



République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université A.MIRA-BEJAIA  
Faculté de Technologies  
Département de Génie électrique  
Laboratoire de Technologie Industrielle et de l'Information(LTII)

# THÈSE

Présentée par

**Mr IKNI Samir**

Pour l'obtention du grade de

**DOCTEUR EN SCIENCES**

Filière : Automatique et traitement du signal

Option : Système

Thème

**Techniques de commandes avancées des Robots Manipulateurs Mobiles**

Soutenue le: 07 juillet 2025.

Devant le Jury composé de :

<b>Nom et Prénom</b>	<b>Grade</b>		
<b>Mr MENDIL Boubekur</b>	Professeur	Univ.de Bejaia	Président
<b>Mr ACHOUR Adbelyazid</b>	Professeur	Univ.de Bejaia	Rapporteur
<b>Mr BENSALIA Yassine</b>	Professeur	Univ.de Bouira	Examineur
<b>Mr HOCINE Adbelfatah</b>	M.C.A.	ENSM. d'Alger	Examineur

**Année Universitaire : 2024/2025**

## Remerciements

Je remercie tout d'abord **ALLAH** de m'avoir prêté santé et volonté pour mener à terme cette thèse du doctorat.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à mon directeur de recherche, le Professeur ACHOUR Abdelyazid, pour avoir accepté d'encadrer mes travaux. Son intérêt, son soutien indéfectible, sa grande disponibilité et ses précieux conseils ont joué un rôle essentiel dans la réalisation de cette thèse.

Je remercie également tous les membres du jury de m'avoir fait l'honneur d'évaluer cette thèse :

Monsieur MENDIL Boubekour, Professeur à l'Université de Bejaia, d'avoir accepté de juger mon travail et de présider le jury de soutenance de cette thèse.

Messieurs BENSAFIA Yassine, Professeur à l'Université de BOUIRA, et HOCINE Abdelfattah, maître conférence classe A à l'Ecole Nationale Supérieure de Mathématiques, pour m'avoir fait l'honneur d'accepter d'être les examinateurs de cette thèse.

Je tiens à exprimer mes plus vifs remerciements à Monsieur FEDELE Giuseppe Professeur à l'Université de Calabria Italie et Dr. BENTCHIKOU Ibrahim, Dr. BLAIFI Sid Ali et KIROUANE Amer pour leurs conseils au cours de l'élaboration de cette thèse.

Enfin, Je tiens à exprimer ma gratitude à toutes les personnes qui m'ont soutenu, de près ou de loin, tout au long de mon parcours.

Remerciements	I
Listes des figures	II
Liste des Tableaux	III
Liste des symboles	IV
<b>Introduction générale</b>	<b>01</b>
<b>Chapitre I Etat de l'art sur les bras manipulateurs mobile</b>	<b>03</b>
I. Introduction	03
I.2Motivation	03
I.3Synthèses de quelques travaux relatifs à la commande des bras manipulateurs mobiles	04
I.3.1Bras manipulateur mobile	04
I.3.2 Applications des manipulateurs mobiles	05
I.3.2.1 Parachèvement des pièces	05
I.3.2.2 Exploration spatiale	06
I.3.2.3 Agriculture	07
I.3.2.4 Génie civil	07
I.3.2.5 Exploration sous-marin	08
I.4 Commande des manipulateurs mobiles	09
I.5 Conclusion	10
<b>Chapitre II Modélisation</b>	<b>11</b>
II.1 Introduction	11
II.2Modélisation du bras manipulateur	11

II.2.1 Articulation	11
II.2.2 Transformation homogène	12
II.2.2.1 Matrice de transformation de translation	13
II.2.2.2 Matrice de transformation de rotation	13
II.2.3 Différentes structures de la chaîne d'un bras manipulateur	14
II.3 Description d'un bras manipulateur	15
II.4 Modélisation d'un bras manipulateur	16
II.4.1 Modèle géométrique direct	17
II.4.2 Le modèle géométrique inverse	17
II.4.3 Modèle cinématique direct	18
II.4.4 Modèle cinématique inverse	19
II.4.5 Modèle dynamique direct	19
II.4.5.1 Le calcul de la matrice $M(q)$	21
<i>A. Energie cinétique totale du robot manipulateur</i>	21
<i>B. L'énergie potentielle</i>	21
<i>C. Détermination des matrices du modèle dynamique</i>	21
<i>D. Calcul des éléments de la matrice <math>M(q)</math></i>	22
<i>E. Les symboles de Christoffel</i>	23
II.4.6 Exemple illustratif sur un BM a deux degrés de liberté	24
II.5 La plateforme mobile	29
II.5.1 Les robots mobiles à roues	29
II.5.2 Présentation de la plateforme mobile	29
II.5.3 Modèle de la de la plateforme	29
II.6 Types des roues	30

II.6.1 Roues conventionnelles	30
A. La roue fixe	30
B. La roue directrice	31
C. La roue folle	31
II.6.2 Roues suédoises	32
II.7 Robot mobile à deux roues différentielles	32
II.7.1 Modèle cinématique du robot mobile	34
II.7.2 Contraintes cinématiques du robot à entraînement différentiel	37
II.7.3 Modèle dynamique du robot mobile non-holonome	38
II.8 Modélisation d'un bras manipulateur mobile à roues	40
II.8.1 Modèle géométrique direct	41
II.8.2 Modèle cinématique direct	42
II.8.3 Modèle cinématique inverse	43
II.8.4 Modèle dynamique direct	43
II.9 Conclusion	48
<b>Chapitre III Commande basée sur la linéarisation par rétroaction</b>	<b>49</b>
III.1 Introduction	49
III.2 Commande basée sur la linéarisation par rétroaction d'un robot manipulateur mobile	49
III.3 Modélisation du manipulateur mobile à roues	49
III.3.1 Le modèle cinématique	50
III.3.2 Modélisation dynamique	52

III.3.2.1 Détermination des matrices $M(q), C(q, \dot{q}), A(q)$ et $B(q)$	53
III.3.3 Suivi de trajectoire	56
III.4 Validation du système en boucle fermée par des tests de simulation	58
A. Premier test	59
B. Deuxième test	61
III.5 Conclusion	63
<b>Chapitre IV : Commande adaptative basée sur la passivité d'un robot manipulateur mobile</b>	<b>64</b>
IV.1 Introduction	64
IV.2 Modélisation dynamique du manipulateur mobile	65
IV.3 Conception des lois de commande	70
IV.3.1 Régulateur PID	70
IV.3.2 Commande adaptative basé sur la passivité	71
A. Propriété de la matrice d'inertie $D(q)$	73
B. Propriété de la matrice des forces centrifuge et Coriolis $F(q, \dot{q})$	73
C. Propriété de passivité du MD du BMM	73
IV.4 Validation de la CABP par des tests de simulations	78
IV.5 Conclusion	83
<b>Conclusion générale</b>	<b>84</b>
Annexe A	86
Références Bibliographiques	88

## Liste des figures

---

Figure I.1 : Plateforme mobile KMR QUANTEC [17]	06
Figure 1.2 : Le robot « Curiosity » [18]	06
Figure I.3 : Robot autonome pour récolter les fruits rouges [21]	07
Figure 1.4 : Le robot « PaintUP » [23]	08
Figure 1.5 : Robot sous-marins «ROV H2000 » télécommandé du groupe « Eca-Hytec »[24]	08
Figure II.1 : Représentations symboliques des articulations du robot [39]	12
Figure II.2 : Représentation des translations selon les axes X, Y et Z.	13
Figure II.3 : Représentation des rotations autour des axes X, Y et Z.	14
Figure II.4 : Types de chaînes d'un bras manipulateur	14
Figure II.5 : Structure d'un bras manipulateur à chaîne ouverte.	15
Figure II.6 : Paramètre de « Denavit-Hartenberg »	15
Figure II.7 : Caractéristiques du $i^{\text{ième}}$ segment d'un bras manipulateur	19
Figure II.8 : Bras manipulateur à deux degrés de liberté	24
Figure II.9 : Modèle simplifié d'une PM	30
Figure II.10 : La roue fixe	30
Figure II.11 : La roue folle	31
Figure II.12 : La roue suédoise	32
Figure II.13 : Le robot mobile « Pioneer 3DX »	33
Figure II.14 : Robot mobile à roues différentielles	33
Figure II.15 : Bras manipulateur mobile à roues	40

Figure III.1 : Système mobile de manutention [50]	50
Figure III.2 : Système en boucle fermé commandé par la technique LPR	57
Figure III.3 : Suivi de la trajectoire de référence par le BMM	59
Figure III.4 : Evolution de la manipulabilité	60
Figure III.5 : Allure de la vitesse linéaire	60
Figure III.6 : Allure de la vitesse angulaire des roues droite et gauche	60
Figure III.7: Suivi de la trajectoire par le robot	61
Figure III.8 : Position finale du robot	61
Figure III.9 : Allure de la vitesse linéaire	62
Figure III.10 : Evolution de la manipulabilité	62
Figure III.11 : Allure de la vitesse angulaire des roues droite et gauche	63
Figure IV.1 : Représentation du bras manipulateur mobile à deux roues	66
Figure IV.2 : Structure du schéma de contrôle	78
Figure IV.3 : Comportement du BMM sans perturbations, commandé par un PID	80
Figure IV.4 : Comportement du BMM sans perturbations, commandé par la CABP	80
Figure IV.5 : Comportement du BMM avec perturbations à $t=10s$ , commandé par un PID	81
Figure IV.6 : Comportement du BMM avec perturbations à $t=10s$ , commandé par la CABP	81
Figure IV.7 : Allures des signaux de commande avec des perturbations appliquées à $t=10s$ pour le BMM commandé par un PID	82
Figure IV.8 : Allures des signaux de commande avec des perturbations appliquées à $t=10s$ pour le BMM commandé par la CABP	82

## **Liste des tableaux**

---

Tableau II.1 Configuration de Denavit-Hartenberg du robot à deux ddl	24
Tableau III.1 : Paramètres du BMM étudié [50].	58

## Acronymes et liste des symboles

---

### **Acronymes :**

BMM : Robot manipulateur mobile.

CABP : Commande adaptative basée sur la passivité

CBP : Commande basée sur la passivité

ddl : Degré de Liberté.

DH : DenavitHartenberg.

LPR : Linéarisation par rétroaction

MD : Modèle dynamique

PID : Proportionnel – Intégral- Dérivé

PM : Plateforme mobile

RM : Robot mobile.

### **Symboles :**

$\tau(q)$ : Vecteur des couples.

$\tau_p(q)$ : Vecteur des couples des perturbations externes

$\tau_r$  : Couple de la roue droite de la plateforme mobile.

$\tau_l$ : Couple de la roue gauche de la plateforme mobile.

$\tau_1, \tau_2$ : Les couples de la première l'articulation et de la deuxième respectivement du bras manipulateur.

$\theta_l, \theta_r$ : L'angle de rotation de la roue gauche et de la roue droite de la plateforme mobile.

$\omega$  : la vitesse de rotation de la plate-forme mobile, et  $\omega = \dot{\theta}_p$ .

$\theta_p$  : L'angle de cap de la plateforme mobile.

$r$  : le rayon des roues.

$2d$  : la distance entre les deux roues.

$m_p$  : La masse de la plateforme mobile.

$I_p$  : Le moment d'inertie de la plateforme mobile.

$I_0$  : Le moment d'inertie de chaque roue.

$m_\omega$  : La masse de chaque roue.

$\theta_1, \theta_2$ : L'angle de rotation de la première et de la deuxième l'articulation du bras manipulateur.

$m_1, m_2$  : la masse des liaisons du manipulateur.

$I_1, I_2$ : Le moment d'inertie de la première et de la deuxième l'articulation du manipulateur.

$l_1, l_2$ : La longueur des segments du manipulateur.

$g$ : l'accélération de la gravité.

$mm$ : Indice de manipulabilité

$M(q) \in R^{n \times n}$ : La matrice d'inertie du système.

$C(q, \dot{q}) \in R^{n \times 1}$ : Le vecteur des forces centrifuges et Coriolis.

$G(q)$ : Le vecteur des forces de gravité.

$A(q)$ : La matrice des contraintes.

$B(q)$ : est la matrice de transformation d'entrée.

$D(q) \in R^{n \times n}$ : La matrice d'inertie du système réduit.

$F(q, \dot{q}) \in R^{n \times 1}$ : Le vecteur des forces centrifuges et Coriolis du système réduit.

$N(q)$ : Le vecteur des forces de gravité du système réduit

$S(q)$ : La matrice de transformation.

$\bar{B}(q)$ : est la matrice de transformation d'entrée du système réduit.

$J(q)$ : La matrice Jacobienne.

$\sigma$ : Vecteur de vitesses d'entrée.

$E_c$ : Energie cinétique.

$E_p$ : Energie potentielle.

$E_{cp}$ : Energie cinétique de PM

$L$ : Lagrangienne.

$\lambda$ : Multiplicateur de Lagrange.

$e, \dot{e}$  et  $\ddot{e}$ : L'erreur de position, l'erreur de vitesse et l'erreur d'accélération.

$q$ : Vecteur des coordonnées généralisées.

$X$ : Vecteur des variables opérationnelles.

$\dot{X}$ : Vecteur des vitesses opérationnelles

$V$ : La fonction de Lyapunov.

$v$ : vecteur des vitesses linéaires.

$v_r$ : vitesse linéaire de la roue droite.

$v_l$ : vitesse linéaire de la roue gauche.

${}^i T_j$  : La matrice de transformation entre les repères.

$R_i$  : Repère dans un plan.

${}^i Rot_j$  est la matrice d'orientation et  ${}^i P_j$  vecteur de position.

## Introduction générale

La robotique est l'un des facteurs important du développement de l'être humain au cours des années. C'est un domaine qui nécessite l'association d'une variété de domaines scientifiques tels que : l'ingénierie mécanique, l'électrotechnique, l'électronique et l'informatique. Ce que fait d'elle une science interdisciplinaire comprenant de larges champs de recherches articulés autour d'un seul objectif, le bien être de l'homme.

L'histoire de la robotique industrielle remonte aux années cinquante. À cette époque, les premiers modèles de machines-outils à commande numérique et de manipulateurs programmables pour les applications industrielles ont été créés. Au début des années soixante, les premiers robots produits en série ont été utilisés dans les processus de production, et quelques années plus tard, la première ligne de production automatisée a été créée. Dans les années suivantes, l'utilisation des systèmes d'automatisation a augmenté, ce qui a conduit à la troisième révolution industrielle dans les années soixante-dix. Cette étape, dans le développement de la robotique, était caractérisée par l'utilisation de robots relativement simples qui effectuent des tâches répétitives planifiées à l'avance. La quatrième révolution industrielle, connue sous le nom d'industrie 4.0, a maintenant déjà commencé, conduisant à des usines intelligentes et à des systèmes autonomes qui constituent des processus de production sans intervention humaine [1]. De tels développements nécessitent l'utilisation de capteurs et des algorithmes de contrôle adaptés et à la hauteur de cette révolution industrielle. Selon la philosophie de l'industrie 4.0, la production doit être toujours performante (augmentation de la productivité et la flexibilité, amélioration de la qualité, etc.) ce qui nécessite l'automatisation de toutes les étapes de production [2-3].

À l'heure actuelle, les manipulateurs stationnaires prédominent dans de nombreuses applications industrielles. Leurs principaux avantages sont leur agilité et leur dextérité manuelle, ainsi que leur capacité à effectuer des tâches avec une grande précision. D'autre part, l'espace de travail de ce type de robot est limité par la longueur du bras, ce qui réduit les possibilités de son utilisation. Il en résulte un intérêt accru pour les plateformes mobiles (PM), dont l'espace de travail n'est limité que par les éléments de l'équipement présent dans leur environnement. Malgré que ce type de système est moins précis que les manipulateurs stationnaires à cause de leur mobilité or leurs utilité est majeur [4]. La combinaison du bras manipulateur (BM) et de la PM permet d'obtenir un système complet nommé « bras manipulateur mobile » (BMM), avec de multiples avantages. La caractéristique importante de

ce système est l'élargissement de l'espace de travail. Il offre également la possibilité de remplacer plusieurs BM fixes par un unique BMM capable de se déplacer entre différents postes. Les principaux domaines industriels utilisant de tels systèmes sont présentés dans [5].

Le travail présenté dans cette thèse fait partie du domaine de la planification de mouvement en robotique. Le problème traité est celui de la détermination d'un algorithme de commande qui assure à un BMM de se déplacer d'une position initiale à une position finale. Le système en boucle fermée doit satisfaire un ensemble de contraintes, et éventuellement optimiser certains critères. La thèse est organisée en trois chapitres, ou l'idée principale traitée dans chaque chapitre est résumée ci-après :

- Dans Le premier chapitre, nous situons notre problème à travers une étude bibliographique, en présentant une synthèse des travaux importants réalisés dans le domaine étudié.
- La modélisation du BMM est présentée au deuxième chapitre. Le modèle du BMM est réalisé en trois étapes, d'abord, on modélise le bras manipulateur embarqué, puis on détermine le modèle de la plate-forme mobile, et on fin le modèle du système global (BMM).
- La commande linéarisante par rétroaction développée qui assure au BMM le suivi de trajectoire est évoquée au troisième chapitre. Les performances du système en boucle fermée sont validées par des tests de simulation.
- Le quatrième chapitre est consacré à une deuxième approche de contrôle qui est la commande adaptative basée sur la passivité (CABP) appliqué au BMM. Cette technique se base sur les caractéristiques physiques du système et en particulier son énergie totale. La CABP permet au BMM le suivi de trajectoire même en présence des perturbations externes et des variations paramétriques. Les tests de simulations prouvent les bonnes performances de la CABP.

Nous concluons cette thèse par une synthèse générale mettant en évidence les principaux résultats de nos recherches ainsi que les perspectives potentielles susceptibles d'approfondir ces travaux.

## Chapitre I

### Etat de l'art sur les bras manipulateurs mobiles

#### I.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons une sélection de travaux importants portant sur les bras manipulateurs mobiles. Nous mettrons en évidence les avancées clés dans ce domaine, en analysant les approches adoptées, les méthodologies utilisées ainsi que les défis relevés par ces recherches. Ces travaux jouent un rôle essentiel dans l'amélioration des performances et des capacités des robots mobiles, ouvrant ainsi la voie à de nouvelles applications dans divers secteurs.

#### I.2 Motivations

Au cours des dernières décennies, l'importance de la recherche dans le domaine de la robotique et en particulier sur les BMM a connu un énorme développement [6]. Cela, est dû aux progrès technologiques qui ont permis une large utilisation de l'automatisation et de la robotique tout en réduisant les coûts. En général, les BMM ont fait l'objet de recherches plus récentes et sont en train de devenir des outils commerciaux à usage industriel [7-9]. Dans la recherche, les considérations se sont concentrées sur la coordination des mouvements du BM et de la PM pour effectuer des tâches puisque des degrés de liberté sont créés par l'ajout de la base mobile.

Les BMM sont utilisés pour effectuer des tâches complexes et dangereuses dans des environnements hostiles, comme la manutention d'objets dangereux et l'exploration des fonds marins et du Cosmos [6]. Dans [7], les auteurs ont utilisé un BMM pour effectuer des tâches d'assemblage avec mobilité. Une étude est présentée sur l'utilisation des BMM dans l'industrie de la fabrication aérospatiale dans [8]. Les auteurs ont également énuméré de nombreuses autres tâches possibles qu'un BMM peut effectuer. L'institut multidisciplinaires SwRI (South west Research Institute) a développé un système de BMM pour travailler avec précision dans différents domaine telle que la fabrication aérospatiale et la construction navale [9].

Les tâches mentionnées précédemment doivent utiliser à la fois la mobilité et la manipulation du BMM. La PM donne au BM non seulement la capacité de se déplacer vers l'espace de travail de la tâche, mais aussi la capacité d'être positionné à un endroit où le bras aura le maximum de possibilités de manipulation. De plus, la PM doit parfois avoir une certaine orientation. A cela, le contrôle des trajectoires de l'organe terminal et de la PM, joue un rôle crucial pour réussir à exécuter une tâche souhaitée [10]. Cela garantit que la PM, tout en évitant un obstacle, non seulement amène le BM à une configuration préférée, mais s'oriente également pour exécuter ses tâches de manière plus élective.

La trajectoire de la PM peut être considérée comme une bande de trajectoires possibles, et la trajectoire du BMM peut être planifiée en temps réel en fonction de son état, des exigences de la tâche et du critère d'optimisation ou il faut maintenir le BM autour d'une configuration ou sa manipulabilité est importante [11, 12]. Cependant, dans certains cas, si la PM doit éviter un obstacle, cela peut réduire la capacité du BMM à suivre la trajectoire de l'effecteur avec précision. Il y aura également des situations où une trajectoire prévue de la plateforme mobile devra être modifiée afin d'éviter les butées articulaires du BM. Cela nécessite le contrôle de la situation complète du BMM.

Dans ce travail, nous présentons une approche de commande dont le contrôle de la PM dépend de l'information des positions articulaires mesurées du BM pour assurer la planification de son propre mouvement. La PM est commandée de telle sorte qu'elle amène toujours l'organe terminal du BM à la position désirée. On présente aussi une deuxième approche qui est la commande adaptative basée sur passivité (CABP). La CABP est une commande robuste son principe est le choix de l'énergie du BMM, suivi de l'analyse de sa dynamique en boucle fermée et finalement le calcul de la loi de commande.

### **I.3 Synthèses de quelques travaux relatifs à la commande des bras manipulateurs mobiles**

On présente dans cette section quelques travaux importants sur les BMM.

#### **I.3.1 Bras manipulateur mobile**

Un BMM est composé d'un BM et d'une PM. La PM assure la mobilité du BM ce qui élargit l'espace de travail de ce dernier, tandis que le BM offre de nombreuses fonctionnalités opérationnelles. Le BMM combine les avantages des deux sous-systèmes (à savoir : PM et du

BM) et réduit leurs inconvénients. Cette association assure une complémentarité entre les deux sous-systèmes, ce qui permet d'élargir le champ d'action de chacun. Ainsi, l'espace de travail du BMM s'étend, et des tâches complexes peuvent être réalisées par ce système [13].

Depuis trente ans seulement, l'intérêt s'est principalement concentré sur les robots et les possibilités qu'ils offrent : dans l'automatisation industrielle, l'intervention et le service en milieux hostiles. Les auteurs de l'article [14] à l'Université d'Aalborg, Danemark, a fourni une chronologie des BMM qui s'étend sur 30 ans. La chronologie montre des manipulateurs relativement légers sur une variété de robots mobiles utilisés pour la recherche.

Dans [15], un travail sur les BMM est présenté où l'accoutumance à un environnement parfois très fortement contraint a d'abord été exigée, et des trajectoires de consigne strictes sont imposées, en présence des perturbations externes et des incertitudes paramétriques.

La détermination des modèles formels utilisés est donc nécessaire afin de synthétiser des commandes plus évoluées et leur mise en œuvre est facilitée par les progrès récents de la technologie. De nos jours des missions complexes d'exploration imposant des prises de décisions importantes et une hausse de leur autonomie sont demandées [16]. Cette complexification des exigences des missions robotiques, a donné naissance au BMM. En effet, l'association de la manipulation et de locomotion, permet de réaliser un système de manutention (BMM), qui offre un avantage de mobilité offert par une PM et de dextérité offerte par le BM. Les degrés de liberté supplémentaires de la PM, permet de rapprocher les compétences de ce système de celles de l'homme et donc d'intervenir à sa manière.

## **I.3.2 Applications des robots manipulateurs mobiles**

### **I.3.2.1 Parachèvement des pièces**

Les BMM sont utilisés pour assurer des tâches de finitions sur des pièces de taille importante. Ces types de manipulateurs mobiles généralement en stade expérimental. Des développements en cours concernent le polissage des ailerons d'avion ou le décapage de la peinture à base du robot mobile KUKA (Figure I.1), doté d'une haute technologie qui lui permet non seulement de manœuvrer avec une précision millimétrique, mais sur tout de naviguer en toute sécurité devant les personnes et les objets [17].



**Figure I.1 :** Plateforme mobile KMR QUANTEC [17].

### I.3.2.2 Exploration spatiale

L'exploitation spatiale est l'une des tâches les plus importantes actuellement dans les laboratoires de recherche. Le développement et l'amélioration du BMM est sans cesse, grâce aux progrès de la nouvelle technologie industrielle. Le plus célèbre est « Curiosity » (figure I.2) qui réalise des missions sur la planète Mars depuis 2012. Il possède une PM à six roues et deux bras manipulateurs à quatre degrés de liberté (ddl) chacun, ce qui lui permet de saisir des échantillons du sol et de les analyser avec ses instruments embarqués [18].



**Figure 1.2 :** Le BMM « Curiosity » [18].

### I.3.2.3 Agriculture

L'agriculture pour les opérateurs humains, est un secteur des travaux non seulement pénible, mais aussi un risque sanitaire, vue l'utilisation des produits phytosanitaires. La robotique apparaît ainsi une piste prometteuse pour résoudre de telles situations, dont les nouvelles technologies permettent, non seulement d'améliorer les conditions de travail pour l'opérateur, mais aussi de faire progresser les rendements. Le rapport du ministère de l'agriculture Australien présente l'état de l'art de la robotique pour la récolte des fruits comme le robot *MAGALI* dédié à la récolte des pommes [19]. De même, un projet européen explore des possibilités de mécanisation et automatisation des tâches pénibles pour le travail manuel, comme la récolte des poivrons dans les serres et la pulvérisation des pesticides [20]. En Angleterre, la « start-up Dogtooth Technologies » a conçu un BMM (figure I.3) capable de récolter des fruits ou leur cueillette nécessite une attention particulière, comme les fraises [21].



**Figure I.3** : Robot autonome pour récolter les fruits rouges [21].

### I.3.2.4 Génie civil

L'un des objectifs principaux de l'utilisation des BMM est la sûreté des opérateurs humains, en l'excluant des zones dangereuses et en l'épargnant des travaux pénibles. L'intégration des BMM dans le secteur du génie civil est plus que nécessaire vue la pénibilité et les dangers qu'englobe ce secteur, en particulier sa branche « construction » ou de plus en plus de missions sont réalisés par des robots, on cite : par exemple les opérations d'assemblage dans les bâtiments [22]. En 2017, une « start-up » Française a développé un BM

(« PaintUP » figure I.4) monté sur un camion grue pour réaliser les travaux de traitement des surfaces externes des bâtiments [23].



**Figure 1.4 :** Le robot « PaintUP » [23].

### I.3.2.5 Exploration sous-marine

L'utilisation des robots dans l'exploration sous-marine a connu un intérêt majeur ces dernières années. L'installation de BM sur robots sous-marins permet aux scientifiques d'exploiter des profondeurs allant jusqu'au 7000 m, ce qui était impossible pour les plongeurs, cela a permis de réaliser différentes tâches, telles que : l'installation des câbles, le soudage des tuyaux et même la maintenance des structures sous-marines. Le robot sous-marin « ROV H2000 » de la société « Eca-Hytec », muni de deux BM (figure I.5), est capable d'exécuter des changements de pièces [24].



**Figure 1.5 :** Robot sous-marins « ROV H2000 » télécommandé du groupe « Eca-Hytec » [24].

## I.4 Commande des bras manipulateurs mobiles

Ces dernières années, on s'est intéressé de plus en plus à l'application des BMM dans des tâches exigeant une très grande précision, stabilité et performance, ou on peut citer le positionnement et l'assemblage. Le but du positionnement est de trouver une trajectoire désirée, exprimée en coordonnées généralisées, ou le BMM suit pour se déplacer de sa configuration initiale vers une configuration finale désirée [25].

La commande des BMM fait émerger la notion de coordination de mouvements entre la locomotion et la manipulation, la coopération du bras et de la base a fait l'objet de nombreux travaux de recherches et de publications, ou un critère d'évaluation est souvent défini qui permet de quantifier la coordination entre locomotion et manipulation. Les concepts de « manipulabilité » du bras et mobilité de la plateforme évoqués par Yoshikawa [26] ont été regroupés dans la notion de dextérité du BMM, qui a fait l'objet de nombreuses publications [27], ou un critère d'optimisation est défini afin d'assurer un contrôle coordonné de la plateforme et du bras.

Les travaux sur les BMM holonomes sont réalisés dans [28, 29], ou ces systèmes sont comparables à des bras manipulateurs de dimension étendue. Les auteurs ont fait apparaître une hiérarchie naturelle entre la plateforme omnidirectionnelle aux dynamiques lentes, et le bras embarqué au positionnement plus précis et aux dynamiques plus rapides.

Dans [30], Yamamoto et Yun présentent un algorithme de contrôle d'une plateforme non-holonyme à roues. Les déplacements mesurés des articulations du bras manipulateur sont pris comme entrées pour la planification du mouvement, ou ils commandent la plateforme de telle sorte que l'organe terminal soit placé dans une zone de configuration préférentielle déterminée à partir de l'indice de manipulabilité. L'algorithme de coordination entraîne donc un mouvement de la plateforme mobile en fonction de la réponse aux mouvements du manipulateur, tout en tenant compte des contraintes non-holonomes de la base. Le calcul du maximum de l'indice de manipulabilité, permet de définir des domaines privilégiés de l'espace de travail. A chaque domaine, est associé un point unique auquel l'algorithme de poursuite essaye de le confondre avec le point final de l'effecteur. Les mêmes auteurs ont déclaré que le fait de considérer le bras manipulateur et la plateforme mobile comme deux sous-systèmes du BMM, facilite les problèmes de contrôle et de planification [31].

Cependant, un contrôle de mouvement beaucoup plus effectif et efficace pourrait être réalisé en combinant la mobilité de la base mobile et la manipulation du bras, ce qui y a été prouvé

par Becker et al. en 2007 [32], ou les auteurs ont développé un algorithme de planification de trajectoire dans lequel le contrôleur de locomotion était indépendant du contrôleur du manipulateur, et le mouvement coopératif se produisait en utilisant la communication entre les contrôleurs.

Lin et Goldenberg dans [33] ont proposé une méthodologie de linéarisation par rétroaction basée sur les réseaux de neurones pour un BMM à contrainte cinématique. La théorie de Lyapunov a été utilisée pour stabiliser le BMM en boucle fermée et pour rejeter les perturbations.

Plus récemment, la stratégie de contrôle du BMM a fait l'objet de plusieurs publications. En 2017 dans [34], Silva et Adorno ont présenté un contrôleur qui agit comme un générateur de trajectoire pour l'organe terminal. Les signaux d'entrée pour la base mobile non-holonome et le bras manipulateur sont générés en utilisant le pseudo-inverse de la matrice jacobéenne du système complet (BMM).

Dans [35] Wang et Yu développent un contrôleur de position pour les corps rigides simples basé sur la linéarisation de la rétroaction. Kussaba et Adorno dans [36] proposent une stratégie de commande hybride pour concevoir une loi de commande avec commutation et hystérésis, de telle sorte que la stabilité asymptotique globale du système en boucle fermée soit garantie et que l'attractivité globale de la position de stabilisation ne présente pas de perturbation, un problème qui est présent dans tous les contrôleurs à rétroaction discret.

Dans cette thèse, on présente une approche de commande, basée sur la linéarisation par rétroaction ainsi que le concept de passivité. Le problème de contrôle de position en présence d'incertitudes cinématiques et dynamiques est résolu, en se basant sur la théorie de stabilité de Lyapunov.

## **I.5 Conclusion**

Les travaux sur les BMM sont à ce jour nombreux et variés. D'après les nombreuses applications dans les différents domaines cités dans ce chapitre, atteste que de tels systèmes sont incontournables pour la réalisation de très nombreuses tâches, et sans la mise en danger des vies humaines. Cependant, il reste encore des améliorations à apporter au niveau de leur commande en raison de leur complexité et des différentes tâches qui peuvent leur être assignées. A cela, des propositions sont traitées dans les chapitres qui suivent.

## Chapitre II

### Modélisation des bras manipulateurs mobiles

#### II.1 Introduction

De nos jours, de nouvelles applications dans la robotique apparaissent, où les humains et les robots collaborent dans de multiples tâches, allant des tâches ménagères aux interventions chirurgicales. Ces applications traitent des interactions complexes entre l'homme et l'environnement, nécessitant la modélisation des robots et la conception des techniques de contrôle pour améliorer leurs performances[37].

L'analyse des systèmes dynamiques et leurs commande, nécessite la connaissance des relations entre ces grandeurs d'entrée et de sorties ainsi que les signaux d'états. L'ensemble de ces relations constitue le modèle du système [38].

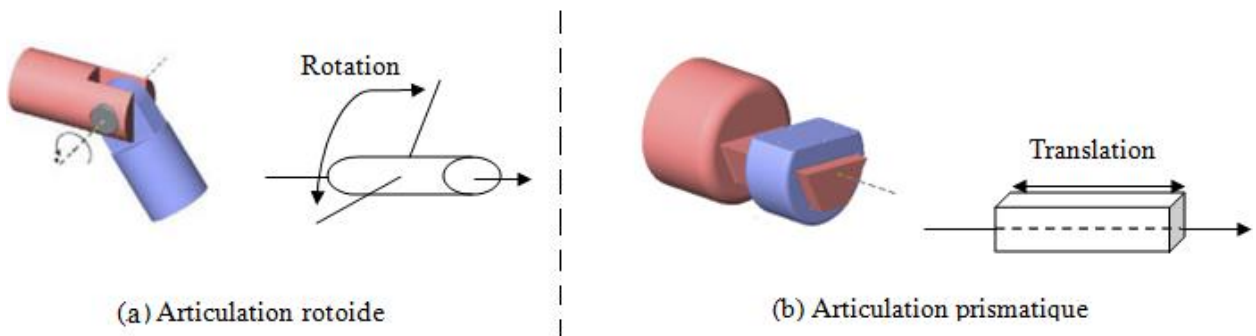
Ce chapitre est consacré à la modélisation géométrique, cinématique ainsi que la modélisation dynamique d'un BMM à roues, qui se déplace sur une plate-forme mobile à deux roues différentielles. On modélise d'abord le bras manipulateur à chaîne ouverte, ensuite, on conçoit les équations de la plate-forme mobile ou le nombre et le type des roues sur lesquelles elle se déplace sont primordiaux, en fin le modèle du système complet (BMM) est obtenu à partir des modèles des deux sous-systèmes précédents. Le modèle détaillé du BMM sera exploité dans le dernier chapitre.

#### II.2 Modélisation du bras manipulateur

Cette partie est axée sur la description de la structure et la modélisation d'un bras manipulateur série qui est constitué d'un ensemble de segments reliés entre eux par des articulations.

##### II.2.1 Articulation

L'articulation est une jonction de deux segments du robot leur permettant une mobilité relative. Les articulations sont en général rotatives (rotoïde) ou linéaires (prismatiques). Une articulation rotoïde permet une rotation relative entre deux liens. Une articulation prismatique permet un mouvement linéaire entre deux liens. Un exemple pratique des deux types d'articulations est présenté dans la Figure II.1.



**Figure II.1 :** Représentations symboliques des articulations d'un robot [39].

### II.2.2 Transformation homogène

Les transformations homogènes sont utilisées en robotique pour faciliter la représentation d'un quelconque point du robot dans un repère et le passage systématique d'un point à un autre [39].

Le passage d'un repère  $R_i$  à un autre repère  $R_j$  se fait par translation et/ou rotation. Une matrice  ${}^i T_j$  dite de transformation permet d'assurer les opérations précédentes. La matrice  ${}^i T_j$  est définie comme suit :

$${}^i T_j = [S \quad N \quad A \quad P] = \begin{bmatrix} s_x & n_x & a_x & P_x \\ s_y & n_y & a_y & P_y \\ s_z & n_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II.1})$$

Où  $P$  représente les coordonnées de l'origine du repère  $R_j$  exprimé dans  $R_i$  et  $S, N, A$  représentent les vecteurs unitaires des axes  $X_j, Y_j, Z_j$  du repère  $R_j$  exprimé dans  $R_i$ .

La matrice  ${}^i T_j$  peut être écrite comme suit :

$${}^i T_j = \begin{bmatrix} {}^i Rot_j & {}^i P_j \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II.2})$$

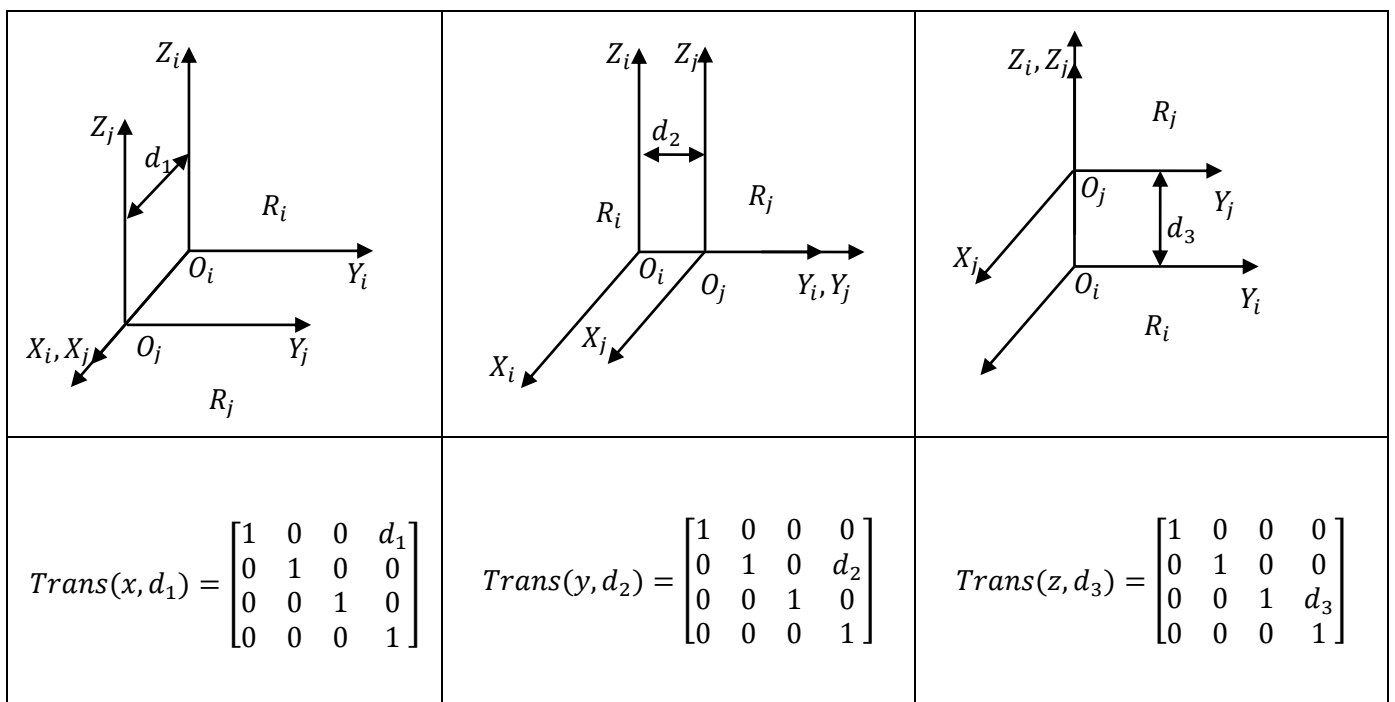
Où  ${}^i Rot_j$  est la matrice d'orientation et  ${}^i P_j$  vecteur de position.

**Remarque :** Dans le cas de plusieurs transformations, quel que soit leur type, la matrice de transformation finale  ${}^jT_0$  exprimée par l'équation (II.3) est le produit de ces matrices de transformation faites.

$${}^jT_0 = {}^jT_{j-1} {}^{j-1}T_{j-2} \dots {}^1T_0 \tag{II.3}$$

**II.2.2.1 Matrice de transformation de la translation**

La translation d'un repère  $R_i$  vers un repère  $R_j$  est représentée par une matrice  ${}^i T_j$  notée  $Trans(x, d_1), Trans(y, d_2), Trans(z, d_3)$ , avec  $d_i$  est la longueur de la translation. Trois translations selon axes X, Y et Z sont représentées par la figure II.2.



**Figure II.2 :** Représentation des translations selon les axes X, Y et Z.

**II.2.2.2 Matrice de transformation de la rotation**

L'orientation d'un repère  $R_i$  vers un repère  $R_j$  est représentée par une matrice  ${}^i T_j$  notée  $Rot(x, \theta), Rot(y, \theta), Rot(z, \theta)$ , avec  $\theta$  est l'angle de rotation des trois axes. Trois rotations autour des axes X, Y et Z sont représentées par la figure II.3.

$Rot(x, \theta)$ $= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$Rot(y, \theta)$ $= \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$Rot(z, \theta)$ $= \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Figure II.3 : Représentation des rotations autour des axes X, Y et Z.

### II.2.3 Différentes structures de la chaîne d'un bras manipulateur

La structure mécanique d'un robot est une chaîne de corps rigides assemblés par des liaisons, les chaînes peuvent être soit ouvertes simples, fermées, arborescentes ou parallèles.

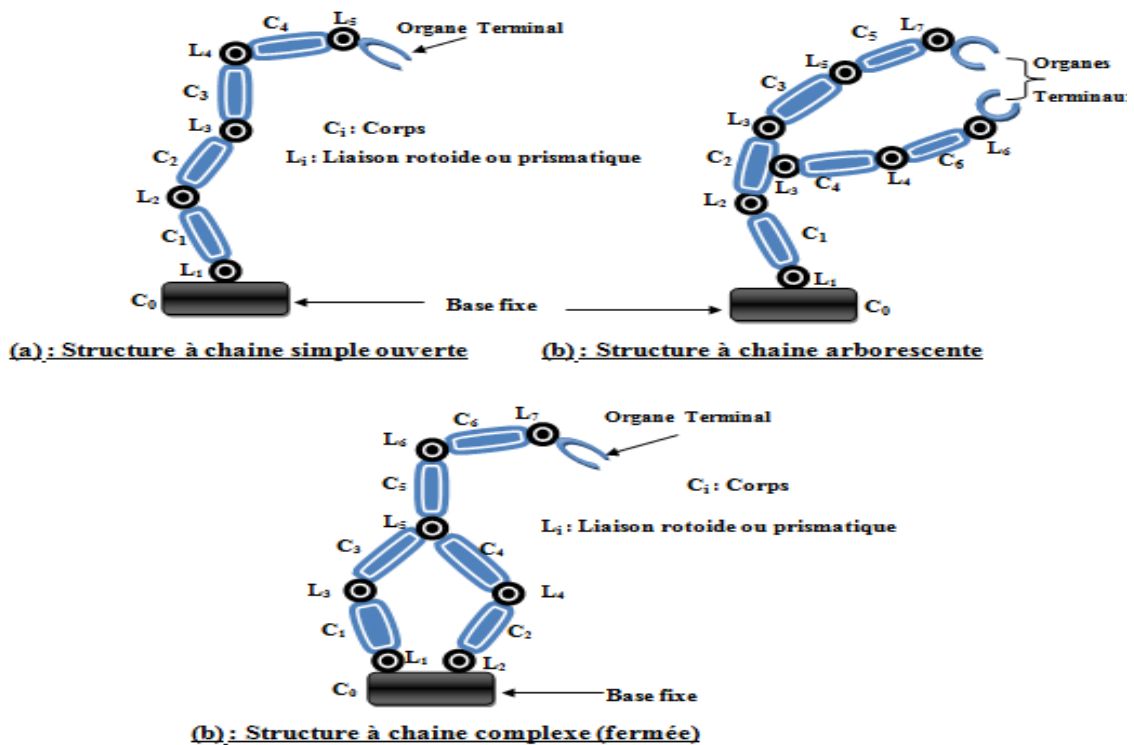
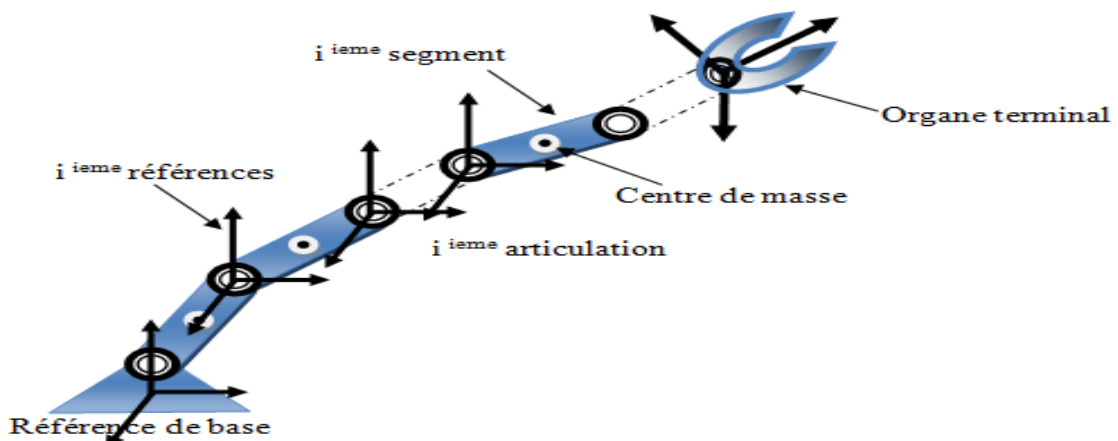


Figure II.4 Types de chaînes d'un bras manipulateur.

Le nombre de degrés de liberté d'un BM à chaîne ouverte est égal au nombre total d'articulations contrôlées indépendamment.

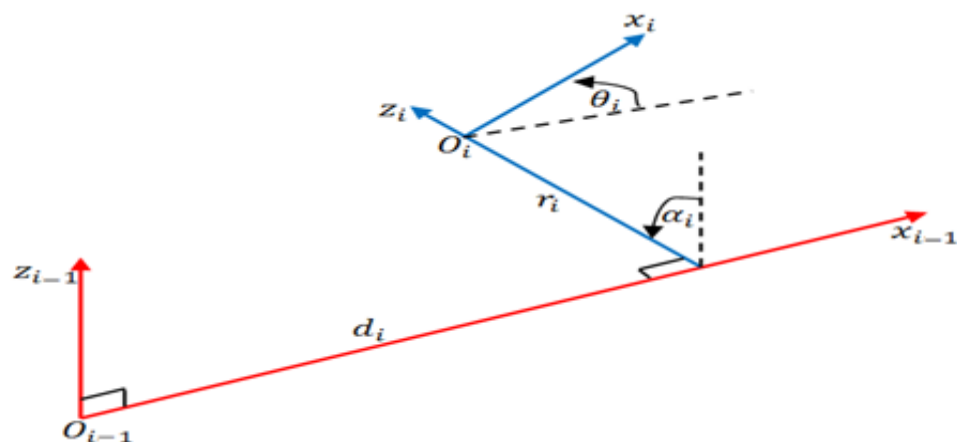
### II.3 Description d'un bras manipulateur

Un BM est constitué, en général, de segments (corps rigides) reliés entre eux par des liaisons (articulations) rotoïdes ou prismatiques.



**Figure II.5 :** Structure d'un bras manipulateur à chaîne ouverte.

La convention la plus utilisée pour sélectionner les repères liés à chaque articulation, afin de modéliser le BM, est la convention de « Denavit-Hartenberg », connue sous l'abréviation « DH » [40]. Cette convention peut être représentée par la figure suivante :



**Figure II.6 :** Paramètres de « Denavit-Hartenberg ».

Les paramètres de DH sont définis comme suit :

$z_i$  : Axe de la liaison « i » ;

$x_i$  : Perpendiculaire commune entre  $z_i$  et  $z_{i-1}$  ;

$\alpha_i$  : Angle entre  $z_{i-1}$  et  $z_i$  mesuré autour de  $x_{i-1}$  ;

$r_i$  : Distance entre  $z_{i-1}$  et  $z_i$  mesurée le long de l'axe  $x_{i-1}$  ;

$\theta_i$  : Angle entre  $x_{i-1}$  et  $x_i$  mesuré autour de  $z_{i-1}$  ;

$d_i$  : Distance entre  $x_{i-1}$  et  $x_i$  mesurée le long de l'axe  $z_{i-1}$ .

#### II.4 Modélisation d'un bras manipulateur

Un BM peut être défini par un vecteur  $q = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T$ , de « n » coordonnées généralisées, ou  $q_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) sont les variables articulaires. La position de l'organe terminal (OT) est définie par un vecteur  $X = [x_1, x_2, \dots, x_m]^T$  de « m » coordonnées opérationnelles, où  $x_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ) représente la position et l'orientation de l'OT dans l'espace. En se basant sur la convention DH, la matrice de transformation homogène entre deux repères « i-1 » et « i » est donnée par le produit matriciel suivant :

$${}^i T_{i-1} = \text{Trans}(z_{i-1}, d_i) \text{Rot}(z_{i-1}, \theta_i) \text{Trans}(x_{i-1}, r_i) \text{Rot}(x_{i-1}, \alpha_i) \quad (\text{II.4})$$

$${}^i T_{i-1} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i)\cos(\alpha_i) & \sin(\theta_i)\sin(\alpha_i) & r_i \cos(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i)\cos(\alpha_i) & -\cos(\theta_i)\sin(\alpha_i) & r_i \sin(\theta_i) \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II.5})$$

La matrice de rotation autour de l'axe Z :  $\text{Rot}(z_{i-1}, \theta_i) = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) & 0 & 0 \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

La matrice de translation le long de l'axe Z :  $\text{Trans}(z_{i-1}, d_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

La matrice de rotation autour de l'axe X :  $Rot(x_{i-1}, \alpha_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha_i) & -\sin(\alpha_i) & 0 \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

La matrice de translation le long de l'axe X :  $Trans(x_{i-1}, r_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & r_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

La matrice  ${}^i T_{i-1}$  peut s'écrire sous la forme suivante :

$${}^i T_{i-1} = \begin{bmatrix} {}^i Rot_{i-1} & {}^i P_{i-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II.6})$$

Ou  ${}^i Rot_{i-1}$  est la matrice de rotation entre le repère « i » et « i-1 ».  ${}^i P_{i-1}$  est la position du repère « i » par rapport au repère « i-1 ».

#### II.4.1 Modèle géométrique direct

Le modèle géométrique direct (donnée par l'équation II.7) d'un BM est la transformation entre l'espace opérationnel (ou le vecteur de position  $X$  de l'organe terminal est définie) et l'espace articulaire (ou le vecteur des articulations  $q_b$  du robot est définie).

$$X = f(q) \quad (\text{II.7})$$

Compte tenu de la convention DH, le modèle géométrique est donné par le produit matriciel suivant :

$$X = {}^0 T_n X^{OT} \quad (\text{II.8})$$

$X^{OT}$  est le vecteur de position de l'organe terminal par rapport à la référence « n ».

#### II.4.2 Modèle géométrique inverse

Le modèle géométrique inverse exprime le vecteur des variables articulaires «  $q$  », en fonction du vecteur des variables opérationnelles  $X$ , c'est-à-dire

$$q = g(X) \quad (\text{II.9})$$

Il n'existe pas une méthode standard pour le calcul du modèle géométrique inverse, or il existe quelques méthodes analytiques et numériques particulières [41] pour résolution de ce problème.

### II.4.3 Modèle cinématique direct

Le modèle cinématique direct (MCD) complète le modèle géométrique. Il permet de déterminer la vitesse de l'organe terminal dans l'espace opérationnel en fonction de la vitesse des variables articulaires. Le MCD est décrit par l'équation suivante :

$$\dot{X} = J(q)\dot{q} \quad (\text{II.10})$$

$J(q) \in \mathcal{R}^{m \times n}$  est la matrice « Jacobienne » de dimension (mxn) qui est le résultat de la différentiation du modèle géométrique direct (II.7). La même matrice Jacobienne intervient dans le calcul du modèle différentiel direct qui donne les variations élémentaires  $dX$  des coordonnées opérationnelles en fonction des variations élémentaires des coordonnées articulaires  $dq$ , soit :

$$\partial X = J(q)\partial q \quad (\text{II.11})$$

ou,  $J(q) = \frac{\partial f(q)}{\partial q}$ , avec  $f(q)$  est défini dans l'équation (II.7).

L'utilisation de la matrice Jacobienne est indispensable car :

- Elle est à la base du modèle cinématique inverse, permettant de calculer le vecteur des variables articulaires  $q$ , à partir du vecteur des coordonnées opérationnelles  $X$ .
- Elle facilite le calcul des singularités et de la dimension de l'espace opérationnel accessible du robot.

L'une des méthodes utilisées pour le calcul de la matrice jacobéenne est la dérivation du modèle géométrique direct [42].

$$J(q) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial q_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial q_n} \end{bmatrix} \quad (\text{II.12})$$

Avec  $f(q) = [f_1(q), \dots, f_m(q)]^T$  le second membre du modèle géométrique direct donné par (II.7).

#### II.4.4 Modèle cinématique inverse

Le modèle cinématique inverse donne le vecteur des vitesses articulaires  $\dot{q}$  en fonction de celui des vitesses opérationnelles  $\dot{X}$ , comme le montre l'équation suivante :

$$\dot{q} = J^{-1}(q) \dot{X} \quad (\text{II.13})$$

#### II.4.5 Modèle dynamique direct

Le modèle dynamique exprime la relation entre  $Q$  le vecteur des couples ( $\tau$ ) ou celui des forces ( $F$ ) articulaires, en fonction du vecteur des accélérations articulaires  $\ddot{q}$  (égale à  $\ddot{\theta}$  dans le cas de rotation ou  $\ddot{d}$  dans le cas de translation). Les deux techniques les plus utilisées pour la modélisation dynamique d'un robot sont : le formalisme « Euler-Newton » ou « Euler-Lagrange », c'est ce dernier qui est utilisé dans la suite de ce travail. Le Lagrangien est défini par la différence entre l'énergie cinétique du robot et son énergie potentielle:

$$L = E_c - E_p \quad (\text{II.14})$$

On considère un robot manipulateur à chaîne ouverte de « n » liaisons (rotoïde ou prismatique). Le  $i^{\text{ème}}$  segment du robot a les caractéristiques suivantes (figure II.7) :  $q_i$  la variable articulaire ;  $m_i$  la masse,  $I_i$  le moment d'inertie (autour d'un axe à travers le centre de gravité et parallèle à l'axe z) ;  $l_i$  la longueur,  $l_{ci}$  la distance entre l'articulation  $i$  et le centre de masse du segment ;  $\tau_i$  le couple ;  $g$  la gravité le long de l'axe vertical,  $E_{ci}(q, \dot{q})$ ,  $E_{pi}(q)$  l'énergie cinétique et potentielle respectivement  $P_{ci}$  est le vecteur des coordonnées opérationnelles du centre de gravité du segment.

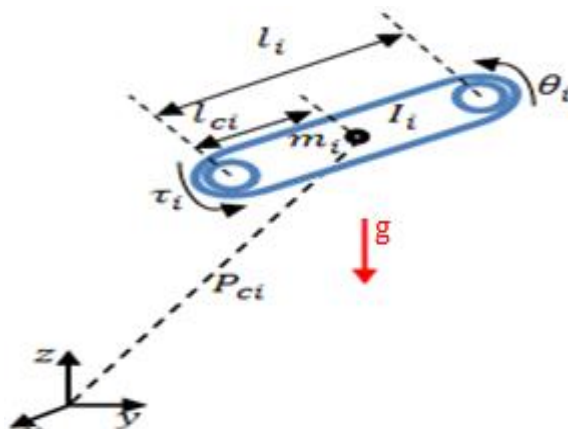


Figure II.7 : Caractéristiques du  $i^{\text{ème}}$  segment d'un bras manipulateur.

Les équations dynamiques du robot peuvent être développées en utilisant l'équation de Lagrange pour chaque variable articulaire avec « L » est donnée par (II.14) :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i, (i = 1, \dots, n) \quad (\text{II.15})$$

Sachant que :  $E_c(q, \dot{q}) = \sum_{i=1}^n E_{ci}$   $E_p(q) = \sum_{i=1}^n E_{pi}$

$E_{ci}(q, \dot{q})$  : est l'énergie cinétique du  $i^{\text{ième}}$  segment du BM;

$E_{pi}(q)$  : est l'énergie potentielle pour le  $i^{\text{ième}}$  segment du BM;

En substituant « L » données par (II.14) dans (II.15), on obtient l'équation suivante :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_i} + \frac{\partial E_p}{\partial q_i} = Q_i (i = 1, \dots, n) \quad (\text{II.16})$$

Sachant que les termes de gravité  $G_i(q)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) de chaque segment est la variation de l'énergie potentiel par rapport aux variables articulaires tels que :

$$G_i(q) = \frac{\partial E_p}{\partial q_i} \quad (\text{II.17})$$

$E_{ci}$  est donnée par l'équation [41] :

$$E_{ci} = \frac{1}{2} m_i v_{ci}^T v_{ci} + \frac{1}{2} \omega_{ci}^T R_i I_i R_i^T \omega_{ci} \quad (\text{II.18})$$

Où  $v_{ci}$  et  $\omega_{ci}$  sont la vitesse linéaire et angulaire,  $R_i$  la matrice de rotation du segment  $i$  par rapport au repère de référence.

$$\begin{cases} v_{ci} = \dot{P}_{ci} = J_{v_1}^i \dot{q}_1 + J_{v_2}^i \dot{q}_2 + \dots + J_{v_i}^i \dot{q}_i = J_v^i \dot{q} \\ \omega_{ci} = J_{\omega_1}^i \dot{q}_1 + J_{\omega_2}^i \dot{q}_2 + \dots + J_{\omega_i}^i \dot{q}_i = J_{\omega}^i \dot{q} \end{cases} \quad (\text{II.19})$$

$P_{ci}$ : est le vecteur de position du segment par rapport au repère de la base.

$J_v^i$  et  $J_{\omega}^i$  sont les matrices jacobéennes pour chaque segment, données par

$$\begin{cases} J_v^i = [J_{v_1}^i \dots J_{v_i}^i \quad 0 \dots 0] \\ J_{\omega}^i = [J_{\omega_1}^i \dots J_{\omega_i}^i \quad 0 \dots 0] \end{cases} \quad (\text{II.20})$$

Où :  $\begin{bmatrix} J_v^i \\ J_{\omega}^i \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} Z_{j-1} \\ 0 \end{bmatrix} \text{ Pour une liaison prismatique} \\ \begin{bmatrix} Z_{i-1} \times (P_{ci} - P_{c_{j-1}}) \\ Z_{j-1} \end{bmatrix} \text{ Pour une liaison rotative} \end{cases}, j = 1, \dots, i - 1$

avec  $P_{c_{j-1}}$  est le vecteur position de l'origine du repère  $j-1$  et  $z_{j-1}$  est le vecteur unitaire de l'axe  $z$  du repère  $j-1$ .

### II.4.5.1 Calcul de la matrice $M(q)$

Calculons d'abord l'énergie cinétique totale du robot manipulateur, pour extraire la matrice  $M(q)$  :

#### A. Énergie cinétique totale du robot manipulateur

L'expression de l'énergie cinétique du BM est :

$$E_c = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (m_i v_{ci}^T v_{ci} + \omega_{ci}^T R_i I_i R_i^T \omega_{ci}) \quad (\text{II.21})$$

On peut écrire

$$E_c = \frac{1}{2} \dot{q}^T \sum_{i=1}^n \left( m_i J_v^{iT}(q) J_v^i(q) + J_\omega^{iT}(q) R_i I_i R_i^T J_\omega^i(q) \right) \dot{q} \quad (\text{II.22})$$

$$E_c = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} \quad (\text{II.23})$$

$$E_c = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (\text{II.24})$$

#### B. L'énergie potentielle

L'expression de l'énergie potentielle est

$$E_p = \sum_{i=1}^n g^T P_{ci} m_i \quad (\text{II.25})$$

Le vecteur des termes de gravité est donné par :

$$G(q) = \frac{\partial E_p}{\partial q_i} = \sum_{i=1}^n m_i g^T \left( \frac{\partial P_{ci}}{\partial q_i} \right) \quad (\text{II.26})$$

#### C. Détermination des matrices du modèle dynamique

De l'équation (II.23) on a :

$$E_c = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q}$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left[ \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} \right] = M(q) \dot{q} \quad (\text{II.27})$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{d}{dt} [M(q) \dot{q}] = M(q) \ddot{q} + \dot{M}(q) \dot{q} \quad (\text{II.28})$$

Substituant (II.28) dans (II.17) ;

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial q} = M(q)\ddot{q} + \dot{M}(q)\dot{q} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{q}^T \frac{\partial M(q)}{\partial q_1} \dot{q} \\ \vdots \\ \dot{q}^T \frac{\partial M(q)}{\partial q_n} \dot{q} \end{bmatrix} \quad (\text{II.29})$$

Substituant (II.25), (II.26), et (II.29) dans (II.16) ;

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial q} + \frac{\partial E_p}{\partial q} = M(q)\ddot{q} + \dot{M}(q)\dot{q} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{q}^T \frac{\partial M(q)}{\partial q_1} \dot{q} \\ \vdots \\ \dot{q}^T \frac{\partial M(q)}{\partial q_n} \dot{q} \end{bmatrix} + G(q) = Q \quad (\text{II.30})$$

Sachant que :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial q} = M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q}) \quad (\text{II.31})$$

Donc on peut écrire la forme générale :

$$M(q)\ddot{q} + \dot{M}(q)\dot{q} - \frac{1}{2} \dot{q}^T \frac{\partial M(q)}{\partial q} \dot{q} + G(q) = Q \quad (\text{II.32})$$

De (II.30) et (II.31), on déduit la matrice nécessaire pour le calcul du vecteur des couples/forces de Coriolis et des forces centrifuges qui s'écrit :

$$C(q, \dot{q}) = \dot{M}(q)\dot{q} - \frac{1}{2} \dot{q}^T \frac{\partial M(q)}{\partial q} \dot{q} \quad (\text{II.33})$$

#### D. Calcul des éléments de la matrice $M(q)$ :

De (II.22) et (II.23), on peut écrire :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \dot{q}^T \frac{\partial M(q)}{\partial q} \dot{q} &= \frac{1}{2} \dot{q}^T \sum_{i=1}^n \left( m_i J_v^{iT}(q) J_v^i(q) + J_\omega^{iT}(q) R_i I_i R_i^T J_\omega^i(q) \right) \dot{q} \\ M(q) &= \sum_{i=1}^n \left( m_i J_v^{iT}(q) J_v^i(q) + J_\omega^{iT}(q) R_i I_i R_i^T J_\omega^i(q) \right) \end{aligned} \quad (\text{II.34})$$

Soient  $m_{ij}$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ) les éléments de la matrice d'inertie, donc on a :

$$M(q) = \begin{bmatrix} m_{11} & \dots & m_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & \dots & m_{nn} \end{bmatrix} \quad (\text{II.35})$$

(II.34) dans (II.30) on trouve

$$M(q)\ddot{q} + \begin{bmatrix} \dot{m}_{11} & \dots & \dot{m}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dot{m}_{n1} & \dots & \dot{m}_{nn} \end{bmatrix} \dot{q} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{q}^T \begin{bmatrix} m_{111} & m_{121} & \dots & m_{1n1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n11} & m_{n21} & \dots & m_{nn1} \end{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{q}^T \begin{bmatrix} m_{11n} & m_{12n} & \dots & m_{1nn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1n} & m_{n2n} & \dots & m_{nnn} \end{bmatrix} \dot{q} \end{bmatrix} + G(q) = Q \quad (\text{II.36})$$

On définit le terme :  $m_{ijk}$  ( $i, j, k = 1, \dots, n$ ) par

$$\begin{aligned} m_{ijk} &= \frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k} \\ \dot{m}_{ij} &= \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k} \cdot \frac{dq_k}{dt} \right) \\ &= m_{ijk} \dot{q}_k \end{aligned} \quad (\text{II.37})$$

### E. Les symboles de Christoffel

$$h_{ijk} = \frac{1}{2}(m_{ijk} + m_{ikj} - m_{jki}) \quad (\text{II.38})$$

$$C(q, \dot{q}) = V(q)[\dot{q}^2] + B(q)[\dot{q}\dot{q}] \quad (\text{II.39})$$

$$V(q)[\dot{q}^2] = \begin{bmatrix} h_{111} & h_{122} & \dots & h_{1nn} \\ h_{211} & h_{222} & \dots & h_{2nn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n11} & h_{n22} & \dots & h_{nnn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1^2 \\ \dot{q}_2^2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n^2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.40})$$

$$B(q)[\dot{q}\dot{q}] = \begin{bmatrix} 2b_{112} & 2b_{123} & \dots & 2b_{1(n-1)n} \\ 2b_{212} & 2b_{223} & \dots & 2b_{2(n-1)n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2b_{n12} & 2b_{n23} & \dots & 2b_{n(n-1)n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\ \dot{q}_2 \dot{q}_3 \\ \vdots \\ q_{(n-1)} \dot{q}_n \end{bmatrix} \quad (\text{II.41})$$

Après les développements mathématiques et le calcul des différentes matrices, la forme explicite du modèle dynamique du robot s'écrit :

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = Q \quad (\text{II.42})$$

Où  $q \in R^n$  est le vecteur des coordonnées généralisées,  $M(q) \in R^{n \times n}$  matrice d'inerties, le vecteur des couples/forces de Coriolis et des forces centrifuges  $C(q, \dot{q})\dot{q} \in R^n$ ,  $G(q) \in R^n$  vecteur des forces de gravitationnelles,  $Q \in R^n$  vecteur de couple/force de contrôle.

### II.4.6 Exemple illustratif sur un BM à deux degrés de liberté

Notre étude est consacrée à un robot manipulateur à deux degrés de liberté (2ddl), donné par figure II.8, dont les articulations sont rotoïdes.

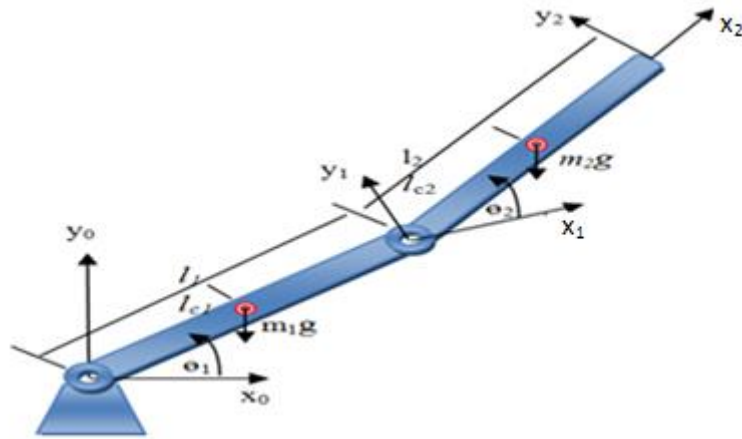


Figure II.8 : Bras manipulateur à deux degré de liberté.

Les paramètres de « Denavit-Hartenberg » du robot étudié sont donnés par le tableau suivant :

Tableau II.1 Configuration de Denavit-Hartenberg du robot à deux ddl.

Corps	$d_i$	$\alpha_i$	$q_i$	$r_i$
Articulation 1	0	0	$\theta_1$	$l_1$
Articulation 2	0	0	$\theta_2$	$l_2$

➤ *Modèle géométrique direct*

Les matrices de transformation homogène des deux segments sont données par :

$${}^1T_0 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & l_1c_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & l_1s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^2T_1 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & l_2c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & l_2s_2 \\ 0 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^2T_0 = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & l_1c_1 + l_2c_{12} \\ s_{12} & c_{12} & 0 & l_1s_1 + l_2s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

avec :  $c_1 = \cos(\theta_1)$ ,  $c_2 = \cos(\theta_2)$ ,  $s_1 = \sin(\theta_1)$ ,  $s_2 = \sin(\theta_2)$ ,  $c_{12} = \cos(\varnothing)$ ,  $s_{12} = \sin(\varnothing)$

$$\varnothing = \theta_1 + \theta_2$$

En utilisant la matrice  ${}^2T_0$ , on formule les coordonnées de l'outil terminal (OT) par rapport à la base qui sont données par l'équation (II.44). On exprime aussi les coordonnées du centre de gravité du premier segment par rapport à la base par l'équation (II.43) :

$$\begin{cases} x_1 = l_{c1}c_1 \\ y_1 = l_{c1}s_1 \end{cases} \quad (\text{II.43})$$

avec  $l_{c1}$  est la distance du centre de gravité du premier segment de la première articulation.

$$\begin{cases} x_2 = l_{c2}c_{12} + l_1c_1 \\ y_2 = l_{c2}s_{12} + l_1s_1 \end{cases} \quad (\text{II.44})$$

avec:  $l_{c2}$  est la distance du centre de gravité du deuxième segment de la deuxième articulation.

### ➤ *Modèle cinématique*

Le modèle cinématique direct qui exprime les vitesses opérationnelles en fonction de celles articulaires, est exprimé par l'équation suivante :

$$\dot{X} = J(q)\dot{q} \quad (\text{II.45})$$

Le calcul des composantes du vecteur de vitesse opérationnelle du robot est obtenu en dérivant les équations du modèle géométrique (équation (II.43) et (II.44) par rapport au temps, ce qui donne le modèle cinématique direct (MCD) du robot par :

Segment 1 (centre de gravité du premier corps):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -l_{c1}\dot{\theta}_1s_1 \\ \dot{y}_1 = l_{c1}\dot{\theta}_1c_1 \end{cases} \quad (\text{II.46})$$

Segment 2 (outil terminal) :

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = -(l_{c2}\dot{\vartheta}s_{12} + l_1\dot{\theta}_1s_1) \\ \dot{y}_2 = l_{c2}\dot{\vartheta}c_{12} + l_1\dot{\theta}_1c_1 \end{cases} \quad (\text{II.47})$$

Le modèle MCD du robot est exprimé par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x} = -l_{c2}\dot{\vartheta}s_{12} - l_1\dot{\theta}_1s_1 \\ \dot{y} = l_{c2}\dot{\vartheta}c_{12} + l_1\dot{\theta}_1c_1 \\ \dot{\vartheta} = \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{cases} \quad (\text{II.48})$$

On écrit le MCD sous forme matricielle comme suit :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(l_{c2}s_{12} + l_1s_1) & -l_{c2}s_{12} \\ l_{c2}c_{12} + l_1c_1 & l_{c2}c_{12} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = J(q)\dot{q} \quad (\text{II.49})$$

ou la matrice « Jacobienne »  $J(q)$  du robot est donnée par la matrice suivante :

$$J(q) = \begin{bmatrix} -(l_{c2}s_{12} + l_1s_1) & -l_{c2}s_{12} \\ l_{c2}c_{12} + l_1c_1 & l_{c2}c_{12} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.50})$$

### ➤ *Modèle dynamique*

Le modèle dynamique du robot manipulateur est obtenu, en exploitant les équations (II.21) et (II.25) pour calculer ces énergies cinétique et potentielle. D'abord, on doit calculer les matrices « Jacobiennes » de chaque segment du robot :

$$J_v^1(q) = \begin{bmatrix} l_{c1}s_1 & 0 \\ -l_{c1}c_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, J_v^2(q) = \begin{bmatrix} -l_{c1}s_1 - l_{c2}s_{12} & -l_{c2}s_{12} \\ -l_{c1}c_1 + l_{c2}c_{12} & l_{c2}c_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.51})$$

$$J_w^1(q) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, J_w^2(q) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II.52})$$

avec :  $q = [\theta_1 \ \theta_2]^T$

$l_{c1}, l_{c2}$  : sont respectivement les distances des centres de gravité du premier et du deuxième segment par-rapport à leur articulation.

### ➤ *Energie cinétique du robot*

Comme les deux axes,  $z_1, z_2$  associés aux articulations 1 et 2, sont parallèles à l'axe  $z_0$  lié à la base, il n'est pas nécessaire de calculer les matrices ( $R_1, R_2$ ) de rotation du chaque segment par rapport à la base.

De l'équation (II.19), on formule l'expression suivante :

$$E_c = \frac{1}{2} \dot{q}^T \left[ m_1 J_v^{1T} J_v^1 + m_2 J_v^{2T} J_v^2 + J_w^{1T} I_1 J_w^1 + J_w^{2T} I_2 J_w^2 \right] \dot{q} \quad (\text{II.53})$$

$I_1, I_2$  : sont les moments d'inertie de chaque segment.

En substituant les expressions de  $J_v^1, J_v^2, J_w^1$  et  $J_w^2$  données par les équations (II.51), (II.52) dans l'équation (II.53), ce qui donne les éléments de la matrice d'inertie  $M(q)$  :

$$\begin{aligned}
 M_{11} &= m_1 l_{c1}^2 + m_2 (l_1^2 + l_{c2}^2 + 2l_1 l_{c2} c_2) + I_1 + I_2 \\
 M_{12} &= M_{21} = m_2 (l_{c2}^2 + l_1 l_{c2} c_2) + I_2 \\
 M_{22} &= m_2 l_{c2}^2 + I_2
 \end{aligned}
 \tag{II.54}$$

L'expression de la matrice d'inertie est donnée par l'équation suivante :

$$M(q) = \begin{bmatrix} m_1 l_{c1}^2 + m_2 (l_1^2 + l_{c2}^2 + 2l_1 l_{c2} c_2) + I_1 + I_2 & m_2 (l_{c2}^2 + l_1 l_{c2} c_2) + I_2 \\ m_2 (l_{c2}^2 + l_1 l_{c2} c_2) + I_2 & m_2 l_{c2}^2 + I_2 \end{bmatrix}
 \tag{II.55}$$

De l'équation (II.38) et (II.54) ; les coefficients Christoffel sont calculés à partir de la matrice  $M(q)$  comme suit :

$$\begin{aligned}
 h_{ijk} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{dM_{kj}}{dq_i} + \frac{dM_{ki}}{dq_j} - \frac{dM_{ij}}{dq_k} \right] \\
 h_{111} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{dM_{11}}{dq_1} \right] = 0, h_{121} = h_{211} = \frac{1}{2} \left[ \frac{dM_{11}}{dq_2} \right] = -m_2 l_1 l_{c2} s_2 \\
 h_{221} &= \frac{dM_{22}}{dq_2} - \frac{1}{2} \left[ \frac{dM_{22}}{dq_1} \right] = -m_2 l_1 l_{c2} s_2, h_{112} = \frac{dM_{21}}{dq_1} - \frac{1}{2} \left[ \frac{dM_{11}}{dq_2} \right] = m_2 l_1 l_{c2} s_2 \\
 h_{122} &= h_{212} = \frac{dM_{22}}{dq_1} = 0, h_{222} = \frac{1}{2} \left[ \frac{dM_{22}}{dq_2} \right] = 0
 \end{aligned}
 \tag{II.56}$$

Les éléments de la matrice  $C(q, \dot{q})$  des forces Coriolis et centrifuge sont donnée par :

$$\begin{aligned}
 h_{11} &= -m_2 l_1 l_{c2} s_2 \dot{\theta}_2, h_{12} = -m_2 l_1 l_{c2} s_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\
 h_{21} &= m_2 l_1 l_{c2} s_2 \dot{\theta}_1, h_{22} = 0
 \end{aligned}
 \tag{II.57}$$

Sous forme matricielle :

$$V(q)[\dot{q}^2] = \begin{bmatrix} 0 & -m_2 l_1 l_{c2} s_2 \\ m_2 l_1 l_{c2} s_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1^2 \\ \dot{\theta}_2^2 \end{bmatrix}
 \tag{II.58}$$

$$B(q)[\dot{q}\dot{q}] = \begin{bmatrix} -m_2 l_1 l_{c2} s_2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}
 \tag{II.59}$$

$$C(q, \dot{q}) = V(q)[\dot{q}^2] + B(q)[\dot{q}\dot{q}]
 \tag{II.60}$$

$$C(q, q) = \begin{bmatrix} -m_2 l_1 l_{c2} s_2 \dot{\theta}_2 & -2m_2 l_1 l_{c2} s_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ m_2 l_1 l_{c2} s_2 \dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix}
 \tag{II.61}$$

➤ *Energie potentielle du robot*

L'énergie potentielle du BM est la somme de celles des deux articulations. L'énergie potentielle d'une articulation est sa masse multipliée par l'accélération gravitationnelle et la hauteur de son centre de masse par-rapport à la base du BM dont les expressions de ces énergies sont exprimées comme suit :

$$E_{P1} = m_1 g l_{c1} s_1 \quad (\text{II.62})$$

$$E_{P2} = m_2 g (l_1 s_1 + l_{c2} s_{12}) \quad (\text{II.63})$$

L'énergie potentielle totale du BM est :

$$E_P = E_{P1} + E_{P2} = m_1 g l_{c1} s_1 + m_2 g (l_1 s_1 + l_{c2} s_{12}) \quad (\text{II.64})$$

Les composantes  $g_1$  et  $g_2$  du vecteur des forces de gravité sont calculées à partir de l'énergie potentiel (II.26) :

$$g_1 = \frac{\partial E_P}{\partial \theta_1} = (m_1 l_{c1} + m_2 l_1) g c_1 + m_2 l_{c2} g c_{12} \quad (\text{II.65})$$

$$g_2 = \frac{\partial E_P}{\partial \theta_2} = m_2 l_{c2} g c_{12} \quad (\text{II.66})$$

L'expression du vecteur des forces de gravité est :

$$G(q) = \begin{bmatrix} (m_1 l_{c1} + m_2 l_1) g c_1 + m_2 l_{c2} g c_{12} \\ m_2 l_{c2} g c_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{II.67})$$

Finalement, on écrit l'équation dynamique matricielle du BM étudié :

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = Q \quad (\text{II.68})$$

$$\text{avec : } M(q) = \begin{bmatrix} m_1 l_{c1}^2 + m_2 (l_1^2 + l_{c2}^2 + 2l_1 l_{c2} c_2) + I_1 + I_2 & m_2 (l_{c2}^2 + l_1 l_{c2} c_2) + I_2 \\ m_2 (l_{c2}^2 + l_1 l_{c2} c_2) + I_2 & m_2 l_{c2}^2 + I_2 \end{bmatrix},$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} -m_2 l_1 l_{c2} s_2 \dot{\theta}_2 & -2m_2 l_1 l_{c2} s_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ m_2 l_1 l_{c2} s_2 \dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$G(q) = \begin{bmatrix} (m_1 l_{c1} + m_2 l_1) g c_1 + m_2 l_{c2} g c_{12} \\ m_2 l_{c2} g c_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{II.69})$$

Avec :  $q = [\theta_1 \ \theta_2]^T$  et  $Q = [\tau_1 \ \tau_2]^T$ .

## II.5 La plateforme mobile

### II.5.1 Les robots mobiles à roues

La modélisation mathématique est une étape très importante pour la commande des robots mobiles (RM). Deux types de modèles sont généralement utilisés lors de leur commande, à savoir : le modèle cinématique et le modèle dynamique. Dans la littérature, plusieurs types de RM sont cités à savoir : les RM de type monocycle, tricycle et voiture. Dans le cadre de notre travail, on s'est intéressé au type monocycle à cause de sa simplicité de construction et de ses propriétés cinématiques intéressantes. Plusieurs RM ont fait l'objet d'étude et recherche, mais l'intérêt est porté sur celui de type monocycle.

### II.5.2 Présentation de la plateforme mobile

On désigne par RM de type monocycle, un RM actionné par deux roues indépendantes et possédant éventuellement un certain nombre de roues folles assurant son équilibre.

### II.5.3 Modèle de la de la plateforme mobile

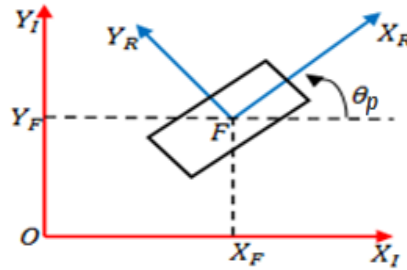
Le mouvement du RM ou de la plateforme (PM) à roues est décrit complètement par le vecteur de position

$$X = \begin{bmatrix} x_F & y_F & \theta_p \end{bmatrix}^T \quad (\text{II.70})$$

Où  $(x_F, y_F)$  est le couple des coordonnées d'un point F de la PM exprimées par rapport au repère fixe  $(O, X_I, Y_I)$ , et  $\theta_p$  son angle d'orientation.

On définit la matrice de rotation du RM (figure II.9) autour de l'axe vertical  $Z_I$  par :

$$R(\theta_p) = \begin{bmatrix} \cos(\theta_p) & -\sin(\theta_p) & 0 \\ \sin(\theta_p) & \cos(\theta_p) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II.71})$$



**Figure II.9 :** Modèle simplifié d'une PM.

Le RM à roues constitue une classe de systèmes mécaniques caractérisés par des contraintes non intégrables. L'étude de la manœuvrabilité d'un robot mobile se fait à partir de la traduction en termes mathématiques des contraintes de roulement pur sans glissement (Dans le plan de la roue et dans le plan orthogonal de la roue) vérifiées pour chacune des roues ainsi que les contraintes imposées aux différents mouvements, suivant le type de la roue [42].

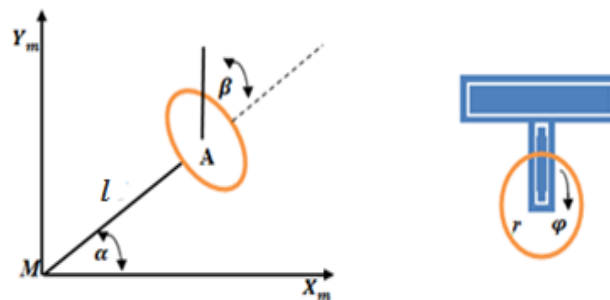
## II.6 Types des roues

On suppose que durant le mouvement, le plan de chaque roue reste en permanence perpendiculaire au sol. On distingue deux classes de roues : les roues conventionnelles et les roues suédoises. Dans chaque cas on suppose que le contact entre la roue et le sol est réduit à un seul point.

### II.6.1 Roues conventionnelles

Les roues conventionnelles sont caractérisées par la contrainte de roulement pur sans glissement ce qui se traduit par une vitesse nulle au point de contact suivant deux directions : l'une parallèle et l'autre perpendiculaire au plan de la roue. Parmi ces roues on distingue :

- A. La roue fixe :** le centre de la roue, noté A, est un point fixe de la plateforme et sa position est caractérisée par quatre constantes ( $\alpha, \beta, L, r$ ) et l'angle de rotation  $\varphi$ ,



**Figure II.10** La roue fixe.

La position A est déterminée par les coordonnées polaires, par la distance (MA= L) et l'angle ( $\alpha$ ). L'orientation du plan de la roue par rapport à MA est représenté par l'angle constant ( $\beta$ ). L'angle de rotation de la roue autour de son axe horizontal est noté ( $\varphi$ ) et le rayon de la roue est noté ( $r$ ). Après cette description on en déduit les contraintes suivantes :

- **Le long du plan de la roue :**

$$[-\sin(\alpha + \beta) \quad \cos(\alpha + \beta) \quad l\cos(\beta)]R^T(\theta_p)\dot{X} + r\dot{\varphi} = 0 \quad (\text{II.72})$$

- **Orthogonale au plan de la roue :**

$$[\cos(\alpha + \beta) \quad \sin(\alpha + \beta) \quad l\sin(\beta)]R^T(\theta_p)\dot{X} = 0 \quad (\text{II.73})$$

**B. La roue directrice :** est caractérisée par un axe d'orientation vertical passant par son centre. La description de cette roue est identique à celle de la roue fixe, sauf que l'angle ( $\beta$ ) n'est pas constant. La position de la roue est caractérisée par trois constantes ( $l, \alpha, r$ ) et le mouvement par rapport à la plateforme par deux variables [ $\beta, \varphi$ ]. Les contraintes possèdent les mêmes formes que précédemment :

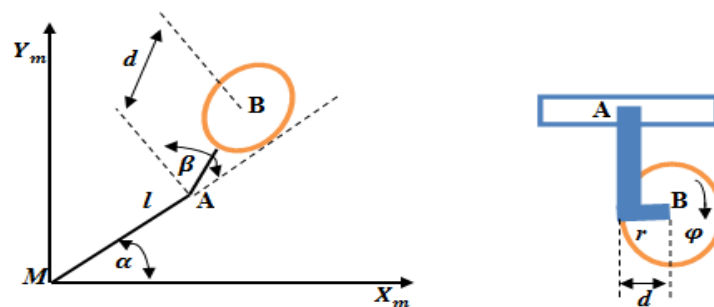
- **Le long du plan de la roue :**

$$[-\sin(\alpha + \beta) \quad \cos(\alpha + \beta) \quad l\cos(\beta)]R^T(\theta_p)\dot{X} + r\dot{\varphi} = 0 \quad (\text{II.74})$$

- **Orthogonale au plan de la roue :**

$$[\cos(\alpha + \beta) \quad \sin(\alpha + \beta) \quad l\sin(\beta)]R^T(\theta_p)\dot{X} = 0 \quad (\text{II.75})$$

**C. La roue folle :** elle est caractérisée par un axe d'orientation vertical appartenant au plan de la roue, mais ne passe pas par le centre de la roue (figure II.11).



**Figure II.11 :** La roue folle.

Dans ce cas, la description de la roue nécessite plus de paramètres. Le centre de la roue est noté maintenant B, il est connecté à la plateforme par un dispositif rigide AB d'une longueur constante d, ce dernier peut tourner autour d'un axe vertical fixe en A et il est fixé à la

plateforme, sa position est spécifiée par deux coordonnées polaires ( $l, \alpha$ ). Le plan de la roue est aligné le long de « AB ». La position de la roue est décrite par quatre constantes ( $l, \alpha, r, d$ ) et son mouvement par les deux angles  $\beta(t)$  et  $\varphi(t)$ . Selon ces notations, les contraintes prennent les formes suivantes :

$$[-\sin(\alpha + \beta) \quad \cos(\alpha + \beta) \quad l\cos(\beta)]R^T(\theta_p)\dot{X} + r\dot{\varphi} = 0 \quad (\text{II.76})$$

$$[\cos(\alpha + \beta) \quad \sin(\alpha + \beta) \quad d + l\sin(\beta)]R^T(\theta_p)\dot{X} = 0 \quad (\text{II.77})$$

### II.6.2 Roue suédoise

Elle permet d'effectuer plusieurs mouvements, dont : rotation autour de son axe, rotation autour du point de contact et rotation autour du pivot (figure II.12).

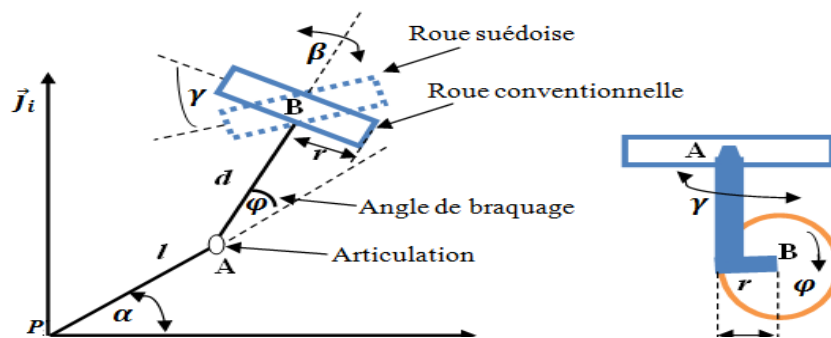


Figure II.12 : La roue suédoise.

Les contraintes prennent les formes suivantes :

$$[-\sin(\alpha + \beta + \gamma) \quad \cos(\alpha + \beta + \gamma) \quad l\cos(\beta + \gamma)]R^T(\theta)\dot{X} + r\cos(\gamma)\dot{\varphi} = 0 \quad (\text{II.78})$$

$$[\cos(\alpha + \beta) \quad \sin(\alpha + \beta) \quad l\sin(\beta)]R^T(\theta)\dot{X} = 0 \quad (\text{II.79})$$

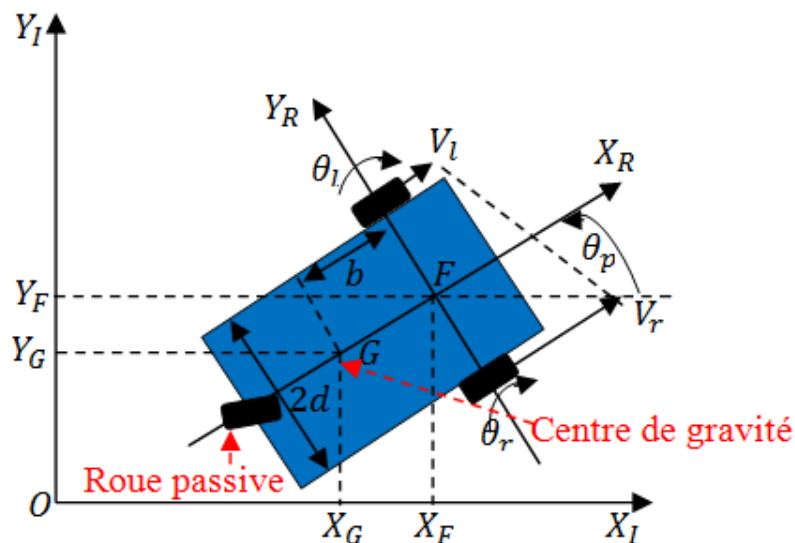
### II.7 Robot mobile à deux roues différentielles

Les RM à deux roues différentielles sont constitués de deux roues gauche/droite motorisées par deux moteurs alignés sur le même axe et une (des) roue (s) décentré-orientable (s), n'intervient (iennent) pas dans le modèle cinématique du système, et elle est utilisé pour assurer l'équilibre mécanique du robot. Un exemple de RM, le plus utilisé dans de la recherche, est le RM « Pioneer 3DX » illustré dans la figure II.13 :



**Figure II.13 :** Le robot mobile « Pioneer 3DX ».

On désigne par monocycle un RM actionné par deux roues indépendantes et possédant éventuellement un certain nombre de roues folles assurant sa stabilité (figure II.14).



**Figure II.14:** Robot mobile à roues différentielles.

La modélisation du RM nécessite la définition des repères suivants :

- **Repère du robot** :  $\{X_R, Y_R\}$  est le système de coordonnées fixé sur le robot.
  - **Repère inertiel** :  $\{X_I, Y_I\}$  est le système de coordonnées fixe dans le plan du robot.
- «  $\theta_p$  » L'angle d'orientation du robot.

La position du robot dans le repère fixe et celui du robot peut être définie comme suit :

$$\begin{aligned} q_I &= [x_I \quad y_I \quad \theta_I]^T \\ q_R &= [x_R \quad y_R \quad \theta_R]^T \end{aligned} \quad (\text{II.80})$$

La relation entre  $q_I$  et  $q_R$  est exprimé à travers la transformation de rotation suivante [42]:

$$q_I = R(\theta_p)q_R \quad (\text{II.81})$$

### II.7.1 Modèle cinématique du robot mobile

L'objectif de la modélisation cinématique d'un RM à roues est de trouver la vitesse du robot dans le repère fixe en fonction des vitesses des roues et les paramètres géométriques du RM. En d'autres termes, nous voulons établir la vitesse du robot

$\dot{q} = [\dot{x}_G \ \dot{y}_G \ \dot{\theta}_p \ \dot{\theta}_r \ \dot{\theta}_l]^T$  en fonction des vitesses des roues  $\dot{\theta}_r$  et  $\dot{\theta}_l$ . Le mouvement du RM est représenté par un modèle cinématique direct (MCD) équation (II.82) ainsi que par celui inverse (MCI) équation (II.83) :

➤ *Cinématique directe :*

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{x}_G \\ \dot{y}_G \\ \dot{\theta}_p \end{bmatrix} = f(\dot{\theta}_r, \dot{\theta}_l, \text{paramètres géométriques}) \quad (\text{II.82})$$

➤ *Cinématique inverse :*

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_r \\ \dot{\theta}_l \end{bmatrix} = f(\dot{x}_G, \dot{y}_G, \dot{\theta}_p) \quad (\text{II.83})$$

On considère la configuration de la PM représentée à la figure II.14 dont l'entraînement différentiel comporte deux roues d'un rayon «  $r$  », placé à une distance «  $d$  » du centre de robot.

Le vecteur de position «  $q$  » du RM et sa vitesse «  $\dot{q}$  » sont respectivement :

$$q = \begin{bmatrix} x_G \\ y_G \\ \theta_p \\ \theta_r \\ \theta_l \end{bmatrix}, \quad \dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{x}_G \\ \dot{y}_G \\ \dot{\theta}_p \\ \dot{\theta}_r \\ \dot{\theta}_l \end{bmatrix} \quad (\text{II.84})$$

Le MCD est décrit par la fonction suivante :

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{x}_G \\ \dot{y}_G \\ \dot{\theta}_p \\ \dot{\theta}_r \\ \dot{\theta}_l \end{bmatrix} = f(\theta_r, \theta_l, d, r, \theta_p) \quad (\text{II.85})$$

Les relations entre les vitesses linéaires et angulaires des roues sont :

$$\begin{cases} v_r = r\dot{\theta}_r \\ v_l = r\dot{\theta}_l \\ v = \frac{r}{2}(\dot{\theta}_r + \dot{\theta}_l) \end{cases} \quad (\text{II.86})$$

Les coordonnées du vecteur de vitesses du RM sont définies en repère fixe comme suit  $\dot{x}_F$ ,  $\dot{y}_F$  et  $\dot{\theta}_p$ :

$$\begin{cases} \dot{x}_F = v\cos(\theta_p) \\ \dot{y}_F = v\sin(\theta_p) \end{cases} \quad (\text{II.87})$$

$$\begin{cases} \dot{x}_F = \frac{r}{2}(\dot{\theta}_r + \dot{\theta}_l)\cos(\theta_p) \\ \dot{y}_F = \frac{r}{2}(\dot{\theta}_r + \dot{\theta}_l)\sin(\theta_p) \end{cases} \quad (\text{II.88})$$

$$v = (v_r + v_l)/2 \quad (\text{II.89})$$

$$v = r(\dot{\theta}_r + \dot{\theta}_l)/2 \quad (\text{II.90})$$

$$2d\dot{\theta}_p = v_r - v_l \Rightarrow \dot{\theta}_p = r(\dot{\theta}_r - \dot{\theta}_l)/2d \quad (\text{II.91})$$

L'expression de la vitesse linéaire  $v$  et la vitesse angulaire  $\omega$  du RM en fonction des vitesses de rotation de la roue gauche  $\dot{\theta}_l$  et de la roue droite  $\dot{\theta}_r$ :

$$\begin{cases} v = r(\dot{\theta}_r + \dot{\theta}_l)/2 \\ \omega = \dot{\theta}_p = r(\dot{\theta}_r - \dot{\theta}_l)/2d \end{cases} \quad (\text{II.92})$$

La relation entre les vitesses du centre de gravité et du centre d'axe des roues est :

$$\begin{cases} x_G = x_F - b\cos(\theta_p) \\ y_G = y_F - b\sin(\theta_p) \end{cases} \quad (\text{II.93})$$

En dérivant (II.93), on obtient :

$$\begin{cases} \dot{x}_G = \dot{x}_F + b\dot{\theta}_p\sin(\theta_p) \\ \dot{y}_G = \dot{y}_F - b\dot{\theta}_p\cos(\theta_p) \end{cases} \quad (\text{II.94})$$

Sachant que

$$v = \dot{x}_F\cos(\theta_p) + \dot{y}_F\sin(\theta_p) \quad (\text{II.95})$$

et

$$\begin{cases} v_r = v + d\dot{\theta}_p \\ v_l = v - d\dot{\theta}_p \end{cases} \quad (\text{II.96})$$

De (II.86), (II.95) et (II.96), on obtient :

$$\begin{cases} v_r = r\dot{\theta}_r = \dot{x}_F \cos(\theta_p) + \dot{y}_F \sin(\theta_p) + d\dot{\theta}_p \\ v_l = r\dot{\theta}_l = \dot{x}_F \cos(\theta_p) + \dot{y}_F \sin(\theta_p) - d\dot{\theta}_p \end{cases} \quad (\text{II.97})$$

On considère que la rotation est autour du centre de gravité « G », en remplaçant «  $\dot{x}_F$  » et «  $\dot{y}_F$  » par leurs expressions données par les équations (II.87) et (II.88), on obtient les relations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}_G = \left(\frac{r}{2} \cos(\theta_p) - \frac{rb}{2d} \sin(\theta_p)\right)\dot{\theta}_r + \left(\frac{r}{2} \cos(\theta_p) + \frac{rb}{2d} \sin(\theta_p)\right)\dot{\theta}_l \\ \dot{y}_G = \left(\frac{r}{2} \sin(\theta_p) + \frac{rb}{2d} \cos(\theta_p)\right)\dot{\theta}_r + \left(\frac{r}{2} \sin(\theta_p) - \frac{rb}{2d} \cos(\theta_p)\right)\dot{\theta}_l \end{cases} \quad (\text{II.98})$$

Avec 
$$\omega = \dot{\theta}_p = \frac{r}{2d}(\dot{\theta}_r - \dot{\theta}_l) \quad (\text{II.99})$$

La forme matricielle du MCD du RM est déduite à partir des équations (II.98, II.99) et il est donné par l'équation suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_G \\ \dot{y}_G \\ \dot{\theta}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r}{2} \cos(\theta_p) - \frac{rb}{2d} \sin(\theta_p) & \frac{r}{2} \cos(\theta_p) + \frac{rb}{2d} \sin(\theta_p) \\ \frac{r}{2} \sin(\theta_p) + \frac{rb}{2d} \cos(\theta_p) & \frac{r}{2} \sin(\theta_p) - \frac{rb}{2d} \cos(\theta_p) \\ \frac{r}{2d} & -\frac{r}{2d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_r \\ \dot{\theta}_l \end{bmatrix} \quad (\text{II.100})$$

Les équations des contraintes cinématiques des roues (II.97) peuvent être écrites pour les coordonnées généralisées de la plateforme,  $q = [x_G \ y_G \ \theta_p \ \theta_r \ \theta_l]^T$ . Nous pouvons alors développer l'expression cinématique comme suit :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_G \\ \dot{y}_G \\ \dot{\theta}_p \\ \dot{\theta}_r \\ \dot{\theta}_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r}{2} \cos(\theta_p) - \frac{rb}{2d} \sin(\theta_p) & \frac{r}{2} \cos(\theta_p) + \frac{rb}{2d} \sin(\theta_p) \\ \frac{r}{2} \sin(\theta_p) + \frac{rb}{2d} \cos(\theta_p) & \frac{r}{2} \sin(\theta_p) - \frac{rb}{2d} \cos(\theta_p) \\ \frac{r}{2d} & -\frac{r}{2d} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_r \\ \dot{\theta}_l \end{bmatrix} \quad (\text{II.101})$$

En utilisant les équations (II.98) et (II.99), on formule le MCI du RM suivant :

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_r \\ \dot{\theta}_l \end{bmatrix} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} \cos(\theta_p) & \sin(\theta_p) & d \\ \cos(\theta_p) & \sin(\theta_p) & -d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_G \\ \dot{y}_G \\ \dot{\theta}_p \end{bmatrix} \quad (\text{II.102})$$

### II.7.2. Contraintes cinématiques du robot à entraînement différentiel

Si le RM peut instantanément se déplacer en avant ou en arrière mais il ne peut pas se déplacer à droite ou à gauche sans que les roues glissent, on dit alors qu'il possède une contrainte « non holonome », par contre si chaque roue est capable de se déplacer latéralement (gauche ou droite), on dit alors qu'il s'agit d'un comportement « holonome » du RM [43].

Le mouvement d'un RM différentiel est caractérisé par deux équations de contrainte non-holonomes, qui sont obtenues par deux hypothèses principales:

#### *Hypothèse 1 : Aucun glissement latéral*

Cette contrainte signifie simplement que le RM peut se déplacer uniquement en avant et en arrière, mais pas latéralement.

Cette hypothèse signifie que la vitesse du centre de gravité « G » du RM est nulle le long de l'axe latéral et peut être exprimée mathématiquement par la relation suivante :

$$-\dot{x}_G \sin(\theta_p) + \dot{y}_G \cos(\theta_p) = 0 \quad (\text{II.103})$$

#### *Hypothèse 2 : Roulement pur sans glissement*

La contrainte roulement pur représente le fait que chaque roue maintient un point en contact ponctuel avec le sol [44].

Les équations (II.97) et (II.103) représentent les contraintes non-holonomes qui s'écrivent sous forme compacte suivante :

$$\begin{bmatrix} -\sin(\theta_p) & \cos(\theta_p) & b & 0 & 0 \\ \cos(\theta_p) & \sin(\theta_p) & d & -r & 0 \\ \cos(\theta_p) & \sin(\theta_p) & -d & 0 & -r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_G \\ \dot{y}_G \\ \dot{\theta}_p \\ \dot{\theta}_r \\ \dot{\theta}_l \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{II.104})$$

en substituant l'équation (II.85) dans (II.104), on obtient

$$A(q)\dot{q} = 0 \quad (\text{II.105})$$

$A(q)$  est la matrice de contraintes non-holonomes donnée par:

$$(II.106) \quad A(q) = \begin{bmatrix} -\sin(\theta_p) & \cos(\theta_p) & b & 0 & 0 \\ \cos(\theta_p) & \sin(\theta_p) & d & -r & 0 \\ \cos(\theta_p) & \sin(\theta_p) & -d & 0 & -r \end{bmatrix}$$

En combinant (II.85) et (II.100), on obtient

$$\dot{q}(t) = S(q)\sigma(t) \quad (II.107)$$

ou  $\sigma(t)$  vecteur des vitesses des roues

$$\sigma(t) = [\dot{\theta}_r \ \dot{\theta}_l]^T \quad (II.108)$$

$$S(q) = \begin{bmatrix} \frac{r}{2} \cos(\theta_p) - \frac{rb}{2d} \sin(\theta_p) & \frac{r}{2} \cos(\theta_p) + \frac{rb}{2d} \sin(\theta_p) \\ \frac{r}{2} \sin(\theta_p) + \frac{rb}{2d} \cos(\theta_p) & \frac{r}{2} \sin(\theta_p) - \frac{rb}{2d} \cos(\theta_p) \\ \frac{r}{2d} & -\frac{r}{2d} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (II.109)$$

### II.7.3 Modèle dynamique du robot mobile non-holonyme

La dynamique des RM est un domaine complexe et il a suscité une attention considérable des chercheurs et des ingénieurs au fil des années. La plupart des RM exploités sont équipés de roues conventionnelles et sont soumis à des contraintes non-holonomes qui nécessitent un traitement particulier [45]. Le modèle dynamique (MD) des RM est obtenu, en utilisant les équations de Lagrange. L'expression compacte du MD du RM non-holonyme est donnée par l'expression suivante :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} + A^T(q)\lambda = B(q)\tau \quad (II.110)$$

ou  $L(q) = E_{cp}(q, \dot{q}) - E_{bp}(q)$ : Le Lagrangien;

$E_{cp}(q, \dot{q})$ : Energie cinétique du RM;

$E_{bp}(q)$ : Energie potentielle du RM;

$\lambda$  est un vecteur du multiplicateur de Lagrange;

L'énergie cinétique du RM est

$$E_{cp}(q, \dot{q}) = E_{c1} + E_{c2} + E_{c3} \quad (II.111)$$

$$E_{c1}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2) \quad (\text{II.112})$$

$$E_{c2}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}I_F\dot{\theta}_p \quad (\text{II.113})$$

$$E_{c3}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}I_0(\dot{\theta}_r + \dot{\theta}_l) \quad (\text{II.114})$$

avec

$m$  : Masse du RM ;

$v$  : la vitesse linéaire du centre de gravité du robot G ;

$I_F$  : Le moment d'inertie du RM par rapport au point F (mentionné à la figure II.14) ;

$I_0$  : Le moment d'inertie de l'ensemble roue et rotor du moteur.

On a

$$\begin{cases} \dot{x}_G = \dot{x}_F - b\dot{\theta}_p \sin(\theta_p) \\ \dot{y}_G = \dot{y}_F + b\dot{\theta}_p \cos(\theta_p) \end{cases} \quad (\text{II.115})$$

$$\begin{cases} \dot{x}_F = \frac{r}{2}(\dot{\theta}_r + \dot{\theta}_l)\cos(\theta_p) \\ \dot{y}_F = \frac{r}{2}(\dot{\theta}_r + \dot{\theta}_l)\sin(\theta_p) \\ \dot{\theta}_p = \frac{r}{2}(\dot{\theta}_r - \dot{\theta}_l) \end{cases} \quad (\text{II.116})$$

Substituant (II.115) et (II.116) et dans (II.112)-(II.114) alors l'énergie cinétique du RM s'exprime par la relation suivante :

$$E_{cp}(\dot{\theta}_r, \dot{\theta}_l) = \left[ \frac{mr^2}{8} + \frac{(I_F+mb^2)r^2}{8d^2} + \frac{I_F}{2} \right] (\dot{\theta}_r^2 + \dot{\theta}_l^2) + \left[ \frac{mr^2}{4} - \frac{(I_F+mb^2)r^2}{4d^2} \right] \dot{\theta}_r \dot{\theta}_l \quad (\text{II.117})$$

On constate que l'énergie cinétique du robot est exprimée en fonction des vitesses angulaires des roues  $\dot{\theta}_r, \dot{\theta}_l$ . Du fait que le robot se déplace sur le plan horizontal donc l'énergie potentielle est nulle, donc le Lagrangien «  $L$  » est égal à l'énergie cinétique  $E_{cp}$  seulement. Par conséquent, les équations de Lagrange de ce type de RM sont :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_r} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_r} = \tau_r \quad (\text{II.118})$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_l} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_l} = \tau_l \quad (\text{II.119})$$

$$M_{11}\ddot{\theta}_r + M_{12}\ddot{\theta}_l = \tau_r \tag{II.120}$$

$$M_{21}\ddot{\theta}_r + M_{22}\ddot{\theta}_l = \tau_l \tag{II.121}$$

avec 
$$M_{11} = M_{22} = \left[ \frac{mr^2}{4} + \frac{(I_F + mb^2)r^2}{4d^2} + \frac{I_F}{2} \right] \tag{II.122}$$

$$M_{12} = M_{21} = \left[ \frac{mr^2}{4} - \frac{(I_F + mb^2)r^2}{4d^2} \right] \tag{II.123}$$

### II.8 Modélisation du bras manipulateur mobile à roues

On garde la même notation des vecteurs et des matrices utilisée dans les sections précédentes lors de la modélisation du bras manipulateur (BM) et de la plateforme mobile (PM) (qui est considéré dans cette section comme la PM pour le BM) En général, un manipulateur mobile à roues (BMM) est composé d'un BM, de  $\mathbf{q}_b$  coordonnées généralisées, monté sur une PM à roues, de  $\mathbf{q}_p$  coordonnées généralisées [46]. Un BMM peut être décrit par un vecteur  $\mathbf{q}$ , de coordonnée généralisée :

$$\mathbf{q} = [\mathbf{q}_p^T \quad \mathbf{q}_b^T]^T \tag{II.124}$$

ou,

$\mathbf{q}_b = [\theta_1, \theta_2]^T$  : Vecteur de coordonnées généralisées du BM ;

$\mathbf{q}_p = [x, y, \theta_p]^T$  : Vecteur de coordonnées généralisées de la PM ;

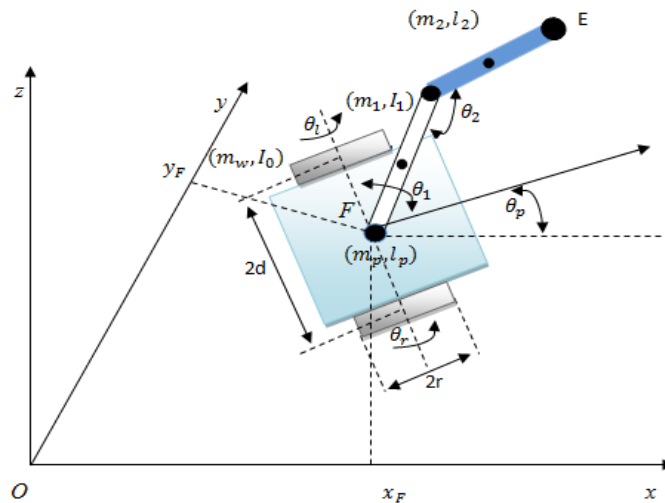


Figure II.15 : Bras manipulateur mobile à roues.

La situation de l'organe terminal (point  $E$  de la figure II.15) peut être définie par un vecteur  $X$  de  $m$  coordonnées opérationnelles tel que :

$$X = [x_E \ y_E \ z_E]^T \quad (\text{II.125})$$

### II.8.1 Modèle géométrique direct

Le modèle géométrique direct exprime les coordonnées opérationnelles du point  $E$  en fonction du vecteur des coordonnées articulaires  $q$ , tel que :

$$X = f(q) \quad (\text{II.126})$$

A partir de la figure II.15, on constate que BM n'est plus fixe, ces coordonnées sont en fonction des coordonnées de la PM. On peut déduire le modèle géométrique direct du BMMR et pour alléger le calcul, on considère  $b=0$  (les deux points  $G$  et  $F$ , de la figure II.14, sont superposés).

On rappelle l'expression du MGD du BM donnée par l'équation (II.44), comme suit :

$$\begin{cases} x = l_{c2} \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_1 \cos(\theta_1) \\ y = l_{c2} \sin(\theta_1 + \theta_2) + l_1 \sin(\theta_1) \end{cases} \quad (\text{II.127})$$

Les coordonnées de l'outil terminal du BMMR (figure II.15) sont données en fonction des variables  $x_F, y_F, \theta_p, \theta_1$  et  $\theta_2$ :

$$\begin{cases} x_E = x_F + l_1 \cos(\theta_p) \cos(\theta_1) + l_2 \cos(\theta_p) \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ y_E = y_F + l_1 \sin(\theta_p) \cos(\theta_1) + l_2 \sin(\theta_p) \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ z_E = l_1 \sin(\theta_1) + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{cases} \quad (\text{II.128})$$

ou:  $(x_F, y_F)$  et  $\theta_p$  représentent respectivement les coordonnées (position) et l'orientation de la base mobile de la PM.

### II.8.2 Modèle cinématique direct

L'expression des vitesses opérationnelles c'est dire celle de l'OT (point E de la figure II.15), en fonction de celle articulaires représente le MCD, tel que :

$$\dot{X} = J(q)\dot{q} \quad (\text{II.129})$$

ou  $J(q)$  est la matrice jacobéenne du BMMR.

En dérivant l'équation (II.128) par rapport au temps et en remplaçant  $\dot{x}_F$  et  $\dot{y}_F$  par leur expression donnée par l'équation (II.115), on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_E = \left[ \frac{r}{2} \cos(\theta_p) - (l_1 \sin(\theta_p) \cos(\theta_1) + l_2 \sin(\theta_p) \cos(\emptyset)) \frac{r}{2} \dot{\theta}_p \cos(\theta_p) \right] \dot{\theta}_r \\ \quad \left[ \frac{r}{2} \cos(\theta_p) - (l_1 \sin(\theta_p) \cos(\theta_1) + l_2 \sin(\theta_p) \cos(\emptyset)) \frac{r}{2} \dot{\theta}_p \cos(\theta_p) \right] \dot{\theta}_l \\ \quad - (l_1 \cos(\theta_p) \sin(\theta_1) + l_2 \cos(\theta_p) \sin(\emptyset)) \dot{\theta}_1 - (l_2 \cos(\theta_p) \sin(\emptyset)) \dot{\theta}_2 \\ \dot{y}_E = \left[ \frac{r}{2} \sin(\theta_p) + (l_1 \cos(\theta_p) \cos(\theta_1) + l_2 \cos(\theta_p) \cos(\emptyset)) \frac{r}{2} \cos(\theta_p) \right] \dot{\theta}_l \\ \quad \left[ \frac{r}{2} \sin(\theta_p) \dot{\theta}_l + (l_1 \cos(\theta_p) \cos(\theta_1) + l_2 \cos(\theta_p) \cos(\emptyset)) \frac{r}{2} \cos(\theta_p) \right] \dot{\theta}_r \\ \quad - (l_1 \sin(\theta_p) \sin(\theta_1) \dot{\theta}_1 + l_2 \sin(\theta_p) \sin(\emptyset)) \dot{\theta}_1 - (l_2 \sin(\theta_p) \sin(\emptyset)) \dot{\theta}_2 \\ \dot{z}_E = (l_1 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1) + l_2 \cos(\emptyset)) \dot{\theta}_1 + l_2 \cos(\emptyset) \dot{\theta}_2 \end{array} \right. \quad (\text{II.130})$$

Avec

$$\emptyset = \theta_1 + \theta_2, \quad \dot{X} = [\dot{x}_E \quad \dot{y}_E \quad \dot{z}_E]^T, \quad \dot{q} = [\dot{\theta}_r \quad \dot{\theta}_l \quad \dot{\theta}_1 \quad \dot{\theta}_2]^T \text{ et } \dot{\theta}_p = \frac{r}{2}(\dot{\theta}_r - \dot{\theta}_l).$$

A partir de l'équation (II.129) et de l'équation (II.130), on déduit la matrice jacobéenne du BMM, donnée par l'expression suivante :

$$J(q) = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} & J_{14} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} & J_{24} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} & J_{34} \end{bmatrix} \quad (\text{II.131})$$

$$J_{11} = J_{12} = \frac{r}{2} \cos(\theta_p) - (l_1 \sin(\theta_p) \cos(\theta_1) + l_2 \sin(\theta_p) \cos(\emptyset)) \frac{r}{2} \dot{\theta}_p \cos(\theta_p);$$

$$J_{13} = -(l_1 \cos(\theta_p) \sin(\theta_1) + l_2 \sin(\theta_p) \cos(\emptyset));$$

$$J_{21} = \frac{r}{2} \sin(\theta_p) + (l_1 \cos(\theta_p) \cos(\theta_1) + l_2 \cos(\theta_p) \cos(\emptyset)) \frac{r}{2} \cos(\theta_p);$$

$$J_{22} = \frac{r}{2} \sin(\theta_p) \dot{\theta}_l + (l_1 \cos(\theta_p) \cos(\theta_1) + l_2 \cos(\theta_p) \cos(\emptyset)) \frac{r}{2} \cos(\theta_p);$$

$$J_{23} = -l_1 \sin(\theta_p) \sin(\theta_1) \dot{\theta}_1 - l_2 \sin(\theta_p) \sin(\emptyset); J_{24} = -l_2 \sin(\theta_p) \sin(\emptyset);$$

$$J_{31} = J_{32} = 0; J_{33} = l_1 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1) + l_2 \cos(\emptyset); J_{34} = l_2 \cos(\emptyset).$$

### II.8.3 Modèle cinématique inverse

Les vitesses articulaires sont calculées en fonction des vitesses opérationnelles, en d'autres termes en inversant la matrice  $J(q)$  ce représente le MCI tel que :

$$\dot{q} = [J(q)]^{-1} \dot{X} \quad (\text{II.132})$$

### II.8.4 Modèle dynamique direct

On utilise les équations de Lagrange pour formuler le modèle dynamique du BMM sous la contrainte non-holonome de la PM, tel que :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} + A^T(q) \lambda = B\tau \quad (\text{II.133})$$

ou :  $q = [q_b \ q_p]^T$  sont les coordonnées généralisées du BMM et «  $L$  » est son Lagrangien,

$$\text{avec} \quad L(q, \dot{q}) = E_c(q, \dot{q}) - E_p(q) \quad (\text{II.134})$$

L'énergie cinétique totale du BMM est égale à l'énergie cinétique de la PM plus celle du BM manipulateur tel que:

$$E_c(q, \dot{q}) = E_{cb}(q, \dot{q}) + E_{cp}(q, \dot{q}) \quad (\text{II.135})$$

ou

$E_{cp}(q, \dot{q})$  : l'énergie cinétique de la PM;

$$E_{cp}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m (\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2) + \frac{1}{2} I_F \dot{\theta}_p + \frac{1}{2} I_0 (\dot{\theta}_r + \dot{\theta}_l) \quad (\text{II.136})$$

$E_{cb}(q, \dot{q})$ : l'énergie cinétique du BM ;

$$E_{cb}(q, \dot{q}) = E_{cb1}(q, \dot{q}) + E_{cb2}(q, \dot{q}) \quad (\text{II.137})$$

$$E_{cb1}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2 \quad (\text{II.138})$$

$$E_{cb2}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + \frac{1}{2} I_2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) \quad (\text{II.139})$$

avec  $E_{cb1}(q, \dot{q})$  et  $E_{cb2}(q, \dot{q})$  les expressions d'énergie du premier et deuxième segment, respectivement.

En dérivant les équations (II.46) et (II.47) respectivement, on obtient

$$\begin{cases} \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 = l_{c1}^2 \dot{\theta}_1^2 \\ \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 = l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_{c2}^2 \dot{\theta}_1^2 + l_{c2}^2 \dot{\theta}_2^2 + 2 l_{c2} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + 2 l_1 l_{c2} \dot{\theta}_1^2 \cos(\theta_2) + 2 l_1 l_{c2} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2) \end{cases} \quad (\text{II.140})$$

En substituant les équations (II.140) dans (II.137), l'expression de l'énergie cinétique du BM est :

$$\begin{aligned} E_{cb}(q, \dot{q}) = & \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\theta}_2^2 + I_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \frac{1}{2} m_1 l_{c1}^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_{c2}^2 \dot{\theta}_1^2 + l_{c2}^2 \dot{\theta}_2^2 \\ & + 2 l_{c2} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + 2 l_1 l_{c2} \dot{\theta}_1^2 \cos(\theta_2) + 2 l_1 l_{c2} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2)) \end{aligned} \quad (\text{II.141})$$

En tenant compte que l'énergie potentielle de la PM est nulle donc l'énergie potentielle totale du BMM sera égale à l'énergie du BM tel que

$$E_b(q, \dot{q}) = m_1 g l_{c1} \sin(\theta_1) + m_2 g (l_1 \sin(\theta_1) + l_{c2} \sin(\theta_1 + \theta_2)) \quad (\text{II.142})$$

En substituant les équations (II.136), (II.137) et l'équation (II.142) dans l'expression (II.134), on obtient l'expression de Lagrangien suivante :

$$\begin{aligned} L(q, \dot{q}) = & \frac{1}{2} m (\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2) + \frac{1}{2} I_F \dot{\theta}_p + \frac{1}{2} I_0 (\dot{\theta}_r + \dot{\theta}_l) + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 (I_2 + \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_2)) + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \\ & + \dot{\theta}_1^2 (\frac{1}{2} I_1 + \frac{1}{2} I_2 + \frac{1}{4} m_1 l_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_1^2 + \frac{1}{4} m_2 l_2^2 + \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_2)) + \dot{\theta}_2^2 (\frac{1}{2} I_2 + \frac{1}{4} m_2 l_2^2) \\ & - m_1 g l_{c1} \sin(\theta_1) + m_2 g (l_1 \sin(\theta_1) + \frac{1}{2} l_2 g \sin(\theta_1 + \theta_2)) \end{aligned} \quad (\text{II.143})$$

En se servant de l'équation (II.132) et de l'équation (II.141), l'équation dynamique qui décrit le mouvement du BMM est :

$$M(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + G(q) + A^T(q) \lambda = B(q) \tau \quad (\text{II.144})$$

Où  $M(q) \in \mathcal{R}^{n \times n}$  matrice d'inerties,  $C(q, \dot{q}) \in \mathcal{R}^n$  vecteur des forces de centrifuge et Coriolis,  $G(q) \in \mathcal{R}^n$  est le vecteur des forces de gravité,  $\tau = [\tau_p \ \tau_b]^T \in \mathcal{R}^m$  vecteur de couples d'entrée,  $B(q) \in \mathcal{R}^{n \times m}$  matrice de transformation d'entrée,  $A(q) \in \mathcal{R}^{1 \times n}$  matrice des contraintes cinématiques de la PM,  $\lambda$  vecteur de multiplicateur de Lagrange,  $q = [q_p \ q_b]^T \in \mathcal{R}^n$  est le vecteur des coordonnées généralisées, avec  $q_p = [x, y, \theta_p]^T$  représente les coordonnées de la PM et  $q_b = [\theta_1, \theta_2]^T$  représente les positions articulaire du BM.

En considérant que le manipulateur mobile est composé de deux systèmes, l'équation (II.144) peut être réécrite comme suit :

$$\begin{bmatrix} M_p & M_{pb} \\ M_{bp} & M_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_p \\ \ddot{q}_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_p & C_{pb} \\ C_{bp} & C_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_p \\ \dot{q}_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_p \\ g_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_p & 0 \\ 0 & B_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_p \\ \tau_b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A^T(q_p)\lambda \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.145})$$

avec

$$M_p(q) = \begin{bmatrix} m + \frac{2I_0}{r^2} \sin^2(\theta_p) & -\frac{2I_0}{r^2} \sin(\theta_p) \cos(\theta_p) & 0 \\ -\frac{2I_0}{r^2} \sin(\theta_p) \cos(\theta_p) & m + \frac{2I_0}{r^2} \sin^2(\theta_p) & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \quad (\text{II.146})$$

$$M_{pb}(q) = M_{bp}(q)^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I_{12} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (\text{II.147})$$

$$M_b(q) = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} m_1 l_1^2 + m_2 (l_1^2 + \frac{1}{4} l_2^2 + 2l_1 l_2 \cos(\theta_1)) + I_{12} & m_2 \left( \frac{1}{4} l_2^2 + \frac{1}{2} l_1 l_2 \cos(\theta_2) \right) + I_2 \\ m_2 \left( \frac{1}{4} l_2^2 + \frac{1}{2} l_1 l_2 \cos(\theta_2) \right) + I_2 & \frac{1}{4} m_2 l_2^2 + I_2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.148})$$

$$C_p(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} \frac{2I_0}{r^2} \dot{\theta}_p \sin(\theta_p) \cos(\theta_p) & -\frac{2I_0}{r^2} \dot{\theta}_p \cos^2(\theta_p) & 0 \\ -\frac{2I_0}{r^2} \dot{\theta}_p \cos^2(\theta_p) & -\frac{2I_0}{r^2} \dot{\theta}_p \sin(\theta_p) \cos(\theta_p) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.149})$$

$$C_{pb}(q, \dot{q}) = C_{bp}(q, \dot{q})^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, C_b(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.150})$$

ou  $I = I_0 + I_1 + I_2 + \frac{2I_0d^2}{r^2}$ ,  $I_{12} = I_1 + I_2$  et  $m = m_p + m_1 + m_2$

$$G(q) = [G_p \quad G_b]^T \quad (\text{II.151})$$

$$G_b(q) = \left[ g\left(\frac{m_1l_1}{2} + m_2l_1\right)\cos(\theta_2) + \frac{m_2l_2}{2}\cos(\theta_1 + \theta_2) \quad \frac{gm_2l_2}{2}\cos(\theta_1 + \theta_2) \right]^T ; G_p(q) = [0 \quad 0 \quad 0]^T ;$$

$$B_p(q) = \begin{bmatrix} \frac{1}{r}\cos(\theta_p) & \frac{1}{r}\cos(\theta_p) \\ \frac{1}{r}\sin(\theta_p) & \frac{1}{r}\sin(\theta_p) \\ \frac{d}{r} & \frac{d}{r} \end{bmatrix} ; B_b(q) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II.152})$$

La plate-forme mobile soumise contraintes non-holonomes donnée par l'équation (II.105) comme suit :

$$A(q_p)\dot{q}_p = 0 \quad (\text{II.153})$$

Il est possible d'obtenir l'expression du MD du BMM en éliminant le terme « $A(q_p)^T\lambda$ » qui correspond aux contraintes, en définissant la variable active de la PM,  $\sigma_p = [\dot{\theta}_r, \dot{\theta}_l]^T$ , tel que :

$$\dot{q}_p = S_p(q_p)\sigma_p \quad (\text{II.154})$$

ou

$$S_p(q) = \begin{bmatrix} \frac{r}{2}\cos(\theta_p) & \frac{r}{2}\cos(\theta_p) \\ \frac{r}{2}\sin(\theta_p) & \frac{r}{2}\sin(\theta_p) \\ \frac{r}{2d} & -\frac{r}{2d} \end{bmatrix} \quad (\text{II.155})$$

En dérivant l'équation (II.154), on obtient l'expression suivante :

$$\ddot{q}_p = \dot{S}_p(q_p)\sigma_p + S_p(q_p)\dot{\sigma}_p \quad (\text{II.156})$$

$S_p(q)$  est une matrice de rang complet, qui satisfait l'équation suivante:

$$S(q_p)^T A(q_p)^T = 0 \quad (\text{II.157})$$

On substitue l'équation (II.156) dans (II.145), ensuite on multiplie le résultat par  $S(q_p)^T$ , on obtient

$$\begin{bmatrix} S_p^T M_p S_p & S_p^T M_{pb} \\ M_{bp} S_p & M_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_p \\ \ddot{q}_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S_p^T M_p \dot{S}_p + S_p^T C_p S_p & S_p^T C_{pb} \\ M_{bp} \dot{S}_p + C_{bp} S_p & C_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_p \\ \dot{q}_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S_p^T G_p \\ G_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_p^T B_p & O \\ O & B_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_p \\ \tau_b \end{bmatrix} \quad (\text{II.158})$$

Les coordonnées généralisées du BMM  $q = [q_p \quad q_b]^T$ , et en basant sur l'équation (II.154), la variable active du BMM est de forme suivante :

$$\sigma = [\sigma_p, \sigma_b]^T \quad (\text{II.159})$$

avec  $\sigma_p = [\dot{\theta}_r, \dot{\theta}_l]^T$  et  $\sigma_b = [\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2]^T$

et l'expression (II.154) devient,

$$\dot{q} = S(q)\sigma \quad (\text{II.160})$$

où 
$$S(q) = \begin{bmatrix} S_p(q) & 0_{3 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & I_{2 \times 2} \end{bmatrix} \quad (\text{II.161})$$

En substituant (II.160) dans l'expression (II.145), le MD du BMM peut être réécrit sous la forme générale suivante:

$$D(q)\dot{\sigma} + F(q, \dot{q})\sigma + N(q) = \bar{B}(q)\tau \quad (\text{II.162})$$

où  $D = S^T M S$ ,  $F = S^T (M \dot{S} + C S)$ ,  $N = S^T G$  et  $\bar{B} = S^T B$

$$D(q) = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix} \quad (\text{II.163})$$

avec

$$m_{11} = m_{22} = \left(1 + \frac{l}{d}\right) \frac{mr^2}{4} + \frac{l_0}{4} \left(\frac{1}{2} + \frac{l}{d}\right) - \left(1 + \frac{l}{d}\right) \frac{l_0}{4} \cos(2\theta_p) + \frac{l_0}{8} \cos^2(2\theta_p);$$

$$m_{12} = m_{21} = \left(1 - \frac{l}{d}\right) \frac{mr^2}{4} + \frac{l_0}{4} \left(\frac{1}{2} - \frac{l}{d}\right) - \left(1 - \frac{l}{d}\right) \frac{l_0}{4} \cos(2\theta_p) + \frac{l_0}{8} \cos^2(2\theta_p);$$

$$m_{33} = \frac{m_1 l_1^2}{4} + m_2 \left(l_1^2 + \frac{1}{4} l_2^2 + 2l_1 l_2 \cos(\theta_1)\right) + I_{12}; m_{44} = \frac{1}{4} m_2 l_2^2 + I_2;$$

$$m_{31} = m_{13} = \frac{r}{2d} I_{12}; m_{34} = m_{43} = m_2 \left(\frac{1}{4} l_2^2 + 2l_1 l_2 \cos(\theta_2)\right) + I_2; I_{12} = I_1 + I_2$$

$$m_{32} = m_{23} = -\frac{r}{2d} I_{12}; m_{14} = m_{24} = m_{41} = m_{42} = 0; I = I_0 + I_1 + I_2 + 2 \frac{d^2}{r^2} I_0$$

$$F(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix} \quad (\text{II.164})$$

ou 
$$c_{11} = c_{12} = c_{21} = c_{22} = -\frac{l_0}{8} \dot{\theta}_p \sin(4\theta_p) - \frac{l_0}{4} \dot{\theta}_p \sin(2\theta_p) ;$$

$$c_{13} = c_{14} = 0; c_{ij} = 0, i = 2,3,4, j = 1,2,3,4$$

$$N(q) = \left[ 0 \quad 0 \quad g(l_1(\frac{m_1}{2} + m_2) \cos(\theta_p) + (\frac{m_2}{2} l_2) \cos(\theta_1 + \theta_2)) \quad g(\frac{m_2}{2} l_2) \cos(\theta_1 + \theta_2) \right]^T \quad (\text{II.165})$$

et,

$$\bar{B}(q) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II.166})$$

## II.9 Conclusion

Dans ce chapitre, dans un premier temps, nous avons développé le modèle cinématique qui permet la fonctionnalité de changeur de coordonnées, afin de pouvoir commander le robot via les coordonnées articulaires associées à une tâche opérationnelle. Ensuite, nous avons développé le modèle dynamique d'un robot manipulateur mobile par le formalisme de Lagrange. Les chapitres suivants seront consacrés à l'étude de la simulation de deux lois de commande appliquées au BMM : la commande basée sur la linéarisation par retour d'état et celle fondée sur le principe de la passivité.

## Chapitre III

### Commande basée sur la linéarisation par rétroaction

#### III.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à la conception d'un contrôleur basé sur la linéarisation par rétroaction du BMM, décrit au Chapitre précédent. La PM est commandée de telle sorte qu'elle amène toujours l'organe terminal du BM à la position désirée. Le contrôle de la PM dépend des positions articulaires mesurées du BM afin d'assurer la planification de son propre mouvement. L'idée de base de cette approche est d'appliquer une transformation des coordonnées pour reformuler le système global en dynamiques internes non linéaires et externes linéaires. La loi de contrôle basée sur la théorie de « Lyapunov » est conçue pour réaliser le suivi de trajectoire et la stabilisation du système en boucle fermée.

#### III.2 Commande basée sur la linéarisation par rétroaction d'un robot manipulateur mobile

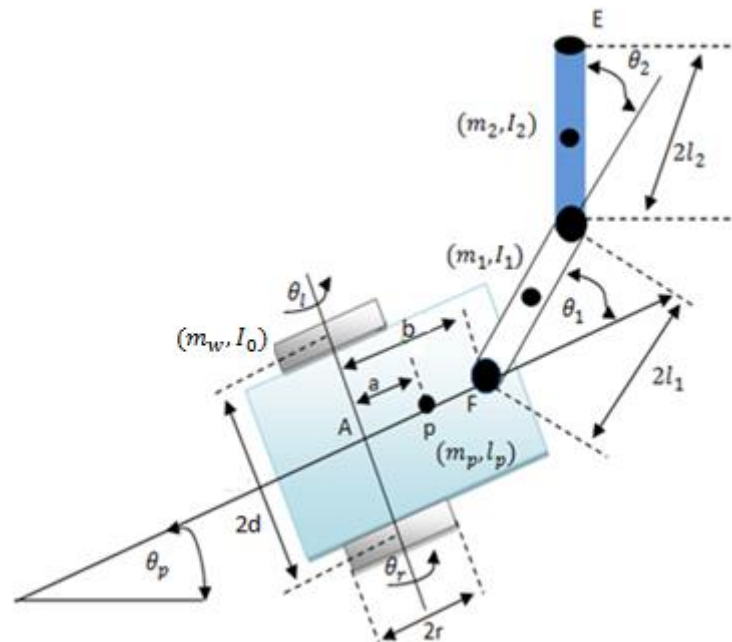
La linéarisation par rétroaction (LPR) est l'une des techniques de contrôle non linéaire qui permet d'avoir un système linéaire exactement équivalent à celui initial, en utilisant la transformation de coordonnées et la rétroaction (retour) d'état [47].

La LPR entrée-sortie présente plusieurs avantages par rapport aux techniques de commandes classiques tels que les régulateurs PID qui ne prennent pas en compte les termes non linéaires du système commandé. Les termes non-linéaires du système considéré sont compensés par annulation dans la technique de LPR, ce qui permet de linéariser le système d'une manière exacte. Cependant, un modèle précis du système est nécessaire pour obtenir une bonne action de contrôle en utilisant la méthode de LPR [48]. Dans le cas où la LPR se réduit au cas particulier d'inversion dynamique, elle est appelée « technique de commande du couple calculé ».

#### III.3 Modélisation du manipulateur mobile à roues

On considère un BMM supporté par deux roues entraînées indépendamment avec un axe fixe commun à la plateforme et deux roues passives à auto-alignement (figure III.1 ci-

dessous). Ce dispositif est souvent utilisé dans les systèmes de manutention. La plateforme à roues est modélisée comme un système non holonome dans lequel le glissement est négligé en raison du mouvement au ralenti [49]. Par conséquent, la plateforme à roues est constituée à trois degrés de liberté qui sont réduits à deux degrés de liberté en raison de la condition de non-glissement.



**Figure III.1 :** Système mobile de manutention [50].

### III.3.1 Modèle cinématique

On considère le système mobile de manutention représenté à la figure III.1. Puisque la plateforme est entraînée par deux roues indépendantes alors la contrainte de vitesse est non-holonome [48, 49], donc l'équation cinématique peut s'écrire comme suit :

$$\dot{x}_F \sin(\theta_p) - \dot{y}_F \cos(\theta_p) = 0 \quad (\text{III.1})$$

ou  $\theta_p$  est l'angle du cap de la plateforme,  $x_F$  et  $y_F$  sont les coordonnées du point F.

On choisit  $q = [x_p \ y_p \ \theta_p \ \theta_1 \ \theta_2]^T$  vecteur des coordonnées généralisées, l'équation ci-dessus peut s'exprimer comme suit :

$$A(q)\dot{q} = 0 \quad (\text{III.2})$$

En se basant sur la section II.3.6 qui présente la PM dans chapitre précédent, on formule l'équation cinématique de la vitesse linéaire au point F, en fonction des vitesses des roues comme suit :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_F \\ \dot{y}_F \end{pmatrix} = \left(\frac{r}{2d}\right) \begin{pmatrix} d\cos(\theta_p) + (a+b)\sin(\theta_p) & d\cos(\theta_p) - (a+b)\sin(\theta_p) \\ d\cos(\theta_p) - (a+b)\sin(\theta_p) & d\cos(\theta_p) + (a+b)\sin(\theta_p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_r \\ \dot{\theta}_l \end{pmatrix} \quad (\text{III.3})$$

La vitesse linéaire de l'effecteur (outil terminal, point E de la figure III.1) est formulée, en se basant sur le fait que sa vitesse de conception est connue et donnée par l'équation (III.3). La vitesse de l'effecteur terminale s'écrit comme suit :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_E \\ \dot{y}_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}_F \\ \dot{y}_F \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(\theta_p) & -\sin(\theta_p) \\ \sin(\theta_p) & \cos(\theta_p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_p + \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} \quad (\text{III.4})$$

ou  $J_{ij}$  ( $i, j=1, 2$ ) sont des éléments de la matrice Jacobienne du BM de la figure III.1, donnés par :  $J_{11} = -l_1 \sin(\theta_1) - l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$ ,  $J_{12} = -l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$ ,

$$J_{21} = -l_1 \cos(\theta_1) - l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \text{ et } J_{22} = l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

En combinant l'équation (III.3) et l'équation (III.4), le modèle cinématique du BMM est formulé comme suit :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_E \\ \dot{y}_E \\ \dot{x}_F \\ \dot{y}_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_p) & -\sin(\theta_p) & 0 & 0 \\ \sin(\theta_p) & \cos(\theta_p) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\theta_p) & -\sin(\theta_p) \\ 0 & 0 & \sin(\theta_p) & \cos(\theta_p) \end{bmatrix} X$$

$$\begin{bmatrix} \frac{r}{2} - \left(\frac{r}{2d}\right)J_{11} & \frac{r}{2} + \left(\frac{r}{2d}\right)J_{11} & J_{11} & J_{11} \\ -\left(\frac{r}{2d}\right)(a+b+J_{21}) & \left(\frac{r}{2d}\right)(a+b+J_{21}) & J_{21} & J_{22} \\ \frac{r}{2} & \frac{r}{2} & 0 & 0 \\ -\left(\frac{a+b}{2d}\right)r & \left(\frac{a+b}{2d}\right)r & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_r \\ \dot{\theta}_l \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad (\text{III.5})$$

qui peut s'écrire sous la forme compacte suivante :

$$\dot{x} = J\sigma \quad (\text{III.6})$$

avec,  $\dot{\sigma} = [\dot{\theta}_r \quad \dot{\theta}_l \quad \dot{\theta}_1 \quad \dot{\theta}_2]^T$ . En dérivant l'équation (III.6), on obtient l'expression suivante :

$$\ddot{x} = \dot{J}\sigma + J\dot{\sigma} \quad (\text{III.7})$$

L'équation (III.7) est utilisée dans la prochaine section, dans l'équation (III.11), pour faire le lien entre l'accélération, la position et le couple moteur du robot.

### III.3.2 Modélisation dynamique

Le modèle dynamique (MD) du BMM est basé sur la détermination de la relation entre le vecteur des couples et celui des vitesses du BMM. En utilisant les calculs de la section II.4, sachant que la PM est commandée de sorte à positionner le BM du BMM dans une configuration préférée qui maximise l'indice de la manipulabilité. L'indice de la manipulabilité est définie comme suit [50]:

$$mm = \sqrt{\det(J(\theta)J(\theta)^T)} \quad (\text{III.8})$$

ou, J: matrice Jacobienne du bras manipulateur.

Le MD du BMM soumis à des contraintes non-holonomes peut être formulé, en utilisant les équations de Lagrangien et il est exprimé par l'équation matricielle suivante (III.9) [50]:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) + A^T(q)\lambda = B(q)\tau \quad (\text{III.9})$$

Sachant que l'énergie potentielle de la PM est nulle et que le BM est non redondants, l'indice de la manipulabilité «  $mm$  » du bras manipulateur donnée par l'expression (III.10) est à sa valeur maximale [51]:

$$mm = l_1 l_2 |\sin(\theta_2)| \quad (\text{III.10})$$

Le MD (III.9) peut être réécrit comme suit :

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} = B(q)\tau - A^T(q)\lambda \quad (\text{III.11})$$

Les contraintes non-holonomes s'écrivent sous la forme de :

$$A(q)\dot{q} = 0 \quad (\text{III.12})$$

avec  $q \in \mathbb{R}^n$ , est les coordonnées généralisées.  $M(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est la matrice d'inertie du système.  $C(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  est le vecteur des forces centrifuges et Coriolis.  $A(q) \in \mathbb{R}^{m \times n}$  est la matrice des contraintes.

### III.3.2.1 Détermination des matrices $M(q)$ , $C(q, \dot{q})$ , $A(q)$ et $B(q)$

Le modèle dynamique (III.11) est obtenu en utilisant les équations de Lagrange(III.13) ci-dessous, on tenant compte de la contrainte cinématique de la PM :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = B(q)\tau - A^T(q)\lambda \quad (\text{III.13})$$

Avec  $L(q, \dot{q})$  : le Lagrangien

$$L(q, \dot{q}) = E_c - E_p \quad (\text{III.14})$$

$E_c$  : L'énergie cinétique de la PM ;

$E_p$  : L'énergie potentielle de la PM ;

$\lambda_i$  : Le vecteur des multiplicateurs de Lagrange ;

$q_i$  : vecteur des coordonnées généralisées.

L'énergie cinétique totale  $E_c$  est donnée par :

$$E_c = E_{cp} + E_{cl} + E_{cr} \quad (\text{III.15})$$

Ou  $E_{cp}$  est l'énergie cinétique de la PM ;

$$E_{cc} = \frac{1}{2} m_p v_p^2 + \frac{1}{2} I_p \dot{\theta}_p^2 \quad (\text{III.16})$$

$E_{cl}$  est l'énergie cinétique de la roue gauche ;

$$E_{cl} = \frac{1}{2} m_w v_l^2 + \frac{1}{2} I_0 \dot{\theta}_l^2 \quad (\text{III.17})$$

$E_{cr}$  est l'énergie cinétique de la roue droite ;

$$E_{cr} = \frac{1}{2} m_w v_r^2 + \frac{1}{2} I_0 \dot{\theta}_r^2 \quad (\text{III.18})$$

Avec

$m_p$ , masses de la PM, du chaque roue;

$m_w$ , masse de chaque roue plus la masse du moteur ;

$v_r$ , la vitesse linéaire de roue la gauche et de la droite respectivement ;

$I_p$ , moment d'inertie de la PM ;

$I_0$ , moment d'inertie de chaque roue;

Le point « p » dans le repère fixe a pour coordonnées :

$$\begin{cases} x_p = x_A + a \cos(\theta_p) \\ y_p = y_A + a \sin(\theta_p) \end{cases} \quad (\text{III.19})$$

L'énergie totale est donnée par :

$$E_c = \frac{1}{2}m(x_A^2 + y_A^2) - m_c b \dot{\theta}_p (\dot{y}_A \cos(\theta_p) - \dot{x}_A \sin(\theta_p)) + \frac{1}{2}I_0(\dot{\theta}_r^2 + \dot{\theta}_l^2) + I \quad (\text{III.20})$$

$$\text{avec :} \quad m = m_p + 2m_w \quad (\text{III.21})$$

$$I = I_p + m_p a^2 + 2m_p d^2 \quad (\text{III.22})$$

En tenant compte que l'énergie potentielle de la PM est nulle, de l'équation (III.14) et (III.20), on obtient

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}m(x_A^2 + y_A^2) - m_p a \dot{\theta}_p (\dot{y}_A \cos(\theta_p) - \dot{x}_A \sin(\theta_p)) + \frac{1}{2}I_0(\dot{\theta}_r^2 + \dot{\theta}_l^2) + I \quad (\text{III.23})$$

En utilisant l'équation (III.22) dans l'équation (III.13), on obtient :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_A - m_p a \ddot{\theta}_p \sin(\theta_p) - m_p a \dot{\theta}_p^2 \cos(\theta_p) = A_1 \\ m\ddot{y}_A - m_p a \ddot{\theta}_p \cos(\theta_p) - m_p a \dot{\theta}_p^2 \sin(\theta_p) = A_2 \\ -m_p a \ddot{x}_A \sin(\theta_p) + m_p a \ddot{y}_A \cos(\theta_p) + I \ddot{\theta}_p = A_3 \\ I_0 \ddot{\theta}_r = \tau_l + A_4 \\ I_0 \ddot{\theta}_l = \tau_r + A_5 \end{cases} \quad (\text{III.24})$$

La forme matricielle de (III.24), on déduit :

$$M(q) = \begin{bmatrix} m & 0 & -m_p a \sin(\theta_p) & 0 & 0 \\ 0 & m & m_p a \cos(\theta_p) & 0 & 0 \\ -m_p a \sin(\theta_p) & m_p a \cos(\theta_p) & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.25})$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 & m_p a \cos(\theta_p) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -m_p a \sin(\theta_p) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.26})$$

$$B(q) = \begin{bmatrix} \frac{\cos(\theta_p)}{r} & \frac{-\cos(\theta_p)}{r} & 0 & 0 \\ \frac{-\sin(\theta_p)}{r} & \frac{-\sin(\theta_p)}{r} & 0 & 0 \\ d/r & -d/r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{III.27})$$

Ou  $A_1, A_2, A_3, A_4$  et  $A_5$  sont les relatifs aux contraintes cinématiques qui peuvent être exprimés en fonction de la matrice de contrainte cinématique  $A(q)$  comme suit :

$$A(q)^T = [A_1 \ A_2 \ A_3 \ A_4 \ A_5]^T \quad (\text{III.28})$$

Afin d'éliminer le vecteur des contraintes dans l'équation (III.11), l'ensemble des contraintes vérifie la relation (III.12), et obtenir un modèle sans contrainte en utilisant une matrice de transformation qui vérifie l'égalité suivante :

$$S(q)^T A(q)^T = 0 \quad (\text{III.29})$$

On peut calculer le vecteur de vitesses opérationnelles (d'entrées)  $\dot{\sigma} = [\dot{\theta}_r \ \dot{\theta}_l \ \dot{\theta}_1 \ \dot{\theta}_2]^T$ , pour tous les  $q$  donnés dans l'équation suivante :

$$\dot{q} = S(q)\dot{\sigma}(t) \quad (\text{III.30})$$

$$\text{avec, } S(q) = \begin{bmatrix} \frac{r(d \cos(\theta_p) - a \sin(\theta_p))}{2d} & \frac{r(d \cos(\theta_p) + a \sin(\theta_p))}{2d} & 0 & 0 \\ \frac{r(d \sin(\theta_p) + a \cos(\theta_p))}{2d} & \frac{r(d \sin(\theta_p) - a \cos(\theta_p))}{2d} & 0 & 0 \\ \frac{r}{2d} & \frac{-r}{2d} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En multipliant l'équation (III.11) par  $S^T$ , et compte tenu de l'équation (III.12), l'équation (III.28), l'équation (III.29), l'équation (III.30) et sa dérivée, le MD (III.11) peut être réduit comme suit :

$$D(q)\dot{\sigma} + F(q, \dot{q})\sigma + \bar{C}(q) = \bar{\tau} \quad (\text{III.31})$$

ou,  $D = S^T M S$ ,  $F = S^T M \dot{S}$ ,  $\bar{C} = S^T C$  et  $\bar{\tau} = S^T B \tau$ .

En utilisant (III.6) et (III.7), le MD réduit (III.31) peut être réécrit dans l'espace de tâche comme suit :

$$D_x(q)\ddot{x} + F_x(q, \dot{q})\dot{x} + \bar{C}_x(q) = \bar{\tau}_x \quad (\text{III.32})$$

ou,  $D_x = (J^T)^{-1}DJ^{-1}$ ,  $D_x = (J^T)^{-1}(F - DJ^{-1}j)J^{-1}$ ,  $\bar{C}_x = (J^T)^{-1}\bar{C}$ , et  $\bar{\tau}_x = (J^T)^{-1}\bar{\tau}$ .

### III.3.3 Suivi de trajectoire

Le suivi de trajectoire est basé sur une commande qui minimise l'erreur entre la position du robot et la position souhaitée. Les détails de cette commande sont donnés ci-dessous.

On considère la trajectoire désirée (accélération, vitesse et position respectivement)  $\ddot{x}_d$ ,  $\dot{x}_d$  et  $x_d$ . Et considérons le vecteur de commande  $\tau$ , initialement proposé dans le domaine des manipulateurs robotiques [52], exprimé comme suit :

$$\tau_x = (J^T)^{-1}\bar{\tau} = D_x(q)(\ddot{x}_d - k_p e - k_d \dot{e}) + F(q, \dot{q})\dot{x} + \bar{C}(q) \quad (\text{III.33})$$

En substituant le MD (III.32) dans la loi de commande (III.33), on obtient la boucle fermée du système comme suit :

avec  $e = x_d - x$ ,  $\dot{e} = \dot{x}_d - \dot{x}$  sont respectivement les vecteurs des erreurs de poursuite des positions et des vitesses,  $k_p$  et  $k_d$  sont respectivement les matrices des gains proportionnel et dérivé, qui sont des matrices définies positives diagonales. Le modèle dynamique du BMM en boucle fermée est obtenu en remplaçant le vecteur de commande donné par l'équation (III.33) dans le modèle dynamique du BMM donnée par l'équation (III.32) et on obtient l'équation suivante :

$$D_x(q)(\ddot{x}_d - k_p e - k_d \dot{e}) + F(q, \dot{q})\dot{x} + \bar{C}(q) = D_x(q)\ddot{x} + F(q, \dot{q})\dot{x} + \bar{C}(q) \quad (\text{III.34})$$

Après un calcul simple, on obtient :

$$D_x(q)(\ddot{e} + k_d \dot{e} + k_p e) = 0 \quad (\text{III.35})$$

Où  $D = S^T M S$  est une matrice inversible. En multipliant l'équation (III.35) par l'inverse de la matrice  $D$ , on obtient l'équation dynamique du vecteur des erreurs suivante :

$$\ddot{e} + k_d \dot{e} + k_p e = 0 \quad (\text{III.36})$$

L'étude de la stabilité du point d'équilibre «  $e = 0$  » est basée sur théorie de Lyapunov ou suivant la dynamique de l'erreur donnée par (III.36), on choisit la fonction quadratique suivante :

$$V(q) = \frac{1}{2} \dot{e}^T \dot{e} + \frac{1}{2} e^T (k_p + \lambda k_d) e + \lambda \dot{e}^T e, \text{ ou } \lambda \in \mathbb{R} \quad (\text{III.37})$$

On calcul la dérivé de  $V(q)$  le long de la trajectoire (III.36) du vecteur des erreurs et on obtient l'expression suivante :

$$\dot{V} = \dot{e}^T \ddot{e} + \dot{e}^T (k_p + \lambda k_d) e + \lambda \dot{e}^T \dot{e} \quad (\text{III.38})$$

De l'équation (III.36) on obtient:

$$\ddot{e} = -k_p e - k_d \dot{e} \quad (\text{III.39})$$

On remplace le vecteur des erreurs d'accélération donné par (III.39) dans (III.38) et après calcul on obtient l'expression (III.40) :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{e}^T (-k_p e - k_d \dot{e}) + \dot{e}^T (k_p + \lambda k_d) e + \lambda \dot{e}^T (-k_p e - k_d \dot{e}) \\ \dot{V} &= -\dot{e}^T k_p e - \dot{e}^T k_d \dot{e} + \dot{e}^T k_p e + \dot{e}^T \lambda k_d e - \lambda \dot{e}^T k_p e - \lambda \dot{e}^T k_d \dot{e} \\ &= -\dot{e}^T k_d \dot{e} + \dot{e}^T \lambda k_d e - \lambda \dot{e}^T k_p e - \lambda \dot{e}^T k_d \dot{e} \\ \dot{V} &= -\dot{e}^T k_d (1 + \lambda) \dot{e} - \lambda \dot{e}^T (k_p - k_d) e \end{aligned} \quad (\text{III.40})$$

D'après l'équation (III.40),  $\dot{V}(q)$  est négative pour «  $k_p - k_d > 0$  » et la stabilité asymptotique en boucle fermée est garantis pour lamda  $\lambda$  suffisamment petit.

Le système en boucle fermée contrôler par la technique de LPR est présenté dans la figure III.2.

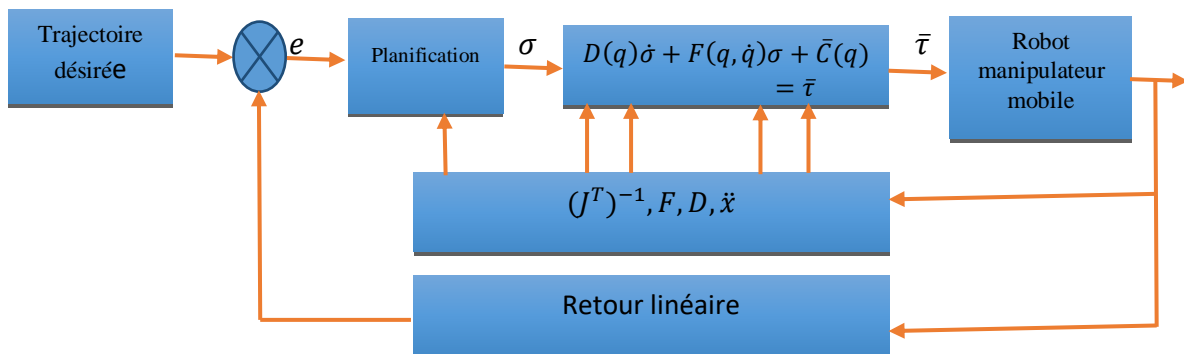


Figure III.2 : Système en boucle fermé commandé par la technique LPR.

### III.4 Validation du système en boucle fermée par des tests de simulation

Les tests de performances de l'étude proposée sont effectués en choisissant les trajectoires de référence suivantes :

Les trajectoires de référence choisies pour le premier test et le deuxième sont données respectivement par les équations (III.39) et (III.40) :

$$X_{ref}^1(t) = 1 - e^{(-4t)} \quad (III.39)$$

$$X_{ref}^2(t) = 3 \sin(t)^2 + 2 \cos(t)^2 \quad (III.40)$$

Les paramètres du BMM étudié sont par le tableau III.1 ci-dessous [53] :

**Tableau III.1** : Paramètres du BMM étudié [53].

Paramètres	Valeur	Unité
Masse de la base mobile ( $m_p$ )	12	Kg
Masse de chaque roue ( $m_w$ )	0.5	Kg
Masse du premier segment ( $m_1$ )	2	kg
Masse du deuxième segment ( $m_2$ )	2	Kg
Longueur du premier segment ( $l_1$ )	1	m
Longueur du deuxième segment ( $l_2$ )	1	m
Rayon de la roue ( $r$ )	0.1	m
Moment d'inertie de la base mobile ( $I_p$ )	1.2	Kgm <sup>2</sup>
Moment d'inertie de la roue ( $I_0$ )	1.2	Kgm <sup>2</sup>
Moment d'inertie du premier segment ( $I_1$ )	0.12	Kgm <sup>2</sup>
Moment d'inertie du deuxième segment ( $I_2$ )	0.12	Kgm <sup>2</sup>
Accélération de la gravitation ( $g$ )	9.8	m/s <sup>2</sup>

Les paramètres du contrôleur PID sont :  $k_p = 12I_{4 \times 4}$  et  $k_d = 8I_{4 \times 4}$ .

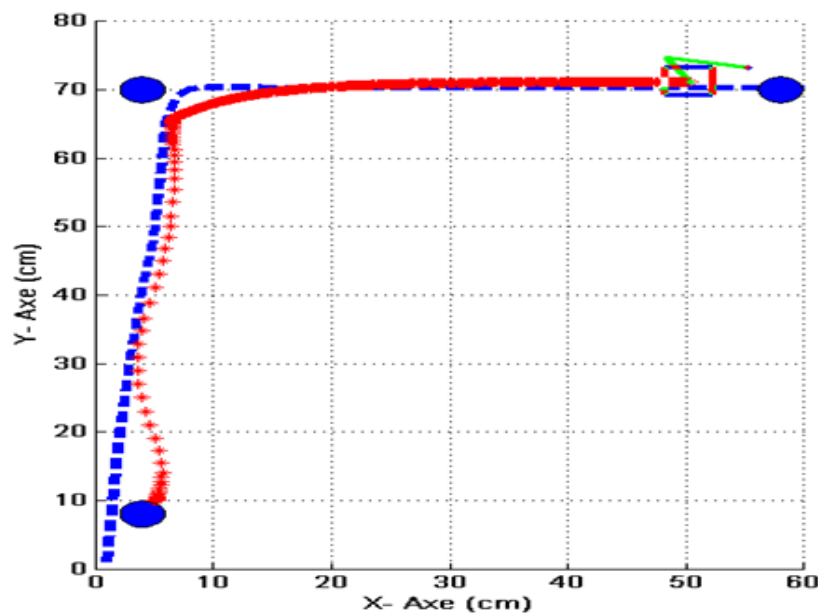
Les principaux résultats des tests de simulation sont donnés par les figures (III.3)-(III.11) ou les conditions de fonctionnements suivantes sont considérées :

Le BMM se déplace d'un point de départ à un point d'arrivée (Figure III.3 pour le premier test et figures III.7 et III.8 pour le deuxième test), tout en suivant une trajectoire

désirée de l'effecteur (outil terminal) dans l'espace de travail désiré, délimité par les petits cercles bruns. Néanmoins, on peut constater une certaine erreur dans le suivi des trajectoires, due aux contraintes non holonomes, qui nécessitent le calcul de l'angle de direction à tout moment, dont l'indice de manipulabilité donnée par l'équation (III.10) est légèrement inférieur à la valeur souhaitée (maximale) égale à 1 ; dans notre étude, il est stable autour de 0.748 (Figure III.4 pour le premier test et III.10 pour le deuxième test). La vitesse linéaire du robot est donnée en figure (III.5 pour le premier test et III.9 pour le deuxième test). Le BMM commence par une phase d'accélération puis une vitesse constante, enfin dans la phase d'approche par une décélération jusqu'à l'arrivée, ce contrôle de la vitesse est directement lié au calcul du couple moteur du robot que nous avons développé. En revient aux figures (III. 3 et III.8) qui illustrent la plateforme mobile ou elle amène l'effecteur du manipulateur à la position souhaitée.

Le contrôle de la plateforme mobile dépend de l'information mesurée sur la position de l'effecteur final. La valeur négative des vitesses (figure III.5 pour le premier test et figure III.9 pour le deuxième test) indique que la plateforme mobile s'est déplacée vers l'arrière pendant une courte période de temps au tout début afin d'atteindre l'angle de cap requis. Par conséquent, les résultats obtenus montrent les performances acceptables de la stratégie de contrôle développée.

A. **Premier test** : La trajectoire de référence est donnée par l'équation (III.39).



**Figure III.3** : Suivi de la trajectoire de référence par le BMM.

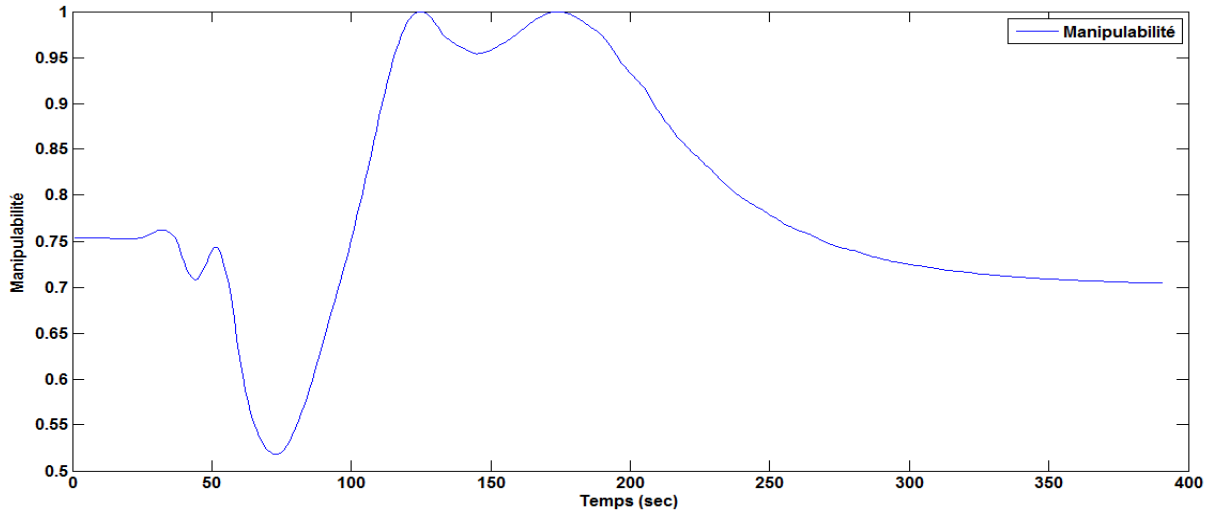


Figure III.4 : Evolution de la manipulabilité.

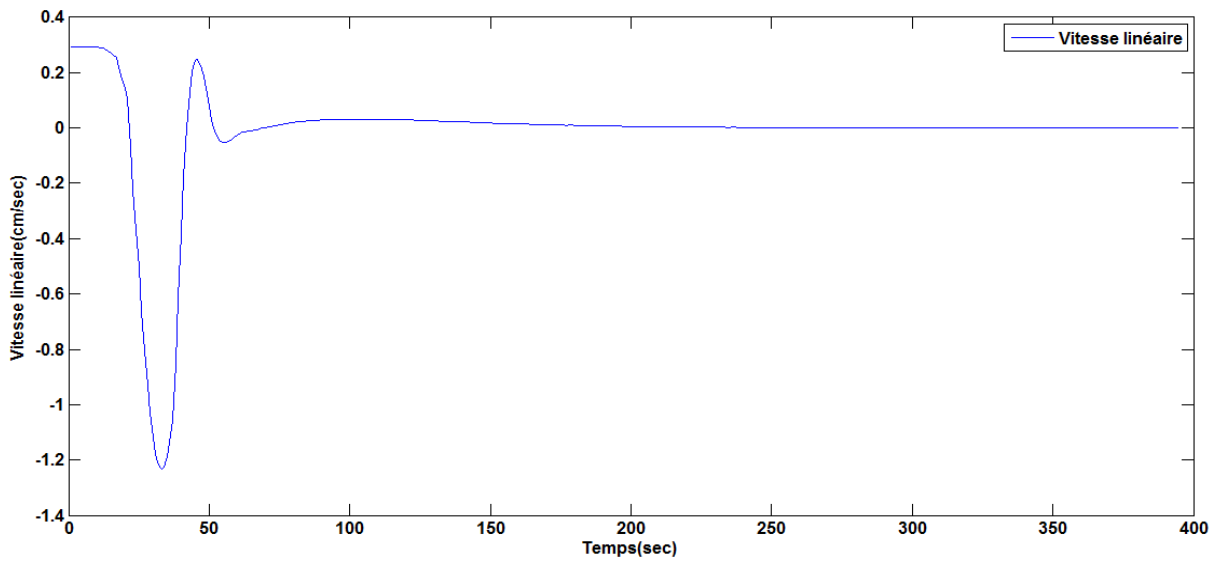


Figure III.5 : Allure de la vitesse linéaire.

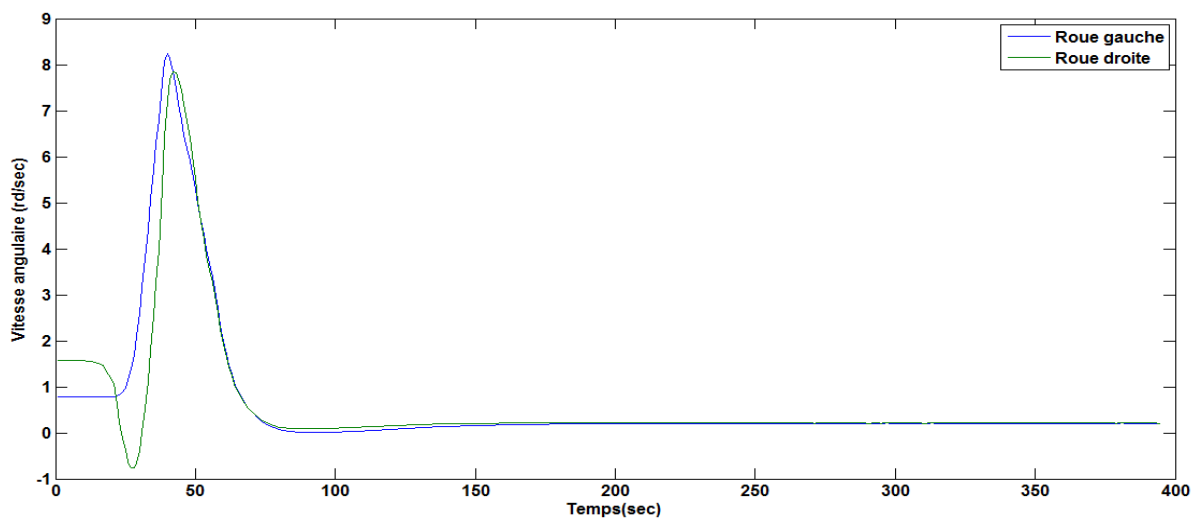
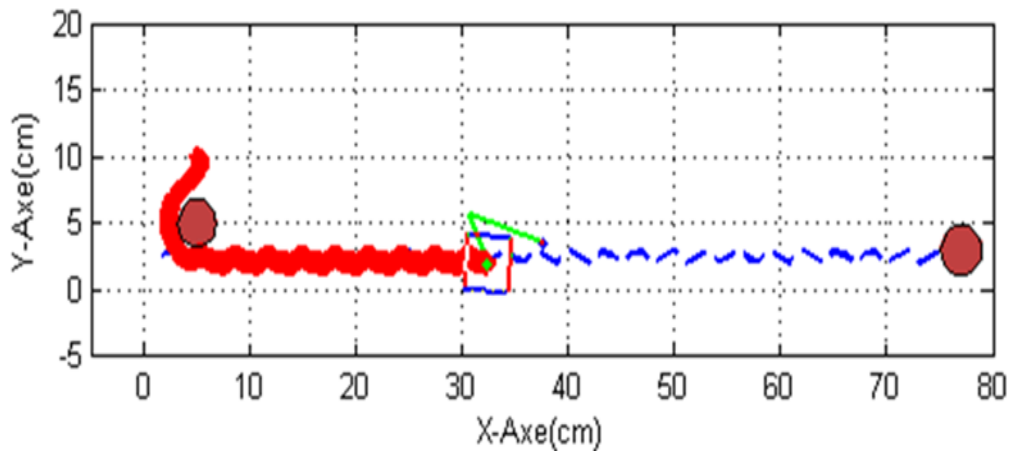
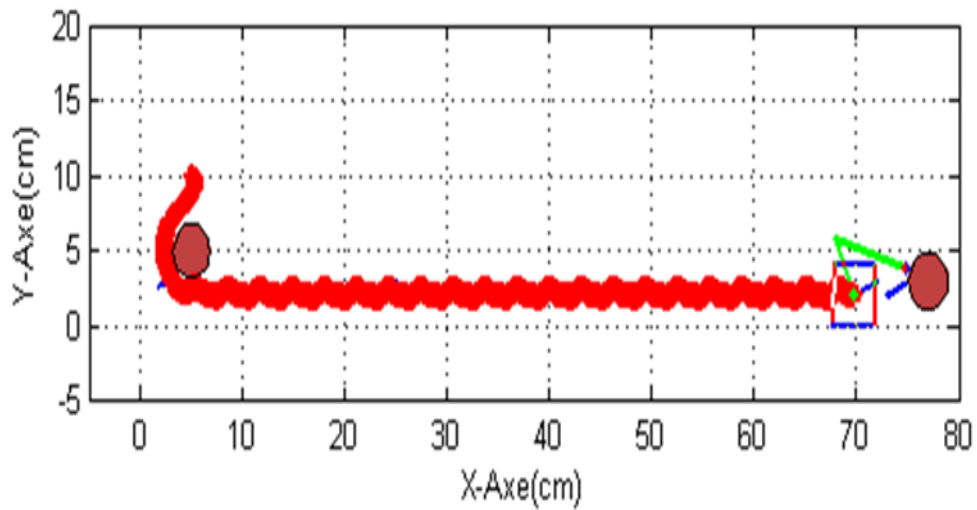


Figure III.6 : Allure de la vitesse angulaire des roues droite et gauche.

B. **Deuxième test** : La trajectoire de référence est donnée par l'équation (III.40).



**Figure III.7** : Suivi de la trajectoire par le robot.



**Figure III.8** : Position finale du robot.

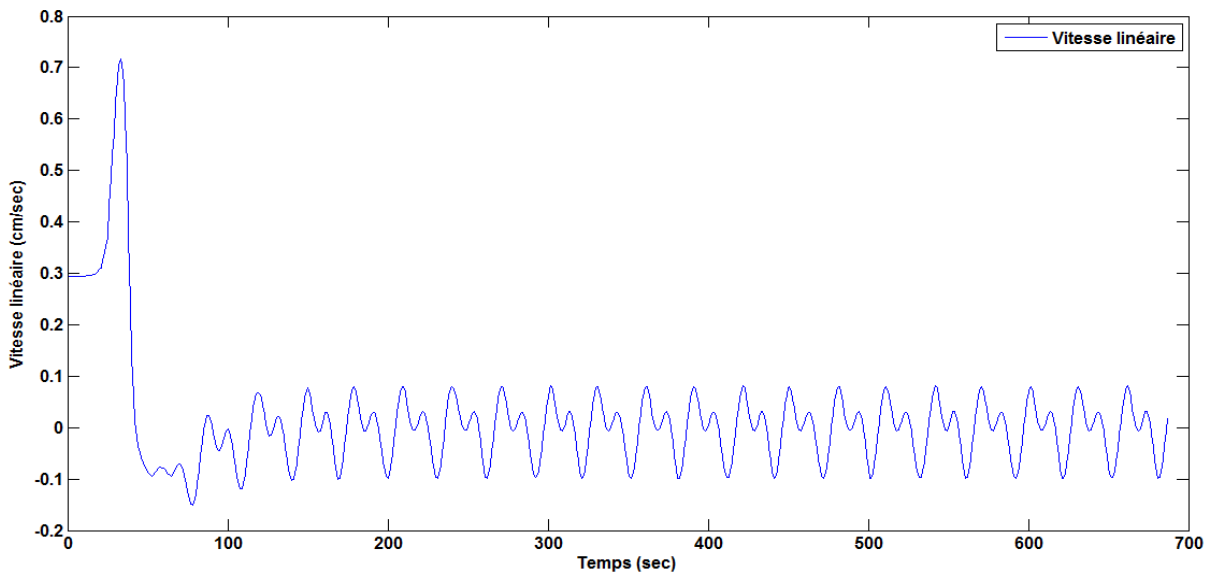


Figure III.9 : Allure de la vitesse linéaire.

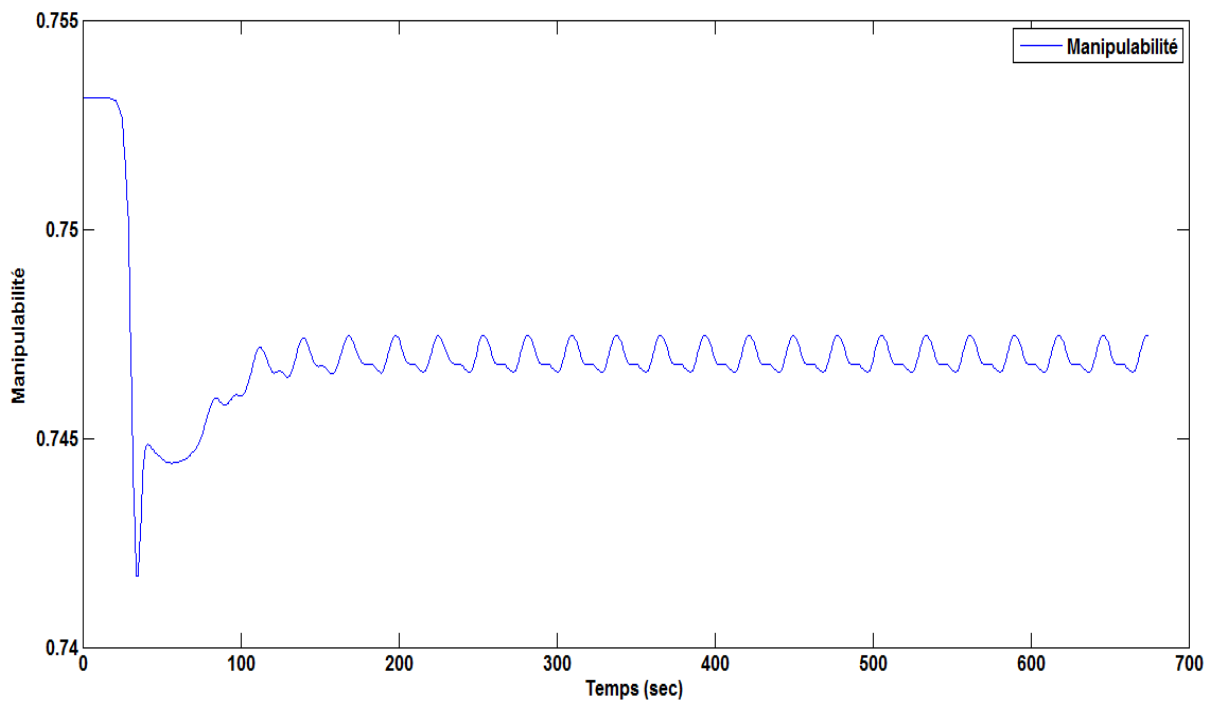
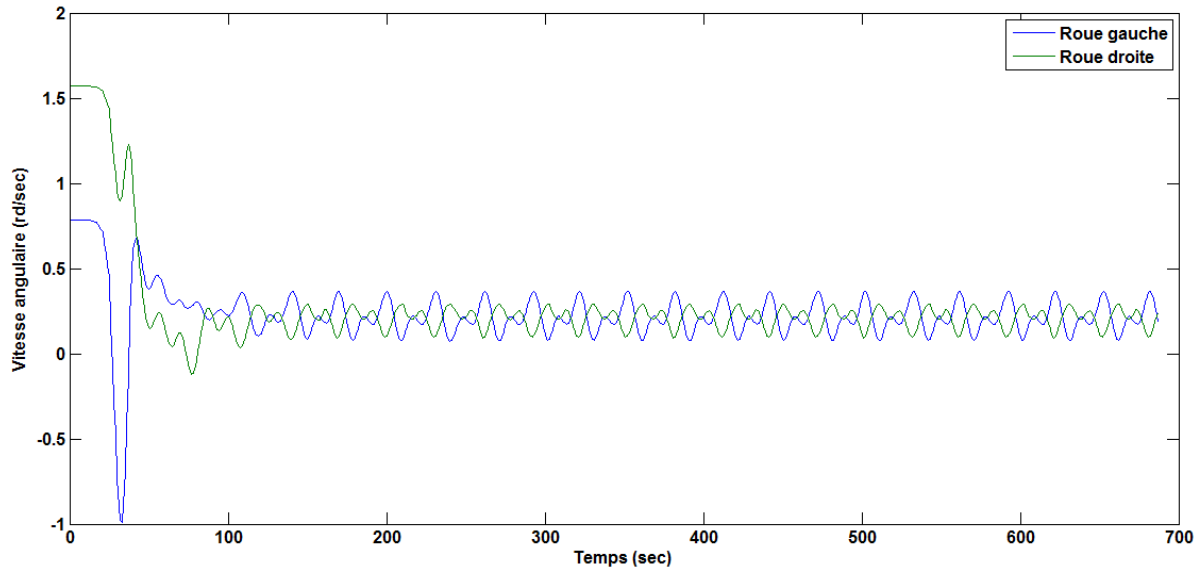


Figure III.10 : Evolution de la manipulabilité.



**Figure III.11** : Allure de la vitesse angulaire des roues droite et gauche.

### III.5 Conclusion

Ce chapitre est consacré au suivi de trajectoire et au contrôle du manipulateur mobile, en utilisant un système d'entraînement différentiel. La plateforme mobile du système était équipée d'un manipulateurs à deux degrés de liberté. Afin de résoudre le problème du suivi de la trajectoire du système soumis à des contraintes non-holonomes, nous avons considéré la commande basée sur un modèle dynamique du manipulateur mobile. Pour résoudre le problème dans l'espace des tâches, la stratégie bien connue de contrôle du couple calculé, couramment utilisée dans le domaine des robots manipulateurs, a été considérée. La stabilité de l'ensemble du système en boucle fermée a été prouvée. Les résultats de simulation montrent que le manipulateur mobile peut suivre la trajectoire de référence avec une grande proximité, ce qui démontre l'efficacité de la stratégie de commande proposée.

## Chapitre IV

### Commande adaptative basée sur la passivité d'un robot manipulateur mobile

#### IV.1 Introduction

Ce chapitre présente la commande basée sur la passivité d'un bras manipulateur mobile. La passivité est reconnue depuis longtemps comme une propriété importante d'un nombre important de systèmes physiques [53], notamment les réseaux électriques [54], les structures mécaniques, les systèmes thermiques, etc. En bref, un système est passif par rapport à une paire entrée/sortie donnée si l'énergie ne circule qu'à travers cette paire entrée/sortie dans le système pendant tout le temps. En d'autres termes, un système passif conserve l'énergie ou la dissipe et il ne la produit pas. L'énergie est définie ici comme l'intégrale du produit interne entre l'entrée considérée et la sortie considérée, qui peut correspondre ou non à une énergie physique proprement dite. Le concept de passivité a traditionnellement été utilisé pour caractériser la stabilité d'un système donné. De plus, du point de vue de la théorie du contrôle, un système passif offre la possibilité de paramétrer une large classe de contrôleurs stabilisants (au sens entrée/sortie). Certains systèmes peuvent être strictement passifs [54]. Grâce à une condition d'observabilité, la stabilité entrée/sortie peut être reliée à la stabilité interne d'un système complexe en se basant uniquement sur la connaissance de ses résultats externes. La théorie de la passivité est exploitée depuis son apparition pour l'étude de la stabilité des systèmes mécaniques [55]. L'application du concept de la passivité aux robots rigides a été introduit par les travaux cités dans [56]. De nombreux travaux de commande ont associé la théorie de la passivité à d'autres techniques ou on peut citer la commande adaptative pour le suivi de trajectoire [58, 59], la commande robuste [57, 59], la commande de robot à articulations flexibles [60].

En raison de la complexité et de la dynamique fortement couplée de la plateforme mobile et du bras manipulateur, le contrôle du suivi de trajectoire reste un problème difficile. Ces dernières années, de nombreuses stratégies de contrôle puissantes ont été développées pour les BMM dans le but d'obtenir de bonnes performances de suivi de trajectoire. Deux catégories de schémas de commande sont généralement utilisées pour ces systèmes : Premièrement, le BMM est considéré comme deux sous-systèmes interconnectés : la plateforme mobile et le bras du manipulateur. Dans ce cas, des stratégies de contrôle décentralisées sont utilisées. Les contrôleurs de ces sous-systèmes sont construits séparément, et les interactions entre la plateforme et le manipulateur peuvent être soit prises en compte,

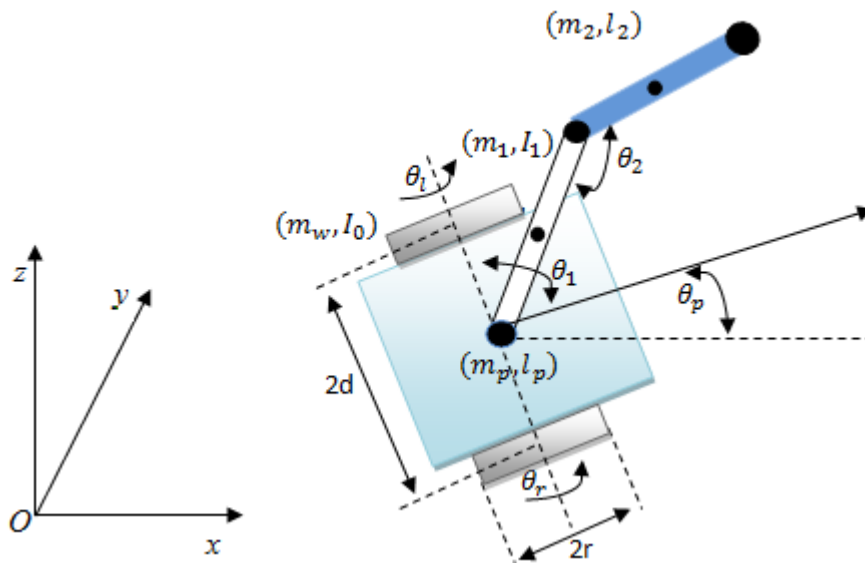
soit négligées, comme travaux dans ce sens on cite : le travail présenté dans [61]. Tchon et al. dans [62] présentent un contrôleur visuel tridimensionnel basé sur la passivité pour un manipulateur mobile avec une configuration œil-main. Ce travail considère la redondance du BMM pour se conformer aux objectifs d'évitement d'obstacles ou la conception du système en boucle fermée (BF) est subdivisé en deux sous-systèmes en cascade : la cinématique et le contrôleur conçu en considérant le modèle dynamique.

Deuxièmement, le BMM est considéré comme un système unique dans lequel des contrôleurs communs sont développés pour l'ensemble du système (plateforme mobile et bras manipulateur), dont la loi de commande qu'on a développé dans ce chapitre considère ce cas de figure. Les travaux présentés par Su et al dans [63] et Prada-Jimenez, et al dans [64] proposent différentes manières de commander un BMM ou ils ont considérés un modèle du système comporte un générateur de trajectoire qui inclut le modèle cinématique commun, le modèle dynamique commun et un contrôleur proportionnel-dérivé. Le réglage du modèle est obtenu en résolvant un problème d'optimisation à l'aide de l'algorithme d'évolution différentielle. Cette approche d'optimisation permet de minimiser simultanément la consommation d'énergie et l'erreur sur la trajectoire suivie par l'effecteur.

Dans ce chapitre, on a résumé l'approche de commande basée sur la passivité telle qu'elle est appliquée à la commande des robots manipulateurs rigides et on s'est inspirée pour l'appliquer au BMM à deux degrés de liberté. La loi de commande adaptative qu'on a développé pour le BMM est comparée à un contrôleur classique très utilisé en industrie qui est le PID.

## IV.2 Modélisation dynamique du manipulateur mobile

Notre étude est portée sur un BMM considéré en chapitre 2, composé d'un bras manipulateur (BM) à deux articulations rotoïdes. Le BM est monté sur une plateforme mobile (PM) avec deux roues (Figure IV.1). Les centres de masse des deux roues ainsi que des deux segments du BM sont positionnés dans un repère d'axes  $x$  et  $y$  [65].



**Figure IV.1 :** Représentation du bras manipulateur mobile à deux roues.

On considère les mêmes conditions de fonctionnement du BMM que celles du chapitre précédent, ou le modèle dynamique du BMM est soumis à des contraintes non-holonomes et il est obtenue par le formalisme de Lagrangienne.

Les coordonnées du centre de masse des deux roues sont  $(x_r, y_r)$  du côté droite et  $(x_l, y_l)$  du côté gauche dont leurs expressions sont :

$$\begin{aligned}
 x_r &= x + d \sin(\theta_p) \\
 y_r &= y - d \cos(\theta_p) \\
 x_l &= x - d \sin(\theta_p) \\
 y_l &= y + d \cos(\theta_p)
 \end{aligned}
 \tag{IV.1}$$

avec «  $\theta_p$  » est l'angle de cap de la plateforme mobile et «  $d$  » est la distance entre l'une des deux roues et est le point milieu de l'axe des roues.

Les coordonnées du centre de gravité du premier segment sont exprimées comme suit :

$$\begin{aligned}
 x_1 &= x \\
 y_1 &= y \\
 z_1 &= l_1
 \end{aligned}
 \tag{IV.2}$$

avec  $l_1$  est la longueur du premier segment du bras manipulateur.

et celles du deuxième segment sont :

$$\begin{aligned}x_2 &= x_1 + l_2 \cos\theta_2 \cos(\theta_p + \theta_1) \\y_2 &= y_1 + l_2 \cos\theta_2 \sin(\theta_p + \theta_1) \\z_2 &= l_1 + l_2 \sin(\theta_2)\end{aligned}\tag{IV.3}$$

avec  $l_2$  est la longueur du deuxième segment du bras manipulateur.

$\theta_1$  et  $\theta_2$  sont respectivement l'angle de rotation de la première et de la deuxième l'articulation du bras manipulateur.

L'énergie cinétique totale est la somme de celles  $E_{cp}$  de la PM et  $E_{c1}$ ,  $E_{c2}$  de chaque segment du BM :

$$E_c = E_{cp} + E_{c1} + E_{c2}\tag{IV.4}$$

$$E_c = \frac{1}{2}m_p(\dot{x}_p^2 + \dot{y}_p^2) + \frac{1}{2}I_p\dot{\theta}_p^2 + \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + \frac{1}{2}I_2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2)\tag{IV.5}$$

avec :  $m_p$ ,  $m_1$ ,  $m_2$ , masses de la PM, du premier segment et du deuxième segment respectivement ;  $I_p$ ,  $I_1$ ,  $I_2$  moments d'inertie de la PM, du premier segment et du deuxième segment respectivement.

L'énergie potentielle totale  $E_p$  du BMM est égale à celle du BM puisque celle de la PM est nulle donc  $E_p$  est exprimée comme suit :

$$E_p = \frac{l_1}{2}m_1 \sin(\theta_1) + m_2 g(l_1 + \frac{l_2}{2} \sin(\theta_2))\tag{IV.6}$$

Le modèle dynamique (MD) du BMM est obtenu en utilisant les équations de Lagrange dont l'expression matricielle est :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau_i, i = 1, 2, \dots, n\tag{IV.7}$$

On tenant compte de la contrainte cinématique de la PM, l'équation (IV.7) devient :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau_i - A(q_i)^T \lambda, i = 1, 2, \dots, n\tag{IV.8}$$

ou l'expression de la fonction lagrangienne est

$$L = E_c - E_p\tag{IV.9}$$

$$\begin{aligned}
L = & \frac{1}{2}m(\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2) + \frac{1}{2}I_p\dot{\theta}_p + \frac{1}{2}I_0(\dot{\theta}_r + \dot{\theta}_l) + \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2(I_2 + \frac{1}{2}m_2l_1l_2 \cos(\theta_2)) + \frac{1}{2}m_2l_2^2 \\
& + \dot{\theta}_1^2(\frac{1}{2}I_1 + \frac{1}{2}I_2 + \frac{1}{4}m_1l_1^2 + \frac{1}{2}m_2l_1^2 + \frac{1}{4}m_2l_2^2 + \frac{1}{2}m_2l_1l_2 \cos(\theta_2)) + \dot{\theta}_2^2(\frac{1}{2}I_2 + \frac{1}{4}m_2l_2^2) \\
& - m_1g\frac{1}{2}l_1 \sin(\theta_1) + m_2g(l_1 \sin(\theta_1) + \frac{1}{2}l_2g \sin(\theta_1 + \theta_2))
\end{aligned} \tag{IV.10}$$

Le vecteur  $\tau$  des couples actionnant le BMM est

$$\tau = (\tau_l, \tau_r, \tau_1, \tau_2)^T \tag{IV.11}$$

Le vecteur  $\lambda$  des multiplicateurs de Lagrange est

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)^T \tag{IV.12}$$

L'équation de Lagrange (IV.9) donne, après développement mathématique, l'équation du mouvement sous forme matricielle suivante :

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = Q \tag{IV.13}$$

$$\text{avec } Q = B(\tau + \tau_p) - A(q)^T \lambda \tag{IV.14}$$

le vecteur  $\tau_p \in R^{4 \times 1}$  désigne des perturbations externes, et le vecteur  $q$  des coordonnées généralisées est

$$q = [x, y, \theta_p, \theta_1, \theta_2] \tag{IV.15}$$

$$M(q) = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} & M_{15} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} & M_{25} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} & M_{35} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} & M_{45} \\ M_{51} & M_{52} & M_{53} & M_{54} & M_{55} \end{bmatrix} \tag{IV.16}$$

$$\text{Avec : } M_{11} = M_{22} = m_p + m_1 + m_2 + \frac{2I_0}{r^2} \sin^2(\theta_p); M_{12} = M_{21} = -\frac{2I_0}{r^2} \sin(\theta_p) \cos(\theta_p);$$

$$M_{13} = M_{14} = M_{15} = 0; M_{23} = M_{24} = M_{25} = 0; M_{33} = I_0(1 + 2\frac{d^2}{r^2}) + I_1 + I_2;$$

$$M_{34} = M_{43} = I_1 + I_2; M_{55} = \frac{1}{4}m_1l_1^2 + I_2; M_{31} = M_{32} = 0;$$

$$M_{44} = \frac{1}{4}m_1l_1^2 + m_2(l_1^2 + \frac{1}{4}l_2^2 + 2l_1l_2 \cos(\theta_1)) + I_1 + I_2; M_{41} = M_{42} = M_{43} = 0;$$

$$M_{51} = M_{52} = M_{53} = 0; M_{45} = M_{54} = m_2(\frac{1}{4}l_2^2 + \frac{1}{2}l_1l_2 \cos(\theta_2)) + I_2;$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.17})$$

avec :  $C_{11} = -C_{22} = -\frac{2I_0}{r^2} \dot{\theta}_p \sin(\theta_p) \cos(\theta_p)$  ;  $C_{13} = C_{14} = C_{15} = 0$  ;

$C_{12} = C_{21} = -\frac{2I_0}{r^2} \dot{\theta}_p \cos^2(\theta_p)$  ;  $C_{23} = C_{24} = C_{25} = 0$  ;  $C_{ij} = 0, i = 3,4,5, j = 1, \dots, 5$  ;

$$G(q) = [G_p \quad G_b]^T \quad (\text{IV.18})$$

$G_b(q) = \left[ g\left(\frac{1}{2}m_1l_1 + m_2l_1\right)\cos(\theta_2) + \frac{1}{2}m_2l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \quad \frac{1}{2}gm_2l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \right]^T$  ;

$G_p(q) = [0 \quad 0 \quad 0]^T$  ;

$$B(q) = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} \cos(\theta_p) & \frac{1}{r} \cos(\theta_p) & 0 & 0 \\ \frac{1}{r} \cos(\theta_p) & \frac{1}{r} \cos(\theta_p) & 0 & 0 \\ \frac{d}{r} & -\frac{d}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.19})$$

Le mouvement du robot est soumis à des contraintes non holonomes données par :

$$A(q)\dot{q} = 0 \quad (\text{IV.20})$$

Avec 
$$A(q) = \begin{bmatrix} -\sin(\theta_p) & \cos(\theta_p) & b & 0 & 0 \\ \cos(\theta_p) & \sin(\theta_p) & d & -r & 0 \\ \cos(\theta_p) & \sin(\theta_p) & -d & 0 & -r \end{bmatrix} \quad (\text{IV.21})$$

Afin d'éliminer le vecteur des contraintes dans l'équation (IV.14), l'ensemble des contraintes vérifie la relation (VI.20), et obtenir un modèle sans contrainte en utilisant une matrice de transformation qui vérifie l'égalité suivante :

$$S(q)^T A(q)^T = 0 \quad (\text{IV.22})$$

La relation (IV.22) implique l'existence d'un vecteur  $\sigma = (\dot{\theta}_r, \dot{\theta}_l, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2)^T$ , tel que :

$$\dot{q} = S(q)\sigma \quad (\text{IV.23})$$

Avec la matrice  $S(q)$  donnée par :

$$S(q) = \begin{bmatrix} \frac{r}{2} \cos(\theta_p) & \frac{r}{2} \cos(\theta_p) & 0 & 0 \\ \frac{r}{2} \sin(\theta_p) & \frac{r}{2} \sin(\theta_p) & 0 & 0 \\ \frac{r}{2d} & \frac{-r}{2d} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.24})$$

### IV.3 Conception des lois de commande

Les objectifs de la commande adaptative basée sur la passivité (CABP) est d'assurer au BMM de suivre une trajectoire désirée avec des vitesses et des accélérations imposées. La CABP fait partis des commandes basées sur un modèle or la caractéristique d'adaptation et la robustesse des lois de commande basées sur la passivité assurent des bonnes performances mêmes en présence des imprécisions de modélisations et/ou des variations paramétriques du BMM. Une commande classique très utilisée en industrie qui est le régulateur PID est calculée dont le but de comparer les performances de la loi de commande développée (CABP) avec le PID.

#### IV.3.1 Régulateur PID

La loi de commande classique PID consiste en trois actions de base, à savoir, proportionnelle, intégrale et dérivée. Les gains des trois actions du PID sont déterminés par plusieurs méthodes celle la plus utilisée est le « placement de pôles », mais qui est appliquée exclusivement dans le cas de modèle linéaires. Dans notre étude, les gains sont déterminés par des essais de simulation, en suivant la méthode utilisée en industrie qui consiste à déterminer les gains de l'action proportionnelle sachant que ceux des actions intégrale et dérivées sont fixés à des valeurs faibles. Le BMM est un système multi-entrées donc on a des matrices des gains  $k_p$  pour l'action intégrale,  $k_i$  pour l'action intégrale et  $k_p$  pour l'action dérivé.

Le vecteur de commande PID pour le MD (IV.13) du BMM est :

$$Q = k_p e_q + k_i \int e_q dt + k_d \dot{e}_q \quad (\text{IV.25})$$

avec,  $e_q = q_d - q$  le vecteur des erreurs de poursuite et les matrices des gains sont :

$$k_p = \begin{bmatrix} k_{p1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{p2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{p3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{p4} \end{bmatrix}, k_i = \begin{bmatrix} k_{i1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{i2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{i3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{i4} \end{bmatrix}, k_d = \begin{bmatrix} k_{d1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{d2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{d3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{d4} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.26})$$

Sachant que les gains sont déterminés par des essais de simulation, en se basant sur la méthode utilisée en industrie.

### IV.3.2 Commande adaptative basée sur la passivité

Bien que les régulateurs PID se restreints aux commandes points à points des BMM qui nécessitent des gains importants et ce qui entraves le choix des actionneurs, or de nombreuses tâches avec des BMM exigent des capacités de suivi de trajectoire efficaces, comme le soudage au plasma, la découpe au laser ou les opérations à grande vitesse en présence d'obstacles. Dans ces cas, l'utilisation de modèles locaux nécessite une traversée lente à travers un certain nombre de points de consigne intermédiaires, ce qui retarde considérablement l'achèvement de la tâche. Par conséquent, afin d'améliorer les performances du suivi de trajectoire, les contrôleurs doivent prendre en compte le modèle dynamique du BMM via des lois de commande performantes tenant compte des non-linéarités complexes du MD du BMM. La procédure de conception de la CABP est composée de deux étapes, d'abord on calcul une commande basée sur la passivité sans variation paramétriques du MD du BMM, puis on considère des variations dans les matrices du MD et on conçoit la CABP.

On considère le MD (IV.13), sachant que, dans un premier temps les perturbations externes ( $\tau_p = 0$ ) ne sont pas considérées dans ce dernier.

En multipliant l'équation (IV.13) par  $S(q)^T$  et compte tenu de l'équation (IV.20), l'équation (IV.21), l'équation (IV.22), l'équation (IV.23) et sa dérivée, le MD (IV.13) peut être réduit comme suit :

$$D(q)\ddot{\sigma} + F(q, \dot{q})\dot{\sigma} + N(q) = \bar{Q} \quad (\text{IV.27})$$

ou

$$D(q) = S(q)^T M(q) S(q) \quad (\text{IV.28})$$

$$F(q, \dot{q}) = S(q)^T (M(q)\dot{S}(q) + C(q, \dot{q})S(q)) \quad (\text{IV.29})$$

$$N(q) = S(q)^T G(q) \quad (\text{IV.30})$$

$$\bar{Q} = S(q)^T B(q)(\tau + \tau_p) = \bar{B}\tau = \bar{\tau} \quad (\text{IV.31})$$

En remplaçant  $\bar{Q}$  donnée par (IV.31) dans (IV.27), le modèle dynamique du BMM est comme suit :

$$D(q)\ddot{\sigma} + F(q, \dot{q})\dot{\sigma} + N(q) = \bar{\tau} \quad (\text{IV.32})$$

$$\text{Avec} \quad D(q) = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.33})$$

$$m_{11} = m_{22} = \left(1 + \frac{l}{d}\right) \frac{mr^2}{4} + \frac{l_0}{4} \left(\frac{1}{2} + \frac{l}{d}\right) - \left(1 + \frac{l}{d}\right) \frac{l_0}{4} \cos(2\theta_p) + \frac{l_0}{8} \cos^2(2\theta_p);$$

$$m_{12} = m_{21} = \left(1 - \frac{l}{d}\right) \frac{mr^2}{4} + \frac{l_0}{4} \left(\frac{1}{2} - \frac{l}{d}\right) - \left(1 - \frac{l}{d}\right) \frac{l_0}{4} \cos(2\theta_p) + \frac{l_0}{8} \cos^2(2\theta_p);$$

$$m_{33} = \frac{m_1 l_1^2}{4} + m_2 \left(l_1^2 + \frac{1}{4} l_2^2 + 2l_1 l_2 \cos(\theta_1)\right) + I_{12}; \quad m_{44} = \frac{1}{4} m_2 l_2^2 + I_2;$$

$$m_{31} = m_{13} = \frac{r}{2d} I_{12}; \quad m_{34} = m_{43} = m_2 \left(\frac{1}{4} l_2^2 + 2l_1 l_2 \cos(\theta_2)\right) + I_2; \quad I_{12} = I_1 + I_2$$

$$m_{32} = m_{23} = -\frac{r}{2d} I_{12}; \quad m_{14} = m_{24} = m_{41} = m_{42} = 0; \quad I = I_0 + I_1 + I_2 + 2\frac{d^2}{r^2} I_0;$$

$$m = m_p + m_1 + m_2;$$

$$F(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.34})$$

$$\text{ou} \quad c_{11} = c_{12} = c_{21} = c_{22} = -\frac{l_0}{8} \dot{\theta}_p \sin(4\theta_p) - \frac{l_0}{4} \dot{\theta}_p \sin(2\theta_p);$$

$$c_{13} = c_{14} = 0; \quad c_{ij} = 0, \quad i = 2,3,4, \quad j = 1,2,3,4$$

$$N(q) = \left[ 0 \quad 0 \quad g(l_1 \left(\frac{m_1}{2} + m_2\right) \cos(\theta_p) + \left(\frac{m_2}{2} l_2\right) \cos(\theta_1 + \theta_2)) \quad g\left(\frac{m_2}{2} l_2\right) \cos(\theta_1 + \theta_2) \right]^T \quad (\text{IV.35})$$

$$\bar{B}(q) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.36})$$

La CABP conçue dans ce chapitre exploite des propriétés du MD (IV.32) du BMM, résumées ci-dessous [66 – 69] :

### Propriété de la matrice d'inertie $D(q)$

La matrice d'inertie  $D(q)$  est une matrice symétrique définie positive qui vérifie :

$$\lambda_{\min}(D) \|\mathbf{x}\|^2 \leq \mathbf{x}^T D(q) \mathbf{x} \leq \lambda_{\max}(D) \|\mathbf{x}\|^2, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 \quad (\text{IV.37})$$

avec,  $\|\cdot\|$  la norme Euclidienne et  $\lambda_{\min}(D)$  et  $\lambda_{\max}(D)$  désignent respectivement la valeur propre minimale et maximale de  $D$ .

### Propriété de la matrice des forces centrifuge et Coriolis $F(q, \dot{q})$

Les matrices  $F(q, \dot{q})$  et  $\dot{D}(q) - 2F(q, \dot{q})$  sont antisymétriques donc elles vérifient :

$$x^T F x = 0, \quad x^T (\dot{D} - 2F)x = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^5 \quad (\text{IV.38})$$

### Propriété de passivité du MD du BMM [70]

Le MD (IV.30) est passif pour le vecteur d'entrée de commande  $\tau$  et le vecteur de sortie  $\dot{q}$  si et seulement si l'inégalité de dissipation suivante est vérifiée :

$$\langle \dot{q}, \tau \rangle = \int_0^t \dot{q}^T(s) \tau(s) ds \geq -\beta \quad (\text{IV.39})$$

avec  $\beta = H_0(q(0)) > 0$  et  $H_0$  est l'énergie totale du BMM en boucle ouverte à l'instant initiale tel que :

$$H_0(q) = \frac{1}{2} \dot{q}^T D(q) \dot{q} \quad (\text{IV.40})$$

La conception d'une commande basée sur la passivité (CBP) est faite en deux étapes principales. La première étape est le façonnage de l'énergie en BF du BMM, ou une loi de commande est conçue pour que le système en BF ait cette énergie et que la propriété de passivité est conservée. La deuxième étape est l'ajout d'un terme d'amortissement qui correspond à un retour d'états, afin d'assurer la stabilité ainsi que la robustesse de la CBP. On considère le MD (IV.32), en suivant les mêmes étapes que celles de « Slotine et Li » dans [71], pour la commande d'un bras manipulateur rigide et fixe. La CBP qu'on a conçu pour le BMM étudié est formulée comme suit :

$$\bar{\tau} = D(q)\ddot{\sigma} + F(q, \dot{q})\dot{\sigma} + N(q) - u \quad (\text{IV.41})$$

ou :  $u$  représente une nouvelle entrée de commande principale.

En substituant (IV.41) dans (IV.32) et en définissant une nouvelle variable «  $s$  », on obtient l'équation dynamique en BF qui n'est autre que la dynamique de l'erreur de poursuite, telle que :

$$D(q)\dot{s} + F(q, \dot{q})s - u = 0 \quad (\text{IV.42})$$

ou  $s$  est une variable auxiliaire défini par

$$s = \dot{e}_q + \gamma e_q \quad (\text{IV.43})$$

ou :  $q_d$  la trajectoire désirée du BMM ;

$e_q = q - q_d$  le vecteur des erreurs de poursuite ;

$\gamma \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  une matrice diagonale a gain positif ;

En choisissant le vecteur d'entrée « u » ainsi que celui de sortie « s » et considérant la fonction d'énergie  $H_1(e_q, \dot{e}_q)$  en BF définit par (IV.44), on peut monter de la même manière suivis dans la propriété de passivité du BMM, de montrer que le système en BF définit par (IV.42) est passif. Donc, la passivité du système en BF est préservée par la CBP définit par (IV.41).

La fonction d'énergie du système en BF définit par (IV.42) est :

$$H_1(e_q, \dot{e}_q) = \frac{1}{2} s^T D s \quad (\text{IV.44})$$

Afin de définir complètement la CBP donnée par (IV.41), il suffit de choisir le nouveau vecteur d'entrée principale « u ». Un choix nécessaire et suffisant qui assure une stabilité asymptotique en BF ainsi que la robustesse est :

$$u = -k_{d1} \cdot s \quad (\text{IV.45})$$

ou  $k_{d1} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  est une matrice diagonale définie positive diagonale [71].

Afin de confirmer les performances complètes de la CBP, on démontre la stabilité du système en BF, en utilisant la théorie de Lyapunov, la première étape est de choisir la fonction candidate de Lyapunov suivante :

$$V(s, e_q) = \frac{1}{2} s^T D s + e_q^T k_{d1} e_q \quad (\text{IV.46})$$

On dérive  $V(s, e_q)$  le long de la trajectoire (IV.42) et sachant que « u » est donnée par (IV.45), après calcul, on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{V}(s, e_q) &= \frac{1}{2} s^T \dot{D}(q) s + s^T D(q) \dot{s} + 2e_q^T \gamma k_{d1} \dot{e}_q \\ &= \frac{1}{2} s^T \dot{D}(q) s + s^T (u - F(q, \dot{q}) s) + 2e_q^T \gamma k_{d1} \dot{e}_q \\ &= \frac{1}{2} s^T (\dot{D}(q) - 2F(q, \dot{q})) s - s^T k_{d1} s + 2e_q^T \gamma k_{d1} \dot{e}_q \end{aligned} \quad (\text{V.47})$$

ou  $s^T(\dot{D} - 2F)s = 0$ , d'après la troisième propriété précédente car  $(\dot{D} - 2F)$  est une matrice antisymétrique, et  $s$  est donnée par l'équation (IV.3743), l'équation (IV.4147) devient :

$$\begin{aligned}\dot{V}(s, e_q) &= -(\dot{e}_q + \gamma e_q)^T k_{d1}(\dot{e}_q + \gamma e_q) + 2e_q^T \gamma k_{d1} \dot{e}_q \\ \dot{V}(s, e_q) &= -\dot{e}_q^T k_{d1} \dot{e}_q - e_q^T \gamma k_{d1} \gamma \dot{e}_q\end{aligned}\quad (\text{IV.48})$$

Puisque  $\dot{V} < 0$  alors d'après la théorie de Lyapunov le point d'équilibre  $(s, e_q) = (0, 0)$  est asymptotiquement stable, donc en remplaçant  $(s, e_q) = (0, 0)$  dans l'expression de «  $s$  » donnée par (IV.43), on déduit que  $\dot{e}_q = 0$ , alors le point d'équilibre  $(e_q, \dot{e}_q) = (0, 0)$  est asymptotiquement stable.

Afin que la CBP soit performante même avec des imprécisions relativement importantes dans le MD du BMM et d'assurer un bon fonctionnement sous perturbations externes ( $\tau_p \neq 0$ ), on associe à la CBP un algorithme d'adaptation paramétrique. Notre démarche est inspirée des travaux présentés dans [71-73], pour la commande d'un bras manipulateur rigide et fixe. On considère des incertitudes dans la matrice d'inertie  $M$ , la matrice des couples/forces centrifuges et Coriolis  $C$  ainsi que dans le vecteur des couples/forces de gravité  $G$ . On note par  $\hat{M}$ ,  $\hat{C}$  et  $\hat{G}$  de  $M$ ,  $C$  et  $G$  respectivement. Le vecteur de commande (IV.41) et en remplaçant «  $u$  » par son expression donnée par (IV.45) est réécrit comme suit :

$$\bar{\tau} = \hat{D}(q)\ddot{\sigma} + \hat{F}(q, \dot{q})\dot{\sigma} + \hat{N}(q) - k_{d1}s \quad (\text{IV.49})$$

avec,  $\hat{D} = D + \tilde{D}$ ,  $\hat{F} = F + \tilde{F}$ ,  $\hat{N} = N + \tilde{N}$ , ou  $\tilde{D}$ ,  $\tilde{F}$ ,  $\tilde{N}$  les erreurs d'estimation,

L'expression du coté gauche de (IV.32) peut être paramétrée linéairement en fonction des paramètres du système du robot [73], la loi de commande (IV.49), on obtient :

$$\bar{\tau} = Y(\ddot{q}, \dot{q}, q)\hat{\alpha} - k_{d1}s - \bar{B}\hat{\tau}_p \quad (\text{IV.50})$$

ou la matrice  $Y$  est appelée la matrice de régression, est une fonction connue des coordonnées généralisées et  $\alpha$  est un vecteur de paramètres incertains des matrice  $M$ ,  $C$  et  $G$ .

$$\text{avec, } Y(\ddot{q}, \dot{q}, q, \sigma) = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} & Y_{14} & Y_{15} & Y_{16} & Y_{17} & Y_{18} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} & Y_{24} & Y_{25} & Y_{26} & Y_{27} & Y_{28} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} & Y_{34} & Y_{35} & Y_{36} & Y_{37} & Y_{38} \\ Y_{41} & Y_{42} & Y_{43} & Y_{44} & Y_{45} & Y_{46} & Y_{47} & Y_{48} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.51})$$

$\tilde{\alpha} = \hat{\alpha} - \alpha$ , l'erreur des paramètres inconnus.

$\tilde{\tau}_p = \hat{\tau}_p - \tau_p$ , le vecteur d'erreur des perturbations externes.

Les paramètres incertains pris en compte pour le BMM sont la masse et le moment d'inertie du système [75] :

$$\alpha = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4 \quad \alpha_5 \quad \alpha_6 \quad \alpha_7 \quad \alpha_8]^T \quad (\text{IV.52})$$

En substituant (IV.52) dans (IV.32) et on considérant (IV.43), on obtient l'équation dynamique en BF qui n'est autre que la dynamique de l'erreur de poursuite, telle que :

$$D(q)\dot{s} + F(q, \dot{q})s + k_{d1}s = Y\tilde{\alpha} - \bar{B}\dot{\hat{\tau}}_p \quad (\text{IV.53})$$

Les lois d'estimation du vecteur «  $\hat{\alpha}$  » des paramètres et le vecteur «  $\hat{\tau}_p$  » des perturbations sont données comme suit [74] :

$$\dot{\hat{\alpha}} = -\rho^{-1}Y^T s \quad (\text{IV.54})$$

$$\dot{\hat{\tau}}_p = \delta B^T s \quad (\text{IV.55})$$

avec «  $\rho$  » et «  $\delta$  » sont des matrices diagonale et positif-définie:

$$\rho = \text{diag}(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6, \beta_7, \beta_8) \quad (\text{IV.56})$$

$$\delta = \text{diag}(\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4) \quad (\text{IV.57})$$

Afin de confirmer les performances de la CABP, on démontre la stabilité du système en BF et la convergence des erreurs de poursuite et des estimations de paramètres, en utilisant la théorie de Lyapunov, alors, on considère la fonction de Lyapunov suivante :

$$V(s, e_q) = \frac{1}{2}s^T D s + e_q^T \gamma k_{d1} \dot{e}_q + \frac{1}{2}\tilde{\alpha}^T \rho \tilde{\alpha} + \frac{1}{2}\tilde{\tau}_p^T \delta \tilde{\tau}_p \quad (\text{IV.58})$$

Sa dérivée temporelle le long des trajectoires de (IV.53) est donnée par :

$$\dot{V}(s, e_q) = s^T D \dot{s} + \frac{1}{2}s^T \dot{D} s + 2e_q^T \gamma k_{d1} \dot{e}_q + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \tilde{\alpha}^T \rho \tilde{\alpha} \right) + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \tilde{\tau}_p^T \delta \tilde{\tau}_p \right) \quad (\text{IV.59})$$

$$\dot{V}(s, e_q) = s^T \left( D \dot{s} + \frac{1}{2} \dot{D} s \right) + 2e_q^T \gamma k_{d1} \dot{e}_q + \dot{\tilde{\alpha}}^T \rho s + \dot{\tilde{\tau}}_p^T \delta \tilde{\tau}_p \quad (\text{IV.60})$$

En substituant l'équation (IV.53) dans l'équation (IV.60), on obtient :

$$\dot{V}(s, e_q) = s^T \left( Y\tilde{\alpha} - \bar{B}\dot{\hat{\tau}}_p - F s - k_{d1}s + \frac{1}{2}\dot{D}s \right) + 2e_q^T \gamma k_{d1} \dot{e}_q + \dot{\tilde{\alpha}}^T \rho s + \dot{\tilde{\tau}}_p^T \delta \tilde{\tau}_p \quad (\text{IV.61})$$

$$\dot{V}(s, e_q) = s^T Y \tilde{\alpha} - s^T B \tilde{\tau}_p - s^T F s - s^T k_{d1} s + \frac{1}{2} s^T \dot{D} s + 2e_q^T \gamma k_{d1} \dot{e}_q + \tilde{\alpha}^T \rho s + \tilde{\tau}_p^T \delta \tilde{\tau}_p$$

$$\dot{V}(s, e_q) = -s^T (k_{d1} + \frac{1}{2} (\dot{D} - 2F)) s + 2e_q^T \gamma k_{d1} \dot{e}_q + (\tilde{\alpha}^T \rho + s^T Y) \tilde{\alpha} + (-s^T B + \tilde{\tau}_p^T \delta) \tilde{\tau}_p \tag{IV.62}$$

ou  $s^T (\dot{D} - 2F) s = 0$ , d'après la troisième propriété précédente car  $(\dot{D} - 2F)$  est une matrice antisymétrique, l'équation (IV.61) devient :

$$\dot{V}(s, e_q) = -s^T k_{d1} s + 2e_q^T \gamma k_{d1} \dot{e}_q - (s^T B - \tilde{\tau}_p^T \delta) \tilde{\tau}_p + (\tilde{\alpha}^T \rho + s^T Y) \tilde{\alpha} \tag{IV.63}$$

En remplaçant « s » donnée par l'équation (IV.43), on obtient :

$$\dot{V}(s, e_q) = -\dot{e}_q^T k_{d1} \dot{e}_q - e_q^T \gamma k_{d1} \gamma \dot{e}_q - (s^T B - \tilde{\tau}_p^T \delta) \tilde{\tau}_p + (\tilde{\alpha}^T \rho + s^T Y) \tilde{\alpha} \tag{IV.64}$$

Avec la loi de mise à jour (IV.54) et (IV.55),  $V(s, e_q) < 0$  ainsi, sur la base du système de stabilité de Lyapunov, le point d'équilibre  $(s, e_q) = (0, 0)$  est asymptotiquement stable, donc en remplaçant  $(s, e_q) = (0, 0)$  dans l'expression de « s » donnée par (IV.43), on déduit que  $\dot{e}_q = 0$ , alors le point d'équilibre  $(e_q, \dot{e}_q) = (0, 0)$  est asymptotiquement stable.

La structure du contrôleur est présentée à la figure IV.2.

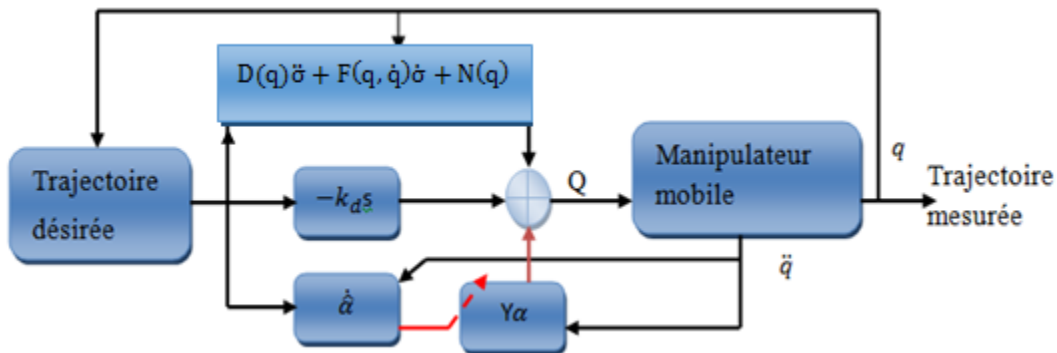


Figure IV.2 : Structure du schéma de contrôle.

#### IV.4 Validation de la CABP par des tests de simulations

Pour tester les performances de l'étude proposée, des simulations ont été réalisées sous le logiciel « Matlab/Simulink », pour une trajectoire désirée de la plateforme mobile de la forme suivante :

$$\theta_b(t) = (2\pi/5)t + 5 \quad (\text{IV.65})$$

et des trajectoires de référence pour les deux segments du bras manipulateur dont les expressions sont :

$$\theta_1(t) = 1.3\sin(t + \pi/6) \quad (\text{IV.66})$$

$$\theta_2(t) = 2(1 - \cos(t + \pi/6)) \quad (\text{IV.67})$$

Les simulations ont été effectuées en présence des perturbations externes aux niveaux des signaux de commandes du BMM. Le vecteur des perturbations appliqué aux entrées est «  $\tau_p(t)$  », donné par l'équation (IV.68) tels que les deux premières composantes de «  $\tau_p$  » sont superposées aux signaux de commandes des roues gauche et droite de la PM tandis que les deux dernières sont associées aux signaux de commandes des articulations du BM.

$$\tau_p = \begin{bmatrix} \tau_{p1} \\ \tau_{p2} \\ \tau_{pl} \\ \tau_{pr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5\sin(1.5t) \\ 5\cos(1.5t) \\ 2\sin(3t) \\ 2\cos(3t) \end{bmatrix} \quad (\text{IV.68})$$

Les perturbations dans les paramètres du BMM sont choisies comme suit [53] ;

$$m_p = 10 + \sin\left(\frac{2\pi}{5}t\right) [\text{km}], m_1 = 2 + 2\sin\left(\frac{2\pi}{5}t\right) [\text{kg}], m_2 = 2 + \sin\left(\frac{2\pi}{5}t\right) [\text{kg}],$$

$$I_1 = I_2 = 0.12 + 0.02\sin\left(\frac{2\pi}{5}t\right) [\text{kg}], I_0 = 1.2 + 0.2\sin\left(\frac{2\pi}{5}t\right) [\text{kg}],$$

Pour montrer les performances de la commande développée (CABP) au BMM étudiée, une étude comparative a été réalisée entre la CABP et le régulateur classique PID. Pour une meilleure comparaison, toutes les matrices de gain des contrôleurs sont calculés de telle sorte que tous les contrôleurs donnent des performances satisfaisantes, dans des conditions idéales (c'est-à-dire  $\tau_p = 0$ ). Les paramètres du contrôleur PID et de la CABP proposée sont :

$$k_p = 35I_{4 \times 4}, k_i = 25I_{4 \times 4}, k_d = 5I_{4 \times 4} \text{ et pour la CABP } \gamma = 6I_{1 \times 4}, k_{d1} = 20I_{4 \times 4} \text{ et } \rho = 0.2I_{8 \times 8}, \delta = I_{4 \times 4}.$$

Les principaux résultats des tests de simulation sont donnés dans les figures (IV.3)-(IV.8) ci-dessous.

Les figures (IV.3) et (IV.4) illustrent le comportement du système en l'absence de perturbations externes, respectivement dans le cas de l'application du contrôleur PID classique et dans le cas de l'application de la technique proposée (CABP). On constate que les deux

roues (gauche et droite) de la PM ainsi que les deux positions articulaires du BM suivent leurs trajectoires de référence ou les erreurs de poursuite convergent vers zéros après un régime transitoire relativement long pour le PID par-rapport à la CABP.

Les figures (IV.5) et (IV.6) illustrent le comportement du système avec des perturbations appliquées à  $t = 10s$ , respectivement pour le contrôleur PID et pour la CABP. Les mêmes signaux sont tracés que les figures (IV.3) et (IV.4). On constate que pour le cas du PID les trajectoires des roues ainsi que celles des articulations présentent des erreurs de poursuite après l'application des perturbations aux entrées du BMM, par contre pour la CABP les erreurs de poursuites sont presque nulles mêmes en présences des perturbations.

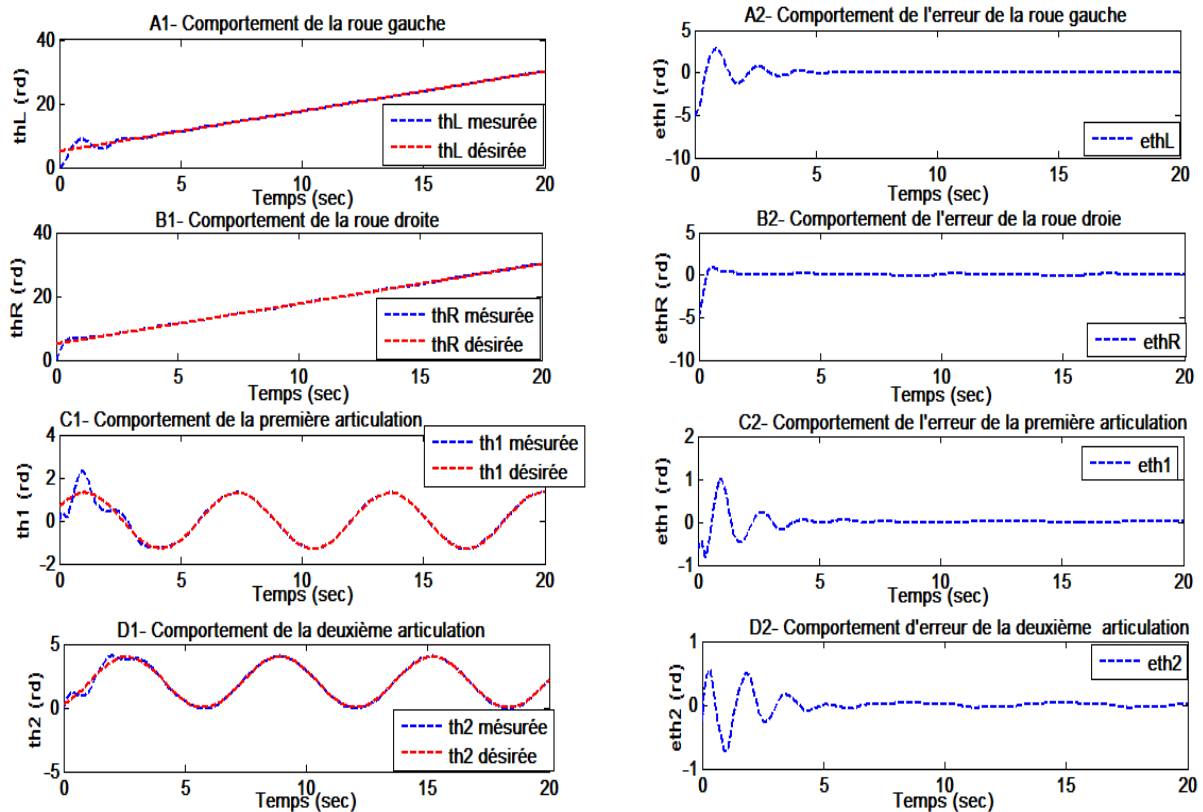


Figure IV.3 : Comportement du BMM sans perturbations, commandé par un PID.

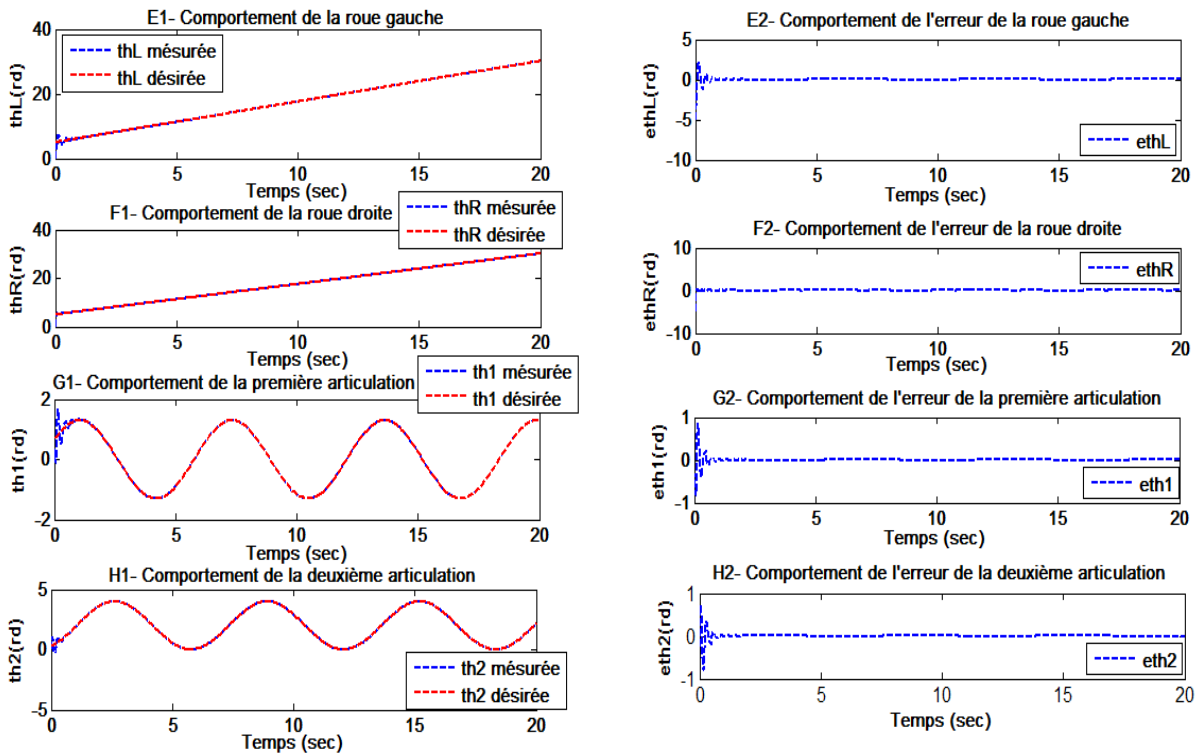


Figure IV.4 : Comportement du BMM sans perturbations, commandé par la CABP.

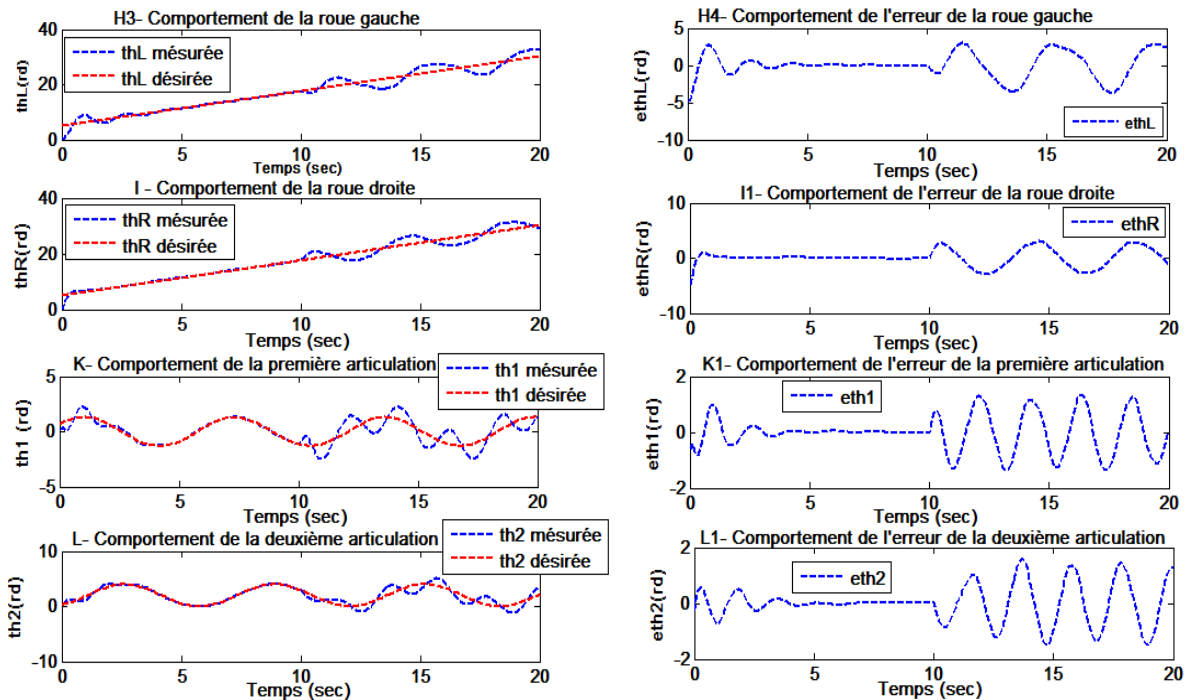


Figure IV.5 : Comportement du BMM avec perturbations à  $t=10s$ , commandé par un PID.

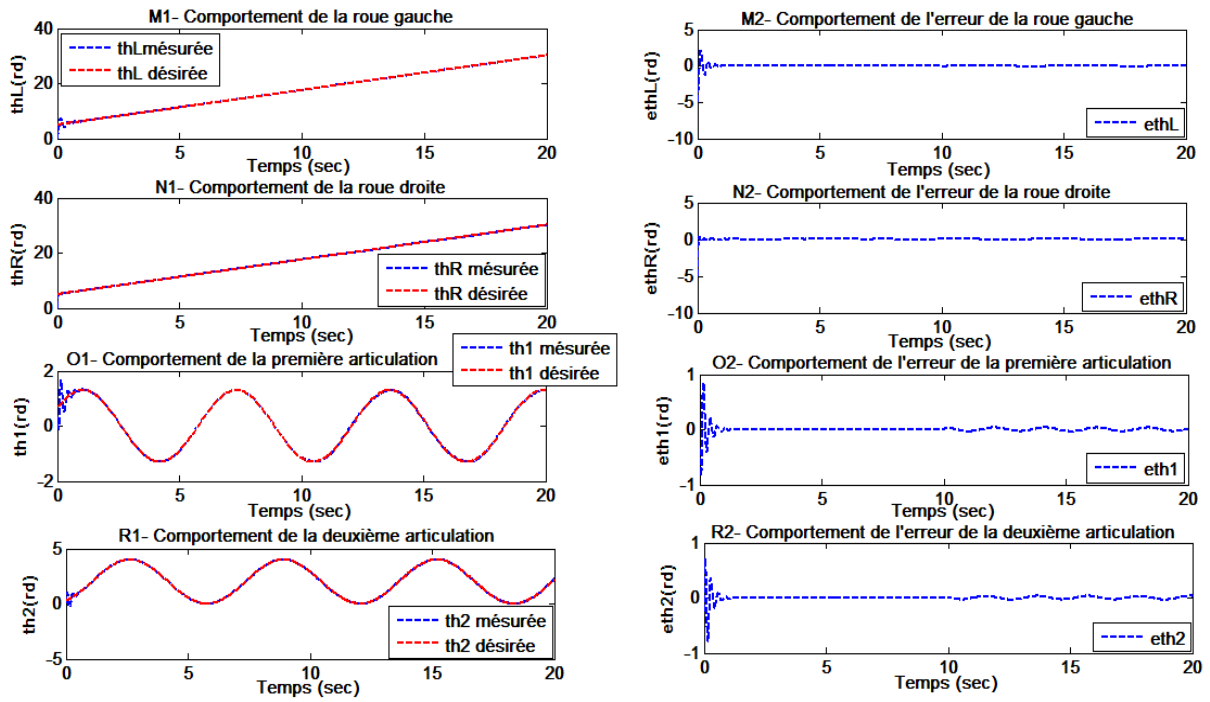


Figure IV.6 : Comportement du BMM avec perturbations à  $t=10s$ , commandé par la CABP.

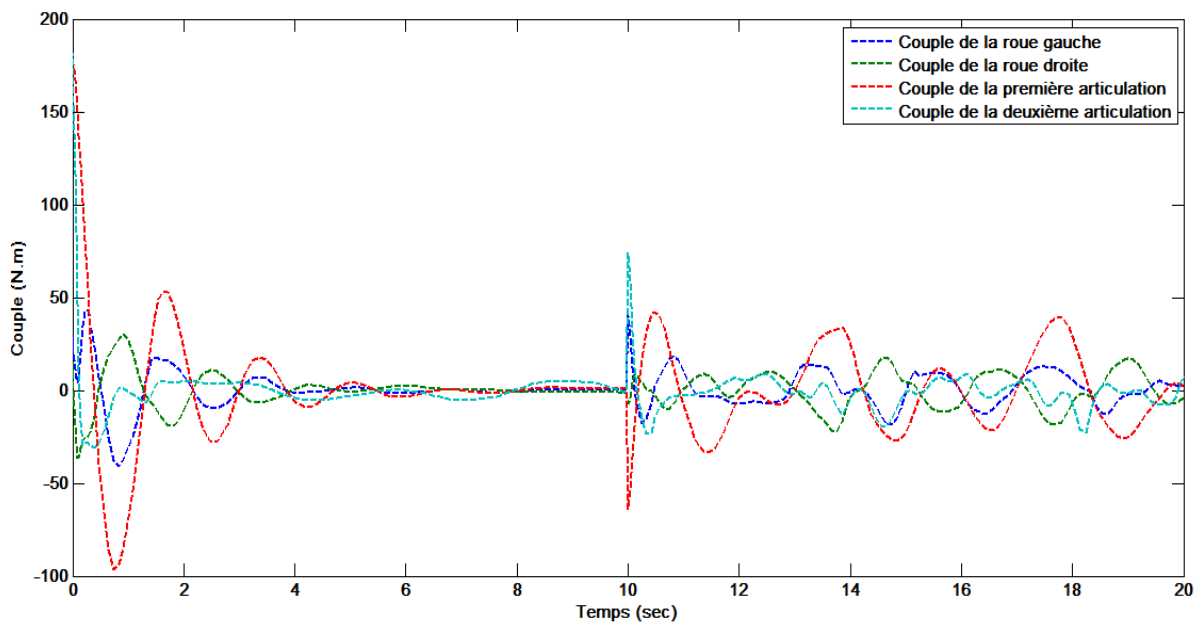
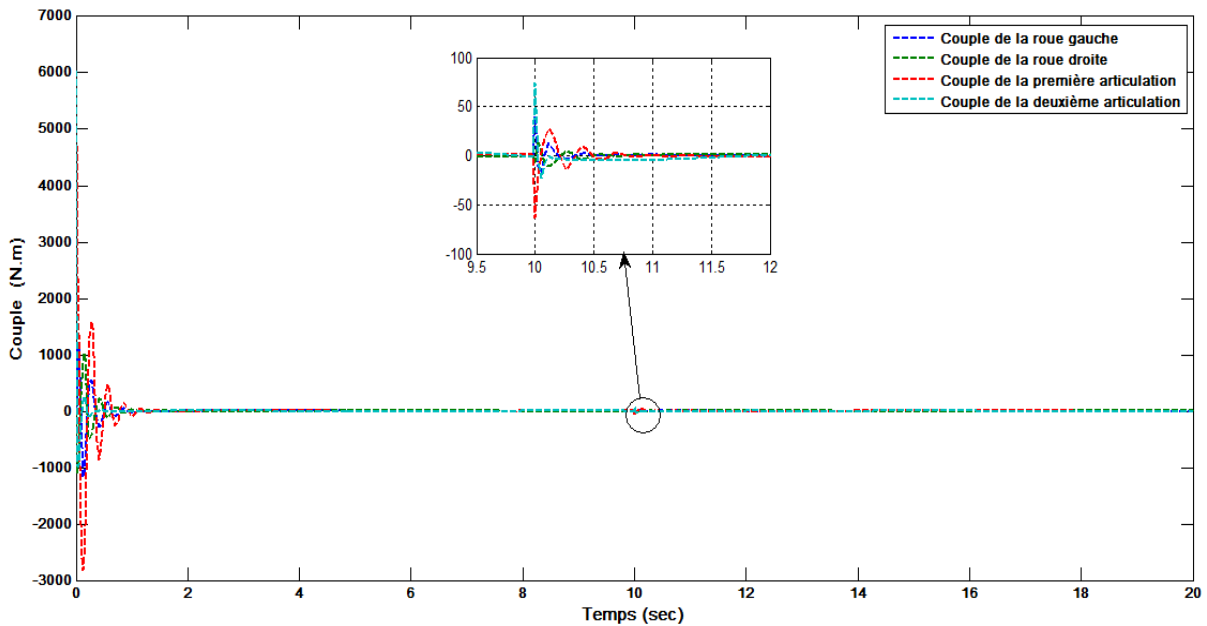


Figure IV.7 : Allures des signaux de commande avec des perturbations appliquées à  $t=10s$  pour le BMM commandé par un PID.



**Figure IV.8 :** Allures des signaux de commande avec des perturbations appliquées à  $t=10s$  pour le BMM commandé par la CABP.

Les résultats de la simulation vérifient les avantages des schémas de contrôle proposés. Les courbes obtenues montrent que le contrôleur proposé (passif adaptatif) offre une plus grande précision dans la commande de suivi de position que celles fournies par les contrôleurs PID. En outre, la technique de contrôle proposée permet d'obtenir une meilleure performance dynamique des systèmes. En observant les figures (IV.3 et IV.4), on peut vérifier que la loi de contrôle proposée peut fournir un taux de convergence plus rapide des erreurs de suivi de position le long des trajectoires souhaitées par rapport aux contrôleurs PID.

En observant les figures (IV.5 et IV.6), on remarque rapidement et clairement que la méthode de contrôle proposée est plus efficace pour le fonctionnement du robot manipulateur mobile sous perturbations externes. Non seulement elle assure une convergence asymptotique vers zéro des erreurs de suivi de position du système, mais elle permet également une accommodation du fonctionnement du système en présence de perturbations externes. En d'autres termes, nous pouvons voir que les résultats de suivi pour le contrôle basé sur le PID ne sont pas satisfaisants et que le manipulateur mobile n'a pas réussi à converger vers la trajectoire de référence. Cela indique que le contrôleur de suivi n'a pas été capable d'atteindre la robustesse contre les perturbations externes appliquées sur le système (Figure (IV.7)). Cependant, la loi de contrôle adaptative basée sur la passivité, qui est capable de corriger les effets des perturbations (Figure IV.8), fournit de meilleurs résultats et obtient de bonnes performances de suivi de trajectoire. Dont, la figure (IV.6) montre clairement que le processus

de contrôle adaptatif basé sur la passivité en présence des perturbations externes, est très bien réalisé via la règle de mise à jour (équation IV.54) du vecteur de paramètres incertains ( $\alpha$ ), assurant ainsi la compensation (équation IV.50) de l'effet de la perturbation externe permettant (figure IV.8) d'atteindre une meilleure performance de suivi de trajectoire.

### **IV.5 Conclusion**

Dans ce chapitre, une stratégie de commande adaptative basée sur la passivité a été présentée pour contrôler un manipulateur mobile non-holonome en présence de perturbations externes. La stabilité du système et la convergence asymptotique des erreurs de suivi sont prouvées en utilisant la théorie de Lyapunov. La stratégie de contrôle a été conçue pour conduire le mouvement du système afin de converger vers le fonctionnement désiré et, en même temps, garantir la limitation des signaux en boucle fermée. Des résultats de simulation confirment l'efficacité de la technique de contrôle proposée.

## Conclusion générale

Le bras manipulateur mobile (BMM) est un système qui permet de réaliser de nombreuses tâches en particulier celles dangereuses, pénibles, nécessitant de la précision ainsi qu'un déplacement. Le choix de la structure d'un BMM dépend essentiellement de la tâche à réaliser ainsi que de l'environnement où le BMM va opérer. Le dimensionnement de la structure du BMM est une étape initiale importante or une autre étape plus importante est le choix de l'algorithme de commande du BMM.

L'algorithme de commande du BMM doit tenir compte des contraintes de la plateforme mobile (PM) et du bras manipulateur (BM) ce qui rend la tâche de commande très complexe alors un choix judicieux et adapté de la loi de commande est exigeant. Deux stratégies pour la synthèse de la commande du BMM peuvent être adoptées : La première consiste à calculer la loi de commande séparément pour la PM et pour le BM puis synchroniser entre les deux lois de commande. La deuxième méthode est celle qui considère le modèle complet du BMM lors du calcul de l'algorithme de commande. La première manière est plus simple mais moins performante et la deuxième stratégie est complexe mais plus efficace. Lors de nos travaux, on a adopté la deuxième manière.

Le BMM est un système fortement non-linéaire alors la première loi de commande appliqués dans notre travail assurent la linéarisation exacte, le suivi de trajectoire de la PM ainsi que la position désirée du BM. La deuxième loi de commande synthétisée pour le BMM est basée sur le concept de passivité ou elle assure les mêmes tâches que la première commande et avec des performances meilleures. Les deux lois de commande font partis de la classe des commandes non-linéaires qui sont adaptées et nécessaires pour la commande des systèmes non-linéaires dont fait partie le BMM.

La modélisation des BMM est l'étape importante de tout travail de commande or le modèle obtenu est toujours approximatif, vu la complexité des phénomènes physiques existants lors du fonctionnement du BMM, alors les algorithmes de commandes utilisés devraient compenser ces erreurs de modélisation. Une classe de lois de commande qui assurent de bonnes performances sont les lois de commande robustes ou la deuxième loi de commande étudiée fait parti de cette classe. La robustesse est assurée en général si un terme de l'ensemble des incertitudes est considéré lors de la synthèse de l'algorithme de commande. Les incertitudes devraient être dimensionnées en tenant compte des caractéristiques physiques du BMM ainsi que des conditions de fonctionnement.

Une caractéristique importante en commande qui assure des performances pour des contraintes variées est l'adaptation. Cette dernière est en général utilisée pour l'adaptation des gains des lois de commande. Il existe aussi une classe de lois de commande adaptatives. La deuxième loi de commande appliquée au BMM utilise ce concept d'adaptation qui permet de compenser des incertitudes paramétriques même importantes ainsi que des perturbations externes.

Les résultats obtenus lors de la validation par des tests de simulations des deux algorithmes de commandes calculés montrent leurs performances malgré la complexité du BMM étudié ainsi que de ces contraintes de fonctionnement.

Nos travaux futurs porteront sur le diagnostic des défauts et la commande tolérante aux défauts des BMM ou ces actionneurs seront modélisés.

**Le vecteur de paramètres :** Les paramètres incertains pris en compte pour le BMM sont la masse et le moment d'inertie du système [74] :

$$\alpha = [m_p \quad m_1 \quad m_2 \quad m_2 l_2 \quad I_p \quad I_0 \quad I_1 \quad I_2] \quad (\text{A.1})$$

**Calcul des éléments de la matrice Y :** on rappelle l'expression de la matrice donnée par (IV.51) du chapitre 4 :

$$Y(q, \sigma) = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} & Y_{14} & Y_{15} & Y_{16} & Y_{17} & Y_{18} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} & Y_{24} & Y_{25} & Y_{26} & Y_{27} & Y_{28} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} & Y_{34} & Y_{35} & Y_{36} & Y_{37} & Y_{38} \\ Y_{41} & Y_{42} & Y_{43} & Y_{44} & Y_{45} & Y_{46} & Y_{47} & Y_{48} \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

$$Y_{1i} = \frac{\partial D_1}{\partial \alpha_i}; \quad Y_{2i} = \frac{\partial D_2}{\partial \alpha_i}; \quad Y_{3i} = \frac{\partial D_3}{\partial \alpha_i}; \quad Y_{4i} = \frac{\partial D_4}{\partial \alpha_i} \quad (\text{A.3})$$

$$D_1 = \sum_{i=1}^4 D_{1i} \dot{\sigma}_i + \sum_{i=1}^4 F_{1i} \sigma_i + N_1 \quad (\text{A.4})$$

$$D_2 = \sum_{i=1}^4 D_{2i} \dot{\sigma}_i + \sum_{i=1}^4 F_{2i} \sigma_i + N_2 \quad (\text{A.5})$$

$$D_3 = \sum_{i=1}^4 D_{3i} \dot{\sigma}_i + \sum_{i=1}^4 F_{3i} \sigma_i + N_3 \quad (\text{A.6})$$

$$D_4 = \sum_{i=1}^4 D_{4i} \dot{\sigma}_i + \sum_{i=1}^4 F_{4i} \sigma_i + N_4 \quad (\text{A.7})$$

On remplaçant les différents éléments des matrice du modèle donné par l'expression (IV.) dans les équations (A.4) a (A.7), on obtient :

$$D_1 = \left( \left( 1 + \frac{I}{d} \right) m \frac{r^2}{4} + \frac{I_0}{4} \left( \frac{1}{2} + \frac{I}{4d} \right) - \left( 1 + \frac{I}{d} \right) \frac{I_0}{4} \left( \cos(2\theta_p) + \frac{\cos^2(2\theta_p)}{8} \right) \right) (\dot{\sigma}_1 + \dot{\sigma}_2) + \left( \frac{r}{2d} (I_1 + I_2) \right) \dot{\sigma}_3 - \left( \dot{\theta}_p \frac{I_0}{4} \left( \frac{\sin(4\theta_p)}{2} - \sin(\theta_p) \right) \right) (\sigma_1 + \sigma_2); \quad (\text{A.8})$$

$$D_2 = \left( \left( 1 - \frac{I}{d} \right) m \frac{r^2}{4} + \frac{I_0}{4} \left( \frac{1}{2} + \frac{I}{d} \right) - \left( 1 - \frac{I}{d} \right) \frac{I_0}{4} \cos(2\theta_p) + \frac{\cos^2(2\theta_p)}{8} \right) \dot{\sigma}_1 + \left( \left( 1 + \frac{I}{d} \right) m \frac{r^2}{4} + \frac{I_0}{4} \left( \frac{1}{2} + \frac{I}{4d} \right) - \left( 1 + \frac{I}{d} \right) \frac{I_0}{4} \left( \cos(2\theta_p) + \frac{\cos^2(2\theta_p)}{8} \right) \right) \dot{\sigma}_2 - \frac{r}{2d} (I_1 + I_2) \dot{\sigma}_3 - \left( \dot{\theta}_p \frac{I_0}{4} \left( \frac{\sin(4\theta_p)}{2} - \sin(\theta_p) \right) \right) (\sigma_1 + \sigma_2); \quad (\text{A.9})$$

$$D_3 = \frac{r}{2d} (I_1 + I_2) (\dot{\sigma}_1 - \dot{\sigma}_2) + \left( \frac{m_1}{4} l_1^2 + m_2 \left( \frac{1}{4} l_1^2 + 2l_1 l_2 \cos(\theta_1) + (I_1 + I_2) \right) \right) \dot{\sigma}_3 + \left( l_1 \left( \frac{m_1}{2} + m_2 \right) g \cos(\theta_p) + \left( \frac{m_2}{2} g l_2 \right) \cos(\theta_1 + \theta_2) \right); \quad (\text{A.10})$$

$$D_4 = m_2 \left( \frac{1}{4} l_1^2 + 2l_1 l_2 \cos(\theta_1) + (I_1 + I_2) \right) \dot{\sigma}_3 + \frac{1}{4} m_2 l_1^2 (I_1 + I_2) \dot{\sigma}_4 + \left( \frac{m_2}{2} g l_2 \right) \cos(\theta_1 + \theta_2); \quad (\text{A.11})$$

avec :  $m = m_p + m_1 + m_2$  ;

On substituant  $D_1, D_2, D_3$  et  $D_4$ , donnés par les équations (A.8), (A.9), (A.10) et (A.11) respective, les éléments de la matrice Y sont déterminés comme suit :

$$\begin{aligned}
 Y_{11} &= Y_{12} = Y_{13} = \left(1 + \frac{I}{d}\right) m \frac{r^2}{4} (\dot{\sigma}_1 + \dot{\sigma}_2); \quad Y_{14} = Y_{15} = 0; \\
 Y_{16} &= \left(\frac{mr^2}{4d} \left(1 + \frac{2d^2}{r^2}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{I}{4d}\right) - \left(1 + \frac{I}{d}\right) \left(\cos(2\theta_p) - \frac{\cos^2(2\theta_p)}{8}\right)\right) (\dot{\sigma}_1 + \dot{\sigma}_2) + \\
 &\quad (\dot{\theta}_p (\sin(4\theta_p) - \sin(\theta_p)) (\sigma_1 + \sigma_2)); \\
 Y_{17} &= Y_{18} = \left(\frac{mr^2}{4d} + \frac{I_0}{4d} (1 - \cos(2\theta_p))\right) (\dot{\sigma}_1 + \dot{\sigma}_2) + \frac{r}{2d} \dot{\sigma}_3; \\
 Y_{21} &= Y_{22} = Y_{23} = \left(1 - \frac{I}{d}\right) \frac{r^2}{4} \dot{\sigma}_1 + \left(1 + \frac{I}{d}\right) \frac{r^2}{4} \dot{\sigma}_2; \\
 Y_{24} &= Y_{25} = 0; \\
 Y_{26} &= \left(m \frac{r^2}{4} + \left(\frac{1}{8} + \frac{I}{4d}\right) - \left(1 - \frac{I}{d}\right) \frac{\cos(2\theta_p)}{4}\right) \dot{\sigma}_1 + \left(m \frac{r^2}{4} + \left(\frac{1}{8} + \frac{I}{16d}\right) - \right. \\
 &\quad \left. \left(\frac{1}{4} + \frac{I}{4d}\right) \left(\cos(2\theta_p) + \frac{\cos^2(2\theta_p)}{8}\right)\right) \dot{\sigma}_2 - \left(\frac{\dot{\theta}_p}{4} \left(\frac{\sin(4\theta_p)}{2} - \sin(\theta_p)\right)\right) (\sigma_1 + \sigma_2); \\
 Y_{27} &= Y_{28} = \left(m \frac{r^2}{4d} + \frac{I_0}{4d} (1 - \cos(2\theta_p))\right) \dot{\sigma}_1 + \left(m \frac{r^2}{4d} + \frac{I_0}{4d} - \frac{I_0}{4} \left(\cos(2\theta_p) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \frac{\cos^2(2\theta_p)}{8}\right)\right) \dot{\sigma}_2 - \frac{r}{2d} \dot{\sigma}_3; \\
 Y_{31} &= 0; \quad Y_{32} = \frac{1}{4} l_1^2 \dot{\sigma}_3 + \frac{1}{2} l_1 g \cos(\theta_p); \\
 Y_{33} &= \left(\frac{1}{4} l_1^2 + 2l_1 l_2 \cos(\theta_1) + (I_1 + I_2)\right) \dot{\sigma}_3 + l_1 g \cos(\theta_p) + \frac{1}{2} g l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2); \\
 Y_{34} &= (2l_1 l_2 \cos(\theta_1) + (I_1 + I_2)) \dot{\sigma}_3 + \frac{1}{2} g \cos(\theta_1 + \theta_2); \quad Y_{35} = Y_{36} = 0; \\
 Y_{37} &= Y_{38} = \frac{r}{2d} (\dot{\sigma}_1 - \dot{\sigma}_2) + m_2 \dot{\sigma}_3; \\
 Y_{41} &= Y_{42} = 0; \\
 Y_{43} &= \left(\frac{1}{4} l_1^2 + 2l_1 l_2 \cos(\theta_1) + (I_1 + I_2)\right) \dot{\sigma}_3 + \frac{1}{4} l_1^2 (I_1 + I_2) \dot{\sigma}_4 + \frac{1}{2} g l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2); \\
 Y_{44} &= 2l_1 \cos(\theta_1) \dot{\sigma}_3 + \frac{1}{2} g \cos(\theta_1 + \theta_2); \quad Y_{45} = Y_{46} = 0; \\
 Y_{47} &= Y_{48} = m_2 \dot{\sigma}_3 + \frac{1}{4} m_2 l_1^2 \dot{\sigma}_4;
 \end{aligned}$$

## Références bibliographiques

- [1] Cedeno-Campos, V.M., Trodden, P.A., Dodd, T.J., Heley, J. Highly flexible self-reconfigurable systems for rapid layout formation to offer manufacturing services. In Proceedings of the 2013 IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics, Manchester, UK, 13–16 October 2013; pp. 4819–4824.SMC, 2013.
- [2] PatalasMaliszewska, J., Pajak, I., Skrzyszewska, M. AI-based decision-making model for the development of a manufacturing company in the context of industry 4.0. In Proceedings of the IEEE International Conference on Fuzzy Systems, Glasgow, UK, 19–24 July 2020.
- [3] Patalas-Maliszewska, J., Topczak, M., Kłos, S. The Level of the Additive Manufacturing Technology Use in Polish Metal and Automotive Manufacturing Enterprises. *Appl. Sci*, 10, 735, 2020.
- [4] Lin, R., Huang, H. et Li, M. Un robot logistique guidé automatisé pour le transport de palettes. *Assembly Automation*, Vol. 41 No. 1, pp. 45-54, 2021.
- [5] Pedersen, M.R., Nalpantidis, L., Andersen, R.S., Schou, C., Bøgh, S., Kruger, V., Madsen, O. Robot skills for manufacturing : From concept to industrial deployment. *Robot. Comput. Integr. Manuf.* 37, 282–291, 2016.
- [6] Shneier, M. and Bostelman, R., Literature Review of Mobile Robots for Manufacturing, NIST Internal Report -8022, <https://dx.doi.org/10.6028/NIST.IR.8022>, 2015.
- [7] M. Boukattaya, M. Jallouli, and T. Damak, On trajectory tracking control for nonholonomic mobile manipulators with dynamic uncertainties and external torque disturbances. *Robot. Auton. Syst.*, vol. 60, no 12, pp. 1640-1647, déc. 2012.
- [8] J. Jiao, Z. Cao, P. Zhao, X. Liu, et M. Tan, Bezier curve based path planning for a mobile manipulator in unknown environments , pp. 1864-1868, 2013.
- [9] S. Djebrani, A. Benali, and F. Abdessemed, Modeling and Control of an Omnidirectional Mobile Manipulator, *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci*, Vol. 22, 2012.
- [10] M. Galicki, Real-time constrained trajectory generation of mobile manipulators , *Robot. Auton. Syst.*, vol. 78, pp. 49-62, avr. 2016.
- [11] I. Akli, M. Haddad, B. Bouzouia et N. Achour, Génération de trajectoires pour l'exécution de tâches opérationnelles avec analyse de manipulabilité, 15e Conférence internationale sur la robotique avancée (ICAR), Doi : 10.1109/ICAR.2011.6088648. Tallinn, Estonie, pp. 94-99, 2011.
- [12] O. Madsen, S. Bøgh, C. Schou, R. S. Andersen, J. S. Damgaard, M. R. Pedersen and V. Kruger, Integration of Mobile Manipulators in an Industrial Production, *Ind. Rob.: An Int. J.*, vol. 42, 201, 18 December 2014.
- [13] Bøgh S, Hvilshøj M, Kristiansen M, Madsen O. Autonomous Industrial Mobile Manipulation (AIMM): From Research to Industry. *Automate* (Chicago, IL). 2011.
- [14] Pajak, I., Pajak, G. Motion Planning for a Mobile Humanoid Manipulator Working in an Industrial Environment. *Appl. Sci*. 2021.
- [15] Bayle, B. Modélisation et commande cinématiques des manipulateurs mobiles à roues. Thèse de Doctorat, LAAS, Université Paul Sabatier de Toulouse ,2001.
- [16] F. G. Pin and J. C. Culioli, Optimal Positioning of Combined Mobile Platform- Manipulator systems for Material Handling Tasks, *Journal of intelligent and Robotic Systems*. 6: 165-182, 1992.

- [17] Schenker, P. , Huntsberger, T. , Pirjanian, P. , Baumgartner, E. et Tunstel, E. : Planetary rover developments supporting mars exploration, sample return and future human-robotic colonization. *Autonomous Robots*, 14(2):103–126, 2003.
- [18] Bio-inspired robot control for human-robot bi- manual manipulation. *Dynamic Systems and Control Conference*, p. V003T45A001–V003T45A001. American Society of Mechanical Engineers, ASME, 2013.
- [19] Crops:Crops homepage, URL: <http://www.crops-robots.eu>,2017.Consulté 29/12/2021.
- [20] The start-up Dogtooth Technologie, URL: <https://www.intorobotics.com/fruit-harvesting-robots/>, Consulté le 29/12/2021.
- [21] Feldmann, K. et Koch, M., A mobile robot system for assembly operations at interior finishing. In *Proc. 15th International Symposium Automation and Robotics in Construction* . Poppy, W, p. 93–102, 1998.
- [22] PaintUP : PaintUP, 2017. URL <https://tv.arts-et-metiers.fr/paintup-robot-de-traitement-de-facade/>. Consulté le 29/12/2021.
- [23] ECA-Group-H2000. URL :<https://www.ecagroup.com/en/solutions/h2000-rov-remotely-operated-vehicle>.Consulté le 29/12/2021.
- [24] Muhammad Aqib Khan. Design and control of a robotic system based on mobile robots and manipulator arms for picking in logistics warehouses. *Automatic*. Normandie Université, 2020.
- [25] G. Foulon. Génération de mouvements coordonnés pour un ensemble constitué d’une plate-forme mobile à roues et d’un bras manipulateur. Thèse, Laboratoire d’Analyse et d’Architecture des Systèmes, 1998.
- [26] Yoshikawa, T., *Foundations of Robotics: Analysis and control*. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts.1990.
- [27] BAYLE B., FOURQUET J.-Y., RENAUD M., Generalized Path Generation for a Mobile Manipulator , MDP VII, , p. 57–66. Le Caire, Egypte, février 2000.
- [28] Furuno, S., Yamamoto, M., et Mohri, A. Trajectory planning of mobile manipulator with stability considerations. Dans *IEEE Conf. on Robotics and Automation (ICRA)*, pages 3403– 3408, Taiwan,2003.
- [29] Tchon, K. et Muszynski, R. Instantaneous kinematics and dexterity of mobile manipulators . Dans *IEEE Conf. on Robotics and Automation (ICRA)*, volume 3, pages 2493–2498, San Francisco ,2000.
- [30] Y. Yamamoto and X. Yun. Effect of the dynamic interaction on coordinated control of mobile manipulators. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 12(5):816–824, 1996.
- [31] Yoshio Yarnarnoto. Coordinated Control of a Mobile Manipulator. GRASP Laboratory Department of Mechanical Engineering and Applied Mechanics School of Engineering and Applied Science University of Pennsylvania, march 3, 1994.
- [32] Becker, William, et al. A control architecture for a mobile heavy-lift precision manipulator with limited sensory information. *Robotica*, vol. 25, no. 2, mars 2007, pp. 221–235. DOI:10.1017/S0263574707003335.
- [33] S. Lin and A. Goldenberg, Neural-network control of mobile manipulators, *Neural Networks*, *IEEE Transactions on*, vol. 12, no. 5, pp. 1121–1133, Sep 2001.
- [34] F. F. A. Silva et B. V. Adorno, Whole-body Control of a Mobile Manipulator Using Feedback Linearization and Dual Quaternion Algebra . *J. Intell. Robot. Syst.*, oct. 2017.
- [35] Wang, X., Yu, C., Unit dual quaternion-based feedback linearization tracking problem for attitude and position dynamics. *Syst. Control Lett.* 62(3), 225–233 , 2013.
- [36] Kussaba, H.T.M., Figueredo, L.F.C., Ishihara, J.Y., Adorno, B.V., Hybrid kinematic control for rigid body pose stabilization using dual quaternions. *J. Franklin Inst.* 354(7), 2769–2787 .2017.

- [37] B. Siciliano, O. Khatib, Éd., Springer handbook of robotics. Springer, 2008.
- [38] J.J.E. Slotine, J.K. Hedrick, and E.A. Misawa. Nonlinear state estimation using sliding observers. In Proc. of 25th IEEE Conf. on Dec. and Cont., pages 332- 339, Greece.1986.
- [39] W.Khalil, E. Dombre, Modélisation, Identification et Commande des robots, Hermès 2002.
- [40] Wisama KHALIL Bases de la modélisation et des robots de la robots-manipulateurs de type série commande, Etienne DOMBRE. 2012.
- [41] Mark W. Spong, Seth Hutchinson, and M. Vidyasagar. Robot dynamics and control Second Edition. 2020.
- [42] Siciliano, Bruno, Sciavicco, Lorenzo, Villani, Luigi, et al. Robotics: modelling, planning and control. London : Springer London, 2009.
- [43] Rached Dhaouadi and Ahmad Abu Hatab , Dynamic Modelling of Differential- Drive Mobile Robots using Lagrange and Newton-Euler Methodologies: A Unified Framework , Adv Robot Autom 2: 107. 2013.
- [44] OMID MOHARERI Mobile Robot Trajectory Traking Using Neural Networks, Master Thesis, faculty of the American University of Sharjah College of Engineering. December 2009.
- [45] S. G. Tzafestas, Introduction to mobile robot control, First edition. Amsterdam: Elsevier, 2014.
- [46] Z. Li, Fundamentals in Modeling and Control of Mobile Manipulators. Taylor & Francis Group, 2017.
- [47] T. Lee, Robust adaptive attitude tracking on SO (3) with an application to a quadrotor uav , IEEE Transactions on Control Systems Technology, vol. 21, no. 5, pp. 1924–1930, 2013.
- [48] Y.-H. Liu and S. Arimoto, Decentralized Adaptive and Non-adaptive Position/Force Controllers for Redundant Manipulators in Cooperation, The International Journal of Robotics Research, vol. 17, no. 3, pp. 232–247, Mar 1998.
- [49] J Wen, D Bayard Nouvelle classe de lois de contrôle pour les manipulateurs robotiques. partie 1. cas non adaptatif. Int J Control 47: 1361-1385. 1998.
- [50] Y. Yamamoto and X. Yun, Unified analysis on mobility and manipulability of mobile manipulators, in Robotics and Automation, 1999. Proceedings. 1999 IEEE International Conference on, pp. 1200–1206 , vol. 2, 1999.
- [51] Yoshikawa, T., Manipulability of Robotic Mechanisms. The International Journal of Robotics Research, 4(2), 3–9. 1985.
- [52] Papadopoulos, Evangelos, et Ioannis Poulakakis. Planning and model-based control for mobile manipulators . Dans Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, 1810–15. DOI:10.1109/iros.2000.895234. 2000.
- [53] M. D Ngo, N. T. Phuong, V. H. Duy and H. K. a. S. B. Kim. Control of two Wheeled Welding Mobile Manipulator. International Journal of Advanced Robotic Systems, vol. 4 n°3, pp. 293-302, 2007.
- [54] Ortega, R., Loria, A., Nicklasson, P.J., Sira-Ramirez, H.: Passivity-Based Control of Euler- Lagrange Systems: Mechanical, Electrical and Electromechanical Applications, 2nd edn. Communications and Control Engineering Series. Springer, London, 2010.
- [55] H. Berghuis, H. Nijmeijer, A passivity approach to controller–observer design for robots, IEEE Trans. Robotics Autom. 9, 740–754 ,1993.
- [56] R. Lozano, C. Canudas de Wit: Passivity based adaptive control for mechanical manipulators using LS type estimation, IEEE Trans. Autom. Control 35(12), 1363–1365 ,1990.
- [57] D.S. Bayard and J.T.Wen. Simple robust control laws for robotic manipulators, Part II : Adaptive case. In JPL/NASA Telerobotics Workshop, January 1987.

- [58] M. Boukattaya, T. Damak, M. Jallouli, Robust adaptive control for mobile manipulators, *International Journal of Automation and Computing* p 8–13. 2011.
- [59] J Peng, J Yu, J Wang Robust adaptive tracking control for nonholonomic mobile manipulator with uncertainties. *ISA Transactions* 53: 1035-1043. 2014.
- [60] J.T.Wen and K.Kreutz. Stability analysis of multiple rigid robot manipulators holding a common rigid object. In *Proc. 27th IEEE Conf. Decision and Control*, Austin, TX, 1988.
- [61] Hamner, B., Koterba, S., Simmons, J.S., Singh, S. An autonomous mobile manipulator for assembly tasks. *Auton. Robot*, 28, 131–149. 2010.
- [62] Tchon, K., Jakubiak, J. Endogenous configuration space approach to mobile manipulators: A derivation and performance assessment of Jacobian inverse kinematics algorithms. *Int. J. Control*, 76, 1387–1419, 2010.
- [63] Su, H., Qi, W., Yang, C., Aliverti, A., Ferrigno, G., de Momi, E. Deep Neural Network Approach in Human-Like Redundancy Optimization for Anthropomorphic Manipulators., 7, 124207–124216. *IEEE Access* 2019.
- [64] Prada-Jiménez, V., Niño-Suaréz, P.A.; Portilla-Flores, E.A., Mauledoux-Monroy, M.F. Tuning a PD+ Controller by Means of Dynamic Optimization in a Mobile Manipulator with Coupled Dynamics, 7, 124712–124726. . *IEEE Access* 2019.
- [65] Z. Li and S. S. Ge, *Fundamentals in Modeling and Control of Mobile Manipulators*, vol. 49: CRC Press, 2013.
- [66] D. J. Lee and M. W. Spong. Passive bilateral teleportation with constant time delay. *IEEE Transactions on Robotics*, 22(2):269–281, 2006.
- [67] M. Arcak. Passivity as a design tool for group coordination. In *Proceeding of the American Control Conference*, pages 29–23, 2006.
- [68] E. Papadopoulos, J. Poulakakis, Planning and model based control for mobile manipulators, in *Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pp. 1810–1815, October 2000.
- [69] Ortega, R., Loria, A., Nicklasson, P. J. and Sira-Ramírez H. *Passivity-based Control of Euler Lagrange Systems*. Springer, New York, USA. 1998..
- [70] Berghuis, H., Nijmeijer, H. Global regulation of robots using only position measurements. *Systems and control letters*, 21(21), 289-295. 1993.
- [71] Slotine, J.-J.E., Li, W., On the adaptive control of robot manipulators. *Int. J. Robot. Res.* 6, 49–59, 1987.
- [72] G. Zames. On the input-output stability of time-varying nonlinear feedback systems part one: Conditions derived using concepts of loop gain, conicity, and positivity. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 11:228–238, 1966.
- [73] Spong, M.W., Hutchinson, S., Vidyasagar, M.: *Robot Modeling and Control*. Wiley, New York, 2005.
- [74] Mustafa, M., *Modeling and Dynamique Control of Autonomous Ground Mobile Manipulateur*. University of Calgary, Calgary, AB. doctoral thesis . Doi:10.11575/PRISM/26936, 2016.

**Résumé :** Cette thèse traite des difficultés liées à la modélisation et à la commande des robots manipulateurs mobiles (BMMs). Les BMMs sont des exemples typiques de systèmes non linéaires avec des contraintes non-holonomes et une dynamique fortement couplée. Deux approches de commande sont explorées : l'une basée sur la linéarisation par rétroaction, l'autre sur le concept de passivité. La première approche assure la stabilité du système en appliquant la technique de linéarisation par rétroaction. Elle permet de contrôler la plate-forme mobile de manière à positionner l'organe terminal du manipulateur à une position prédéfinie. Ce contrôle s'appuie sur les mesures des positions articulaires du manipulateur pour planifier le mouvement de la plate-forme. La deuxième approche, fondée sur le concept de passivité, améliore les performances tout en accomplissant les mêmes objectifs que la première. Elle est conçue pour garantir la robustesse du système face à des perturbations externes. En exploitant les particularités de la modélisation des BMMs, une loi de commande globale est proposée, considérant le BMM comme un système unique. Cette méthode intègre une fonction de régression fortement non linéaire afin de gérer les incertitudes et les contraintes de modélisation. Elle garantit un suivi précis de la position, réduit les erreurs asymptotiques à zéro et assure un fonctionnement robuste en présence de perturbations. Le processus de contrôle repose sur des règles d'adaptation des paramètres incertains, permettant de compenser efficacement les effets des perturbations. La stabilité du système est démontrée à l'aide de la théorie de Lyapunov. Comparés aux algorithmes classiques de contrôle par rétroaction, les contrôleurs développés sont appliqués à un manipulateur mobile constitué d'un robot manipulateur à deux degrés de liberté monté sur une plate-forme mobile.

**Mots-clés :** manipulateur mobile, contrôle passif, contrôle par linéarisation de retour, stabilité, haute précision.

**Abstract:** This thesis addresses the challenges related to the modeling and control of mobile manipulator robots (MMRs). MMRs are typical examples of nonlinear systems with non-holonomic constraints and strongly coupled dynamics. Two control approaches are explored: one based on feedback linearization, and the other based on the concept of passivity. The first approach ensures system stability by applying the feedback linearization technique. It allows for the control of the mobile platform to position the manipulator's end effector at a predefined position. This control relies on joint position measurements of the manipulator to plan the movement of the platform. The second approach, based on the concept of passivity, improves performance while achieving the same objectives as the first. It is designed to ensure system robustness in the face of external disturbances. By exploiting the particularities of MMR modeling, a global control law is proposed, considering the MMR as a single system. This method incorporates a highly nonlinear regression function to manage uncertainties and modeling constraints. It guarantees accurate position tracking, reduces asymptotic errors to zero, and ensures robust operation in the presence of disturbances. The control process relies on adaptation rules for uncertain parameters, enabling effective compensation for the effects of disturbances. System stability is demonstrated using Lyapunov's theory. Compared to classical feedback control algorithms, the developed controllers are applied to a mobile manipulator consisting of a two-degree-of-freedom robotic arm mounted on a mobile platform.

**Keywords:** mobile manipulator, passive control, feedback linearization control, stability, high accuracy.

**ملخص:** تتناول هذه الأطروحة الصعوبات المتعلقة النمذجة والتحكم في الروبوتات المتنقلة المزودة بذراع (BMMs) والتي تُعد أنظمة غير خطية تتميز بقيود لا هولونومية وديناميكية مترابطة. حيث تم استعمال نهجين للتحكم: الأول يعتمد على التخطينة العكسية لضمان استقرار النظام من خلال وضع الطرف النهائي لذراع بدقة بناءً على قياسات مواضع مفاصل الذراع. النهج الثاني يعتمد على مفهوم الخمول حيث تم اقتراح قانون تحكم شامل يعامل الروبوت كمجموعة واحدة متكاملة لتحسين الأداء وضمان متانة النظام في مواجهة الاضطرابات الخارجية حيث تم توضيف دالة ارتداد غير خطية لإدارة الشوك وقبوض النمذجة. يضمن هذا النهج تتبعاً دقيقاً للموضع، تقليل الأخطاء إلى الصفر، بالإضافة إلى تحقيق متانة التشغيل حتى مع وجود اضطرابات. يعتمد التحكم على قواعد لتكييف المعلمات غير المؤكدة، مما يسمح بالتعويض عن تأثير الاضطرابات بفعالية. كما تم إثبات استقرار النظام باستخدام نظرية "ليابونوف". حيث تم تطبيق الأنظمة المطورة على ذراع بدرجتي حرية مثبت على منصة متنقلة، الذي أبان عن أداء متفوق مقارنة بالأنظمة التقليدية للتحكم العكسي.

**كلمات المفتاحية :** ذراع متحرك، التحكم السلبي، التحكم بواسطة خطي العودة، الاستقرار، دقة عالية