

**RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE**  
**MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR**  
**ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**UNIVERSITE ABDERRAHMANE MIRA BEJAIA**  
**FACULTÉ DE TECHNOLOGIE**  
**DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE**

MEMOIRE

PRÉSENTÉ POUR L'OBTENTION DU DIPLÔME DE

**MASTER**

FILIÈRE : GÉNIE MÉCANIQUE

SPÉCIALITÉ : ENERGÉTIQUE

PAR :

**SAHBI Mohand Ouidir**

**IMATOUKEN Salah**

Thème

---

**Etude d'un jet de nanofluide sur une  
plaque déformable avec glissement**

---

Soutenu le 21/06/ 2017 devant le jury composé de:

Mr F. NAIT BOUDA

Président

Mr F. MENDIL

Rapporteur

Mr N. BOUTALBI

Examineur

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2016-2017

# Remerciements

*Que Monsieur MENDIL Fatsah trouve notre profond reconnaissance et gratitude d'avoir proposé et accepté de diriger ce travail de Master. On tient à le remercier vivement de ses conseils, de son soutien, de sa patience et ses encouragements pour mener ce travail à bien.*

*Mes vifs remerciements s'adressent à Monsieur F. NAIT BOUDA, Professeur à l'université de Bejaia, d'avoir accepté la présidence du jury. Mes remerciements s'adressent également*

*aux membres de jury pour l'honneur*

*qu'ils m'ont fait d'accepter de participer au jury:*

*Monsieur N. BOUTALBI, Professeur à l'université Bejaia,*

*On remercient toutes les personnes qui de près ou de loin nous ont aidé par leur présence*

*et leurs soutiens dans ce travail.*

*On adressent également, nous remercions à nos camarades et enseignants du département de*

*génie mécanique.*

*A tous Merci.....*

# Dédicaces

À Ma famille, en particulier ma chère mère, mon chère père qui ma quitté sa fait deux ans de

la et qui a voulu assisté a ce jour et que je lui rends hommage a l'occasion avec ce modeste

travaille, mon grand frère et ma sœur et leurs petites familles, mes frères et sœurs et j'espère

qu'ils trouveront dans ce travail toute ma reconnaissance et tout mon amour.

A tous mes amis(es) et camarades sans exception.

M.SAHBI

# Dédicaces

À Ma famille, en particulier ma chère mère, mon chère père, et à tout mes frères et sœurs on  
particulier mon grand frère Mohand Arezki qui ma donné beaucoup d'aide dans tout les  
cotés, sans oublié mes grandes sœur et leurs petites familles, j'espère qu'ils trouveront dans  
ce travail toute ma reconnaissance et tout mon amour.

A tous mes amis(es) et camarades sans exception.

S. IMATOUKEN

*« Il faut viser la lune, parce qu'au moins, si vous échouez, vous finirez dans les étoiles. »*

Oscar Wilde

SOMMAIRE

NOMENCLATURE

LISTE DES FIGURES

LISTE DES TABLEAUX

INTRODUCTION GENERALE..... 1

### **Chapitre I : Généralités et revue bibliographique**

I.1 Généralités sur les nanofluides ..... 3

II.2 Préparation des nanofluides..... 3

I.3. Configuration d'un jet impactant ..... 5

I.4 Définition de la couche limite ..... 6

I.5 Le transfert de chaleur..... 6

I.6 Approximation de Boussinesq ..... 7

I.7 Art et revue bibliographique ..... 7

I.7.1 Intérêt de l'écoulement de stagnation ..... 7

I.7.2 Ecoulement de Hiemenz..... 7

I.7.3 Ecoulement sur une plaque déformable par étirement/rétrécissement ..... 8

I.7.3.1 Cas d'un fluide conventionnel..... 8

I.7.3.2 Cas d'un nanofluide ..... 12

Conclusion..... 15

### **Chapitre II : Théorie sur la couche limite**

II.1 Définition de la couche limite..... 16

II.2 Mise en évidence de l'existence de la couche limite ..... 16

II.3 Equation générales (Navier-Stokes) ..... 17

II.4 Etude de la couche limite dynamique ..... 18

II.4.1 Hypothèses ..... 18

II.4.2 Equation de la couche limite dynamique..... 18

II.4.3 Condition aux limites ..... 19

II.4.4 Evaluation de l'ordre de grandeur de chaque terme des équations ..... 19

II.4.5 Equation dynamique sous forme adimensionnel..... 22

II.5 Etude de la couche limite thermique ..... 25

II.5.1 Définition ..... 25

II.5.2 Hypothèses ..... 26

II.5.3 Equation de la couche limite thermique .....	26
II.5.4 Conditions aux limites.....	26
II.5.5 Equation thermique sous forme adimensionnel .....	27
II.5.6 Condition aux limites .....	28

### **Chapitre III : Positionnement de problème et formulation mathématique**

III.1 Introduction .....	29
III.2 Définition du problème physique .....	29
III.3 Les hypothèses simplificatrices.....	30
III.4 Formulation mathématique .....	30
III.4.1 Equations de conservation .....	30
III.4.2 Condition aux limites.....	31
III.4.3 Formulation adimensionnelle.....	31
III.4 Propriétés thermo physiques des nanofluides .....	33
III.4.1 La densité.....	34
III.4.2 La capacité calorifique .....	34
III.4.3 Le coefficient d'expansion thermique .....	34
III.4.4 La viscosité des nanofluides .....	34
III.4.5 La conductivité thermique des nanofluides .....	35
Conclusion.....	36

### **Chapitre IV : Méthodes de résolution**

IV.1 Introduction .....	37
IV.2 Méthode d'Euler .....	37
IV.3 Méthode de Runge-Kutta .....	38
IV.3.1 Méthode de Runge-Kutta d'ordre N .....	38
IV.3.2 Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 .....	39
IV.4 Méthode de Tirs .....	40
IV.5 Algorithme de résolution .....	42
Conclusion.....	44

### **Chapitre V : Résultats et interprétation**

V.1 Introduction .....	45
V.2 Formulation des équations du problème posé .....	46
V.3 Validations des résultats .....	46
V.4 Caractéristique dynamique .....	47

V.5 Coefficient de frottement.....	52
V.6 Effet des nanoparticules sur le transfert de chaleur.....	54
V.7 Caractéristique thermique.....	55
Conclusion.....	61
<b>Conclusion générale</b> .....	62
Référence bibliographiqu .....	63

## Nomenclature

SYMBOLES	SIGNIFICATION	UNITE (SI)
$C_f$	Coefficient de frottement à la paroi	
$f$	Fonction de la variable similaire	
$F$	Fonction intégrale de $f$	
$g$	Fonction introduite $g = f'$	
$\vec{g}$	Accélération de la pesanteur	$m/s^2$
$J_1$ et $J_2$	Nombres adimensionnels	
$l$	Longueur caractéristique	$m$
$m$	Paramètres égale à $\beta^*/(2 - \beta^*)$	
$p$	Pression de fluide	$Pa$
$T_w$	Température à la paroi	$K$
$T_\infty$	Température de fluide	$K$
$t$	Temps	$s$
$(u, v, w)$	Composantes de la vitesse	$m/s$
$U_\infty$	Vitesse de l'écoulement extérieur de la couche limite	$m/s$

$V$	Vitesse transversale caractéristique	$m/s$
$V_e$	Vitesse au voisinage de point de stagnation	$m/s$
$u_w$	Vitesse d'étirement/rétrécissement de la surface	$m/s$
$(a, b, c)$	Constantes réelles	
$(x, y, z)$	Coordonnées cartésiennes	
$C_p$	Chaleur spécifique	$J.kg^{-1}.K^{-1}$
$c/a$	Rapport d'étirement/rétrécissement	

SYMBOLES GRECS	SIGNIFICATION	UNITE (SI)
$\alpha$	Diffusivité thermique	$m^2/s$
$\beta$	Coefficient d'expansion thermique à pression constante	$K^{-1}$
$\beta^*$	Paramètre lié à l'angle entre les parois du dièdre	
$\delta$	Epaisseur de la couche limite	$m$
$\varepsilon$	Nombre réel infiniment petit	
$\eta$	Variable de similitude	
$\theta$	Température adimensionnelle	
$\lambda$	Conductivité thermique	$W/(m.K)$

$\mu$	Viscosité dynamique	$kg/(m.s)$
$\nu$	Viscosité cinématique	$m^2/s$
$\rho_f$	Masse volumique de fluide	$kg/m^3$
$\rho_{nf}$	Masse volumique des nanofluides	$kg/m^3$
$\rho_{np}$	Masse volumique des nanoparticules	$kg/m^3$
$\tau_w$	Contrainte pariétale	Pa ( $N/mm^2$ )
$\varphi$	Fraction volumique	
$\sigma$	Coefficient de glissement	

### NOMBRES SANS DIMENSIONS

$Nu$	Nombre de Nusselt	$Nu = h.l/\lambda$
$Pr$	Nombre de Prandtl	$Pr = \nu/\alpha$
$Re$	Nombre de Reynolds	$Re = U_\infty.l/\nu$

INDICES	SIGNIFICATION
'	Dérivation
$\infty$	Condition à l'infini amont

$w$	Condition à la paroi
$c$	Valeur critique
$f$	Fluide
$nf$	Nanofluides
$np$	nanoparticules

---

**LISTE DES FIGURES**

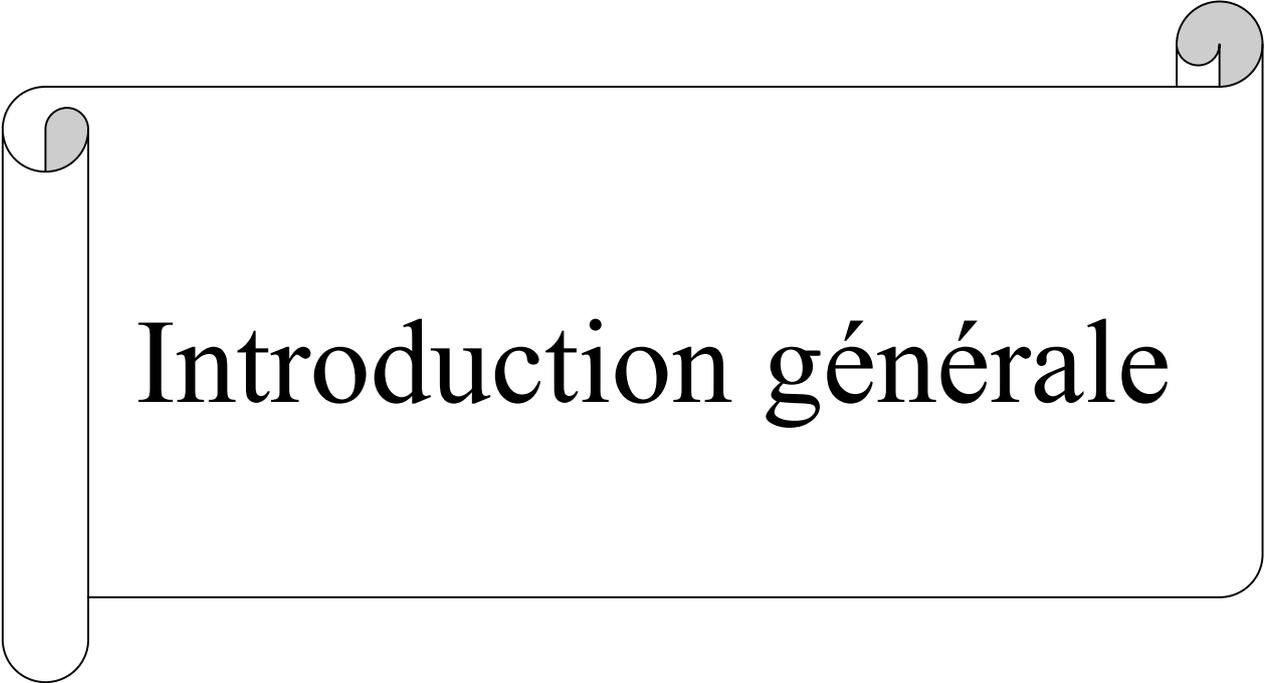
Figure I.1 Structure d'un jet impactant sur une paroi plane [5].	5
Figure I.2 Représentation de stagnation ou point d'arrêt (solution de Hiemenz) [9].	8
Figure I.3 Variation de la vitesse longitudinale pour deux valeurs du rapport des vitesses[14].	9
Figure I.4 Coefficient de frottement en fonction de paramètre (A) aspiration (B) soufflage[16].	10
Figure I.5 Coefficient de frottement pour différentes valeurs du paramètre de glissement[17].	11
Figure I.6 Gradient de température à la surface pour différentes valeurs du paramètre de glissement[17].	11
Figure I.7 Coefficient de frottement en fonction de taux d'étirement/rétrécissement[18].	12
Figure I.8 Coefficient de frottement en fonction de la fraction volumique pour trois types de nanofluides[23].	13
Figure I.9 Nusselt local en fonction de la fraction volumique pour trois types de nanofluides[23].	13
Figure I.10 Effet de fraction volumique sur le profil de vitesse[24].	14
Figure I.11 Effet de fraction volumique sur le profil de température[24].	15
Figure II.1 Représentation schématique des couches limites dynamique et thermique se développant sur une plaque plane.	16
Figure II.2 Représentation d'une couche limite dynamique.	18
Figure II.3 Représentation d'une couche limite thermique.	26
Figure III.1 Schémas du problème physique.	29
Figure IV.1 Organigramme général de résolution (Méthode de Tir).	43
Figure V. 1 Coefficient de frottement en fonction de $b$	47
Figure V. 2 Effet de la fraction volumique sur le profil de $f$ .	48
Figure V. 3 Effet de coefficient de glissement sur le profil de $f$ .	48
Figure V. 4 Effet de rapport d'étirement/rétrécissement sur le profil de $f$ .	49
Figure V. 5 Le profil de vitesse $f'$ en fonction de la variable adimensionnel $\eta$ pour un fluide conventionel (eau).	49
Figure V. 6 Effet de la fraction volumique sur le profil de vitesse.	50
Figure V. 7 Effet de coefficient de glissement sur le profil de vitesse.	50
Figure V. 8 Effet de rapport d'étirement/rétrécissement sur le profil de vitesse.	51
Figure V. 9 Coefficient de frottement pour différentes valeurs de glissement.	52

---

Figure V. 10 Gradients de température à la surface pour différentes valeurs du paramètre de glissement.....	53
Figure V.11 Nusselt locale en fonction de la fraction volumique pour quatre types de nanoparticules.....	54
Figure V.12 Coefficient de frottement en fonction de la fraction volumique pour quatre types de nanofluides. ....	54
Figure V.13 Profile de température en fonction de la variable adimensionnel $\eta$ .....	56
Figure V. 14 Effet la fraction volumique sur le profil de température.....	56
Figure V. 15 Effet de glissement sur le profil de température. ....	57
Figure V.16 Effet de rapport d'étirement/rétrécissement sur le profil de température. ....	58
Figure V. 17 Le profile de $\theta'$ en fonction de la fraction volumique. ....	59
Figure V. 18 Le profile de $\theta'$ en fonction de coefficient de glissement. ....	59
Figure V. 19 Le profile de $\theta'$ en fonction de rapport d'étirement/ rétrécissement. ....	60
Figure V. 20 Le profile de vitesse en fonction de la vitesse adimensionnelle pour quatre types de nanoparticules.....	60
Figure V. 21 Le profile de température en fonction de la variable adimensionnel $\eta$ pour quatre types de nanoparticules. ....	61

**LISTE DES TABLEAUX**

Tableau I. 1 Conductivité thermique de divers fluides de base et matériaux à 20°C[4]..... 4  
Tableau V. 1 Propriétés thermo-physiques du fluide de base et les nanoparticules.....45



# Introduction générale

## INTRODUCTION GENERALE

Les transferts de chaleur constituent la base de nombreux processus industriels qui sont présents dans notre vie quotidienne. L'intensification de ces échanges et l'amélioration du rendement sont devenus aujourd'hui une problématique majeure dans le monde industriel, des organismes de réglementation, mais aussi de la société dans son ensemble, qui prend conscience de l'épuisement progressif des ressources énergétiques et qui se soucie de l'avenir en matière énergétique.

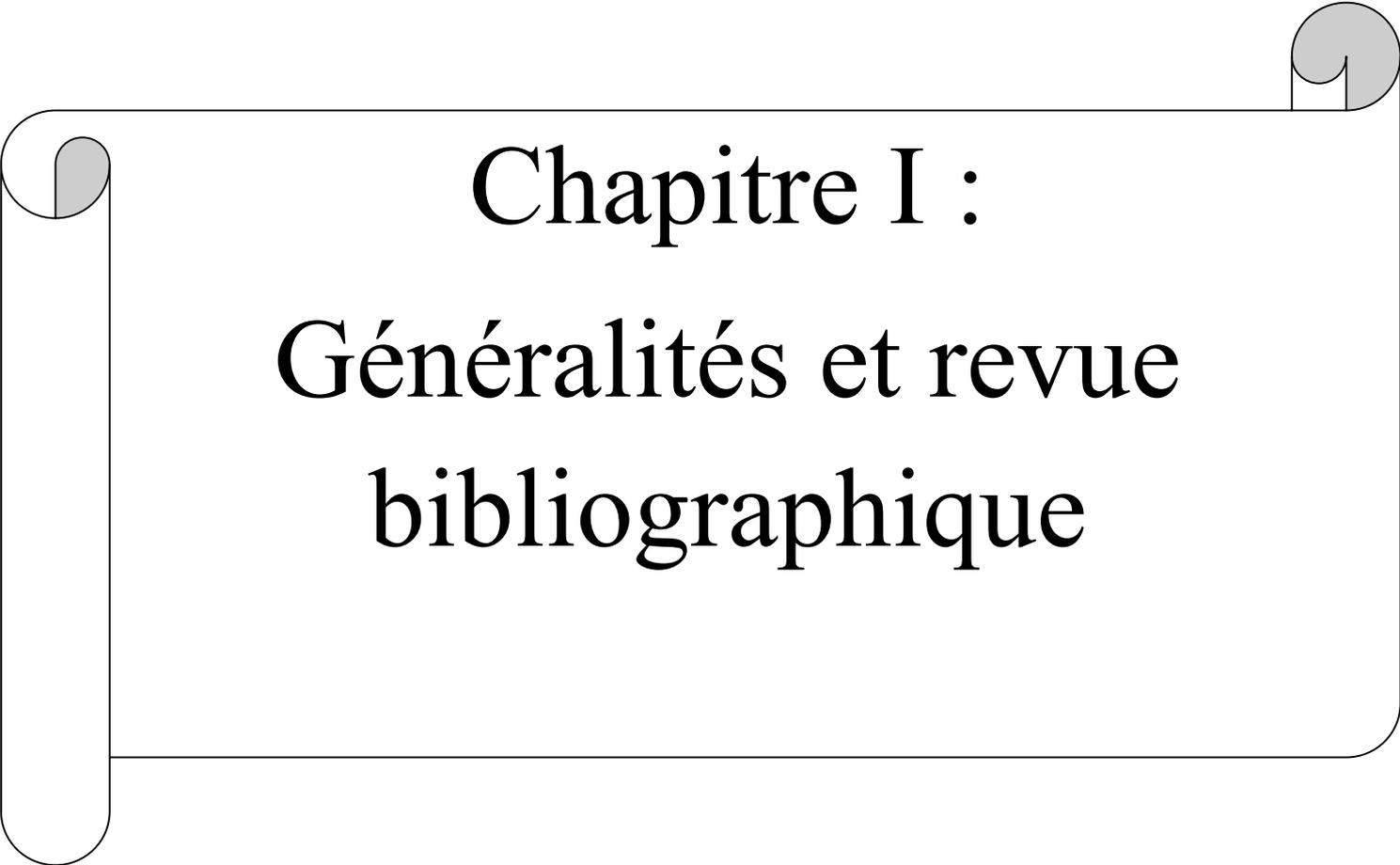
Face à ces enjeux énergétiques et environnementaux, le défi technologique réside dans le développement de nouveaux processus pour une meilleure gestion de l'énergie. Ce travail consiste à l'étude de l'introduction des nanoparticules dans des fluides de base afin d'améliorer les problèmes liés aux systèmes de refroidissement.

Il existe une réelle demande dans le monde industriel pour développer de nouvelles stratégies permettant d'améliorer le comportement thermique des fluides utilisés dans les systèmes de refroidissement. Des progrès importants en chimie ont permis dès la fin des années 90 de synthétiser des particules de taille nanométrique, qui sont dispersées dans le liquide porteur. Leurs synthèses répondent au besoin d'améliorer les propriétés thermiques en y insérant une phase solide de conductivité thermique très élevée. Choi et ses collègues furent les premiers à introduire le concept de nanofluide en 1995 au laboratoire National d'Argonne de l'université de Chicago [1]. Même si le concept de nanofluide est en apparence simple, il apparaît au fond d'une grande complexité en raison des mécanismes physiques mis en jeu. De nombreuses recherches ont été menées sur cette nouvelle génération de fluides afin d'apporter une meilleure compréhension de ces mécanismes, et mettre ainsi au point des liquides caloporteurs plus performants.

Les applications potentielles des nanofluides sont multiples et très importantes dans plusieurs domaines (refroidissement électrique, climatisation et froid, aéronautique et spatial,...), et pourraient constituer sous certaines conditions un débouché prometteur des nanosciences dans le domaine de l'énergie.

Ce mémoire comporte cinq chapitres. Le premier chapitre est basé sur des généralités sur les nanofluides et un synthèse bibliographique des différents travaux extérieurs. Dans le

deuxième chapitre la théorie de la couche limite laminaire est développée. Le passage des équations de Navier-Stokes aux équations de couche limite est réalisé. Le but de ce chapitre est d'aboutir aux équations différentielles ordinaires régissant l'écoulement de couche limite avec transfert de chaleur. Le troisième chapitre est consacré à la présentation de problème physique ainsi que les équations mathématique. La méthode numériques fait l'objet du quatrième chapitre, Il s'agit en particulier de la méthode de Runge-Kutta d'ordre quatre largement connue. Cette méthode rigoureuse est bien adaptée à notre cas. En parallèle à cette méthode nous avons utilisé la méthode du tir nécessaire pour faire démarrer la méthode de Runge-Kutta. Le cinquième chapitre est réservé à l'ensemble des résultats obtenus et leur interprétation physique. Une validation des résultats antérieurs est également présentée. Enfin, nous terminerons par une conclusion générale qui résume les principaux résultats obtenus.

A decorative graphic of a scroll with a black outline and grey shading on the rolled-up ends, framing the text.

# Chapitre I :

## Généralités et revue bibliographique

## **I.1 Généralités sur les nanofluides**

Les nanofluides sont des solutions colloïdales composées de particules de taille nanométrique (nanoparticules) en suspension dans un liquide qui s'appelle un liquide de base. La liste des nanoparticules utilisées pour obtenir des nanofluides est très large on peut citer parmi eux [2] :

- l'aluminium, Al et l'oxyde d'aluminium, Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>.
- le cuivre, Cu et l'oxyde de cuivre, CuO.
- l'or, Au.
- l'argent, Ag.
- les nanotubes de carbone.
- le dioxyde de titane, TiO<sub>2</sub>.

Le choix des liquides de base est primordial pour un nanofluide, il permet d'assurer la stabilité de la suspension dans le temps et d'éviter tout phénomène d'agrégaions, la sélection d'un tel fluide se fera en fonction de la nature de nanoparticule, les solvants les plus utilisés sont:

- l'eau.
- l'éthylène glycol, EG.
- les huiles.
- le Toluène.

## **II.2 Préparation des nanofluides**

Les procédés de fabrication de nanoparticules sont nombreux. Ils peuvent être classés en deux catégories:

- Les procédés physiques, comme le broyage mécanique.
- Les procédés chimiques, comme la pyrolyse ou la précipitation chimique.

Par contre pour les nanofluides il existe deux procédés distincts :

**I.2.1 Procédé en une étape (one-step méthode) [3]:**

Consiste à la dispersion des nanoparticules directement dans un fluide de base (synthèse direct dans un fluide de base).

**I.2.2 Procédé en deux étapes (two-step méthode) [3] :**

La première étape consiste à fabriquer les nanoparticules, et dans la seconde étape les nanoparticules sont disperser dans un fluide de base.

**Tableau I. 1** Conductivité thermique de divers fluides de base et matériaux à 20°C[4]

Élément	Conductivité thermique $\lambda$ (W/m.K)
Eau	0.599
50% eau + 50% éthylène glycol	0.41
Éthylène glycol	0.25
Huile de moteur	0.14
Nanotube de carbone	3000-6000
Cuivre (métal pur)	401
Nickel (métal pur)	237
Silicone (non métallique)	148
Alumine ( $Al_2O_3$ )	40

### I.3. Configuration d'un jet impactant

En général, le jet impactant sur une paroi plane peut se décomposer en trois régions essentielles :

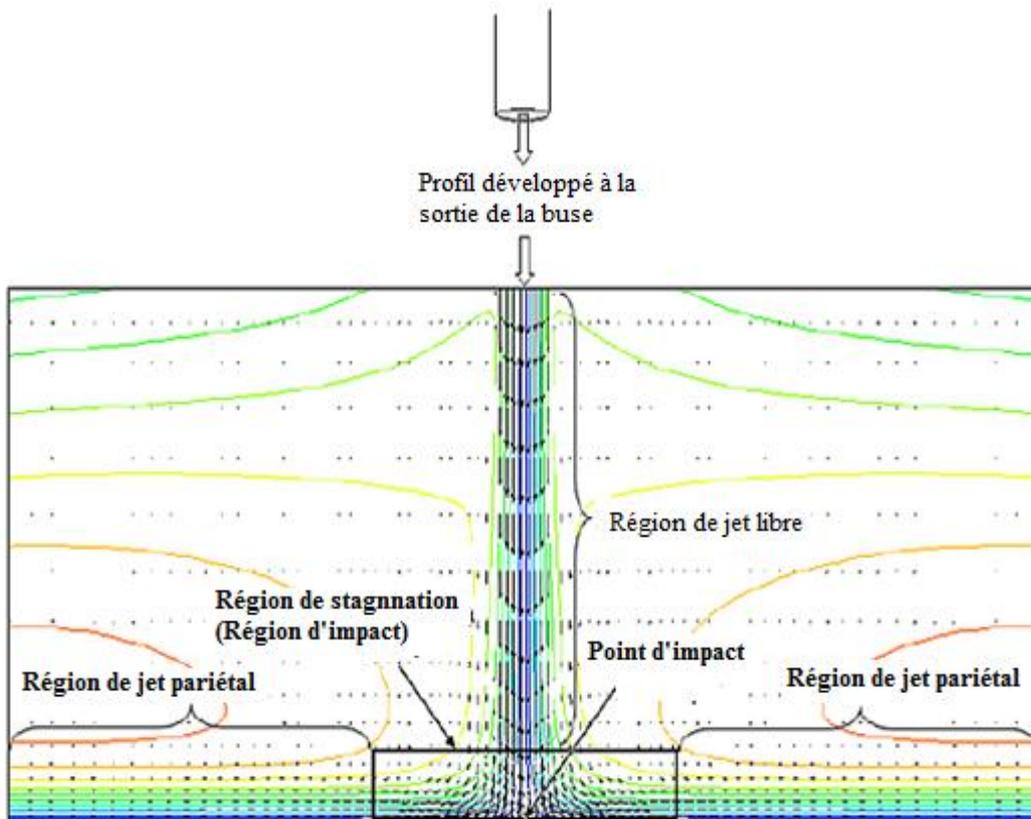


Fig. I.1 Structure d'un jet impactant sur une paroi plane [5].

**I.3.1 Région de jet libre** : cette région est caractérisée par l'écoulement d'un jet rond turbulent, axisymétrique en moyenne. Il est peut atteindre une zone d'écoulement établi ZEF (*Zone of Established Flow*) cette dernière ne peut apparaître que lorsque la distance d'impact est suffisamment grande.

**I.3.2 Région de stagnation (région d'impact)** : cette région est caractérisée principalement par une forte diminution de la composante de vitesse axiale à l'amont du point de stagnation, une élévation importante de la pression au point d'arrêt, et une forte augmentation de la composante de vitesse radiale en aval du point d'impact.

**I.3.3 Région de jet pariétal** : cette région est caractérisée par le développement et l'épaississement d'un jet pariétal, c'est à dire le long de la surface d'impact et dont la vitesse radiale maximale diminue.

## I.4 Définition de la couche limite

La couche limite est une zone d'interface entre un corps et le fluide environnant lors d'un mouvement relatif entre les deux. On y observe les effets de la viscosité. Elle est un élément important en mécanique des fluides.

Lorsqu'un fluide réel s'écoule le long d'une paroi supposée fixe, les vitesses sur la paroi sont nulles et à l'infini, loin de l'obstacle, elles sont égales à la vitesse de l'écoulement non perturbé. Sur une normale à la paroi la vitesse doit donc dans tous les cas varier entre 0 et un maximum. La loi de variation dépend de la viscosité du fluide qui induit un frottement entre les couches voisines : la couche la plus lente tend à freiner la couche la plus rapide qui, en retour, tend à l'accélérer.

## I.5 Le transfert de chaleur

Un transfert thermique, appelé plus communément chaleur, est un échange d'énergie thermique. Cela correspond à un transfert d'énergie macroscopique désordonnée. Les trois modes de transfert thermique fondamentaux sont la conduction, la convection et le rayonnement. Il est possible d'avoir un transfert thermique par plus d'un mode.

De façon spontanée, la direction du transfert thermique se fait depuis la région de plus haute température vers celle de plus faible température. Le transfert thermique s'arrête quand il y a équilibre thermique

### I.5.1 La conduction

La conduction thermique (ou diffusion thermique) est un mode de transfert thermique provoqué par une différence de température entre deux régions d'un même milieu, ou entre deux milieux en contact, et se réalisant sans déplacement global de matière (à l'échelle macroscopique) par opposition à la convection qui est un autre transfert thermique.

$$\vec{\varphi} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}(T)$$

### I.5.2 La convection

La convection désigne l'ensemble des mouvements internes (verticaux ou horizontaux) qui animent un fluide et qui impliquent le transport des propriétés des parcelles de ce fluide au cours de son déplacement. Ce transfert implique l'échange de chaleur entre une surface et un

fluide mobile à son contact, ou le déplacement de chaleur au sein d'un fluide par le mouvement d'ensemble de ses molécules d'un point à un autre.

$$\varphi = hs\Delta T$$

## **I.6 Approximation de Boussinesq**

En 1903, à l'époque même où Rayleigh s'intéresse à la convection, Boussinesq propose une simplification des équations de Navier-Stokes et d'énergie de façon à ne conserver que les ingrédients nécessaires et suffisants à la convection thermique. Les hypothèses de Boussinesq consistent à supposer que les différentes propriétés thermodynamiques et de transport du fluide sont indépendantes de la pression. Elles supposent aussi que le fluide est incompressible mais il conserve bien entendu le terme de poussée d'Archimède, directement lié à la dilatation ou à la contraction thermique du fluide. L'hypothèse essentielle de Boussinesq est : la masse volumique ( $\rho$ ) est constante sauf dans le terme de poussée d'Archimède.

## **I.7 Art et revue bibliographique**

### **I.7.1 Intérêt de l'écoulement de stagnation**

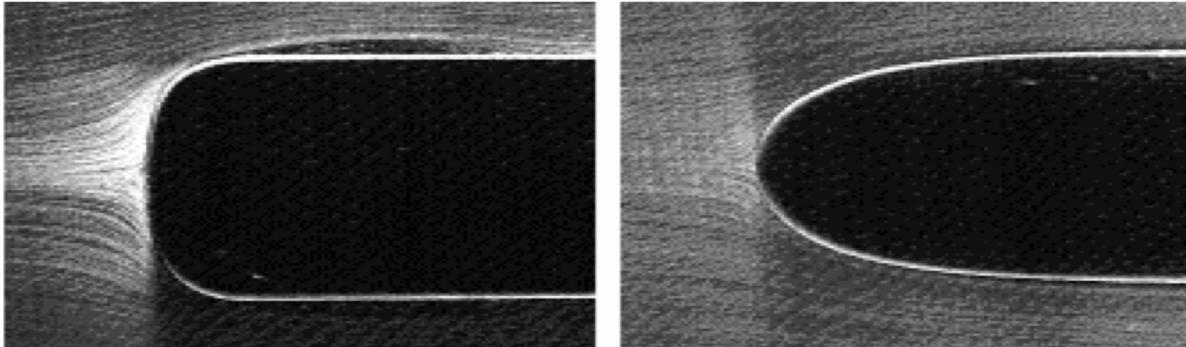
L'écoulement de couche limite de stagnation avec transfert de chaleur est largement répondu dans beaucoup d'applications qui sont le siège d'écoulements en présence de fluide impactant sur des obstacles solides chauffés. On le retrouve dans différents processus industriels (dégivrage de bord d'attaque des ailes, refroidissement des aubes des turbines et des composants électroniques...) car il permet des taux élevés d'échange de chaleur et de masse.

Il convient de mettre le point sur la particularité et l'intérêt de l'écoulement de stagnation convectif. En effet, dans ce type de situation les flux thermiques échangés sont nettement plus élevés au voisinage du point de stagnation. Ce qui s'explique par l'existence d'une importante composante de vitesse normale à la paroi qui empêcherait le développement des couches limites. Le transfert de chaleur sera ainsi favorisé puisque celui-ci est inversement proportionnel à l'épaisseur de la couche limite.

### **I.7.2 Écoulement de Hiemenz**

Hiemenz est le premier qui a étudié l'écoulement au voisinage de point de stagnation [6], il a simplifié les équations de Navier-Stokes gouvernant l'écoulement en une seule équation différentielle ordinaire de 3<sup>ème</sup> ordre, cet écoulement est semblable à l'écoulement

non visqueux, en supposant que suffisamment loin de la paroi. Des solutions analogues ont été menées afin d'étendre la solution de Hiemenz, Eckert [7] a étendu le problème de Hiemenz par l'étude d'un écoulement sur une plaque chauffée, après Homan [8] a étudié un écoulement axisymétrique tridimensionnel orthogonal impactant sur un disque et avait retrouvé des solutions analogues à celles de Hiemenz.



**Fig. I.2** Représentation de stagnation ou point d'arrêt (solution de Hiemenz) [9].

F. NAIT BOUDA, F. MENDIL, D. SADAOUI [10], se proposent d'examiner les effets de transfert de masse sur l'instabilité thermique d'un écoulement stationnaire de couche limite bidimensionnel au point de stagnation. En outre, ils se sont limités aux forces de flottabilité thermique et de concentration qui sont de signe opposé et de grandeur égale. L'écoulement de base a été obtenu en résolvant les équations de continuité, de quantité de mouvement, d'énergie et de concentration en utilisant une analyse de similarité, qui sont résolues numériquement en utilisant la méthode de Runge-Kutta d'ordre quatre avec la technique de tir. La stabilité de l'écoulement de base est alors étudiée en se servant de la décomposition en modes normaux. Le problème aux valeurs propres résultant est résolu numériquement par la méthode pseudo-spectrale de Laguerre. Il se trouve par le calcul des courbes de stabilité neutre que les effets de concentration stabilisent l'écoulement de base, tandis que le nombre de Lewis stabilise ou déstabilise. L'augmentation du nombre de Lewis augmente la stabilité de l'écoulement de base pour  $Le < 1$ , elle diminue pour  $Le > 1$ . Pour  $Le = 1$ , l'écoulement de base est toujours stable.

### **I.8.3 Ecoulement sur une plaque déformable par étirement/rétrécissement**

#### **Cas d'un fluide conventionnel**

Crane [11] est le premier qui a étudié l'écoulement de couche limite de stagnation sur une surface en étirement linéaire, par contre le concept d'écoulement sur une surface en

rétrécissement été abordé par Wang [12]. Chiam [13] a étudié l'écoulement autour de point de stagnation sur une surface en étirement et conclu que lorsque la vitesse d'étirement de la surface est égale à la vitesse d'écoulement externe, aucune couche limite n'est formée près de la surface. Mahapatra et al [14] ont mené une nouvelle étude sur le problème de l'écoulement au point de stagnation sur une surface pour différents rapports de vitesses d'étirement de la surface et d'écoulement externe (Figure I.3), Ils ont constaté que deux types de couches limites se forment près de la plaque qui s'étend en fonction du rapport des vitesses d'étirement et de l'écoulement externe.

Wang [15] a étudié le problème de l'écoulement de stagnation sur une plaque en rétrécissement et obtient deux solutions pour certaines valeurs du rapport des vitesses de rétrécissement de la surface et de l'écoulement externe.

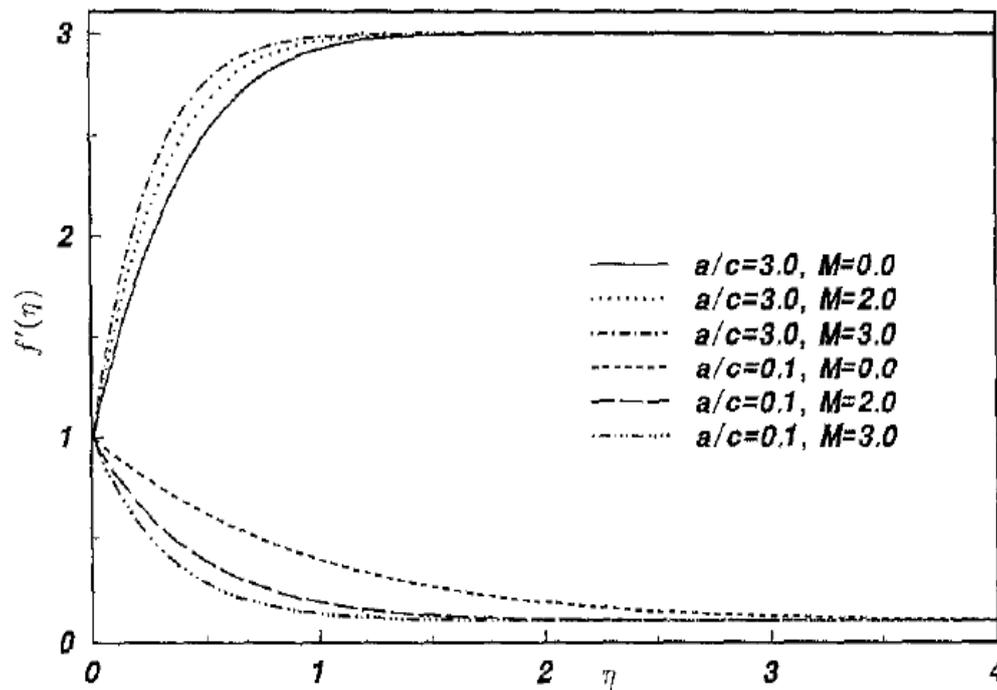


Fig. I.3 Variation de la vitesse longitudinale pour deux valeurs du rapport des vitesses [14].

Bhattacharyya et al [16] ont étudié les effets de l'aspiration/soufflage sur l'écoulement de couche limite au point de stagnation et le transfert thermique sur une paroi en rétrécissement. L'existence des solutions doubles, solution unique et non-existence de la solution pour les équations auto-similaires de l'écoulement et de transfert de chaleur sont

analysées numériquement. Ils ont constaté que la plage de valeur du rapport de vitesse pour laquelle la solution existe augmente avec l'augmentation de la vitesse d'aspiration et diminue avec l'augmentation de la vitesse de soufflage (Figure I.4). L'augmentation de l'aspiration induit une augmentation de température à la paroi pour la première solution, et induit à la diminution de la dernière à la deuxième solution.

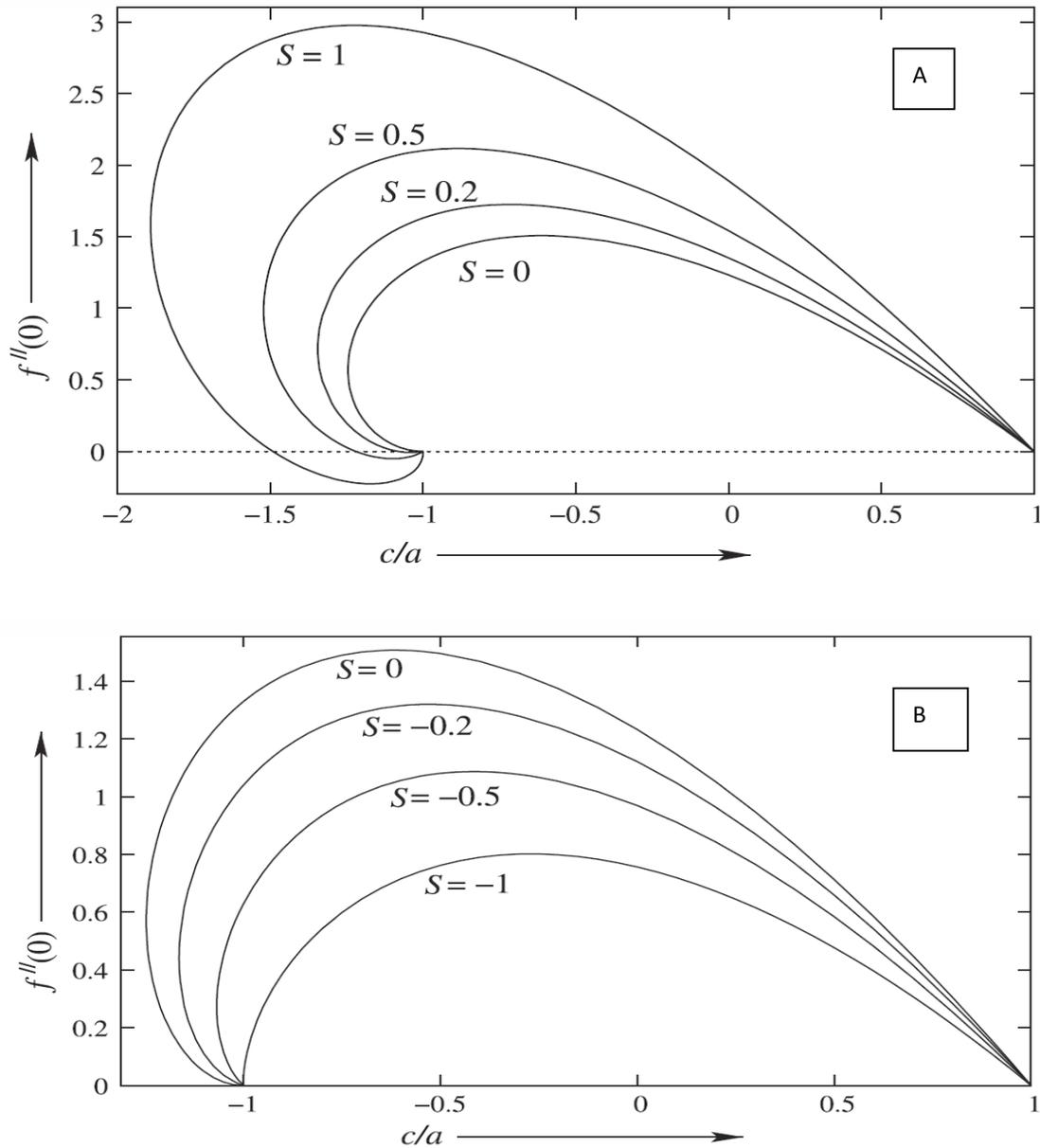


Fig. I.4 Coefficient de frottement en fonction de paramètre (A) aspiration (B) soufflage [16].

L'effet de glissement a été introduit par Bhattacharyya et al [17], leur principal intérêt est porté sur l'exploration des conditions d'existence, de non-existence, d'unicité de double solution auto-similaire. Il se trouve que le glissement augmente le domaine d'existence de doubles solutions (Figure I.5). Cependant, les épaisseurs des couches limites

hydrodynamiques et thermiques de la première solution sont toujours plus importantes que celles de la deuxième solution. Le transfert de chaleur augmente avec l'augmentation de paramètre de glissement pour la première solution et diminue pour la seconde solution. (Figure I.6).

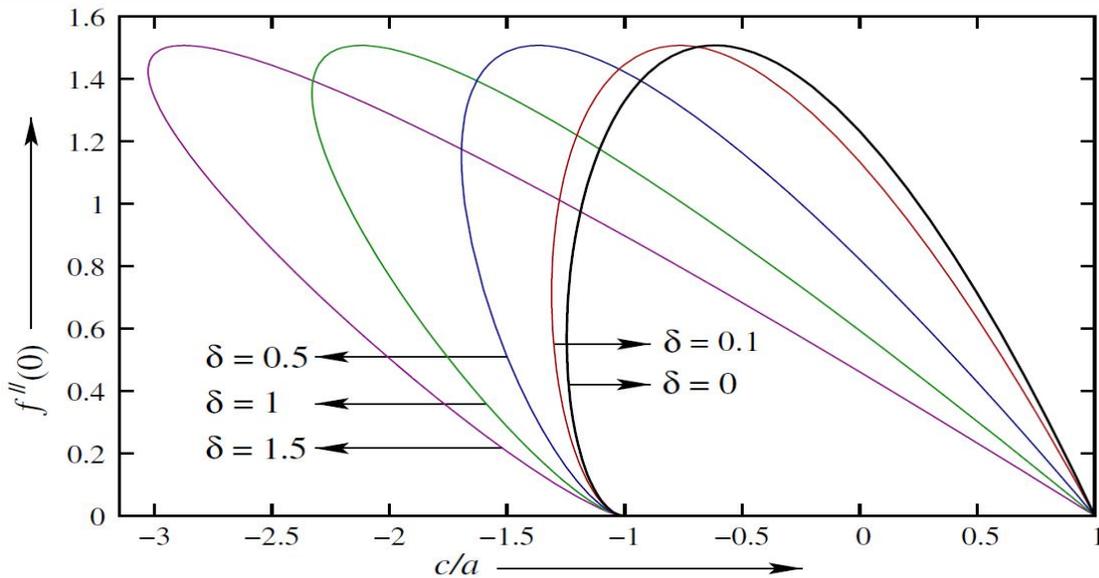


Fig. I.5 Coefficient de frottement pour différentes valeurs du paramètre de glissement [17].

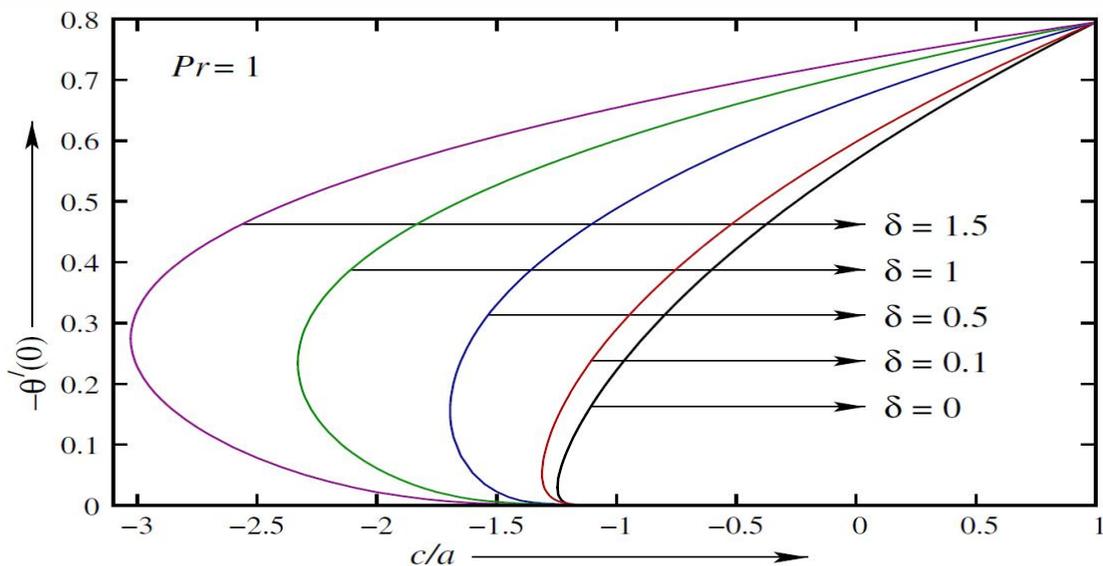


Fig. I.6 Gradient de température à la surface pour différentes valeurs du paramètre de glissement [17].

Bhattacharyya et al [18] ont étudié le même problème que Wang, mais avec une vitesse exponentielle (le problème est résolu numériquement avec la méthode de Rang- Kutta). Ils ont constaté que le domaine d'existence de la solution auto-similaire pour le cas d'un étirement

avec une vitesse exponentielle est plus large par rapport au cas linéaire. Lorsque la vitesse de rétrécissement de la plaque est inférieure à la vitesse d'écoulement externe de la couche limite, des solutions doubles existent (Figure I.7).

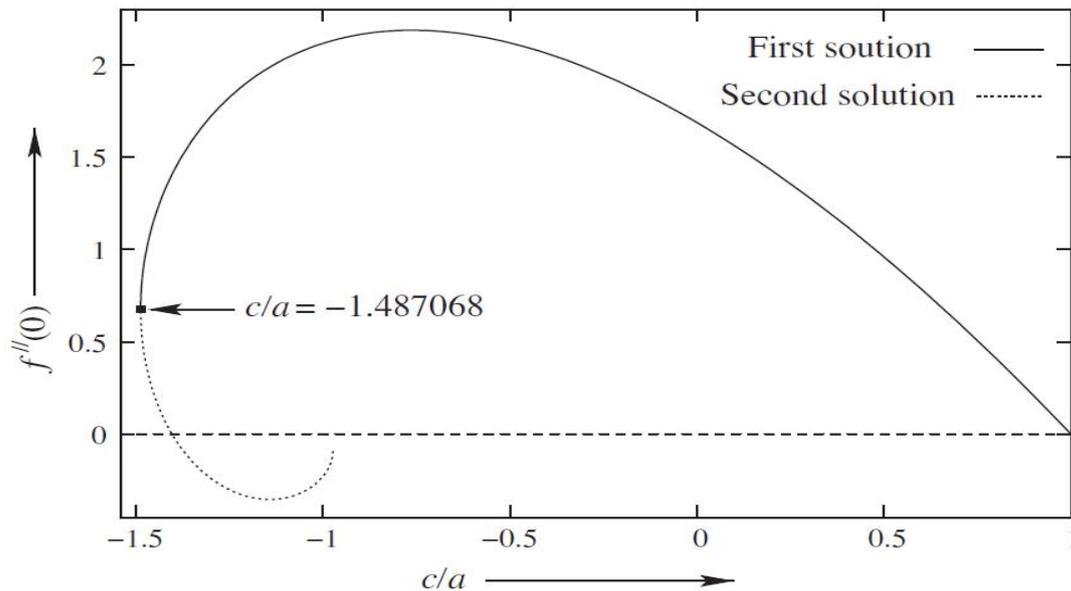


Fig. I.7 Coefficient de frottement en fonction de taux d'étirement/rétrécissement [18].

### Cas d'un nanofluide

Les nanofluides servent à augmenter et améliorer les propriétés thermiques des fluides de bases (eau...) tel que la conductivité thermique, et s'écoulent plus facilement, en conséquence, l'obstruction et l'érosion des parois n'est plus un problème Choi [1], Masuda et al [19]. Les nanofluides peuvent être utilisés dans une multitude d'applications d'ingénierie (industrie automobile, génie biomédical, refroidissement des composants microélectroniques).

Abou-nada et al [20] sont intéressés à étudier les caractéristiques de transfert de chaleur dans les nanofluides. Il est souligné que la présence de nanoparticules solides dans les fluides augmente sensiblement leurs conductivités thermiques et par conséquent les transferts de chaleur se trouvent améliorés. La formulation mathématique des écoulements des nanofluides est basée essentiellement sur les modèles les plus populaires de Buongiorno [21] et Tiwari et al [22].

Bachok et al [23] ont étudié l'écoulement de nanofluide sur une surface en étirement/rétrécissement. Ils se sont intéressés aux cas où les vitesses d'étirement/rétrécissement de la surface et de l'écoulement externe varient linéairement ou

exponentiellement en fonction de la distance longitudinale à la plaque. Les résultats ont montré que l'introduction de nanoparticules dans le fluide de base (eau) conduit à une augmentation des coefficients de frottement et de transfert de chaleur. Cette tendance s'améliore avec l'augmentation de la fraction volumique des nanoparticules (Figure I.8). Le transfert de chaleur est plus important pour un fluide contenant des nanoparticules en cuivre comparativement aux autres nanoparticules. L'effet de la fraction volumique des nanoparticules sur les caractéristiques d'écoulements et de transfert de chaleur est plus important par rapport au type de nanoparticules (Figure I.9).

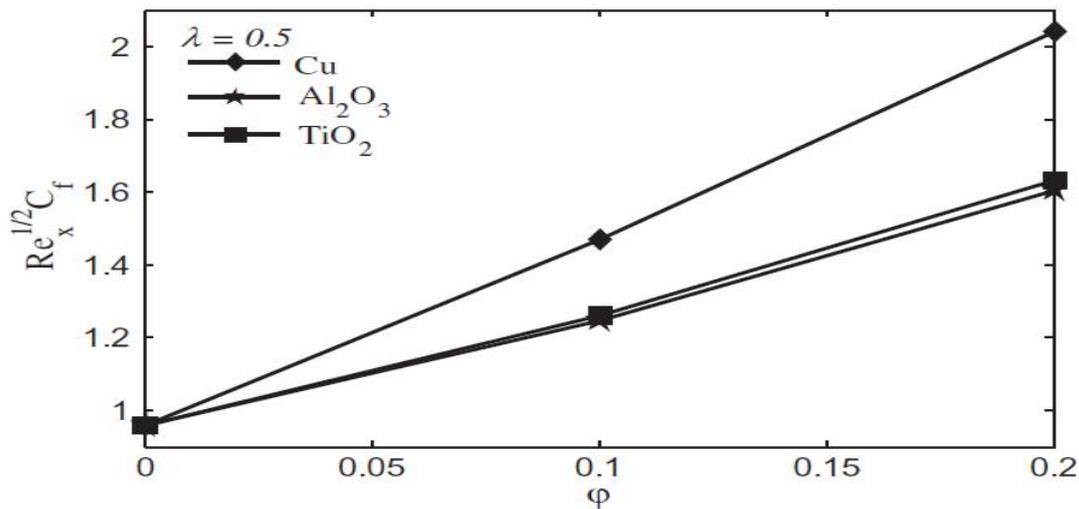


Fig. I.8 Coefficient de frottement en fonction de la fraction volumique pour trois types de nanofluides [23].

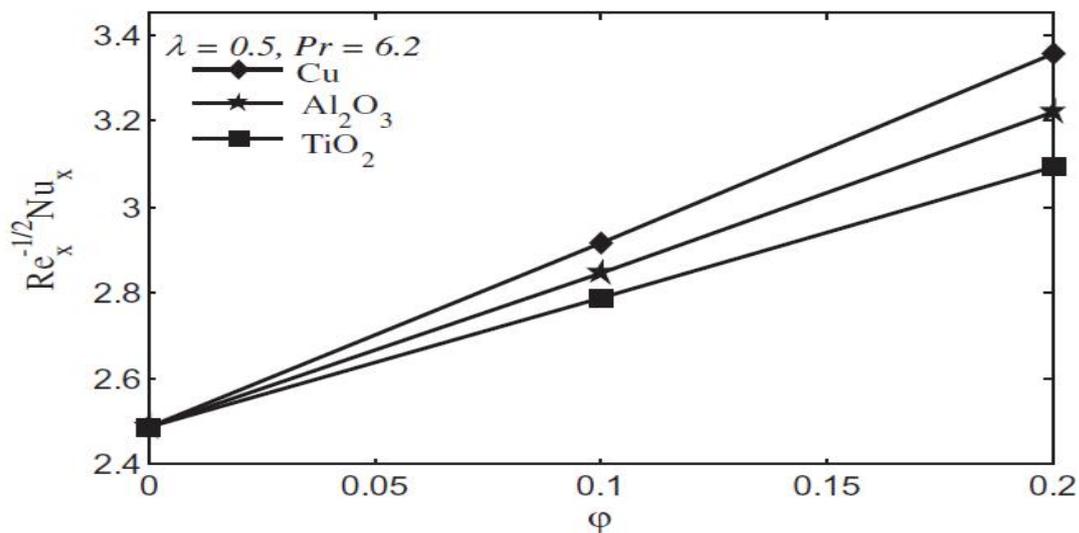
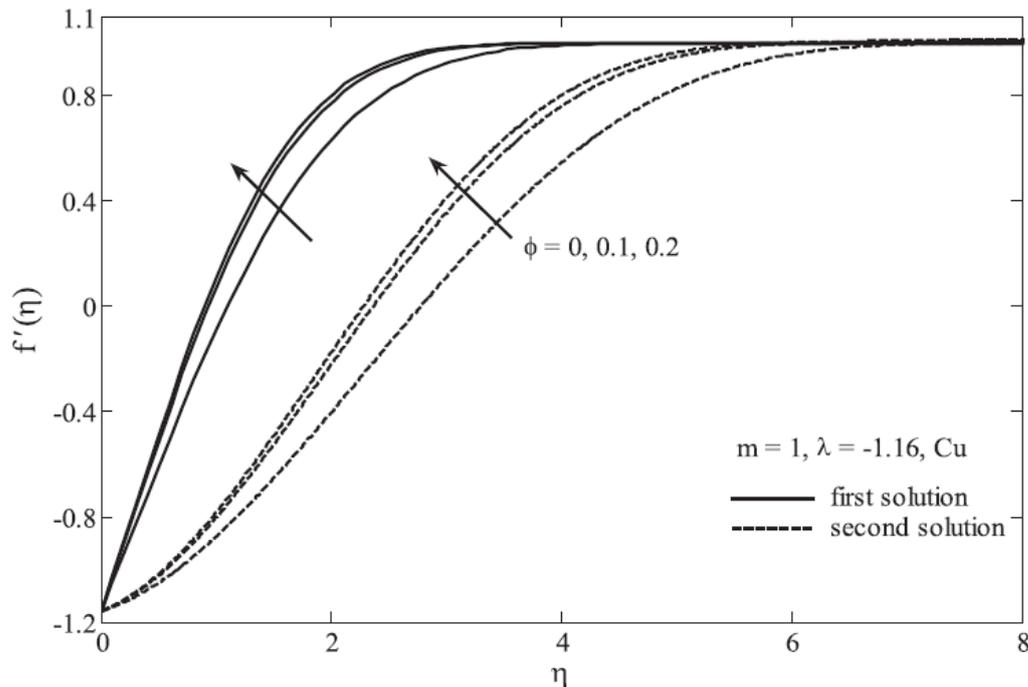


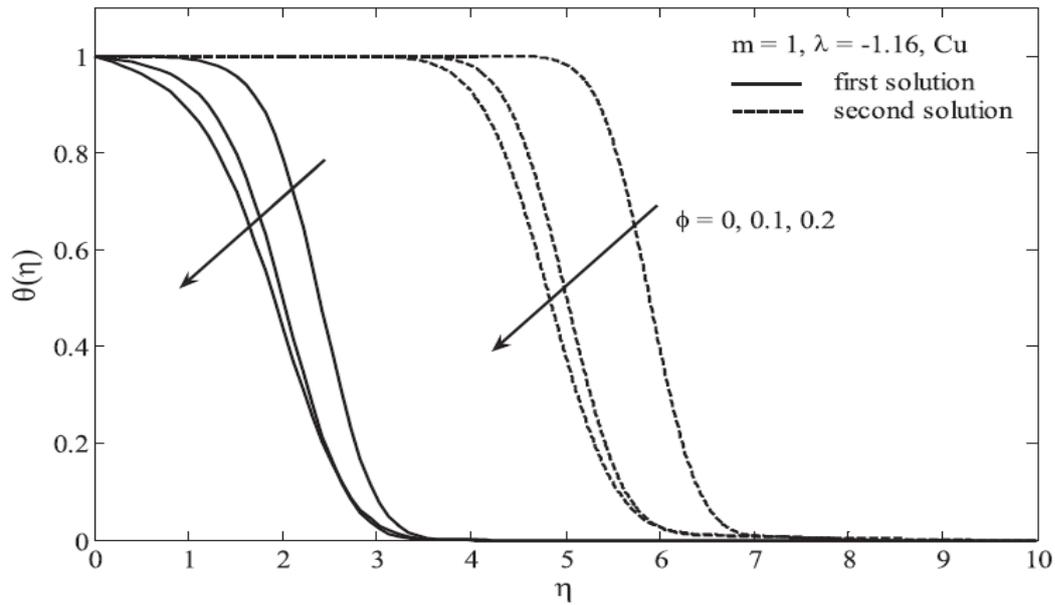
Fig. I.9 Nusselt local en fonction de la fraction volumique pour trois types de nanofluides [23].

Yacob et *al* [24] ont étudié théoriquement et numériquement le problème d'écoulement laminaire bidimensionnel au voisinage d'un point de stagnation sur une surface en rétrécissement en présence d'un nanofluide. Ils ont montré que les nanoparticules sont des facteurs clé pour l'amélioration de transfert de chaleur. Les valeurs les plus élevées du coefficient de frottement et du nombre de Nusselt locale ont été obtenues pour des nanoparticules en cuivre.

Les nanofluides sont capables de changer significativement la vitesse de l'écoulement et le profil de température dans la couche limite. Par conséquent, les épaisseurs des couches limites dynamiques et thermiques sont plus minces en augmentant la fraction volumique des nanoparticules. (Figure. I.10, I.11).



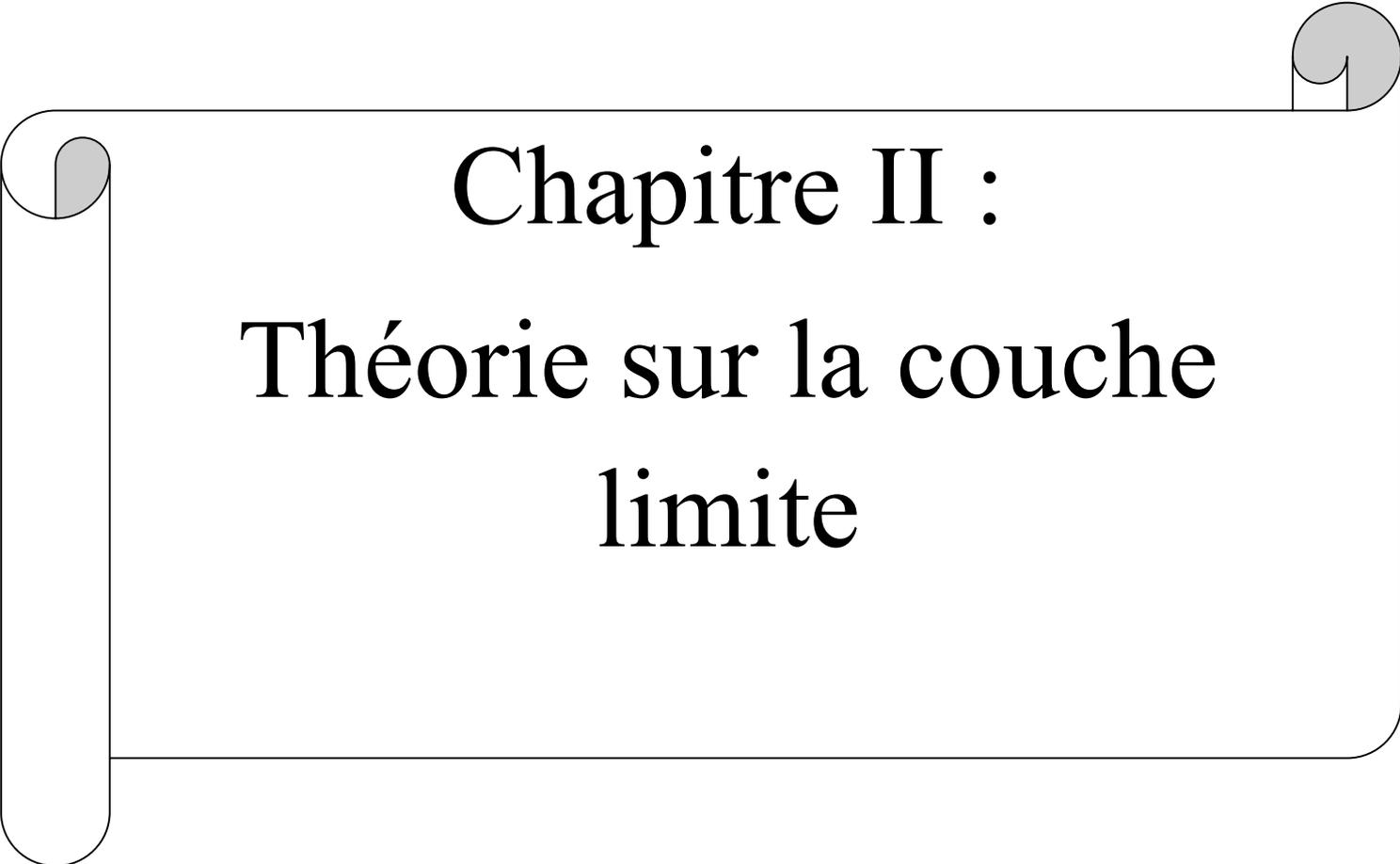
**Fig. I.10** Effet de fraction volumique sur le profil de vitesse [24].



**Fig. I.11** Effet de fraction volumique sur le profil de température [24].

## Conclusion

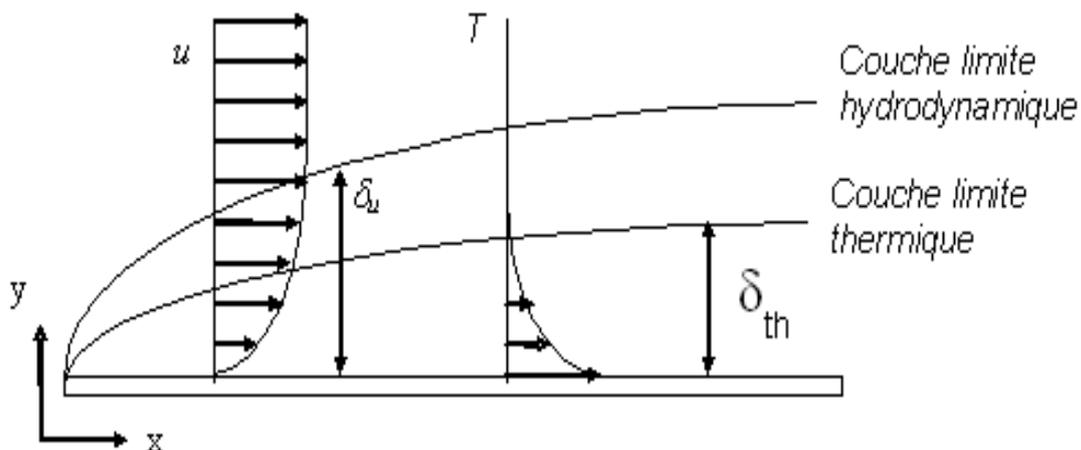
Dans cette recherche bibliographique, nous avons donné dans un premier temps une description générale des nanofluides, le jet impactant, le transfert de chaleur,...etc. Une synthèse bibliographique a ensuite été réalisée. Dans un second temps on présenté en générale le problème physique à étudié ainsi que les équations générale et les propriétés physique des nanofluides. Nous avons constaté à travers une analyse des différents travaux antérieurs les déférentes paramètres influençant sur l'écoulement et le transfert de chaleur a savoir la conductivité, la fraction volumique le rapport d'étirement/rétrécissement,...etc.



Chapitre II :  
Théorie sur la couche  
limite

## II.1 Définition de la couche limite

La couche limite est la zone d'interface entre un corps et un fluide environnant lors d'un mouvement relatif entre les deux, par conséquence de viscosité. Elle est un élément important en mécanique des fluides. Lorsqu'un fluide réel s'écoule le long d'une paroi supposée fixe, les vitesses sur la paroi sont nulles alors que loin de la paroi elles sont égales à la vitesse de l'écoulement externe. Sur une normal à la paroi, la vitesse doit donc varier entre zéro et un maximum. La loi de la variation dépend de la viscosité du fluide qui induit un frottement entre les couches voisines : la couche la plus lente tend à freiner la couche la plus rapide qui en retour tend à l'accélérer. La définition même de la couche limite réside dans le fait qu'elle représente la région de l'écoulement où les effets visqueux sont aussi importants que les effets d'inerties. Ce n'est en effet pas le cas loin de la paroi, où l'écoulement est alors de type « d'Euler », ou les effets visqueux sont négligés devant les forces d'inerties.



**Fig. II.1** Représentation schématique des couches limites dynamique et thermique se développant sur une plaque plane.

## II.2 Mise en évidence de l'existence de la couche limite

On considère un liquide visqueux ( $\mu$ ) au repos sur une plaque plane. En met en mouvement de translation la plaque. On constate que le fluide se met en mouvement de translation seulement sur une certaine épaisseur à partir de la plaque.

Dans ce cas les effets d'inerties sont négligeables, le fluide est incompressible :

Equation de Stokes

$$\rho \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} = \mu \nabla^2 \vec{U} \quad \text{II. 1}$$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \text{d'où} \quad \rho \frac{U}{t} \equiv \mu \frac{U}{\delta^2} = \rho \nu \frac{U}{\delta^2} \quad \text{II. 2}$$

$$\delta = \sqrt{\nu t} \quad \text{avec} \quad t \equiv \frac{l}{U}$$

$$\delta \equiv \sqrt{\frac{\nu l}{U}} = \frac{l}{\sqrt{\frac{U l}{\nu}}} \equiv \frac{l}{Re^{1/2}} \quad \text{avec} \quad Re = \frac{U l}{\nu}$$

$$\delta \equiv \frac{l}{Re^{1/2}}$$

### II.3 Equation générales (Navier-Stokes)

❖ Equation de continuité

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \quad \text{II. 3}$$

❖ Equation de quantité de mouvement

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \nu \nabla^2 \vec{V} + \vec{f} \quad \text{II. 4}$$

❖ Expression en coordonnées cartésiennes (x, y, z) :

On aura :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \text{II. 5}$$

$$\rho \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + f_x \quad \text{II. 6}$$

$$\rho \left[ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right] = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + f_y \quad \text{II. 7}$$

$$\rho \left[ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right] = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + f_z \quad \text{II. 8}$$

Avec  $\nu$  désigne la viscosité cinématique de fluide :

$$\nu = \eta / \rho$$

## II.4 Etude de la couche limite dynamique

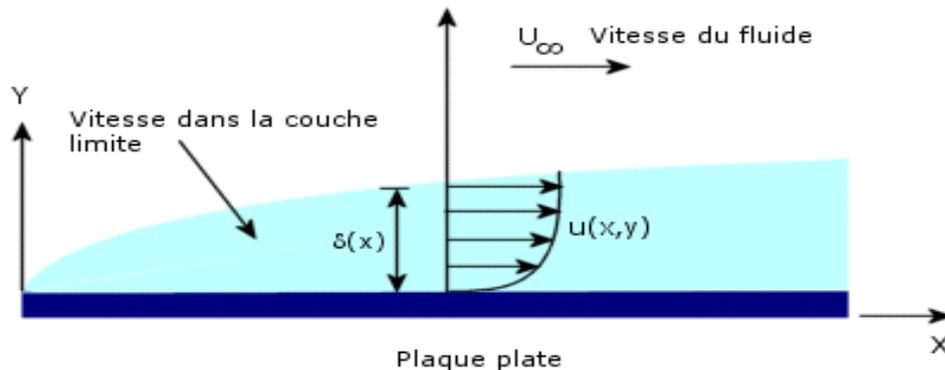


Fig. II.2 Représentation d'une couche limite dynamique.

### II.4.1 Hypothèses

Pour simplifier cette présentation de la théorie de la couche limite, on envisage le développement d'une couche limite laminaire sur une plaque plane et on admet les hypothèses suivantes :

- ❖ Écoulement incompressible, stationnaire et bidimensionnel.
- ❖ Le fluide est considéré newtonien à viscosité constante.
- ❖ Les effets de la pesanteur sont négligeables (fluide non pesant).
- ❖ On néglige les échanges de chaleur par rayonnement.
- ❖ L'écoulement est sur une plaque plane.

### II.4.2 Equation de la couche limite dynamique

La couche limite dynamique est décrite par les équations suivantes:

- ❖ Equation de continuité

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \text{II. 9}$$

- ❖ Equation de quantité de mouvement selon X :

$$\rho \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad \text{II. 10}$$

❖ Equation de quantité de mouvement selon Y :

$$\rho \left[ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right] = - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad \text{II.11}$$

### II.4.3 Condition aux limites

Les conditions aux limites de problème sont :

$$y = 0 \quad u = 0 \quad v = 0 \quad \text{II.12}$$

$$y \rightarrow \infty : u \rightarrow U_\infty \quad \text{II.13}$$

### II.4.4 Evaluation de l'ordre de grandeur de chaque terme des équations

Nous allons effectuer une estimation à priori des termes qui apparaissent dans les équations du mouvement. Pour cette estimation, nous utiliserons deux échelles caractéristiques de l'écoulement :

❖ L'épaisseur caractéristique de la couche limite :

$$x \sim l$$

❖ Une longueur caractéristique dans la direction de l'écoulement :

$$y \sim \delta$$

❖ la vitesse d'écoulement :

$$u \sim U_\infty$$

❖ Le nombre de Reynolds avec :

$$Re \gg 1$$

$$Re = \frac{U_\infty l}{\nu} = \rho \frac{U_\infty l}{\mu}$$

$$\frac{\delta}{l} = \frac{1}{Re^{1/2}}$$

Pour un écoulement de grand nombre de Reynolds ( $Re \gg 1$ ) l'épaisseur de la couche limite est mince et petit devant les dimensions de l'obstacle :

$$\frac{\delta}{l} = \frac{1}{Re^{1/2}} \ll 1$$

Si  $u$  désigne une vitesse axiale caractéristique et  $\nu$  une vitesse transversale caractéristique, les gradients  $(\partial u / \partial x)$  et  $(\partial v / \partial y)$  peuvent être estimés par :

$$\frac{\partial u}{\partial x} \equiv \frac{U_\infty}{l} ; \quad \frac{\partial v}{\partial y} \equiv \frac{v}{\delta} \quad \text{II. 14}$$

Pour que l'équation de continuité soit satisfaite, ces deux termes doivent être du même ordre :

$$\frac{v}{\delta} = \frac{U_\infty}{l} \quad \text{II. 15}$$

Et dans ces conditions, l'ordre de grandeur de la vitesse transversale est donnée par :

$$v = U_\infty \frac{\delta}{l} = U_\infty \frac{1}{Re^{1/2}} \quad \text{II. 16}$$

D'où :

$$v \ll U_\infty$$

Considérant à présent l'équation de conservation de la quantité de mouvement dans la direction 'X' :

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \text{II. 17}$$

(1)      (2)      (3)      (4)

Les ordres de grandeur de chacun des termes de cette équation sont respectivement :

$$\begin{aligned} (1) &\equiv \rho \frac{U_\infty^2}{l} \\ (2) &\equiv \rho \frac{U_\infty^2}{l} \\ (3) &\equiv \mu \frac{U_\infty}{l^2} \\ (4) &\equiv \mu \frac{U_\infty}{\delta^2} \end{aligned} \quad \text{II. 18}$$

Le terme (3) s'écrit :

$$\mu \frac{U_\infty}{l^2} \equiv \frac{\mu}{\rho U_\infty l} \frac{\rho U_\infty^2}{l} \equiv \frac{1}{Re} \rho \frac{U_\infty^2}{l}$$

puisque  $Re \gg 1$  le terme  $\mu \frac{U_\infty}{\delta^2}$  est négligeable devant les autres termes. D'où l'équation simplifiée :

$$\rho \left[ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right] = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \text{II. 19}$$

Considérons à présent l'équation de conservation de la quantité de mouvement projetée dans la direction transversale Y :

$$\rho \left[ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right] = - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad \text{II. 20}$$

Les ordres de grandeur de chacun des termes de cette équation sont :

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} \equiv \rho U_\infty \frac{U_\infty}{R_e^{1/2}} \frac{1}{l} \equiv \frac{\rho U_\infty^2}{l} \frac{1}{R_e^{1/2}} \quad \text{II. 21}$$

$$\rho v \frac{\partial v}{\partial y} \equiv \frac{U_\infty^2}{R_e^{1/2}} \frac{U_\infty}{R_e^{1/2}} \frac{1}{\delta} \equiv \frac{\rho U_\infty^2}{l} \frac{1}{R_e^{1/2}} \quad \text{II. 22}$$

$$\mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \equiv \mu \frac{U_\infty}{R_e^{1/2}} \frac{1}{l^2} \equiv \frac{\rho U_\infty^2}{l} \frac{1}{R_e^{3/2}} \quad \text{II. 23}$$

$$\mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \equiv \mu \frac{U_\infty}{R_e^{1/2}} \frac{1}{\delta^2} \equiv \frac{\rho U_\infty^2}{l} \frac{1}{R_e^{1/2}} \quad \text{II. 24}$$

On remarque que tous les termes de l'équation sont le produit de l'inverse du nombre de Reynolds et de terme  $\frac{\rho U_\infty^2}{l}$  qu'est l'ordre de grandeur de l'équation de u.

Toujours, pour  $R_e \gg 1$ , ces termes peuvent être négligeable devant ceux de l'équation de (u) ainsi, l'équation de (v) se simplifie comme suit :

$$0 = - \frac{\partial p}{\partial x} \quad \text{II. 25}$$

$p = p(x)$  (Fonction de x) et elle ne dépend pas de y.

Ainsi, l'équation de U s'écrit :

$$\rho \left[ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right] = - \frac{dp}{dx} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \text{II. 26}$$

On déduit alors que :  $p = p_\infty(x)$

L'écoulement extérieur obéit à l'équation de type d'Euler :

$$\rho U_{\infty} \frac{dU_{\infty}}{dx} = -\frac{dp}{dx} \quad \text{II. 27}$$

Finalement, la couche limite incompressible est décrite par le système d'équation suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\rho \left[ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right] = -\frac{\partial p_{\infty}}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \text{II. 28}$$

Avec :

$$y = 0; u = v = 0 \quad \text{II. 29}$$

$$y \rightarrow \infty; u \rightarrow U_{\infty} \quad \text{II. 30}$$

Et à l'extérieur de la couche limite :

$$\rho U_{\infty} \frac{dU_{\infty}}{dx} = -\frac{dp_{\infty}}{dx}$$

#### II.4.5 Equation dynamique sous forme adimensionnel

Le profil de vitesse étant semblable en tout point x, on peut choisir alors une variable «  $\eta$  » permettant d'unifier ces profils comme suit :

$$\eta = \frac{y}{\delta} \quad \text{et} \quad \frac{u}{U_{\infty}} = g(\eta) \quad \text{II. 31}$$

$$\text{Avec: } \delta = \sqrt{\frac{\nu x}{U_{\infty}}} \quad \text{épaisseur de la couche limite} \quad \text{II. 32}$$

#### ➤ Cas d'un écoulement sans gradient de pression

C'est-à-dire :

$$\frac{dp_{\infty}}{dx} = 0$$

$$\text{Dans ce cas : } U_{\infty} \frac{dU_{\infty}}{dx} = 0$$

$$U_{\infty} = Cst$$

C'est l'écoulement à vitesse constante parallèle à une paroi ou une plaque plane.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \text{II. 33}$$

$$\text{On à: } u = U_\infty g(\eta) \quad \text{II. 34}$$

$$\text{Or: } \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{II. 35}$$

$$v = -\int \frac{\partial u}{\partial x} dy$$

$$\eta = \frac{y}{\delta} = y \left( \frac{U_\infty}{\nu x} \right)^{1/2} \quad \text{II. 36}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \text{ et } dy = \left( \frac{\nu}{U_\infty} \right)^{1/2} x^{1/2} d\eta$$

$$v = \frac{1}{2x} U_\infty \left( \frac{\nu x}{U_\infty} \right)^{1/2} \int \eta g'(\eta) d\eta$$

$$\text{On à: } \int \eta g'(\eta) d\eta = \eta g - \int g d\eta$$

$$\text{D'ou: } v = \frac{1}{2} \frac{U_\infty}{x} \left( \frac{\nu x}{U_\infty} \right)^{1/2} \left[ \eta g - \int g d\eta \right] \quad \text{II. 37}$$

$$\text{On pose : } g = f'(\eta)$$

$$\int g d\eta = \int f'(\eta) d\eta = f(\eta)$$

$$v = \frac{1}{2} \frac{U_\infty}{x} \left( \frac{\nu x}{U_\infty} \right)^{1/2} [\eta f' - f] \quad \text{II. 38}$$

Ainsi on pose:

$$u = U_\infty f'(\eta) \quad \text{II. 39}$$

$$v = \frac{1}{2} \left( \frac{\nu U_\infty}{x} \right)^{1/2} [\eta f' - f] \quad \text{II. 40}$$

On remplace les termes:  $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

Par leur expression en fonction de  $f$  :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{2x} U_{\infty} \eta f''(\eta) \quad \text{II. 41}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = U_{\infty} f''(\eta) \left(\frac{U_{\infty}}{\nu x}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{II. 42}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = U_{\infty} f'''(\eta) \left(\frac{U_{\infty}}{\nu x}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{U_{\infty}}{\nu x}\right)^{\frac{1}{2}} = U_{\infty} f'''(\eta) \left(\frac{U_{\infty}}{\nu x}\right) \quad \text{II. 43}$$

On trouve alors l'équation :

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial u}{\partial y} &= \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ U_0 f'(\eta) \left(-\frac{1}{2x} U_{\infty} \eta f''(\eta)\right) + \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\nu U_{\infty}}{x}\right)^{\frac{1}{2}} [\eta f' - f]\right) \left(U_0 f''(\eta) \left(\frac{U_{\infty}}{\nu x}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \\ &\quad - \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\nu U_{\infty}}{x}\right)^{\frac{1}{2}} [\eta f' - f]\right) \left(U_{\infty} f'''(\eta) \left(\frac{U_{\infty}}{\nu x}\right)\right) = 0 \end{aligned} \quad \text{II. 44}$$

$$f''' + \frac{1}{2} f f'' = 0$$

$$2f''' + f f'' = 0 \quad \text{II. 45}$$

C'est l'équation de l'écoulement de Blasius.

Les conditions aux limites pour  $f(\eta)$  s'écrivent comme suit :

$$y = 0, \quad \eta = 0: \quad f'(0) = 0 \quad \text{II. 46}$$

Et

$$y \rightarrow \infty, \eta \rightarrow \infty: f'(\eta) \rightarrow 1 \quad \text{II. 47}$$

➤ **Dans le cas général:**

$$u_{\infty}(x) = a x^m \quad \text{II. 48}$$

D'où :

$$\eta = \frac{y}{\delta(x)}$$

$$\delta(x) = \sqrt{\frac{\nu x}{u_{\infty}}} = \sqrt{\frac{\nu}{a}} x^{\frac{1}{2}(1-m)}$$

$$\eta = \sqrt{\frac{a}{\nu}} y x^{\frac{m-1}{2}}$$

Et :

$$u = u_{\infty} f'(\eta) = a x^m f'(\eta)$$

Et d'après :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

On peut déduire que :

$$v = - \int \frac{\partial u}{\partial x} dy$$

On trouve :

$$v = -\sqrt{\nu a} \frac{m+1}{2} x^{\frac{m-1}{2}} \left[ f + \frac{m-1}{m+1} \eta f' \right] \quad \text{II. 49}$$

On injectant l'expression de u et v dans l'équation (2) on obtient :

(2) :

$$\rho \left[ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right] = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$f''' + \frac{m+1}{2} f f'' + m(1 - f'^2) = 0 \quad \text{II. 50}$$

Dite équation Falkner Skåne.

On trouve facilement le cas de Blasius à m=0 :

$$f''' + \frac{1}{2} f f'' = 0 \quad \text{II. 51}$$

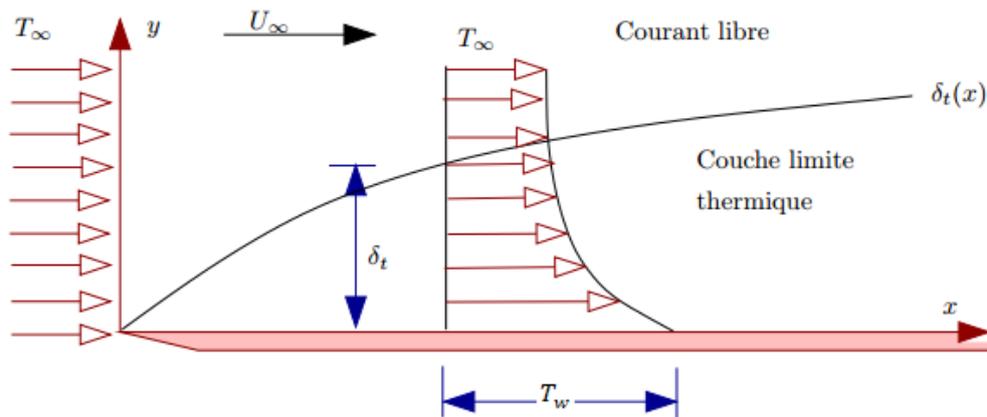
Et pour m=0 c'est le cas Hiemenz :

$$f''' + f f'' + 1 - f'^2 = 0 \quad \text{II. 52}$$

## II.5 Etude de la couche limite thermique

### II.5.1 Définition

. La couche limite est d'une importance essentielle dans les transferts thermiques entre le fluide et la paroi, si non le phénomène physique est de nature uniquement dynamique. Il existe également une zone mince près de la paroi où les variations de température sont rapides et diminue on s'éloignant de la paroi, c'est la couche limite thermique (figure II.3). Si les parois du solide sont chauffées, la présence d'un transfert thermique implique l'existence d'une couche limite thermique. Connaissant le champ des vitesses, on peut maintenant chercher à résoudre l'équation de l'énergie.



**Fig. II.3** Représentation d'une couche limite thermique.

### II.5.2 Hypothèses

- L'écoulement est permanent, parallèle à la paroi
- Hypothèse de Boussinesq
- les vitesses sont assez faibles, donc on peut négliger la dissipation visqueuse.

### II.5.3 Equation de la couche limite thermique

L'équation de la chaleur s'écrit:

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad \text{II. 53}$$

On a  $\delta_x \ll x$  cela se traduit par l'existence d'un gradient de température beaucoup plus important dans la direction (OY) que dans la direction (OX) :

$$\frac{\partial T}{\partial x} \ll \frac{\partial T}{\partial y} \text{ et } \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

On aura donc :

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad \text{II. 54}$$

### II.5.4 Conditions aux limites

Les conditions aux limites sont :

$$y = 0; T = T_w \text{ et } y \rightarrow \infty; T = T_\infty$$

### II.5.5 Equation thermique sous forme adimensionnel

Cette équation est analogue à l'équation dynamique. On introduit la température adimensionnelle :

$$\theta = \frac{T - T_{\infty}}{T_w - T_{\infty}}$$

L'équation devient alors :

$$u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \quad \text{II.55}$$

Par ailleurs sachant que

$$u = U_{\infty} f'(\eta)$$

$$v = \frac{1}{2} \left( \frac{\nu U_{\infty}}{x} \right)^{\frac{1}{2}} [\eta f' - f]$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{2x} U_{\infty} \eta f''(\eta)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = U_{\infty} \theta''(\eta) \left( \frac{U_{\infty}}{\nu x} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Par analogie a ces équations on peut écrire que :

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{U_{\infty}}{2x} \eta f''(\eta) ; \frac{\partial \theta}{\partial y} = U_{\infty} \theta''(\eta) \left( \frac{U_{\infty}}{\nu x} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{II.56}$$

On remplaçant dans l'équation (II.55) les équations (II.56)

$$\theta'' + Pr f \theta' = 0 \quad \text{II.57}$$

Avec Pr est le nombre de Prandtl.

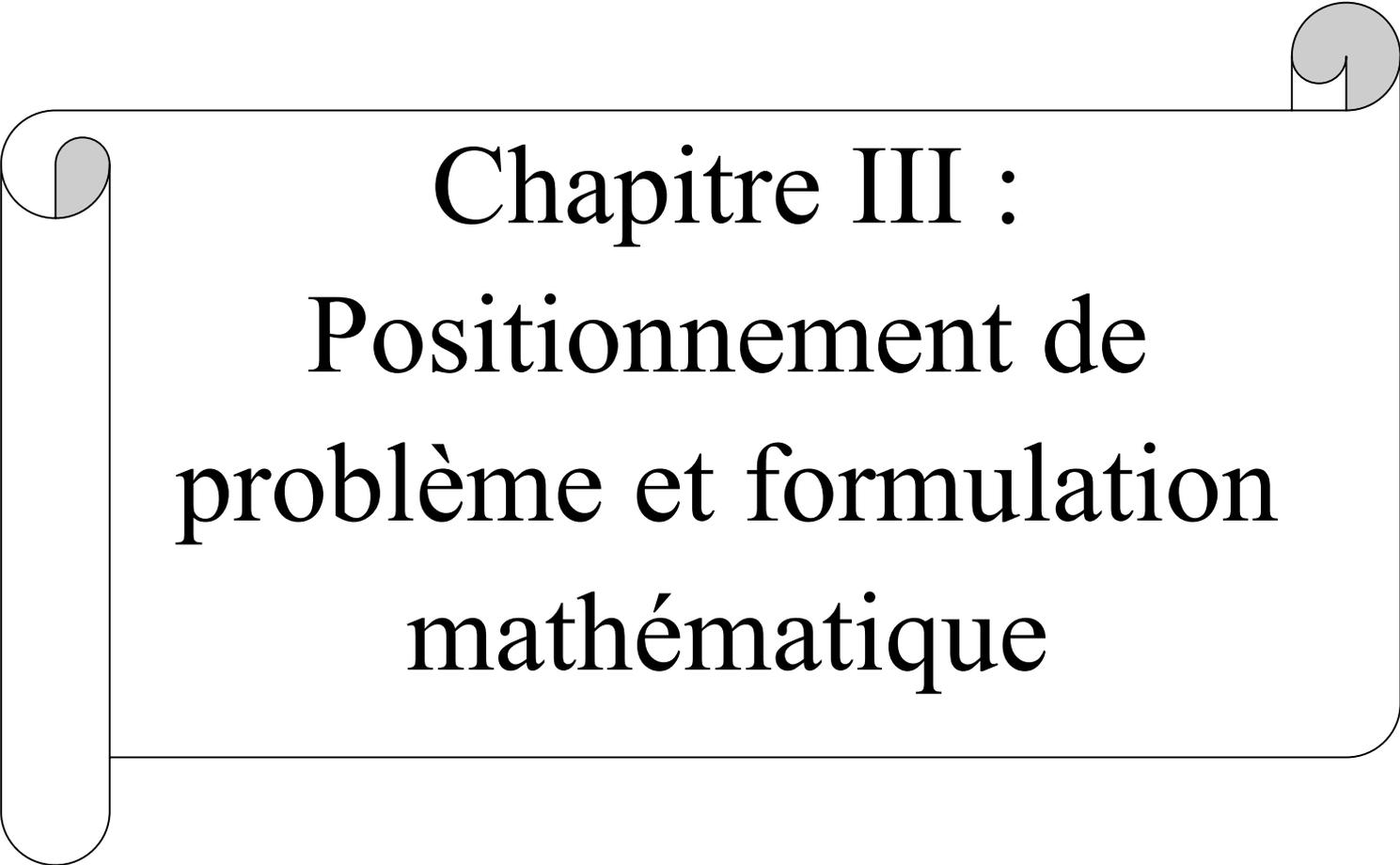
### II.5.6 Condition aux limites Les conditions aux limites sont :

$$\eta = 0 ; f' = 0 ; f = 0 ; \theta = 0 (T = T_w)$$

$$\eta \rightarrow 1 ; f' = 0 ; \theta = 0 (T = T_{\infty})$$

II.58

Pour la résolution, on peut utiliser une méthode numérique appropriée de « Runge-Kutta » avec une technique de « Tir ».

A decorative graphic of a scroll with a black outline and rounded corners. The scroll is partially unrolled, with the top and bottom edges curving inward. The text is centered within the scroll's frame.

Chapitre III :  
Positionnement de  
problème et formulation  
mathématique

### III.1 Introduction

Le transfert de chaleur dans les nanofluides dépend de plusieurs paramètres à savoir les propriétés thermo physiques des nanoparticules et des fluides de bases et les forces agissant sur la paroi. Dans cette partie de travail, nous présenterons dans un premier temps le modèle physique et les formulations mathématiques, nous passerons par la suite à l'exposition des différentes hypothèses simplificatrices ainsi que les équations gouvernantes et les conditions aux limites.

### III.2 Définition du problème physique

On considère un nanofluide de température  $T_\infty$ , impactant perpendiculairement sur une paroi pleine déformable en étirement/rétrécissement. La géométrie du problème ainsi que les coordonnées utilisées sont indiquées sur la figure (III.1). La température à la paroi  $T_w$  est supposée constante avec  $T_w > T_\infty$ . On note par  $u, v, w$  les composantes de vitesse selon  $x, y$  et  $z$  respectivement. La vitesse de l'écoulement externe au voisinage de point de stagnation est donnée par  $\vec{V}_e(ax, -ay, 0)^t$ ; où  $a$  est une constante positive. On suppose également que la vitesse d'étirement/rétrécissement de la surface est donnée par  $u_w(x) = cx$  où  $c$  est une constante, avec ( $c > 0$ ) correspond à un étirement, ( $c < 0$ ) à un rétrécissement de la surface et  $c = 0$  correspond à une surface non déformable.

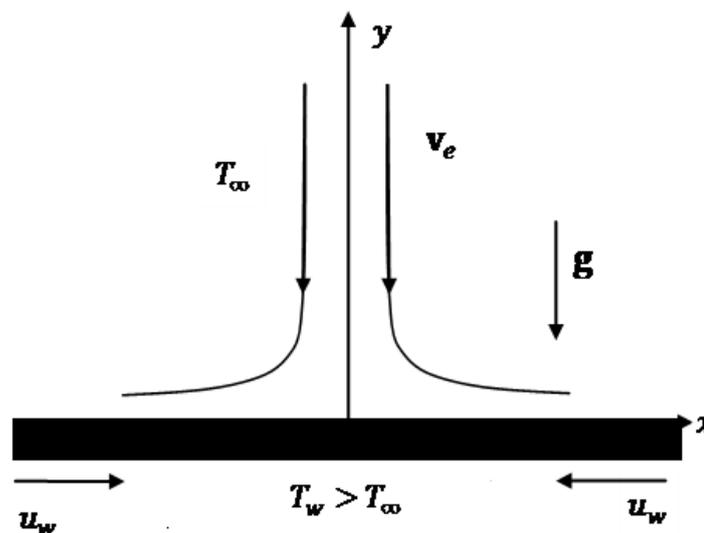


Fig. III.1 Schémas du problème physique.

### III.3 Les hypothèses simplificatrices

La représentation de tels phénomènes par des équations nécessite l'adoption des quelques hypothèses simplificatrices qui se basent généralement sur des observations expérimentales et des considérations théoriques. Nous avons ainsi adopté les hypothèses suivantes afin de développer notre modèle numérique :

1. L'écoulement est permanent et en régime laminaire.
2. Le mélange est considéré homogène monophasique.
3. Le fluide est Newtonien et incompressible (eau).
4. le transfert de masse entre les particules et le fluide est négligeable.
5. Toutes les propriétés thermo physiques sont constantes a l'exception de la masse volumique dans l'expression de la force d'Archimède pour laquelle l'approximation de Boussinesq est utilisée.

### III.4 Formulation mathématique

Dans ce qui suit, nous allons établir le système d'équations régissant ainsi que les conditions aux limites et les paramètres adimensionnels caractérisant le problème.

#### III.4.1 Equations de conservation

Sous ces hypothèses et en utilisant le modèle de nanofluide proposé par Tiwari et Das [25], les équations de conservation de masse, de quantité de mouvement, d'énergie pour un nanofluide s'écrivent dans leur forme dimensionnelle en termes de température  $T$  et de vitesse  $\vec{V}$  comme suit:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \quad \text{III. 1}$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} = \frac{1}{\rho_{nf}} \left( -\vec{\nabla} p + \mu_{nf} \nabla^2 \vec{V} - \vec{g}(\rho\beta)_{nf}(T - T_{\infty}) \right) \quad \text{III. 2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) T = \alpha_{nf} \nabla^2 T \quad \text{III. 3}$$

En utilisant les hypothèses simplificatrices :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \text{III. 4}$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\rho_{nf}} \left( -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu_{nf} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \vec{g}(\rho\beta)_{nf}(T - T_\infty) \right) \quad \text{III. 5}$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha_{nf} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad \text{III. 6}$$

### III.4.2 Condition aux limites

Les conditions aux limites traduisant l'adhérence à la paroi et le raccord à l'écoulement extérieur de fluide parfait sont données par :

$$\left. \begin{aligned} \vec{V}(x, 0) &= (cx + L \frac{\partial u}{\partial y}, 0)^t, \quad T(x, 0) = T_w \\ \vec{V}(x, \infty) &= \vec{V}_e, \quad T(x, \infty) = T_\infty \end{aligned} \right\} \quad \text{III.7}$$

### III.4.3 Formulation adimensionnelle

L'adimensionnement est la suppression partielle ou totale des unités d'une équation par une substitution appropriée de variables, dans le but de simplifier la représentation paramétrique de problème physique. Il permet aussi de trouver les propriétés caractéristiques d'un système. La technique est particulièrement utile pour les systèmes qui peuvent être décrits par des équations différentielles

#### III.4.3.1 Equations adimensionnelles

Pour adimensionner le système d'équation on va introduire les changements de variables suivants :

$$\eta = \left( \frac{u_\infty}{\nu x} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \Psi = (\alpha \nu)^{\frac{1}{2}} x f(\eta), \quad \theta(\eta) = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty} \quad \text{III. 8}$$

Où,  $\Psi$  est la fonction de courant définie comme suit :

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad \text{III. 9}$$

On développant  $u$  et  $v$ , on trouve :

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = axf'(\eta) , \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = (-av)^{\frac{1}{2}}f(\eta) \quad \text{III. 10}$$

Les quantités physiques qui nous intéressent sont la fraction volumique, le coefficient de frottement  $C_f$  et le nombre de Nusselt local  $Nu_x$  et le Reynolds qui sont définis comme suit :

$$C_f = \frac{\tau_w}{\rho_f U_\infty^2} \quad \text{III. 11}$$

$$Nu_x = \frac{xq_w}{\lambda_{nf}(T_w - T_\infty)} \quad \text{III. 12}$$

$$Re_x = \frac{U_\infty x}{\nu_{nf}} \quad \text{III. 13}$$

Où la contrainte de cisaillement à la surface  $\tau_w$  et le flux chaleur à la surface  $q_w$  sont données par :

$$\tau_w = \mu_{nf} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} \quad \text{III. 14}$$

$$q_w = -\lambda_{nf} \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} \quad \text{III. 15}$$

Avec  $\mu_{nf}$  et  $\lambda_{nf}$  étant la viscosité dynamique et la conductivité thermique des nanofluides, respectivement. En utilisant les équations (III.11 et III.12), nous obtenons :

$$Nu_x Re_x^{-1/2} = -\frac{\lambda_{nf}}{\lambda_f} \theta'(0) \quad \text{III. 16}$$

$$C_f Re_x^{1/2} = \frac{1}{(1-Q)^{2.5}} f''(0) \quad \text{III. 17}$$

Pour  $Re_x = 1$

$$Nu_x = -\theta'(0) \text{ et } C_f = f''(0) \quad \text{III. 18}$$

Les équations de continuité et de quantité de mouvement sous leurs formes adimensionnelles sont comme suit:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 \Psi) - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 \Psi) - J_1 \nabla^2 (\nabla^2 \Psi) = 0 \quad \text{III. 19}$$

$$\nabla^2 \theta + J_2 Pr \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) = 0 \quad \text{III. 20}$$

Avec:

$$J_1 = \frac{1}{(1 - \phi)^{2.5} (1 - \phi + \phi \rho_{np} / \rho_f)} \quad \text{III. 21}$$

$$J_2 = \frac{1 - \phi + \phi (\rho C_p)_{np} / (\rho C_p)_f}{(\lambda_{nf} / \lambda_f)} \quad \text{III. 22}$$

### III.3.3.3 Les conditions aux limites

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y}(x, 0) = cx + L \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x}(x, 0) = 0, \quad \theta(x, 0) = 1 \quad \text{III. 23}$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y}(x, \infty) = 0, \quad \theta(x, \infty) = 0 \quad \text{III. 24}$$

On utilisant les conditions aux limites et à l'aide de la solution auto-similaire de Hiemenz (III.25), qu'est introduit comme suit :

$$\psi(x, y) = xf(y), \quad \theta(x, y) = \theta(y) \quad \text{III. 25}$$

On obtient les équations suivantes :

$$J_1 f''' + ff'' + 1 - f'^2 = 0 \quad \text{III. 26}$$

$$\theta'' + J_3 Pr f \theta' = 0 \quad \text{III. 27}$$

Et on abouti à ses conditions aux limites :

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = b + \sigma f''(0), \quad \theta(x, 0) = 1 \quad \text{III. 28}$$

$$\eta \rightarrow \infty, \quad f'(\eta) \rightarrow 1, \quad \theta(\eta) = 0 \quad \text{III. 29}$$

Avec

$$b = \frac{c}{a}, \quad \sigma = L \left( \frac{a}{v} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Où ( $b > 0$ ) correspond à un étirement et ( $c < 0$ ) correspond à un rétrécissement de la surface.

### III.4 Propriétés thermo physiques des nanofluides

Le changement des paramètres physiques, dû à l'ajout des nanoparticules dans le fluide de base, tel que la densité, la viscosité et les paramètres thermiques sont prédits avec une pondération statistique ou à l'aide des méthodes expérimentales. En utilisant une pondération déterminée par le pourcentage de nanoparticules dans le fluide de base, on peut obtenir les paramètres physiques des nanofluides.

#### III.4.1 La densité

La densité du nanofluide est la pondération linéaire des densités de nanoparticules et de fluide de base :

$$\rho_{nf} = (1 - \phi)\rho_f + \phi\rho_{np} \quad \text{III. 30}$$

Cette formule a été validée par les données expérimentales de Pak et Cho [26]. Elle a été également utilisée largement dans plusieurs travaux théoriques.

#### III.4.2 La capacité calorifique

En supposant que les nanoparticules et le fluide de base sont en équilibre thermique, la capacité calorifique du mélange est exprimée suivant cette relation (Xuan et Roetzel [27]):

$$(\rho C_p)_{nf} = (1 - \phi)(\rho C_p)_f + \phi(\rho C_p)_{np} \quad \text{III. 31}$$

#### III.4.3 Le coefficient d'expansion thermique

Le coefficient d'expansion thermique effectif est déduit de la formule classique suivant:

$$(\rho\beta)_{nf} = (1 - \phi)(\rho\beta)_f + \phi(\rho\beta)_{np} \quad \text{III. 32}$$

#### III.4.4 La viscosité des nanofluides

Il existe plusieurs modèles proposés dans la littérature pour la modélisation de la conductivité thermique et la modélisation de la viscosité des nanofluides. Dans ce qui suit, on discutera de quelques modèles parmi les plus représentatifs (Nguyen et *al.* [28]). Différentes formules théoriques peuvent être utilisées pour la détermination de la viscosité de particules en suspension dans un fluide. Il est important de mentionner que presque toutes les formules existantes sont dérivées du travail fondamental d'Einstein [29]. Basé sur l'hypothèse que

l'énergie a une dépendance linéaire avec la viscosité, Einstein a déterminé l'énergie dissipée autour d'une seule particule dans un fluide en associant son énergie avec le travail réalisé pour la faire avancer relativement au fluide. À partir de ce résultat, il a déterminé l'expression qui permet d'obtenir la viscosité d'un fluide avec des particules :

$$\mu_{nf} = \mu_f(1 + 2.5\phi) \quad \text{III. 33}$$

Où  $\phi$  est la concentration des nanoparticules et  $\mu$  la viscosité dynamique.

Cette célèbre formule est valide pour une concentration faible de nanoparticules (Drew et Passman, [30]). Depuis la publication d'Einstein, plusieurs travaux théoriques ont été consacrés à l'obtention d'une correction à la formule d'Einstein. Un bref survol est donné par la suite :

Brinkman [31] a amélioré la formule d'Einstein pour arriver à une concentration d'à peu près 4%. Sa formule est la suivante :

$$\mu_{nf} = \frac{\mu_f}{(1 - \phi)^{2.5}} \quad \text{III. 34}$$

À partir des formules ci-dessus, il est évident que la viscosité effective d'un fluide visqueux qui contient des particules en suspension est fonction de la viscosité du fluide de base et du volume de la fraction des particules. En principe, toutes ces formules peuvent être utilisées pour la détermination de la viscosité du nanofluide en assumant que la dépendance de la viscosité est linéaire.

#### III.4.5 La conductivité thermique des nanofluides

Il y a déjà plus d'un siècle, Maxwell a dérivé une formule pour calculer la conductivité thermique effective de mixture solide liquide avec des particules sphériques (Maxwell [32]):

$$\frac{\lambda_{nf}}{\lambda_f} = \frac{(\lambda_{np} + 2\lambda_f) - 2\phi(\lambda_f - \lambda_{np})}{(\lambda_{np} + 2\lambda_f) + \phi(\lambda_f - \lambda_{np})} \quad \text{III. 35}$$

Où  $\lambda_{nf}$ ,  $\lambda_{np}$  et  $\lambda_f$  indiquent la conductivité thermique des nanofluides, des nanoparticules et du fluide de base respectivement, et  $\phi$  la fraction volumétrique de nanoparticules dans le fluide de base.

Tel qu'illustré par l'expression ci-dessus, l'effet de la taille et la forme des particules n'ont pas été inclus dans l'analyse. Il convient aussi de noter que l'interaction entre les particules a été également négligée dans le calcul.

Hamilton et Crosser [33] ont amélioré le modèle de Maxwell afin de tenir compte des formes des particules. Le modèle est le suivant:

$$\frac{\lambda_{nf}}{\lambda_f} = \frac{(\lambda_{np} + (n - 1)\lambda_f) - (1 - n)\phi(\lambda_f - \lambda_{np})}{(\lambda_{np} + (n - 1)\lambda_f) + \phi(\lambda_f - \lambda_{np})} \quad \text{III. 36}$$

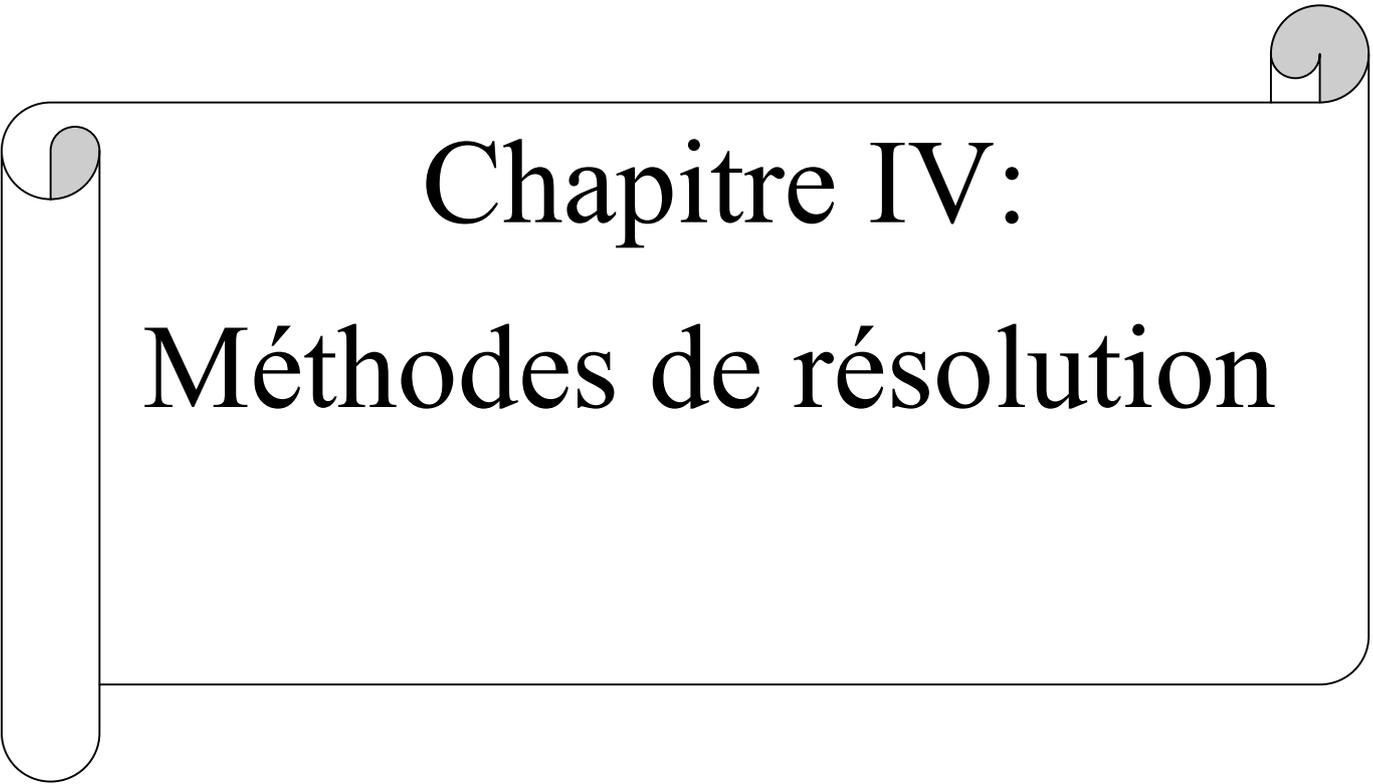
Où  $n$  est le facteur de forme empirique qui est défini comme :

$$n = 3/\Psi$$

Où  $\Psi$  est la sphéricité. La sphéricité est le rapport de la surface d'une sphère avec un volume égal à celui de la particule à la surface de la particule. Pour  $n = 3$  le modèle de Hamilton et Crosser est équivalent au modèle de Maxwell.

### Conclusion

Dans ce chapitre on a défini le problème physique, introduit les équations mathématiques pour trouver à la fin des équations simplifiées et à résoudre avec la méthode de Runge Kutta et de Tiro, ces méthodes et d'autres méthodes numériques feront l'objet de chapitre qui suit.

A decorative graphic of a scroll with a black outline and a light gray shadow. The scroll is unrolled, with the top edge curved upwards and the bottom edge curved downwards. The text is centered on the scroll.

# Chapitre IV:

## Méthodes de résolution

## IV.1 Introduction

Dans ce qui suit, on s'intéressera à l'étude et la résolution des systèmes d'équations différentielles, ces équations n'ont pas de solutions analytiques, et pour cela on utilisera des méthodes numériques afin de trouver des solutions approchées aux solutions exactes.

Dans un premier temps on va remplacer ces équations différentielles par une ou plusieurs équations algébriques, plus facile à résoudre.

Dans un second temps, on procédera à la transformation des conditions aux limites en conditions initiales beaucoup plus simples à résoudre ce qui fait appel à l'utilisation de la méthode de Runge- Kutta d'ordre quatre (RK4) et la méthode de Tir.

## IV.2 Méthode d'Euler

C'est la méthode la plus simple pour résoudre numériquement des équations différentielles d'ordre 1 à une condition initiale. Elle a une bonne interprétation géométrique et son emploi est facile. L'inconvénient est néanmoins qu'elle est peu précise. Toutefois, elle est recommandée pour ceux qui veulent s'initier dans le domaine de l'analyse numérique.

On appelle équation différentielle ordinaire, une équation, ou un système d'équations, dont les fonctions et leurs dérivées successives ne dépendent que d'une seule variable. On appelle ordre de l'équation, le plus fort degré de dérivation apparaissant dans l'équation. Une équation différentielle est dite linéaire, si elle est écrite sous forme d'une combinaison linéaire (coefficients constants) de dérivées successives des inconnues.

Elle s'écrit de la façon suivante :

$$f' = F(x, f) \quad \text{IV. 1}$$

Le passage au domaine discret se fait par un développement en série de Taylor de la solution  $f(x_{i+1})$  au voisinage de  $x = x_i$ , généralement on arrête le développement à un ordre qui dépend de la précision voulue. Si on fait un développement d'ordre deux, on écrit :

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + (x_{i+1} - x_i) \frac{df(x_i)}{dx} + \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2} \frac{d^2f(x_i)}{dx^2} \quad \text{IV. 2}$$

On pose  $x_{i+1} - x_i = \Delta x$  alors :

$$f_{i+1} = f_i + \Delta x \left( \frac{df}{dx} \right)_i + \varepsilon(\Delta x^2) \quad \text{IV.3}$$

$\varepsilon(\Delta x^2)$  est appelée erreur de troncature, et elle est bornée, ce qui est équivalent à écrire :

$$f_{i+1} = f_i + \Delta x \left( \frac{df}{dx} \right)_i \quad \text{IV.4}$$

On obtient alors le schéma d'Euler, qui s'écrit sous la forme :

$$f_{i+1} = f_i + \Delta x F(f_i, x_i) \quad \text{IV.5}$$

Le but est d'appliquer la méthode de Runge-Kutta, qui est très recommandée pour ce genre de problème. Elle nous permet d'aboutir à des solutions approximatives avec une grande précision.

### IV.3 Méthode de Runge-Kutta

#### IV.3.1 Méthode de Runge-Kutta d'ordre N

Les méthodes de Runge-Kutta sont une généralisation de la méthode d'Euler. Ce sont des méthodes très utilisées, qui ont l'avantage d'être faciles à programmer, et surtout d'être stables (peu d'erreurs) et d'une grande précision. Ce sont des méthodes à pas unique, directement dérivées de la méthode d'Euler, elles ont surtout l'immense avantage de ne pas demander autre chose que de connaître les conditions initiales pour démarrer. Cependant un léger inconvénient, du fait qu'elles soient assez consommatrices en temps de calcul.

Cette famille de méthodes explicites plus efficaces et plus pratiques que les méthodes d'Euler est basée sur le schéma numérique suivant :

$$f_{i+1} = f_i + \Delta x \quad \text{IV.6}$$

Avec  $k_j = F(Y_j, x_i + h\xi_j)$ ,  $0 \leq \xi_j \leq 1$

$$Y_j = f_i + \sum_{k=1}^N \chi_{jk} Y_k \quad \text{IV.7}$$

En d'autres termes, on estime la pente de la fonction  $f$  en  $N$  points de l'intervalle  $[x_i, x_i + \Delta x]$ , puis l'on calcule une pente moyenne (c'est le terme  $\sum_{j=1}^N \varpi_j k_j$ ) qui sert alors à calculer l'incrément par la méthode d'Euler. Les coefficients  $\xi_j, \chi_{jk}$  et les poids  $\varpi_j$

sont déterminés en imposant que le schéma (IV.7) soit équivalent à celui qui est associé à la méthode des séries entières d'ordre  $N$ .

### IV.3.2 Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4

On considère l'équation différentielle du premier ordre suivante :

$$f' = F(x, f), \quad f(x_0) = f_0 \quad \text{IV. 8}$$

La méthode de Runge-Kutta d'ordre quatre utilise plusieurs points intermédiaires pour calculer la valeur de  $f_{i+1}$  à partir de la valeur de  $f_i$  :

On considère un point intermédiaire A d'abscisse  $x_i + \Delta x/2$  dont la valeur de l'ordonnée est donnée par :

$$f_{iA} = f_i + \Delta x \left( \frac{df}{dx} \right)_i \quad \text{IV. 9}$$

Puis un point B d'ordonnée :

$$f_{iB} = f_i + \frac{\Delta x}{2} \left( \frac{df}{dx} \right)_{iA} \quad \text{IV. 10}$$

On calcule alors l'ordonnée d'un point C d'abscisse  $x_i + h$  à l'aide de la relation :

$$f_{iC} = f_i + \frac{\Delta x}{2} \left( \frac{df}{dx} \right)_{iB} \quad \text{IV. 11}$$

On pose

$$k_1 = \Delta x \left( \frac{df}{dx} \right)_i, k_2 = \frac{\Delta x}{2} \left( \frac{df}{dx} \right)_{iA}, k_3 = \frac{\Delta x}{2} \left( \frac{df}{dx} \right)_{iB}, k_4 = \Delta x \left( \frac{df}{dx} \right)_{iC} \quad \text{IV. 12}$$

Puisque  $f' = F(x, f)$  on aura donc

$$k_1 = F(x_i, f_i), \quad k_2 = F\left(x_i + \frac{\Delta x}{2}, f_i + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = F\left(x_i + \frac{\Delta x}{2}, f_i + \frac{k_2}{2}\right), \quad k_4 = F(x_i + \Delta x, f_i + k_3)$$

L'ordonnée définitive  $f_{i+1}$  du point d'abscisse  $x_i + \Delta x$  est donnée par la relation :

$$f_{i+1} = f_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \text{IV. 13}$$

- $k_1$  est la pente au début de l'intervalle ;
- $k_2$  est la pente au milieu de l'intervalle, en utilisant la pente  $k_1$  pour calculer la valeur de  $f$  au point  $x_i + \Delta x/2$ ;
- $k_3$  est de nouveau la pente au milieu de l'intervalle, mais obtenue cette fois en utilisant la pente  $k_2$  pour calculer  $f$ ;
- $k_4$  est la pente à la fin de l'intervalle, avec la valeur de  $f$  calculée en utilisant  $k_3$ .

#### IV.4 Méthode de Tirs

À ce point du raisonnement, nous avons seulement considéré les solutions des équations différentielles pour lesquelles les conditions initiales sont connues. Cependant, beaucoup d'applications dans les sciences physiques n'ont pas des conditions initiales, mais plutôt des conditions aux limites. En effet, la méthode de Tir consiste à transformer le problème aux limites en un problème aux valeurs initiales. Elle est basée sur les quatre étapes itératives suivantes :

- On choisit une condition initiale  $X_0$ , qui peut être la vitesse initiale par exemple.
- On résout alors le problème aux conditions initiales par l'une des méthodes précédemment exposées, telle que la méthode de Runge Kutta d'ordre quatre.
- On calcule la valeur de la condition aux limites.
- Si la valeur finale n'est pas atteinte, on modifie la valeur initiale, et on recommence les étapes précédentes jusqu'à l'obtention de la valeur finale souhaitée.

Pour donner au lecteur une idée, nous présentons l'exemple suivant. Soit l'équation différentielle ordinaire du second ordre aux conditions aux limites suivantes :

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = F\left(x, f, \frac{df}{dx}\right), \quad x \in [a, b] \quad \text{IV. 14}$$

Ayant les conditions aux limites suivantes:

$$f(a) = c_1, \quad f(b) = c_2 \quad \text{IV. 15}$$

Nous pouvons encore approcher ce problème par le choix des conditions initiales suivantes :

$$f(a) = c_1, \quad \frac{df(a)}{dx} = e_n \quad \text{IV.16}$$

La constante  $e_n$  doit être déterminée de telle sorte que  $f(b)$  soit égale à  $c_2$ . Elle est généralement arbitraire qui toutefois vérifie le test de convergence :

$$|f(b, e_n) - c_2| \leq \varepsilon \quad \text{IV.17}$$

Avec  $\varepsilon$  nombre réel infiniment petit.

Si le test de convergence n'est pas vérifié il va falloir corriger la valeur de  $e_n$  par le moyen d'une correction de type Newton ; le processus itératif est ainsi poursuivi jusqu'à satisfaction du test de convergence. On présente dans ce qui suit le principe de la correction de Newton :

À partir du développement limité à l'ordre 1 au voisinage de  $e_n$  :

$$f(b, e_{n+1}) = f(b, e_n) + (e_{n+1} - e_n) \frac{df(b, e_n)}{de_n} = c_2 \quad \text{IV.18}$$

On déduit la formule de correction de Newton suivante :

$$e_{n+1} = e_n + \frac{c_2 - f(b, e_n)}{\frac{d}{de_n} f(b, e_n)} \quad \text{IV.19}$$

L'utilisation de la formule de correction (IV.19) nécessite la connaissance préalable de  $G$ . On résout alors le problème aux variations relatives à :

$$\frac{d}{de_n} f(b, e_n) \quad \text{IV.20}$$

Associée à l'équation (IV.14) munie des conditions aux limites (IV.16).

Le problème se présente comme suit :

$$\frac{d}{de_n} \left( \frac{d^2 f}{dx^2} \right) = \frac{d}{de_n} \left( F \left( x, f, \frac{df}{dx} \right) \right), \quad x \in [a, b] \quad \text{IV.21}$$

Avec :

$$\frac{d}{de_n} f(a) = 0, \quad \frac{d}{de_n} f'(a) = 1 \quad \text{IV.22}$$

L'équation (IV.21) munie des conditions aux limites (IV.22) est résolue par la méthode de Range-Kutta d'ordre quatre.

### IV.5 Algorithme de résolution

L'exemple cité précédemment montre bien que le problème consiste à chercher la valeur appropriée de  $e_n$ , qui satisfait le problème original, l'algorithme est comme suit :

- On résout l'équation différentielle pour des conditions initiales quelconques
- $y(a) = c_1$  et  $y'(a) = e_n$ .
- On évalue pour  $x = b$ , la valeur de  $f(b)$ , puis on compare cette valeur à la valeur recherchée.
- On ajuste la valeur de  $e_n$  jusqu'au niveau de précision désiré.
- Une fois que l'on obtient par itérations successives, la valeur cible voulue avec la précision désirée, on affiche les conditions initiales trouvées.

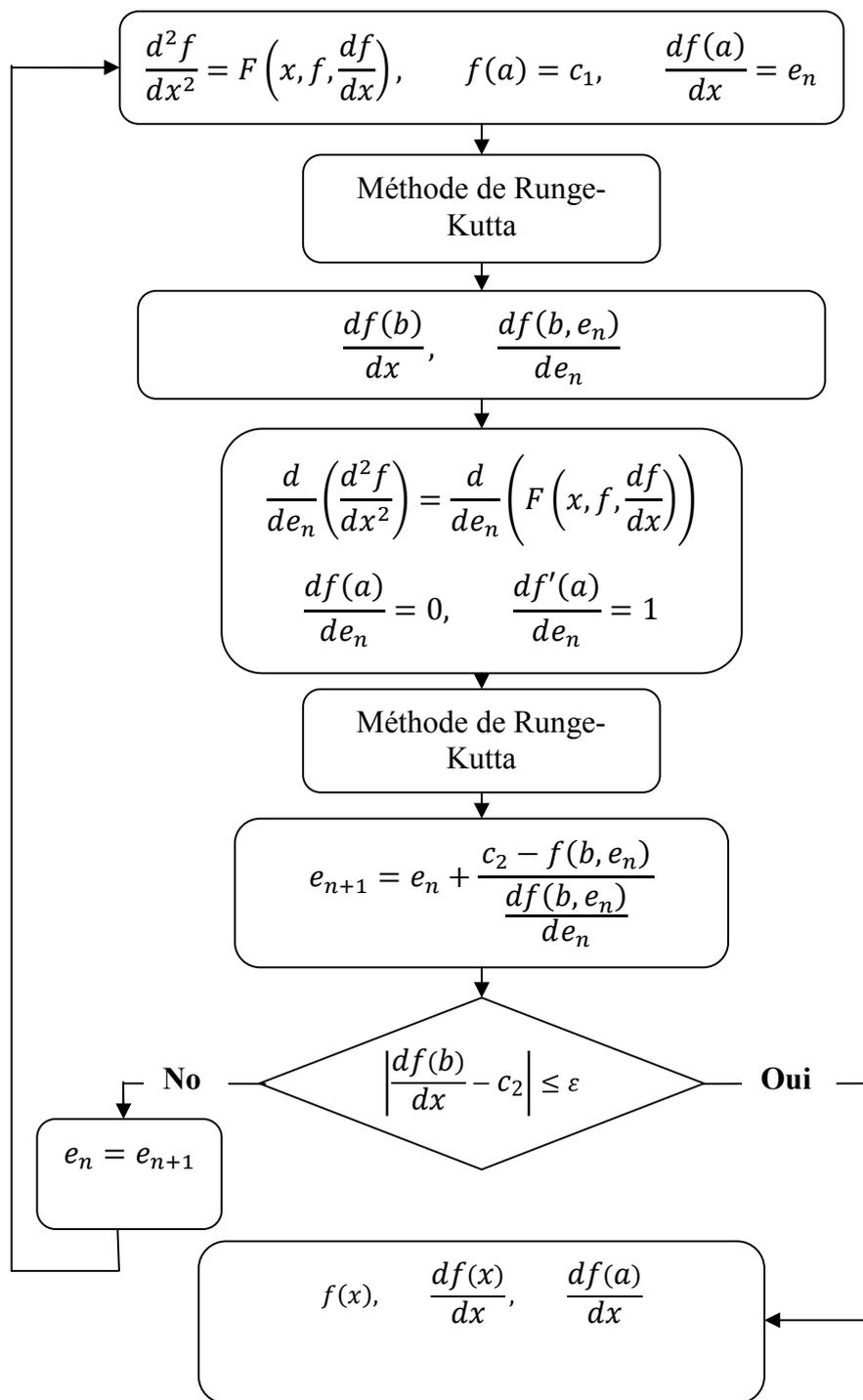
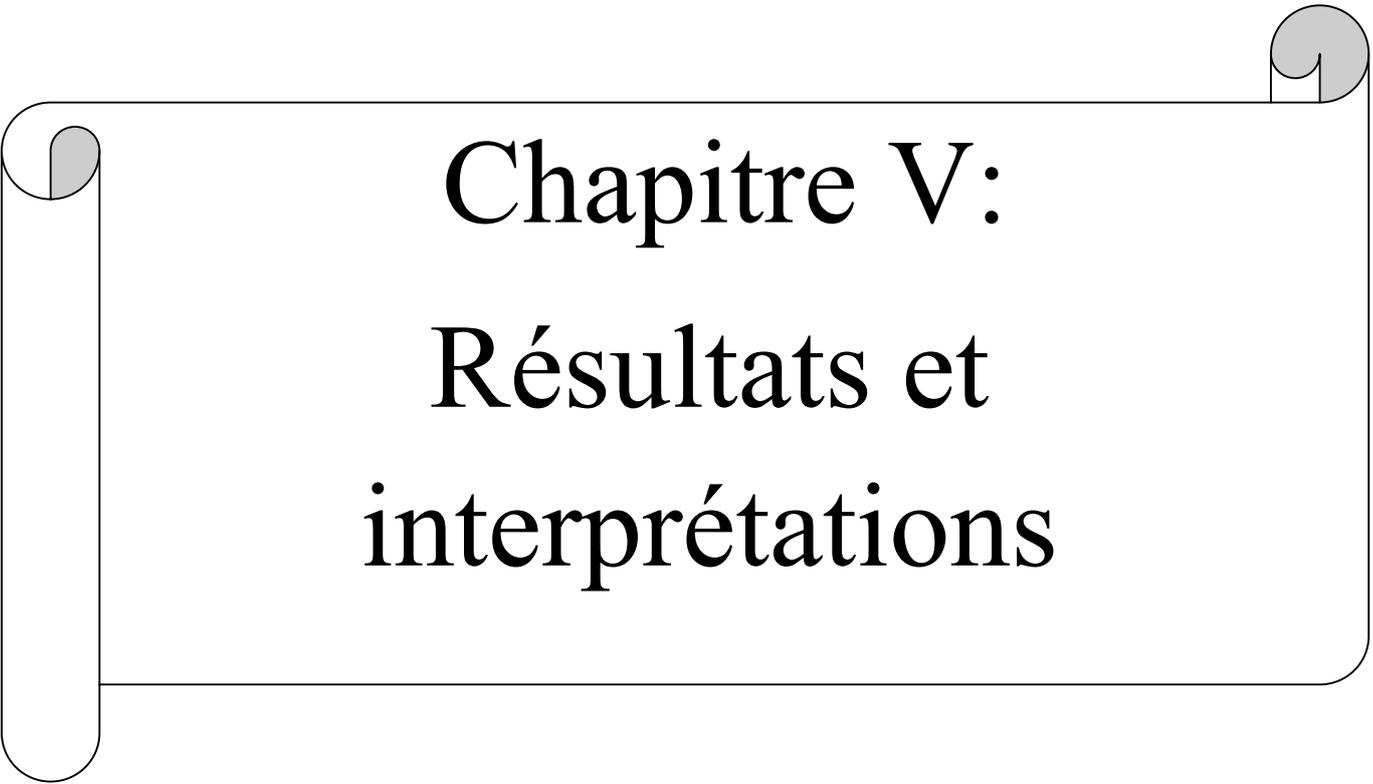


Fig. IV.1 Organigramme général de résolution (Méthode de Tir).

**Conclusion**

Dans ce chapitre nous avons présenté brièvement les méthodes de résolutions des équations utilisées dans notre étude. Nous avons aussi présenté l'algorithme de la méthode de Tir et de Runge Kutta. Dans le chapitre suivant nous allons présenter les résultats issus de la simulation sur MATLAB.

A decorative graphic of a scroll with a black outline and rounded corners. The scroll is partially unrolled, with the top and bottom edges showing a greyish shadow. The text is centered within the scroll.

Chapitre V:  
Résultats et  
interprétations

## V.1 Introduction

Les résultats obtenus dans ce travail ainsi que la démarche suivie font l'objet de ce chapitre. Nous rappelons que notre étude concerne un jet de nanofluide sur une plaque chauffée, déformable et avec glissement. Du fait de l'existence d'un transfert thermique, il y'a un couplage entre l'aspect dynamique et thermique du problème. L'étude est axée sur l'influence de la fraction volumique, le type des nanoparticules, le paramètre d'étirement/rétrécissement et le coefficient de glissement sur l'aspect thermique et dynamique de l'écoulement le long de la paroi. Pour cette étude nous avons utilisé les équations de Navier-Stokes et de l'énergie simplifiées au voisinage de la paroi pour mettre en évidence le développement de la couche limite.

Pour avoir une idée globale du comportement des nanofluides nous avons considérés quatre différents types de nanoparticules, à savoir le cuivre (Cu), l'argent (Ag), l'alumine ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ ) et l'oxyde de titan ( $\text{TiO}_2$ ) avec l'eau comme fluide de base. Les propriétés thermo-physiques du fluide de base et des nanoparticules sont énumérées dans le tableau (V. 1). Le nombre de Prandtl du fluide de base (l'eau) est maintenu constant à 6,2. Il est à noter que la présente étude se réduit à celui d'un fluide visqueux ou régulière lorsque  $\phi = 0$ . Les résultats présentés dans cette section sont obtenus en faisant varier la fraction volumique solide  $\phi$  pour différentes nanoparticules, le paramètre d'étirement/rétrécissement  $b$  et le coefficient de glissement  $\delta$ , le domaine de variation pour la fraction volumique est compris entre (0 et 0.2),

**Tableau V. 2** Propriétés thermo-physiques du fluide de base et les nanoparticules

	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	$C_p$ (J/kg K)	$\lambda$ (W/m K)	$\beta \times 10^{-5}$ (1/K)
Eau pure (H <sub>2</sub> O)	997.1	4179	0.613	21
cuivre (Cu)	8933	385	401	1.67
argent (Ag)	10500	235	429	1.89
Alumine (Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> )	3970	765	40	0.85
Titan (TiO <sub>2</sub> )	4250	686.2	8.9538	0.82

## V.2 Formulation des équations du problème posé

Les équations gouvernantes sont connues, et ont été présentées dans le chapitre précédent, le système d'équation différentielles ordinaire obtenu est :

$$J_1 f'''' + f f'' + 1 - f'^2 = 0 \quad \text{V.1}$$

$$\theta'' + J_2 Pr f \theta' = 0 \quad \text{V.2}$$

La fonction dynamique ( $f$ ) et ses dérivées ainsi que la fonction thermique ( $\theta$ ), dépendent de la variable adimensionnelle ( $\eta$ ).

Les conditions aux limites pour  $f$  et  $\theta$  sont:

$$f(0) = 0 \quad , \quad f'(0) = b + \sigma f''(0) \quad , \quad \theta(x, 0) = 1 \quad \text{V.3}$$

$$\eta \rightarrow \infty \quad , \quad f'(\eta) \rightarrow 1 \quad , \quad \theta(\eta) = 0 \quad , \quad \text{V.4}$$

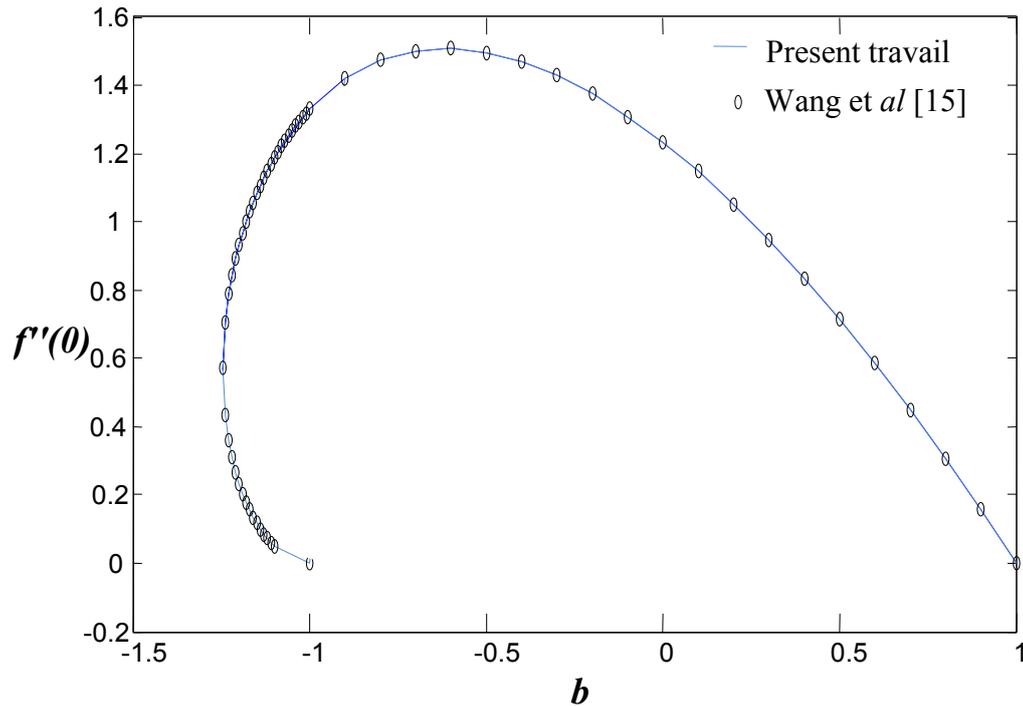
Avec

$$b = \frac{c}{a}, \quad \sigma = L \left( \frac{a}{\nu} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{V.5}$$

Où ( $b > 0$ ) correspond à l'étirement et ( $c < 0$ ) à un rétrécissement de la surface.

## V.3 Validations des résultats

Tout d'abord, en ce qui concerne l'écoulement de base, le profil du coefficient de frottement à la paroi  $f''(0)$  est présenté dans la figure(V.1), qui montrent un accord favorable avec les résultats obtenus par Wang et al [15]. Spécialement, les résultats confirment la présence de deux solutions pour une gamme de valeurs de  $b$  dans le cas de rétrécissement comme indiqué par les auteurs précédents. La figures (V.1) montre l'existence des solutions doubles lorsque  $b < -1$ . On voit que la solution existe jusqu'à une valeur critique du paramètre d'étirement/rétrécissement ( $b_c$ ), aucune solution n'existe lorsque  $b < b_c$  et une solution unique est possible lorsque  $b > -1$ .



**Fig. V. 1** Coefficient de frottement en fonction de  $b$ .

#### V.4 Caractéristique dynamique

Cette section concerne uniquement les résultats issus de la résolution de l'équation du mouvement. En analysant cette équation, on déduit qu'elle dépend que de paramètre adimensionnel ( $J_1$ ) qu'est en fonction de la fraction volumique, ainsi que les conditions aux limites, le rapport d'étirement/rétrécissement et le coefficient de glissement.

La détermination des champs dynamique, représenté par les fonctions  $f$ ,  $f'$ ,  $f''$  permet le calcul de toutes les caractéristiques de la couche limite dynamique. La fonction  $f(\eta)$  et sa dérivée  $f'(\eta)$  sont représentées respectivement sur les figures (V.2 – V.8).

Les profiles de  $f$  pour différentes valeurs de la fraction volumique  $\varphi$ , le coefficient de glissement  $\sigma$  et le rapport d'étirement/rétrécissement  $b$  sont représenté sur les figures (V.2- V.4), on remarque a partir de ces figures que le profile  $f$  augmente avec l'augmentation de la fraction volumique pour les deux solutions. En outre on remarque que le profile  $f$  augmente avec l'augmentation de  $\delta$  pour la première solution, pour la deuxième solution le comportement de  $f$  est opposé à celui de la première solution. Pour la première solution avec des valeurs croissantes

de  $b$  le profil  $f$  augmente, cependant le profil diminue avec l'augmentation de  $b$  pour la deuxième solution.

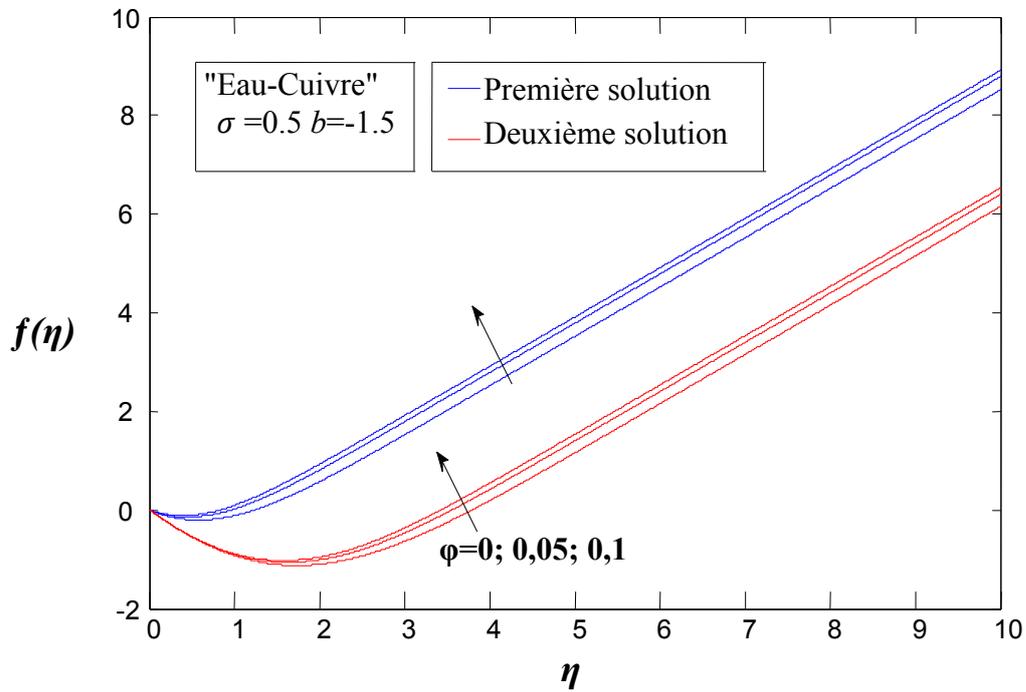


Fig. V. 2 Effet de la fraction volumique sur le profil de  $f$ .

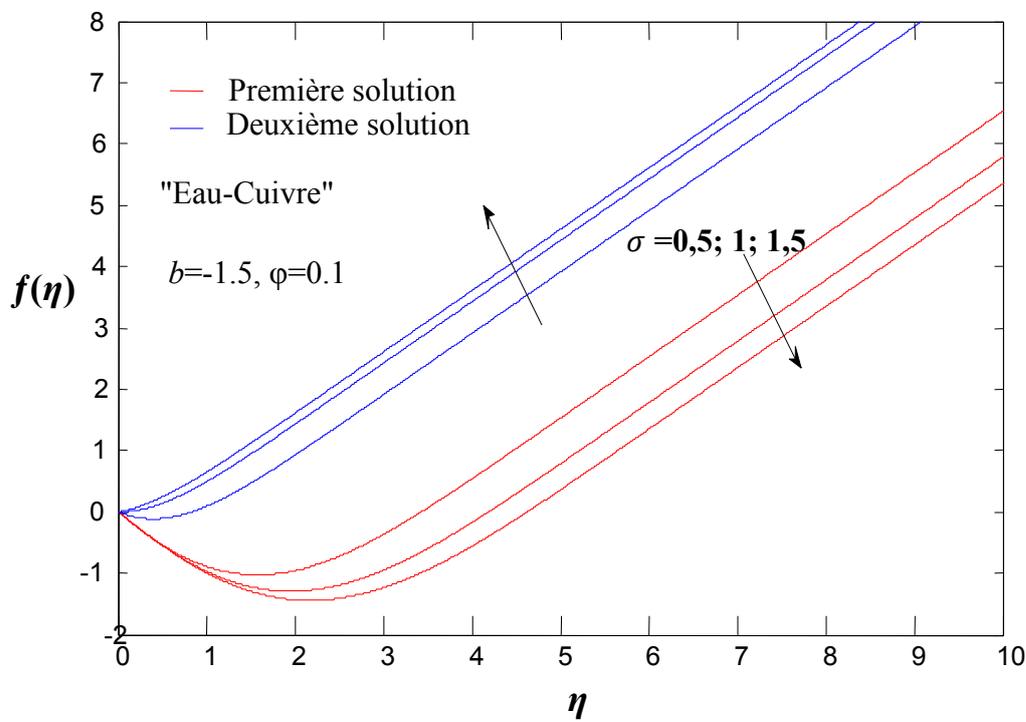


Fig. V. 3 Effet de coefficient de glissement sur le profil de  $f$ .

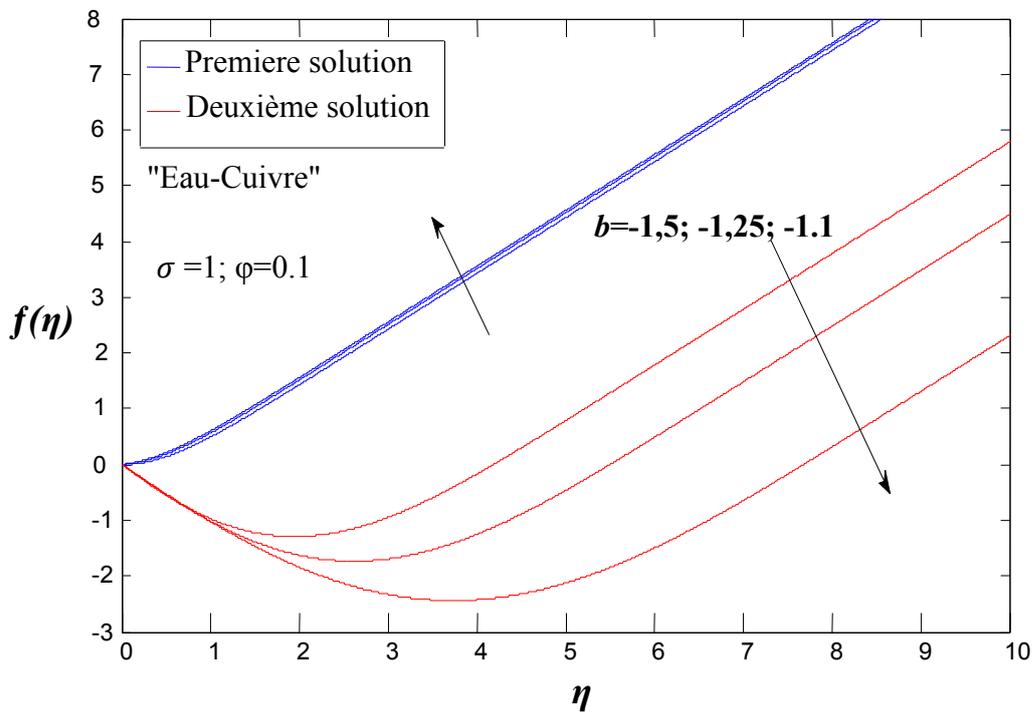


Fig. V. 4 Effet de rapport d'étirement/rétrécissement sur le profil de  $f$ .

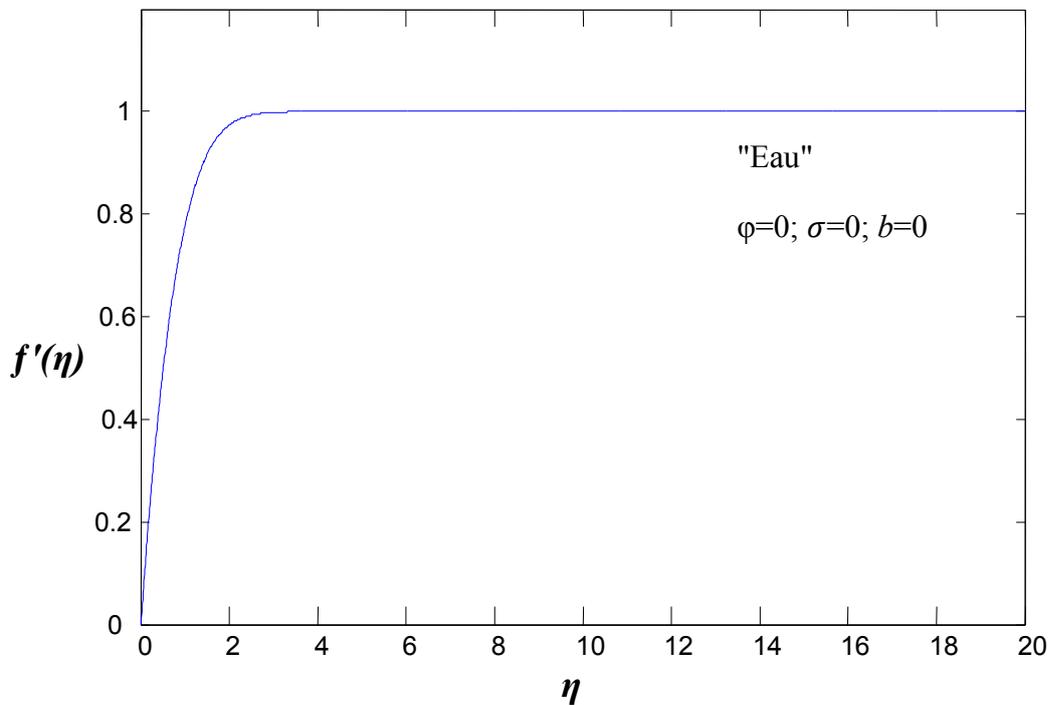


Fig. V. 5 Le profil de vitesse  $f'$  en fonction de la variable adimensionnel  $\eta$  pour un fluide conventionnel (eau).

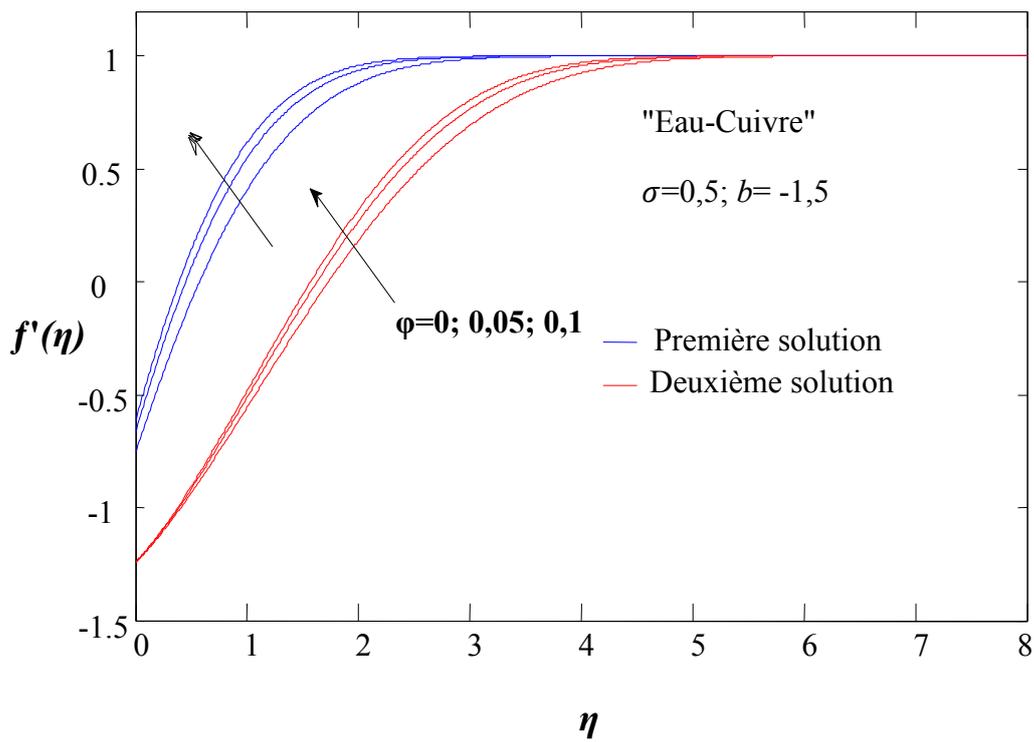


Fig. V. 6 Effet de la fraction volumique sur le profil de vitesse.

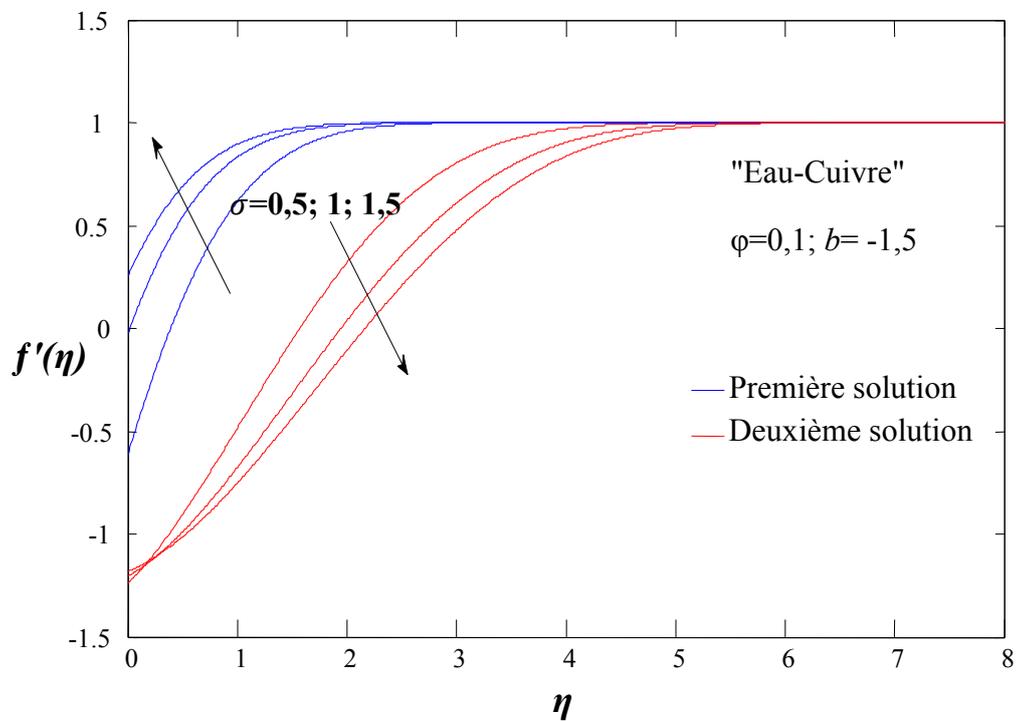
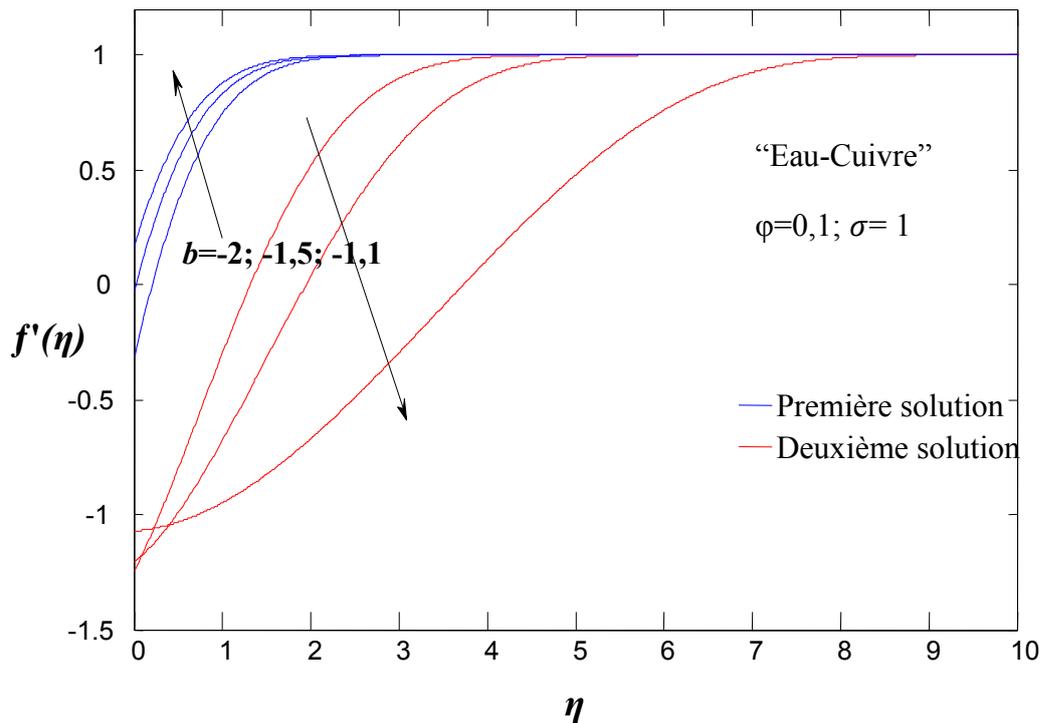


Fig. V. 7 Effet de coefficient de glissement sur le profil de vitesse.



**Fig. V. 8** Effet de rapport d'étirement/rétrécissement sur le profil de vitesse.

Les figures (V.5-V.8) représentent la variation de profil de vitesse  $f'$  en fonction de la variable adimensionnel ( $\eta$ ), qui est la vitesse adimensionnel ( $u/U_\infty$ ). Nous avons ainsi la variation du champ des vitesses suivant ( $\eta$ ) en fonction de la fraction volumique  $\varphi$ , le coefficient de glissement  $\sigma$  et le rapport d'étirement/rétrécissement  $b$ . On remarque que la fraction volumique accélère l'écoulement et que la valeur de  $f'$  augmente avec l'augmentation de la fraction volumique pour les deux solutions, en plus on remarque que le profil  $f'$  augmente avec l'augmentation de  $\delta$  pour la première solution, pour la deuxième solution bien que le comportement initial (faible valeurs de  $\eta$ ) est identique à celui de la première solution, pour de grandes valeurs de  $\eta$  le comportement est complètement opposé. Pour la première solution avec des valeurs croissantes de  $b$  le profil  $f'$  augmente, cependant le profil diminue avec l'augmentation de  $b$  pour la deuxième solution.

Il convient de noter que l'épaisseur de la couche limite dynamique pour la deuxième solution est plus grande celle de la première solution.

La valeur de ( $f' = 1$ ) est une asymptote horizontale. Ce qui permet d'affirmer que l'on est effectivement en présence d'un écoulement de couche limite.

Il se trouve que seul le profil de vitesse pour ( $b > -1$ ) présente les caractères identiques à ceux des profils de vitesse pour la première solution de figure (V.8), donc la première solution est physiquement stable car la première solution est la seule solution lorsque ( $b > -1$ ).

### V.5 Coefficient de frottement

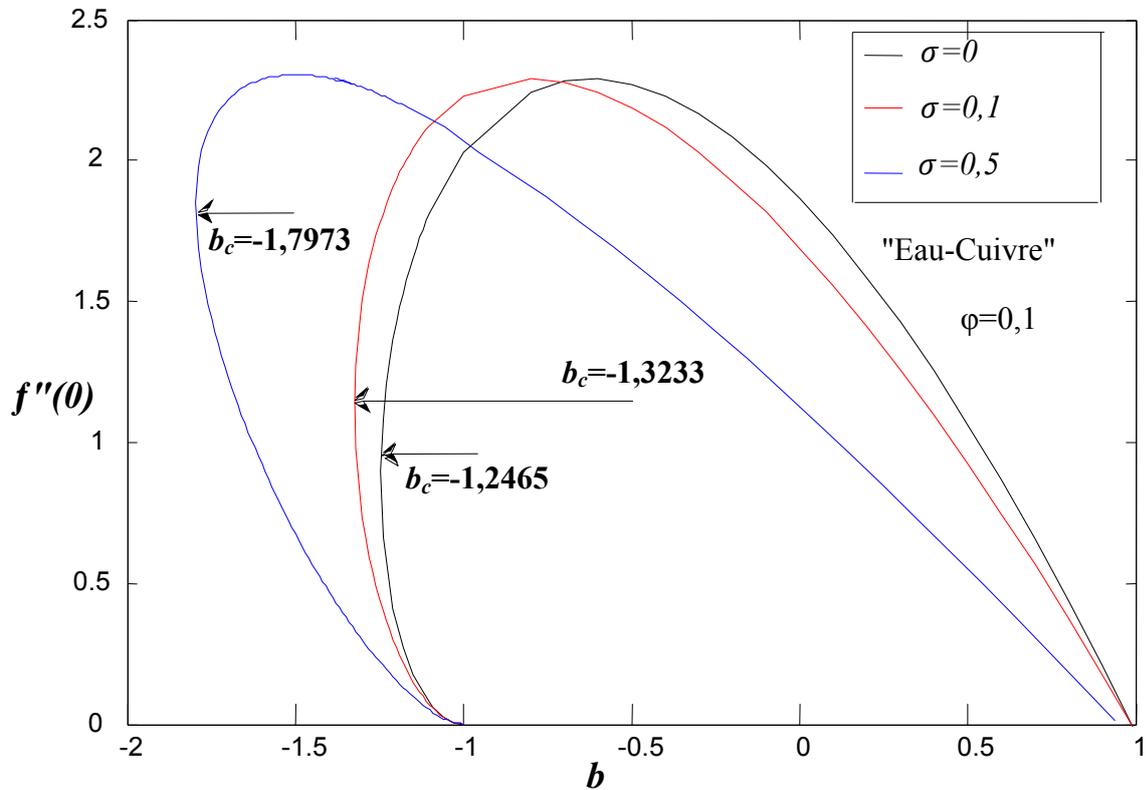
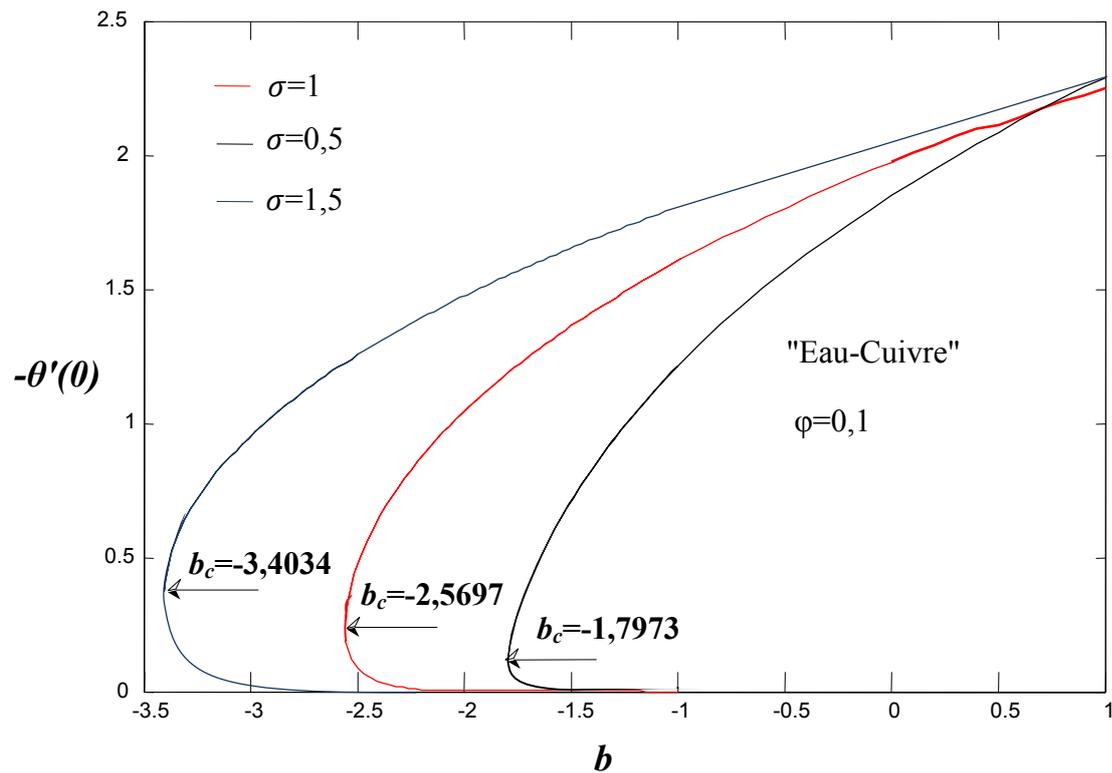


Fig. V. 9 Coefficient de frottement pour différentes valeurs de glissement.

La figure (V.9) représente le coefficient de frottement  $f''(0)$  en fonction de rapport d'étirement/rétrécissement  $b$  pour différentes valeurs de glissement  $\sigma$ , on remarque l'existence d'une solution unique pour des valeurs de  $b$  entre  $-1$  et  $1$  et non existence de solution pour des valeurs supérieures à  $1$  et inférieures à une valeur critique, existence de double solution dans l'intervalle  $[b_c; -1]$ . On constate qu'avec une amélioration supplémentaire de la valeur du paramètre de glissement  $\delta$  provoque l'augmentation de la gamme d'existence de la solution de similarité et la gamme des solutions doubles augmente.



**Fig. V. 10** Gradients de température à la surface pour différentes valeurs du paramètre de glissement.

Les valeurs de gradient de température  $-\theta'(0)$  en fonction de  $b$  pour différentes valeurs de  $\sigma$  qui est proportionnel aux transferts de chaleur est représenté sur la figure (V.10). On remarque que le transfert augmente avec des valeurs croissantes de  $b$  et  $\delta$  en cas de première solution et le taux diminue avec l'augmentation de  $b$  et  $\sigma$  pour la seconde solution.

V.6 Effet des nanoparticules sur le transfert de chaleur

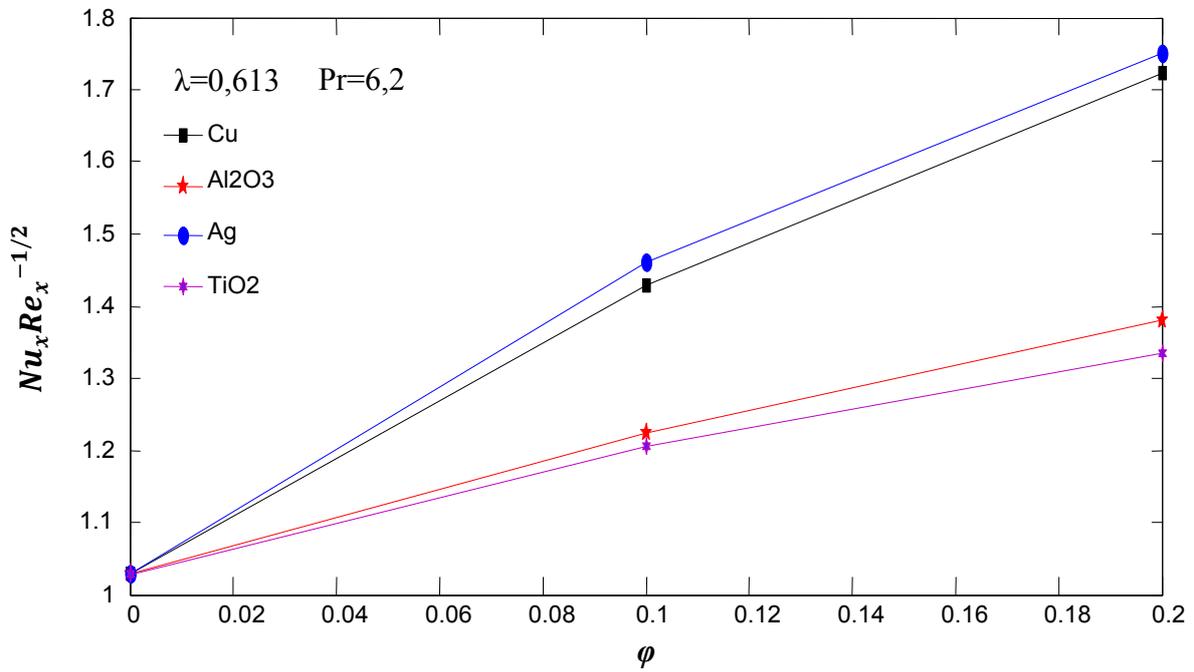


Fig. V.11 Nusselt locale en fonction de la fraction volumique pour quatre types de nanoparticules.

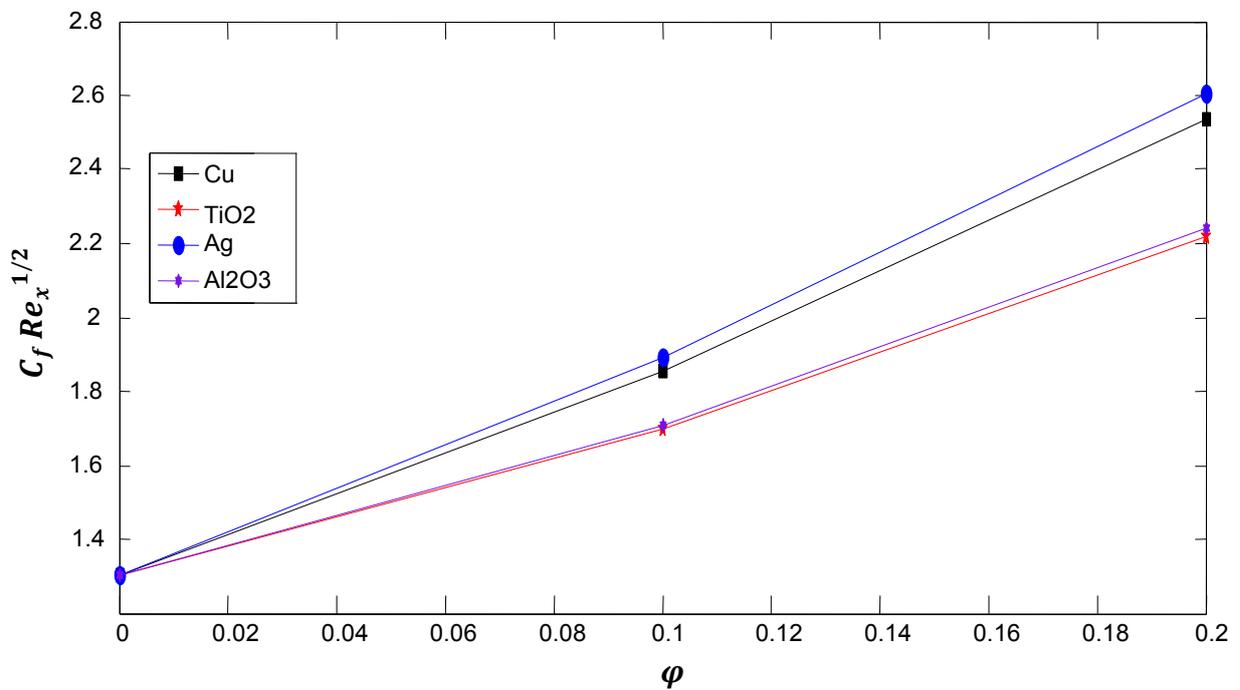


Fig. V.12 Coefficient de frottement en fonction de la fraction volumique pour quatre types de nanofluides.

Les résultats des profils de coefficient de frottement et de Nusselt locale sont présentés sur les figures (V.11, V.12), ces figures montrent que le coefficient de frottement et le Nusselt local est supérieur pour des nanoparticules en cuivre (Cu) et en argent (Ag) que pour le titan ( $\text{TiO}_2$ ) et l'alumine ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ ), ceci est dû aux propriétés physiques des fluides et des nanoparticules (conductivité thermique de Cu et de Ag est beaucoup plus supérieur à celles de  $\text{TiO}_2$  et  $\text{Al}_2\text{O}_3$ ).

Une faible valeur de diffusivité thermique conduit à une augmentation des gradients de température et par conséquent, une augmentation plus élevée des transferts de chaleur.

Il est à noter que le taux plus bas de transfert de chaleur est obtenu pour les nanoparticules  $\text{TiO}_2$ , c'est parce que le  $\text{TiO}_2$  a la conductivité thermique la plus basse par rapport au Cu et  $\text{Al}_2\text{O}_3$ , comme présenté dans le Tableau (V.1).

### V.7 Caractéristique thermique

Cette section concerne les résultats issus de la résolution de l'équation d'énergie. En analysant cette équation on déduit qu'elle dépend de nombre de Prandtl et de paramètre adimensionnel ( $J_2$ ) qu'est en fonction de la fraction volumique et de la conductivité thermique en plus des conditions aux limites, de rapport d'étirement/rétrécissement et de coefficient de glissement.

La détermination des champs thermiques est représentée par les fonctions  $\theta$ ,  $\theta'$  permet le calcul de toutes les caractéristiques de la couche limite thermique. La fonction  $\theta(\eta)$  et sa dérivée  $\theta'(\eta)$ , sont représentées respectivement sur les figures (V.13 - V.16).

Dans un premier temps on a tracé le profile de température en fonction de la variable adimensionnel ( $\eta$ ) pour un fluide de base (eau) sans présence de nanoparticules et sans glissement sur une plaque plane non déformable (figure V.13), on remarque que la température diminue en s'éloignant de la paroi, la température est maximale à la paroi  $T_w$  et minimale loin de la paroi  $T_\infty$ .

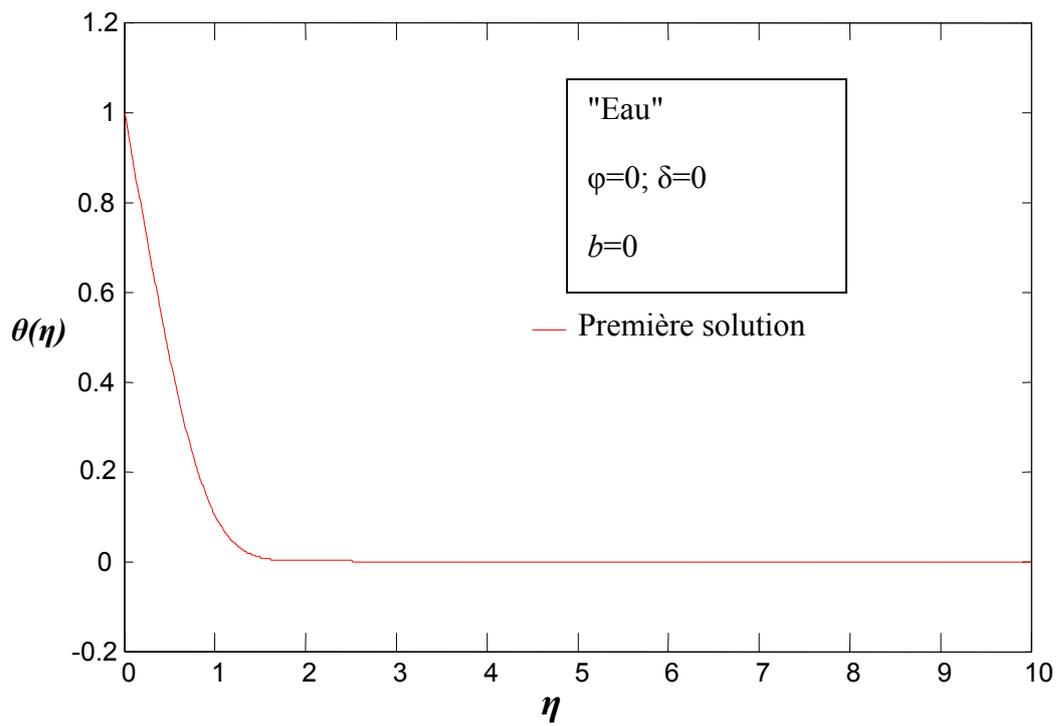


Fig. V. 13 Profil de température en fonction de la variable adimensionnel  $\eta$ .

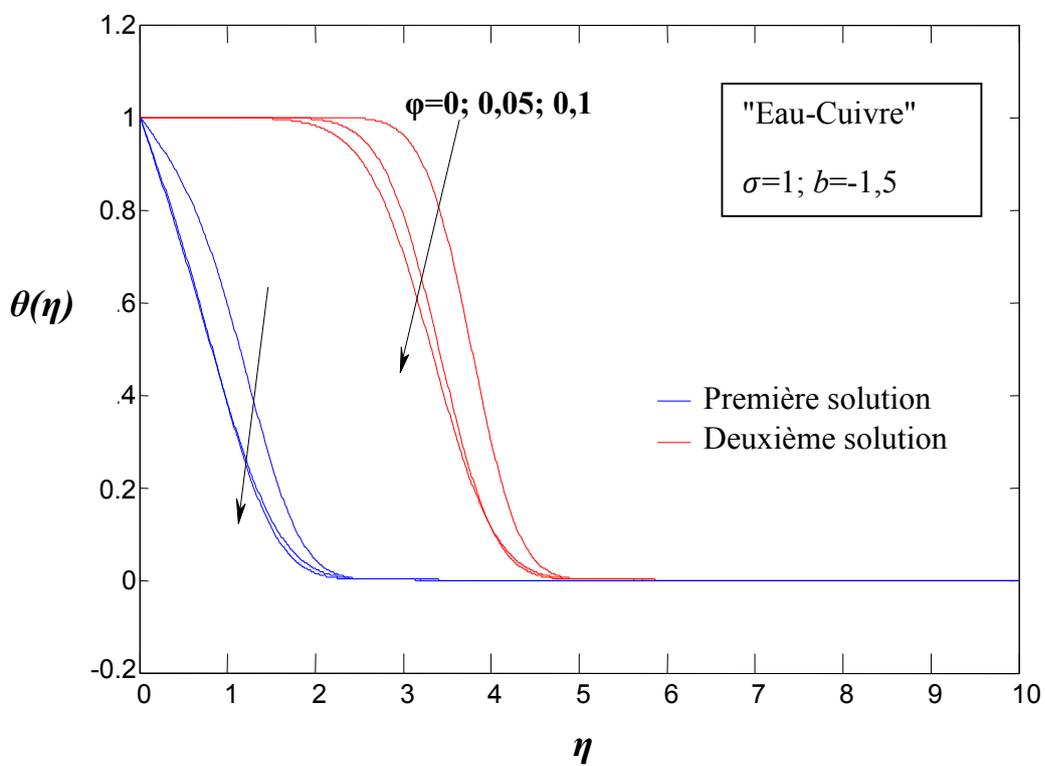
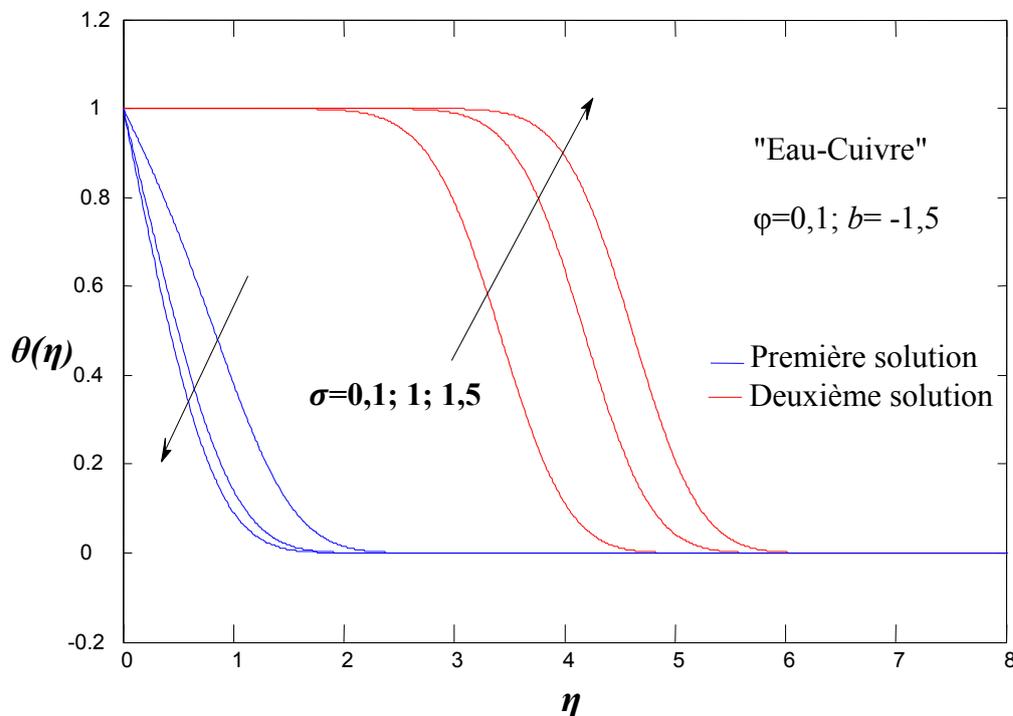


Fig. V. 14 Effet la fraction volumique sur le profil de température.

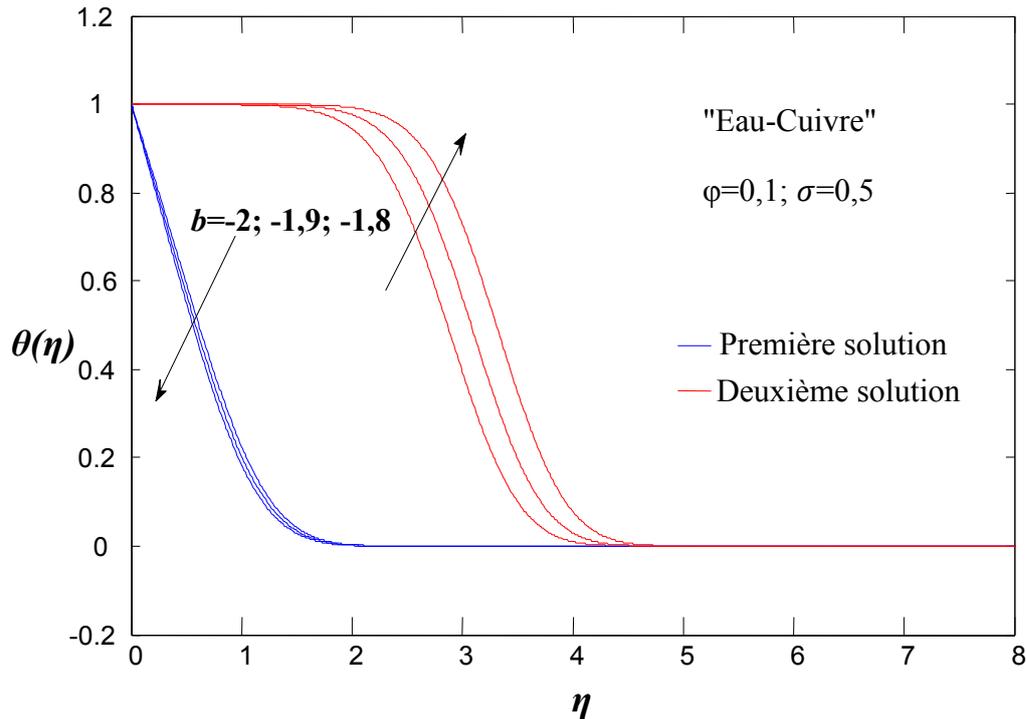
La figure (V.14) représente la variation de la température adimensionnelle  $\theta$  en fonction de la variable adimensionnelle ( $\eta$ ) pour différentes valeurs de la fraction volumique, tout on fixant le coefficient de glissement  $\sigma=1$  et le rapport d'étirement/rétrécissement  $b=-1.5$ . On remarque que l'épaisseur de la couche limite pour la deuxième solution est supérieure à celle de la première solution, les nanofluides sont capable de changer significativement le profil de température dans la couche limites, par conséquent, les épaisseurs de la couche limite thermique est plus minces en augmentant la fraction volumique. En autre, on remarque à partir de ces données que la valeur de la température adimensionnelle  $\theta$  diminue avec l'augmentation de la fraction volumique pour les deux solutions.



**Fig. V. 15** Effet de glissement sur le profil de température.

La figure (V.15) représente la variation du profil de température adimensionnelle  $\theta$  en fonction de la variable adimensionnelle ( $\eta$ ) pour différentes valeurs du coefficient de glissement  $\sigma=0.1$ ;  $\sigma=1$ ;  $\sigma=1.5$ , tout on fixant la fraction volumique  $\varphi=0.1$  et le rapport d'étirement/rétrécissement  $b=-1.5$ . D'après cette figure on a constaté que l'épaisseur de la couche limite pour la deuxième solution est supérieure à celle de la première solution. En autre, on remarque que le profile de température  $\theta$  augment avec l'augmentation de coefficient de glissement pour la deuxième solution et diminue pour la première solution.

On remarque aussi que les conditions aux limites sont vérifiées  $\theta(\eta)=0$  ( $T= T_{\infty}$ ) loin de la paroi et  $\theta(\eta)=1$  ( $T= T_{\infty}$ ) (à la paroi).



**Fig. V.16** Effet de rapport d'étirement/rétrécissement sur le profil de température.

La figure (V.16) représente la variation du profil de température  $\theta(\eta)$  en fonction de la variable adimensionnelle ( $\eta$ ) pour différentes valeurs du rapport d'étirement/rétrécissement ( $b=-2; -1,9; 1,8$ ), tout on fixant la fraction volumique  $\varphi=0,1$  et le coefficient de glissement  $\sigma=1$ . D'après cette figure on a constaté que l'épaisseur de la couche limite pour la deuxième solution est supérieure à celle de la première solution. En autre, on remarque que la valeur de la température  $\theta$  augment avec l'augmentation de coefficient de glissement pour la deuxième solution et diminue pour la première solution, les conditions aux limites (V.3 et V.4) sont vérifiées.

Les profils de  $\theta'$  pour différentes valeurs de la fraction volumique  $\varphi$ , de coefficient de glissement  $\sigma$  et de rapport d'étirement/rétrécissement  $b$  sont représentés sur les figures (V.17-V.19), on remarque a partir de ces figures que le profil  $\theta'$  augmente avec l'augmentation de la fraction volumique  $\varphi$  et cela pour des grandes valeurs de la distance adimensionnelle ( $\eta$ ), mais pour les petites valeurs de cette distance on remarque l'effet inverse. En outre on remarque aussi que le profil  $\theta'$  augmente avec l'augmentation de  $\delta$  pour les grandes valeurs de ( $\eta$ ) et avec un comportement opposé de  $\theta'$  on tenant compte a des petites valeurs de ( $\eta$ ). Pour les grandes valeurs de ( $\eta$ ) avec des valeurs croissantes de  $b$  le profil  $\theta'$  augmente, cependant le profil diminue avec l'augmentation de  $b$  pour des valeurs de tend vers 0.

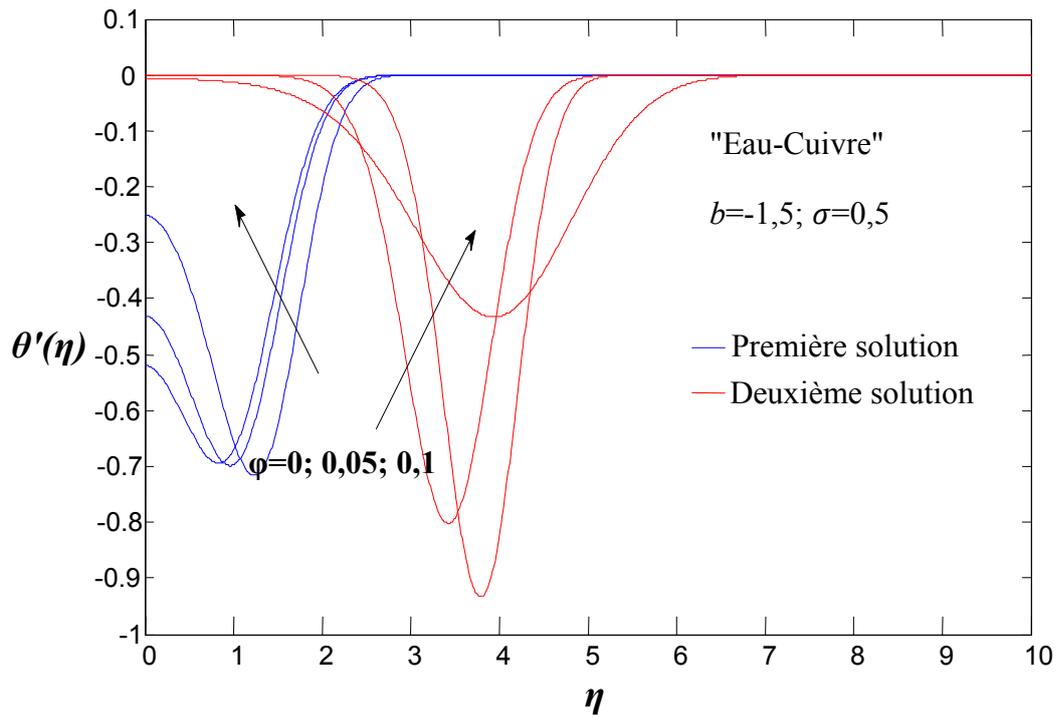


Fig. V. 17 Le profile de  $\theta'$  en fonction de la fraction volumique.

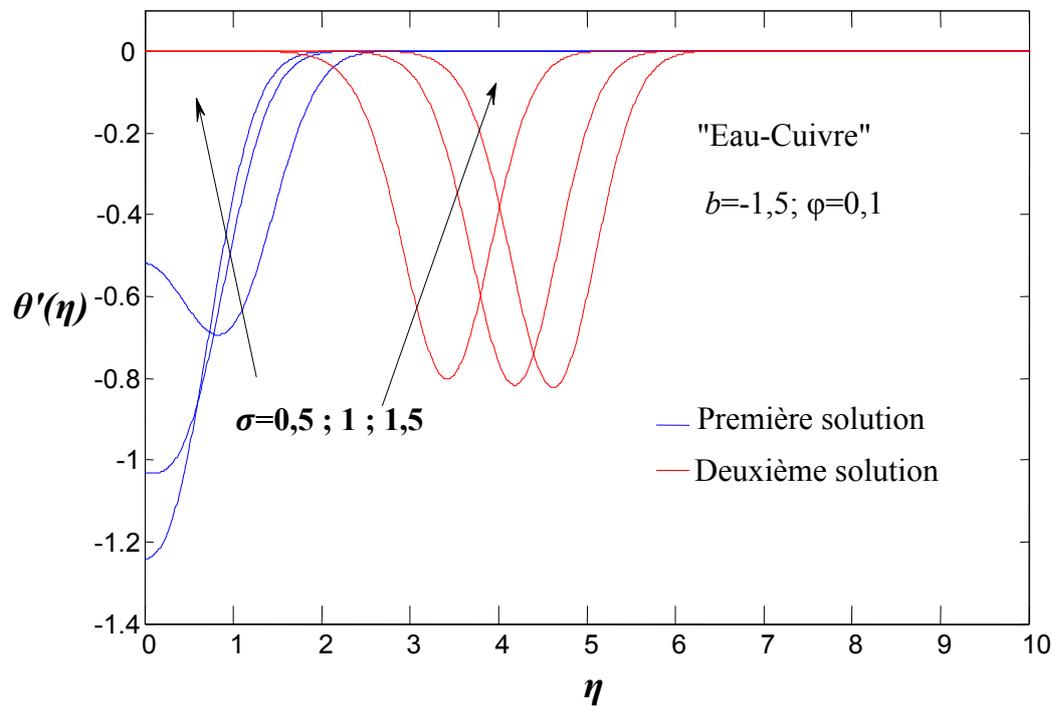


Fig. V. 18 Le profile de  $\theta'$  en fonction de coefficient de glissement.

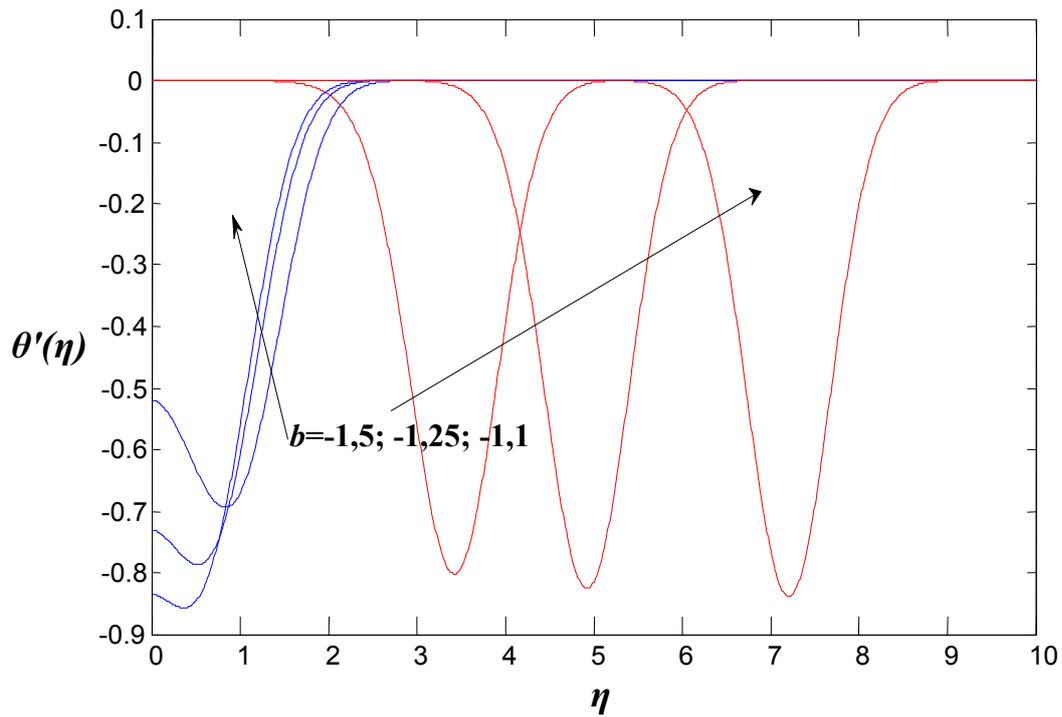


Fig. V. 19 Le profile de  $\theta'$  en fonction de rapport d'étirement/ rétrécissement.

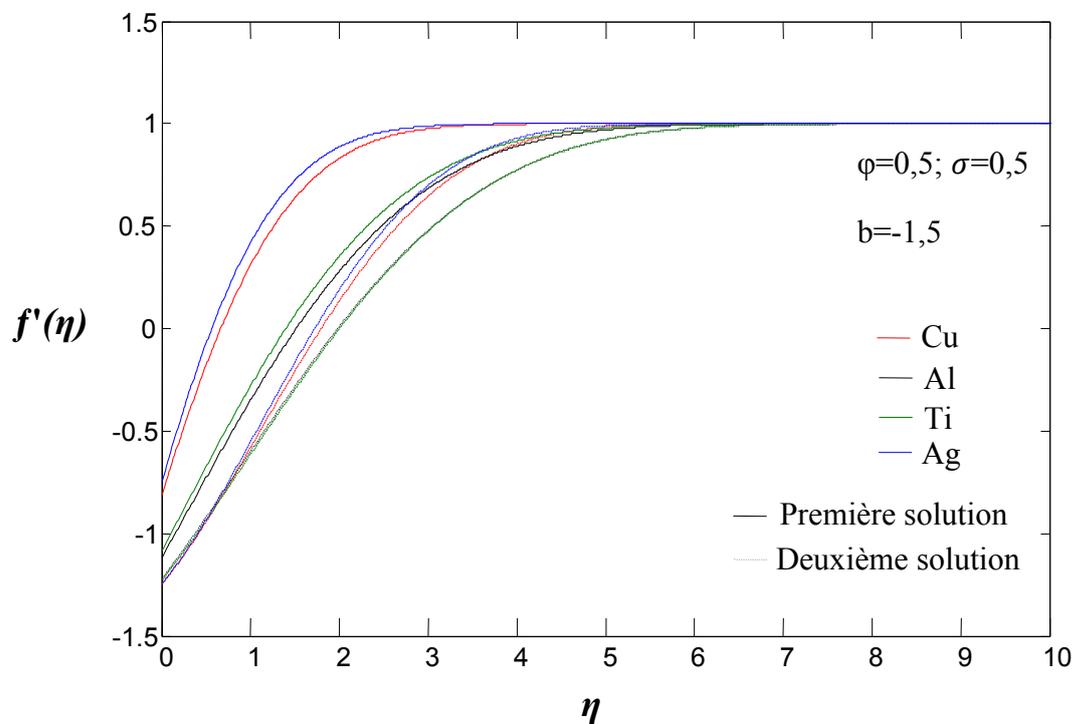
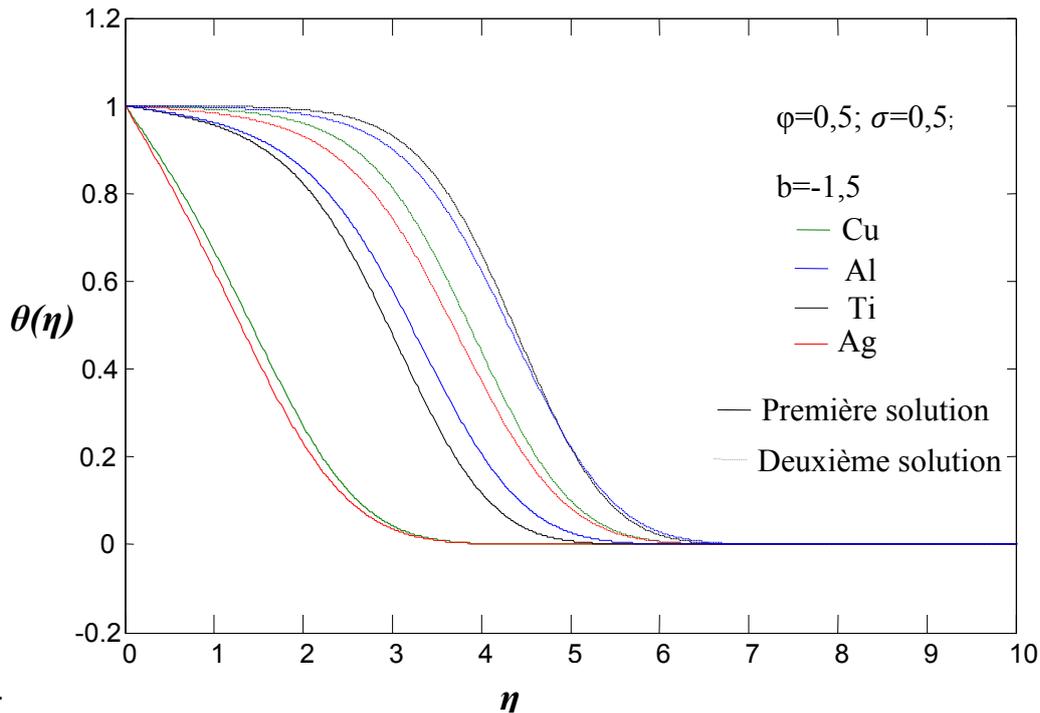


Fig. V. 20 Le profile de vitesse en fonction de la vitesse adimensionnelle pour quatre types de nanoparticules.

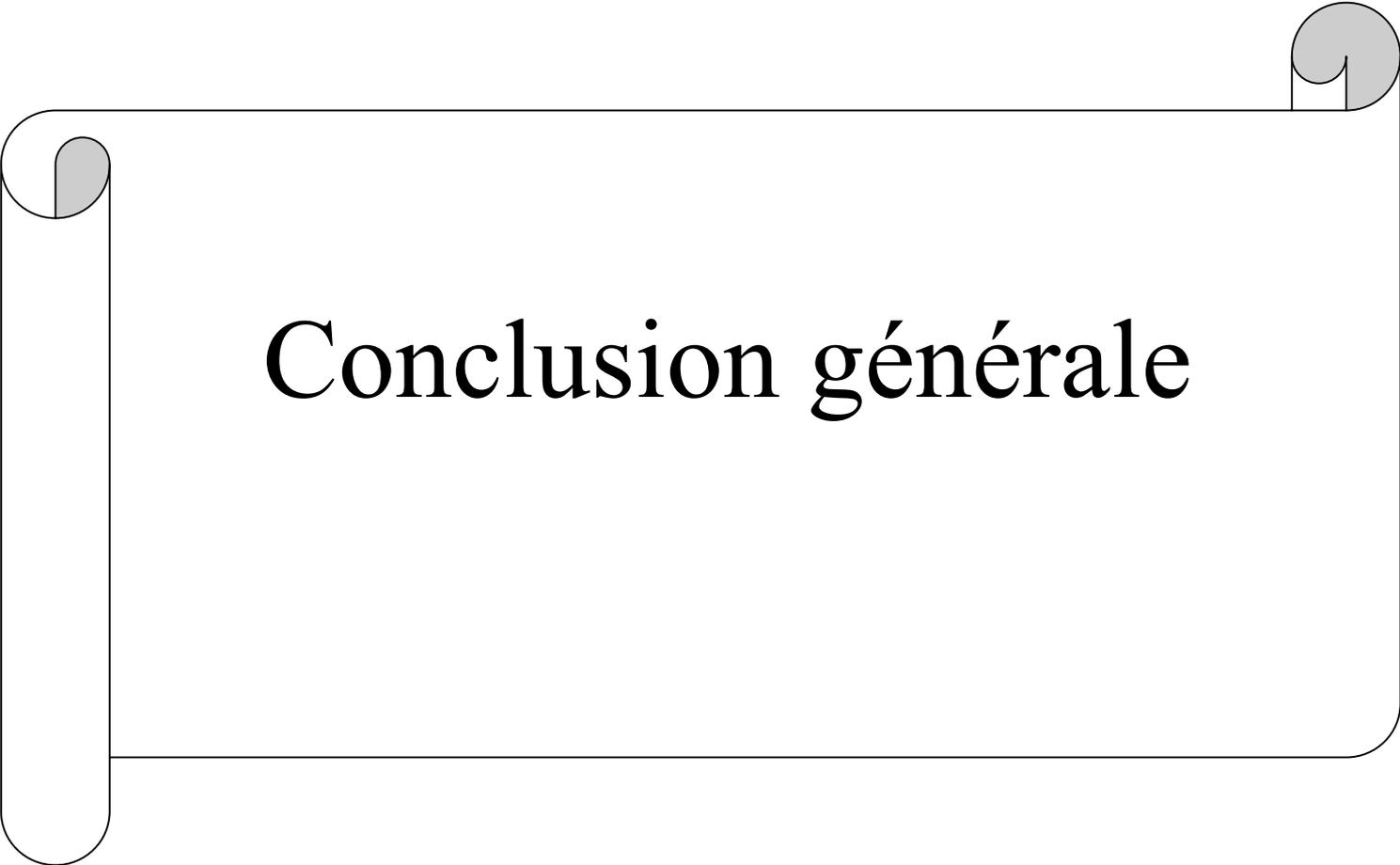


**Fig. V. 21** Le profil de température en fonction de la variable adimensionnel  $\eta$  pour quatre types de nanoparticules.

Les figures (V.20 et V.21) représentent la variation du profil de température  $\theta$  et de profil de vitesse  $f'$  en fonction de la variable adimensionnelle ( $\eta$ ) pour différents types de nanoparticules (Cu;  $\text{Al}_2\text{O}_3$ ; Ag ;  $\text{TiO}_2$ ), on fixant la fraction volumique à  $\phi=0.1$ , le coefficient de glissement  $\sigma=0.5$  et le rapport d'étirement/rétrécissement  $b=-1.5$ . On remarque que la présence de nanoparticules dans un fluide conventionnel augmente le profil de vitesse et le profil de température. En outre, on remarque que les nanoparticules en argent (Ag) et en cuivre (Cu) donnent des grands allures de profil de température  $\theta$  et de vitesse  $f'$  par rapport aux autres nanofluides et tout cela est à cause des propriétés physiques de ces nanoparticules. Une vérification des conditions aux limites à la paroi et de la paroi.

## Conclusion

Dans cette étude, on a analysé le comportement de l'écoulement des nanofluides à savoir le cuivre, l'argent, l'alumine et le titane et leur influence sur le développement de la couche limite thermique et dynamique d'où on a tracé les profils de vitesse de température et de coefficient de frottement en fonction de la fraction volumique, du coefficient de glissement, du rapport d'étirement/rétrécissement et du type des nanoparticules, les résultats issus de cette étude ont été vérifiés et discutés. Il est vérifié que la présence des nanoparticules dans des fluides de base accélère l'écoulement et augmente le transfert de chaleur.

A decorative border resembling a scroll, with a vertical strip on the left and a horizontal strip at the top. The scroll is outlined in black and has three grey, semi-circular elements representing the rolled-up edges of the paper: one at the top-left corner, one at the top-right corner, and one on the left side of the vertical strip.

# Conclusion générale

## Conclusion générale

---

Ce travail a pour objectif l'étude d'un jet de nanofluide impactant perpendiculairement sur une plaque chauffée déformable en étirement/rétrécissement.

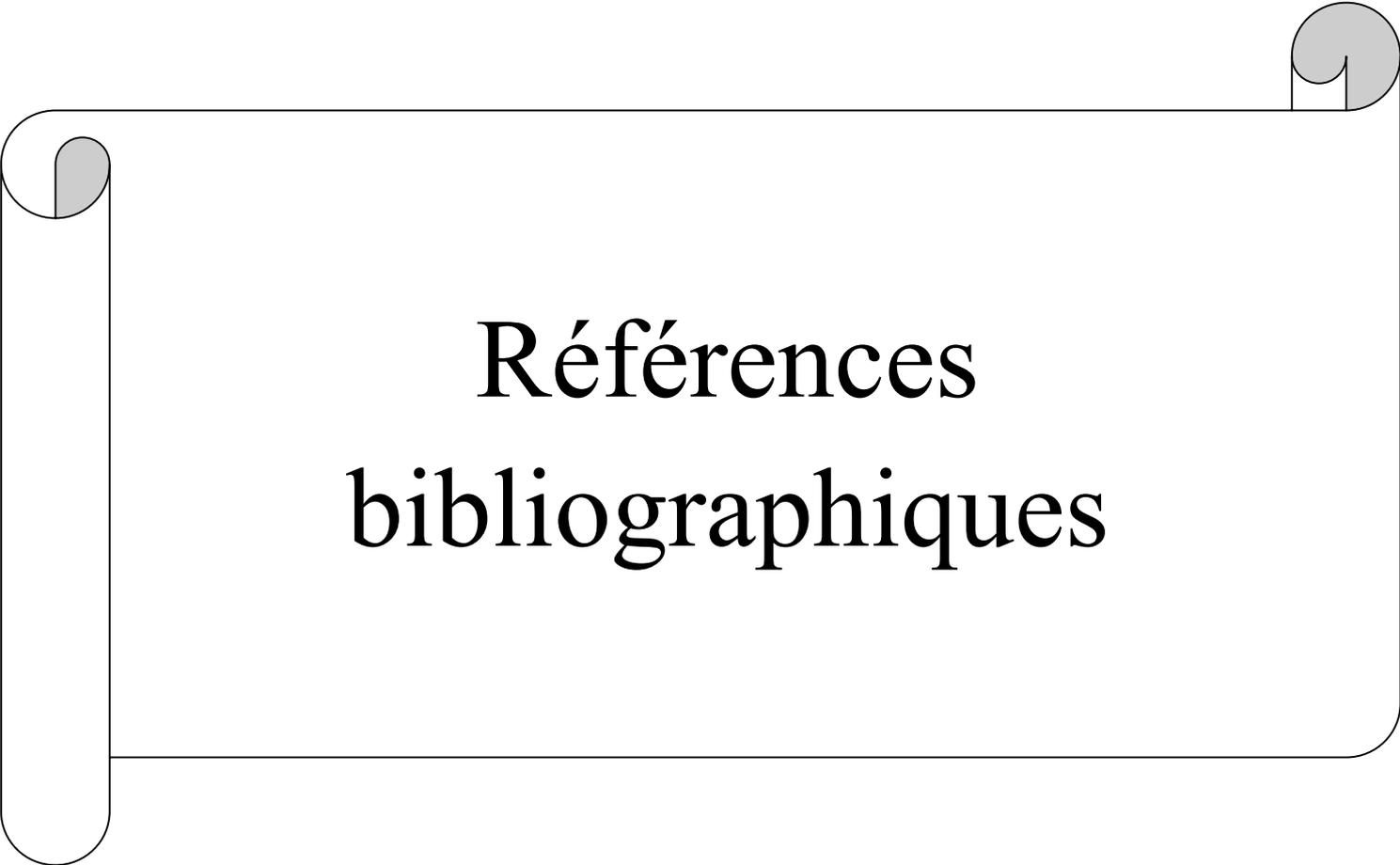
L'écoulement de couche limite au voisinage de point de stagnation est largement répondu dans beaucoup d'application qui sont le siège d'écoulement en présence des nanofluides impactant sur une plaque, on le retrouve dans différents process industrielle comme le dégivrage de bord d'attaque des ailes d'avions, refroidissement des aubage des turbines et des composants électronique.

L'écoulement de base est obtenu on résolvant les équations de quantité de mouvement et d'énergie. L'équation de mouvement sont réduites a un système d'équation ordinaire qui ce présent sous forme d'un problème aux valeurs limites, ces équations sont résolu numériquement en utilisant la méthode de Runge Kutta avec la méthode Tire.

Pour cette étude, on a utilisé quatre types de nanofluides a savoir le cuivre, l'alumine, l'argent et le titane. On varié leurs fraction volumique, le glissement, le rapport d'étirement/rétrécissement pour tracer des profile de température, de vitesse, le coefficient de frottement.

L'analyse des résultats aux quelles nous avons aboutit conduise à ces conclusions :

- Une grande différence entre les propriétés thermo-physiques des fluides de base et des nanofluide.
- La fraction volumique améliore le transfert de chaleur.
- Existence de solution unique et solution double et non existence de solution concernant le développement de la couche limite et le facteur clé qui influence sur l'existence de la solution c'est le rapport d'étirement/rétrécissement de la plaque.
- Le glissement augment le domaine d'existence des doubles solutions.
- La première solution est une solution physique qu'on peut observer, par contre la deuxième solution est une solution instable.
- Les nanofluides conduisent amélioration de transfert de chaleurs.
- Le transfert de chaleur est plus important pour des nanofluide en argent et en cuivre.

A decorative border resembling a scroll, with a vertical strip on the left and horizontal strips at the top and bottom. The corners are rounded, and there are small grey circular accents at the top-left and top-right corners.

# Références bibliographiques

- [1] Choi S.U.S., Eastman J. H., Enhancing thermal conductivity of fluids with nanoparticles, *Developments Applications of Non -Newtonians Flows*, American society of Mechanical Engineers, 66 (1995), 99-105
- [2] Gladés Bachir. Contribution à l'étude de la convection naturelle dans les nanofluides en configuration de Rayleigh-Bénard. Thèse doctorat L'Université Toulouse III- Paul Sabatier 2010.
- [3] Amin Behzadmehr Hassan Azarkish An Introduction to the NanoFluid universty of Sistan and Baluchestan, 2000.
- [4] anofluides, l'efficacité à la hausse - Page 2/8 Rédigé par David D. - 14/11/2008  
Catégorie : Water cooling.
- [5] DERDOURI Amina, MAGISTER en Génie Mécanique, etude par la proqramation d'un jet rend turbulent impactant sur une plaque plane circulaire, université CONSTANTINE 01, faculté des science de la technologie, department de genie mécanique, 03/2014.
- [6] K.Hiemenz, Die nGrenzschicht aneinem in den gleichformigen Flussigkeitsstrom eingetauchten graden Kreiszyylinder, *Dinglers Polytech. Journal* 32 (1911) 321-410.
- [7] ERG Eckert, Die berechnung des warmeubergangs in der laminaren grenzschicht umstromter korper. *VDI Forschungsheft*, VDI, 416 (1942)
- [8] Homan F: Der Einnfluss grosser zahigkeit bei der stromung um den zylinder und um die Kugel. *Z Angew Math Mech* 1936, 16:153-164
- [9] photos van dyke "An Album of fluid notion" Parabolic 1982, Ecoulement de point d'arret.
- [10] F. NAIT BOUDA, F. MENDIL, D. SADAOUI, "Instability of opposing double diffusive convection in 2D boundary layer stagnation point flow", *Int. JThermal Sciences*, 98,192-201 2015.
- [11] L.J. Crane, Flow past a stretching plate, *Z. Angew. Math. Phys.* 21 (1970) 645–647
- [12] C.Y. Wang, Liquid film on an unsteady stretching sheet, *Q. Appl. Math.* 48 (1990) 601-610.

- 
- [13] T.C. Chiam, Stagnation-point flow towards a stretching plate, *J. Phys. Soc. Jpn.* 63 (1994) 2443-2444.
- [14] T.R. Mahapatra, AS Gupta, Heat transfer in stagnation-point flow towards a stretching sheet, *Heat Mass Transfer* 38 (2002) 517-521.
- [15] C.Y. Wang, Stagnation flow towards shrinking sheet, *Int. J. Non linear Mech.* 43 (2008) 377-382.
- [16] K. Bhattacharyya, S.C, Layek, Effects of suction/blowing on steady boundary layer stagnation-point flow and heat transfer towards shrinking sheet with thermal radiation, *Int. J. Heat Mass Transfer* 54 (2011) 302-307.
- [17] K. Bhattacharyya, S. Mukhopadhyay, G.C. Layek, Slip effects on boundary layer stagnation-point flow and heat transfer towards a shrinking sheet, *Int. J. Heat Mass Transfer* 54 (2011) 308-313.
- [18] K. Bhattacharyya, K. Vajravelu, Stagnation-point flow and heat transfer over an exponentially shrinking sheet, *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat* 17 (2012) 2728-2734.
- [19] H. Masuda, A. Iyata, K. Teramae, N. Hishinuma, Alteration of Thermal Conductivity and Viscosity of Liquid by Dispersing Ultra-Fine Particles (Dispersion of  $Al_2O_3$ ,  $SiO_2$ , and  $TiO_2$  Ultra-Fine Particles), *Netsu Bussei*, 4 (1993) 227-233.
- [20] E. Abu-Nada, Application of nanofluids for heat transfer enhancement of separated flows encountered in a backward facing step, *Int. J. Heat Fluid Flow* 29 (2008) 242-249.
- [21] J. Buongiorno, Convective transport in nanofluids. *J. Heat Transf.* 128 (2006) 240-250.
- [22] R. J. Tiwari, M.K. Das Heat transfer augmentation in a two- sided lid-driven differentially heated square cavity utilizing nanofluids, *Int. J. Heat Mass Transfer* 50 (2007) 2002-2018.
- [23] N. Bachok, A. Ishak, R. Nazar, N. Senu, Stagnation-point flow over a permeable stretching/shrinking sheet in a copper-water nanofluid, *Boundary Value Problems* 2013 (2013) 39.
- [24] N. A. Yacob, A. Ishak, R. Nazar, I. Pop, Falkner-Skan problem for a static and moving wedge with prescribed surface heat flux in a nanofluid, *Int. Comm. Heat Mass Transfer* 38 (2011) 159-153

- [25] Tiwari RK, Das MK: Heat transfer augmentation in a two-sided lid-driven differentially heated square cavity utilizing nanofluids. *Int J Heat Mass Tran* 2007, 50:2002-2018
- [26] B. C. Pak and Y. I. Cho, “Hydrodynamic and heat transfer study of dispersed fluids with submicron metallic oxide particles,” *Experimental Heat Transfer*, vol. 11, no. 2, pp. 151–170, 1998.
- [27] Y. Xuan, W. Roetzel, Conceptions for heat transfer correlation of nanofluids. *Int. J. Heat Mass Transfer* 43 (2000) 3701–3707.
- [28] C.T. Nguyen, F. Desgranges, N. Galanis, G. Roy, T. Maré, S. Boucher, H. Angue Mintsa, Viscosity data for Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>–water nanofluid-hysteresis: is heat transfer enhancement using nanofluids reliable, *Int. J. Thermal Sciences* 47 (2008) 103–111.
- [29] A. Einstein, Eine neue Bestimmung der Molekuldimensionen. *Annalen der Physik*, 19 (1906) 289-306
- [30] D. Drew, S. Passman, *Theory of Multicomponent Fluids*. Springer Verlag (1999).
- [31] H. Brinkman, The viscosity of concentrated suspensions and solution. *J. Chem. Phys.* 20 (1952) 571–581
- [32] J. Maxwell, *A Treatise on Electricity and Magnetism*. Clarendon Press, Oxford (1873).
- [33] R. Hamilton, O. Crosser, Thermal Conductivity of Heterogeneous Two-Component Systems, *Ind. Eng. Chem. Fund.* 1 (1962) 187–191.

## Résumé

Ce travail concerne l'étude d'un jet de nanofluide sur une plaque déformable avec glissement. On a discuté et analysé l'effet de certains paramètres dont les conditions aux limites, le type et les propriétés physiques des nanofluides et du fluide de base (eau) sur l'existence des solutions auto-similaires d'une part et l'amélioration du transfert de chaleur ou de refroidissement d'une autre part, l'étude est basée sur l'analyse des profils de température et de vitesse et des équations de mouvement est d'énergie avec des hypothèses simplificatrices (approximation de Boussinesq). La méthode de tir qui est basée sur les conditions aux limites en utilisant la méthode Runge Kutta pour transformer les conditions aux limites en conditions initiales est employée pour résoudre les systèmes aux valeurs propres du problème, il propose des graphes caractérisant le profil de vitesse et de température, de coefficient de frottement.

L'influence des différents paramètres à savoir la fraction volumique des nanoparticules, le coefficient de glissement, la déformation de la plaque sur l'existence des solutions auto-similaires, et sur le transfert de chaleur.

**Mots clés :** couche limite, solution auto-similaire, thermique, nanofluide, nanoparticules, étirement/rétrécissement, point de stagnation, conductivité.

## Abstract

This work concerns the study of a jet of nanofluid on a sliding deformable plate. We have discussed and analyzed the effect of some parameters including boundary conditions, type and physical properties of nanofluids and basic fluid (water) on the existence of similar auto-solutions on the one hand and transfer enhancement Heat or cooling on the other hand, the study is based on the analysis of the temperature and velocity profiles and equations of motion is energy with simplistic assumptions (Boussinesq approximation). The pull method which is based on boundary conditions using the Runge Kutta method for transforming boundary conditions to the initial conditions is used to solve the systems with the eigenvalues of the problem, it proposes graphs characterizing the velocity profile, Temperature and coefficient of friction.

The influence of the different parameters, the volumic fraction of the nanoparticles, the slip coefficient, the deformation of the plate on the existence of similar self-solutions, and on the transfer of heat.

**Key words:** boundary layer, similar auto solution, thermal, nanofluide, nanoparticles, stretch / shrinkage, stagnation point, conductivity.