

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université Abderrahmane Mira-Béjaïa  
Faculté des Sciences Exactes  
Département de Mathématiques



## Mémoire de fin de cycle

*Pour l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques  
Option Statistique et Analyse Décisionnelle (S.A.D)*

Thème :

---

### Les essais accélérés en fiabilité

---

Réalisé par :

GHOUT YASMINA & YMMEL NOURA

Devant le Jury composé de :

<b><u>Présidente</u></b> :	M <sup>me</sup> Fadila AMRI	MAA	Université de Béjaïa
<b><u>Encadreur</u></b> :	M <sup>r</sup> Mohand BOURAINE	MAA	Université de Béjaïa
<b><u>Examinatrice</u></b> :	M <sup>me</sup> Karima LAGHA	MCA	Université de Béjaïa

Promotion 2016/2017

# Remerciements

*Tout d'abord, nous remercions Dieu le tout-puissant qui nous a donné la force et le savoir afin d'accomplir ce travail.*

*Un grand merci pour nos familles, surtout nos parents qui nous ont épaulés, soutenus et suivis tout au long de ce projet.*

*A nos chères amis qui ont toujours été présents et fidèles.*

*A notre promoteur **Mr BOURAINE Mohand** pour son encouragement et son suivi attentif pour la réalisation de ce travail.*

*Nous remercions particulièrement **Mr OUAZINE Sofiane** pour son aide et sa disponibilité.*

*Nous tenons aussi à remercier également tous les membres de jury pour avoir accepté d'évaluer notre travail.*

*Enfin, pour toute personne qui a contribué, de près ou de loin, à l'élaboration de ce mémoire. Veuillez bien trouver ici l'expression de nos sincères remerciements.*

# Dédicaces

*Ce modeste travail est dédié :*

*A nos chers parents.*

*A nos frères et sœurs.*

*A nos familles.*

*A nos amis et collègues et tous ceux qui nous ont aidés.*

**YASMINA et NOURA**

# Table des matières

Liste des abréviations	6
Table des figures	7
Introduction générale	8
<b>1 Généralités sur la fiabilité</b>	<b>10</b>
1.1 Introduction . . . . .	10
1.2 Notions de fiabilité . . . . .	10
1.2.1 Concepts de base . . . . .	10
1.2.2 Fiabilité . . . . .	11
1.2.3 Défaillance . . . . .	11
1.2.4 Matériel réparable . . . . .	12
1.2.5 Matériel non réparable . . . . .	13
1.2.6 Maintenabilité . . . . .	13
1.2.7 Disponibilité . . . . .	14
1.2.8 Sécurité . . . . .	14
1.2.9 Durabilité . . . . .	14
1.3 Indices de fiabilité . . . . .	14
1.3.1 Fonction de fiabilité . . . . .	14
1.3.2 Taux de défaillance . . . . .	16
1.3.3 Le temps moyen de bon fonctionnement . . . . .	17
1.4 Modèles paramétriques de fiabilité . . . . .	17
1.4.1 La loi exponentielle . . . . .	17
1.4.2 La loi Normale . . . . .	19
1.4.3 La loi log-Normale $LN(\mu, \sigma^2)$ . . . . .	20
1.4.4 La loi de weibull . . . . .	20
1.4.5 La loi Gamma . . . . .	22

<b>2</b>	<b>Les essais en fiabilité</b>	<b>24</b>
2.1	Introduction . . . . .	24
2.2	Les plans d'essais utilisés en fiabilité . . . . .	24
2.3	Les essais de fiabilité . . . . .	25
2.3.1	Les essais dans le cycle de développement d'un produit . . . . .	26
2.3.2	Les principaux types d'essais en fiabilité . . . . .	27
<b>3</b>	<b>Estimation de la fiabilité par les essais accélérés</b>	<b>36</b>
3.1	Introduction . . . . .	36
3.2	Hypothèses de base des essais accélérés . . . . .	37
3.3	Plans d'essais accélérés . . . . .	37
3.3.1	Profils de stress utilisés . . . . .	38
3.3.2	Les types de stress utilisés . . . . .	39
3.3.3	Modèles de vie accélérée . . . . .	40
3.4	Facteur d'accélération (FA) . . . . .	40
3.5	Le modèle standard de vie accélérée . . . . .	42
3.5.1	Paramétrisation de r . . . . .	44
3.5.2	Cas multidimensionnel : . . . . .	46
3.5.3	Etude de deux plans d'expériences : . . . . .	47
3.6	Estimation paramétrique . . . . .	48
3.6.1	Premier plan d'expérience . . . . .	48
3.6.2	Deuxième plan d'expérience . . . . .	54
<b>4</b>	<b>Application</b>	<b>57</b>
4.1	Introduction . . . . .	57
4.2	Description de l'endommagement par fatigue . . . . .	57
4.3	Présentation de plan d'essais . . . . .	59
4.4	Application des modèles SVA paramétrique . . . . .	59
4.5	Exemple par simulation . . . . .	60
	<b>Conclusion</b>	<b>63</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>64</b>

# Liste des abréviations

$R(t)$ :	Fonction de Fiabilité.
$M(t)$ :	Fonction de Maintenabilité.
$A(t)$ :	Fonction de Disponibilité.
$S(t)$ :	Fonction de Sécurité.
$F(t)$ :	Fonction de Répartition.
$\lambda(t)$ :	Taux de Défaillance
$E(t)$ :	Espérance Mathématique.
<i>AMDEC</i> :	Analyse des Modes de Défaillance, de leur Effets et de leur Criticité.
<i>APR</i> :	Analyse Préliminaire des Risques.
<i>RDP</i> :	Réseaux de Petri.
<i>REX</i> :	Retour d'Expérience.
<i>FA</i> :	Facteur d'Accélération.
<i>SVA</i> :	Le modèle Standard de Vie Accéléré .

# Table des figures

1.1	Chronogramme d'un équipement réparable . . . . .	12
1.2	Chronogramme d'un équipement non réparable . . . . .	13
1.3	Fonction de fiabilité . . . . .	15
1.4	Courbe en baignoire pour les composants mécaniques. . . . .	16
1.5	Densité de probabilité de la loi exponentielle . . . . .	18
1.6	Densité de probabilité de la loi normale . . . . .	19
1.7	Densité, Fiabilité et taux de panne de la loi de weibull . . . . .	21
1.8	Densité, Fiabilité et taux de panne de la loi Gamma . . . . .	23
2.1	Position des essais dans le cycle de développement d'un produit . . . . .	27
2.2	Maturation des produits par les essais aggravés . . . . .	28
2.3	Diagramme des zones caractéristiques du système suivant les axes de sollicitations lors d'un essais de type HALT. . . . .	29
2.4	Représentation de déverminage . . . . .	33
2.5	Déverminage classique . . . . .	34
2.6	Déverminage aggravé . . . . .	35
3.1	Profil d'essai sous stress constant . . . . .	38
3.2	Profil d'essai sous stress échelonnée . . . . .	38
3.3	Profil d'essai sous stress cyclique . . . . .	39
3.4	Profil d'essai sous stress aléatoire . . . . .	39
4.1	Cycle de contrainte . . . . .	58
4.2	Sévérisation du cycle de contrainte . . . . .	59
4.3	Paramètres de simulation . . . . .	61

# Introduction générale

L'évolution actuelle des technologies et des techniques de production, ainsi que l'augmentation de la concurrence industrielle, incite les entreprises à réaliser et à rechercher la qualité et la réduction des coûts par la modélisation de la fiabilité de leurs produits au cours de leur durée de vie ainsi de développer et maîtriser les sources de défaillance.

La construction d'une loi de fiabilité n'est pas toujours possible en présence de systèmes très fiables du fait qu'il ne permettent pas d'observer des défaillances pendant un temps  $t$  d'essais. Pour cela, il est nécessaire de procéder par des essais accélérés qui sont une des approches les plus communes pour obtenir la loi de fiabilité ou le taux de défaillance de systèmes ou de composants dans des délais plus courts. Brièvement, ces essais consistent à réduire les durées de vie des produits par l'accélération des dégradations provoquant la défaillance. Pour ce faire, les niveaux des stress subis par le produit sont sévérés (supérieurs à ceux qu'il supportent dans les conditions normales d'utilisation) afin d'obtenir des données plus rapidement[16].

Pour obtenir la loi de fiabilité dans les conditions nominales, il est nécessaire d'utiliser un modèle de vie accélérée. Le plus populaire de ces modèles est le modèle standard de vie accéléré(SVA). L'estimation du modèle SVA à partir des résultats d'essais accélérés permet de construire une estimation de la durée de vie dans des conditions normales. Le choix du plan d'expérience et la nature des connaissances que nous avons sur la fiabilité d'un produit qui permet une estimation paramétrique ou non paramétriques des caractéristiques de fiabilité.

L'objectif de ce mémoire est de développer la notion d'essais de fiabilité, en particulier les essais accélérés : les essais aggravés, les essais de détermination et de démonstration, les essais Bayésiens et les essais de Déverminage. L'estimation de la fiabilité par les essais accélérés sera largement abordée. Un intérêt particulier sera donné au modèle standard de vie accéléré.

Ce mémoire est structuré en quatre chapitres :

Dans le premier chapitre nous nous limitons à un bref rappel des concepts de bases de la théorie de la fiabilité.

Le deuxième chapitre est axé sur les principaux types d'essais en fiabilité.

Dans le troisième chapitre nous nous sommes intéressés à l'estimation de la fiabilité par les essais accélérés, nous présentons ensuite le modèle standard de vie accélérée(SVA).

Le quatrième chapitre est consacré à une application du modèle SVA (estimation paramétrique) à un composant mécanique.

Ce mémoire se termine par une conclusion générale.

# Chapitre 1

## Généralités sur la fiabilité

### 1.1 Introduction

La fiabilité est la science des défaillances basée sur l'expérience et l'une des composantes essentielles de la qualité d'un produit, elle est la caractéristique d'un dispositif exprimé par la probabilité que ce dispositif accomplisse une fonction requise dans des conditions d'utilisation et pour une période de temps déterminée et retenue en tant que critère fondamental pour leur élaboration. La fiabilité est prise en considération lors de l'étape de la conception, en plus elle est utilisée dans de nombreux domaines de l'activité humaine (économique, scientifique, technique et industriel, etc).

La meilleure connaissance de la fiabilité provient de l'analyse des défaillances lorsque les produits sont en service. C'est le service de maintenance qui est chargé de collecter les données qui permettront d'établir des lois statistiques sur une population importante et sur un temps long.

Dans ce chapitre, nous exposons les notions de base de la théorie de fiabilité et le comportement d'un matériel en service ainsi que les modèles paramétriques utilisés en fiabilité.

### 1.2 Notions de fiabilité

#### 1.2.1 Concepts de base

La théorie de fiabilité sert à étudier l'aptitude des systèmes (entités, composants, dispositifs, équipements, éléments,...) à fonctionner correctement durant une période donnée.

Un dispositif, peut se trouver dans l'un des deux états possibles :

- ✓ Apte à fonctionner correctement (état de service).
- ✓ Inapte à fonctionner correctement (en panne ou hors service).

On considère les hypothèses suivantes :

- ✓ Au départ, chaque dispositif est en état de service.
- ✓ Les défaillances se produisent généralement de façon aléatoire [13].

### 1.2.2 Fiabilité

La fiabilité (Reliability en anglais) est l'aptitude d'une entité à accomplir les fonctions requises dans des conditions données pendant une durée donnée. Elle est caractérisée par la probabilité  $R(t)$  que l'entité E accomplisse ces fonctions, dans les conditions données pendant l'intervalle de temps  $[0, t]$ , sachant que l'entité n'est pas en panne à l'instant 0.

$$R(t) = \mathbb{P} \{E \text{ non défaillante sur } [0; t]\}. \quad (1.1)$$

La notion de fiabilité se distingue selon l'étape étudiée de la vie du système [4] :

- a) **Fiabilité prévisionnelle** : C'est la fiabilité déterminée durant la phase conception sur la base d'un modèle mathématique défini à partir des données de fiabilité de ces composants.
- b) **Fiabilité estimée** : C'est la fiabilité d'un dispositif mesurée après avoir conçu le système et ceci à l'aide d'un ensemble d'essais.
- c) **Fiabilité opérationnelle** : C'est la fiabilité mesurée sur un matériel en exploitation, elle dépend des conditions réelles d'exploitation, on peut aussi distinguer :
  - ✓ Fiabilité intrinsèque : Fiabilité ne dépend que de la qualité de l'équipement.
  - ✓ Fiabilité extrinsèque : Dépend des conditions d'exploitation de l'équipement (production, maintenance, ...).

### 1.2.3 Défaillance

La défaillance (Failure en anglais) est une perte partielle ou totale de la capacité de fonctionnement d'un dispositif.

On a généralement quatre catégories de défaillances :

- a) **Défaillance mineure** : Elle nuit au bon fonctionnement du système en causant un dommage négligeable au système ou à son environnement sans toutefois présenter de risque pour l'homme.
- b) **Défaillance significative** : Elle nuit au bon fonctionnement du système sans toutefois causer de dommage notable, ni présenter de risque important pour l'homme.
- c) **Défaillance critique** : Elle entraîne la perte d'une (ou des) fonction(s) essentielle(s) du système et cause des dommages importants à son environnement.
- d) **Défaillance catastrophique** : Elle occasionne la perte d'une (ou des) fonction(s) essentielles du système et cause des dommages importants au système ou à son environnement et entraîne la mort ou des dommages corporels [13].

### 1.2.4 Matériel réparable

Un matériel est dit réparable lorsqu'on a la possibilité de remplacer un ou plusieurs constituants [3].

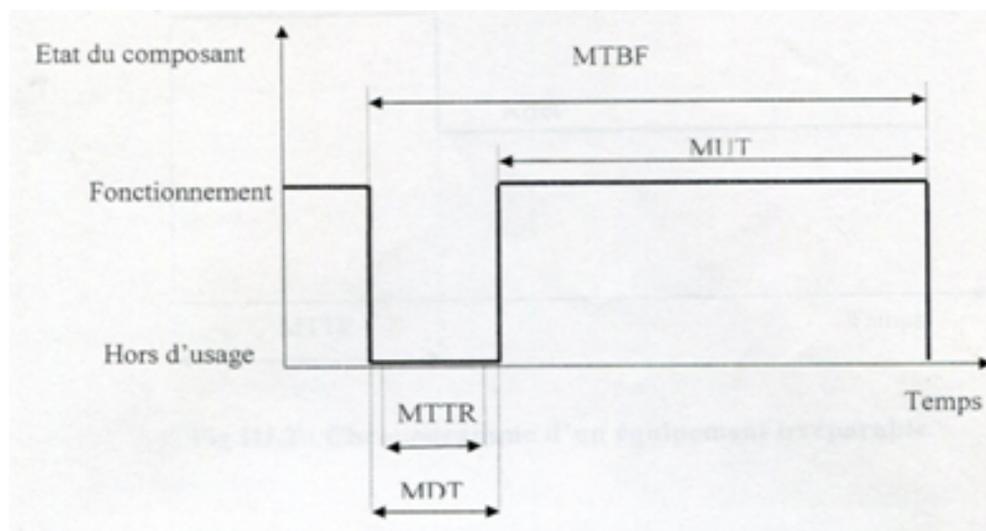


FIGURE 1.1 – Chronogramme d'un équipement réparable

Avec :

MTBF : Moyenne de temps entre deux défaillances successives (Mean Time Between Failure).

MUT : Moyenne de temps de fonctionnement (Mean Up Time).

MDT : Moyenne de temps de pannes (Mean Down Time).

MTTR : Moyenne de temps techniques de réparation (Mean Time To Repair).

### 1.2.5 Matériel non réparable

Un matériel est dit non réparable dans le cas où la rupture de l'une des composantes de l'équipement entraîne un arrêt total et le remplacement [3].

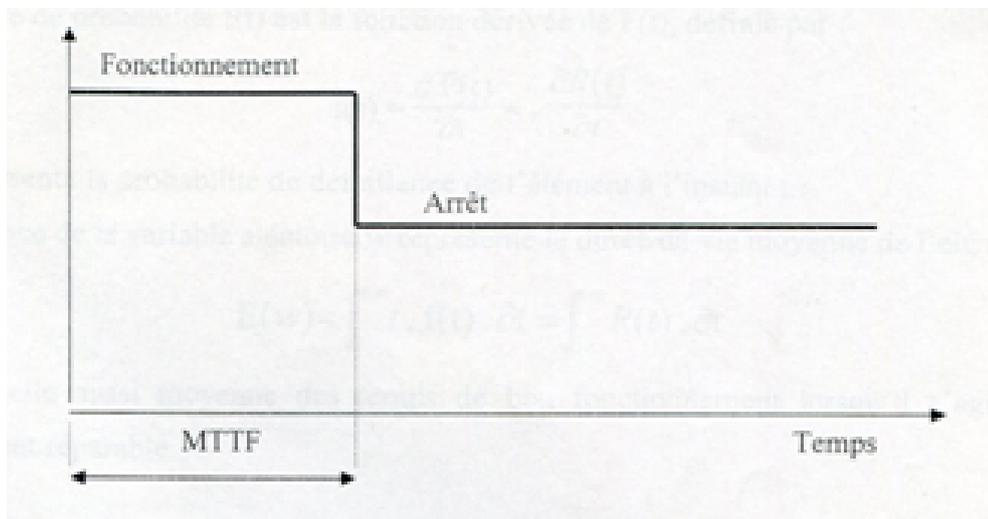


FIGURE 1.2 – Chronogramme d'un équipement non réparable

Avec :

MTTF : Moyenne des temps jusqu'à la première panne (Mean time to Failure).

### 1.2.6 Maintenabilité

La maintenabilité est l'aptitude d'une entité à être maintenue ou rétablie dans un état dans lequel elle peut accomplir une fonction requise, lorsque la maintenance est réalisée dans des conditions données avec des procédures et des moyens prescrits. Elle est caractérisée par la probabilité  $M(t)$  que l'entité  $E$  soit en état, à l'instant  $t$ , d'accomplir ses fonctions, sachant que l'entité était en panne à l'instant 0.

$$M(t) = \mathbb{P} \{E \text{ est réparable sur } [0; t]\}. \quad (1.2)$$

### 1.2.7 Disponibilité

La disponibilité est l'aptitude d'une entité à être en état d'accomplir les fonctions requises dans les conditions données et à un instant donné. Elle est caractérisée par la probabilité  $D(t)$  que l'entité  $E$  soit en état, à l'instant  $t$ , d'accomplir les fonctions requises dans des conditions données [8].

$$D(t) = \mathbb{P} \{E \text{ non défaillante à l'instant } t\}. \quad (1.3)$$

- **Disponibilité limite** : La disponibilité asymptotique est donnée par la relation suivante (voir[11]) :

$$D(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} (D(t)) = \frac{MTTF}{MTTF + MTTR}. \quad (1.4)$$

### 1.2.8 Sécurité

La sécurité est l'aptitude d'une entité à éviter de faire apparaître, dans des conditions données, des événements critiques ou catastrophiques. Elle est caractérisée par la probabilité  $S(t)$  (voir [18]).

$$S(t) = \mathbb{P} \{E \text{ évite des événements critiques ou catastrophiques sur } [0; t]\}. \quad (1.5)$$

### 1.2.9 Durabilité

La durabilité est l'aptitude d'une entité à accomplir une fonction requise dans des conditions données d'utilisation et de maintenance, jusqu'à ce qu'un état limite soit atteint [18].

## 1.3 Indices de fiabilité

### 1.3.1 Fonction de fiabilité

[8] La fiabilité d'un dispositif au bout d'un temps  $t$  correspond à la probabilité pour que ce dispositif n'ait pas de défaillance entre 0 et l'instant  $t$ .

En notant  $T$  la variable aléatoire caractérisant l'instant de défaillance du dispositif, la fiabilité s'exprime par la fonction  $R(t)$  telle que :

$$R(t) = \mathbb{P}(T \geq t) = 1 - F(t). \quad (1.6)$$

$F(t)$  est la fonction de répartition de la variable  $T$ .

La fonction de fiabilité en général est de la forme suivante (figure 1.3) :

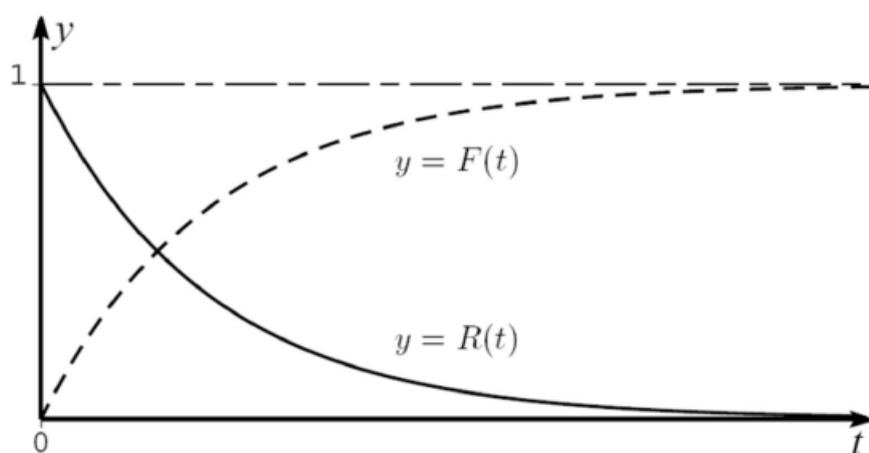


FIGURE 1.3 – Fonction de fiabilité

### 1.3.2 Taux de défaillance

L'écriture mathématique du taux de défaillance à l'instant  $t$ , noté  $\lambda(t)$ , est la suivante :

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\Delta t} \frac{R(t) - R(t + \Delta t)}{R(t)} \right). \quad (1.7)$$

Physiquement le terme  $\lambda(t)$ , mesure la probabilité qu'une défaillance d'un dispositif se produise dans l'intervalle de temps  $[t, t + \Delta t]$  sachant que ce dispositif a bien fonctionné jusqu'à l'instant  $t$ .

Le taux de défaillance d'un dispositif à l'instant  $t$  est donc défini par :

$$\lambda(t) = -\frac{dR(t)}{dt} \frac{1}{R(t)} = \frac{dF(t)}{dt} \frac{1}{R(t)} = \frac{f(t)}{R(t)}. \quad (1.8)$$

Sa connaissance suffit à déterminer la fiabilité, grâce à la formule suivante :

$$R(t) = \exp\left\{-\int_0^t \lambda(s) \cdot ds\right\}. \quad (1.9)$$

- **La courbe en baignoire** : La courbe en baignoire représente l'évolution du taux de défaillance au cours du temps  $t$  d'un produit pendant toute sa durée de vie. Selon le type de composante, le rythme de la courbe peut changer (voir figure 1.4).

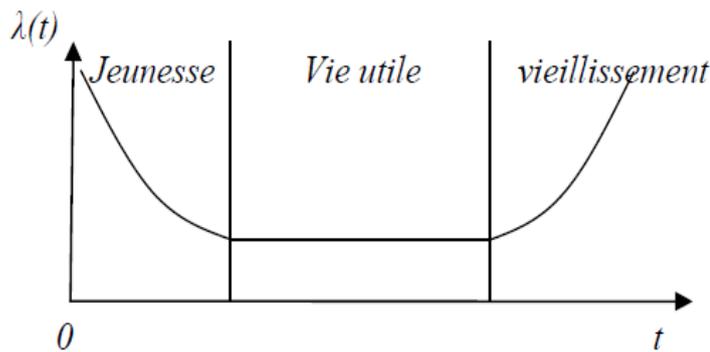


FIGURE 1.4 – Courbe en baignoire pour les composants mécaniques.

Un équipement possède, en générale trois périodes de vie (voir[4]) :

1. **Période de jeunesse** : Concerne les défaillances précoces, caractérisées par une décroissance rapide du taux de défaillance. Les défaillances de jeunesse peuvent être supprimées avant la livraison au client en pratiquant le déverminage. Dans l'étude de fiabilité les défaillances apparues lors de cette période de garantie ne sont pas prises en compte et on s'intéresse principalement à la période utile du produit.
2. **Période utile** : Correspond à la majorité de la vie du produit. Le taux de défaillance est pratiquement constant où les pannes surviennent de manière aléatoire.
3. **Période de vieillesse** : Correspond aux défaillances définissant la fin d'utilisation du produit. Le taux de défaillance dans cette période croît rapidement où les pannes s'accélèrent.

### 1.3.3 Le temps moyen de bon fonctionnement

Le temps de bon fonctionnement avant la première panne correspond à l'espérance de la durée de vie  $T$ , on le note  $MTTF$  [20] :

$$MTTF = E(T) = \int_0^{+\infty} t.f(t).dt = \int_0^{+\infty} R(t).d(t). \quad (1.10)$$

## 1.4 Modèles paramétriques de fiabilité

### 1.4.1 La loi exponentielle

C'est une loi simple, très utilisée en fiabilité dont le taux de défaillance est constant. Elle décrit le temps écoulé jusqu'à une défaillance. Elle à de nombreuses applications dans plusieurs domaines est définie par un seul paramètre, le taux de défaillance  $\lambda$ . En générale, elle modélise la durée de vie de composants électroniques (voir[18]).

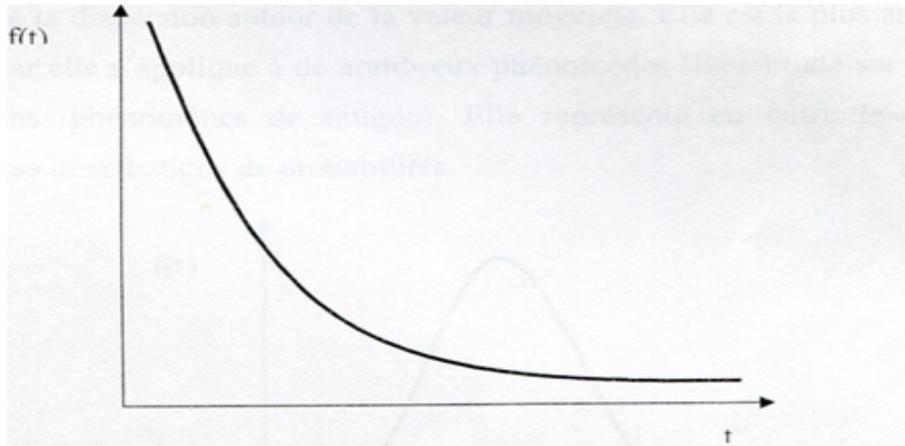


FIGURE 1.5 – Densité de probabilité de la loi exponentielle

- Densité de probabilité :

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad t \geq 0, \lambda > 0. \quad (1.11)$$

- Fonction de réparation :

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}. \quad (1.12)$$

- Fonction de fiabilité :

$$R(t) = 1 - F(T) = e^{-\lambda t} \quad t \geq 0, \lambda > 0. \quad (1.13)$$

- Taux de défaillance :

$$\lambda(t) = \lambda, t/t > 0. \quad (1.14)$$

- Espérance :

$$E(T) = \frac{1}{\lambda}. \quad (1.15)$$

- Variance :

$$V(T) = \frac{1}{\lambda^2}. \quad (1.16)$$

✱La loi exponentielle est très utilisée en fiabilité car elle présente la propriété d'être sans mémoire.

$$\mathbb{P}(T > t + \Delta t | T \geq t) = \frac{e^{-\lambda(t+\Delta t)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda(\Delta t)} = \mathbb{P}(T > \Delta t); t > 0, \Delta t > 0. \quad (1.17)$$

### 1.4.2 La loi Normale

La loi normale est très répandue parmi les lois de probabilité car elle s'applique à de nombreux phénomènes. En fiabilité, elle représente la fin de vie des système vieillissants sous l'effet de l'usure, la fatigue,... car le taux de défaillance est toujours croissant. Elle est définie par la moyenne  $\mu$  et l'écart-type  $\sigma$  et elle est caractérisée par (voir[8]) :

$$R(t) = 1 - \phi\left(\frac{t - \mu}{\sigma}\right), t > 0. \quad (1.18)$$

Où  $\phi$  est la fonction de répartition de la loi normale centré ( $\mu = 0$ ) réduite ( $\sigma = 1$ ) :

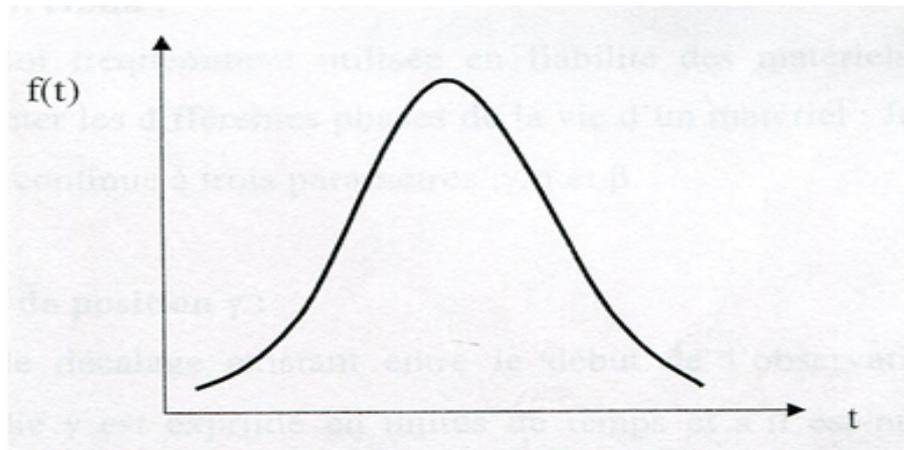


FIGURE 1.6 – Densité de probabilité de la loi normale

- Densité de probabilité :

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\Pi}} \exp\left[-\frac{(t - \mu)^2}{2\sigma^2}\right], \quad -\infty < t < +\infty. \quad (1.19)$$

- Fonction de répartition :

$$F(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\Pi}} \int_{-\infty}^t \exp\left[-\frac{(t - \mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx. \quad (1.20)$$

$$MTTF = \mu$$

- Variance :

$$V(T) = \sigma^2. \quad (1.21)$$

Si  $T$  suit la loi Normale (0, 1) alors sa fonction de répartition est donnée par :

$$\phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \int_{-\infty}^u \exp\left[-\frac{1}{2}x^2\right] dx. \quad (1.22)$$

### 1.4.3 La loi log-Normale $LN(\mu, \sigma^2)$

Cette loi est utilisée en fiabilité pour modéliser la défaillance par fatigue. La fonction de survie d'une loi log-normale de paramètres  $\mu$  et  $\sigma$  est (voir [8, 10]) :

Log T suit une loi normale  $(\mu, \sigma^2)$

$$R(t) = 1 - \Phi\left(\frac{\log(t) - \mu}{\sigma}\right), t > 0. \quad (1.23)$$

- **Densité de probabilité :**

$$f(t) = \frac{1}{\sigma t \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\log(t) - \mu)^2}{2\sigma^2}\right], \text{ pour } t > 0. \quad (1.24)$$

- **Taux de défaillance :**

$$\lambda(t) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\log(t) - \mu}{\sigma}\right)^2\right)}{t \int_0^{+\infty} \sigma \sqrt{2\pi} \cdot f(t) dt}. \quad (1.25)$$

- **Espérance :**

$$E(T) = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right). \quad (1.26)$$

- **Variance :**

$$V(T) = [\exp(\sigma^2) - 1] \exp(2\mu + \sigma^2). \quad (1.27)$$

– **Remarque :** Si  $T$  suit une loi log-normale de paramètres  $\mu$  et  $\sigma$ , alors  $\log(T)$  suit une loi normale de paramètres  $\mu$  et  $\sigma$ .

### 1.4.4 La loi de weibull

C'est la plus populaire des lois, elle est souvent utilisée aussi bien en électronique qu'en mécanique ; elle caractérise mieux le comportement de produit dans les trois phases de vie : période de jeunesse, période de vie utile et période d'usure ou vieillissement. La fonction de survie d'une loi de Weibull de paramètres  $\beta$ ,  $\gamma$  et  $\eta$  est (voir [10]) :

$$R(t) = \exp\left(-\left(\frac{t - \gamma}{\eta}\right)^\beta\right), \quad (1.28)$$

$\beta > 0, \eta > 0, \gamma > 0$ .

- $\gamma$  : Est un paramètre de position, Il représente le décalage existant entre le début de l'observation et le début du processus étudié.
- $\eta$  : Est un paramètre d'échelle indique en fiabilité que la probabilité de défaillance au bout de  $\eta$  unités de temps.
- $\beta$  : Est un paramètre de forme. Il représente la vitesse du processus étudié.

- Densité de probabilité :

$$f(t) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta-1} \exp\left(-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^\beta\right), t > \gamma. \quad (1.29)$$

- Fonction de répartition :

$$F(t) = 1 - \exp\left(-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^\beta\right). \quad (1.30)$$

- Espérance :

$$E(T) = \int_0^{+\infty} R(t) dt = \gamma + \eta \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right). \quad (1.31)$$

Tel que :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt. \quad (1.32)$$

- Taux de défaillance :

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta-1}, t > \gamma. \quad (1.33)$$

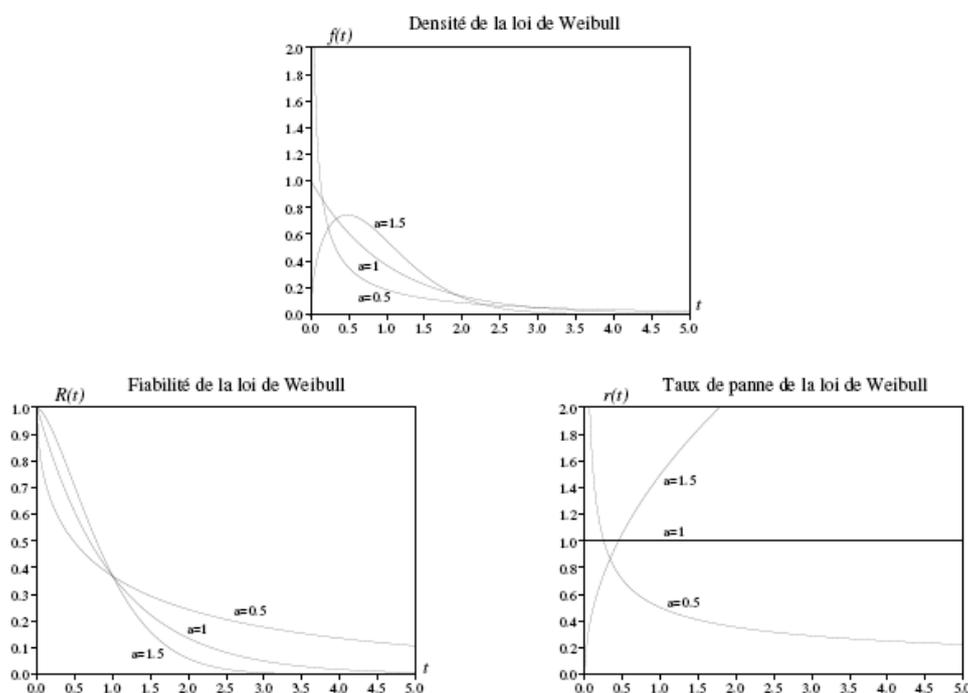


FIGURE 1.7 – Densité, Fiabilité et taux de panne de la loi de weibull

– Remarque :

- $\beta < 1$  : période de jeunesse, ( $\lambda(t)$  décroît).
- $\beta = 1$  : période de vie utile, indépendance du temps, ( $\lambda(t)$  constant).
- $\beta > 1$  : période de vieillesse ou d'usure, ( $\lambda(t)$  croît).
- Pour  $\beta > 3$ , la loi *Weibull* se rapproche de la loi Normale.

### 1.4.5 La loi Gamma

Elle représente la loi de probabilité d'occurrence de  $\alpha$  événements dans un processus poissonnien. C'est une loi à deux paramètres, le paramètre d'échelle  $\lambda$  et celui de forme  $\alpha$ . Le temps cumulé d'apparition de  $\alpha$  défaillances suit une loi Gamma (voir[18]) :

• Densité de probabilité :

$$f(t) = \frac{t^{\alpha-1} \exp(-\frac{t}{\lambda})}{\lambda^\alpha \Gamma(\alpha)}. \quad (1.34)$$

• Taux de défaillance :

$$\lambda(t) = \frac{t^{\alpha-1} \exp(-\frac{t}{\lambda})}{\lambda^\alpha \int_t^{+\infty} \Gamma(\alpha) f(u) du}. \quad (1.35)$$

• Espérance :

$$E(T) = \frac{\alpha}{\lambda}. \quad (1.36)$$

• Variance :

$$V(T) = \frac{\alpha}{\lambda^2} \text{ avec } T \geq 0, \lambda \geq 0, a \geq 0. \quad (1.37)$$

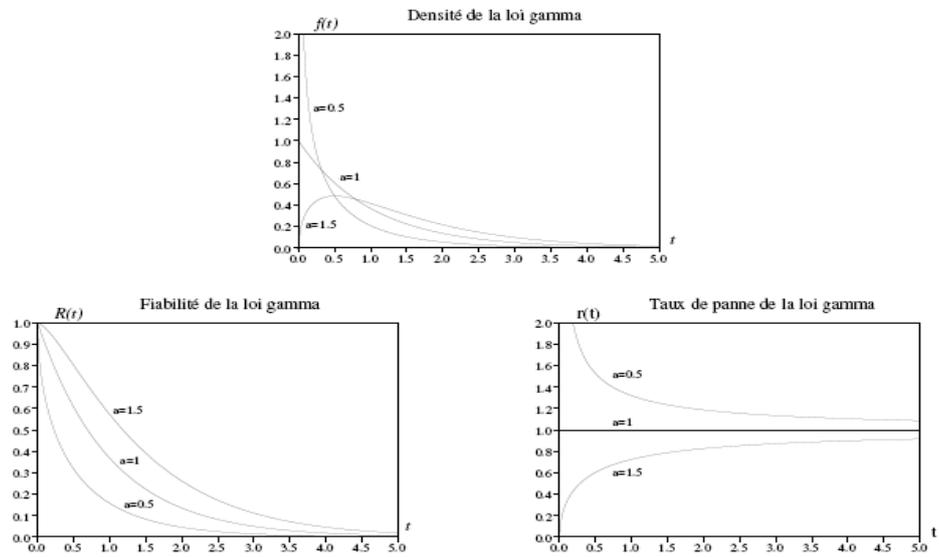


FIGURE 1.8 – Densité, Fiabilité et taux de panne de la loi Gamma

# Chapitre 2

## Les essais en fiabilité

### 2.1 Introduction

La première chose à faire lorsqu'on veut savoir si un système est fiable c'est de l'essayer au préalable pour voir qu'il fonction. Pour être mis sur le marché, il doit subir des essais afin d'assurer sa résistance. Les essais permettent le suivi de son évolution afin de le rendre plus mature.

Les essais de fiabilité sont réalisables au cours du cycle de vie du produit, ils interviennent dans les études conceptuelles, les programmes de développement et les processus de fabrication et les dernières techniques d'essais développées consistent à accélérer cette croissance de fiabilité par l'utilisation d'essais accélérés, essais de robustesse et les essais de déverminages. L'ensemble de ces essais de fiabilité contribue largement à la croissance de la fiabilité du produit au cours de son développement et de sa production.

Ce chapitre nous permettre de définir les essais en fiabilité. Ensuite, nous présenterons les différentes phases d'évaluation d'un produit durant son cycle de développement, ainsi que les différents types d'essais les plus utilisés.

### 2.2 Les plans d'essais utilisés en fiabilité

Lorsqu'on désire évaluer la fiabilité d'un dispositif (module ou composant) on effectuera des essais sur des échantillons.

Ces essais de fiabilité sont destinés à soumettre un échantillon de pièces de dispositif à des testes, en utilisant la méthode statistique des plans d'échantillonnage. Le plan d'échantillonnage permet de définir le nombre de matériels à placer en essai, le temps ou la durée de l'essai et le nombre de défaillances à observer. Ce plan d'essais est appliqué selon les différentes formes d'essais suivants (voir[19]) :

- **Essai complet** : Les essais durent jusqu'à la défaillance du dernier composant.
- **Essai tronqué** : C'est un type d'expérience qui se distingue à la fois par l'application de contrainte à intensité normale et par la fixation à priori d'un temps d'arrêt des opérations de l'essai. L'essai est arrêté à une date prédéterminée de l'étude statistique d'un historique arrêté à la date de l'étude, donc tronqué par nature.
- **Essai censuré** : C'est un type d'expérience marqué en même temps par l'application d'un ensemble de contraintes à intensités normales et un arrêt de l'opération de l'essai dès l'apparition d'un nombre de défaillance fixé. L'essai est arrêté à un nombre prédéterminé de défaillances.
- **Essai séquentiel** : Essai arrêté lorsque la fiabilité estimée est supérieure à un seuil prédéterminé.

### 2.3 Les essais de fiabilité

Les essais de fiabilité sont en général des essais de conformité en fiabilité, destinés à vérifier ou compléter les données de fiabilité existantes et permettent le suivi de l'évolution dans les divers stades et le développement d'un produit afin de le rendre plus mature. Ils s'appliquent en général dans l'un des cas suivants :

- ✓ **Modèles d'étude ou prototypes.**
- ✓ **Lot de présérie.**
- ✓ **Lot (ou lots) de production.**

Sur le premier prototype sont réalisés des essais de robustesse afin de connaître les faiblesses et les marges de conception. Après modification et une fois que le produit est fait, une campagne d'essais peut être menée pour estimer la fiabilité. Enfin, lors de la production, l'élimination des défauts de jeunesse est effectuée par des essais de déverminage.

Les différents types d'essais peuvent être effectués en fonction (voir[20]) :

- **De leur objectif**: Ce type peut être soit pas la mesure de taux défaillance et l'ajustement de modèle de fiabilité.

- Des contraintes appliquées :

Ces contraintes peuvent être constantes, cycliques ou échelonnées.

- De la procédure ou des résultats attendus : Ce fait sur un échantillon de dispositifs de taille définie et choisi à partir : un critère d'arrêt, une durée limitée, un nombre de défaillances, pas de critère préalable relatif à la durée de l'essai ou au nombre maximal de défaillances.
- Du type de produit : Composant ou équipement.
- Du coût d'essai : Le coût d'une campagne d'essais dépend de deux paramètres essentiels : le nombre d'essais et le temps d'un essai.

L'objectif industriel étant de faire des essais aux moindres coûts, il faudrait donc soit réduire les tailles d'échantillons ou réduire les durées d'essais , pour chaque solution est accordé un certain type d'essai .

### 2.3.1 Les essais dans le cycle de développement d'un produit

Dans un contexte industriel très compétitif, les pressions exercées sur les fabricants conduisent à des produits de plus en plus fiable et de moins en moins coûteux, dans des délais de plus en plus réduits. Ces défis ont incité les fabricants à développer des programmes de fiabilité efficaces. Ce dernier se compose d'une série de tâches de fiabilité, mise en application dans tout le cycle de vie du produit (planification, la conception et le développement, la vérification et la validation, la production et l'exploitation) [1].

La figure suivante permet de distinguer le positionnement relatif des différents essais de robustesse et de fiabilité, réalisables au cours du cycle de développement du produit, elle souligne aussi l'importance des études issues du retour d'expérience, qui contribuent au dimensionnement des essais jugés nécessaires (Voir figure 2.1).

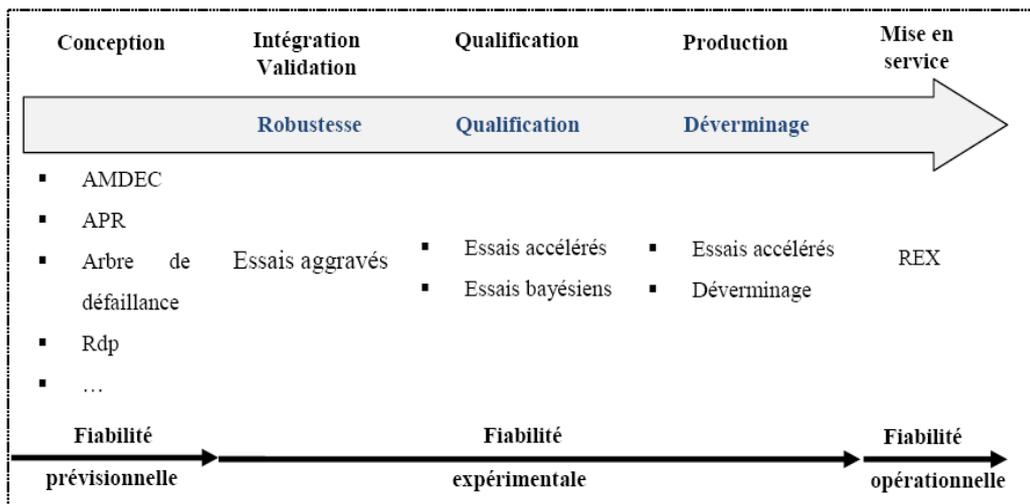


FIGURE 2.1 – Position des essais dans le cycle de développement d'un produit

Le processus de fiabilité comporte trois grandes phases : la fiabilité prévisionnelle, la fiabilité expérimentale et la fiabilité opérationnelle dans lesquelles on utilise plusieurs méthodes et outils pour le développement d'un produit :

1. **Evaluation prévisionnelle de la fiabilité** : Consiste à prévoir la fiabilité dès le début du projet, à partir d'une analyse qualitative ou quantitative. Elle s'exécute dès la première phase du projet sous forme de prévisions schématisées puis de façon plus détaillée lorsque la définition des composants est réalisée, elle permet ainsi de prendre des orientations optimales en matière de conception.
2. **Evaluation expérimentale de la fiabilité** : Cette phase permet de quantifier la fiabilité à partir d'essais ou de calculs. Dès que l'on dispose de pièces prototypes, il est possible de réaliser des essais dits de robustesse pour connaître les faiblesses de conception du produit. Lorsque le produit est suffisamment robuste, des essais de quantification ou de validation de la fiabilité sont réalisés.
3. **Evaluation opérationnelle de la fiabilité** : Consiste à évaluer la fiabilité en service à partir de données du retour d'expérience (REX). Elle se pratique dès les premières mises en service et permet ainsi de corriger des défauts de conception (voir[5]).

### 2.3.2 Les principaux types d'essais en fiabilité

Les principaux types d'essais de fiabilité effectués dans le développement d'un système sont les essais de robustesse (HALT - Highly Accelerated Life Test), les essais d'estimation

(ALT - Accelerated Life Test) et les essais de déverminage (HASS - Highly Accelerated Stress Screen).

1. **Les essais aggravés (robustesse) :** Les essais aggravés consistent à soumettre une entité matérielle de conception nouvelle (pièce, composant, etc.), à des contraintes d'environnement sous des niveaux croissants pouvant atteindre les limites de résistance des technologies accélérée telle que [10, 22] :

- Le retour d'expérience (REX).
- Les méthodes théoriques .
- Les filières de qualification.

Les essais aggravés ont pour but d'améliorer la robustesse du système par l'amélioration des marges de fonctionnement, l'accélération de sa maturité et la diminution des retours clients. la figure suivante montre la fiabilité avant et après l'utilisation d'essais aggravés ( voir figure 2.2 ).

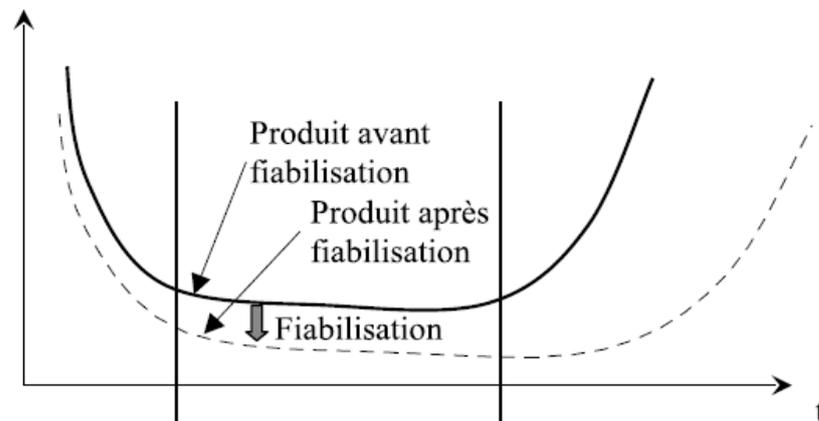


FIGURE 2.2 – Maturation des produits par les essais aggravés

Parmi les différentes méthodes expérimentales :

Les essais de HALT ( Highly Accelerated Life Testing) : Ce type est le plus utilisé dans l'industrie. L'objectif est de détecter rapidement et efficacement les défauts et de rendre un produit plus robuste dès la phase d'étude et d'améliorer de façon significative la fiabilité opérationnelle du système. Aussi les essais de HALT ont pour intérêt de déterminer le diagramme des zones distinctes dimensionnées par les quatre axes représentant les sollicitations imposées (voir figure 2.3).

- ✓ La zone de conformité : correspondant à la spécification du cahier de charges (en vert)
- ✓ La zone de robustesse : dite aussi marge de fonctionnement (en bleu).
- ✓ La zone de fonctionnement dégradé (en rouge)
- ✓ La zone de destruction : c'est un domaine où le système ne remplit plus et définitivement sa mission.

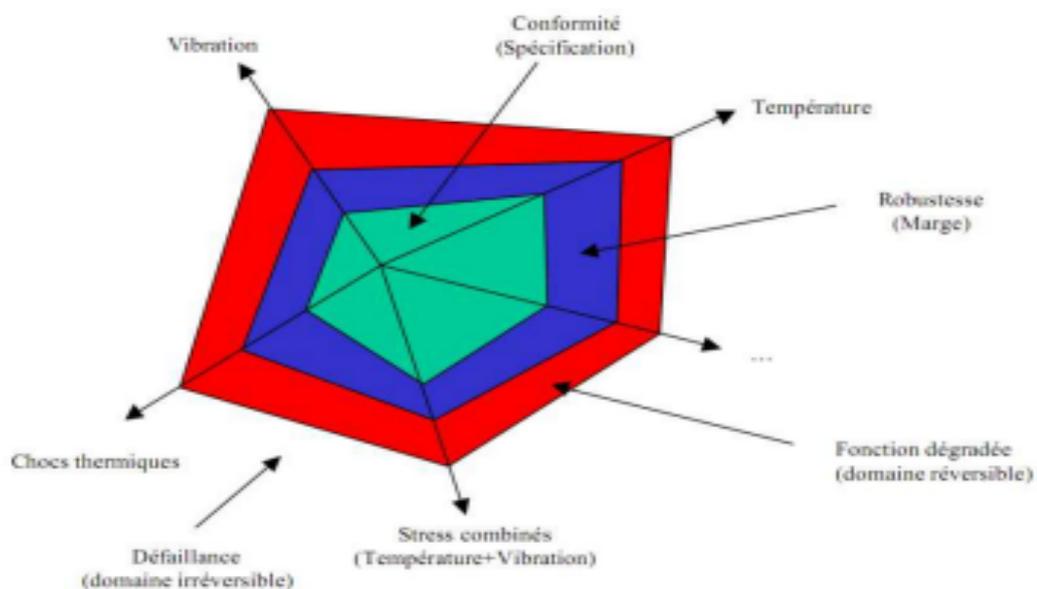


FIGURE 2.3 – Diagramme des zones caractéristiques du système suivant les axes de sollicitations lors d'un essai de type HALT.

Néanmoins, dans la mesure du possible, l'essai de type HALT réalisé lors de la phase d'étude doit être complété par des essais de type :

- a) **Le HASS (Highly Accelerated Stress Screen)** : qui permet de Corriger les défauts issus des chaînes de fabrication (modification des process de fabrication, changement dans l'approvisionnement des composants,...).
- b) **Le Strife (Stress Life Test)** : Est orienté vers la maturation des performances en phases de conception et de développement.
- c) **Le Hasa (Highly Accelerated Stress Audit)** : Est un Hass par échantillon lorsque le déverminage ne peut pas être réalisé sur chaque pièce. Il est associé à un suivi de la dérive de production.
- d) **Le ESS (Environmental Stress Screen )** : Est visé à exposer des échecs de la mortalité naissants dans la vie d'un produit.

Le but de ces tests est de s'assurer que le système n'admet pas de dérives compromettant sa robustesse, liées par exemple à une non qualité ou une mauvaise maîtrise de l'obsolescence des composants électroniques et ce, lors de son cycle de vie et notamment pendant la période de "Jeunesse" (voir[22]).

2. **Les essais d'estimation** : Consistent à mesurer la fiabilité en reproduisant les conditions d'utilisation du produit. On dispose de deux stratégies d'essai qui sont les essais de détermination et de démonstration. Dans une application industrielle, il est inconcevable d'avoir une durée d'essai aussi importante, c'est pour cela que les essais accélérés et bayésiens ont été développés[10, 20].

- a) **Les essais de détermination et de démonstration** : Ce sont des essais classiques d'estimation. Ils consistent à vérifier que les objectifs de fiabilité sont respectés en reproduisant les conditions d'utilisation du produit (cycle de marche/arrêt, température, humidité, ...)[10].
  - **Les essais de détermination** : Ce font pour déterminer la valeur d'une caractéristique (taux de défaillance, MTTF, probabilité de défaillance, ...)[20].
  - **Les essais de démonstration** : Ce font pour montrer si la valeur d'une caractéristique de fiabilité d'un système est identique ou non aux objectifs fixés.

**b) Les essais Bayésiens :** Les essais Bayésiens sont utilisés pour réduire la taille d'échantillon des essais d'estimation et pour améliorer l'estimation des paramètres de la fiabilité du produit par l'intégration du passé (données disponibles sur le produit concerné). Dans un plan d'essai bayésien, les résultats d'essais réalisés au cours du cycle de développement sont combinés avec un modèle de fiabilité a priori pour obtenir un modèle a posteriori par le biais du théorème de Bayes[10, 20].

On obtient la distribution du paramètre  $\theta$  fournie par le théorème de Bayes. Cette distribution est donnée, dans le cas de variables aléatoire. Sa formule s'écrit sous la forme suivante :

$$g(\theta/T) = \frac{f(T/\theta).g(\theta)}{\int_{D(\theta)} f(T/\theta).g(\theta).d\theta}$$

avec

$\theta$  : Vecteur des paramètres inconnus de la loi de durée de vie ;

T : Résultats d'essais ;

$g(\theta)$  : Densité de probabilité à priori du paramètre  $\theta$  ;

$f(T/\theta)$  : Fonction de vraisemblance de l'échantillon ;

$g(\theta/T)$  : Densité de probabilité à posteriori du paramètre  $\theta$  ;

$D(\theta)$  : Domaine de définition de la variable aléatoire  $\theta$  .

**c) Les essais Accélérés :**

Les essais accélérés consistent à soumettre le système à des sollicitations d'utilisation ou d'environnement amplifiées par rapport aux valeurs attendues en utilisation opérationnelle afin d'estimer des caractéristiques comportementales (loi de fiabilité, performances opérationnelles,.....) du système dans les conditions normales d'utilisation à partir des conditions accélérées d'utilisation et cela dans des délais compatibles avec les contraintes calendaires associées à la phase de développement.

Les essais accélérés sont utilisés pour réduire la durée d'essai. Au moment où le matériel considéré très fiable, nécessitent de connaître le comportement d'un produit de longue durée de vie avant sa mise en service. Ces essais peuvent s'appliquer à toutes les catégories de matériels en employant différents types de contraintes qui sont : Contraintes mécaniques, électriques, climatiques, et Contraintes spécifiques

au matériel.

Le but d'un essai accéléré est le même que celui d'un essai de qualification / validation, mais du fait de l'augmentation de la sévérité des sollicitations, il est «espéré» que la durée d'un essai accéléré, susceptible de dévoiler un défaut, soit plus courte que la durée nécessaire d'un essai classique de qualification / validation [18, 20].

- **Méthodologie d'essais accélérés** : Un essai accéléré doit prendre en compte toutes les considérations citées précédemment. On peut le diviser en quatre étapes principales :
  - a) **Etude préliminaire**: On relève les modes de défaillance les plus significatifs du composant et on choisit celui ou ceux que l'on va considérer. On modélise de la façon la plus simple possible les mécanismes correspondant à ces modes de défaillance. On relève les facteurs d'accélération envisageables et on détermine les modes d'accélération à adopter spécifiquement dans le cas du composant choisi.
  - b) **Essais préliminaires**: On effectue quelques essais pour valider les modèles des modes de défaillance. On définit, à partir de ces essais, les domaines de variation des facteurs d'accélération retenus. On choisit un des critères pour mesurer l'avancement de la dégradation du composant et on cherche à modéliser les lois reliant ces critères aux variations des paramètres d'accélération.
  - d) **Essais systématiques**: On définit un programme d'essais systématiques, à partir du modèle retenu et des essais préliminaires. On réalise ensuite la campagne d'essais en veillant à bien assurer les conditions d'essais prédéfinies.
  - e) **Interprétation**: On effectue les prévisions de durée de vie des composants pour les conditions qui nous intéressent. On tire des résultats les paramètres des lois de comportement et d'accélération. On en déduit des considérations théoriques sur les caractéristiques et le comportement du composant testé [12].

### 3. Les essais de Déverminage :

Le déverminage est un test accéléré qualitatif, effectué sur toute la population et placé en fin de chaîne de fabrication, qui permet d'éliminer les pièces présentant des défauts de jeunesse. Il rejoint le principe directeur d'un essai aggravé, mais uniquement en phase de fabrication. Un essai de déverminage conduit à l'acceptabilité de l'entité testée, il partage alors le but des essais accélérés et de qualification (valida-

tion) et le profil de déverminage doit être adapté à la nature du matériel et à son cycle de vie (voir figure 2.4).

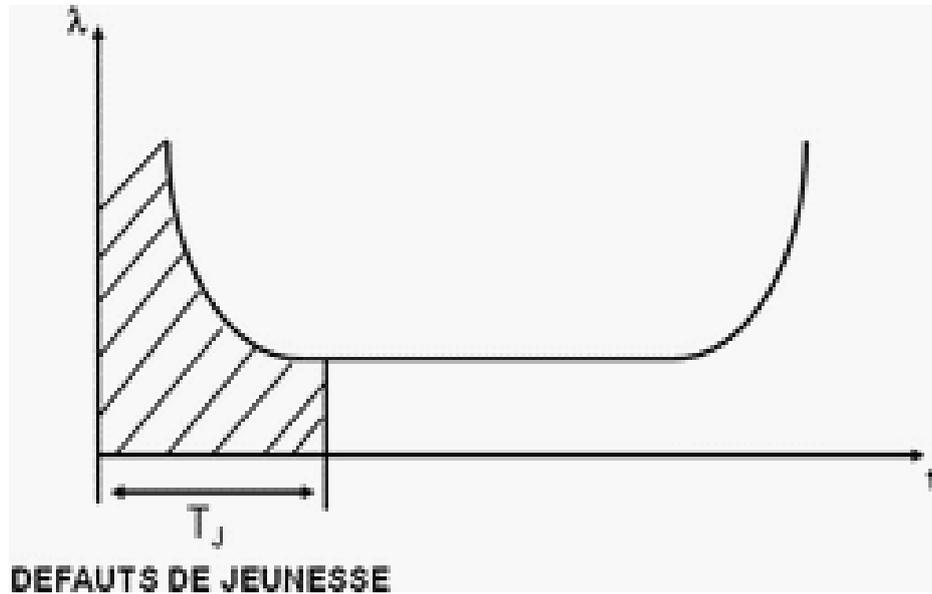


FIGURE 2.4 – Représentation de déverminage

Les techniques d'essai de déverminage sont : ESS, HASA et HASS (Highly Accelerated Stress Screen). Les essais de déverminage peuvent être effectués sur la totalité de la production (cas d'un essai HASS) ou sur des échantillons uniquement (cas d'un essai HASA). Les marges de robustesse construites par le HALT, rendent le déverminage rapide, efficace et économique. Dans l'opération de déverminage tous les produits de la production triés se trouvent dans la période utile. Il existe deux types de déverminage ( voir[22]) :

(a) **Le déverminage classique :**

Consiste à accélérer l'échelle de temps pour raccourcir les défauts de jeunesse au maximum. Application de contraintes dans les limites de la spécification produit (N.B. : détecte la dispersion de composants).

(b) **Le deverminage aggravée (HASS) :** Consiste à soumettre le composant à des contraintes aggravées pour éliminer ces faiblesse. Application de contraintes au-delà de la spécification.

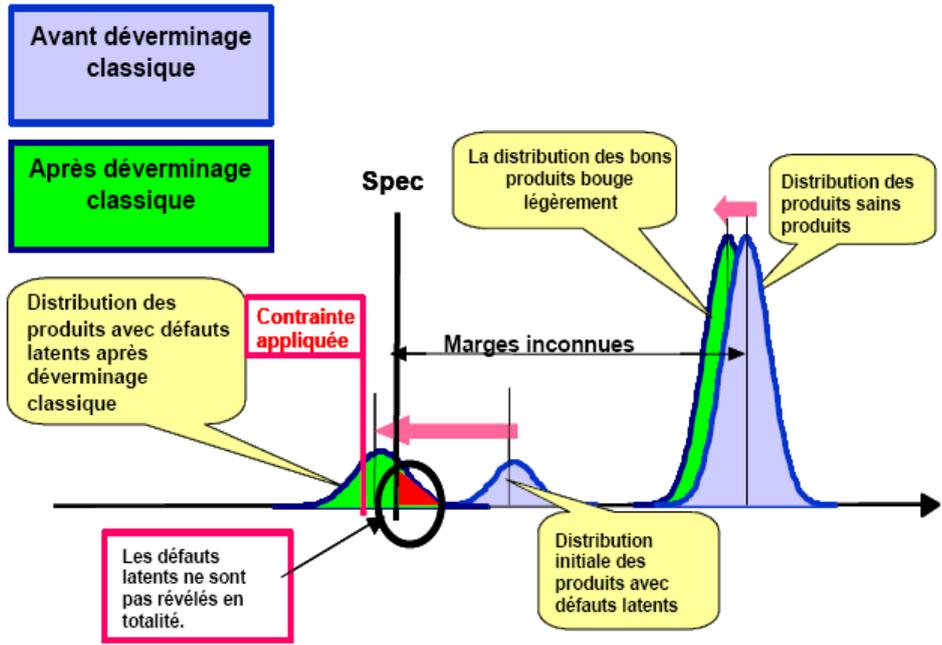


FIGURE 2.5 – Déverminage classique

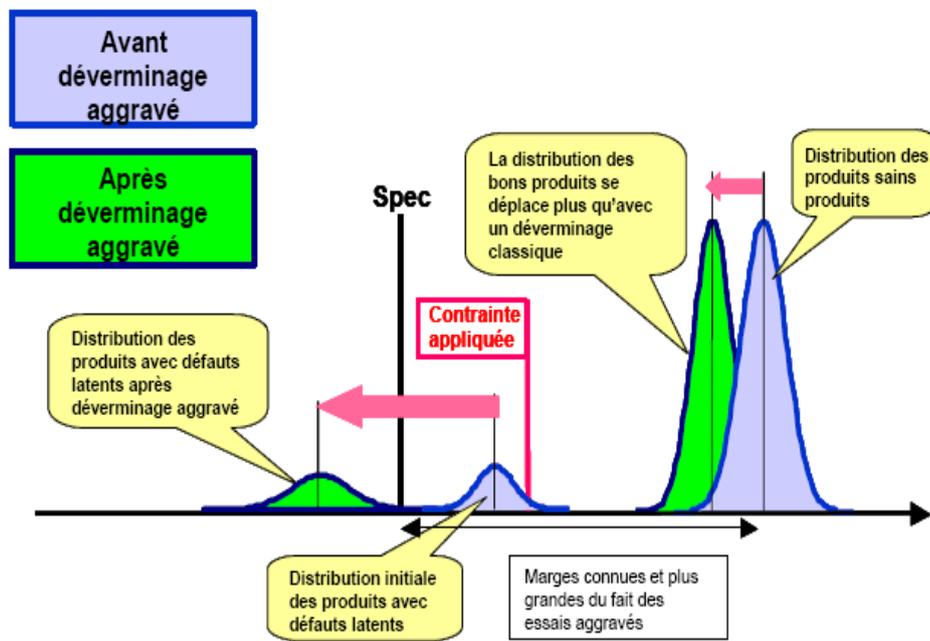


FIGURE 2.6 – Déverminage aggravé

# Chapitre 3

## Estimation de la fiabilité par les essais accélérés

### 3.1 Introduction

Un essai accéléré consiste à mettre des produits à l'épreuve sous des conditions accélérées pour induire une défaillance précoce.

Les données de vie recueillies à partir de ces tests accélérés sont ensuite analysées et extrapolées pour estimer les caractéristiques de la vie dans des conditions normales de fonctionnement. Elles sont ensuite adoptés et largement utilisés dans les industries manufacturèrent pour obtenir la loi de fiabilité ou le taux de défaillance de systèmes ou de composants dans des délais plus courts, il est nécessaire de proposer un modèle de transfert traduisant les relation entre la défaillance sous le stress accélérée et la défaillance sous le stress normal. Le plus utilisé de ces modèles est le modèle standard de vie accélérée (SVA), plus qu'un modèle, il s'agit d'une famille qui contient comme cas particulier les modèles d' Arrhénius, modèle de puissance inverse, modèle de peck et d'autres encore. L'objectif est alors d'estimer et de prédire, à partir des données de ces expériences accélérées, la fiabilité réelle des unités sous les conditions usuelles. Cette problématique est connue sous le nom ALT (Accelerated life testing) [15].

Dans ce chapitre nous résumons en premier lieu les hypothèses de base des essais accélérés à vérifier, après avoir présenté les plans d'essais accélérés qui contiennent le profile de stress utilisé, les principaux types de stress et le modèle de vie accélérée, ainsi que le facteur d'accélération avec ces lois d'accélération. Enfin, on termine par la présentation

du modèle standard SVA.

### 3.2 Hypothèses de base des essais accélérés

Afin de réaliser un essai accéléré, il faut vérifier les hypothèses suivantes (voir [20]) :

- **Le fonctionnement du produit dans les conditions accélérées** : C'est de faire intervenir les mêmes phénomènes de dégradation que dans les conditions normales d'utilisation. Autrement dit, les mécanismes de défaillances provoqués en conditions accélérées doivent être représentatifs des conditions normales d'emploi.
- **Les contraintes augmentées** : Devront être celles qui conduisent à la même défaillance majeure que celle constatée en fonctionnement réel.
- **Les phénomènes d'interaction** : Doivent être pris en compte.
- **La distribution des durées de vie en conditions accélérées** : C'est d'avoir la même forme que celle constatée en conditions normales .

### 3.3 Plans d'essais accélérés

Un plan d'essai accéléré dépend de plusieurs paramètres :

- **Les contraintes d'accélération et les limites opérationnelles** : C'est l'ensemble des conditions et facteurs susceptibles d'affecter le bon fonctionnement d'un produit. Les stress peuvent être de toute nature (mécanique, électronique, climatique, ...), et les nombres et les niveaux des stress appliqués sont choisis en fonction du produit étudié avec la conservation du mécanisme de défaillance d'origine tout en accélérant suffisamment l'essai [7].
- **Les modes et mécanismes de défaillance** : Lors d'un essai accéléré, chaque mode de défaillance peut être provoqué par un ou plusieurs types de contraintes [17].
- **Le nombre de produits** : Testés à chaque niveau de contrainte, donnant la précision des estimations. [18].
- **Un modèle générique de vie accélérée** : Permet d'analyser les résultats d'essais pour estimer la fonction de fiabilité dans les conditions nominales, et relie les durées de vie sous les conditions accélérées à celles sous les conditions normales d'utilisation [10].

### 3.3.1 Profils de stress utilisés

Le choix du profil de stress dépend des conditions d'utilisation du produit, de ses limitations technologiques. Les différents profils de stress qui sont utilisés dans les essais accélérés les plus courants : constant, échelonné, cyclique et aléatoire.

- a) **Les stress constants:** Les stress restent constants au cours du temps, chaque composant est soumis à un niveau de contrainte constant supérieur à la normale (indépendant du temps) (Voir figure 3.1)[18].

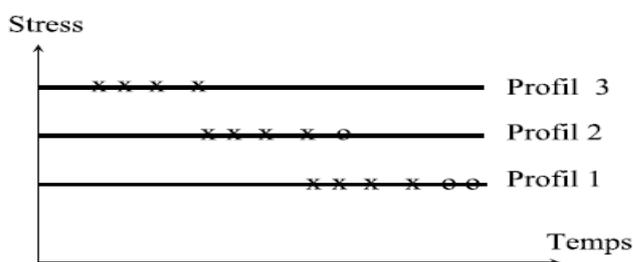


FIGURE 3.1 – Profil d'essai sous stress constant

- b) **Les stress échelonnés :** Ce stress est appliqué de manière échelonnée par des niveaux croissants ou décroissants dans le temps (par paliers) jusqu'à l'apparition d'une défaillance (voir figure 3.2)[17] .

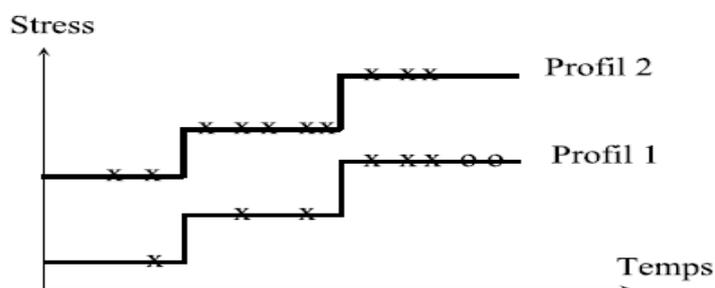


FIGURE 3.2 – Profil d'essai sous stress échelonnée

- c) **Les stress cycliques :** Le cas d'un stress cyclique constant par morceaux de type swich-on, swich-off (voir figure 3.3). Plus généralement, un stress cyclique est de la

forme [15] :

$$x(\tau) = M + A \cos(\omega\tau + \varphi). \quad (3.1)$$

Où

M : Le niveau moyen du stress,

A : L'amplitude,

$\tau$  : La période,

$\varphi$  : La phase.

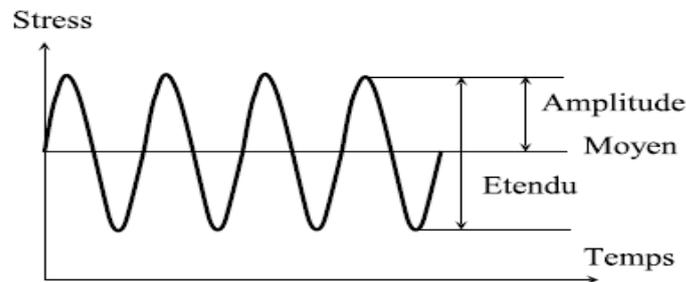


FIGURE 3.3 – Profil d'essai sous stress cyclique

- d) Les stress aléatoires : La sollicitation suit un profil aléatoire (couramment utilisée en vibration ou lors d'un choc) [18].

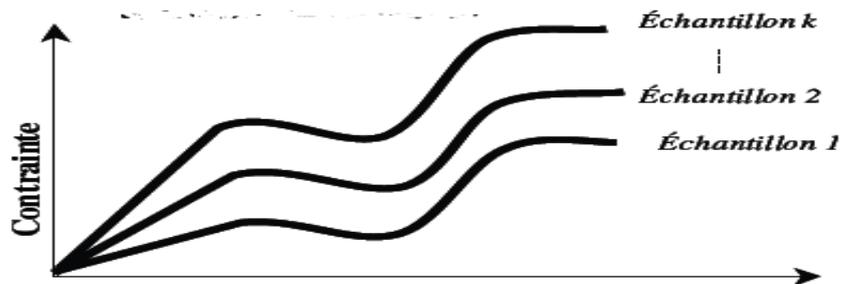


FIGURE 3.4 – Profil d'essai sous stress aléatoire

### 3.3.2 Les types de stress utilisés

Les essais accélérés peuvent s'appliquer à toutes les catégories de matériels en employant différents types de stress. Les stress généralement mis en œuvre, soit seuls, soit en combinaison, sont les suivants voir ([10, 18, 20])

- a) **Stress mécaniques:** Torsion, flexion, flexion rotative, chocs mécaniques, vibrations, vibrations acoustiques, traction/compression, etc. La fatigue est le mode de dégradation le plus communément utilisé pour les composants mécaniques qui sont testés sur des pots vibrants, quand ceux-ci sont soumis également à la température on considère le mode de dégradation par fluage.
- b) **Stress électriques:** Cela inclut la tension, l'intensité du courant, la fréquence, choc électrique, etc. La tension est le stress électrique le plus communément utilisé puisqu'il génère rapidement des défaillances.
- c) **Stress environnementales :** La température et les cycles thermiques sont les stress les plus communément utilisés. D'autres stress peuvent être appliqués comme l'ultra violet, brouillard salin et poussières.

### 3.3.3 Modèles de vie accélérée

Dans le but d'obtenir la loi de fiabilité dans les conditions nominales, il est nécessaire d'utiliser un modèle de vie accélérée permettant de l'estimer à partir des résultats d'essais accélérés (voir[10, 20]).

Il existe plusieurs définitions théoriques des Modèles de Vie Accélérée, ces modèles sont constitués des différentes classes suivantes :

- les modèles expérimentaux déterminés par des plans d'expériences.
- les modèles physiques définis à l'aide de ceux de dégradation (chimique, mécanique,...).
- les modèles statistiques caractérisés par des approches paramétrique, semi-paramétrique et non paramétrique .

## 3.4 Facteur d'accélération (FA)

Ce rapport permet de prédire la durée de vie réelle d'un composant à partir de sa durée de vie sous contraintes. Cela sous-entend qu'il y a un rapport d'échelle entre la durée de vie d'un produit dans les conditions normales d'utilisation et sa durée de vie dans les conditions de l'essai accéléré. Aussi, on peut définir un Facteur d'Accélération entre la durée de vie " nominale "  $\tau_1$  du produit sous les conditions nominales et la durée de vie " nominale "  $\tau_2$  sous les conditions accélérées. Le facteur d'accélération est défini par (voir[17]) :

$$FA = \frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{\tau_{normale}}{\tau_{accélérée}}. \quad (3.2)$$

Parmi les différents modèles d'accélération empiriques qui ont été mis en place pour décrire l'accélération des mécanismes, on distingue (voir[23]) :

1. **Le modèle d'Arrhenius** : Utilisé lorsque le mécanisme d'endommagement est sensible à la température. Détermine la fiabilité des composants électroniques en fonction de la température. Pour estimer leur durée de vie, on réalise des essais de durées limitées. Le facteur d'accélération correspondant est le rapport entre une température d'essai constante, et une température de fonctionnement prévisionnelle. En ce qui concerne les composants électroniques, la vitesse de réaction du processus thermique est assimilée à leur taux de défaillance et ce dernier à l'inverse de leur durée de vie. A cet effet, on réalise des essais dits " accélérés ", à des niveaux de température constants afin d'identifier les deux paramètres structurels du modèle d'Arrhenius et de quantifier la durée de vie.

La loi d'Arrhenius modélise la durée de vie  $\tau$  du produit comme fonction de la température T :

$$\tau = Ae^{\left(\frac{B}{T}\right)}. \quad (3.3)$$

Avec : A et B constantes positives.

T : température absolue.

Le facteur d'accélération (FA) d'Arrhenius entre la durée de vie  $\tau_1$  pour une température T1 et la durée de vie  $\tau_2$  pour une température T2 est :

$$FA = \frac{\tau_1}{\tau_2} = \exp\left\{B\left(\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2}\right)\right\}. \quad (3.4)$$

2. **Le modèle d'Eyring** : Utilisé lorsque le mécanisme d'endommagement est sensible à la température et un stress V (exemple : transports chauds, inversion de surface, résistance mécanique). Le modèle est défini par :

$$\tau = \left(\frac{A}{V}\right) \exp\left(\frac{B}{KT} \exp\left(V\left(C + \frac{D}{KT}\right)\right)\right). \quad (3.5)$$

Avec :

T : température absolue,

V : Stress donné,

K : 8.6171 10<sup>-5</sup> eV/K Constante de Boltzmann,

A,B,C et D : Les paramètres du modèle.

3. **Le modèle de puissance inverse** : Utilisé lorsque le mécanisme d'endommagement est sensible à un stress particulier (exemple : isolations électriques, diélectrique, roulements, filament de lampe, flash). Le modèle de puissance inverse décrit

la cinétique d'une dégradation sous stress constant  $V$ , la durée de vie est donnée par l'équation :

$$\tau = \left(\frac{A}{V}\right)^\gamma. \quad (3.6)$$

Avec :

$V$  : Stress constant,

$A$  et  $\gamma$  : Constantes dépendantes de la défaillance et de l'essai, avec  $A \neq 0$ ,  $\gamma > 0$ .

La loi de Coffin-Manson est un cas particulier : Quand le stress est la température. Le facteur d'accélération entre la durée de vie  $\tau_1$  pour un stress  $V_1$  et la durée de vie  $\tau_2$  pour un stress  $V_2$  est :

$$FA = \frac{\tau_1}{\tau_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^\gamma. \quad (3.7)$$

4. **Le modèle de Peck** : Utilisé lorsque le mécanisme d'endommagement est sensible à la température  $T$  et à l'humidité  $H$  (exemple : composants électriques, conducteur aluminium et composants mécaniques soumis à la rupture). Le modèle est défini par :

$$\tau = A(H^{-m} \exp(\frac{E_a}{KT})) \quad (3.8)$$

Avec :

$T$  : température absolue,

$H$  : humidité

$K$  :  $8.6171 \cdot 10^{-5}$  eV/K constante de Boltzmann,

$E_a$  : énergie d'activation en eV,

$m$  : paramètre du modèle, avec  $m \neq 0$ .

### 3.5 Le modèle standard de vie accélérée

Les SVA définis par Nikulin [15], Tebbi [20] et Fatemi [7] sont des modèles basés sur une fonction de transfert et qui permettent d'obtenir les fonctions de fiabilité à partir de résultats d'essais effectués à des niveaux de contraintes plus élevés que les conditions nominales d'utilisation. Ce modèle permet de déterminer de quelle façon la fonction de fiabilité (ou une autre caractéristique) change quand le stress varie en utilisant une fonction de transfert [16].

Dans le cas général, les stress  $x$  peuvent évoluer en fonction du temps et peuvent être multidimensionnel (combinaison de plusieurs stress). Dans le cas unidimensionnel, on a :

$$x = x(\tau), \tau \geq 0 \text{ où } x \in [0, \infty[. \quad (3.9)$$

Supposons que la durée de vie  $T_{x(.)}$  d'un produit sous le stress  $x(.)$  soit une variable aléatoire de fonction de survie :

$$S_{x(.)}(t) = \mathbb{P}(T_{x(.)} > t), t \geq 0. \quad (3.10)$$

Soit  $S_{x_0}$  la fiabilité sous le stress usuel :  $x_0 \in \varepsilon_0 \subset \varepsilon$  (  $\varepsilon$  Ensemble de stress ),  $S_{x_0}^{-1}$  sa fonction inverse. La fonction de transfert est définie par :

$$\begin{aligned} f : [0, +\infty[ \times \varepsilon &\rightarrow [0, +\infty[ \\ (t, x(.)) &\rightarrow f(t, x(.)) = (S_{x_0}^{-1} \circ S_{x(.)})(t) \end{aligned} \quad (3.11)$$

Cette fonction permet d'évaluer la fiabilité d'un produit, sous des stress expérimentalement indisponibles, à partir de la fiabilité du même produit sous des conditions particulières d'utilisation. La définition de  $f$  peut être traduite par l'équation suivante :

$$\mathbb{P}(T_{x_0} \geq f_{x(.)}(t)) = \mathbb{P}(T_{x(.)} > t) \quad (3.12)$$

$f_{x(.)}(t)$  est appelée ressource utilisée sous le stress  $x(.)$  jusqu'à l'instant  $t$ .

Le modèle standard de vie (SVA) vérifie sur  $\varepsilon$  s'il existe une fonction  $r : E \rightarrow \mathbb{R}^+$  telle que pour  $x(.) \in E$  :

$$\frac{d}{dt} f_{x(.)}(t) = r[x(t)]. \quad (3.13)$$

Le modèle SVA signifie que la vitesse d'utilisation de la ressource au moment  $t$  ne dépend que de la valeur du stress appliqué au moment  $t$ . La formule (3.12) et (3.13) implique que :

$$S_{x(.)}(t) = S_{x_0} \left( \int_0^t r[x(\tau)] d\tau \right). \quad (3.14)$$

Dans le cas où  $S(.)$  est constant l'équation (3.13) devient :

$$S_{x(t)} = S_{x_0}(r(x)t), \quad (3.15)$$

Donc le stress ne change que l'échelle du temps. Notons que  $r(x_0) = 1$ .

### 3.5.1 Paramétrisation de $r$

Le modèle standard de vie est défini par l'équation (3.14) quand le stress dépend du temps et par le modèle (3.15) lorsque le stress est constant. La fonction  $r(\cdot)$  représente physiquement le taux d'accroissement de la vitesse de dégradation  $r$ .

Considérons un plan d'essai classique consistant à utiliser plusieurs niveaux de stress constant  $x_1, x_2, \dots, x_k : x_1 < x_2 < \dots < x_k$  et  $S_0(x_0 < x_1)$  le stress usuel qui ne sera pas utilisé. Si la fonction  $r$  est complètement inconnue alors la fonction de fiabilité  $R_{x_0}$  ne peut être déterminée. Donc, il est nécessaire de choisir  $r$  dans une certaine classe de fonctions. Nikulin et al( voir ??5) considère une forme exponentielle. Si l'équation (3.15) est vérifiée sur un ensemble de stress  $\varepsilon$ , alors pour tous  $x_1, x_2$  appartenant à  $\varepsilon_0$  :

$$S_{x_2}(t) = S_{x_1}(\rho(x_1, x_2)t), \quad (3.16)$$

où  $\rho(x_1, x_2) = r(x_2)/r(x_1)$  montre comment l'échelle de distribution change quand le stress  $x_2$  est utilisée au lieu de stress  $x_1$ . Il est évident que  $\rho(x, x) = 1$ .

Si la fonction  $r$  est complètement inconnue, la fonction  $S_{x_0}$  ne peut pas être estimée même si l'on connaît la famille de distributions à laquelle  $S_{x_0}$  appartient. Par exemple,  $S_{x_0}(t) = \exp(-\frac{t}{\theta})^\alpha$ , alors pour le stress constant  $x$  :

$$S_x(t) = \exp[-(\frac{r(x)}{\theta}t)^\alpha].$$

Les paramètre  $\alpha, \frac{r(x_1)}{\theta}, \dots, \frac{r(x_k)}{\theta}$  et les fonction  $S_{x_1}, \dots, S_{x_k}$  peuvent être estimés mais puisque  $r$  est complètement inconnus  $r(x_0)$  et  $S_{x_0}(t)$  ne peuvent pas être estimés. Donc la fonction  $r$  doit être choisie dans une certaine classe de fonctions.

Supposons que le stress  $x \in E$  est unidimensionnel :  $E \subset R$ . Le taux de changement d'échelle est déterminé par la dérivée :

$$\delta(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\rho(x, x + \Delta x) - \rho(x, x)}{\Delta x} = \log[r(x)]'. \quad (3.17)$$

Donc pour tout  $x \in E$  :

$$r(x) = \exp \left\{ \int_{x_0}^x \delta(v) dv \right\}. \quad (3.18)$$

Supposons que  $\delta(x)$  est proportionnelle à une fonction connue  $u(x)$  de stress :

$$\delta(x) = \alpha u(x), \alpha > 0. \quad (3.19)$$

Alors :

$$r(x) = \exp(\beta_0 + \beta_1 z(x)),$$

où  $z(x)$  est une fonction connue,  $\beta_0$  et  $\beta_1$  des paramètres inconnus.

**1. Paramétrisation classiques :**

–  $\delta(x) = \alpha$ , c'est à dire que le taux de changement de l'échelle est constant. Alors :

$$r(x) = \exp(\beta_0 + \beta_1 x),$$

où  $\beta_1 > 0$ . C'est le modèle loglinéaire. Ce modèle est appliqué pour analyser des données de fatigue, testant des composants électroniques.

–  $\delta(x) = \frac{\alpha}{x}$ , alors :

$$r(x) = \exp(\beta_0 + \beta_1 \log x) = \alpha x^{\beta_1},$$

où  $\beta_1 > 0$ . C'est le modèle de la règle de puissance (power rule model). Ce modèle est appliqué quand le stress est le voltage, la charge mécanique.

–  $\delta(x) = \frac{\alpha}{x^2}$ , alors :

$$r(x) = \exp(\beta_0 + \frac{\beta_1}{x}) = \alpha \exp(\frac{\beta_1}{x}),$$

où  $\beta_1 < 0$ . C'est le modèle d'Arrhenius. Ce modèle est souvent appliqué quand le stress est la température.

Si le choix parmi l'une de ces trois paramétrisations de  $r(x)$  n'est pas simple, on peut considérer une paramétrisations plus large :

$$\delta(x) = \alpha x^\gamma,$$

qui est équivalente à :

$$r(x) = \begin{cases} \exp(\beta_0 + \beta_1 \frac{(x^\varepsilon - 1)}{\varepsilon}), & \text{si } \varepsilon \neq 0; \\ \exp(\beta_0 + \beta_1 \log x), & \text{si } \varepsilon = 0. \end{cases}$$

**2. Combinaison linéaire :** Le modèle (3.19) peut être généralisé en supposant que  $\delta(x)$  est une combinaison linéaire de fonctions connues de stress :

$$\delta(x) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mu_i(x).$$

Dans ce cas :

$$r(x) = \exp\left(\beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i z_i(x)\right),$$

où  $r_{i(x)}$  sont des fonctions de stress connues,  $\beta_0, \dots, \beta_k$  des paramètres inconnus (peut être pas tous).

**Exemple :**

–  $\delta(x) = \frac{1}{x} + \frac{\alpha}{x^2}$ , alors :

$$r(x) = \exp(\beta_0 + \beta_1 \log x + \frac{\beta_2}{x}) = \alpha_1 x \exp(\beta_2/x),$$

où  $\beta_1 = 1$ ,  $\beta_2 < 0$ . C'est le modèle d'Ering, on l'applique souvent quand le stress est la température.

–  $\delta(x) = \sum_{i=1}^k \alpha_i/x^i$ , alors :

$$r(x) = \exp(\beta_0 + \beta_1 \log x + \sum_{i=1}^{k-1} \beta_i/x_i).$$

C'est le modèle d'Eyring généralisé.

### 3.5.2 Cas multidimensionnel :

Le stress peut être multidimensionnel :  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T$ . Alors on considère des caractéristiques de  $\delta_i(x)$  donnée par des égalités :

$$\delta_i(x) = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{\rho(x, x + \Delta x_i e_i) - \rho(x, x)}{\Delta x_i} = \frac{\partial(x)}{\partial x_i},$$

où  $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ , l'unité étant dans la  $i$ -ème coordonnée. Généralisant le cas unidimensionnel,  $\delta_i(x)$  peut être paramétrisé de la façon suivante :

$$\delta(x) = \sum_{j=1}^{k_i} \alpha_{ij} \mu_{ij}(x),$$

où les  $\mu_{ij}(x)$  sont des fonctions connues et les  $\alpha_{ij}$  des constantes inconnues. Dans ce cas :

$$r(x) = \exp \left[ \beta_0 + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{k_i} \beta_{ij} z_{ij}(x) \right],$$

où les  $z_{ij}(x)$  sont des fonctions connues et les  $\beta_{ij}$  des constantes inconnues.

**Exemple :**

1)  $\delta_1(x) = 1/x_1 + (\alpha_{11} + \alpha_{12}x_2)/x_1^2$ ,  $\delta_2(x) = \alpha_{21} + \alpha_{22}/x_1$ .

C'est le modèle d'Eyring généralisé. On l'applique pour certains éléments des semi-conducteurs, généralement  $x_1$  est la température et  $x_2$  est le voltage.

2)  $\delta_i(x) = \alpha_i \mu_i(x_i)$ , où les  $\mu_i$  sont connus. Alors :

$$\delta(x) = \exp \left( \sum_{i=1}^m \alpha_i \int_{x_i^0}^{x_i} \mu_i(v) dv \right) = \exp \left( \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i z_i(x) \right),$$

où les  $z_j$  sont des fonctions connues. C'est le modèle d'Arrhénénus généralisé. Dans tous les cas considérés les modèles (3.14) et (3.15) peuvent être écrits sous la forme :

$$S_{x(\cdot)}(t) = S_{x_0} \left( \int_0^t \exp(\beta^T z(\tau)) d\tau \right), \quad (3.20)$$

où

$$S_x(t) = S_{x_0} \exp(\beta^T z_t), \quad (3.21)$$

$\beta = (\beta_0, \dots, \beta_m)^T$  est le vecteur de paramètre et :  
 $z(t) = (z_0(t), \dots, z_m(t))^T = (z_0(x(t)), \dots, z_m(x(t)))^T$ ,  $z = (z_0(x), \dots, z_m(x))^T$  est le vecteur de fonctions connues de stress, la première composante  $z_0$  étant égale à 1. Les modèles (3.20) et (3.21) peuvent être considérés comme paramétriques si la fonction  $S_{x_0}$  appartient à une certaine classe de distribution.

### 3.5.3 Etude de deux plans d'expériences :

Dans Nikulin et al [15] , on trouve les deux plans d'expériences suivants :

#### 1. Le première plan d'expérience :

✓ On fait des hypothèses strictes sur la forme de la fonction  $r(x)$ . Ces hypothèses peuvent être ne pas vérifiées car on manque d'expérience sous le stress usuel.

✓ Dans le cas de tous les modèles de regression la prediction de la variable dépendante pour la valeur de stress  $x_0$  peut être mauvaise parce que cette valeur n'appartient pas à la region des stress utilisés pendant des experiences.

#### 2. Le deuxième plan d'expériences : On l'utilise quand la fonction $r(x)$ donnée dans le modèle (3.14) est complètement inconnue.

Nikulin et al [15] à observé deux groupes d'unités : le premier sous un stress accéléré  $x_1$  et le deuxième sous le stress en escalier.

Supposons que la durée de vie sous le stress usuel  $x_0$  est longue est que la plus part des pannes se produisent après l'instant  $t_2$ , donnée pour l'expérience. Sous le stress  $x_1$  jusqu'à l'instant  $t_1 < t_2$  et sous le stress usuel  $x_0$  à partir de l'instant  $t_1$ . les unités utilisent beaucoup de leurs ressource jusqu'à l'instant  $t_1$  sous le stress accéléré donc même sous le stress usuel  $x_0$  en peut obtenir des pannes dans l'intervalles  $[t_1, t_2]$ .

L'instant  $t_1$  peut être aléatoire, comme par exemple, une statistique d'ordre déterminée par la deuxième experience, correspondant au stress  $x_2$ .

Dans le deuxième plan la paramétrisation de  $r(x)$  n'est pas nécessaire. Si le premier groupe est testé sous le stress accéléré  $x_1$ , le deuxième groupe sous le stress :

$$x_2(t) = \begin{cases} x_1, & \text{si } 0 \leq \tau \leq t_1; \\ x_0, & \text{si } t_1 < \tau \leq t_2. \end{cases}$$

Alors le modelé (3.10) implique que :

$$S_{x_1}(u) = S_{x_0}(ru), \quad (3.22)$$

où  $r = r(x_1)/r(x_0)$ , et

$$S_{x_1}(u) = \begin{cases} S_{x_0}(ru), & \text{si } 0 \leq u \leq t_1, \\ S_{x_0}(rt_1 + u - t_1), & \text{si } t_1 \leq u \leq t_2, \end{cases}$$

où encore

$$S_{x_1}(u) = S_{x_0}(r(u \wedge t_1) + (u - t_1) \vee 0), \quad 0 \leq u \leq t_2, \quad (3.23)$$

avec  $a \vee b = \min(a, b)$  et  $a \wedge b = \max(a, b)$ .

## 3.6 Estimation paramétrique

### 3.6.1 Premier plan d'expérience

D'après le modèle (3.21) on suppose que  $K$  groupes d'unités sont observés; on fixe la durée maximale de l'expérience  $t_i$  du  $i$ -ème groupe et on teste le groupe sous le stress accéléré constant en temps  $x_i$  ( $i=1, \dots, K$ ). Notons que :

$$Z_{il} = \varphi_l(x_i), \quad Z^i = (Z_{i0}, \dots, Z_{im})^T \text{ avec } (i = 1, \dots, K; l = 0, \dots, m).$$

On suppose que  $S_{x_0}$  appartient à une classe de fonction de survie de la forme :

$$S_{x_0}(t) = S_0 = ((t/\theta)^\nu), \quad (\theta, \nu > 0). \quad (3.24)$$

Par exemple, si :

$$S_0(t) = e^{-t}, (1+t)^{-1}, 1 - \Phi(\ln t),$$

alors on obtient les classes des fonctions de survie de weibull, loglogistique et lognormale respectivement.  $\Phi$  est la fonction de répartition de la loi normale standard. Donc le modèle (3.21) s'écrit sous forme :

$$S_x(t) = S\left(\frac{\ln t - \gamma^T z}{\sigma}\right), \quad t > 0,$$

où :

$$S(u) = S_0(e^u), u \in \mathbb{R}, \sigma = \frac{1}{\nu}, \gamma = (\gamma_0, \dots, \gamma_m), \gamma_0 = \ln \theta - \beta_0, \gamma_l = -\beta_l \quad (l = 1, \dots, m).$$

Dans le cas de la lois de weibull, loglogistique et lognormale :

$$S(u) = e^{-eu}; (1 + e^u)^{-1}; 1 - \Phi(u),$$

respectivement.

Notons  $T_{ij}$  la durée de vie ( pas nécessairement observée) de la j<sup>ème</sup> unité du i<sup>ème</sup> groupe.

Soit :

$$X_{ij} = \ln(T_{ij} \wedge t_i), \delta_{ij} = I\{T_{ij} \leq t - i\}, f(u) = -S'(u), \lambda(u) = \frac{f(u)}{S(u)}.$$

La fonction de fiabilité et la densité de  $\ln T_{ij}$  sont :

$$S_i(u; \gamma, \sigma) = S\left(\frac{u - \gamma^T Z^{(i)}}{\sigma}\right), f_i(u; \gamma, \sigma) = \frac{1}{\sigma} f\left(\frac{u - \gamma^T Z^{(i)}}{\sigma}\right), u \in \mathbb{R}.$$

Donc la fonction de vraisemblance est :

$$L(\gamma, \sigma) = \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{n_i} \left[ \frac{1}{\sigma} \lambda\left(\frac{X_{ij} - \gamma^T Z^{(i)}}{\sigma}\right) \right]^{\delta_{ij}} S\left(\frac{X_{ij} - \gamma^T Z^{(i)}}{\sigma}\right).$$

En dérive par rapport à  $\gamma_i$  et  $\sigma$  la fonction  $\ln(\gamma, \sigma)$ , on obtient :

$$U_{l(\gamma; \sigma)} = \frac{\partial \ln L(\gamma, \sigma)}{\partial \gamma_l} = \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^k Z_{il} \sum_{j=1}^{n_i} a_{ij}(\gamma, \sigma), \quad (l = 1, \dots, m),$$

$$U_{m+1}(\gamma, \sigma) = \frac{\partial \ln L(\gamma, \sigma)}{\partial \sigma} = \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} v_{ij}(\gamma, \sigma) a_{ij}(\gamma, \sigma) - \delta_{ij},$$

où :

$$v_{ij}(\gamma, \sigma) = \frac{X_{ij} - \gamma^T z^i}{\sigma}, a_{ij}(\gamma, \sigma) = \lambda(v_{ij}(\gamma, \sigma)) - \delta_{ij} (\ln \lambda)'(v_{ij}(\gamma, \sigma)).$$

Les estimateurs du maximum de vraisemblance  $\hat{\sigma}, \hat{\gamma}$  peuvent être obtenues en résolvant le système d'équations :

$$U_l(\gamma, \sigma) = 0 \text{ avec } (l = 1, \dots, m + 1).$$

Notons :

$$I(\gamma, \sigma) = (I_{lk}(\gamma, \sigma))_{(m+1) \times (m+1)}$$

la matrice avec des éléments suivants :

$$I_{ls}(\gamma, \sigma) = -\frac{\partial^2 \ln L(\gamma, \sigma)}{\partial \gamma_l \partial \gamma_s} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^k z_{il} z_{is} \sum_{j=1}^{n_i} C_{ij}(\gamma, \sigma), \quad l, s = 0, \dots, m;$$

$$I_{l, m+1}(\gamma, \sigma) = -\frac{\partial^2 \ln L(\gamma, \sigma)}{\partial \gamma_l \partial \sigma} = \frac{1}{\sigma} U_l(\gamma, \sigma) + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^k z_{il} \sum_{j=1}^{n_i} \nu_{ij} C_{ij}(\gamma, \sigma), \quad l = 0, \dots, m;$$

$$I_{m+1, m+1}(\gamma, \sigma) = -\frac{\partial^2 \ln L(\gamma, \sigma)}{\partial \sigma^2} = \frac{2}{\sigma} U_{m+1}(\gamma, \sigma) + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (\nu_{ij}^2(\gamma, \sigma) C_{ij}(\gamma, \sigma) + \delta_{ij});$$

où :

$$C_{ij}(\gamma, \sigma) = \lambda'(\nu_{ij}(\gamma, \sigma) - \delta_{ij}(\ln \lambda))^n (\nu_{ij}(\gamma, \sigma)).$$

si  $T_{x_0}$  suit les lois de weibull, loglogistique ou lognormale, alors :

$$\lambda(t) = e^t; (1 + e^{-t})^{-1}; \varphi(t)/(1 - \Phi(t)).$$

respectivement, où  $\varphi(t)$  est la densité de la loi normale standard.

Si les estimateurs de maximum de vraisemblance  $\hat{\gamma}$  et  $\hat{\sigma}$  sont obtenue, alors les estimateurs de la fonction de survie  $S_{x_0}$  et du  $p$ -quantile  $t_p(x_0)$  sont :

$$\hat{S}_{x_0}(t) = S\left(\frac{\ln t - \hat{\gamma}^T Z^0}{\hat{\sigma}}\right), \quad \hat{t}_p(x_0) = e^{\hat{\gamma}^T z^0} [S_0^{-1}(1 - p)]^{\hat{\sigma}}.$$

La loi asymptotique est approché par la loi normale  $N((\gamma, \sigma)^T, \sum(\gamma, \sigma))$  quand les  $n_i$  sont grands. La matrice de covariance  $\sum(\gamma, \sigma)$  peut être estimée par :

$$I^{-1}(\hat{\gamma}, \hat{\sigma}) = (I^{ls}(\hat{\gamma}, \hat{\sigma}))_{(m+2) \times (m+2)}.$$

L'estimateur  $\hat{t}_p(x_0)$  est une fonction régulière de  $\hat{\gamma}$  et  $\hat{\sigma}$ . Donc sa loi asymptotique est aussi normale. Mais  $\hat{t}_p(x_0)$  prend des valeur positives, dans la vitesse de convergence vers la loi normale est plus grande si on considère la loi limite de :

$$\hat{K}_p(x_0) = \ln \hat{t}_p(x_0) = \hat{\gamma}^T z^0 + \hat{\sigma} \ln[S_0^{-1}(1 - p)]$$

la loi de  $\hat{K}_p(x_0)$  est approximée par la loi normale  $N(K_p(x_0), \sigma_{kp}^2)$ , où la variance  $\sigma_{kp}^2$  peut être estimée par :

$$\hat{\sigma}_{k_p} = \left( \frac{\partial \hat{K}_p(x_0)}{\partial \hat{\gamma}_0}, \dots, \frac{\partial \hat{K}_p(x_0)}{\partial \hat{\gamma}_m}, \frac{\partial \hat{K}_p(x_0)}{\partial \hat{\sigma}} \right) I^{-1}(\hat{\gamma}, \hat{\sigma}) \times \left( \frac{\partial \hat{K}_p(x_0)}{\partial \hat{\gamma}_0}, \dots, \frac{\partial \hat{K}_p(x_0)}{\partial \hat{\gamma}_m}, \frac{\partial \hat{K}_p(x_0)}{\partial \hat{\sigma}} \right) I^{-1}(\hat{\gamma}, \hat{\sigma})^T = \sum_{l=0}^m \sum_{s=0}^m z_{0l} z_{0s} I^{ls}(\hat{\gamma}, \hat{\sigma}) + 2 \ln[S_0^{-1}(1-p)] \sum_{l=0}^m I^{l,m+1}(\hat{\gamma}, \hat{\sigma}) z_{0l} + \ln^2[S_0^{-1}(1-p)] I^{m+1,m+1}(\hat{\gamma}, \hat{\sigma}).$$

La loi de :

$$\frac{\hat{K}_p(x_0) - K_p(x_0)}{\hat{\sigma}_{K_p}}$$

est approché par la loi  $N(0, 1)$ . L'intervalle approximatif de confiance de niveau de confiance  $(1 - \alpha)$  pour  $k_p(x_0)$  est donné par la formule :

$$\hat{K}_p(x_0) \pm \hat{\sigma}_{k_p} \omega_{(1-\alpha)/2},$$

où  $\omega_\alpha$  est le  $\alpha$ -quantile de la loi  $N(0, 1)$ . l'intervalle approximatif pour  $t_p(x_0)$  est donnée par la formule :

$$\hat{t}_p(x_0) \exp[\pm \hat{\sigma}_{k_p} \omega_{(1-\alpha)/2}].$$

L'estimateur  $S_{x_0}(t)$  est aussi la fonction régulière de  $\gamma$  et  $\sigma$ . Notons :

$$Q_{x_0}(t) = \ln \frac{S_{x_0}(t)}{1 - S_{x_0}(t)},$$

$$\hat{Q}_{x_0}(t) = \ln \frac{\hat{S}_{x_0}(t)}{1 - \hat{S}_{x_0}(t)}.$$

La fonction  $Q_{x_0}(t)$  prend ses valeur dans  $\mathbb{R}$  donc la vitesse de convergence de  $\hat{Q}_{x_0}(t)$  vers la loi limite est plus grande que celle de  $\hat{S}_{x_0}(t)$  vers sa loi limite. Comme dans le cas de  $t_p(x_0)$  on obtient que la loi de  $(\hat{Q}_{x_0}(t) - Q_{x_0}(t))/\hat{\sigma}_{Q_{x_0}}$  est approximée par la loi normale  $N(0, 1)$ ; ici :

$$\hat{\sigma}_{Q_0} = \frac{S'(S^{-1}(\hat{S}_{x_0}(t)))}{\hat{\sigma}^2 \hat{S}_{x_0}(t)(1 - \hat{S}_{x_0}(t))}$$

$$\times \sqrt{\hat{\sigma}^4 \sum_{l=0}^m \sum_{s=0}^m z_{0l} z_{0s} I^{ls}(\hat{\gamma}, \hat{\sigma}) - 2\hat{\gamma}^T z^{(0)} \sum_{i=0}^m z_{0i} I^{l,m+1} \hat{\sigma}^2 + (\hat{\gamma}^T z^{(0)})^2 I^{m+1,m+1}}.$$

Donc les  $(1 - \alpha)$  intervalles approximatifs de confiance pour  $Q_{x_0}(t)$  et  $S_{x_0}(t)$  sont :

$$\hat{Q}(x_0) \pm \hat{\sigma}_{Q_0} W_{1-\alpha/2}$$

et

$$\left(1 + \frac{1 - \hat{S}_{x_0}(t)}{\hat{S}_{x_0}(t)} \exp \pm \hat{\sigma}_{Q_0} W_{1-\alpha/2}\right)^{-1}$$

**Exemple 1 :** si  $T_{x_0}$  suit la loi de weibull,

$$S_{x_0}(t) = e^{(-t/\theta)^\nu}, t \geq 0$$

et que l'on choisi la paramétrisation d'Arrhénus (le stress est la température, par exemple )

$$r(x) = \exp(\beta_0 + \beta_1/x)$$

alors :  $S(t) = \exp[-\exp(t)]$ ,  $z_{00} = 1$ ,  $z_{10} = \frac{1}{x_0}$ , donc

$$\hat{S}_{x_0}(t) = \exp\left[-\exp\left(\frac{\ln t - \hat{\gamma}_0 - \hat{\gamma}_1/x_0}{\hat{\sigma}}\right)\right], \hat{t}_p(x_0) = e^{\hat{\gamma}_0 + \hat{\gamma}_1/x} (-\ln(1-p))^{\hat{\sigma}}.$$

**Exemple 2 :** si  $T_{x_0}$  suit la loi loglogistique,  $S_{x_0}(t) = (1 + (t/\theta)^\nu)^{-1}$ ,  $t \geq 0$  et que l'on choisit la paramétrisation de la règle de puissance (le stress et le voltage, par exemple), c'est à dire :

$$r(x) = \exp(\beta_0 + \beta_1 \ln x),$$

alors :

$$S(t) = (1 + e^t)^{-1}, z_{00} = 1, z_{10} = \ln x_0,$$

donc :

$$\hat{S}_{x_0}(t) = \left[1 + \exp\left(\frac{\ln t - \hat{\gamma}_0 - \hat{\gamma}_1 \ln x_0}{\hat{\sigma}}\right)\right]^{-1}, \hat{t}_p(x_0) = \exp(\hat{\gamma}_0 + \hat{\gamma}_1 \ln x_0) \left(\frac{p}{1-p}\right)^{\hat{\sigma}}.$$

**Exemple 3 :** si  $T_{x_0}$  suit une lognormale et que l'on choisit la paramétrisation d'Eyring, c'est à dire :

$$r(x) = \exp(\beta_0 + \beta_1 \ln x + \beta_2/x),$$

alors :  $z_{00} = 1$ ,  $z_{10} = \ln x_0$ ,  $z_{20} = \frac{1}{x_0}$ ,  $S(t) = 1 - \Phi(t)$  et

$$\hat{S}_{x_0}(t) = 1 - \Phi\left(\frac{\ln t - \hat{\gamma}_0 - \hat{\gamma}_1 \ln x_0 - \hat{\gamma}_2/x_0}{\hat{\sigma}}\right), \hat{t}_p(x_0) = \exp\left(\frac{\hat{\gamma}_0 + \hat{\gamma}_1 \ln x_0 + \hat{\gamma}_2}{x_0 + \hat{\sigma} \Phi^{-1}(p)}\right).$$

**Exemple 4 :**

Supposons que la durée de vie  $T_{x_0}$  suit une loi de weibull, que le stress  $x = (x_1, x_2)^T$  est bidimensionnel (le voltage et la température, par exemple) et que le modelé d'Arrhénus généralisé avec  $\delta_1(x) = \alpha_1/x_1$ ,  $\delta_2(x) = \alpha_2/x_2^2$  est choisi alors :

$$z_{00} = 1, z_{10} = \ln x_{10}, z_{20} = \frac{1}{x_{20}}$$

et

$$\begin{aligned} \hat{S}_{x_0}(t) &= \exp\left[-\exp\left\{\frac{\ln t - \hat{\gamma}_0 - \hat{\gamma}_1 \ln x_{10} - \hat{\gamma}_2/x_{20}}{\hat{\sigma}}\right\}\right], \\ \hat{t}_p(x_0) &= \exp(\hat{\gamma}_0 - \hat{\gamma}_1 \ln x_{10} - \hat{\gamma}_2/x_{20})(-\ln(1-p))^{\hat{\sigma}}. \end{aligned}$$

**– Cas de la loi exponentielle :**

Les formules sont plus simples, si  $\nu = 1$  dans (3.24), par exemple dans le cas de la loi exponentielle :

$$S_{x_0}(t) = e^{-t/\theta}, t \geq 0, t_p(x_0) = -e^{\gamma^T} z^0 \ln(1-p).$$

Le modèle (3.21) peut être écrit :

$$S_x(t) = \exp[-\exp(\gamma^T z)t],$$

où :

$$\gamma = (\gamma_0, \dots, \gamma_m)^T, \gamma_0 = \beta_0 - \ln \theta, \gamma_i = \beta_i, (i = 1, \dots, m).$$

La fonction de fiabilité et le taux de panne de  $T_{ij}$  sont :

$$\begin{aligned} S_{x_i}(t) &= \exp[-\exp(\gamma^T z^i)t], \\ \lambda_{x_i}(t) &= \exp(-\gamma^T z^i). \end{aligned}$$

Notons :

$$X_{ij} = (T_{ij} \wedge t_i), \delta_{ij} = I\{T_{ij} \leq t_i\}.$$

La fonction de vraisemblance s'écrit :

$$L(\gamma) = \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{n_i} [\lambda_{x_i}(X_{ij})]^{\delta_{ij}} S_{x_i}(X_{ij}) = \exp\left[-\sum_{i=1}^k \sum_{j=i}^{n_i} (\delta_{ij} \gamma^T z^i + e^{\gamma^T z^i} X_{ij})\right].$$

Les résultats des fonctions sont :

$$U_l(\gamma) = \frac{\partial \ln l(\gamma)}{\partial \gamma_l} = -\sum_{i=1}^k z_{il} (\delta_i + e^{\gamma^T z^{(i)}} X_i),$$

où :

$$\delta_i = \sum_{j=1}^{n_i} \delta_{ij}, X_i = \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij},$$

et la matrice d'information de Fisher est :

$$I(\gamma) = (I_{ls}(\gamma)), (l, s = 0, \dots, m),$$

où :

$$I_{ls} = -\mathbf{E}\left[\frac{\partial^2 \ln L(\gamma)}{\partial \gamma_l \partial \gamma_s}\right] = E\left[\sum_{i=1}^k z_{il} z_{is} e^{\gamma^T z^i} X_i\right] = \sum_{i=1}^k n_i z_{il} z_{is} (1 - e^{-e^{\gamma^T z^i} t_i})$$

s'il n'ya pas de censure, c'est à dire que  $t_i = \infty$ , alors :

$$I_{ls}(\gamma) = \sum_{i=1}^k n_i z_{il} z_{is},$$

ne dépend pas de  $\gamma$ . Notons  $\hat{I} = I(\gamma)$  la matrice d'information de fisher estimée. la loi de  $\gamma$  quand les  $n_i$  sont grands est approchée par la loi normale  $N(\gamma, I^{-1}(\gamma))$  et donc la loi de :

$$\hat{K}_p(x_0) = \ln \hat{t}_p(x_0) = -\hat{\gamma}^T z^0 + \ln(-\ln(1-p)),$$

est approchée par la loi normale  $N(k_p(x_0), \sigma_{kp}^2)$ , où :

$$\sigma_{kp}^2 = \sum_{l=0}^m \sum_{s=0}^m I^{ls}(\gamma) z_{0l} z_{0s}.$$

Notons :

$$\hat{\sigma}_{kp}^2 = \sum_{l=0}^m \sum_{s=0}^m I^{ls}(\hat{\gamma}) z_{0l} z_{0s}.$$

Donc :  $\frac{\hat{k}_p(x_0) - k_p(x_0)}{\hat{\sigma}_{kp}}$  est approchée par la loi  $N(0, 1)$ . L'intervalle approximatif de confiance de niveau  $(1 - \alpha)$  pour  $t_p(x_0)$  est donné par la formule :

$$\hat{t}_p(x_0) \exp\{\pm \hat{\sigma}_{kp} w_{1-\alpha/2}\}.$$

L'estimateur  $\hat{S}_{x_0}(t)$  et

$$\hat{Q}_{x_0}(t) = \ln \frac{\hat{S}_{x_0}(t)}{1 - \hat{S}_{x_0}(t)}$$

et

$$Q_{x_0}(t) = \ln \frac{S_{x_0}(t)}{1 - S_{x_0}(t)}$$

comme dans le cas du quantile  $t_p(x_0)$  on obtient que la loi de :

$$\frac{\hat{Q}_{x_0}(t) - Q_{x_0}(t)}{\hat{\sigma}(x_0)}$$

peut être approchée par la loi  $N(0, 1)$  ici :

$$\hat{\sigma}_{Q_0} = \ln \hat{S}_{x_0}(t) \sqrt{\sum_{l=0}^m \sum_{s=0}^m z_{0l} z_{0s} I^{ls}(\hat{\gamma})}.$$

Donc les  $(1 - \alpha)$  intervalles de confiance approximatifs pour  $Q_{x_0}(t)$  et  $S_{x_0}(t)$  sont :

$$\hat{Q}(x_0) \pm \sigma_{Q_0} w_{1-\alpha/2}$$

et

$$\left(1 + \frac{1 - \hat{S}_{x_0}(t)}{\hat{S}_{x_0}(t)} \exp[\pm \hat{\sigma}_{Q_0} w_{1-\alpha/2}]\right)^{-1}$$

si  $\hat{\gamma}$  est l'estimateur de maximum de vraisemblance pour  $\gamma$ , alors :

$$\hat{S}_{x_0}(t) = \exp[-e^{\hat{\gamma}^T z^0} t], \hat{t}_p(x_0) = -\exp[-e^{\hat{\gamma}^T z^0} \ln(1-p)].$$

Par exemple dans le cas des modèle d'Arrhenius et de la règle de puissance il faut prendre  $z_{il} = \frac{1}{x_{il}}$  et  $z_{il} = \ln x_{il}$  respectivement et on a :

$$\hat{S}_{x_0}(t) = \exp[-e^{\hat{\gamma}_0 + \hat{\gamma}_0/x_0} t], \hat{S}_{x_0}(t) = \exp[-e^{\hat{\gamma}_0 + \hat{\gamma}_0 \ln x_0} t].$$

respectivement.

### 3.6.2 Deuxième plan d'expérience

Dans le deuxième plan on suppose le première groupe de taille  $n_1$  est testé sous le stress accéléré  $x_1$  et un échantillon complet (sans censure)  $T_{11} \leq \dots \leq T_{1n_1}$  est obtenu, le deuxième groupe de taille  $n_2$  est testé sous le stress :

$$S_{x.}(u) = \begin{cases} x_1, & \text{si } 0 \leq \tau \leq t_1; \\ x_0, & \text{si } t_1 \leq \tau \leq t_2. \end{cases}$$

est un échantillon censuré du premier type  $T_{21} \leq \dots \leq T_{2m_2}$  est obtenue ( $m_2 \leq n_2$ ) supposons que :

$$S_{x_0}(t) = S_0((t/\theta)^\alpha),$$

donc le modèle (3.14) peut être écrit :

$$S_{x_{(\cdot)}}(t) = S_0 \left( \left( \int_0^t r[x(\tau)] d\tau / \theta \right)^\alpha \right), \quad (3.25)$$

les formule (3.22),(3.25) impliquent que :

$$S_{x_1}(t) = S_0 \left( \left( \frac{r(t)}{\theta} \right)^\alpha \right), S_{x_2} = S_0 \left( ((r(t_1 \wedge t) + (t - t_1) \vee 0) / \theta)^\alpha \right),$$

où  $r = r(x_1)$ .

Notons :  $\rho = \ln r$ ,  $\Psi = \ln \theta$ ,  $S(t) = S_0(e^t)$ ,  $f(t) = -S'(t)$ ,  $\lambda(t) = \frac{f(t)}{S(t)}$  alors :

$$S_{x_1}(t) = S(\alpha(\ln t + \rho - \Psi));$$

$$S_{x_2}(t) = \begin{cases} S(\alpha(\ln t + \rho - \Psi)), & \text{si } t \leq t_1; \\ S(\alpha(\ln(e^\rho t_1 + t - t_1) - \Psi)), & \text{si } t > t_1. \end{cases}$$

$$f_{x_1}(t) = f(\alpha(\ln t + \rho - \Psi)) \frac{\alpha}{t};$$

$$f_{x_2}(t) = \begin{cases} f(\alpha(\ln t + \rho - \Psi)) \frac{\alpha}{t}, & \text{si } t \leq t_1; \\ f(\alpha(\ln(e^\rho t_1 + t - t_1) - \Psi)) \frac{\alpha}{e^\rho t_1 + t - t_1}, & \text{si } t > t_1. \end{cases}$$

Notons  $r_2$  le nombre de pannes du deuxième groupe jusqu'au moment  $t_1$ . La fonction de vraisemblance s'écrit :

$$L = \prod_{j=1}^{n_1} f(\alpha(\ln T_{1j} + \rho - \Psi)) \frac{\alpha}{T_{1j}} \prod_{j=1}^{r_2} f(\alpha(\ln T_{2j} + \rho - \Psi)) \frac{\alpha}{T_{2j}} \times \prod_{j=r_2+1}^{m_2} f(\alpha(\ln(e^\rho t_1 + T_{2j} - t_1) - \Psi)) \frac{\alpha}{e^\rho t_1 + T_{2j} - t_1} S^{n_2 - m_2}(\alpha(\ln(e^\rho t_1 + t_2 - t_1) - \Psi)).$$

Les estimateurs de maximum de vraisemblance vérifient le système d'équation (voir [15]) :

$$U_i = (\alpha, \rho, \Psi) = 0 (i = 1, 2, 3). \quad (3.26)$$

Si les estimateurs de maximum de vraisemblance  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\rho}$ ,  $\hat{\Psi}$  sont obtenus, alors les estimateurs de la fonction de survie  $S_{x_0}$  et du p-quantile  $t_p(x_0)$  sont :

$$\hat{S}_{x_0}(t) = S(\hat{\alpha}(\ln t - \hat{\Psi})), \hat{t}_p = \exp[\hat{\Psi} + \frac{1}{\hat{\alpha}} S^{-1}(1 - p)].$$

Dans les cas des lois de weibull, loglogistique et lognormale

$$S^{-1}(1-p) = \ln(-\ln(1-p)); -\ln\left(\frac{1}{p}-1\right); \Phi^{-1}(p);$$

$\Phi^{-1}$  étant l'inverse de la fonction de répartition de la loi normal standard.

Notons  $I(\alpha, \rho, \Psi) = (I_{ij}(\alpha, \rho, \Psi))$  la matrice  $(3 \times 3)$  des dérivés secondes partielles de  $\ln L$  par rapport à  $\alpha, \rho$  et  $\Psi$  les expression de  $I_{ij}$  sont bien expliqué (voir[15]).

Si  $n$  est grand, la lois de  $(\hat{\alpha}, \hat{\rho}, \hat{\Psi})$  peut être approchée par la loi normal de moyenne  $(\alpha, \rho, \Psi)$  et la matrice de covariance estimée par  $I^{-1}(\hat{\alpha}, \hat{\rho}, \hat{\Psi}) = (I^{ls}(\hat{\alpha}, \hat{\rho}, \hat{\Psi}))_{3 \times 3}$ .

Notons :

$$\hat{Q}_{x_0}(t) = \ln \frac{\hat{S}_{x_0}(t)}{1-\hat{S}_{x_0}(t)}.$$

De la même façon que pour la statistique  $\hat{K}_p(x_0)$  dans la partie première plan on peut montrer que la loi de

$$\frac{\hat{Q}_{x_0}(t) - Q_{x_0}(t)}{\hat{\sigma}}$$

avec :

$$Q_{x_0}(t) = \ln \frac{S_{x_0}(t)}{1-S_{x_0}(t)}$$

est approchée par la loi normal  $N(0, 1)$ , ici :

$$\hat{\sigma}_{Q_0}(t) = \frac{S'(S^{-1}(\hat{S}_{x_0}(t)))}{\hat{S}_{x_0}(t)(1-\hat{S}_{x_0}(t))} \times \sqrt{(\ln t - \hat{\Psi})^2 I^{11}(\hat{\alpha}, \hat{\rho}, \hat{\Psi}) - 2\hat{\alpha}(\ln t - \hat{\Psi}) I^{13}(\hat{\alpha}, \hat{\rho}, \hat{\Psi}) + \alpha^2 I^{33}(\hat{\alpha}, \hat{\rho}, \hat{\Psi})}.$$

Donc les intervalles de confiance approximatifs de niveau  $(1 - \alpha)$  pour  $Q_{x_0}(t)$  et  $S_{x_0}(t)$  sont :

$$\hat{Q}(x_0) \pm \hat{\sigma}_{Q_0} w_{1-\alpha/2}$$

et

$$\left(1 + \frac{1-\hat{S}_{x_0}(t)}{\hat{S}_{x_0}(t)} \exp[\pm \hat{\sigma}_{Q_0} w_{1-\alpha/2}]\right)^{-1}$$

respectivement.

Notons :

$$\hat{k}_p(x_0) = \ln \hat{t}_p(x_0) = \hat{\Psi} + \frac{1}{\hat{\alpha}} S^{-1}(1-p).$$

La loi de  $(\hat{k}_p(x_0) - k_p(x_0))/\hat{\sigma}_{k_p}$  est approchée par la loi normale  $N(0, 1)$ , ici :

$$\hat{\sigma}_{k_p} = \left(\frac{S^{-1}(1-p)}{\alpha^2}\right)^2 I^{11} - 2\frac{S^{-1}(1-p)}{\alpha^2} I^{13} + I^{33}.$$

Donc les intervalles de confiance approximatifs de niveau  $(1 - \alpha)$  pour  $k_p(x_0) = \ln t_p(x_0)$  et  $t_p(x_0)$  sont :

$$\hat{k}_p(x_0) = \pm w_{1-\alpha/2} \hat{\sigma}_{k_p} \text{ et } \hat{t}_p(x_0) \exp[\pm \hat{\sigma}_{k_p} w_{1-\alpha/2}].$$

# Chapitre 4

## Application

### 4.1 Introduction

Les modèles SVA peuvent s'appliquer à plusieurs domaines comme ( sciences médicales, l'électronique et la mécanique ). Ce qui différencie les diverses applications ce sont les stress employés pour accélérer les essais, les lois de fiabilité utilisées et la nature de la fonction r des modèles (3.20) et (3.21).

Nous allons appliquer dans ce chapitre, le modèle standard de vie accélérée (SVA) en mécanique en considérant une pièce en acier qui subit des dommages par fatigue, en se basant sur les résultats d'essais de Tebbi et al. [21].

### 4.2 Description de l'endommagement par fatigue

On appelle dommage par fatigue la modification des caractéristique d'un matériau, tenant essentiellement à la formation de fissures et résultat de l'application de cycle de contraint  $\sigma$  conduisant a une rupture (voir figure 4.1)[21].

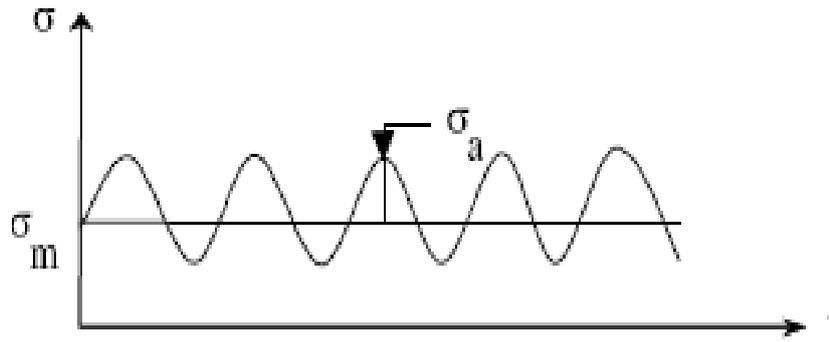


FIGURE 4.1 – Cycle de contrainte

Avec :

$$\sigma_a = \sigma_D \left[ 1 - \frac{\sigma_m}{R_m} \right] \quad (4.1)$$

où :

$\sigma_a$  : Contrainte d'amplitude,

$R_m$  : représente la limite à la rupture,

$\sigma_m$  : Contrainte moyenne constante,

$\sigma_D$  : La limite d'endurance.

Une pièce soumise, dans des conditions bien précise, à une contrainte, dont les valeurs extrêmes  $\pm\sigma_a$  se rompra au bout d'un nombre de cycles  $N$ . La courbe qui donne la variation de la contrainte appliquée  $\rho_a$  en fonction du nombre de cycles à la rupture  $N$  est appelée courbe de fatigue où courbe de wohler.

Les dommages par fatigue sont influencées par plusieurs contraintes, on trouve entre autre : l'état de la surface de la pièce (apparition de fissures, ...), la superposition à la contrainte alternée d'amplitude  $\sigma_a$  d'une contrainte moyenne  $\sigma_m$  constante, la corrosion et l'élévation de la température, etc. Tebbi et al. montrent que le nombre de cycles à rupture est une variable aléatoire caractérisée par une loi normale (pour les  $\log(N)$ ).

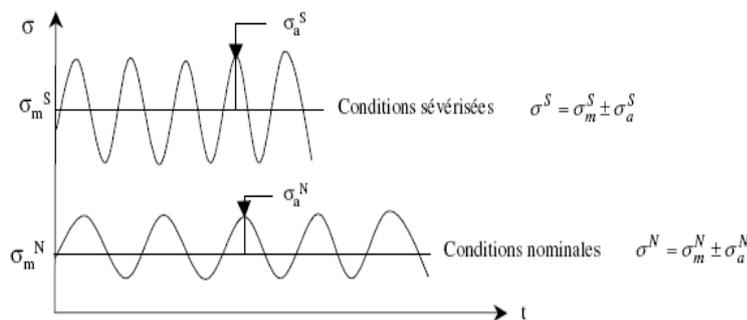


FIGURE 4.2 – Sévérisation du cycle de contrainte

### 4.3 Présentation de plan d'essais

Nikulin et al. [15] ont proposé un essai avec deux groupes de composants. Le premier échantillon de taille  $n_1$  est testé sous stress sévéré  $x_1$  jusqu'au nombre de cycles  $N_1$  et on obtient les nombres de cycles à rupture aux instants  $:N_{11}, \dots, N_{1n_1}$ . Le deuxième échantillon, de taille  $n_2$ , est testé sous le stress échelonné  $x_1$  jusqu'au nombre de cycles  $N_1$  et ensuite sous le stress  $x_0$  jusqu'à  $N_2$  ( $N_1 \leq N_2$ ). Ainsi, nous obtenons un échantillon censuré des nombres de cycles à rupture  $N_{21}, \dots, N_{2m_2}$  (avec  $m_2 \leq n_2$ ) dont  $k_2$  défaillances sous le stress  $x_1$ ,  $m_2 - k_2$  défaillances sous le stress  $x_0$  et  $n_2 - m_2$  composants survivants à l'issue de  $N_2$  cycles.

Avec :

$$x_2(u) = \begin{cases} x_1, & \text{si } 0 \leq u \leq \log(N_1); \\ x_0, & \text{si } \log(N_1) < u \leq \log(N_2). \end{cases}$$

### 4.4 Application des modèles SVA paramétrique

L'estimation paramétrique d'un modèle SVA consiste à considérer une loi statistique particulière pour estimer la fiabilité. Dans le cas de la fatigue, la loi la plus appropriée pour caractériser la fiabilité est la loi normale, lorsque l'on considère la distribution des  $\log(N)$ .

$$S_{x_0}(u) = 1 - \Phi\left(\frac{u - \mu}{\sigma}\right), \quad (4.2)$$

où

$u = \log(N)$  est une valeur observée de la variable aléatoire  $\log(N)$ ,

$\Phi$  :représente la fonction de répartition de la loi normale standard,

$\mu$  : La moyenne des  $\log(N)$ ,

$\sigma$  : l'écart type des  $\log(N)$ ,

Donc le modèle (3.21) devient :

$$S_x(u) = S_x(r.u) = 1 - \Phi\left(\frac{r.u - \mu}{\sigma}\right). \quad (4.3)$$

Ainsi, on obtient

$$S_{x_1}(u) = 1 - \Phi\left(\frac{r.u - \mu}{\sigma}\right). \quad (4.4)$$

$$S_{x_2}(u) = S_x(r.u) = 1 - \Phi\left(\frac{r.\log(N_1) + u - \log(N_1) - \mu}{\sigma}\right) \quad (4.5)$$

La vraisemblance est définie par :

$$\begin{aligned} L(r, \mu, \sigma) &= \prod_{i=1}^{n_1} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{r.\log(N_{1i}) - \mu}{\sigma}\right)^2} \times \prod_{j=1}^{k_2} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{r.\log(N_{2j}) - \mu}{\sigma}\right)^2} \\ &\times \prod_{l=k_2+1}^{m_2} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{r.\log(N_1) + \log(N_{2l}) - \log(N_1) - \mu}{\sigma}\right)^2} \\ &\times (1 - \Phi\left(\frac{r.\log(N_1) + \log(N_2) - \log(N_1) - \mu}{\sigma}\right))^{n_2 - m_2}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Par le maximum de vraisemblance, nous déduisons des estimateurs de  $\hat{r}$ ,  $\hat{\mu}$  et  $\hat{\sigma}$  permettant de définir la loi de fiabilité dans les conditions nominales :

$$S_{x_0} = 1 - \Phi\left(\frac{u - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}}\right), \quad (4.7)$$

avec  $u > 0$ .

## 4.5 Exemple par simulation

Nous allons considérer un exemple d'une sévérisation par la température  $T$  et la contrainte d'amplitude  $\sigma_a$ . D'après [21] les paramètres de simulation pour tirer aléatoirement des nombres de cycles à rupture sont résumés dans le tableau suivant :

	température °C	Contrainte d'amplitude $\sigma_a$ en Mpa	Limite à la rupture $R_m$ en Mpa (valeur issue de la figure 4.11.a)	Limite d'endurance $\sigma_p$ en Mpa (valeur issue de la figure 4.11.b)	Moyenne $\bar{N}$ tirée de l'équation (4.37)	$\mu = \log(\bar{N})$	Ecart-type $\sigma$ proposé par Lalanne [Lalanne,1999]
conditions nominales $s_0$	50	330	435	330	$9,41 \cdot 10^6$	6,97	0,2
conditions sévériées $s_1$	200	450	577	368	$9,59 \cdot 10^4$	4,98	0,2

FIGURE 4.3 – Paramètres de simulation

Un programme de simulation a été élaboré sous Matlab version 7.12.0.

- Le premier échantillon : 20 valeurs de  $\log(N_{1i})$  tirées selon la loi  $N(4.98;0.2)$  caractéristique des conditions sévériées.
- Le deuxième échantillon : 20 valeurs de  $\log(N_{2i})$  tirées selon la loi  $N(4.98;0.2)$  jusqu'à  $\log(N_1) = 5$  et selon la loi  $N(6.87;0.2)$  pour les suivantes ( $m_2 = 15$ ).

À l'issue de 50 simulations la moyenne et l'écart type des estimateurs  $\hat{\mu}$ ,  $\hat{\sigma}$  et  $\hat{r}$  sont donnée dans le tableau suivant :

Paramètres	Moyenne	Ecart type
$\hat{\mu}$	6.9020	0.0141
$\hat{\sigma}$	0.2500	0
$\hat{r}$	1.3401	0.0143

TABLE 4.1 – Valeurs des paramètres pour  $n_1 = n_2 = 20$  et  $m_2 = 15$

D'où la fonction de fiabilité estimée :

$$S_{x_0} = 1 - \Phi\left(\frac{u - 6.9020}{0.2500}\right), \quad (4.8)$$

avec  $u > 0$ .

Nous voulons savoir s'il est possible d'avoir des résultats similaires tout en réduisant le nombre de composants à tester. Pour cela, nous avons effectué une exécution de notre programme avec  $n_1 = n_2 = 15$  et  $m_2 = 10$ . Les résultats sont résumés dans le tableau suivant :

Paramètres	Moyenne	Ecart type
$\hat{\mu}$	6.9020	0.0141
$\hat{\sigma}$	0.2500	0
$\hat{r}$	1.3283	0.0084

TABLE 4.2 – Valeurs des paramètres pour  $n_1 = n_2 = 15$  et  $m_2 = 10$ 

D’où la fonction de fiabilité estimée :

$$S_{x_0} = 1 - \Phi\left(\frac{u - 6.9020}{0.2500}\right), \quad (4.9)$$

avec  $u > 0$ .

**Remarque :**

On constate que les résultats sont similaires dans les deux cas. Ce qui nous permet de conclure que nous pouvons réduire le nombre de composants à tester. Néanmoins, il est intéressant de connaître le nombre minimal de composants à mettre à l’essai.

# Conclusion et perspectives

Les essais accélérés ont une part très importante plus particulièrement dans le processus du développement du produit de longue durée. Ils permettent d'une part de s'assurer de la conformité du produit aux exigences de qualité et d'autre part de réduire sa durée de vie afin d'estimer sa fiabilité dans des conditions normales d'utilisation à partir des conditions accélérées. L'objectif principal de cette méthode est d'estimer la fiabilité d'un composant en fonction du temps, tout au long de sa mission.

Dans un premier temps, nous avons introduit le principe des essais en fiabilité, en listant les différents paramètres qui permettent de construire un plan d'essai et la méthode d'estimation de la fiabilité par les essais accélérés. C'est une méthode applicable aux composants et aux systèmes, elle est basée sur l'évaluation d'une probabilité de défaillance instantanée, on fixe la contrainte et le temps, ce qui permet un suivi permanent de l'évolution de la fiabilité des systèmes. Ensuite, après avoir présenté le modèle standard de vie accélérée (SVA), nous avons appliqué le modèle SVA paramétrique à des systèmes soumis à des dégradations mécaniques et plus particulièrement au phénomène de fatigue selon un plan d'expérience.

Ce travail ouvre beaucoup de perspectives à la fois théoriques et pratiques. Du point de vue théorique, il serait intéressant d'aborder l'estimation non paramétrique de la fonction  $r$ . Il est aussi intéressant d'étudier d'autres méthodes d'essais accélérés, entre autre, les méthodes bayésiennes. L'optimisation du temps d'essai et du nombre de composants à tester est un thème qui mérite d'être étudié.

# Bibliographie

- [1] **H. Ahmed**, *Fiabilité et cycle de vie des composants mécaniques dégradés : essais de démonstration et analyse basée sur la fonction de Hasard*, Thèse de doctorat , Université Blaise Pascal - Clermont-Ferrand II, 2009.
- [2] **P. Beaumont**, *Optimisation des plans d'essais accélérés, Application à la tenue en fatigue de pièces métalliques de liaison au sol*, Thèse de Doctorat, Université Blaise Pascal - Clermont-Ferrand II, 2009.
- [3] **C. Bendjoudi, L. Benkerrou**, *Analyse de fiabilité pour l'optimisation de la maintenance préventive*, Mémoire de master 2 département recherche opérationnelle faculté science exacte, Université A. Mira de béjaia, 2013.
- [4] **W. Benzaoui**, *Sûreté de fonctionnement. Cours Master Académique, Automatique*, Université Kasdi Merbah-Ouargla, 2014/2015.
- [5] **N. Bensaid Amrani, D. Sarsri**, *Estimation de la fiabilité prévisionnelle des systèmes mécatroniques*, Xème Conférence Internationale : Conception et Production Intégrées, Université AbdelMalek Essaadi, Maroc, 2015.
- [6] **A. Boumeddane**, *Impact de la fiabilité sur les équipements industriels (étude de cas au niveau denitex)*, Mémoire de magistère, Université Abou Bekr Belkaid-Tlemcen, 2012.
- [7] **S. Fatimi**, *Planification des essais accélérés : optimisation, robustesse et analyse*, Thèse de Doctorat, Université d'Angers, 2012.
- [8] **A. Gabriel Mihalache**, *Modélisation et évaluation de la fiabilité des systèmes mécatroniques : application sur système embarqué*, Thèse de Doctorat, Université d'Angers, 2005.
- [9] **M. Glade**, *Modélisation des coûts de cycle de vie : prévision des coûts de maintenance et de la fiabilité application à l'aéronautique*, Thèse de Doctorat, Ecole centrale de Lyon, 2005.

- 
- [10] **F. Guerin**, *Estimation de la fiabilité par les essais*. Thèse de Doctorat, Université d'Angers, 2005.
- [11] **T. Houasnia**, *Pondération des taux de défaillances des équipements qui opèrent dans des milieux hostiles*, Thèse de Doctorat, Université de Québec, 1999.
- [12] **M. Jean-Christophe AUGE**, *Modélisation de l'influence de l'environnement sur la fiabilité de vérins hydraulique et pneumatique Application aux essais accélérés*, Thèse de Doctorat, l'école centrale de Lyon, 1998.
- [13] **K. Lagha**, *Fiabilité et analyse des données de survie*. Cours Master 2 SAD, Université de Bejaia, 2016/2017.
- [14] **DJ. Mebarkia**, *Recherche d'une solution optimale d'exploitation et de maintenance des gazoducs algériens tenant compte de la fiabilité des équipements des différentes lignes*, Mémoire de Magister, Université M'hamed Bougara de Boumerdes, 2012/2013.
- [15] **M. Nikulin, L. Gerville-Réache, V. couallier**, *Statistique des essais accélérés*, Edition lavoisier, 2007
- [16] **M. Nikulin, V. Nikoulina, L. Gerville-Réache, et V. Bagdonavicius**, *Expérience accélérées : analyse statistique du modèle standard de vie accélérée*, Revue de statistique appliquée, tome 48, n°3(2000), P 5-38.
- [17] **C. Regard**, *Qualification accélérée des composants SiP*, Thèse de Doctorat, Université de Bordeaux I, 2010.
- [18] **L. Rémi**, *Fiabilité et durabilité d'un système complexe dédié aux énergies renouvelables, Application à un système photovoltaïque*, Thèse de Doctorat, Université d'Angers, 2011.
- [19] **G. Rouzet**, *Essais de conformité en fiabilité les essais tronqués-censurés* Revue de statistique appliquée, tome 20, n°4(1972), P 31-46.
- [20] **O. Tebbi**, *Estimation des lois de fiabilité en mécanique par les essais accélérés*, Thèse de Doctorat, Université d'Angers, 2005.
- [21] **O. Tebbi, F. Guérin, B. Dumon**, *Estimation de la fiabilité des composants mécaniques par les essais accélérés*, Revue. Statistique appliqué, 2005, P 63-90.
- [22] **F. Turgis**, *Amélioration de la fiabilité d'un système complexe, Application ferroviaire : accès voyageurs*, Thèse de Doctorat, Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambresis, 2013.
- [23] **S. Voiculescu**, *Fiabilité des systèmes embarqués*, Thèse de Doctorat, Université d'Angers, 2009.