle totale V_{T_i} , en fixant X_i de B et en prenant les autres paramètres depuis A par la formule suivante :

$$V_{T_i} = \frac{1}{2} \int_{\Omega^p} \left[M(X^{(A)}) - M(X_k^{(\sim i)}) \right]^2 dX^{(A)} dX^{(\sim i)} \approx \frac{1}{2N} \sum_{k=1}^N \left[M(X_k^{(A)}) - M(X_k^{(\sim i)}) \right]^2 \quad (3.25)$$

Ainsi, l'indice de sensibilité totale est estimé par :

$$S_{T_i} = \frac{V_{T_i}}{V} \quad (3.26)$$

Conclusion

Ce chapitre nous a permis de regrouper les outils théoriques nécessaires pour mieux comprendre l'incertitude et son influence sur les modèles financiers. Les notions abordées, comme l'analyse de sensibilité, la simulation Monte Carlo ou les indices de Sobol, nous aideront à évaluer l'effet des paramètres incertains. Toutes ces méthodes seront utilisées dans le chapitre suivant, qui sera consacré à l'application pratique sur une option sur deux actifs.

4

Application

Introduction

Ce chapitre présente l'application concrète du modèle de valorisation d'une option put spread sur deux actifs : le prix de vente et le coût de production. Nous allons ainsi commencer par décrire la collecte des données utilisées, suivie de la modélisation adoptée, en s'appuyant notamment sur la formule de Kirk adaptée à une option spread. L'estimation des paramètres clés du modèle (telles que les volatilités, la corrélation et le taux d'intérêt) sera également détaillée.

Nous procéderons ensuite à l'évaluation de l'option en fonction du strike, puis nous menons une analyse de sensibilité, d'abord locale à l'aide des Greeks, puis globale à travers une simulation et le calcul des indices de Sobol. L'objectif est d'identifier les paramètres ayant le plus d'impact sur la valeur de l'option.

Sommaire

Introduction	43
4.1 Collecte des données	43
4.2 Modélisation	44
4.3 Évaluation d'une option Put spread en fonction du strike	48
4.4 Calcul des grecques	49
4.5 Analyse de sensibilité du modèle	51
Conclusion	57

4.1 Collecte des données

Dans le cadre de notre stage pratique effectué au sein de la direction Finance et Comptabilité de l'entreprise Cevital, on a eu accès à des données réelles concernant le produit smen 500g.

Plus précisément, deux séries de données ont été fournies :

- Le prix de vente unitaire du smen 500g.
- Le coût de production unitaire du smen 500g.

Période observée

Ces données couvrent la période de janvier 2017 à décembre 2022, avec une fréquence mensuelle.

4.2 Modélisation

4.2.1 Modèle utilisé : formule de Kirk

Dans notre étude, nous avons utilisé la formule de Kirk pour le prix d'un put sur spread, donnée par :

$$P_t = (S_2 + ke^{-rT})N(-d_2) - S_1N(-d_1) \quad (4.1)$$

Avec :

$$d_1 = \frac{\log\left(\frac{S_1}{S_2+K}\right) + \frac{\sigma^2}{2}(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad (4.2)$$

$$d_2 = \frac{\log\left(\frac{S_1}{S_2+K}\right) - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \quad (4.3)$$

Et :

$$\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 \left(\frac{S_2}{S_2+K}\right)^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 \left(\frac{S_2}{S_2+K}\right)} \quad (4.4)$$

Où :

- S_1 : Valeur actuelle (spot) du premier actif sous-jacent.
- S_2 : Valeur actuelle (spot) du deuxième actif sous-jacent.
- K : Prix d'exercice (strike) de l'option sur le spread entre les deux actifs.
- r : Taux d'intérêt sans risque.
- T : Temps restant jusqu'à l'échéance de l'option, exprimé en années.
- σ_1 : volatilité du premier actif sous-jacent.
- σ_2 : volatilité du deuxième actif sous-jacent.
- σ : volatilité effective du spread.
- ρ : coefficient de corrélation entre les deux actifs sous-jacents.
- $N(\cdot)$: fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Dans le cadre de notre étude appliquée, les actifs sous-jacents S_1 et S_2 prennent une signification économique précise. Notamment :

$S_1 = 224.17$ DA représente le prix de vente du smen 500g.

$S_2 = 206.54$ DA représente le coût de production du smen 500g.

La différence entre ces deux valeurs représente la marge unitaire réalisée sur chaque produit vendu, soit :

$$\text{Marge} = S_1 - S_2 = 17.63 \text{ DA}$$

C'est cette marge que l'entreprise cherche à protéger contre une éventuelle baisse, à travers la mise en place d'un put sur spread.

4.2.1.1 Calcul de prix d'exercice

Dans le cadre de notre étude, le prix d'exercice K représente le seuil à partir duquel l'entreprise souhaite se protéger contre une baisse de cette marge. Afin d'évaluer l'impacte du prix de l'option à ce paramètre, plusieurs valeurs de K ont été testées dans une plage autour de la marge observée, à savoir $K \in [15; 20]$.

4.2.1.2 Données fixés

Taux d'intérêt sans risque

Selon les conditions du marché algérien, le taux d'intérêt sans risque est supposé constant et fixé à 3%. Ce taux correspond à une approximation du taux directeur fixé par la Banque d'Algérie [2].

$$r = 3\%$$

Ce taux permet d'actualiser les prix. Il reflète les conditions du marché financier local.

Maturité T

Elle représente la durée de couverture que l'entreprise souhaite garantir via l'option. La maturité est fixée à 1 an selon les besoins exprimés par l'entreprise.

4.2.1.3 Calcul des paramètres

A fin de valoriser l'option sur le spread entre S_1 et S_2 , il est nécessaire d'estimer les paramètres clés du modèle. Ces estimations sont effectuées à partir de données mensuelles sur six ans calculé à l'aide d'Excel.

Calcul des rendements

Avant d'estimer les volatilités, nous avons calculé d'abord les rendements logarithmiques (ou géométriques) mensuelles des séries S_1 et S_2 , car ils sont plus adaptés aux modèles financiers comme celui de kirk et respectent l'hypothèse de log-normalité des prix ; ils sont données par :

$$R_{i,t} = \ln \left(\frac{S_{i,t}}{S_{i,t-1}} \right), \quad \text{pour } i = 1, 2$$

où :

- t représente une période mensuelle de janvier à décembre sur 6 ans.
- $S_{i,t}$ représente le prix observé à la date t ,
- $R_{i,t}$ représente le rendement géométrique entre $t - 1$ et t .

Calcul des volatilité

A partir des ces rendements, nous avons calculé les volatilités historiques annualisées par :

$$\sigma_i = \sqrt{12} \times \text{écart-type}(R_{i,t})$$

On obtient ainsi :

$$\sigma_1 = 0.10$$

$$\sigma_2 = 0.19$$

Calcul de la corrélation

La corrélation entre S_1 et S_2 est calculée à partir des rendements logarithmiques par :

$$\rho = \text{Corr}(R_{2,t}, R_{1,t})$$

Le résultat obtenu est :

$$\rho = 0.20843$$

Cette corrélation mesure la liaison entre les évolution des deux actifs. La valeur obtenue indique une liaison positive mais faible, ce qui suggère que les deux actifs ont tendance à évoluer dans le même sens, mais sans forte interdépendance.

4.2.1.4 Vérification de la log-normalité des prix

Afin de vérifier la log-normalité des deux actifs S_1 et S_2 , nous avons appliqué le test de Jarque-Bera. Dans l'algorithme du test, P_v désigne le prix de vente, C_p le coût de production, et $N = 71$ correspond au nombre total d'observations.

Algorithme 1 : Test de normalité des rendements logarithmiques (Jarque-Bera)**Données** : Séries historiques S_1 (coût de production) et S_2 (prix de vente)**Résultat** : Conclusion sur la normalité des rendements log de S_1 et S_2

```

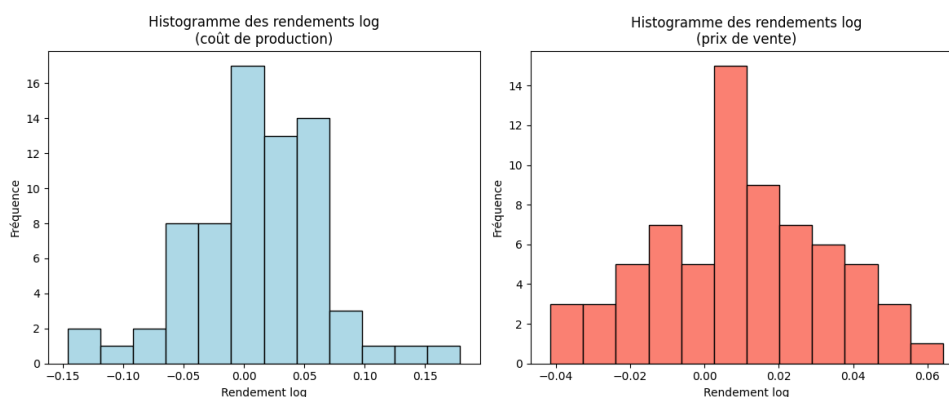
1 début
2   Calculer les rendements logarithmiques :
3   pour chaque  $t$  allant de 2 à  $N$  faire faire
4        $R_1 \leftarrow \ln\left(\frac{P_V[t]}{P_V[t-1]}\right)$ 
5        $R_2 \leftarrow \ln\left(\frac{C_P[t]}{C_P[t-1]}\right)$ 
6   fin
7   Appliquer le test de Jarque-Bera :
8    $(T_1, p_1) \leftarrow \text{JarqueBera}(R_1)$ 
9    $(T_2, p_2) \leftarrow \text{JarqueBera}(R_2)$ 
10  Afficher les résultats :
11  pour  $i \leftarrow 1$  à 2 faire
12      si  $p_i > 0.05$  alors
13          Les rendements de  $S_i$  suivent une loi normale ;
14      sinon
15          Les rendements de  $S_i$  ne suivent pas une loi normale ;
16      fin
17  fin
18  Tracer les histogrammes de  $R_1$  et  $R_2$  ;
19 fin

```

Actif	Statistique T	p-value	Conclusion
Coût de production	5.4547	0.0654	Rendements \approx Normaux
Prix de vente	0.8260	0.6617	Rendements \approx Normaux

TABLE 4.1 – Résultats du test de Jarque-Bera sur les rendements logarithmiques

Nous observons que les statistiques de Jarque-Bera sont inférieures à la valeur critique de 5,99 et que les p-values sont toutes deux supérieures à 5 %.

FIGURE 4.1 – La distribution des rendements log pour S_1 et S_2

D'après les résultats du test l'hypothèse de normalité pour S_1 et S_2 est vérifié, en d'autre terme la distribution des rendements des deux actifs s'approche de la loi normale, c'est-à-dire :

$$R_{i,t} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2), \quad i = \{1, 2\}$$

Après avoir estimé les volatilités à partir des données historiques, fixé le taux sans risque à 3% conformément aux conditions du marché algérien, et choisi différents niveaux de strike K selon les marges visées, nous disposons désormais de l'ensemble des paramètres nécessaires pour appliquer la formule de Kirk.

Cette dernière, bien adaptée à notre contexte, permet d'évaluer le prix de l'option put sur spread que nous étudions. Nous l'appliquons directement avec les valeurs numériques dans l'expression suivante :

$$P_t = (206.54 + ke^{-0.03 \times 1}) \times N(-d_2) - 224.17 \times N(-d_1), \quad \text{avec } K \in [15, 20] \quad (4.5)$$

4.3 Évaluation d'une option Put spread en fonction du strike

Le choix du strike K est une décision centrale dans la mise en place d'une couverture via une option de vente sur spread, afin de sélectionner le niveau de protection pertinent, nous analysons l'évolution de la prime de l'option de vente sur spread en fonction de ce strike.

Nous fixons : $K_{min} = 15$; $K_{max} = 20$.

Algorithme 2 : Valorisation d'un Put Spread selon la formule de Kirk (strikes dans un intervalle)

Données : $S_1, S_2, T, r, \sigma_1, \sigma_2, \rho$, intervalle de strike $[K_{min}, K_{max}]$

Résultat : Liste des put_primes

```

1 début
2   Initialiser put_primes ← liste vide
3   Initialiser  $K \leftarrow K_{min}$ 
4   tant que  $K \leq K_{max}$  faire
5     Calculer  $\sigma$  (volatilité du spread avec corrélation) par (4.4)
6     Calculer  $d_1, d_2$  respectivement par (4.2), (4.3)
7     Calculer le prix  $P_t$  du put spread par (4.1)
8     Ajouter  $P_t$  à la liste put_primes
9   fin
10  Tracer la courbe put_primes en fonction des strikes  $K$ 
11 fin

```

Strike K	15	17.63	20
Valeur actuelle (Kirk)	14.91	16.06	17.18

TABLE 4.2 – Valeur actuelle d'un Put Spread selon la formule de Kirk

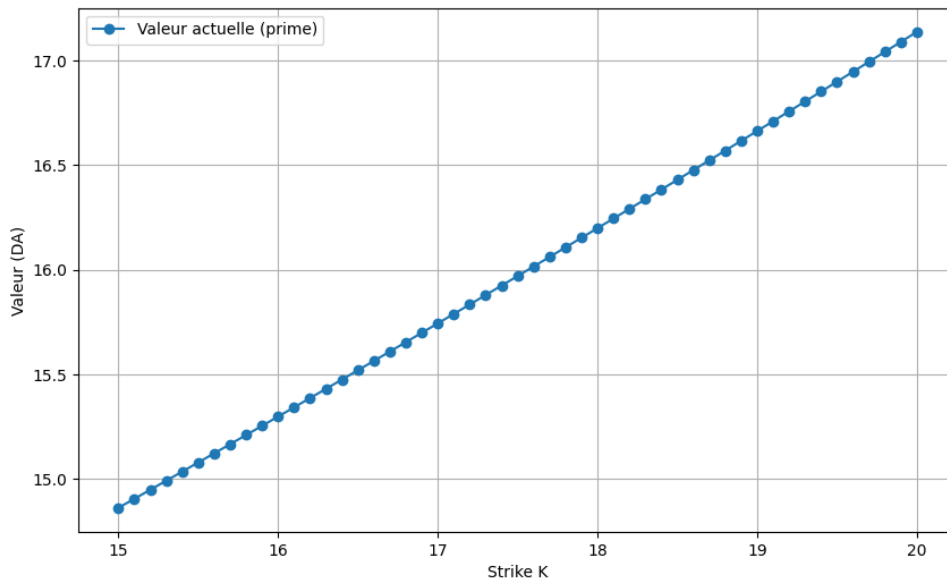


FIGURE 4.2 – Courbe des prix du put spread en fonction de la valeur de K

La figure (4.5) montre que plus le strike est élevé, plus l'option a de chances d'être dans la monnaie à l'échéance et offre une protection importante, ce qui accroît sa valeur actuelle.

Cet analyse permet à l'entreprise de trouver un équilibre entre le niveau de protection souhaité, la probabilité que l'option soit exercée (dans la monnaie), et le coût de la couverture.

4.4 Calcul des grecques

Afin de mieux comprendre la sensibilité locale de la valeur de l'option aux paramètres de marché, nous calculons certaines grecques associées à la formule de Kirk, notamment le vega_1 (sensibilité de P_t par rapport à la volatilité de S_1), le vega_2 (sensibilité de P_t par rapport à la volatilité de S_2), le rho (la sensibilité de P_t par rapport au taux d'intérêt sans risque r) et Corr-grecque (sensibilité de P_t par rapport à la corrélation).

La fonction de répartition normale standard $\mathcal{N}(d)$, utilisée dans la formule de Kirk, a été approximée à l'aide de la fonction d'erreur erf via la relation :

$$\mathcal{N}(d) = \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{erf} \left(\frac{d}{\sqrt{2}} \right) \right)$$

Algorithme 3 : Calcul symbolique de la prime et des grecques d'un put spread (formule de Kirk)

Données : $S_1, S_2, \sigma_1, \sigma_2, \text{Rho}, r, T$, strike K

Résultat : Prime P_t , $Vega_1, Vega_2, \rho$, Corr-grecque

1 début

2 Calculer σ par (4.4).

3 Calculer d_1 et d_2 respectivement par (4.2), (4.3).

4 Calculer P_t par (4.1).

5 Calculer les dérivées partielles ;

$$6 \quad vega_1 \leftarrow \frac{\partial P_t}{\partial \sigma_1}$$

$$7 \quad vega_2 \leftarrow \frac{\partial P_t}{\partial \sigma_2}$$

$$8 \quad rho \leftarrow \frac{\partial P_t}{\partial r}$$

$$9 \quad \text{Corr-grecque} \leftarrow \frac{\partial P_t}{\partial \rho}$$

10 Substituer les valeurs numériques des paramètres ;

11 Évaluer numériquement $P_t, vega_1, vega_2, rho$ et Corr-grecque ;

12 Afficher les résultats obtenus ;

13 fin

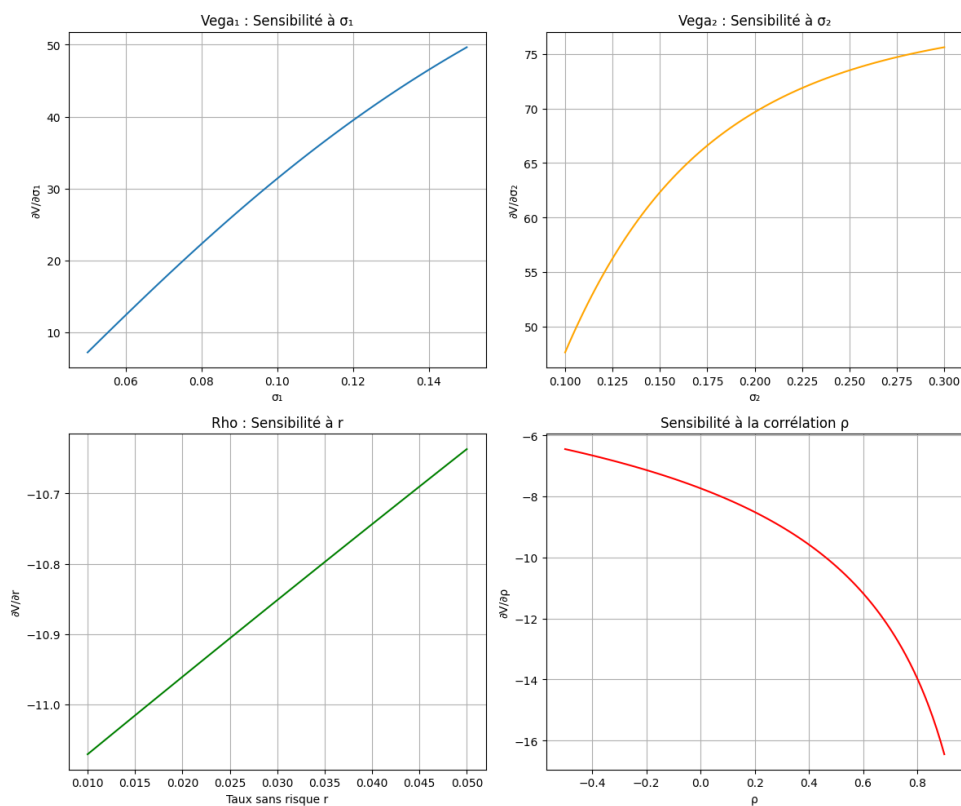


FIGURE 4.3 – Sensibilité de P_t par rapport à σ_1, σ_2, ρ et r .

Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau suivant :

Valeur actuelle	$Vega_1$	$Vega_2$	rho	Corr-grecque
17.18	31.3743	68.6281	-10.8517	-8.5529

TABLE 4.3 – Sensibilité de l’option Put Spread par rapport aux volatilités, taux d’intérêt et corrélation

D’après le tableau (4.3), on voit que le prix de l’option est fortement influencée par la volatilité du coût de production σ_2 par rapport à la volatilité du prix de vente σ_1 qui a peu d’influence sur la prime, ce qui reflète une grande incertitude concernant les fluctuations futurs du coût de production. En revanche, une hausse des taux diminue le prix de l’option et cela permet à l’entreprise de se couvrir contre des risques futurs tout en réduisant les coûts actuels (prime). De plus, la sensibilité négative à la corrélation ρ indique que lorsque les deux actifs évoluent de manière plus conjointe, la volatilité du spread diminue, ce qui réduit la valeur de l’option.

4.5 Analyse de sensibilité du modèle

4.5.1 Analyse de sensibilité globale

4.5.1.1 Nouveau modèle

Comme mentionné précédemment, la formule de Kirk repose sur l’hypothèse que certains paramètres tels que les volatilités (σ_1, σ_2), le taux d’intérêt r et la corrélation ρ sont constants, cependant cette hypothèse ne reflète pas l’incertitude présente dans les conditions réelles du marché. Pour tenir compte de cette incertitude, nous considérons comme suit :

$$\sigma_1 = \bar{\sigma}_1 + \sigma_{\sigma_1} \cdot \varepsilon_1 \quad (4.6)$$

$$\sigma_2 = \bar{\sigma}_2 + \sigma_{\sigma_2} \cdot \varepsilon_2 \quad (4.7)$$

$$r = \bar{r} + \sigma_r \cdot \varepsilon_3 \quad (4.8)$$

$$\rho = \bar{\rho} + \sigma_\rho \cdot \varepsilon_4 \quad (4.9)$$

où

- $\bar{\sigma}_1$ et σ_{σ_1} représentent respectivement la moyenne et l’écart type de la volatilité du prix de vente.
- $\bar{\sigma}_2$ et σ_{σ_2} représentent respectivement la moyenne et l’écart type de la volatilité du coût de production.
- \bar{r} et σ_r représentent respectivement la moyenne et l’écart type du taux d’intérêt sans risque.
- $\bar{\rho}$ et σ_ρ représentent respectivement la moyenne et l’écart type de la corrélation entre S_1 et S_2 .
- $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0, 1)$ représente le bruit blanc de la loi Normale appliqué aux 4 paramètres, utilisé pour modéliser des fluctuations modérées autour de la moyenne.
- $\varepsilon \sim \mathcal{T}_4$ représente un bruit blanc de loi Student, utilisé pour simuler des chocs extrêmes et rares.

Mais avant d'introduire l'incertitude sur ces paramètres, on doit d'abord estimer leurs moyenne et écart-type à partir des données historiques sur chaque année pendant 6 ans. Le calcul sur Excel a donné les résultats suivant :

Année	Volatilité1	Volatilité2
2017	0,019333142	0,107820588
2018	0,000000000	0,131266892
2019	0,000000000	0,291875772
2020	0,096812589	0,241405175
2021	0,148462987	0,134811079
2022	0,144822195	0,170337804

TABLE 4.4 – Tableau des volatilités calculés

La moyenne de la volatilité :

$$\bar{\sigma}_i = \text{Moyenne}(\sigma_i), \quad \text{pour } i = 1, 2$$

Avec

$$\text{Moyenne}(\sigma_i) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sigma_{i,j}, \quad \text{pour } j \in [1; 6]$$

L'écart-type de la volatilité :

$$\sigma_{\sigma_i} = \text{écart-type}(\sigma_{i,j})$$

Avec

$$\text{écart-type}(\sigma_i) = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (\sigma_{i,j} - \bar{\sigma}_i)^2}$$

Les résultats estimés sont données par :

$$\bar{\sigma}_1 = 0.0650, \quad \bar{\sigma}_2 = 0.1796, \quad \sigma_{\sigma_1} = 0.0735, \quad \sigma_{\sigma_2} = 0.0721$$

La moyenne de la corrélation :

$$\bar{\rho} = \text{Moyenne}(\rho_j), \quad j = 1, \dots, 6$$

L'écart-type de la corrélation :

$$\sigma_{\rho} = \text{écart-type}(\rho_j)$$

Les valeurs obtenus sont :

$$\bar{\rho} = 0.1018, \quad \sigma_{\rho} = 0.1335$$

La moyenne et l'écart-type du taux d'intérêt :

En absence de données historiques sur le paramètre r , une loi uniforme sur l'intervalle $[0.01, 0.05]$ a été retenue afin de simuler des valeurs autour de la valeur de référence $r = 0.03$.

Après la simulation on a obtenu les résultats suivant :

$$\bar{r} = 0.0298, \quad \sigma_r = 0.0014$$

4.5.1.2 Formule du modèle

$$P_t = \left[(S_2 + K e^{-(\bar{r} + \sigma_r \cdot \varepsilon_3)T}) \cdot \mathcal{N}(-d_2) - S_1 \cdot \mathcal{N}(-d_1) \right] \tag{4.10}$$

$$\sigma = \sqrt{(\bar{\sigma}_1 + \sigma_{\sigma_1} \cdot \varepsilon_1)^2 + (\bar{\sigma}_2 + \sigma_{\sigma_2} \cdot \varepsilon_2)^2 \left(\frac{S_2}{S_2 + K} \right)^2 - 2(\bar{\rho} + \sigma_{\rho} \cdot \varepsilon_4)(\bar{\sigma}_1 + \sigma_{\sigma_1} \cdot \varepsilon_1)(\bar{\sigma}_2 + \sigma_{\sigma_2} \cdot \varepsilon_2) \left(\frac{S_2}{S_2 + K} \right)} \tag{4.11}$$

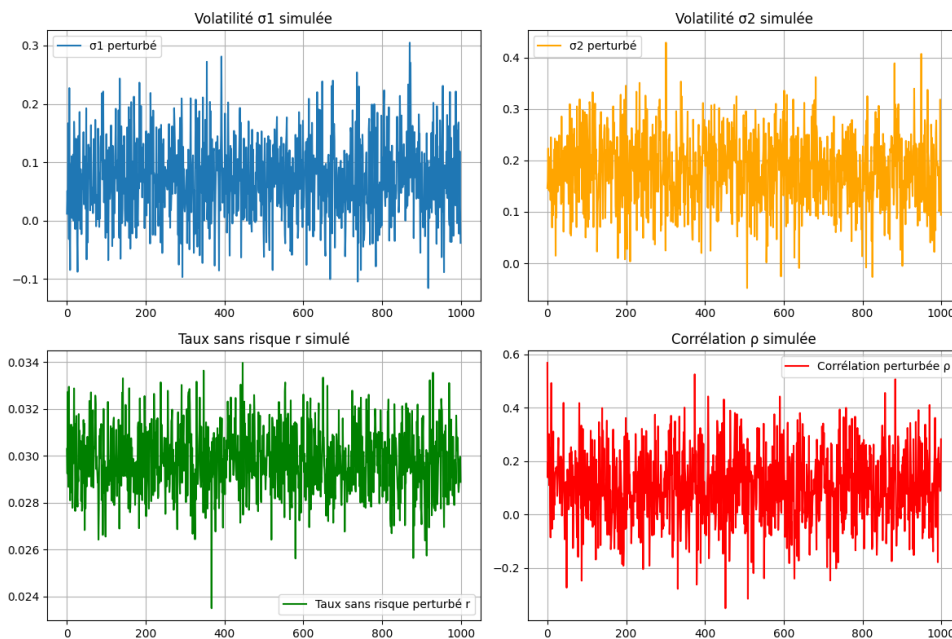


FIGURE 4.4 – Simulation des paramètres incertains selon la loi normale.

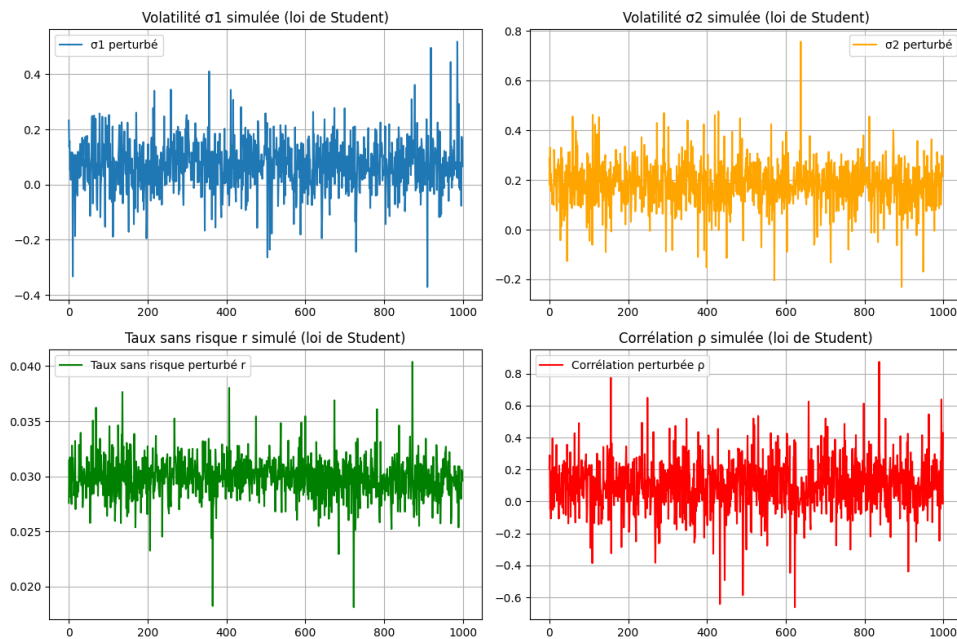


FIGURE 4.5 – Simulation des paramètres incertains selon la loi student.

Nous fixons $N = 1000$.

Algorithme 4 : Simulation Monte Carlo du prix d'un put spread selon la formule de Kirk

Données : $S_1, S_2, T, K, N, \bar{\sigma}_1, \sigma_{\sigma_1}, \bar{\sigma}_2, \sigma_{\sigma_2}, \bar{r}, \sigma_r, \bar{\rho}, \sigma_\rho$

Résultat : Prix simulés du put spread, moyenne, écart-type, quantiles

```

1  début
2  Initialiser put ← tableau de taille  $N$  rempli de zéros
3  pour  $i \leftarrow 1$  à  $N$  faire
4      Générer  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$  suivant une loi normale ou de Student
5       $\sigma_1 \leftarrow \bar{\sigma}_1 + \sigma_{\sigma_1} \cdot \varepsilon_1$ 
6       $\sigma_2 \leftarrow \bar{\sigma}_2 + \sigma_{\sigma_2} \cdot \varepsilon_2$ 
7       $r \leftarrow \bar{r} + \sigma_r \cdot \varepsilon_3$ 
8       $\rho \leftarrow \bar{\rho} + \sigma_\rho \cdot \varepsilon_4$ 
9      Calculer  $\sigma, d_1$  et  $d_2$  respectivement par (4.2), (4.3)
10     Calculer la prime  $P_t$  par (4.1)
11  fin
12  Calculer la moyenne, l'écart-type, le quantile 5% et 10% de put
13  fin

```

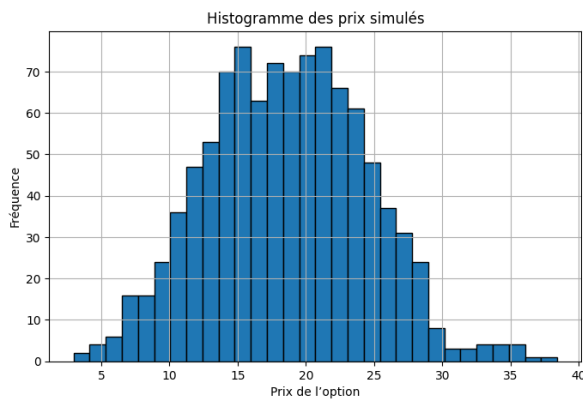


FIGURE 4.6 – Loi Normale

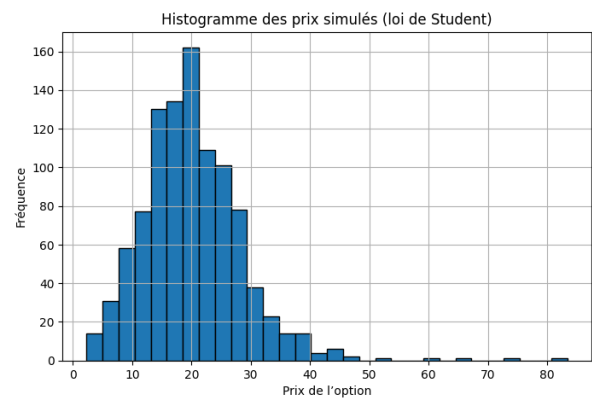


FIGURE 4.7 – Loi de Student

FIGURE 4.8 – Histogrammes des prix simulés selon différentes lois de perturbation

Distribution	V.Réelle	Moyenne	Éc.-type	Q5%	Q10%	Skew.	Kurt.	Var5%
Normale	17.184	18.623	5.820	9.162	11.130	0.129	2.851	9.161
Student (ddl = 4)	17.184	20.149	8.377	8.212	10.357	1.316	8.903	8.214

TABLE 4.5 – Statistiques du prix simulé du put spread selon différentes lois de perturbation

D’après les résultats obtenus, on observe que la valeur moyenne de l’option augmente lorsque l’incertitude devient plus forte ou lorsque les scénarios deviennent plus extrêmes.

► **Selon la loi normale :**

La distribution simulée est relativement stable et symétrique , avec une prime moyenne de 18.62DA légèrement supérieure à la valeur actuelle. L’option conserve une valeur significative dans la majorité des cas, et même dans les pires scénarios (quantile 5% = 9.16DA), elle ne perd pas totalement sa valeur. Cela indique une bonne probabilité d’exercice et une protection fiable, mais avec des risques extrêmes modérés.

Selon la loi des trois sigma, il y a environ 68% de chances que la valeur de l’option soit entre 12.80 DA et 24.44 DA.

► **Selon la loi student :**

La prime moyenne est plus élevée (20.15 DA) et la distribution est plus dispersée, avec une forte asymétrie avec des queues épaisses (valeurs extrêmes fréquents) . Cela reflète un marché plus incertain, avec un risque élevé de chute brutale de la marge. Dans ce cas l’option protège efficacement contre les risques de crise, avec une probabilité plus élevée de gros gains mais aussi de pertes.

4.5.1.3 Estimation des indices de sobol par la simulation de Monte-Carlo

Dans cette partie, nous nous intéressons à l’analyse de sensibilité globale, en particulier à travers le calcul des indices de Sobol afin d’identifier les variables qui contribuent le plus à l’incertitude globale du modèle.

Algorithme 5 : Sobol par Monte Carlo classique – modèle de Kirk

Données : Taille d'échantillon N , nombre de paramètres $d = 4$, bornes de $\sigma_1, \sigma_2, r, \rho$; constantes S_1, S_2, K, T

Résultat : Indices de Sobol : S_i, S_{T_i}, S_{ij}

```

1 début
2   Générer deux matrices indépendantes  $A$  et  $B$  de taille  $N \times p$ 
3   Calculer la prime  $P_t$   $A$  et  $B$ 
4   Calculer la moyenne  $M_0$  et la variance  $V$  respectivement par (3.21),(3.22).
5   pour chaque paramètre  $i$  faire
6     Construire la matrice mixte  $AB_i$ 
7     Calculer la prime  $P_t$  sur  $AB_i$ 
8     Calculer les variances partielles associés au taux d'interet, les volatilité et la
        corrélation par la formule (3.23).
9     Calculer les indices de sobol de premier ordre  $S_i$  et l'indice total  $S_{T_i}$ 
        respectivement par les formules (3.24), (3.26)
10  fin
11  pour chaque paire de paramètres  $(i, j)$  faire
12    Construire la matrice mixte  $AB_{ij}$ 
13    Calculer  $P_t$  sur  $AB_{ij}$ 
14    Calculer les variances partielles  $V_{T_i}$  (effet total)
15    Calculer l'indice total  $S_{ij}$  par la formule (3.25)
16  fin
17  Afficher les indices  $S_i, S_{T_i}$  et  $S_{ij}$ 
18 fin

```

Les valeurs de ces estimations sont également illustrées par les diagrammes en baton dans la figure (4.9).

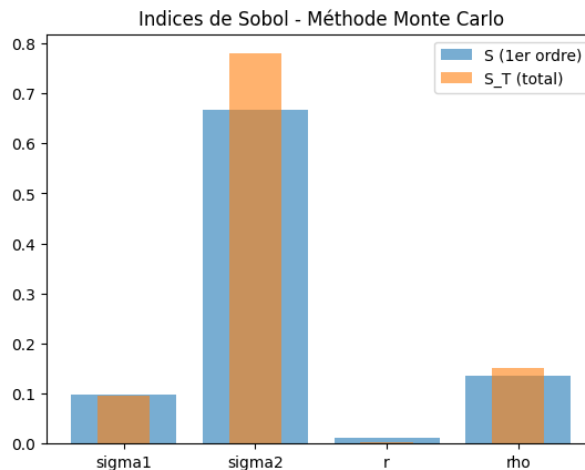


FIGURE 4.9 – Indice de Sobol.

Indice	S_{σ_1}	S_{σ_2}	S_r	S_ρ
Indices de premier ordre	0,098	0,667	0,011	0,135
Indices totaux	0,095	0,779	0,004	0,151

TABLE 4.6 – Indices de Sobol

Interaction	$\sigma_2 \times \rho$
Indice S_{ij}	0,014

TABLE 4.7 – Interactions entre paramètres (S_{ij}) significatives

Aucune autre interaction significative détectée.

D’après les résultats numériques obtenus, il est clair que la volatilité du coût de production σ_2 est le paramètre le plus influent sur la valorisation de l’option de vente, ce qui montre une grande incertitude sur les charges de fabrication. En plus de son effet direct, σ_2 intervient également dans des interactions avec d’autres paramètres, ce qui est justement reflété par le fait que son indice total est supérieur à son indice d’ordre 1. En revanche pour les autres paramètres les indices totaux sont très proches des indices normaux, cela signifie que les interactions entre les paramètres sont faibles ou négligeables.

Conclusion

L’étude appliquée développée dans ce chapitre montre l’intérêt d’une approche structurée pour valoriser une option sur spread dans un cadre industriel. Le modèle de Kirk, associé à une analyse de sensibilité approfondie, permet de comprendre l’impact des paramètres clés sur le prix de l’option. Ce travail aide ainsi à mieux gérer les risques liés à la volatilité des prix et à construire une stratégie de couverture.

Conclusion générale et travaux futures

Ce mémoire s'est inscrit dans une double perspective, théorique et appliquée, visant à analyser la valorisation et la sensibilité d'une option de vente sur spread dans un contexte industriel réel. À travers l'exemple du complexe Cevital, nous avons exploré comment les outils de la finance quantitative peuvent être mobilisés pour accompagner les entreprises dans la gestion de leurs risques opérationnels, en particulier ceux liés à la volatilité des prix de vente et des coûts de production.

Le premier chapitre a permis de contextualiser l'étude en présentant l'organisation de l'entreprise Cevital et les spécificités économiques et opérationnelles de son activité.

Le second chapitre a été consacré à la revue de la littérature financière, en posant les bases théoriques liées aux marchés financiers, aux produits dérivés, aux options sur deux actifs et aux modèles de valorisation tels que Black-Scholes et la formule de Kirk.

Le troisième chapitre a introduit les outils statistiques et probabilistes nécessaires à l'analyse, propagation d'incertitude et méthodes d'analyse de sensibilité, locale et globale.

Enfin, le quatrième chapitre a consisté en une application concrète de ces outils à partir de données réelles issues de l'entreprise : estimation des paramètres, valorisation de l'option à l'aide de la formule de Kirk, simulations de Monte Carlo, analyse de sensibilité via les grecques et les indices de Sobol, et formulation de recommandations pratiques pour la gestion du risque de marge.

L'ensemble de cette démarche a permis de mettre en évidence l'impact significatif des paramètres de volatilité et de corrélation sur la valorisation de l'option, tout en soulignant l'intérêt des simulations pour appréhender l'incertitude inhérente à la réalité industrielle. Les résultats obtenus offrent des pistes concrètes pour orienter les décisions de couverture, en particulier sur le choix du strike et la surveillance des facteurs de risque dominants.

Cependant, certaines limites méritent d'être mentionnées. D'une part, le modèle de Kirk repose sur des hypothèses simplificatrices, notamment la log-normalité des actifs et la constance des volatilités et de la corrélation, qui peuvent ne pas refléter fidèlement les conditions d'un environnement industriel réel. D'autre part, les paramètres utilisés dans la valorisation ont été estimés à partir de données historiques limitées, ce qui peut affecter la fiabilité des résultats. Enfin, le modèle n'intègre pas de calibration dynamique : les paramètres sont supposés fixes, ce qui ne permet pas de capturer leur évolution dans le temps.

En perspective, des approfondissements futurs pourraient inclure l'intégration de modèles stochastiques plus réalistes, une analyse multi-produits, ou encore l'évaluation dynamique de la performance des stratégies de couverture dans des contextes économiques variés. Ce mémoire constitue ainsi une première contribution vers une meilleure articulation entre les outils de la finance quantitative et les besoins concrets de gestion du risque en entreprise, tout en ouvrant la voie à des travaux futurs sur les options multi-actifs en contexte incertain.

Bibliographie

- [1] ALI, F. H. *Étude comparative du modèle GARCH(1,1) univarié et de la simulation historique dans les prévisions de Value at Risk et Expected Shortfall*. Thèse de doctorat, Université de Montréal, 2010.
- [2] BANQUE D'ALGÉRIE. Statistiques associées – taux directeur à 3% (mai 2025). <https://www.bank-of-algeria.dz/statistiques-associees/>.
- [3] BLACK, F., AND SCHOLES, M. The pricing of options and corporate liabilities. *The Journal of Political Economy* 81 (1973), 637–654.
- [4] BRAD, S. C. Interpretation of the kurtosis statistic. *Journal of Taylor & Francis* 24 (1970), 19–22.
- [5] CHORRO, C. Introduction à la théorie des options financières. Rapport technique, École Supérieure de Commerce de Reims, 2008.
- [6] FATEH, C. *Analyse de sensibilité et quantification de l'incertitude épistémique dans les modèles financiers*. Thèse de doctorat en mathématiques appliquées, Université Abderrahmane Mira de Béjaïa, 2021.
- [7] GILLET, O., AND HÜBNER, G. *La gestion de portefeuille : Instruments, stratégie et performance*. De Boeck Supérieur, 2019.
- [8] HAUG, E. G. *The Complete Guide to Option Pricing Formulas*, 2nd ed. McGraw-Hill, New York, 2007.
- [9] HELTON, J. C., AND DAVIS, F. J. Latin hypercube sampling and the propagation of uncertainty in analyses of complex systems. *Reliability Engineering & System Safety* 81, 1 (2003), 23–69.
- [10] Hoeffding, W. A class of statistics with asymptotically normal distribution. *The Annals of Mathematical Statistics* 19 (1948), 293–325.
- [11] HUGUES, I. *Propagation Analytique de l'incertitude à travers le calcul matriciel d'une analyse du cycle de vie*. PhD thesis, Université de Montréal, 2010.
- [12] HULL, J. C. *Options, Futures, and Other Derivatives*, 8th ed. Pearson Education, Upper Saddle River, NJ, 2012.
- [13] IOOSS, B., AND PRIEUR, C. Shapley effects for sensitivity analysis with dependent inputs : comparisons with sobol' indices, numerical estimation and applications. *Reliability Engineering & System Safety* 2 (2018), 1707–1334.
- [14] JERBI, Y. *Évaluation des options et gestion des risques financiers par les réseaux de neurones et par les modèles à volatilité stochastique*. Thèse de doctorat, Paris 1 Panthéon-Sorbonne, 2006.

- [15] KANE, K. *Méthodes Monte Carlo pour l'évaluation des paramètres de sensibilité des valeurs d'options sur plusieurs actifs sous-jacents*. PhD thesis, Université de Montréal, 2006.
- [16] KAROUI, N. E., AND GOBET, E. Les outils stochastiques des marchés financiers : une visite guidée de einstein à black-scholes. Tech. rep., École Polytechnique, 2011.
- [17] KHIMOUM, N. Notions fondamentales en probabilités et statistique — chapitre 2. Document pédagogique interne, 2009. Support de cours, année universitaire 2008–2009.
- [18] KIRK, E. *Correlation in the Energy Markets*, vol. 1. Risk Publications, 1995, pp. 71–78.
- [19] MARCEAU, L., AND DEVYLDER. Explicite analytic ruin probabilities for bounded claims. *Insurance : Mathematics and Economics*.
- [20] MARGRABE, W. The value of an option to exchange one asset for another. *Journal of Finance* 33, 1 (1978), 177–186.
- [21] MATTHEW, J. K. Comparison of option price from black-scholes model to actual values, 2016. Honors Research Projects.
- [22] MEGHARA, L. La règle 68-95-99.7, octobre 2021. Article publié sur le blog personnel de Lyes Meghara.
- [23] MISHKIN, F. *Monnaie, Banque et Marchés Financiers*, 10 ed. Pearson France, Montreuil, 2007.
- [24] MUNIESA, F. Comment la bourse fait ses prix : ethnographie d'un cours d'action boursière, 2011.
- [25] RAKOTOMALALA, R. Tests de normalité – techniques empiriques et tests statistiques, 2008. Version 2.0, Université Lumière Lyon 2, document pédagogique.
- [26] SAPORTA, G. *Probabilités, analyse des données et statistique*, 2e édition révisée et augmentée ed. Éditions Technip, 27 rue Ginoux, 75737 PARIS Cedex 15, France, 2006.
- [27] SHINDE, A., AND TAKALE, K. Study of black-scholes model and its applications. *Procedia Engineering* 38 (2012), 270–279.
- [28] SOBOL, I. Sensitivity estimates for nonlinear mathematical models. *Russian Academy of Sciences I* (1993), 407–414.
- [29] TAKHEDMIT, B. Cours processus aléatoires avancés, 2020. République Algérienne Démocratique et Populaire, Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique, Recherche Opérationnelle.
- [30] TAYLOR, J. R. *Incertitudes et analyse des erreurs dans les mesures physiques*, 1er et 2e cycles, Écoles d'ingénieurs ed. Masson Sciences et Dunod, Paris, 1996. Traduit de l'américain par Lionel et Patrick Reynaud.
- [31] TURANYI, T. Sensitivity analysis of complex kinetic systems, tools and applications. *Journal of Mathematical Chemistry* (1990).
- [32] WARLOP, R. Modèle de black-scholes. Rapport technique, École Normale Supérieure de Cachan, 2011.
- [33] WEISS, N. A. *A Course in Probability*. Addison-Wesley, 2006.
- [34] WILMOTT, P., HOWISON, S., AND DEWYNNE, J. *The Mathematics of Financial Derivatives*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

Résumés

Résumé

Ce mémoire porte sur l'évaluation d'une option put européenne sur spread à deux actifs, appliquée au cas réel du smen 500g de l'entreprise Cevital. Le prix de l'option est estimé à l'aide de la formule de Kirk, après calcul des paramètres nécessaires à partir de données historiques, notamment les volatilités, le taux d'intérêt sans risque et la corrélation entre les actifs. Plusieurs niveaux de prix d'exercice ont été considérés afin d'analyser l'impact du strike sur la couverture. Une simulation Monte Carlo a été utilisée pour introduire l'incertitude sur les paramètres, et une analyse de sensibilité a été menée à l'aide des indices de Sobol pour identifier les variables les plus influentes sur le prix de l'option.

Mots-clés : option sur spread, formule de Kirk, indices de Sobol, analyse de sensibilité.

Abstract

This work focuses on valuing a European put option on a two-asset spread, applied to the real-world scenario of Cevital's 500g smen. The option's price is estimated using Kirk's formula, after calculating the necessary parameters from historical data. These parameters primarily include volatilities, the risk-free interest rate, and the correlation between the assets. We considered several strike price levels to analyze the strike's impact on the hedge. To incorporate parameter uncertainty, a Monte Carlo simulation was employed. Finally, a sensitivity analysis was conducted using both Greeks and Sobol indices to pinpoint the most influential variables affecting the option's price.

Keywords : spread option, Kirk's formula, Sobol indices, sensitivity analysis.