

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Abderrahmane Mira, Bejaïa

Faculté des Sciences Exactes

Département de Mathématiques



## Mémoire de fin d'Etude

*Pour l'obtention du diplôme de master en Mathématiques*

*Option Statistiques et Analyse Décisionnelle (SAD)*

Thème :

---

# Analyse stochastique des systèmes de files d'attente avec rappels à temps discret

---

Réalisé par :

Samia AKHENAK & Karima BOUYMEDJ

Devant le Jury composé de :

<b><u>Président</u></b> :	M <sup>r</sup> Mohamed BOUALEM	MCA	Université de Bejaïa
<b><u>Examineur</u></b> :	M <sup>r</sup> Sofiane OUAZINE	MAB	Université de Bejaïa
<b><u>Encadreur</u></b> :	M <sup>me</sup> Louiza BOURAINE	MCA	Université de Bejaïa

Juin 2017

# Remerciements

Nous tenons à remercier tous d'abord DIEU, le tous puissant de nous avoir accordé la volonté, force, santé, détermination et courage afin d'accomplir ce modeste travail.

Nous tenons à exprimer nos profondes gratitudes à notre promotrice Mme BOU-RAINE.L pour la qualité de l'encadrement et du soutien qu'elle nous a accordé durant notre mémoire.

Nous remercions particulièrement IMAOUCHEN .Y qui nous a énormément aidé à réaliser ce travail.

Nous remercions chaleureusement les membres de jury qui nous ont honorés de leurs présences et d'avoir accepter d'évaluer ce mémoire à sa juste valeur.

Nous ne saurions oublier de remercier toutes les personnes ayant contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail.

Pour finir, nos derniers mots de remerciements vont tout naturellement à nos familles pour leurs soutiens, à nos amis, et à toute la promotion SAD (2016/2017).

# Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à :

Mes très chers parents qui n'ont jamais cessé de m'aider et m'encourager durant tout mon parcours et qui m'ont permis d'être aujourd'hui ce que je suis.

Mes chers frères : NADIR et FARES.

Mes chères sœurs : HASSIBA et NORA et leurs maris TAHAR et HAKIM.

Ma petite sœur : SAIDA .

Mes neveux : RAYANE, DYLANE, WYLANE.

Et ma petite nièce : ELENA.

Mon binôme : Karima et sa famille .

Mes très chères amies : NESRINE, NAWEL, IMANE, KATIA.

Mon ami : YACINE .

Mes très chers cousins et cousines.

Mes chères copines de chambre.

Et mes très chères amies de la promotion SAD 2017.

*Samia AKHENAK*

# Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à :

Mes très chers parents qui n'ont jamais cessé de m'aider et m'encourager durant tout mon parcours et qui m'ont permis d'être aujourd'hui ce que je suis.

Mes frères :AMIROUCHE et MASSI.

Mes soeurs :ANISSA, AMEL et WISSAM.

Ma chère amie et binôme : SAMIA et toute sa famille.

Mes amis.

Mes copines de chambre.

Et toutes mes amies de la promotion SAD 2017.

***Karima BOUYMEDJ***

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>i</b>
<b>Dédicaces</b>	<b>ii</b>
<b>Table des matières</b>	<b>iv</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>1 Systèmes de files d'attente avec rappels</b>	<b>5</b>
1.1 Introduction . . . . .	5
1.2 Systèmes de files d'attente classiques . . . . .	6
1.3 Analyse mathématique d'un système de files d'attente . . . . .	6
1.3.1 Modèles markoviens . . . . .	7
1.3.2 Modèles non markoviens . . . . .	7
1.4 Caractéristiques d'un système de files d'attente . . . . .	8
1.5 Systèmes d'attente avec rappels . . . . .	8
1.6 Description d'un système d'attente avec rappels . . . . .	9
1.7 Quelques exemples de systèmes d'attente avec rappels . . . . .	11
1.7.1 Réseaux de communication par paquet . . . . .	11
1.7.2 Réseaux Locaux : CSMA . . . . .	12
1.8 Le modèle $M/G/1$ avec rappels . . . . .	13
1.8.1 Méthode de la variable supplémentaire . . . . .	14
1.8.2 Méthode de la chaîne de Markov induite . . . . .	15
1.9 Modèle d'attente avec rappels généraux . . . . .	17
1.10 Disciplines de rappels . . . . .	18

1.11	Autres modèles . . . . .	18
<b>2</b>	<b>Systèmes de files d'attente avec rappels en temps discret</b>	<b>20</b>
2.1	Systèmes de files d'attente classiques en temps discret . . . . .	21
2.1.1	Processus de naissance et de mort . . . . .	21
2.1.2	Processus de naissance et de mort en temps discret . . . . .	21
2.1.3	Analyse du système Geo/Geo/1 classique . . . . .	23
2.1.4	Chaîne de Markov . . . . .	24
2.1.5	L'approche des fonctions génératrices . . . . .	25
2.1.6	L'approche des matrices géométriques . . . . .	26
2.2	Système d'attente Geo/G/1 avec rappels généraux . . . . .	28
2.2.1	Description de système . . . . .	28
2.2.2	Chaîne de Markov . . . . .	29
2.2.3	Caractéristiques du système . . . . .	34
2.3	La décomposition stochastique . . . . .	36
2.4	Comparaison avec le système de files d'attente en temps continu . . . . .	36
2.5	Application numérique . . . . .	38
2.5.1	Le système Geo/Geo/1 avec rappels . . . . .	38
2.5.2	Le système d'attente Geo/G/1 avec rappels généraux . . . . .	39
	<b>Conclusion générale</b>	<b>43</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>44</b>

# Table des figures

1.1	Système classique de files d'attente . . . . .	6
1.2	Le schéma général d'un système d'attente avec rappels . . . . .	10
1.3	Schéma d'un réseau local . . . . .	13
2.1	L'axe du temps d'un système Geo/Geo/1 classique . . . . .	23
2.2	L'axe de temps du système Geo/Geo/1 avec rappels . . . . .	28
2.3	(a) La probabilité que le système soit occupé en fonction de $r$ . (b) le nombre moyen de clients dans le système. (c) le nombre moyen de clients dans l'orbite . . . . .	39
2.4	(a) La probabilité que le système est occupé en fonction de $r$ . (b) le nombre moyen de clients dans le système. (c) le nombre moyen de clients dans l'orbite . . . . .	41
2.5	(a) La probabilité que le système est occupé en fonction de $r$ . (b) le nombre moyen de clients dans le système. (c) le nombre moyen de clients dans l'orbite . . . . .	42

# Introduction générale

La théorie des files d'attente, ou des queues, est l'un des outils analytiques le plus puissant pour la modélisation de systèmes de logistiques et de communication. Cette théorie a pour objet l'étude des systèmes et réseaux où des entités, appelées clients, qui cherchent à accéder à des ressources, généralement limitées, afin d'en obtenir un service. L'analyse théorique de tels systèmes permet d'établir à l'avance les performances de l'ensemble, d'identifier les éléments critiques, ou encore, d'appréhender les effets d'une modification des conditions de fonctionnement.

Les origines du formalisme des files d'attente datent du début du  $XX^{\text{ème}}$  siècle et principalement des travaux de deux mathématiciens : le danois Erlang et le russe Markov. C'est en 1909 que Erlang en a posé les bases dans ses recherches sur le trafic téléphonique, depuis les travaux de Erlang, les modèles de files d'attente sont reconnus largement comme outils puissants pour l'analyse et l'optimisation des performances des systèmes à flux discret, tels que les systèmes informatiques, les réseaux de transmission et les systèmes de transports, etc. En outre, l'analyse stochastique donne une structure conventionnelle de formulation et résolution des modèles de files d'attente.

La théorie des files d'attente classique offre deux possibilités pour résoudre le conflit qui apparaît lorsqu'un client arrive dans le système à serveur unique et trouve le serveur occupé : Soit il quitte le système sans recevoir le service (modèle d'Erlang à demande refusée), soit il prend place dans une file d'attente. Une possibilité alternative est que le client qui ne peut être servi, libère l'espace du serveur mais après une durée de temps aléatoire revient au système pour répéter sa demande de service.

La théorie classique des files d'attente ne permettait pas d'expliquer ce comportement de répétition de demandes de service jusqu'à satisfaction, qu'on trouve dans les systèmes

téléphoniques. Ceci a poussé certains chercheurs à étendre le modèle d'attente classique à celui dit *avec rappels* [21, 22, 49]. Cependant, l'influence de ces phénomènes a été longtemps négligée durant les décennies suivantes. Ce n'est que vers les années 1970 – 1980 qu'on a constaté un regain d'intérêt pour cette catégorie de modèles, en raison de nouveaux développements technologiques des systèmes de télécommunication.

Les systèmes avec rappels permettent en effet, de mieux modéliser des protocoles spécifiques de communication, tels que CSMA (Carrier Sense Multiple Access) ou encore les disciplines Ring-back-when-free, Repeat-last-number, Auto-repeat [2]. Les progrès récents dans ce domaine sont résumés dans les articles de synthèses de Yang et Templeton (1987) [51] et de Falin (1990) [27], parus dans la revue (*Queueing Systems : Theory and Applications*), ainsi que dans la monographie de Falin et Templeton (1997) [27] et Artalejo et Gomez (2008) [13]. Une classification bibliographique a été réalisée récemment par Artalejo (2010) [14]. L'importance et l'actualité de ce domaine est également confirmée par l'organisation périodique d'une conférence internationale sur les systèmes d'attente avec rappels (*International Workshop on Retrial Queues*) : Madrid (Spain) (1998), Minsk (Belarus) (1999), Amsterdam (Netherlands) (2000), Cochin (India) (2002), Seoul (Korea) (2004), Miraflores de la Sierra (Spain) (2006), Athens (Greece) (2008), Beijing (China) (2010), Seville (Spain) (2012), Tokyo (Japan) (2014), Amsterdam (Pays-Bas) (2016).

Dans les systèmes informatiques et les réseaux de télécommunication, l'unité de temps de base est un code binaire, C'est à dire les bits, les paquets, le temps de cycle de la machine, etc. Pour modéliser ce type de systèmes, on est contraint de discrétiser l'échelle temporelle. Ainsi, les passages d'un état vers un autre état ne peuvent se produire qu'à des instants déterminés à l'avance, et la durée d'un service suit une loi de probabilité discrète. On parle alors de *phénomènes d'attente à temps discret*. La motivation pour investiguer dans les systèmes d'attente à temps discret est qu'ils sont plus appropriés que leurs analogues en temps continu. En pratique, le système d'attente à temps discret peut-être utilisé comme approximation du système correspondant en temps continu.

Le premier travail sur les files d'attente à temps discret, a été présenté par Meisling [43]. Récemment, en raison du progrès rapide des nouvelles technologies des réseaux informatiques et de télécommunication, les modèles de files d'attente à temps discret ont reçu plus

d'attention de la part des chercheurs. En raison de leurs applications, il y'a une littérature abondante sur les systèmes d'attente en discret. Les lecteurs intéressés peuvent se référer aux livres suivantes [3, 18, 36, 46, 50].

Dans le passé, l'étude des files d'attente avec rappels, est focalisée sur le cas continu et récemment les chercheurs se sont intéressés à l'analyse des systèmes avec rappels à temps discret, ceci est dû à leurs applications dans l'étude de problèmes pratiques survenants dans les systèmes téléphonique et des réseaux informatiques.

Le premier travail sur l'analyse des systèmes d'attente avec rappels en temps discret, revient à Yang et Li (1995) [52]. Néanmoins, il existe moins de publications sur les systèmes d'attente avec rappels à temps discret comparant avec le nombre d'articles existants dans le cas continu (voir les articles de Li et Yang (1999)[41], Attencia et Moreno (2004) [15], Wang et Zhao (2007, 2009) [47], Aboul Hassan et Rabia (2008, 2009) [1] et Wang (2012) [48]). Ces articles traitent plusieurs types de modèles avec rappels à temps discret à savoir (systèmes avec rappels et vacation, avec rappels généraux, avec rappels et serveur non fiable, avec rappels et arrivées par groupe). La majorité de ces publications considère les temps des inter-rappels distribués selon une loi géométrique qui est l'unique loi sans mémoire dans le cas discret.

Dans notre travail, nous nous intéressons à l'analyse stochastique des systèmes de files d'attente avec rappels à temps discret, (en particulier le système  $Geo/G/1$  avec rappels généraux [15]) pour lequel on a mis en évidence les résultats obtenus dans la littérature et on s'est intéressé en suite à l'étude de la relation avec le système correspondant en temps continu, qui est le système  $M/G/1$  avec rappels généraux [33].

Ce mémoire est constitué d'une introduction générale, de deux chapitres, d'une conclusion générale et d'une bibliographie.

Dans le premier chapitre, nous présentons les principaux résultats et techniques obtenus dans la littérature sur les modèles de files d'attente avec rappels tout en définissant les modèles markoviens et non markoviens et quelques exemples d'application. Une attention particulière est consacrée au système  $M/G/1$  avec rappels et  $M/G/1$  avec rappels généraux.

Le second chapitre est consacré aux systèmes d'attente avec rappels à temps discret. Dans un premier temps, nous nous sommes intéressées à l'analyse stochastique des systèmes d'attente classiques à temps discret plus précisément, le système  $Geo/Geo/1$  classique. Dans un second temps, nous nous sommes intéressées au système  $Geo/G/1$  avec rappels généraux. Après la description du modèle et l'obtention de la condition nécessaire et suffisante d'érgodicité de la chaîne de Markov associée, la fonction génératrice du système est établie, ainsi que les mesures de performances du système sont obtenues. Enfin une étude numérique pour illustrer l'effet d'un paramètre  $r$  sur les mesures de performances de ce système a été élaborée sous MATLAB 7.1.

Dans la conclusion nous présentons quelques perspectives qui découlent de notre travail.

# Chapitre 1

## Systèmes de files d'attente avec rappels

### 1.1 Introduction

La théorie des files d'attentes consiste en l'étude de systèmes où des clients se présentent à un dispositif de service, appelé serveur. Puisqu'un client occupe le serveur pendant un certain temps, les autres clients doivent attendre avant d'être servis, formant ainsi une file d'attente.

Cette théorie constitue un outil théorique et pratique pour la modélisation stochastique, l'évaluation des performances et le contrôle de différents types de systèmes concrets (tels que les systèmes de production, les systèmes informatiques, ...). Les systèmes de files d'attente sont très étudiés et une littérature abondante couvre ce sujet (voir Kleinrock [40], Gross et Harris [35]). L'évolution rapide des systèmes informatiques et des réseaux de télécommunication ont montré les limites de la théorie des files d'attente classique qui ne permettent pas d'expliquer le comportement stochastique de certains systèmes complexes où le client répète sans cesse sa demande jusqu'à obtention du service désiré, ce qui a conduit certains chercheurs à développer d'autres modèles plus élaborés qu'on appelle généralement *files d'attente avec rappels*. Dans ce chapitre, après la description et l'analyse mathématique d'un système d'attente classique, nous allons passer en revue les principaux résultats et techniques obtenus dans la littérature sur les modèles de files

d'attente avec rappels.

## 1.2 Systèmes de files d'attente classiques

Les files d'attente peuvent être considérées comme un phénomène caractéristique de la vie contemporaine. On les rencontre dans les domaines d'activités les plus divers (guichets de poste, trafic routier, centrale téléphonique, atelier de réparation, etc.) L'étude mathématique des phénomènes d'attente constitue un champ d'application important des processus stochastiques.

On parle de files d'attente à chaque fois que certaines unités appelées clients se présentent d'une manière aléatoire à des stations afin de recevoir un service dont la durée est généralement aléatoire. Une représentation graphique d'une file d'attente classique est donnée par la Figure 1.1.

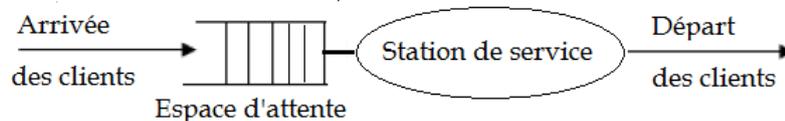


FIGURE 1.1 – Système classique de files d'attente

## 1.3 Analyse mathématique d'un système de files d'attente

L'étude mathématique d'un système de files d'attente se fait généralement par l'introduction d'un processus stochastique, défini de façon appropriée. On s'intéresse principalement au nombre de clients  $X(t)$  se trouvant dans le système à l'instant  $t$  ( $t \geq 0$ ).

En fonction des quantités qui définissent le système, on cherche à déterminer :

- Les probabilités d'état  $P_n(t) = \mathbb{P}(X(t) = n)$ , qui définissent le régime transitoire du processus stochastique  $\{X(t), t \geq 0\}$ . Il est évident que les fonctions  $P_n(t)$  dépendent de l'état initial ou de la distribution initiale du processus.
- Le régime stationnaire du processus stochastique qui est défini par :

$$P_n = \lim_{t \rightarrow \infty} P_n(t) = \mathbb{P}(X = n), n = 0, 1, 2, \dots$$

$(P_n)_{n \geq 0}$  est appelée distribution stationnaire du processus  $\{X(t), t \geq 0\}$

Le calcul explicite du régime transitoire s'avère généralement pénible, voire impossible, pour la plupart des modèles donnés. On se contente donc d'analyser le régime stationnaire.

### 1.3.1 Modèles markoviens

Ils caractérisent les systèmes dans lesquels les deux quantités stochastiques principales qui sont le temps des inter-arrivées et la durée de service sont des variables aléatoires indépendantes exponentiellement distribuées. Le système le plus simple est le modèle noté par M/M/1, son étude est basée sur le processus  $\{X(t), t \geq 0\}$  qui est un processus de naissance et de mort, markovien grâce à la propriété sans mémoire de la loi exponentielle.

### 1.3.2 Modèles non markoviens

Lorsque les deux quantités stochastiques : le temps des inter-arrivées et la durée de service sont des variables aléatoires de distribution générales (non exponentielles), le processus  $\{X(t), t \geq 0\}$ , représentant le nombre de clients dans le système à l'instant  $t$  n'est plus markovien. De nombreuses méthodes ont été développées pour les étudier. Les méthodes les plus utilisées sont :

**Méthode des variables auxiliaires** : qui consiste à considérer le processus bidimensionnel  $(X(t), R(t))_{t \geq 0}$  où  $R(t)$  est le temps service (écoulé ou résiduel) du client qui est en train d'être servi.

**Méthode de la chaîne de Markov induite** : Cette méthode, consiste à considérer le processus  $\{X(t), t \geq 0\}$  aux instants particuliers  $t_1, t_2, \dots, t_n$  telle que la chaîne induite  $\{X_n = X(t_n), n \geq 1\}$ , soit markovienne et homogène.

D'autres méthodes d'analyse de systèmes non markoviens existent, telle que l'approche par les martingales, les méthodes d'approximation, la simulation, ...

## 1.4 Caractéristiques d'un système de files d'attente

Soit  $\lambda$  le taux des arrivées vers un système d'attente et  $\frac{1}{\mu}$  la durée moyenne de service. A partir de la distribution stationnaire de processus  $\{X(t), t \geq 0\}$ , on peut calculer d'autres valeurs caractéristiques d'un système d'attente telles que :

- $L = \mathbb{E}(X)$  : nombre moyen de clients dans le système,
- $L_q$  : nombre moyen de clients dans la file d'attente,
- $W$  : temps moyen de séjour d'un client dans le système,
- $W_q$  : temps moyen d'attente d'un client.

Ces valeurs ne sont pas indépendantes les unes des autres, mais sont liées par les relations suivantes qui sont vérifiées sous la condition de stabilité du système ( $\frac{\lambda}{\mu} < 1$ ) :

- $L = \lambda_e W$
- $L_q = \lambda_e W_q$
- $W = W_q + \frac{1}{\mu}$
- $L = L_q + \frac{\lambda_e}{\mu}$ ,

où  $\lambda_e$  est le taux d'entrée des clients dans le système. Si la capacité du système est illimitée, on a  $\lambda_e = \lambda$ , dans le cas contraire, certains clients doivent s'en aller sans être servi d'où  $\lambda_e < \lambda$ . Ces quatre relations sont valables dans les conditions assez générales c'est à dire pour le système d'attente G/G/s/N. Les deux premières quantités sont appelées "formules de Little".

## 1.5 Systèmes d'attente avec rappels

Les systèmes de files d'attente avec rappels ou avec répétition d'appels (Retrial Queues dans la terminologie anglo-saxonne) sont caractérisés par la propriété suivante : un client arrivant dans le système et qui trouve tous les serveurs occupés, quitte le système définitivement, ou rappelle ultérieurement à des instants aléatoires. Un client qui attend pour rappeler est dit "en orbite".

Le modèle d'attente avec rappels occupe une situation intermédiaire entre le modèle d'Erlang avec refus et le modèle classique avec attente FIFO, qui en constituent les modèles limites dans les cas de faible et forte intensité de rappels.

Les progrès récents dans ce domaine sont résumés dans les monographies de Falin et Templeton (1997)[30], Artalejo et Gómez (2008) [13] et une classification bibliographique sur les systèmes avec rappels est donnée par Artalejo (2010) [12].

## 1.6 Description d'un système d'attente avec rappels

Un système de files d'attente avec rappels est un système composé de  $s$  serveurs identiques et indépendants  $s \geq 1$ , d'un espace d'attente ayant  $N - s$  ( $N \geq s$ ) positions d'attente et d'une orbite de capacité  $O$ .

A l'arrivée d'un client primaire, s'il y a un ou plusieurs serveurs libres, le client sera servi immédiatement puis quittera le système à la fin de son service. Sinon, s'il y a une position d'attente libre, le client rejoint la file d'attente. Lorsque tous les serveurs et les positions d'attente sont occupés, le client quitte le système, soit définitivement avec une probabilité  $1 - H$ , ou bien entre en orbite avec une probabilité  $H$  et rappelle ultérieurement et devient une source d'appels répétés et tentera sa chance après une durée de temps aléatoire. La capacité  $O$  de l'orbite peut-être finie ou infinie. Dans le cas où  $O$  est finie et si l'orbite est pleine, le client trouvant tous les serveurs et les positions d'attente du buffer occupés, sera obligé de quitter le système définitivement sans être servi.

Chaque client de l'orbite appelé aussi *client secondaire* est supposé rappeler pour le service à des intervalles de temps suivant une loi de probabilité et avec une intensité de rappels bien définie (rappels constants, rappels classiques, ou bien rappels linéaires). Chacun de ces clients secondaires est traité de la même manière qu'un client primaire c'est à dire un nouveau client qui arrive de l'extérieure du système, s'il trouve le serveur libre, il reçoit son service puis quittera le système, sinon, s'il y a des positions d'attente disponibles dans le système, il le rejoindra. Par contre, si tous les serveurs et les positions d'attentes sont occupés, le client quittera le système avec une probabilité  $1 - H_k$  (s'il s'agit de la  $k^{\text{ème}}$  tentative échouée) où bien entre en orbite avec une probabilité  $H_k$  si l'orbite

n'est pas plien.

Le schéma général d'un système de file d'attente avec rappels est donné dans la Figure 1.2 :

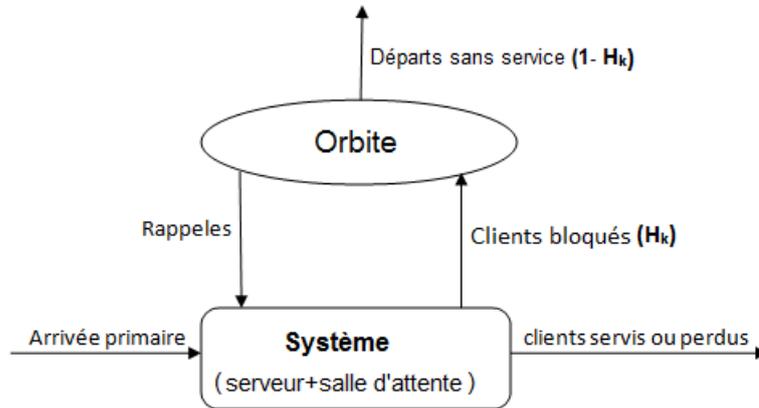


FIGURE 1.2 – Le schéma général d'un système d'attente avec rappels

**Notation de Kendall :**

Pour noter un modèle de files d'attente, on utilise la notation de Kendall suivante  $A/B/s/N/K/H$ .

La signification de chacun de ces symboles est :

- $A$  : décrit la distribution des temps des inter-arrivées des clients ;
- $B$  : décrit la distribution du temps de service ;
- $s$  : représente nombre de serveurs identiques et indépendants dans le système ;
- $N$  : capacité du système ;
- $K$  : taille de la population (source) de clients ;
- $H$  : est la fonction de persévérance qui permet de définir le comportement du client devant une situation de blockage (serveurs occupés) ;

$H$  peut être décrite par un vecteur  $H = (H_0, H_1, H_2, \dots, H_k, \dots)$ , où  $H_k$  est la probabilité qu'après la  $k^{\text{ème}}$  tentative échouée, un abonné rappelle pour la  $(k + 1)^{\text{ème}}$  fois .

Lorsque les trois derniers éléments ne sont pas mentionnés, il est sous-entendu que la capacité du système et la source de clients (la taille de la population) sont infinis et que  $H_j = 1$  pour tout  $j$ .

Dans la description des processus des arrivées et de service, les valeurs classiques prises par les paramètres  $A$  et  $B$  peuvent être :

- $M$  : loi exponentielle (Memoryless);
- $Er$  : loi d'Erlang;
- $G$  : loi Générale;
- $D$  : loi déterministe (temps inter-arrivées ou service constant).

### 1.7 Quelques exemples de systèmes d'attente avec rappels

Il existe aujourd'hui une littérature abondante sur les systèmes avec rappels où des exemples concrets, ont été cités nous présentons quelques exemples ( extraits de l'article de Yang et Templeton 1987 [51]).

#### 1.7.1 Réseaux de communication par paquet

Considérons un réseau de communications d'ordinateurs dans lequel on trouve un ensemble d'interfaces IMPs (Interface Message Processors) reliées entre elles par des câbles. Un ordinateur principal est connecté à l'une de ces interfaces. Si l'ordinateur veut envoyer un message à un autre ordinateur principal, il doit en premier lieu envoyer le message avec l'adresse de destination à l'interface à laquelle il est connecté. L'interface à son tour envoie le message à l'ordinateur destinataire directement si elle y est connectée, ou indirectement via d'autres interfaces. Considérons une interface à laquelle un ordinateur principal est connecté. Les messages arrivent de l'extérieur selon un processus aléatoire. Après la réception du message, l'ordinateur l'envoie immédiatement à son interface. S'il y a un tampon libre, le message est accepté. Dans le cas contraire, le message est rejeté et l'ordinateur doit réessayer une autre fois après une période de temps. S'il existe des tampons libres, le message rejeté sera stocké dans un tampon de l'ordinateur principal. Dans le cas contraire, le message est considéré comme perdu. On peut poser les questions suivantes :

- Quelles sont les probabilités pour qu'un message soit rejeté par l'interface et par l'ordinateur principal ?
- Quel est le nombre moyen de messages dans le tampon de IMP ?
- Quel est le nombre moyen de messages dans le tampon de l'ordinateur principal ?
- Quel est le temps d'attente d'un message dans le tampon de l'ordinateur principal ?

Le problème présenté peut être modélisé comme un système avec rappels à serveur unique (interface IMP) possédant des tampons (positions d'attente). Le nombre de tampons de l'ordinateur principal constitue la capacité de l'orbite.

### **1.7.2 Réseaux Locaux : CSMA**

Dans les réseaux locaux se partageant un bus unique, l'un des protocoles de communication est appelé non-persistant CSMA (Carrier Sense Multiple Access). C'est une méthode d'accès à un réseau local.

Supposons que ce réseau possède  $n$  stations (ou processeurs) connectés par un seul bus. La communication entre les stations est réalisée au moyen de ce bus. Des messages de longueurs variables arrivent à la station du monde extérieur. En recevant le message, la station le découpe en un nombre fini de paquets de longueur fixe et consulte immédiatement le bus pour voir s'il est occupé. Si le bus est libre, l'un de ces paquets est transmis via ce bus à la station de destination, et les autres paquets sont stockés dans le tampon pour une transmission ultérieure. Si par contre, le bus n'est pas libre, tous les paquets sont stockés dans le buffer et la station peut consulter le bus après une certaine période aléatoire. Ce problème peut être modélisé comme un système avec rappels 'a un seul serveur, qui est le bus et les buffers des stations représentent l'orbite.

ce système est décrit dans la Figure 1.3

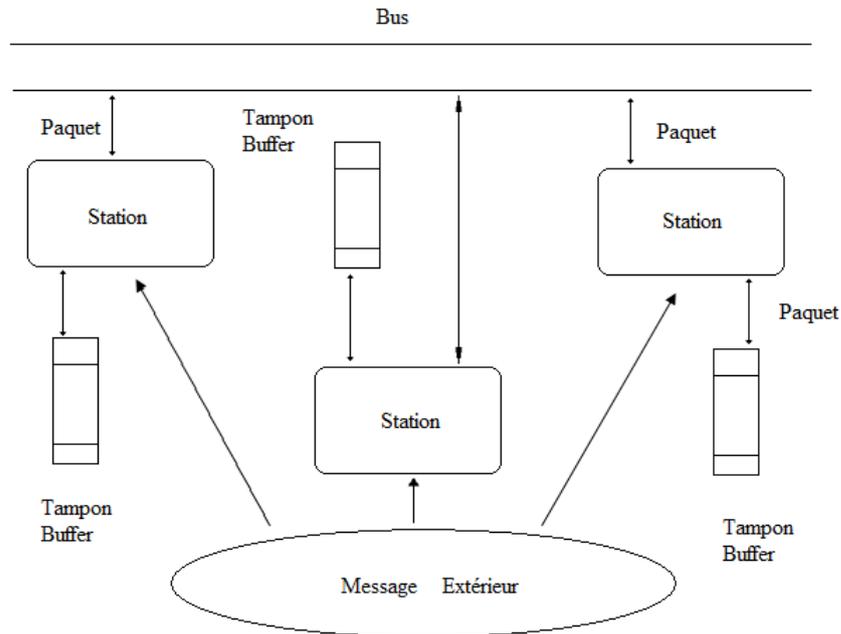


FIGURE 1.3 – Schéma d'un réseau local

## 1.8 Le modèle $M/G/1$ avec rappels

Le modèle  $M/G/1$  avec rappels est le modèle le plus étudié par les spécialistes et il existe une littérature abondante sur ses diverses propriétés (voir par exemple [12], [5] [24]).

Soit  $\lambda$ , le taux du flot poissonnien des appels primaires. La durée de service  $\tau$  est de loi générale, de moyenne  $\frac{1}{\mu}$ , de distribution  $B$  et de transformée de Laplace-Stieltjes  $\hat{B}(s)$ . La durée entre deux rappels successifs d'une même source secondaire est exponentielle de paramètre  $\theta$ . La description du système est la suivante : On suppose que le  $(i-1)^{\text{ème}}$  appel termine son service à l'instant  $\eta_{i-1}$  (les appels sont numérotés dans l'ordre de service) et le serveur devient libre. Même s'il y a des clients dans le système, ils ne peuvent occuper le service immédiatement. Donc le  $i^{\text{ème}}$  appel suivant, n'entre en service qu'après un intervalle de temps  $R_i$  durant lequel le canal est libre, bien qu'en général il y ait des clients qui attendent. A l'instant  $\xi_i = \eta_{i-1} + R_i$ , le  $i^{\text{ème}}$  client débute le service durant un temps  $S_i$ . Tous les rappels qui arrivent durant ce temps de service n'influent pas sur le processus. Alors à l'instant  $\eta_i = \xi_i + S_i$ , le  $i^{\text{ème}}$  client achève son service et le canal devient

encore libre et ainsi de suite.

### 1.8.1 Méthode de la variable supplémentaire

Le premier résultat sur le système  $M/G/1$  avec rappels a été obtenu par Cozzolino. [23] et Alexandrov [2], en utilisant la méthode de la variable auxiliaire. Ils ont obtenu les probabilités d'états et les fonctions génératrices du nombre de clients dans le système. L'état du système peut-être décrit par le processus

$$X(t) = \begin{cases} N(t), & \text{si } C(t) = 0, \\ \{C(t), N(t), \xi(t)\}, & \text{si } C(t) = 1. \end{cases}$$

Où,  $\xi(t)$  est une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$ , et désignant :

- La durée de service écoulée à la date  $t$  [23].
- La durée de service résiduelle à la date  $t$  [2].

Notons

$$P_{0j}(t) = \mathbb{P}(C(t) = 0, N(t) = j),$$

et

$$P_{1j}(t, x) = \mathbb{P}(C(t) = 1, N(t) = j, x < \xi(t) < x + dx), \quad j > 0.$$

Si  $\rho = \lambda/\mu < 1$ , le système est stable. La fonction génératrice du nombre de clients dans le système est donnée par

$$Q(z) = \frac{(1 - \rho)(1 - z)\hat{B}(\lambda - \lambda z)}{\hat{B}(\lambda - \lambda z) - z} \frac{\phi(z)}{\phi(1)}, \quad (1.1)$$

où

$$\phi(z) = \exp\left\{-\frac{\lambda}{\theta} \int_0^z \frac{1 - \hat{B}(\lambda - \lambda x)}{x - \hat{B}(\lambda - \lambda x)} dx\right\}.$$

On aura alors,

$$Q(z) = \frac{(1 - \rho)(1 - z)\hat{B}(\lambda - \lambda z)}{\hat{B}(\lambda - \lambda z) - z} \exp\left\{-\frac{\lambda}{\theta} \int_1^z \frac{1 - \hat{B}(\lambda - \lambda x)}{x - \hat{B}(\lambda - \lambda x)} dx\right\}. \quad (1.2)$$

Cette formule est appelé *décomposition stochastique*, signifie que le nombre de clients dans le système  $M/G/1$  avec rappels s'écrit comme somme de deux variable aléatoire, l'une est le nombre de clients dans le système  $M/G/1$  classique et l'autre est le nombre de clients dans le système  $M/G/1$  avec rappels étant donné que le serveur est libre.

### 1.8.2 Méthode de la chaîne de Markov induite

La méthode de la chaîne de Markov induite a été utilisée pour la première fois par Choo et Conolly (1979) [20] : Soit  $(X_i)$  la chaîne de Markov induite aux instants de départs, où  $X_i = X(\eta_i)$  représente le nombre de clients dans le système après le  $i^{\text{ème}}$  départ.

Il est clair que  $(X_i)$  est une chaîne de Markov et

$$X_{i+1} = X_i - \delta_{X_i} + \Delta_{i+1}$$

où  $\Delta_i$  est le nombre d'appels primaires durant le service du  $i^{\text{ème}}$  client. La variable aléatoire  $\Delta_{i+1}$  ne dépend pas des événements qui se sont produits avant l'instant  $\xi_{i+1}$  du début de service du  $(i + 1)^{\text{ème}}$  client.

La distribution de  $\Delta_i$  est la suivante :

$$\mathbb{P}(\Delta_i = k) = P_k = \int_0^\infty \exp(-\lambda x) \frac{(\lambda x)^k}{k!} dB(x)$$

La variable  $\delta_{X_i}$  est une variable aléatoire de Bernoulli

$$\delta_{X_i} = \begin{cases} 1 & \text{si le } (i + 1)^{\text{ème}} \text{ client servi provient de l'orbite ,} \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

Elle a pour distribution

$$\mathbb{P}(\delta_{X_i} = 1 / X_i = n) = \frac{n\theta}{\lambda + n\theta}$$

et

$$\mathbb{P}(\delta_{X_i} = 0 / X_i = n) = \frac{\lambda}{\lambda + n\theta}.$$

Les probabilités de transition en un pas s'écrivent alors :

$$P_{ij} = \frac{i\theta}{\lambda + i\theta} P_{j-i+1} + \frac{\lambda}{\lambda + i\theta} P_{j-i}$$

En posant

$$\pi(z) = \frac{(1 - \rho)(1 - z)\hat{B}(\lambda - \lambda z)}{\hat{B}(\lambda - \lambda z) - z}$$

l'équation (1.1) s'écrira

$$Q(z) = \pi(z) \frac{\phi(z)}{\phi(1)}$$

On trouve encore la formule "*décomposition stochastique*" du système  $M/G/1$  avec rappels [7].

Si on note par  $\bar{n}_s$  le nombre moyen de clients dans le système, alors  $\bar{n}_s = \bar{n}_\infty + \mathbb{E}(\beta)$ , où  $\beta$  est la variable aléatoire de fonction génératrice  $\frac{\phi(z)}{\phi(1)}$ , et  $\bar{n}_\infty$  est le nombre moyen de clients dans le système  $M/G/1$  classique avec .

$$\pi(z) = \frac{(1 - \rho)\hat{B}(\lambda - \lambda z)(1 - z)}{\hat{B}(\lambda - \lambda z) - z}.$$

qui n'est autre que la formule de "Pollaczek-Khintchine" pour le nombre de clients dans le système  $M/G/1$  (FIFO,  $\infty$ ).

Cette décomposition a déjà été observée pour les systèmes avec vacance (caractérisés par le fait que le temps libre du serveur peut-être utilisé pour d'autres tâches extérieures [9]). Sa validité a été prouvé pour certaines classes de modèles avec rappels. A titre d'exemple, Yang et Templeton ont montré que cette décomposition est valable pour un système à loi d'arrivées générale [51]. Artalejo et Falin ont donné diverses applications de cette propriété de décomposition [7]. En particulier, ils ont obtenu :

- a) Des relations explicites pour les moments factoriels de la taille de l'orbite et du nombre de clients dans le système de files d'attente sans rappels.
- b) La vitesse de convergence du système  $M/G/1$  avec rappels vers le système  $M/G/1$  classique quand le taux des rappels tend vers l'infini.
- c) La mesure de proximité entre les deux systèmes.

Artalejo a obtenu la décomposition de la distribution stationnaire en trois composantes liées à la discipline de vacation, les rappels et la distribution de la taille du système  $M/G/1$  ordinaire (sans rappels et sans vacation) [9]. Falin, Artalejo et Martin ont obtenu la décomposition stochastique pour les systèmes avec rappels et priorité [29].

Les caractéristiques du système  $M/G/1$  avec rappels sont données dans [29] par :

**Nombre moyen de clients dans le système :**

$$\bar{n} = \rho + \frac{\lambda^2 \mathbb{E}(\tau^2)}{2(1 - \rho)} + \frac{\lambda \rho}{\theta(1 - \rho)}. \quad (1.3)$$

**Nombre moyen de clients dans l'orbite :** D'après les formules de Little, on a

$$\bar{n}_o = \bar{n} - \rho = \frac{\lambda^2 \mathbb{E}(\tau^2)}{2(1 - \rho)} + \frac{\lambda \rho}{\theta(1 - \rho)}. \quad (1.4)$$

**Temps d'attente et nombre de rappels :** Le temps d'attente d'un client est mesuré à partir du temps d'entrée dans le système jusqu'au temps du commencement du service. Pour trouver le temps moyen d'attente  $\bar{w}$ , on utilise la formule de Little  $\bar{n} = \bar{w}\lambda$ . On aura

$$\bar{w} = \frac{\lambda \mathbb{E}(\tau^2)}{2(1-\rho)} + \frac{\rho}{\theta(1-\rho)} \quad (1.5)$$

Une fois  $\bar{w}$  obtenu, il est aisé de déduire  $\bar{\eta}$ , le nombre moyen de rappels par client :

$$\bar{\eta} = \theta \bar{w} = \frac{\lambda \theta \mathbb{E}(\tau^2)}{2(1-\rho)} + \frac{\rho}{1-\rho} \quad (1.6)$$

## 1.9 Modèle d'attente avec rappels généraux

Un modèle plus généralisé des files d'attente classique et avec rappels (exponentiels) est celui dans lequel les temps entre rappels successifs du même client sont distribués selon une distribution générale.

L'analyse de ce type de modèles s'inspire de l'observation des phénomènes de rappels dans les systèmes informatiques, téléphoniques et les réseaux de télécommunication où les temps de rappels peuvent difficilement être modélisés par une distribution exponentielle. La recherche dans ce domaine reste très limitée. Le premier à s'y être intéressé fut Kapyrin (1977) [38] qui a essayé de déduire une solution analytique exacte pour la file  $M/G/1$  avec rappels généraux. Cette méthode se révéla incorrecte voir Falin (1986) [26]. Plutard, en se basant sur la propriété de la décomposition stochastique (le nombre de clients dans le système est la contribution de deux variables aléatoires indépendantes : le nombre de clients dans la file classique  $M/G/1$  et le nombre de clients dans la file  $M/G/1$  avec rappels exponentiels sachant que le serveur est libre) Yang et al. proposent une méthode pour les applications pratiques. Gómez-Corral (1999) [33] développe une analyse exhaustive pour l'analyse du système  $M/G/1$  avec rappels non exponentiels.

Le flot des arrivées primaires est poissonien de taux  $\lambda > 0$ . Si le serveur est libre, le client commence son service immédiatement, sinon, il entre en orbite et rappelle ultérieurement selon la discipline *FCFS*. Les durées de rappels sont distribuées selon une loi générale de distribution  $F$  de Transformée de Laplace  $F^*$ . Les durées de services sont indépendantes de distribution commune générale  $B$ , de transformée de Laplace  $\hat{B}$  et de moment d'ordre  $k$  donné par  $\beta_k = (-1)^k (\hat{B})^{(k)}(0)$ . De plus, les temps inter-arrivées, les temps de rappels

et les durées de service sont supposées indépendantes.

Gómez-Corral [33] a montré dans son article que sous la condition d'ergodicité  $\lambda\beta_1 < F^*(\lambda)$ , la fonction génératrice du nombre de clients dans le système est donnée par la formule :

$$K(z) = \frac{[F^*(\lambda) - \lambda\beta_1](1-z)\hat{B}(\lambda - \lambda z)}{F^*(\lambda)(1-z)\hat{B}(\lambda - \lambda z) - z(1 - \hat{B}(\lambda - \lambda z))}. \quad (1.7)$$

## 1.10 Disciplines de rappels

La politique la plus utilisée dans la théorie classique des files d'attente avec rappels est la *politique de rappels classiques* dans laquelle chaque source dans l'orbite rappelle après un temps exponentiellement distribué avec un paramètre  $\theta$ . Donc, il y a une probabilité  $j\theta dt + o(dt)$  d'un nouveau rappel dans le prochain intervalle  $(t, t + dt)$  sachant que  $j$  clients sont en orbite à l'instant  $t$ . Néanmoins, il y a d'autres situations où le taux de rappels est indépendant du nombre de clients dans l'orbite, c'est-à-dire que le taux de rappels est égal à  $\theta$  si l'orbite n'est pas vide au temps  $t$  et égal à zéro si elle est vide. Cette deuxième politique est appelée *la discipline de rappels constants*. Dans ce cas, la probabilité d'un rappel durant  $(t, t + dt)$ , sachant que l'orbite est non vide, est  $\nu dt + o(dt)$ . Le premier travail dans cette direction est celui de Fayolle [31]. La combinaison de ces deux situations de rappels, est appelée *discipline de rappels linéaires* pour laquelle la probabilité d'un rappel durant  $(t, t + dt)$  sachant que  $j$  client sont en orbite à l'instant  $t$  est  $[(\nu(1 - \delta_{0j}) + j\theta)]dt + o(dt)$  où  $\delta_{0j}$  est la fonction de Kronecker. On mentionne aussi l'existence d'une autre politique dite politique de rappels quadratiques [12].

## 1.11 Autres modèles

Les systèmes à arrivées par groupes ont été étudiés par Falin (1990) [27], et Yang et Templeton (1987)[52]. Les systèmes avec multi-classes de clients par Grishechkin (1992), et ceux avec deux types de clients impatientes par Martin et Artalejo.

Les modèles avec priorité par Falin and al. (1993)[29]. Yang and al. ont étudié les systèmes à flot des arrivées non markovien (Coxien d'ordre  $a$ )(1992) .

Langaris et Moutzoukis (1995) ont étudié le système  $M/G/1$  avec rappels à arrivées par groupe, deux types de clients, (prioritaires et non prioritaires) et avec vacation du serveur et ils ont obtenu la distribution stationnaire du système. Les mêmes auteurs ont étudié le système informatisé "Lecture-écriture" (1997) qui est un modèle à  $N$  serveur et deux classes de clients lecture et écriture. Falin et Artalejo [7] ont étudié les systèmes avec rappels à source finie et ils ont fait l'analyse de la distribution des arrivées, la période d'occupation et le temps d'attente (1998).

Les systèmes de files d'attente avec rappels et arrivées négatives sont largement étudiés dans la littérature voir ([6, 8, 11, 17]).

En théorie des systèmes de files d'attente avec rappels, il est souvent supposé que le flot des arrivées primaires est poissonnien. Néanmoins, Artalejo considère des systèmes avec rappels [14], population homogène et suppose qu'on a un nombre  $K$  fini de sources identiques produisant un flot d'entrée quasi-aléatoire [10].

## Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons rappelé et présenté les concepts et techniques de base de la théorie de files d'attente (classiques et avec rappels). Notons que les systèmes avec rappels sont utilisés pour modéliser et évaluer les performances de différents systèmes réels. Durant ces deux dernière décennies les chercheurs s'intéressent à modéliser les systèmes téléphoniques et les réseaux informatiques en temps discret. Dans ce chapitre nous avons effectué une analyse de performance sur les systèmes de files d'attente avec rappels (en particulier les systèmes  $M/M/1$  et  $M/G/1$  avec rappels), Nous avons obtenu les caractéristiques essentielles, telles que : le nombre moyen de clients dans le système, le nombre moyen de clients en orbite, le temps moyen d'attente et le nombre moyen de rappels par client. Ces modèles de files d'attente avec rappels en temps discret feront l'objet du chapitre suivant.

# Chapitre 2

## Systèmes de files d'attente avec rappels en temps discret

### Introduction

Les phénomènes d'attente en temps discret sont utilisés pour analyser les systèmes de télécommunication et les réseaux informatiques, en raison que l'unité de temps de base dans ces systèmes est le code binaire.

Dans le passé, l'étude des systèmes avec rappels était focalisée sur le cas continu, durant les deux dernières décennies plusieurs travaux sont apparus sur les systèmes d'attente en temps discret voir [1, 15, 42, 41, 47, 48, 51].

L'objectif de ce chapitre est l'analyse des systèmes d'attente avec rappels à temps discret, passant d'abord par le système classique Geo/Geo/1, puis l'analyse de système d'attente Geo/G/1 avec rappels généraux pour lequel on a mis en évidence les résultats obtenus dans la littérature à savoir ( la condition d'ergodicité de la chaîne de Markov associée et les mesures de performance de ce modèle ) ensuite l'étude de la relation avec le modèle correspondant dans le cas continu, enfin une application numérique pour illustrer l'effet des paramètres sur les mesures de performances de ce système.

## 2.1 Systèmes de files d'attente classiques en temps discret

Dans cette section, nous présentons les méthodes utilisées pour l'analyse du système classique markovien en temps discret.

### 2.1.1 Processus de naissance et de mort

Les processus de naissance et de mort (N-M) sont des processus dans lesquels une seule naissance peut se produire à tout moment et le taux de naissance dépend du nombre de clients dans le système. De même, un seul décès peut se produire à tout moment et le taux de mortalité dépend du nombre de clients dans le système et ils sont markoviens.

Il sera remarqué plus tard qu'un processus de naissance et de mort ne peut qu'accroître la population ou la diminuer d'une unité à la fois, donc sa chaîne de Markov est de type tridiagonale. Le processus de naissance et de mort est très fondamental dans la théorie de file d'attente.

Le processus de naissance et de mort à temps discret n'a pas reçu beaucoup d'attention dans la littérature. Ceci est en partie parce qu'il n'a pas la structure simple qui le rend très général pour une classe de files d'attente en tant que contre partie de temps continu. Nous supposons que le processus de naissance à temps discret est un processus qui suit une distribution géométrique dépendante de l'état et le processus de décès suit une distribution géométrique dépendante de l'état. Dans ce qui suit, nous développons le modèle de manière plus explicite.

### 2.1.2 Processus de naissance et de mort en temps discret

le processus de naissance est un processus de Bernoulli, tandis que le processus de mort suit la loi géométrique. Soit  $p_i = \mathbb{P}(\text{qu'une naissance se produise})$ ,  $\bar{p}_i = 1 - p_i$ ,  $i \geq 0$ , et soit  $\bar{s} = \mathbb{P}(\text{qu'une mort se produise})$ ,  $s_i = 1 - \bar{s}_i$ ,  $i \geq 0$ .

Si nous définissons maintenant une chaîne de Markov avec l'espace d'état  $i$ ,  $i = 0$ , où  $i$  est le nombre de clients dans le système, la matrice de transition  $P$  de cette chaîne est donnée comme suit :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \bar{p}_0 & p_0 & 0 & 0 & \cdots \\ \bar{p}_1 \bar{s}_1 & \bar{p}_1 s_1 + p_1 \bar{s}_1 & p_1 s_1 & 0 & \cdots \\ 0 & \bar{p}_2 \bar{s}_2 & \bar{p}_2 s_2 + p_2 \bar{s}_2 & p_2 s_2 & 0 & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Soit  $\pi_i(n)$  la probabilité qu'il y ait  $i$  clients dans le système à l'instant  $n$ , et  $\pi(n) = [\pi_0(n), \pi_1(n), \dots]$ , et nous avons :

$$\pi(n+1) = \pi(n)P, \quad \text{ou} \quad \pi(n+1) = \pi(0)P^{n+1}.$$

Si  $P$  est irréductible et récurrente positive, il existe un vecteur invariant, ce qui est équivalent également à la distribution limite,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \pi(n) = \pi$ , d'où :

$$\pi P = \pi.$$

Posons  $\pi = [\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots]$ , d'où les équations de balance sont définies par :

$$\begin{aligned} \pi_0 &= \bar{p}_0 \pi_0 + \bar{p}_1 \bar{s}_1 \pi_1, \\ \pi_1 &= p_0 \pi_0 + (\bar{p}_1 s_1 + p_1 \bar{s}_1) \pi_1 + \bar{p}_2 \bar{s}_2 \pi_2, \\ \pi_i &= \bar{p}_{i-1} s_{i-1} \pi_{i-1} + (\bar{p}_i s_i + p_i \bar{s}_i) \pi_i + \bar{p}_{i+1} \bar{s}_{i+1} \pi_{i+1}, \quad i \geq 2. \end{aligned}$$

De la première équation on aura :

$$\pi_1 = \frac{p_0}{\bar{p}_1 \bar{s}_1} \pi_0.$$

$$\pi_i = \prod_{v=0}^{i-1} \frac{p_v s_v}{\bar{p}_{v+1} \bar{s}_{v+1}} \pi_0, \quad i \geq 1.$$

En utilisant la condition de normalisation  $\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1$ , on obtient :

$$\pi_0 = \left[ 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \prod_{v=0}^{i-1} \frac{p_v s_v}{\bar{p}_{v+1} \bar{s}_{v+1}} \right]^{-1}.$$

Pour la stabilité du système, il faut que la quantité :

$$\pi_0 = \sum_{i=1}^{\infty} \prod_{v=0}^{i-1} (p_v s_v) [\bar{p}_{v+1} \bar{s}_{v+1}]^{-1} < \infty.$$

**Remarque 2.1.** *Le processus de naissance et de mort est un cas particulier des processus quasi naissance et mort (QNM)[3], où la matrice de transition est constituée de matrices blocs au lieu des scalaires.*

### 2.1.3 Analyse du système Geo/Geo/1 classique

Nous considérons un système d'attente Geo/Geo/1 classique à un seul serveur en temps discret où l'axe du temps est divisé en sous intervalles de longueur égale, appelées "slots", et toutes les activités du système se produisent aux extrémités des "slots". Supposons que l'axe du temps soit marqué par  $0, 1, 2, \dots, m, \dots$

Dans les files d'attente en temps continu, la probabilité qu'une arrivée et un départ (fin de service) se produisent simultanément est nulle, ce qui n'est pas le cas pour les files d'attente en temps discret, où plusieurs activités peuvent se produire à la fois. Pour résoudre le conflit, on utilise la discipline Early Arrivals System (*EAS*) où un départ précède une arrivée (departure first), on suppose alors que les départs se produisent dans  $(m^-, m)$  et les arrivées dans  $(m, m^+)$  (voir la Figure 2.1).

Les clients arrivent au système selon un processus géométrique de paramètre  $p$  ( $0 < p <$

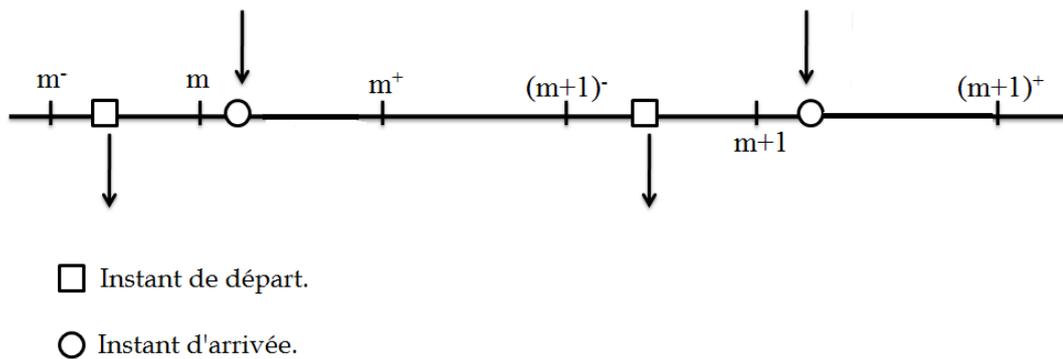


FIGURE 2.1 – L'axe du temps d'un système Geo/Geo/1 classique

$1)$ ,  $\bar{p} = 1 - p$ . Les temps de service sont géométriquement distribués de paramètre  $\bar{s}$ , où  $s = 1 - \bar{s}$  est la probabilité que le service n'est pas terminé dans le slot. On suppose de plus que les processus des arrivées et de service sont indépendants.

### 2.1.4 Chaîne de Markov

Les files d'attente de type  $Geo/Geo/1$  peuvent-être, comme un cas particulier du processus de naissance et de mort.

En effet, dans le cas d'une file d'attente  $Geo/Geo/1$ , on suppose que  $p_i = p, \forall i \geq 0$  et  $\bar{s}_i = \bar{s}, \forall i \geq 0$ .

Dans ce cas les fonctions génératrices des lois des inter-arrivées et des durées de service sont données respectivement par,  $p(z) = 1 - p + zp$  et  $\bar{s} = 1 - \bar{s} + z\bar{s}$ . Nous définissons maintenant une chaîne de Markov  $(X_m)_{m \in \mathbb{N}}$  avec l'espace d'état  $(i, k)$ ,  $i = 0$  ou  $1$ ,  $k \geq 0$ , où  $i$  est le nombre de clients dans le système. La matrice de transition  $P$  de cette chaîne est donnée par :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \bar{p} & p & 0 & 0 & \dots & & \\ \bar{p}\bar{s} & \bar{p}s + ps & ps & 0 & \dots & & \\ 0 & \bar{p}\bar{s} & \bar{p}s + ps & ps & 0 & \dots & \\ 0 & 0 & \bar{p}\bar{s} & \bar{p}s + ps & ps & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Il existe plusieurs méthodes pour analyser cette chaîne de Markov. On cite l'approche algébrique standard, l'approche des fonctions génératrices et l'approche des matrices géométriques.

#### L'approche algébrique

La chaîne  $(X_m)_{m \in \mathbb{N}}$  étant irréductible, récurrente positive, donc elle admet une distribution stationnaire unique  $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots)$  vérifiant  $\pi = \pi P$ .

D'où on a les équations de balance suivantes :

$$\pi_0 = \bar{p}\pi_0 + \bar{p}\bar{s}\pi_1, \tag{2.1}$$

$$\pi_1 = p\pi_0 + (\bar{p}s + \bar{p}\bar{s})\pi_1 + \bar{p}s\pi_2, \tag{2.2}$$

$$\pi_i = \bar{p}s\pi_{i-1} + (\bar{p}s + p\bar{s})\pi_i + \bar{p}\bar{s}\pi_{i+1}, \quad i \geq 2. \tag{2.3}$$

Soit  $\rho = \frac{ps}{\bar{p}\bar{s}}$ , on aura :

$$\pi_i = \frac{\rho^i}{s} \pi_0, \quad i \geq 1.$$

En utilisant la condition de normalisation :

$$\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1,$$

on aura :

$$\pi_0 = \frac{\bar{s} - p}{\bar{s}}, \quad \text{avec} \quad \rho < 1,$$

$\rho < 1 \iff p < \bar{s}$  est la condition de stabilité.

### 2.1.5 L'approche des fonctions génératrices

Soit  $f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i z^i$ ,  $|z| \leq 1$ , la fonction génératrice de la distribution stationnaire  $\pi$

En multipliant les équations (2.1)-(2.3) par  $z^0, z^1, z^i$  respectivement, on obtient :

$$\begin{aligned} \pi_0 &= \bar{p}\pi_0 + \bar{p}\bar{s}\pi_1, \\ z\pi_1 &= pz\pi_0 + (\bar{p}s + p\bar{s})z\pi_1 + \bar{p}\bar{s}z\pi_2, \\ z^i\pi_i &= psz^i\pi_{i-1} + (\bar{p}s + p\bar{s})z^i\pi_i + \bar{p}\bar{s}z^i\pi_{i+1}, \quad i \geq 2 \end{aligned}$$

En sommant sur  $i$  on obtient la dernière équation :

$$f(z) = f(z)[\bar{p}s + p\bar{s} + \frac{\bar{p}\bar{s}}{z} + psz] + [\bar{p} + pz - \bar{p}s - p\bar{s} - \frac{\bar{p}\bar{s}}{z} - psz]\pi_0.$$

Après tout calcul fait

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{\bar{s}(pz + \bar{p})(z - 1)}{(\bar{p}\bar{s} - psz)(z - 1)} \pi_0 \\ &= \frac{\bar{s}(pz + \bar{p})}{(\bar{p}\bar{s} - psz)} \pi_0. \end{aligned}$$

En utilisant  $f(z)|_{z=1} = 1$  on aura :

$$\pi_0 = \frac{\bar{s} - p}{\bar{s}}.$$

Comme  $\pi_0 > 0$ , on aura la condition de stabilité  $p < \bar{s}$

### 2.1.6 L'approche des matrices géométriques

Nous pouvons exprimer les probabilités de transition ci-dessus du processus  $(X_m)_{m \in \mathbb{N}}$  sous la forme de matrice-bloc suivante, appelée matrice des probabilités de transition *quasi naissance et mort* (QNM) dépendante du niveau du processus voir [3] (section 2.9.7.1). la matrice de transition est donnée par :

La matrice  $P$  sous forme blocs est alors comme suit :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} B_{00} & B_{01} & 0 & 0 & \cdots & & \\ B_{10} & B_{11} & A_0 & 0 & \cdots & & \\ 0 & B_{21} & A_1 & A_0 & 0 & \cdots & \\ 0 & 0 & A_2 & A_1 & & & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \end{pmatrix}$$

Sous forme matricielle le système d'équations (2.1)-(2.3) si dessus est donné par :

$$\begin{aligned} \pi_0 &= \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i B_{i0} \\ \pi_1 &= \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i B_{i1} \\ \pi_j &= \sum_{v=0}^{\infty} \pi_{j+v-1} A_v \quad j \geq 1. \end{aligned}$$

Dans le cas général et pour  $B_{ij}$ ,  $A_v$ , sont des matrices, la matrice de transition sera une matrice dite matrice géométrique.

Dans notre cas on a  $A_0 = ps$ ,  $A_1 = (\bar{p}s + p\bar{s})$ ,  $A_2 = \bar{p}\bar{s}$ ,  $A_v = 0$ ,  $\forall i \geq 3$ .  
 $B_{00} = \bar{p}$ ,  $B_{10} = \bar{p}\bar{s}$ ,  $B_{01} = p$ ,  $B_{11} = \bar{p}s + p\bar{s}$ ,  $B_{21} = \bar{p}\bar{s}$ ,  $B_{ij} = 0$  pour  $i \geq 3$ ,  $j \geq 2$ .

Comme les composants de la matrice  $P$  sont des scalaires on se ramène donc aux deux premières approches.

## Caractéristiques du système

- **Le nombre moyen de clients dans le système** est donné par :

$$L = \sum_{i=0}^{\infty} i\pi_i \text{ est obtenu comme suit :}$$

$$\begin{aligned} L &= (s\bar{s})^{-1}(\bar{s} - p)[\rho + 2\rho\rho^2 + 3\rho^3 + \dots] \\ &= (s\bar{s})^{-1}(\bar{s} - p)\rho[1 + 2\rho\rho + 3\rho^2 + \dots] \\ &= (s\bar{s})^{-1}(\bar{s} - p)\rho \frac{d(1 - \rho)^{-1}}{d\rho}. \end{aligned}$$

d'où :

$$L = \frac{p\bar{p}}{\bar{s} - p}.$$

**Remarque 2.2.** *Ce même résultat peut être déterminée, en régime stationnaire, en utilisant la relation :*

$$L = \left. \frac{d\pi(z)}{dz} \right|_{z \rightarrow 1}$$

- **Le nombre moyen de clients dans la file** est :

$$L_q = \sum_{i=1}^{\infty} (i - 1)\pi_i = L - \rho. \quad (2.4)$$

D'où :

$$L_q = L - \frac{p}{\bar{s}}.$$

La capacité du système est illimité donc  $p_e = p$  avec  $p_e$  "le taux d'entrée réel dans le système".

En utilisant les formules de Little, on obtient :

- **Le temps moyen de séjour dans le système** :

$$\begin{aligned} W &= L/p \\ &= \frac{\bar{p}}{\bar{s} - p}. \end{aligned}$$

- **Le temps moyen d'attente dans la file** :

$$\begin{aligned} W_q &= \frac{L_q}{p} \\ &= \frac{ps}{\bar{s}(\bar{s} - p)}. \end{aligned}$$

## 2.2 Système d'attente Geo/G/1 avec rappels généraux

### 2.2.1 Description de système

Considérons un système de files d'attente  $Geo/G/1$  avec rappels à un seul serveur en temps discret. Supposons que l'axe du temps soit marqué par  $0, 1, 2, \dots, m, \dots$  et que les départs se produisent dans  $(m^-, m)$ , les rappels et les arrivées dans  $(m, m^+)$ . L'axe de temps du système  $Geo/Geo/1$  avec rappels est représenté dans la figure suivante :

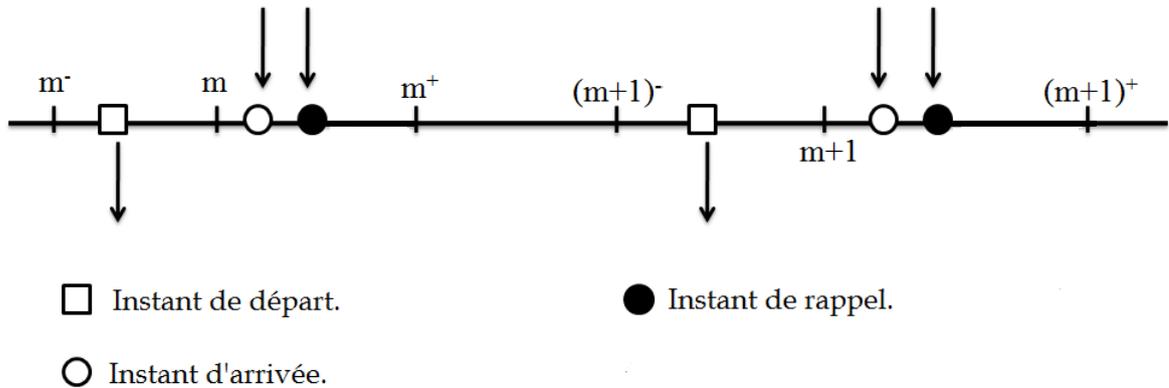


FIGURE 2.2 – L'axe de temps du système  $Geo/Geo/1$  avec rappels

Les clients primaires arrivent selon un processus géométrique de paramètre  $p$  ( $0 < p < 1$ ),  $\bar{p} = 1 - p$ . Si le serveur est inactif, le client arrivé commence immédiatement son service. Sinon, il entre en orbite et devient source d'appels répétés et tentera sa chance après une durée de temps aléatoire, jusqu'à ce qu'il trouve le serveur libre. On supposera qu'uniquement le client en tête de l'orbite est autorisé à accéder au serveur. On suppose aussi que les rappels et les services ne peuvent se produire qu'autour des extrémités des slot. Le temps des inter-rappels sont distribués selon une loi générale de distribution  $(r_i)_{i=0}^{\infty}$  et de fonction génératrice  $A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} r_i x^i$ . Les durées de services sont indépendantes et identiquement de distribués selon une loi générale  $(s_i)_{i=1}^{\infty}$ , de fonction génératrice  $S(x) = \sum_{i=1}^{\infty} s_i x^i$ , et de  $n^{\text{ème}}$  moment factoriel  $\beta_n = S^{(n)}(1)$ . De plus, les temps

inter-arrivées, les temps de rappels et les durées de service sont supposées indépendantes. L'intensité de trafic du système est donnée par  $\rho = p\beta_1$ .

### 2.2.2 Chaîne de Markov

A l'instant  $m^+$  (immédiatement après l'instant  $m$ ), le système peut être décrit par le processus

$$Y_m = (C_m, \xi_{0,m}, \xi_{1,m}, N_m).$$

Où  $C_m$  représente l'état du serveur (0 ou 1 selon que le serveur est libre ou occupé, respectivement) et  $N_m$  est le nombre de clients dans l'orbit. Si  $C_m = 0$  et  $N_m > 0$ ,  $\xi_{0,m}$  représente le temps résiduel de rappels. Si  $C_m = 1$ ,  $\xi_{1,m}$  représente le temps résiduel de service de client en cours de service.

La chaîne  $\{Y_m, m \in \mathbb{N}\}$  est une chaîne Markov, dont l'espace des états est :

$$\{(0,0); (0,i,k) : i \geq 1, k \geq 1; (1,i,k) : i \geq 1, k \geq 0\}.$$

Notre objectif est de déterminer les fonctions génératrices de la distribution stationnaire de la chaîne de Markov  $\{(Y_m, m \in \mathbb{N})\}$  c-à-d.

$$\begin{aligned} \pi_{0,0} &= \lim_{m \rightarrow \infty} P[C_m = 0, N_m = 0], \\ \pi_{0,i,k} &= \lim_{m \rightarrow \infty} P[C_m = 0, \xi_{0,m} = i, N_m = k]; & i \geq 1, k \geq 1. \\ \pi_{1,i,k} &= \lim_{m \rightarrow \infty} P[C_m = 1, \xi_{1,m} = i, N_m = k]; & i \geq 1, k \geq 0. \end{aligned}$$

Les probabilités de transition en une étape  $P_{yy'} = \mathbb{P}[Y_{m+1} = y' \mid Y_m = y]$ , sont données par les formules suivantes :

$$P_{(0,0)(0,0)} = \bar{p},$$

$$P_{(1,1,0)(0,0)} = \bar{p},$$

Si  $i \geq 1, k \geq 1$

$$P_{(0,i+1,k)(0,i,k)} = \bar{p},$$

$$P_{(1,1,k)(0,i,k)} = \bar{p}r_i,$$

Si  $i \geq 1, k = 0$

$$P_{(0,0)(1,i,k)} = ps_i,$$

$$P_{(0,1,k+1)(1,i,k)} = \bar{p}s_i,$$

si  $i \geq 1, j \geq 1$  et  $k \geq 1$

$$P_{(0,j,k)(1,i,k)} = ps_i,$$

$$P_{(1,1,k)(1,i,k)} = ps_i,$$

$$P_{(1,1,k+1)(1,i,k)} = \bar{p}s_i r_0,$$

si  $i \geq 1, k \geq 1$

$$P_{(1,i+1,k-1)(1,i,k)} = p,$$

$$P_{(1,i+1,k)(1,i,k)} = \bar{p},$$

Où  $\bar{p} = (1 - p)$ .

Les équations de Chapman Kolmogorov de la distribution stationnaire sont :

$$\pi_{0,0} = \bar{p}\pi_{0,0} + \bar{p}\pi_{1,1,0}, \tag{2.5}$$

$$\pi_{0,i,k} = \bar{p}\pi_{0,i+1,k} + \bar{p}r_i\pi_{1,1,k}; \quad i \geq 1, k \geq 1 \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned} \pi_{1,i,k} = & \delta_{0k}ps_i\pi_{0,0} + \bar{p}s_i\pi_{0,1,k+1} + (1 - \delta_{0k})ps_i \sum_{j=1}^{\infty} \pi_{0,j,k} + ps_i\pi_{1,1,k} \\ & + \bar{p}r_0s_i\pi_{1,1,k+1} + (1 - \delta_{0k})p\pi_{1,i+1,k-1} + \bar{p}\pi_{1,i+1,k}; \quad i \geq 1, k \geq 0. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Où  $\delta_{0k}$  est la fonction de Kronecker.

Avec la condition de normalisation :

$$\pi_{0,0} + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \pi_{0,i,k} + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \pi_{1,i,k} = 1.$$

Pour résoudre les équations (2.5)-(2.7) on introduit les fonctions génératrices suivantes :

$$\varphi_0(x, z) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \pi_{0,i,k} x^i z^k,$$

$$\varphi_1(x, z) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \pi_{1,i,k} x^i z^k.$$

Et les fonctions génératrices auxiliaires :

$$\varphi_{0,i}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \pi_{0,i,k} z^k, \quad i \geq 1,$$

$$\varphi_{1,i}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_{1,i,k} z^k, \quad i \geq 1.$$

En multipliant (2.6)-(2.7) par  $z^k$  et en sommant sur  $k$ , les équations deviennent :

$$\varphi_{0,i}(z) = \bar{p}\varphi_{0,i+1}(z) + \bar{p}r_i\varphi_{1,1}(z) - \bar{p}r_i\pi_{1,1,0}, \quad i \geq 1, \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{1,i}(z) &= (\bar{p} + pz)\varphi_{1,i+1}(z) + ps_i\varphi_0(1, z) + \frac{\bar{p}r_i + pz}{z}s_i\varphi_{1,1}(z) \\ &+ \frac{\bar{p}}{z}s_i\varphi_{0,1}(z) - \frac{\bar{p}r_0}{z}s_i\pi_{1,1,0} + ps_i\pi_{0,0}, \quad i \geq 1. \end{aligned} \quad (2.9)$$

En remplaçant l'équations (2.5) dans (2.8) et (2.9) on aura :

$$\varphi_{0,i}(z) = \bar{p}\varphi_{0,i+1} + \bar{p}r_i\varphi_{1,1} - pr_i\pi_{0,0}, \quad i \geq 1, \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{1,i}(z) &= (\bar{p} + pz)\varphi_{1,i+1} + ps_i\varphi_0(1, z) + \frac{\bar{p}r_i + pz}{z}s_i\varphi_{1,1}(z) \\ &+ \frac{\bar{p}}{z}s_i\varphi_{0,1}(z) + \frac{p(z - r_i)}{z}s_i\pi_{0,0}, \quad i \geq 1. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Puis en multipliant les équations (2.10)-(2.11) par  $x^i$  et en sommant sur  $i$ , on obtient :

$$\frac{x - \bar{p}}{x}\varphi_0(x, z) = \bar{p}[A(x) - r_0]\varphi_{1,1}(z) - \bar{p}\varphi_{0,1}(z) - p[A(x) - r_0]\pi_{0,0}, \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{x - (\bar{p} + pz)}{x}\varphi_1(x, z) &= \left[ \frac{\bar{p}r_0 + pz}{z}S(x) - (\bar{p} + pz) \right] \varphi_{1,1}(z) + \frac{\bar{p}}{z}S(x)\varphi_{0,1}(z) + pS(x) \\ &+ pS(x)\varphi_0(1, z) + \frac{p(z - r_0)}{z}S(x)\pi_{0,0}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

En remplaçant  $x$  par 1 dans (2.12) on aura :

$$p\varphi_0(1, z) = \bar{p}(1 - r_0)\varphi_{1,1}(z) - \bar{p}\varphi_{0,1}(z) - p(1 - r_0)\pi_{0,0}$$

Et en remplaçant l'équation ci-dessus dans (2.13), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{x - (\bar{p} + pz)}{x}\varphi_1(x, z) &= \left[ \frac{z + \bar{p}r_0(1 - z)}{z}S(x) - (\bar{p} + pz) \right] \varphi_{1,1}(z) \\ &+ \frac{\bar{p}(1 - z)}{z}S(x)\varphi_{0,1}(z) - \frac{pr_0(1 - z)}{z}S(x)\pi_{0,0} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Posons  $x = \bar{p}$  dans (2.12) et  $x = \bar{p} + pz$  dans (2.14), on obtient les équations suivantes :

$$\begin{aligned} p[A(\bar{p} - r_0)]\pi_{0,0} &= \bar{p}[A(\bar{p}) - r_0]\varphi_{1,1}(z) - \bar{p}\varphi_{0,1}(z), \\ \frac{pr_0(1 - z)}{z}S(\bar{p} + pz)\pi_{0,0} &= \left[ \frac{z + \bar{p}r_0(1 - z)}{z}S(\bar{p} + pz) - (\bar{p} + pz) \right] \varphi_{1,1}(z) \\ &+ \frac{\bar{p}(1 - z)}{z}S(\bar{p} + pz)\varphi_{0,1}(z). \end{aligned}$$

A partir du système d'équations, On obtient les fonctions génératrices  $\varphi_{1,1}(z)$  et  $\varphi_{0,1}(z)$  :

$$\varphi_{1,1}(z) = \frac{pA(\bar{p})(1 - z)S(\bar{p} + pz)}{\bar{p}A(\bar{p})(1 - z)S(\bar{p} + pz) - z[(\bar{p} + pz) - S(\bar{p} + pz)]}\pi_{0,0}, \quad (2.15)$$

$$\varphi_{0,1}(z) = \frac{pz[A(\bar{p}) - r_0][(\bar{p} + pz) - S(\bar{p} + pz)]}{\bar{p}A(\bar{p})(1 - z)S(\bar{p} + pz) - z[(\bar{p} + pz) - S(\bar{p} + pz)]} \frac{\pi_{0,0}}{\bar{p}}. \quad (2.16)$$

En remplaçant (2.15), (2.16) dans (2.12) et (2.14), respectivement on obtient les fonctions génératrices suivantes :

$$\begin{aligned} \varphi_0(x, z) &= \frac{A(x) - A(\bar{p})}{x - \bar{p}} \frac{pxz[(\bar{p} + pz) - S(\bar{p} + pz)]\pi_{0,0}}{\bar{p}A(\bar{p})(1 - z)S(\bar{p} + pz) - z[(\bar{p} + pz) - S(\bar{p} + pz)]}, \\ \varphi_1(x, z) &= \frac{S(x) - S(\bar{p} + pz)}{x - (\bar{p} + pz)} \frac{pxA(\bar{p})(1 - z)(\bar{p} + pz)\pi_{0,0}}{\bar{p}A(\bar{p})(1 - z)S(\bar{p} + pz) - z[(\bar{p} + pz) - S(\bar{p} + pz)]}. \end{aligned}$$

En utilisant la condition de normalisation  $\pi_{0,0} + \varphi_0(1, 1) + \varphi_1(1, 1) = 1$ , on aura :

$$\pi_{0,0} = \frac{p + \bar{p}A(\bar{p}) - \rho}{A(\bar{p})}. \quad (2.17)$$

D'après (2.17), comme  $\pi_{0,0} > 0$ , on obtient la condition d'ergodicité de la chaîne de Markov :

$$\rho < p + \bar{p}A(\bar{p}).$$

Cette condition peut être écrite comme  $p(\beta_1 - 1) < \bar{p}A(\bar{p})$  où le premier membre est le nombre moyen de clients primaire arrivant durant l'intervalle de service et le second membre représente le nombre moyen de clients secondaire (rappels) entrant en service à l'instant de début de service.

**Remarque 2.3.** *Cette condition indique que les clients primaire doivent arriver plus lentement que les clients qui rappellent (en moyenne). Si la condition  $\rho < p + \bar{p}A(\bar{p})$  est vérifiée, le système est stable.*

Les résultats ci-dessus sont résumés dans le théorème suivant :

**Théorème 2.1.** [15] *La chaîne de Markov  $\{Y_m; m \in \mathbb{N}\}$  est ergodique si et seulement si*

$$\rho < p + \bar{p}A(\bar{p}).$$

*Les fonctions génératrices de la distribution stationnaire de la chaîne sont données par :*

$$\begin{aligned} \varphi_0(x, z) &= \frac{A(x) - A(\bar{p})}{x - \bar{p}} \frac{pxz[(\bar{p} + pz) - S(\bar{p} + pz)]\pi_{0,0}}{\bar{p}A(\bar{p})(1 - z)S(\bar{p} + pz) - z[(\bar{p} + pz) - S(\bar{p} + pz)]}, \\ \varphi_1(x, z) &= \frac{S(x) - S(\bar{p} + pz)}{x - (\bar{p} + pz)} \frac{pxA(\bar{p})(1 - z)(\bar{p} + pz)\pi_{0,0}}{\bar{p}A(\bar{p})(1 - z)S(\bar{p} + pz) - z[(\bar{p} + pz) - S(\bar{p} + pz)]}, \end{aligned}$$

où

$$\pi_{0,0} = \frac{p + \bar{p}A(\bar{p}) - \rho}{A(\bar{p})}.$$

**Corollaire 2.1.** [15]

- *La fonction génératrice du nombre de clients dans l'orbite étant donné que le serveur est libre est donnée par :*

$$\pi_{0,0} + \varphi_0(1, z) = \frac{A(\bar{p})(\bar{p} + pz)[S(\bar{p} + pz) - z]\pi_{0,0}}{\bar{p}A(\bar{p})(1 - z)S(\bar{p} + pz) - z[(\bar{p} + pz) - S(\bar{p} + pz)]}.$$

- La fonction génératrice du nombre de clients dans l'orbite étant donné que le serveur occupé est donnée par :

$$\varphi_1(1, z) = \frac{A(\bar{p})(\bar{p} + pz)[1 - S(\bar{p} + pz)]\pi_{0,0}}{\bar{p}A(\bar{p})(1 - z)S(\bar{p} + pz) - z[(\bar{p} + pz) - S(\bar{p} + pz)]}.$$

- La fonction génératrice du nombre de clients dans l'orbite est donnée par :

$$\begin{aligned} \psi(z) &= \pi_{0,0} + \varphi_0(1, z) + \varphi_1(1, z) \\ &= \frac{A(\bar{p})(1 - z)(\bar{p} + pz)\pi_{0,0}}{\bar{p}A(\bar{p})(1 - z)S(\bar{p} + pz) - z[(\bar{p} + pz) - S(\bar{p} + pz)]}. \end{aligned}$$

- la fonction génératrice du nombre de clients dans le système est :

$$\begin{aligned} \phi(z) &= \pi_{0,0} + \varphi_0(1, z) + z\varphi_1(1, z) \\ &= \frac{A(\bar{p})(1 - z)(\bar{p} + pz)S(\bar{p} + pz)\pi_{0,0}}{\bar{p}A(\bar{p})(1 - z)S(\bar{p} + pz) - z[(\bar{p} + pz) - S(\bar{p} + pz)]}. \end{aligned}$$

### 2.2.3 Caractéristiques du système

Le système d'attente  $Geo/G/1$  avec rappels peut être caractérisé par les mesures de performance suivantes :

- La probabilité que le système soit inoccupé :

$$\pi_{0,0} = \frac{p + \bar{p}A(\bar{p}) - \rho}{A(\bar{p})}.$$

- La probabilité que le système soit occupé :

$$\varphi_0(1, 1) + \varphi_1(1, 1) = \frac{\rho - p[1 - A(\bar{p})]}{A(\bar{p})}.$$

- La probabilité que le serveur soit libre :

$$\pi_{0,0} + \varphi_0(1, 1) = 1 - \rho.$$

- La probabilité que le serveur soit occupé :

$$\varphi_1(1, 1) = \rho.$$

- Le nombre moyen de clients dans le système :

$$L = \phi'(1) = \rho + \frac{2\bar{p}(\rho - p)[1 - A(\bar{p})] + p^2\beta_2}{2[p + \bar{p}A(\bar{p}) - \rho]}.$$

- Le nombre moyen de clients dans l'orbite :

$$N = \psi'(1) = \frac{2\bar{p}(\rho - p)[1 - A(\bar{p})] + p^2\beta_2}{2[p + \bar{p}A(\bar{p}) - \rho]}.$$

à l'aide des formules de Little, on obtient :

- Le temps moyen de séjour d'un client dans le système est donné par :

$$\begin{aligned} W &= \frac{L}{p} \\ &= \beta_1 + \frac{2\bar{p}(\beta_1 - 1)[1 - A(\bar{p})] + p\beta_2}{2[p + \bar{p}A(\bar{p}) - \rho]}. \end{aligned}$$

- Le temps moyen d'attente d'un client en l'orbite :

$$\begin{aligned} W_q &= \frac{N}{p} \\ &= \frac{2\bar{p}(\beta_1 - p)[1 - A(\bar{p})] + p\beta_2}{2[p + \bar{p}A(\bar{p}) - \rho]}. \end{aligned}$$

**Remarque 2.4.** *La distribution stationnaire de l'état du serveur est donnée par :*

$$\pi_{0,0} + \varphi_0(1, 1) = 1 - \rho, \quad \varphi_1(1, 1) = \rho.$$

*dépend seulement de la distribution du temps du service à travers sa moyenne  $\beta_1$  et non pas de la distribution du temps des inter-rappels.*

**Remarque 2.5.** *(Cas spécial) quand  $r_0 = 1$ ,  $\phi(z)$  est réduite à :*

$$\phi(z) = \frac{(1 - \rho)(1 - z)S(\bar{p} + pz)}{S(\bar{p} + pz) - z}.$$

*Laquelle est la probabilité de la fonction génératrice du nombre de clients dans le système de file d'attente Geo/G/1/ $\infty$  ([36]). Ce résultat n'est pas étonnant car quand  $r_0 = 1$ , le client en tête de l'orbite commence immédiatement son service lorsque le serveur est libre.*

## 2.3 La décomposition stochastique

cette section concerne l'analyse de la propriété de la décomposition stochastique de la distribution du nombre de clients dans le système.

La fonction génératrice de nombre de clients dans le système  $\phi(z)$  peut être exprimé sous la forme :

$$\phi(z) = Q(z) \frac{\pi_{0,0} + \varphi_0(1, z)}{\pi_{0,0} + \varphi_0(1, 1)}, \quad (2.18)$$

où  $Q(z)$  est la fonction génératrice du nombre de clients dans le système d'attente  $Geo/G/1/\infty$  [36] qui est donnée par :

$$Q(z) = \frac{(1 - \rho)(1 - z)S(\bar{p} + pz)}{S(\bar{p} + pz) - z}. \quad (2.19)$$

et

$$\omega(z) = \frac{\pi_{0,0} + \varphi_0(1, z)}{\pi_{0,0} + \varphi_0(1, 1)}. \quad (2.20)$$

où  $\omega(z)$  représente la fonction génératrice du nombre de clients dans l'orbite étant donné que le serveur est libre.

En effet l'expression (2.18) est la propriété de la décomposition stochastique pour notre système ; c-à-d, le nombre total de clients dans le système peut être représenté comme la somme de deux variables aléatoires indépendantes ; l'une est le nombre total de clients dans le système  $Geo/G/1/\infty$  classique [36] et l'autre est le nombre de clients dans le système  $Geo/G/1$  avec rappels étant donné que le serveur est libre.

## 2.4 Comparaison avec le système de files d'attente en temps continu

Cette section concerne l'analyse de la relation entre le système en temps continu et le système en temps discret. Nous montrerons qu' on peut approximer le système  $M/G/1$  avec rappels généraux en temps continu par le système correspondant en temps discret.

Considérons alors le système de file d'attente  $M/G/1$  avec rappels généraux voir chapitre 1 section(1.7), où les clients arrivent selon un processus poissonnien de taux  $\lambda > 0$ . Les temps inter-rappels sont des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées selon une loi générale  $F(x)$  et de Transformée de Laplace  $F^*$ . Les durées de service sont des variables aléatoires indépendantes de distribution commune générale  $B(x)$  de moyenne finie  $\mu^{-1}$  et de transformée de Laplace  $\hat{B}$ . Si on suppose que l'axe du temps est subdivisé en slots de longueur  $\Delta$ , on peut approximer le système en temps continu par le système correspondant en temps discret pour lequel :

$$p = \lambda\Delta, \quad r_i = \int_{i\Delta}^{(i+1)\Delta} dF(x), \quad i \geq 0 \quad \text{et} \quad s_i = \int_{(i-1)\Delta}^{i\Delta} dB(x), \quad i \geq 1.$$

Où  $\Delta$  est choisit suffisamment petit de telle sorte que  $p$  est une probabilité.

L'objectif est de démontrer que,  $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \phi(z)$  est la fonction génératrice du nombre de clients dans le système  $M/G/1$  avec rappels généraux ( obtenu par Gomez-Corral [33]), voir l'équation 1.7 (Chapitre 1)

En utilisant la définition de l'intégration Lebesgue on a :

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \rho = \frac{\lambda}{\mu},$$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} A(\bar{p}) = F^*(\lambda),$$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} S(\bar{p} + pz) = \hat{B}(\lambda(1 - z)).$$

Pour une démonstration rigoureuse de ces relations on peut se référer [52]. Si on prend en considération les résultats précédent, nous obtenons la relation suivante :

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta \rightarrow 0} \phi(z) &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{(1 - z)(\bar{p} + pz)S(\bar{p} + pz)[p + \bar{p}A(\bar{p}) - \rho]}{\bar{p}A(\bar{p})(1 - z)S(\bar{p} + pz) - z[(\bar{p} + pz) - S(\bar{p} + pz)]} \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{(1 - z)(1 - \lambda(1 - z)\Delta)S(\bar{p} + pz)[\lambda\Delta + (1 - \lambda\Delta)A(\bar{p}) - \rho]}{(1 - \lambda\Delta)A(\bar{p})(1 - z)S(\bar{p} + pz) - z[1 - \lambda(1 - z)\Delta - S(\bar{p} + pz)]} \\ &= \left[ F^*(\lambda) - \frac{\lambda}{\mu} \right] \frac{(1 - z)\hat{B}(\lambda(1 - z))}{F^*(\lambda)(1 - z)\hat{B}(\lambda(1 - z)) - z[1 - \hat{B}(\lambda(1 - z))]}, \end{aligned}$$

Qui coïncide avec la fonction génératrice du nombre de clients dans le système de file d'attente  $M/G/1$  avec rappels généraux (voir l'équation (1.7)).

## 2.5 Application numérique

Dans cette partie, nous présentons quelques résultats numériques pour illustrer l'effet des paramètres variables sur les principales mesures de performance de notre système étudié  $Geo/G/1$  avec rappels généraux. On a considéré deux situations tels que la première situation concerne le modèle  $Geo/Geo/1$  avec rappels géométrique et la seconde le système  $Geo/G/1$  avec rappels généraux où on a considéré deux cas où dans le premier cas traite les lois générales gouvernant le système sont Binomiales et dans le second cas les lois générales sont de loi Poisson. Nous nous sommes intéressées aux mesures de performance suivantes :

**La probabilité que le système est vide**

$$\pi_{0,0} = \frac{p + \bar{p}A(\bar{p}) - \rho}{A(\bar{p})}.$$

**Le nombre moyen de clients dans le système**

$$L = \rho + \frac{2\bar{p}(\rho - p)[1 - A(\bar{p})] + p^2\beta_2}{2[p + \bar{p}A(\bar{p}) - \rho]}.$$

**Le nombre moyen de clients dans l'orbite**

$$N = \frac{2\bar{p}(\rho - p)[1 - A(\bar{p})] + p^2\beta_2}{2[p + \bar{p}A(\bar{p}) - \rho]}.$$

Les programmes sont élaborés sous logiciel MATLAB 7.1

### 2.5.1 Le système $Geo/Geo/1$ avec rappels

Considérons le système  $Geo/Geo/1$  avec rappels en temps discret. Ce système est décrit par le processus des arrivées géométriques de paramètre  $p$ , les temps des inters-rappels sont supposés géométrique de paramètre  $\bar{r}$  et sa fonction génératrice est  $A(x) = (1-r)/(1-rx)$ . Les durées de service sont indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi géométrique de paramètre  $s$ , de premier et de second moment factoriel  $\beta_1, \beta_2$  respectivement.

Dans la Figure 2.3, nous présentons trois graphes (a), (b) et (c). Dans cette situation on fixe  $\beta_1 = 2$  et  $p = 0.2, 0.3, 0.4$ .

- Le graphe (a) concerne la variation de la probabilité que le système soit occupé ( $1 - \pi_{0,0}$ ) en fonction de  $r$ . On constate que la probabilité ( $1 - \pi_{0,0}$ ) augmente tend vers 1 à chaque fois que la valeur de  $r$  est proche de 1, on remarque aussi qu'à chaque fois que  $p$  augmente, la probabilité ( $1 - \pi_{0,0}$ ) tend plus rapidement vers 1.
- Le graphe (b) illustre le comportement de  $L$  en fonction de  $r$  on a les mêmes remarques de plus on observe qu'à chaque fois que  $r$  est proche de 1,  $L$  tend vers l'infini.
- le graphe (c) illustre le nombre moyen de clients dans l'orbite  $N$  en fonction de la variation de taux des rappels  $r$ , on constate que  $N$  augmente et tend vers l'infini en fonction de  $p$ , à chaque fois que  $r$  est proche de 1, et pour des valeurs faibles de  $r$  l'orbite est vide.

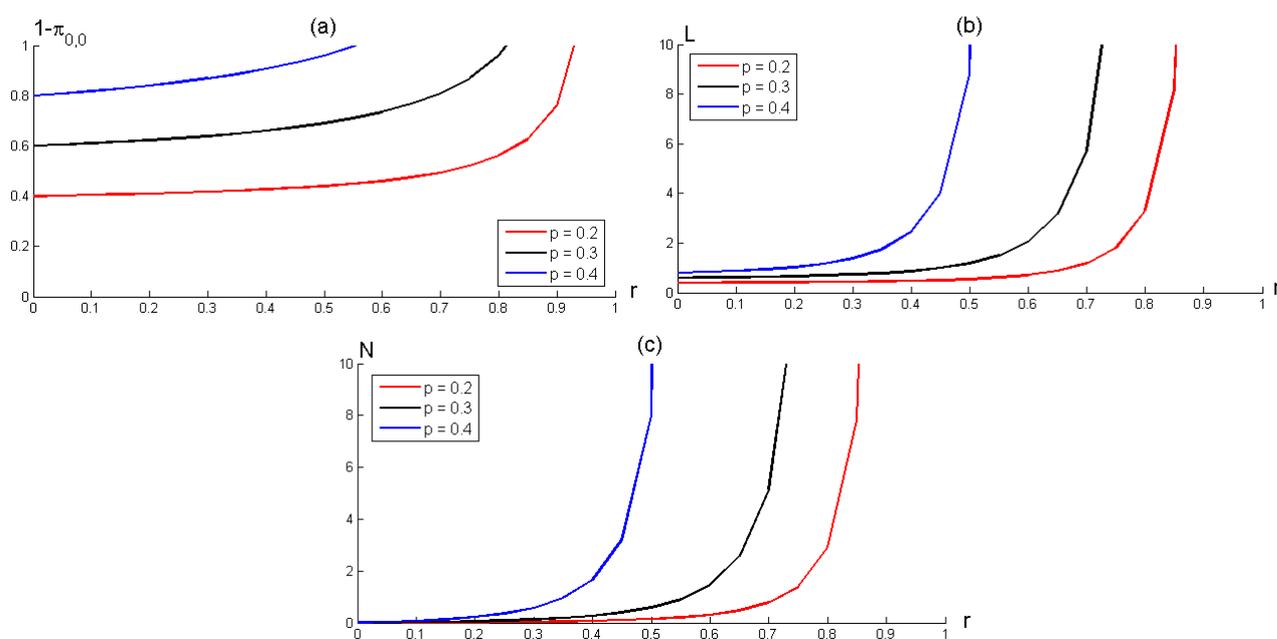


FIGURE 2.3 – (a) La probabilité que le système soit occupé en fonction de  $r$ . (b) le nombre moyen de clients dans le système. (c) le nombre moyen de clients dans l'orbite

## 2.5.2 Le système d'attente $Geo/G/1$ avec rappels généraux

Considérons un système  $Geo/G/1$  avec rappels en temps discret à un seul serveur. Ce système est décrit par le processus des arrivées géométrique de paramètre  $p$ , les inter-

rappels sont supposés de loi générale, et les temps de service sont indépendants et identiquement distribués selon une loi générale.

### Premier cas

On considère les inter-rappels sont de loi binomiale de paramètres  $n$  et  $r$  ( $\mathcal{B}(n, r)$ ) de fonction génératrice  $A(x) = (rx + 1 - r)^n$ , les durées de service sont indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi binomiale de paramètre  $n$  et  $s$  ( $\mathcal{B}(n, r)$ ).

- Dans la Figure 2.4, nous présentons trois graphes (a), (b) et (c). nous avons fixé  $p = 0, 2$  et  $n = 1, 4, 6$ .

Le graphe (a) illustre la variation de la probabilité que le système soit occupé ( $1 - \pi_{0,0}$ ) en fonction de  $r$ , on remarque que cette probabilité et  $r$  sont proportionnels et elle est constante pour  $n = 1$  puis augmente et tend vers 1 lorsque  $n$  augmente .

Le graphe (b) concerne la variation du nombre de clients dans système  $L$ , en fonction de  $r$ , les mêmes effets sont montrés, tel que le nombre moyen de clients dans le système tend vers l'infini lorsque  $n$  augmente.

Les mêmes effets sont constatés sur le graphe (c) à l'exception que l'orbite est vide pour  $n = 1$ .

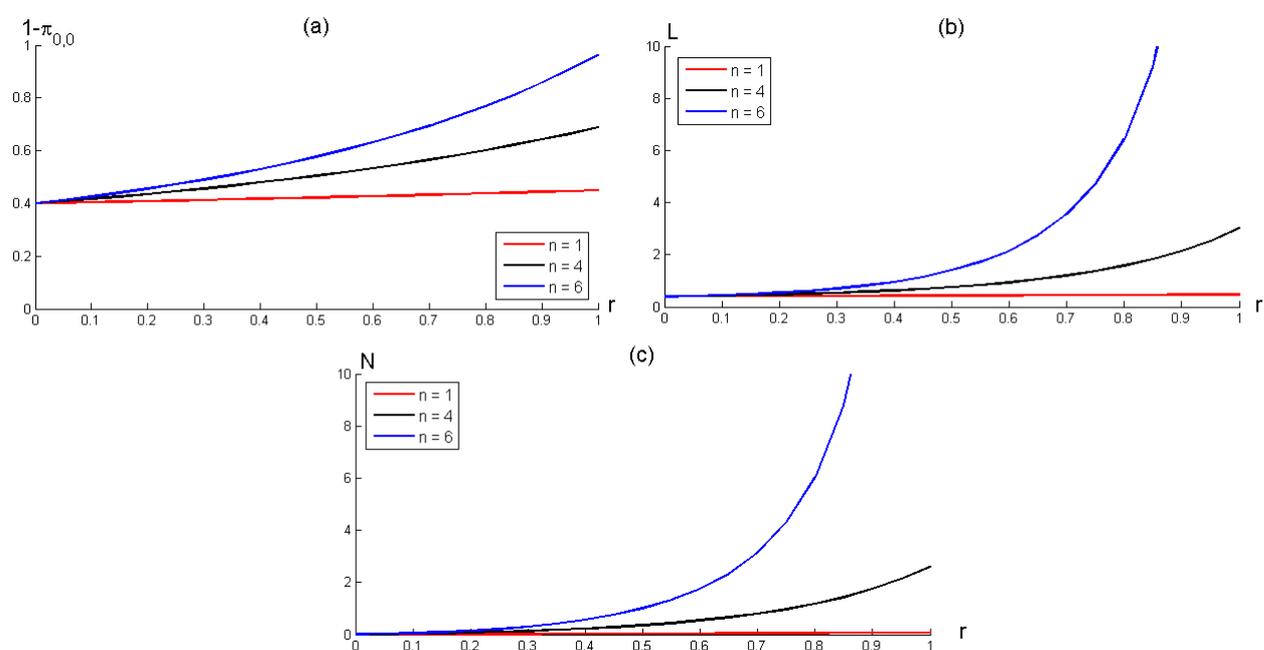


FIGURE 2.4 – (a) La probabilité que le système est occupé en fonction de  $r$ . (b) le nombre moyen de clients dans le système. (c) le nombre moyen de clients dans l'orbite

### Deuxième cas

On considère les inter-rappels sont de loi de Poisson de paramètres  $r$ , ( $\mathcal{P}(r)$ )  $r > 0$  de fonction génératrice  $A(x) = \exp(-r(1-x))$ , les durées de service sont indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi Poisson de paramètre  $s$   $s > 0$ . On fixe  $p = 0.2, 0.3, 0.4$ .

- Dans la figure (2.5), nous présentons trois graphes (a), (b) et (c) .

le graphe (a) concerne la variation de la probabilité que le système soit occupé ( $1 - \pi_{0,0}$ ) en fonction  $r$ , la probabilité ( $1 - \pi_{0,0}$ ) et  $r$  sont proportionnels et augmente lorsque  $p$  augmente et atteint 1 lorsque  $p = 0.4$  et  $r$  tend vers l'infini.

Le graphe (b) illustre la variation du nombre de clients dans système  $L$  en fonction de  $r$  qui sont proportionnels, on remarque que  $L$  est constant pour  $p = 0.2, 0.3$ . Pour  $p = 0.4$ , et à partir de  $r = 0.8$   $L$  tend vers l'infini.

Pour le nombre moyen de clients dans l'orbite  $N$  en fonction de  $r$  illustré dans le graphe (c), on remarque que  $N$  est nul pour les petites valeurs de  $p$  et pour  $p = 0.4$ ,  $N$  augmente et tend vers l'infini, à partir de  $r = 0.8$ .

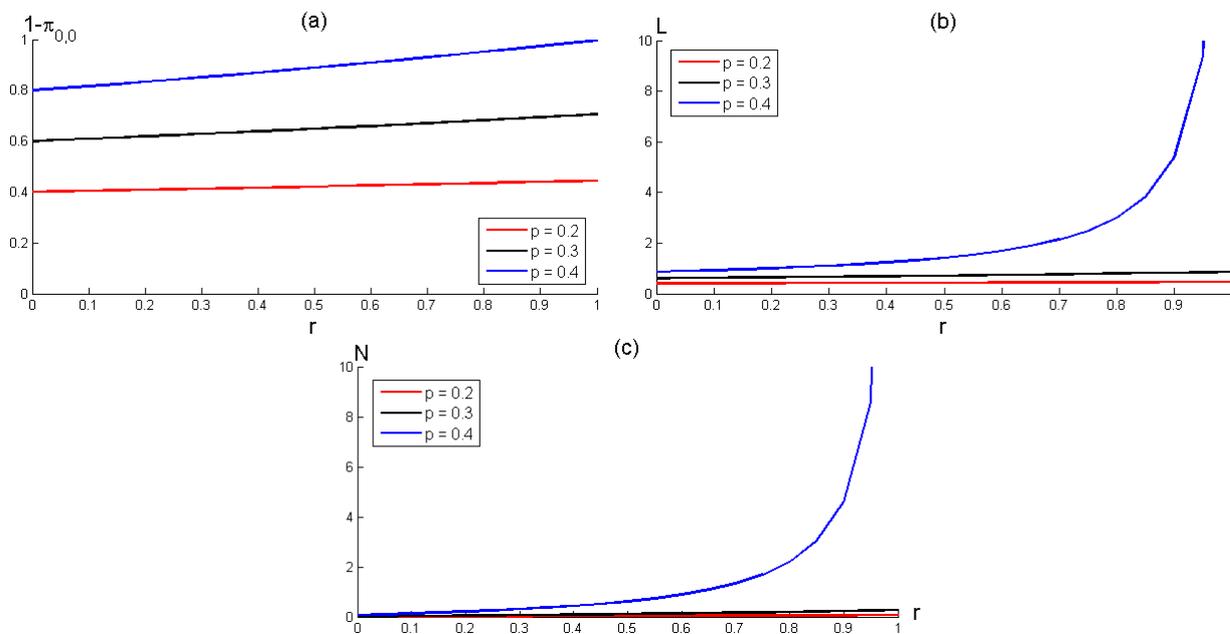


FIGURE 2.5 – (a)La probabilité que le système est occupé en fonction de r.(b) le nombre moyen de clients dans le système.(c) le nombre moyen de clients dans l'orbite

## Conclusion

Dans ce chapitre on a analysé le système de files d'attente  $Geo/G/1$  avec rappels généraux en utilisant la méthode de variable aléatoire on a calculé les mesures de performances de ce système. La durée de service générale n'influence en rien que par ses deux premiers moment  $\beta_1, \beta_2$  par contre la loi générale des inter-rappels a un effet considerable sur les caractéristiques du système par sa forme.

# Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous avons d'abord rappelé et représenté quelques concepts et techniques de base de la théorie de files d'attente avec rappels en particulier le système  $M/G/1$  avec rappels.

Ensuite, nous avons présenté quelques systèmes de files d'attentes ( $Geo/Geo/1$ ) classique et ( $Geo/G/1$ ) avec rappels en temps discret et nous nous sommes intéressées à cet effet aux mesures de performances de ces modèles.

Enfin, nous avons effectué une analyse numérique montrant l'effet de quelques paramètres sur les mesures de performances (La probabilité que le système soit occupé, le nombre moyen de clients dans le système et le nombre moyen de clients en orbite) de quelques systèmes de files d'attente à savoir ( $Geo/Geo/1$  et  $Geo/G/1$ ) avec rappels. Ce travail ouvre quelques perspectives de recherche telles que :

- Analyse des systèmes de files d'attente avec rappels à temps discret plus complexe.
- Modéliser des systèmes concrets avec ce type de modèle.
- Approximation des systèmes d'attente avec rappels à temps continu par des modèles appropriés à temps discret.

# Bibliographie

- [1] Aboul-Hassan, S. Rabia and F. Taboly, A discrete-time Geo/G/1 retrial queue with general retrial times and balking customers. *Journal of Korean Statistical Society*. 37 : 335–348, 2008.
- [2] A. M. Alexandrov, A queueing system with repeated orders. *Engineering Cybernetics Review* 12 (3), 1–4, 1974.
- [3] A. S. Alfa, *Queueing Theory for Telecommunications : Discrete Time Modelling of a Single Node System*. Springer, 2010.
- [4] A. S. Alfa, *Applied Discrete-Time Queues*. Second Edition. Springer. 2016.
- [5] J. Amador and J. R. Artalejo, The M/G/1 retrial queue : New descriptors of the customer's behavior. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 223, 15–26, 2009.
- [6] V. V. Anisimov and J. R. Artalejo, Analysis of markov multiserver retrial queues with negative arrivals. *Queueing Systems*, 39, 157–182, 2001.
- [7] J. R. Artalejo and G.I. Falin, Stochastic decomposition for retrial queues. *Top*, 2(2), 01–14, 1994.
- [8] J. R. Artalejo, Retrial queues with negative arrivals. *Proceeding of the International Conference on Stochastic Processes*, 1996.
- [9] J. R. Artalejo, Analysis of an M/G/1 queue with constant repeated attempts and server vacations. *Computers. Ops. Res*, 24(6), 493–504, 1997.
- [10] J. R. Artalejo, Retrial queues with a finite number of sources. *J. Korean Math. Soc*, 5(3), 503–525, 1998.

- 
- [11] J. R. Artalejo and A. Gómez-Corral, On a single server queue with negative arrivals and request repeated. *J. Appl. Prob*, 36, 907–918, 1999.
- [12] J. R. Artalejo and M. J. López-Herrero, On the M/G/1 queue with quadratic repeated attempts. *Statistical Methods* 3, 60–78, 2001.
- [13] J. R. Artalejo and A. Gómez-Corral, *Retrial queueing systems : A computation approach*. Berlin, Springer Edition, 2008.
- [14] J. R. Artalejo, Accessible bibliography on retrial queues. *Mathematical and computer Modelling*. 187–211, 2010.
- [15] I. Atencia and P. Moreno, A Discret-Time Geo/G/1 Retrial Queue With General Retrial Times. *Queueing Systems* 48, 5-21, 2004.
- [16] L. Berdjoudj, *Stabilité Forte dans les Systèmes de Files d’Attente avec Rappels*. Mémoire de Magistère, Université de Bejaia, 2000.
- [17] L. Berdjoudj and D. Aissani, *Analyse des systèmes d’attente avec rappels et arrivées négatives*. Editions Universitaires Européennes, 2016.
- [18] H. Bruneel and B.G. Kim, *Discrete-Time Models for Communications Systems including ATM*. Kluwer Academic Publishers, Boston, 1993
- [19] M. L. Chaudhry, On numerical computations of some discrete-time queues. In : Grassmann, W. K. (Ed), *Computational Probability*. Kluwer, Boston, 2000.
- [20] Q. H. Cho and B. Conolly, New results in the theory of repeated orders queueing systems. *Journal of Applied Probability* 16, 335–356, 1979.
- [21] C. Clos, An aspect of the dialing behaviour of subscribers and its effect on the trunk plant. *Bell Syst. Tech. J*, 27, 424–445, 1948.
- [22] J. W. Cohen, Basic problem of telephone and influence of repeated calls. *Telecommunication review*, (2), 49–100, 1957.
- [23] J. K. Cozzolino and H. Yang, A service system with unfilled requests repeated. *Operations Research* 16, 1126–1137, 1968.
- [24] N. Djelleb, On the M/G/1 retrial queue subjected to the breakdowns. *RAIRO Operations Research* 36 (4), 299–310, 2002.

- 
- [25] S. Doghmane, Sur le comportement asymptotique du système de files d'attente avec rappels. Mémoire de magistère. Université Badji Mokhtar Annaba, 2012.
- [26] G. I. Falin, Single-line repeated orders queueing systems, *Optimization* 17, 649–677, 1986.
- [27] G. I. Falin, A survey of retrial queue. *Queueing Systems* 7, 127–168, 1990.
- [28] G. I. Falin and C. Fricker, On the virtual waiting time in an M/G/1 retrial queue. *J. Appl. Prob.*, 28, 446–460, 1991.
- [29] G. I. Falin, J. R. Artalejo and M. Martin, On the single server retrial queue with priority customers. *Queueing Systems*, 14, 439–455, 1993.
- [30] G. I. Falin and J. G. C. Templeton, *Retrial Queues. Monographs on Statistics and Applied Probability*, Vol. 75. Chapman and Hall, London, 1997.
- [31] G. Fayolle, A simple telephone exchange with delayed feedbacks. In : Boxma, O.J. Cohen, J.W. Tijms, H.C.(Eds.), *Teletraffic Analysis and Computer Performance Evaluation*. Elsevier Science, Amsterdam, 245–253, 1986.
- [32] S. W. Fuhrmann and R.B. Cooper, Stochastic decompositions in the M/G/1 queue with generalized vacations, *Oper. Res.* 33(5), 1117–1129, 1985.
- [33] A. Gómez-Corral, Stochastic Analysis of a single server retrial queue with general retrial times. *Naval Res. Logistics* 46, 561–581, 1999.
- [34] S. A. Grischevkin, Multiclass batch arrival retrial queues analysed as branching processes with immigration. *Queueing Systems* 11, 395–418, 1992.
- [35] D. Gross, J. F. Shortle, J. M. Thompson and C. M. Harris, *Fundamentals of queueing theory*. Fourth Edition. John Wiley & Sons, 2008.
- [36] J. J. Hunter, *Mathematical Techniques of Applied Probability*, Vol. 2, *Discrete-Time Models : Techniques and Applications* (Academic Press, New York, 1983).
- [37] S. Ioukane, Etude de modèle M/G/1 avec rappels et feedback. Mémoire d'ingénieur d'état en Recherche Operationnelle. Université de Bejaia, 2011.
- [38] V. A. Kapyrin, A study of the stationary characteristics of a queueing system with recurring demands. *Cybernetics* 13, 584–590, 1977.

- 
- [39] T. Kernane, Stabilité de modèles de files d'attente. Thèse de Doctorat en Mathématique. Université Houari Boumediene, 2007.
- [40] L. Kleinrock, Queueing Systems. Volume I : Theory. John Wiley and Sons, 1975.
- [41] H. Li and T. Yang, Steady-state queue size distribution of discrete-time PH/Geo/1 retrial queues, *Math. Comput. Modelling* 30, 51–63, 1999.
- [42] T. Li, Z. Wang and Z. Liu, Geo/Geo/1 retrial queue with working vacations and vacation interruption, *J Appl Math Comput*, 39, 131–143, 2012.
- [43] T. Meisling, Discrete time queueing theory, *Oper. Res*, 6, 96–105, 1958
- [44] S. Mokhtari, Etude de files d'attente avec rappels et priorité, Mémoire de Magistère. Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene, 2010
- [45] M. F. Neuts, Matrix-geometric solutions in stochastic models - An algorithmic approach. The Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1981.
- [46] H. Takagi, Queueing Analysis : A Foundation of Performance Evaluation, Discrete-Time Systems, Vol. 3 (North-Holland, Amsterdam, 1993).
- [47] J. Wang and Q. Zhao, A discrete-time Geo/G/1 retrial queue with starting failures and second optional service, *Computers and Mathematics with Applications*, 53 115–127, 2007.
- [48] J. Wang, Discrete-time Geo/G/1 retrial queues with general retrial time and Bernoulli vacation, *J Syst Sci Complex*, 25, 504–513, 2012.
- [49] R. I. Wilkinson, Theories for toll traffic engineering in the usa. *Bell Syst. Tech. J*, 35, 421–507, 1956.
- [50] M. E. Woodward, Communication and Computer Networks : Modelling with Discrete-Time Queues (IEEE Computer Soc. Press, Los Alamitos, CA, 1994).
- [51] T. Yang and J. G. C. Templeton, A survey on retrial queues. *Queueing Systems* 2, 201–233, 1987.
- [52] T. Yang and H. Li, On the steady-state queue size distribution of the discrete-time Geo/G/1 queue with repeated attempts. *Queueing Systems* 21, 199–215, 1995