

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abderrahmane Mira de Béjaïa
Faculté des Sciences Exactes
Département des Mathématiques



Mémoire de fin d'études en vue de l'obtention du diplôme de Master
en Mathématiques

Spécialité: Statistique et Analyse Décisionnelle

Thème

Analyse stochastique des performances du système $M/G/1$
avec rappels ayant plusieurs types d'appels

Présenté par:

ABBAS Lynda et BADJA Lamia

Soutenu, le 20/06/2017 devant le jury composé de :

M^{me}	L. BERDJOUDJ	M.C.A	Université A. Mira Béjaïa	Présidente
M^r	M. BOUALEM	M.C.A	Université A. Mira Béjaïa	Rapporteur
M^{me}	F. RAHMOUNE	M.C.A	Université A. Mira Béjaïa	Examinatrice

Promotion: 2016/2017

REMERCIEMENTS

Louange à Dieu, le miséricordieux, sans lui rien de tout cela n'aurait pu être.

Nous tenons à exprimer toutes nos gratitude envers notre encadreur M^r Mohamed BOUALEM pour son aide précieuse, ses conseils avisés, sa disponibilité et le temps qu'il nous a consacré.

Nous remercions, ainsi, les membres du jury pour l'effort qu'ils feront pour examiner ce mémoire.

Il nous semble tout aussi important de remercier nos enseignants qui ont permis d'élargir nos connaissances tout au long de notre cursus.

DÉDICACES

A ma famille source de ma volenté ;

A mes chers parents, qui ont su être a la hauteur avec leur compréhension et leurs incontestables encouragements pendant ma carrière ;

A mon frère ;

A mes soeurs ;

A mes chères ami(es).

Lynda

DÉDICACES

A ma famille source de ma volenté ;

A mes chers parents, qui ont su être a la hauteur avec leur compréhension et leurs incontestables encouragements pendant ma carrière ;

A mes frères ;

A ma soeur ;

A mes chères ami(es).

Lamia

TABLE DES MATIÈRES

Liste des figures	5
Introduction générale	6
1 Système d'attente avec rappels et priorité	11
1.1 Systèmes d'attente avec rappels	11
1.1.1 Description d'un modèle d'attente avec rappels	12
1.1.2 Condition de stabilité d'un système de files d'attente avec rappels	14
1.1.3 Politiques d'accès au serveur à partir de l'orbite	15
1.2 Quelques cas modélisés par des systèmes de files d'attente avec rappels .	16
1.3 Quelques modèles d'attente avec rappels et priorité	18
1.3.1 File d'attente $M_1, M_2/G/1$ avec rappels et priorité	18
1.3.2 File d'attente $M_1, M_2/G_1, G_2/1$ avec rappels	20
1.3.3 Files d'attente $M_1, M_2/G_1, G_2/1$ avec rappels et priorité absolue .	21
2 Généralités sur la théorie des inégalités stochastiques	23
2.1 Propriétés générales des ordres partiels	24
2.1.1 Ordre stochastique	26

2.1.2	Ordre convexe	28
2.1.3	Ordre en transformée de Laplace	30
2.1.4	Ordre en fonctions génératrices	32
2.1.5	Relations entre les ordres partiels	33
2.1.6	Propriétés de monotonie	33
2.2	Comparabilité et monotonie des processus markoviens homogènes	36
2.2.1	Opérateurs monotones et comparables	36
2.2.2	Conditions de monotonie et de comparabilité	38
2.3	Distributions non-paramétriques	39
2.3.1	Relation avec les distributions paramétriques	41
2.3.2	Relation entre les classes de distributions non-paramétriques	42
3	Analyse stochastique des performances du système $M_1, M_2/G_1, G_2/1$ avec rappels à communication bidirectionnelle ayant plusieurs types d'appels	43
3.1	Description du modèle	44
3.2	Chaîne de Markov incluse	46
3.3	Notations	48
3.4	Inégalités préliminaires	48
3.5	Monotonie de la chaîne de Markov incluse	54
3.6	Comparaison des opérateurs de transition	60
3.7	Bornes stochastiques des distributions stationnaires	64
	Conclusion générale	67
	Bibliographie	69

TABLE DES FIGURES

1.1	Schéma illustratif d'un système d'attente avec rappels	13
2.1	Relations entre les classes de distributions d'âge	42
3.1	Les flux d'appels dans ce modèle	46

INTRODUCTION GÉNÉRALE

La théorie des files d'attente tire son origine des recherches de l'ingénieur danois Agner Krarup Erlang entre 1909 et 1920. Ce dernier étudiait le concept de la file d'attente des systèmes téléphoniques dans les centres d'appels de Copenhague. Depuis, plusieurs mathématiciens se sont intéressés aux files d'attente et ont développé les modèles mathématiques de cette théorie.

Plusieurs modèles de files d'attente classiques ont été étudiés depuis Erlang, et plusieurs formules "élégantes" ont été élaborées et proposées comme étant des solutions analytiques de certains types de problèmes. Cependant, cette théorie classique s'est très vite montrée inefficace face à des systèmes réels de plus en plus complexes. Par conséquent, les phénomènes de répétitions de demandes du service ont poussé certains chercheurs à étendre le modèle d'attente classique à celui dit avec rappels.

Les modèles d'attente avec rappels apparaissent dans la modélisation stochastique de plusieurs situations réelles (Par exemple, les systèmes téléphoniques, les systèmes informatiques, les réseaux locaux, etc.). Par ailleurs, dans la plupart des publications sur les files d'attente avec rappels, le serveur ne fournit que le service aux arrivées entrantes effectuées par les clients réguliers. Cependant, il existe des situations réelles par exemple : les centres d'appels où un opérateur non seulement sert les appels entrants, mais il effec-

tue aussi des appels sortants vers l'extérieur lorsque le serveur est libre. Dans ce type de système, il est plus naturel d'envisager une file d'attente avec rappels à deux types d'appels où, une fois bloqués, les appels de type I sont en attente et vont être servis dès que le serveur est libre, et les appels de type II entrent en orbite pour retenter leurs chances, de sorte que les appels de type I ont la priorité sur les appels de type II . Notons que, l'analyse des files d'attente avec rappels ayant deux types de clients (files d'attente avec rappels à communication bidirectionnelle) est particulièrement plus difficile que l'analyse des files d'attente avec rappels à un seul type d'appels.

Deslauriers et al. (2007) [13] considèrent cinq modèles markoviens pour mélanger les centres d'appels où les opérateurs ne servent pas seulement les appels entrants mais aussi les appels sortants. Falin (1979) [16] analyse une file d'attente $M/G/1$ avec rappels à communication bidirectionnelle où le temps de service des appels entrants et sortants suivent la même distribution arbitraire. Choi et al. (1995) [10] s'étendent à un modèle dans lequel il existe un tampon fini pour les appels sortants. Martin et Artalejo (1995) [25] considèrent une file d'attente $M/G/1$ avec rappels à communication bidirectionnelle et un taux de rappel constant où les temps de service des appels entrants et sortants suivent deux distributions arbitraires différentes. Dimitriou (2014) [14] considère un modèle de file d'attente $M/G/1$ avec rappels pour les réseaux à long terme d'évolution (LTE).

Artalejo et Phung-Duc (2012) [5] considèrent une file d'attente à communication bidirectionnelle avec un seul serveur où les appels entrants et les appels sortants suivent des distributions exponentielles distinctes. Les auteurs dérivent des expressions explicites pour les fonctions génératrices ainsi que la distribution stationnaire conjointe du nombre d'appels dans l'orbite et l'état du serveur. Ils dérivent aussi quelques formules asymptotiques et récursives pour la distribution stationnaire conjointe. Artalejo et Phung-Duc (2013) [6] prolongent leur analyse à une file d'attente $M/G/1$ avec rappels à communication bidirectionnelle qui se révèle étroitement liée aux files d'attente avec rappels et priorité [18] où un tampon infini est disponible pour les appels sortants.

Dans tous les travaux ci-dessus, il existe au maximum un flux d'appels sortants. Cependant, dans la pratique, il existe divers types d'appels sortants dont la durée peut être extrêmement différente. De plus, les appels sortants peuvent être considérés comme les durées que le serveur décompose et ne peuvent pas servir les appels entrants. De ce point de vue, il y a également divers types de pannes dont les temps de réparation peuvent suivre différentes distributions [23]. En outre, d'un point de vue de service, l'importance accordée à chaque classe d'appels sortants est différente. Ainsi la modélisation de tous ces types d'appels sortants pour une distribution exponentielle comme dans [5] peut affecter la précision de l'évaluation des performances. Ceci motive Sakurai et Phung-Duc (2014) [29] à envisager des modèles où plusieurs types d'appels sortants suivent des distributions distinctes.

L'objectif de notre travail est d'appliquer les méthodes de comparaison stochastique, pour étudier les propriétés de monotonie du modèle $M/G/1$ avec rappels à communication bidirectionnelle ayant plusieurs types d'appels sortants. Les mesures de performance d'un tel modèle sont disponibles sous forme explicite dans [29]. L'avantage de ce type de méthodes d'approximation réside dans le fait que des résultats explicites puissent être obtenus pour des situations relativement complexes où les méthodes numériques et les expériences de simulation constituaient souvent la seule alternative.

Outre une introduction, le document se compose de trois chapitres, une conclusion générale et une bibliographie.

- Le premier chapitre donne une synthèse sur les systèmes de files d'attente avec rappels et priorité.

- Le deuxième chapitre donne un aperçu sur la notion des ordres partiels usuels (ordre stochastique, convexe et Laplace), ainsi que des éléments sur la théorie de comparabilité des processus stochastique.

- Le dernier chapitre est consacré à l'étude des inégalités stochastiques pour le modèle $M/G/1$ avec rappels à communication bidirectionnelle ayant plusieurs types d'appels

sortants. Plus précisément, on donne les conditions pour lesquelles l'opérateur de transition de la chaîne de Markov incluse est monotone par rapport aux ordres stochastiques et convexes. Ensuite, on étudie la comparabilité des opérateurs de transition associé aux chaînes de Markov incluse de deux systèmes $M/G/1$ avec rappels à communication bidirectionnelle ayant plusieurs types d'appels sortants. Par la suite, on étudie la comparabilité des distributions stationnaire du nombre de clients dans les deux systèmes. Finalement, on détermine les bornes stochastiques pour la distribution stationnaire du modèle considéré.

CHAPITRE 1

SYSTÈME D'ATTENTE AVEC RAPPELS ET

PRIORITÉ

Introduction

L'influence des phénomènes d'appels répétés dans les réseaux informatiques et téléphoniques, ainsi que les systèmes de télécommunication, a donné naissance aux modèles d'attente avec rappels. Dans ces systèmes un client qui trouve le serveur occupé, il quitte, temporairement, le système et renouvelle son appel au serveur autant de fois que nécessaire à des intervalles aléatoires, jusqu'à ce que le serveur soit disponible.

1.1 Systèmes d'attente avec rappels

La modélisation des tentatives répétées a été l'objet de nombreuses recherches portant sur l'influence du phénomène de rappel sur la qualité du service et l'analyse de la performance des systèmes avec rappels [3, 19].

1.1.1 Description d'un modèle d'attente avec rappels

Un système de files d'attente avec rappels contient un espace d'attente de s ($s \geq 1$) serveurs identiques et indépendants, d'un buffer de capacité $N - s$ ($N \geq s$) et d'une orbite de capacité M . Les clients arrivent dans le système selon un processus aléatoire avec une loi de probabilité donnée, et forment un flux d'appels primaires. À l'arrivée d'un client, s'il y a un ou plusieurs serveurs libres et en bon état, le client sera servi immédiatement et quittera le système à la fin de son service. Sinon, s'il y a des positions d'attente libres dans le buffer, le client le rejoindra. Par ailleurs, si un client arrive et trouve tous les serveurs et toutes les positions d'attente du buffer occupés, il quittera le système définitivement avec la probabilité $1 - H_0$ ou bien entre en orbite avec la probabilité H_0 et devient une source d'appels répétés et tentera sa chance après une durée de temps aléatoire.

Les clients qui reviendront et rappelleront pour le service sont dits en "orbite". Cette dernière peut être finie ou infinie. Dans le cas d'une orbite à capacité finie, si elle est pleine, un client qui trouve tous les serveurs et les positions d'attente du buffer occupés, sera obligé de quitter le système définitivement sans être servi.

Chaque client en orbite appelé aussi client secondaire, est supposé rappeler pour le service à des intervalles de temps suivant une loi de probabilité et une intensité de rappels bien définie (rappels constants, rappels classiques, ou bien rappels linéaires, ...). Chacun de ces clients secondaires est traité comme un client primaire, c'est-à-dire un nouveau client qui arrive de l'extérieur du système. S'il trouve un serveur libre, il sera servi immédiatement puis quittera le système. Sinon, s'il y a des positions d'attente disponibles dans le buffer, il le rejoindra. Par contre, si tous les serveurs et les positions d'attente sont encore occupés, le client quittera le système pour toujours avec la probabilité $1 - H_k$ (si c'est le $k^{\text{ème}}$ rappel sans succès) ou bien entre en orbite avec la probabilité H_k si l'orbite n'est pas pleine.

Le schéma général d'un système d'attente avec rappels est donné par la FIGURE 1.1.

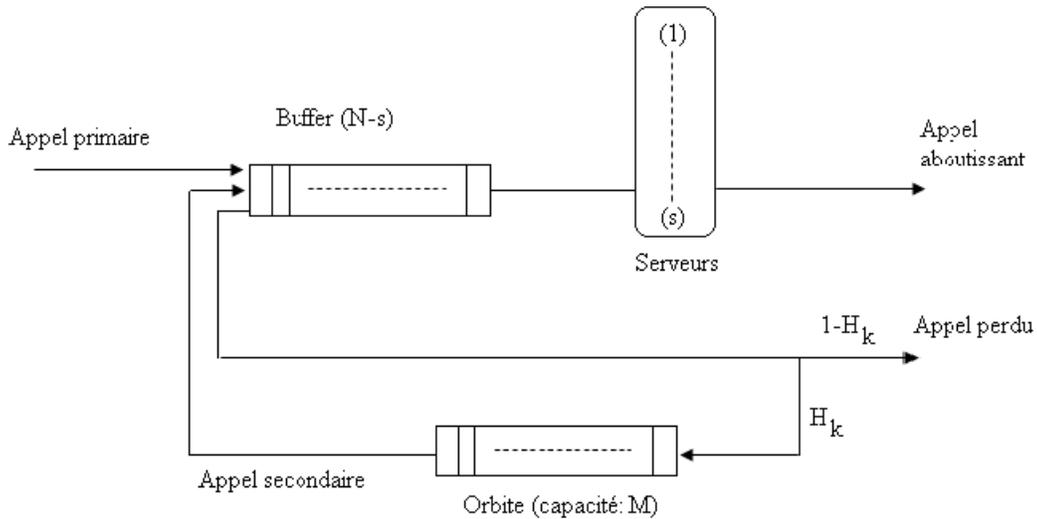


FIGURE 1.1 – Schéma illustratif d'un système d'attente avec rappels

Remarque 1.1.1

1. Le modèle d'attente avec rappels décrit ci-dessus est un modèle général. Plusieurs systèmes de files d'attente avec rappels peuvent être considérés comme des cas particuliers tels que : les systèmes sans buffer, les systèmes à un seul serveur, systèmes avec priorité, ...
2. Les systèmes de files d'attente avec rappels sont identifiés par la nature stochastique du processus des arrivées, la distribution du temps de service, le nombre de serveurs qui composent l'espace de service, la capacité et la discipline d'attente ainsi que la spécification concernant le processus de répétition d'appels.
3. Les appels primaires ou secondaires qui arrivent durant un temps de service, entrent en orbite sans aucune influence sur le processus de service.

Notation [34]

La notation de Kendall correspondante à ce type de système (avec rappels) est noté comme suit : $A/B/s/N/D/H$, où :

- A : représente la distribution des temps des inter-arrivées des clients.
- B : décrit la distribution du temps de service de chaque client.
- s : est le nombre de serveurs dans le système.
- N : est la capacité du système.
- D : est la taille de la population (source) de clients.
- H : est la fonction de persévérance qui permet de définir le comportement du client devant une situation de blocage (serveurs occupés).

H peut être décrite par un vecteur $H = (H_0, H_1, H_2, \dots, H_k, \dots)$, où H_k est la probabilité qu'après que la $k^{\text{ème}}$ tentative échoue, un abonné rappelle pour la $(k + 1)^{\text{ème}}$ fois.

Quand $H_k = 1$ pour $k \geq 0$, le système devient un système sans perte. Ainsi, chaque client reçoit éventuellement le service si M est infinie. Dans ce cas, $H = NL$ (sans perte).

Quand $H_k = \alpha < 1$ pour $k \geq 0$, le système est dit un système à perte géométrique et $H = GL$ (Geometric Loss).

1.1.2 Condition de stabilité d'un système de files d'attente avec rappels

Les files d'attente avec rappels se composent des clients primaires, des clients en orbite (clients secondaires) et d'un ou plusieurs serveurs.

On considère un système de files d'attente avec rappels dont lequel le flot des arrivées des clients primaires suit un processus de Poisson du taux λ et la durée de service est de moyenne $\frac{1}{\nu}$.

La condition de stabilité de système est donnée par :

$$\rho = \begin{cases} \frac{\lambda}{\nu} < 1, & \text{si la file est composée d'un seul serveur;} \\ \frac{\lambda}{s\nu} < 1, & \text{si la file est composée de } s \text{ serveurs.} \end{cases}$$

1.1.3 Politiques d'accès au serveur à partir de l'orbite

La définition du protocole de rappels est en effet un sujet de controverse (voir Falin (1990)[17]) et concerne l'aspect modélisation du système sous étude. Le protocole le plus décrit dans la théorie classique des files d'attente avec rappels est la politique de rappels classiques dans laquelle chaque source dans l'orbite rappelle après un temps exponentiellement distribué avec un paramètre α . Donc, il y a une probabilité $n\alpha dt + o(dt)$ d'un nouveau rappel dans le prochain intervalle $(t, t + dt)$ sachant que n clients sont en orbite à l'instant t . Une telle politique a été motivée par des applications dans la modélisation du comportement des abonnés dans les réseaux téléphoniques depuis les années 1940.

Dans les années précédentes, la technologie a considérablement évoluée. La littérature de files d'attente avec rappels décrit différents protocoles de rappels spécifiques à certains réseaux informatiques et de communication modernes dans lesquels le temps inter-rappels est contrôlé par un dispositif électronique et par conséquent, est indépendant du nombre d'unités demandant le service. Dans ce cas, la probabilité d'un rappel durant $(t, t + dt)$, sachant que l'orbite est non vide, est $\nu dt + o(dt)$. Ce type de discipline de rappels est appelé politique de rappels constants. Le premier travail dans cette direction est celui de Fayolle [20] qui considère une file d'attente $M/M/1$, où uniquement le client en tête de la file en orbite peut demander un service après un temps de rappels exponentiellement distribué avec un taux constant. Cette sorte de politique de contrôle de rappels est bien connue pour le protocole ALOHA dans les systèmes de communication. Certains autres travaux décrivent des applications aux réseaux locaux, protocole de communication, systèmes mobiles et autres (Choi (1992) [12], Dudin et al. (2004) [15], Li et Zhao (2005)

[24], Shikata (1999) [31]). Artalejo et Gomez-Corral (1997)[3] traitent les deux cas d'une manière unifiée en définissant une politique de rappels linéaires pour laquelle la probabilité d'un rappel durant $(t, t + dt)$ sachant que n clients sont en orbite à l'instant t est $(\nu(1 - \delta_{on}) + n\alpha)dt + o(dt)$. On mentionne aussi l'existence d'une autre politique dite politique de rappels quadratiques.

1.2 Quelques cas modélisés par des systèmes de files d'attente avec rappels

Il est bien connu que les files d'attente avec rappels à un seul type d'appels apparaissent naturellement comme des modèles pratiques dans la vie quotidienne et dans les réseaux de communication, par exemple, en faisant des réservations, des réseaux de commutation de paquets, des accès *CSMA* non persistants (accès multiple du transporteur) et des systèmes en temps réel [34]. Nous présentons quelques exemples de systèmes qui peuvent être modélisés comme une file d'attente avec rappel ayant deux types d'appels.

Exemple 1.2.1 (*Téléphone au restaurant*)

Considérons un téléphone dans un restaurant qui est utilisé à la fois pour accepter une commande à l'avance pour les réservations des clients à l'extérieur et d'effectuer des appels par les clients dans le restaurant. Les clients du restaurant attendent devant le téléphone dans une ligne pour effectuer un appel et utiliser le téléphone dès qu'il est libre.

Ce système peut être modélisé comme une file d'attente $M_1, M_2/G/1$ avec rappels dont les clients de l'extérieur sont considérés comme des appels de type *II* et les clients à l'intérieur comme des appels de type *I*.

Exemple 1.2.2 (*Modules de ligne d'abonné*)

Dans les échanges téléphoniques modernes, des lignes d'abonnés sont généralement connectés à ce qu'on appelle des modules de ligne d'abonné qui servent à la fois les appels entrants et sortants. Une différence importante entre ces deux types d'appels réside dans le cas de blocage dû à l'ensemble des canaux occupés, les appels sortants peuvent être en file d'attente dans le tampon infini, alors que les appels entrants sont rejetés et doivent s'engager pour rétablir la connexion. Dès que l'un des canaux est libre, le cas échéant dans le tampon, un appel sortant l'occupe immédiatement. Ainsi, les appels entrants ne peuvent pas établir la connexion aussi longtemps qu'il y'a des appels sortants dans le tampon. Cette règle implique que les appels sortants sont prioritaires par rapport au appels entrants.

Ce système peut être modélisé comme une file d'attente avec rappels et priorité à deux types d'appels où le type I sont les appels entrant et le type II sont les appels sortant.

Exemple 1.2.3 (*Réseaux locaux CSMA*)

Dans les réseaux locaux se partageant un bus unique (LAN), l'un des protocoles de communication communément utilisés est le protocole *CSMA*.

Il existe plusieurs versions de *CSMA* dont on pourra citer *CSMA* non persistant et *CSMA* persistant. En *CSMA* non persistant, si l'utilisateur a un paquet à transmettre et trouve le canal occupé, alors il réessaie la transmission après une période du temps aléatoire. En *CSMA* persistant, l'utilisateur qui détecte le canal et estime qu'il est occupé, continu d'attendre et transmet dès que le canal est inactif, de sorte que le canal est toujours utilisé s'il y'a un utilisateur avec un paquet. Supposons qu'un réseau dispose de deux types d'utilisateurs (utilisateurs non persistants et utilisateurs persistants) relié par un bus unique (ou canal).

La communication entre les utilisateurs est réalisée par le bus. Les utilisateurs persistants sont contrôlés par le système central de sorte que, dès que le canal est inactif, le système central permet à un utilisateur persistant d'occuper le canal de commande, pour

envoyer un message s'il n'y a aucun utilisateur persistant avec un paquet. L'utilisateur non persistant avec un paquet réessaye la transmission indépendamment après un certain temps aléatoire.

Ce système peut être modélisé comme une file d'attente $M_1, M_2/G/1$ avec rappels et priorité, le serveur correspond au canal, les utilisateurs persistants dans le système central sont considérés comme des appels de type I et les utilisateurs non persistants dans le système non central sont considérés comme des appels de type II .

Exemple 1.2.4 (*Télécopieur*)

Un télécopieur est utilisé uniquement pour la réception de fax et d'appel ordinaire. Le temps d'utilisation d'un fax est habituellement plus court que d'un appel ordinaire. Il existe deux groupes avec rappels dans lesquels un groupe avec rappel se compose de clients bloqués (considérés comme des appels de type I) voulant envoyer un message par fax et l'autre groupe avec rappels se compose de clients bloqués (considérés comme appels de type II) pour faire un appel.

Lorsque ce télécopieur est occupé, n'importe qui veut envoyer un message par fax ou pour réessayer un appel ordinaire après un certain nombre de fois. Ce système peut être modélisé comme une file d'attente $M_1, M_2/G_1, G_2/1/1$ avec rappels avec différents temps de service, différents temps de rappel, deux groupes de rappel et aucune priorité.

1.3 Quelques modèles d'attente avec rappels et priorité

1.3.1 File d'attente $M_1, M_2/G/1$ avec rappels et priorité

Dans ce type de modèle, il est assez naturel de envisager une file d'attente avec rappels à deux types d'appels où, une fois bloqué, les appels de type I sont en attente et vont être

servis dès que le serveur soit libre, et les appels de type II entrent en orbite pour retenter leur chance, de sorte que les appels de type I ont la priorité sur les appels de type II . Les files d'attente avec rappels avec deux types d'appels sont essentiellement plus difficiles que les files d'attente avec rappels à un seul type d'appels [34]. **Ergodicité** Choi et Park [11] ont montré que : $\rho = \rho_1 + \rho_2 < 1$ est la condition de stabilité d'une file $M_1, M_2/G/1$ avec rappels.

Distribution du nombre de clients dans les deux files

Choi et Park [11] ont obtenu la distribution stationnaire des longueurs des deux files en utilisant la méthode des variables supplémentaires qui correspond au temps de service restant d'un appel en service.

Soient :

- $N_1(t)$: est le nombre d'appels de type I en file d'attente prioritaire (sauf l'appel en service) à l'instant t ,
- $N_2(t)$: est le nombre d'appels de type II dans l'orbite à l'instant t ,

$$C(t) = \begin{cases} 0, & \text{si le serveur est libre à l'instant } t; \\ 1, & \text{si le serveur est occupé par un appel de type } I \text{ à l'instant } t; \\ 2, & \text{si le serveur est occupé par un appel de type } II \text{ à l'instant } t. \end{cases}$$

On a :

- λ_1 : taux d'arrivée d'appel du type I ;
 - λ_2 : taux d'arrivée d'appel du type II ;
 - ν : taux de rappel ;
 - λ : taux d'arrivée total ;
 - ρ_1, ρ_2 : l'intensité de trafic.
-

Le nombre moyen d'appels de type I dans la file d'attente prioritaire est :

$$E[N_1] = \frac{\lambda_1 \lambda \beta^2}{2(1 - \rho_1)}. \quad (1.1)$$

Le nombre moyen d'appels de type II en orbite :

$$E[N_2] = \frac{\lambda_2 \lambda \beta^2}{2(1 - \rho_1)(1 - \rho)} + \frac{\lambda_2}{\nu} \frac{\rho}{1 - \rho}. \quad (1.2)$$

Cas particuliers :

1. Lorsque $\lambda_1 = 0$, ce modèle devient la file d'attente $M/G/1$ avec rappels à un seul type d'appels.
2. Lorsque $\lambda_2 = 0$, ce modèle devient alors la file d'attente ordinaire $M/G/1$.

1.3.2 File d'attente $M_1, M_2/G_1, G_2/1$ avec rappels

Falin et al. [18] ont étendu le modèle de Choi et Park [17] au modèle où les deux types d'appels ont des temps de service différents. Ils ont utilisé la méthode de la variable supplémentaire (la variable supplémentaire est le temps de service écoulé). Ils ont obtenu les mesures de performance suivantes pour ce système [34] :

1. Probabilité que le serveur est utilisé par un type d'appel I (resp. type II) est ρ_1 (resp. ρ_2).
2. Le nombre moyen d'appels de type I dans la file d'attente prioritaire est :

$$E[N_1] = \frac{\lambda_1(\lambda_1 \beta_1^2 + \lambda_2 \beta_2^2)}{2(1 - \rho_1)}. \quad (1.3)$$

3. Le nombre moyen d'appels de type II en orbite :

$$E[N_2] = \frac{\lambda_2(\lambda_1 \beta_1^2 + \lambda_2 \beta_2^2)}{2(1 - \rho_1)(1 - \rho_2)} + \frac{\lambda_2 \rho_2}{\nu(1 - \rho_2)}. \quad (1.4)$$

1.3.3 Files d'attente $M_1, M_2/G_1, G_2/1$ avec rappels et priorité absolue

Boutarfa et Djellab [9] ont analysé une file d'attente $M_1, M_2/G_1, G_2/1$ avec rappels et priorité absolue à un seul serveur, auquel deux types différents de clients primaires (les clients prioritaires et non prioritaire) arrivent selon des processus de Poisson indépendants de taux λ_1 et λ_2 , respectivement. Le comportement d'un client, qui trouve à son arrivée le serveur occupé, dépend de son type de priorité. S'il est prioritaire, il prend place dans la file d'attente, s'il est non prioritaire, il entre en orbite et devient un client secondaire selon une distribution exponentielle de paramètre μ . Les clients en orbite peuvent être servis lorsque le serveur est vide. On a :

- λ_1 : Taux d'arrivées des clients de type I ;
- λ_2 : Taux d'arrivées des clients de type II ;
- $\beta_{1,2}$: L'intensité instantané du service des clients de type I ;
- $\beta_{2,2}$: L'intensité instantané du service des clients de type II ;
- ρ_1, ρ_2 : l'intensité de trafic.

Distribution du nombre de clients dans les deux files

Soient :

– $N_1(t)$: Le nombre de clients de type I dans la file d'attente à l'instant t .

– $N_2(t)$: Le nombre de clients de type II dans l'orbite à l'instant t .

– $C(t)$: La variable aléatoire indiquant l'état du serveur à l'instant t .

$$C(t) = \begin{cases} 0, & \text{si le serveur est libre ;} \\ 1, & \text{si le serveur est occupé à l'instant } t \text{ par un appel de type } I ; \\ 2, & \text{si le serveur est occupé à l'instant } t \text{ par un appel de type } II. \end{cases}$$

– Le nombre moyen de clients de type I dans le système est :

$$E[N_1(t)] = \frac{\lambda_1(\lambda_1\beta_{1,2} + \lambda_2\beta_{2,2})}{2(1 - \rho_1)}.$$

– Le nombre moyen de clients de type II dans le système est donnée par :

$$E[N_2(t)] = \frac{\lambda_2(\lambda_1\beta_{1,2} + \lambda_2\beta_{2,2})}{2(1 - \rho_1)(1 - \rho_1 - \rho_2)} + \frac{\lambda_2(\rho_1 + \rho_2)}{\mu(1 - \rho_1 - \rho_2)}.$$

– Temps moyen d'attente W_i d'un client de type $i = 1, 2$ sont :

$$W_1 = \frac{(\lambda_1\beta_{1,2} + \lambda_2\beta_{2,2})}{2(1 - \rho_1)}.$$

$$W_2 = \frac{(\lambda_1\beta_{1,2} + \lambda_2\beta_{2,2})}{2(1 - \rho_1)(1 - \rho_1 - \rho_2)} + \frac{(\rho_1 + \rho_2)}{\mu(1 - \rho_1 - \rho_2)}.$$

– La probabilité que le serveur est occupé est $P[C(t) = 1] = \rho_1 + \rho_2$.

Conclusion

Ce chapitre montre les difficultés d'analyse des systèmes de files d'attente avec rappels. En raison de la complexité des résultats analytiques obtenus, différents auteurs ont tenté de développer des méthodes approximatives d'analyse des phénomènes de répétition d'appels. Parmi les principales approches, on trouve les méthodes de comparaison stochastiques, qui conduisent à des estimations qualitatives pour certaines mesures de performances, en utilisant la théorie des ordres stochastiques qui est bien détaillée dans le chapitre suivant.

CHAPITRE 2

GÉNÉRALITÉS SUR LA THÉORIE DES INÉGALITÉS STOCHASTIQUES

Introduction

Les ordres stochastiques sont de plus en plus utilisés dans plusieurs domaines de recherche bien établi, qui est toujours en développement intensif et qui offre plusieurs problèmes ouverts. Ils mènent à des méthodes d'approximation robustes et des bornes dans des situations où les modèles stochastiques réels sont trop complexes pour un traitement rigoureux. Le but de la recherche mathématique est alors de trouver des ordres bien adaptés qui mènent à des bornes raffinées (closed bound) et de bonnes approximations. Les ordres stochastiques sont aussi utiles dans des situations où les distributions fondamentales d'un modèle sont seulement connues partiellement.

Dans ce chapitre nous avons présenté plusieurs théorèmes, résultats, propriétés, corollaires et définitions qui sont à l'origine de l'article de D. Stoyan [32].

2.1 Propriétés générales des ordres partiels

On appelle un ordre partiel, noté " \prec ", une relation binaire définie sur un ensemble \mathcal{D} d'éléments a, b, c, \dots , satisfaisant les trois axiomes :

1. $a \prec a$ (réflexivité),
2. si $a \prec b$ et $b \prec c$ alors $a \prec c$ (transitivité),
3. si $a \prec b$ et $b \prec a$ alors $a = b$ (antisymétrie).

Notons que $a \prec b$ est équivalent à dire que $b \succ a$.

Cette section est consacrée à quelques propriétés de l'ordre partiel défini sur l'ensemble \mathcal{D} de toutes les fonctions de répartition de variables aléatoires réelles (ou bien l'un de ses sous-ensembles).

Pour les deux variables aléatoires X et Y de fonctions de répartition F et G (respectivement) on a par convention :

$$F \prec G \Leftrightarrow X \prec Y.$$

On suppose que deux variables aléatoires X et Y sont définies sur le même espace de probabilité, alors leurs fonctions de répartition respectives F et G peuvent satisfaire la propriété d'antisymétrie (3) sans pour autant avoir $X = Y$.

Lorsque les variables aléatoires sont dégénérées, certaines propriétés des ordres partiels définies sur \mathcal{D} découlent directement des propriétés de l'ordre des nombres réels. Pour cela, on utilisera la distribution de Dirac, notée par $\Theta_c(\cdot)$, définie pour tous les nombres réels comme suit :

$$\Theta_c(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < c, \\ 1, & \text{si } x \geq c. \end{cases}$$

Définition 2.1.1

Soit un ordre partiel donné " \prec " défini sur (un sous ensemble de) l'espace \mathcal{D} des fonctions de répartition.

On dit que cet ordre possède la propriété :

- **(R)** : si $\forall a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$, alors $\Theta_a \prec \Theta_b$.
- **(E)** : si $F \prec G$, alors $m_F \leq m_G$ lorsque les moyennes existent.
- **(M)** : si $F \prec G$, alors $F^c \prec G^c$, $\forall c > 0$, où $F^c(x) = F(x/c)$, $\forall x$.
- **(C)** : si $F_1 \prec F_2$ alors $F_1 * G \prec F_2 * G$, où $(F_i * G)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_i(x-y)dG(y)$, $i = 1, 2$.
- **(W)** : si F_n et G_n convergent faiblement vers F et G (respectivement) alors :

$$\forall n, F_n \prec G_n \Rightarrow F \prec G.$$

Remarque 2.1.1

Pour les deux variables aléatoires X et Y :

La propriété (M) assure que :

$$X \prec Y \Leftrightarrow cX \prec cY \text{ pour tout } c \in]0, +\infty[.$$

La propriété (C) assure que :

$$X_1 \prec X_2 \Rightarrow X_1 + Y \prec X_2 + Y,$$

où Y est une variable aléatoire indépendante de X_1 et X_2 .

La propriété (E) assure que :

$$X \prec Y \Rightarrow E(X) \leq E(Y).$$

On remarque que la propriété (E) découle des autres propriétés.

Proposition 2.1.1

Un ordre partiel \prec sur un ensemble (ou bien sur un sous ensemble de) \mathcal{D} qui vérifie les propriétés (R), (M), (C) et (W), vérifie aussi la propriété (E).

Définition 2.1.2

Pour une classe de fonctions réelles $\mathfrak{S}_<$, l'ordre partiel \prec défini sur l'ensemble (ou sur le sous ensemble de) \mathcal{D} est dit généré par $\mathfrak{S}_<$ si :

$$F \prec G \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dF(x) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dG(x),$$

pour toute fonction f dans $\mathfrak{S}_<$, telle que les intégrales existent.

2.1.1 Ordre stochastique

Définition 2.1.3

On dit que la variable aléatoire X de fonction de répartition F , est stochastiquement inférieure (ou bien inférieure en distribution) à la variable aléatoire Y de fonction de répartition G , et on note $F \leq_{st} G$, lorsque

$$F(x) \geq G(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

On écrit aussi $X \leq_{st} Y$ (\leq_{st} noté aussi par l'ordre \leq_d).

Dans le cas où X et Y sont des variables aléatoires discrètes prenant des valeurs sur l'ensemble des entiers relatifs \mathbb{Z} , et en notant par $P_i^{(1)} = P\{X = i\}$ et $P_i^{(2)} = P\{Y = i\}$

pour $i \in \mathbb{Z}$, alors

$$X \leq_{st} Y \Leftrightarrow \sum_{j=-\infty}^i P_j^{(1)} \geq \sum_{j=-\infty}^i P_j^{(2)}, \quad i \in \mathbb{Z},$$

ce qui est équivalent à :

$$\sum_{j=i}^{+\infty} P_j^{(1)} \leq \sum_{j=i}^{+\infty} P_j^{(2)}, \quad i \in \mathbb{Z}.$$

Remarquons que l'ordre stochastique \leq_{st} satisfait les axiomes de l'ordre partiel \prec .

Proposition 2.1.2

Si $F_1 \leq_{st} F_2$, alors il existe deux variables aléatoires X_1 et X_2 définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ pour lesquelles

$$X_1(\omega) \leq X_2(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega,$$

et

$$P(\omega : X_k(\omega) \leq x) = F_k(x) \text{ pour } k = 1, 2.$$

Notons par $\mathfrak{R}_{st}(\mathbb{R})$ la classe des fonctions réelles non décroissantes, alors la classe $\mathbb{R}_{\leq_{st}}$ des fonctions \leq -monotones est confondue avec la classe $\mathfrak{R}_{st}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire $\mathbb{R}_{\leq_{st}} = \mathfrak{R}_{st}(\mathbb{R})$.

Théorème 2.1.1

L'inégalité

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dF_1(t) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dF_2(t), \quad (2.1)$$

est vérifiée pour toute fonction f appartenant à $\mathfrak{R}_{st}(\mathbb{R})$ pour laquelle l'intégrale existe, si et seulement si $F_1 \leq_{st} F_2$. Pour une fonction f donnée, l'inégalité (2.1) est vérifiée pour tout F_1 et F_2 telles que $F_1 \leq_{st} F_2$ uniquement si f est non décroissante.

2.1.2 Ordre convexe

On note par : $x_+ = \max(0, x)$.

Définition 2.1.4

On dit que la variable aléatoire X , de fonction de répartition F , est inférieure en moyenne de vie résiduelle à la variable aléatoire Y , de fonction de répartition G , et on écrit $X \leq_v Y$, ou bien $F \leq_v G$ si et seulement si :

$$\begin{aligned} E((X - x)_+) &= \int_x^{+\infty} (t - x) dF(t) = \int_x^{+\infty} (1 - F(t)) dt \\ &\leq \int_x^{+\infty} (1 - G(t)) dt = E((Y - x)_+), \end{aligned} \quad (2.2)$$

lorsque les espérances (ou bien les intégrales) sont bien définies.

Dans le cas discret, on a :

$$X \leq_v Y \Leftrightarrow \sum_{i=k}^{\infty} \sum_{j=i}^{\infty} P_j^{(1)} \leq \sum_{i=k}^{\infty} \sum_{j=i}^{\infty} P_j^{(2)}.$$

Une conséquence immédiate de cette définition :

$$\text{si } F \leq_{st} G \text{ et } E(Y_+) < \infty \text{ alors } F \leq_v G.$$

Théorème 2.1.2 [8]

1. L'inégalité

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dF_1(t) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dF_2(t), \quad (2.3)$$

est vérifiée pour toute fonction f appartenant à $\mathfrak{R}_v(\mathbb{R})$ pour laquelle les intégrales sont bien définies, si et seulement si $F_1 \leq_v F_2$.

2. Pour une fonction donnée f , l'inégalité (2.3) a lieu pour toutes les fonctions F_1 et F_2 telles que $F_1 \leq_v F_2$ uniquement si f est une fonction convexe et non décroissante.
3. Si $F_1 \leq_v F_2$ et leurs moyennes existent et sont égales, alors l'inégalité (2.3) est vérifiée pour toute fonction convexe f donnée.

Pour deux variables aléatoires X et Y non négatives telles que $X \leq_v Y$ on a

$$E(X^r) \leq E(Y^r), \quad (r \geq 1),$$

lorsque les espérances existent.

En général, pour des variables aléatoires X et Y telles que

$$E(X) = E(Y), \quad \text{et } X \leq_v Y,$$

alors,

$$E(X^r) \leq E(Y^r), \quad (r = 2, 4, 6, \dots).$$

Il est intéressant de remarquer que pour deux variables aléatoires telles que X et Y sont non négatives et $X \leq_v Y$, alors l'égalité $E(X^r) = E(Y^r)$ pour tout $r \geq 1$ implique l'égalité $X =_{st} Y$.

En effet

$$E(X^r) = \int_0^{+\infty} r x^{r-1} (1 - F(x)) dx = \int_0^{+\infty} r(r-1) x^{r-2} dx \int_x^{+\infty} (1 - F(y)) dy.$$

Cette propriété est l'analogie de la propriété suivante pour l'ordre stochastique

$$X \leq_{st} Y \text{ et } E(X) = E(Y) \Rightarrow X =_{st} Y.$$

Proposition 2.1.3

Supposons que les suites de variables aléatoires X_n et Y_n convergent faiblement vers X et Y (respectivement).

Si

$$E(X_+) \text{ et } E(Y_+) \text{ sont finis,}$$

$$E((X_n)_+) \longrightarrow E(X_+) \text{ quand } n \longrightarrow +\infty,$$

$$E((Y_n)_+) \longrightarrow E(Y_+) \text{ quand } n \longrightarrow +\infty,$$

et si $X_n \leq_v Y_n$, alors

$$X \leq_v Y.$$

2.1.3 Ordre en transformée de Laplace

Transformée de Laplace

Lorsque la variable aléatoire X est du type continu, sa distribution peut être caractérisée par la transformée de Laplace de la densité $f(x)$:

$$\hat{f}(s) = E(e^{-sX}) = \int_0^{+\infty} f(x) e^{-sx} dx,$$

où s est une variable complexe. Cette intégrale est définie au moins pour $Re(s) \geq 0$. La transformée de Laplace est notée aussi $L[f(x)]$.

Propriétés

- Si X et Y sont indépendantes, la transformée de Laplace de $X + Y$ est le produit des transformées de Laplace de X et de Y ,
- $L[f'(x)] = s\hat{f}(s) - f(0)$,
- $L[f''(x)] = s^2\hat{f}(s) - sf(0) - f'(0)$,
- $L[\int_0^x f(u)du] = \frac{\hat{f}(s)}{s}$,
- Si $F(x)$ est la fonction de répartition de X et si $R(x) = 1 - F(x)$ alors

$$\lim_{s \rightarrow 0} \hat{R}(s) = \int_0^{\infty} R(x)dx.$$

Définition 2.1.5

Pour deux variables aléatoires non négatives X et Y de fonctions de répartition F et G (respectivement), F est dite inférieure par rapport à l'ordre laplacien à G , et on note $F \leq_L G$, si pour tout s positif on a l'inégalité suivante

$$E(\exp(-sX)) = \int_0^{+\infty} \exp(-sX)dF(x) \geq \int_0^{+\infty} \exp(-sX)dG(x) = E(\exp(-sY)).$$

Il est clair que l'ordre en transformée de Laplace est réflexif, transitif et antisymétrique.

Théorème 2.1.3

Soit une fonction f strictement monotone, alors $F \leq_L G$ implique

$$\int_0^{+\infty} f(t)dF(t) \leq \int_0^{+\infty} f(t)dG(t).$$

1. Pour deux variables aléatoires X et Y non négatives, de fonctions de répartition F et G respectivement, telles que $F \leq_L G$ alors, on a l'inégalité suivante :

$$\frac{1 - E(\exp(-sX))}{s} \leq \frac{1 - E(\exp(-sY))}{s}, \quad \forall s > 0.$$

2. Lorsqu'on fait tendre s vers 0, on obtient le résultat suivant :

$$F \leq_L G \Rightarrow E(X) \leq E(Y),$$

lorsque les espérances existent.

Le résultat qui suit donne une caractérisation de l'ordre en transformée de Laplace.

Théorème 2.1.4

Soient X et Y deux variables aléatoires quelconques de fonctions de répartition F et G respectivement, alors :

$$F \leq_L G \Leftrightarrow E(f(X)) \leq E(f(Y)),$$

pour toute fonction f strictement monotone, telle que les espérances existent.

2.1.4 Ordre en fonctions génératrices

Soient X et Y deux variables aléatoires non négatives discrètes de fonctions de répartition F et G respectivement. On dit que X est inférieure à Y par rapport à l'ordre en fonctions génératrices, et on note $F \leq_g G$, si et seulement si :

$$E(z^X) \geq E(z^Y),$$

où,

$$E(z^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)z^n \text{ et } E(z^Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(Y = n)z^n, |z| < 1.$$

Cet ordre peut-être déduit de l'ordre laplacien en posant $s = -\ln z$.

2.1.5 Relations entre les ordres partiels

Soient X et Y deux variables aléatoires de fonctions de répartition F et G respectivement.

Alors, on a les relations suivantes :

- Si $F \leq_{st} G$ et $E(Y_+) < \infty \Rightarrow F \leq_v G$.
- Si $E(X) = E(\max(0, -x)) < \infty \Rightarrow F \leq_{cv} G$.
- Si $E(X) = E(Y)$, alors $F \leq_{cv} G \Leftrightarrow G \leq_v F$.
- $F \leq_{st} G \Rightarrow F \leq_L G \Rightarrow F \leq_g G$.
- $F \leq_{cv} G \Rightarrow F \leq_L G \Rightarrow F \leq_g G$.
- Si $E(X) = E(Y)$, et $F \leq_v G \Rightarrow G \leq_L F \Rightarrow G \leq_g F$.
- $F \leq_L G \Rightarrow F \leq_g G$.

2.1.6 Propriétés de monotonie

Etudier mathématiquement les modèles stochastiques, c'est d'obtenir des estimations des quantités qui, pour un modèle Σ donné, avec une structure spécifique et des distributions F_i des X_i, \dots , décrivent son comportement.

Soit c_Σ une caractéristique dans Σ et soit C_Σ l'ensemble des valeurs possibles de c_Σ .

Pour une structure donnée et une distribution initiale U , c_Σ dépend uniquement des F_i , et on écrit

$$c_\Sigma = c_\Sigma(F_1, F_2, \dots) \in C_\Sigma.$$

Pour des modèles simples, on peut déduire une expression explicite de c_Σ . Cependant,

dans plusieurs situations, cela n'est pas possible et les calculs mathématiques peuvent mener à des formules compliquées qui ne peuvent pas être exploitées en pratique.

De telles circonstances nous suggèrent de rechercher les propriétés qualitatives de c_Σ par rapport aux F_i , i.e, la manière avec laquelle c_Σ est affectée par les changements en F_i . Parmi les propriétés qualitatives importantes des modèles stochastiques on trouve la monotonie (i.e, si les F_i croissent dans un certain sens, alors c_Σ croît aussi).

Monotonie interne :

Soit Σ un modèle stochastique constitué de distributions paramétriques $(U, F_1, F_2, \dots) \equiv (U, F)$, où U est la distribution initiale.

On note par c_Σ les indices de performance du système Σ .

Par exemple, pour un système de files d'attente Σ , c_Σ peut-être le temps moyen d'attente virtuel à l'instant t , ou la distribution de probabilité du nombre de clients dans le système à l'instant t , ou bien ses mesures de performance seront calculées à une suite d'instant $(t_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ (déterministe ou aléatoire).

D'une manière plus précise on peut exprimer c_Σ comme suit :

$$c_\Sigma(t) = c_\Sigma(t, U, \{F_i\}), \text{ ou bien}$$

$$c_\Sigma(t_n) = c_\Sigma(n) = c_\Sigma(n, U, \{F_i\}),$$

On note par \prec l'ordre partiel défini sur C_Σ .

Définition 2.1.6

L'indice de performance $c_\Sigma(\cdot)$ est non décroissant (resp. non croissant) par rapport à la distribution initiale U si pour tout $t < u$, on a :

$$t < u \Rightarrow c_\Sigma(t) \prec c_\Sigma(u) \text{ (resp. } c_\Sigma(t) \succ c_\Sigma(u)), \quad (2.4)$$

ou bien pour les entiers $m < n$:

$$m < n \Rightarrow c_{\Sigma}(m) \prec c_{\Sigma}(n) \text{ (resp. } c_{\Sigma}(m) \succ c_{\Sigma}(n)),$$

Cette propriété est appelée monotonie interne. D'autres appellations sont utilisées telles que, monotonie temporelle ou intrinsèque. Celles-ci d'écoulent du fait que cette monotonie ne dépend en aucun cas des distributions paramétriques $\{F_i\}$, mais seulement peut-être de la distribution initiale.

Monotonie externe :

On note par \mathcal{D}_k l'ensemble des distributions F_k partiellement ordonnées par l'ordre " $<_k$ " (qui est l'ordre de la $k^{\text{ème}}$ distribution paramétrique), et soit " $<_c$ " l'ordre partiel défini sur C_{Σ} .

Définition 2.1.7

L'indice de performance c_{Σ} est non décroissant sur \mathcal{D}_k par rapport à l'ordre $<_k$ si pour tout F et G dans \mathcal{D}_k et toute autre distribution paramétrique constante, on a :

$$F <_k G \Rightarrow c_{\Sigma}(F_1, \dots, F_{k-1}, F, F_{k+1}, \dots) <_c (F_1, \dots, F_{k-1}, G, F_{k+1}, \dots),$$

Cette propriété est appelée monotonie externe.

Lorsqu'un système possède la propriété de monotonie externe, les indices de performance des modèles stochastiques, possédant la même structure avec des distributions paramétriques comparables mais différentes, sont comparables.

On peut interpréter la monotonie externe comme suit :

Soient Σ_1 et Σ_2 deux modèles stochastiques ayant la même structure et la même distribu-

tion initiale. On dira que ces modèles possèdent la propriété de monotonie externe lorsque pour deux distributions paramétriques F et G dans Σ_1 et Σ_2 respectivement, on a :

$$F \prec G \Rightarrow c_{\Sigma}(F) <_c c_{\Sigma}(G),$$

pour l'indice de performance c_{Σ} .

La monotonie externe est un outil d'une grande importance dans la construction des bornes pour les mesures de performance d'un système donné. Ainsi, la distribution paramétrique F_k peut être bornée par les distributions G_1 et G_2 appartenant à l'ensemble \mathcal{D}_k pour lesquelles :

$$G_1 <_k F_k <_k G_2,$$

alors pour les mesures de performance correspondantes, on obtient :

$$c_{\Sigma}(G_1) <_k c_{\Sigma}(F) <_k c_{\Sigma}(G_2),$$

lorsque les systèmes ont la propriété de la monotonie externe.

2.2 Comparabilité et monotonie des processus markoviens homogènes

2.2.1 Opérateurs monotones et comparables

Soient \mathbb{E}, \mathbb{M} un espace probabilisable et $P_{\mathbb{M}}$ l'ensemble de toutes les mesures de probabilité définies sur \mathbb{M} . Soient aussi les opérateurs \mathcal{T} , $\mathcal{T}^{(1)}$ et $\mathcal{T}^{(2)}$ définis de $P_{\mathbb{M}}$ dans $P_{\mathbb{M}}$ et l'ordre partiel " \preceq " défini sur $P_{\mathbb{M}}$.

Définition 2.2.1

Un opérateur \mathcal{T} est dit \prec -monotone si pour toutes mesures de probabilités $p^{(1)}, p^{(2)}$ appartenant à $P_{\mathbb{M}}$ telles que $p^{(1)} \prec p^{(2)}$, on a

$$\mathcal{T}p^{(1)} \prec \mathcal{T}p^{(2)}.$$

L'opérateur $\mathcal{T}^{(1)}$ est inférieur à $\mathcal{T}^{(2)}$ si $\mathcal{T}^{(1)}p \prec \mathcal{T}^{(2)}p$ pour tout $p \in P_{\mathbb{M}}$ et on écrit,

$$\mathcal{T}^{(1)} \prec \mathcal{T}^{(2)}.$$

Pour des applications aux processus de Markov homogènes, on s'intéresse à la comparabilité des distributions $p_n^{(1)}$ et $p_n^{(2)}$ définies par

$$p_n^{(k)} = (\mathcal{T}^{(k)}p^{(k)})_n, \quad k = 1, 2 \text{ et } n \in \mathbb{N}^*,$$

pour deux distributions initiales $p^{(k)}$ et les opérateurs $\mathcal{T}^{(k)}$, pour $k = 1, 2$.

Théorème 2.2.1

Soient $\mathcal{T}^{(1)}, \mathcal{T}^{(2)}$ deux opérateurs définis sur $P_{\mathbb{M}}$ et $p^{(1)}, p^{(2)}$ deux mesures de probabilité définies sur \mathbb{M} , alors

$$p^{(1)} \prec p^{(2)} \text{ implique } p_n^{(1)} \prec p_n^{(2)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

s'il existe un opérateur \mathcal{T} \prec -monotone défini sur $P_{\mathbb{M}}$ tel que

$$\mathcal{T}^{(1)} \prec \mathcal{T} \prec \mathcal{T}^{(2)}.$$

Remarquons que ce théorème reste vrai, en général, pour les opérateurs définis dans un espace partiellement ordonné.

À présent, on considère les opérateurs de transition d'une chaîne de Markov homogène $(X_n)_{n \geq 1}$ d'espace d'état (\mathbb{E}, \mathbb{M}) . Les opérateurs de transition sont décrits par leurs fonctions de transition $p(x, \mathcal{B})$,

$$p(x, \mathcal{B}) = P(X_{n+1} \in \mathcal{B} / X_n = x), \quad x \in \mathbb{E} \text{ et } \mathcal{B} \in \mathbb{M},$$

ou bien, dans le cas où les processus sont à valeurs réelles, par leurs distributions de transition

$$p(x, y) = P(X_{n+1} < y / X_n = x), \quad x, y \in \mathbb{E} \subseteq \mathbb{R}.$$

Maintenant, on donne des conditions sur les fonctions de transition, qui assurent la monotonie ou la comparabilité des opérateurs de transition.

Théorème 2.2.2

Les opérateurs de transition $\mathcal{T}^{(1)}$ et $\mathcal{T}^{(2)}$ satisfont l'inégalité $\mathcal{T}^{(1)} \prec \mathcal{T}^{(2)}$ si et seulement si leurs fonctions $p^{(1)}$ et $p^{(2)}$ satisfont

$$p^{(1)}(x, \cdot) \prec p^{(2)}(x, \cdot), \quad \forall x \in \mathbb{E}.$$

2.2.2 Conditions de monotonie et de comparabilité

Pour l'étude de la monotonie et de la comparabilité des chaînes de Markov homogènes, on peut énoncer les deux théorèmes suivants qui constituent un outil important pour prouver la monotonie interne et/ou externe de ces modèles stochastiques.

Théorème 2.2.3

Une chaîne de Markov homogène $(X_n)_{n \geq 1}$, de fonction de transition p , est non décroissante (resp. non croissante) par rapport à l'ordre partiel " \prec " si :

$$X_1 \prec X_2 \quad (\text{resp. } X_2 \prec X_1),$$

et si p est \prec -monotone.

Théorème 2.2.4

Deux chaînes de Markov homogènes $(X_n)_{n \geq 1}$ et $(Y_n)_{n \geq 1}$, de fonctions de transition $p^{(1)}$ et $p^{(2)}$ respectivement, satisfont l'inégalité :

$$X_n \prec Y_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

si $X_1 \prec X_2$ et s'il existe une fonction de transition p \prec -monotone telle que :

$$p^{(1)}(x, \cdot) \prec p(x, \cdot) \prec p^{(2)}(x, \cdot), \quad \forall x \in \mathbb{E}.$$

2.3 Distributions non-paramétriques

Les notions de vieillissement et de relations d'ordre entre variables aléatoires sont étroitement liées. Nous présentons les principaux ordres permettant de comparer des variables aléatoires puis les notions de vieillissement. Cette présentation sera cependant partielle car l'activité scientifique sur ces sujets est importante. Il est donc difficile de prétendre faire un exposé exhaustif. L'un des états de l'art les plus récents sur ce sujet est [1, 22], mais on peut citer aussi [21, 30, 33].

En théorie de fiabilité, les classes de distributions nous renseignent sur la notion de jeunesse ou de vieillesse du système du point de vue de sa durée de vie résiduelle connaissant

son âge (propriété qualitative). La connaissance de la classe (d'âge) de la loi de fiabilité d'un équipement permet une aide à la décision.

Dans cette section, sont présentées aussi les principales classes de distributions de survie recensées dans la littérature de fiabilité ces dernières années.

Les distributions non-paramétriques ont été introduites pour l'étude de certains problèmes en relation avec la théorie de fiabilité. Elles permettent ainsi de modéliser et caractériser des propriétés qualitatives telles que le vieillissement et le rajeunissement du système.

Ces distributions sont utilisées actuellement dans divers domaines de la modélisation stochastique : analyse de survie (médecine), files d'attente, ordonnancement, théorie de décision, économie, gestion des stocks [26].

Définition 2.3.1

Soient X et X_τ des variables aléatoires représentant respectivement la durée de vie et la durée de vie résiduelle d'un élément, et soient F et F_τ leurs distributions respectives. On dit que F est :

- *NBU* (New Better than Used), si $F_\tau \leq_{st} F$, ($0 < \tau < \infty$).
 - *NWU* (New Worse than Used), si $F \leq_{st} F_\tau$, ($0 < \tau < \infty$).
 - *NBUE* (New Better than Used in Expectation), si $E(X_\tau) \leq E(X)$, ($0 < \tau < \infty$).
 - *NWUE* (New Worse than Used in Expectation), si $E(X) \leq E(X_\tau)$, ($0 < \tau < \infty$).
 - *IFR* (Increasing Failure Rate), si $F_y \leq_{st} F_x$, ($0 \leq x < y < \infty$).
 - *IFRA* (Increasing Failure Rate in Average), si $(-1/t) \log(1 - F(t))$ croissante, $t \geq 0$.
 - *DFR* (Decreasing Failure Rate), si $F_x \leq_{st} F_y$, ($0 \leq x < y < \infty$).
 - *DFRA* (Decreasing Failure Rate in Average), si $(-1/t) \log(1 - F(t))$ décroissante, $t \geq 0$.
-

- *IMRL* (Increasing Mean Residual Life), si

$$E(X_{\tau}) = \frac{1}{1 - F(x)} \int_{\tau}^{+\infty} (1 - F(u)) du, \text{ croissante } (0 < \tau < \infty).$$

- *DMRL* (Decreasing Mean Residual Life), si

$$E(X_{\tau}) = \frac{1}{1 - F(x)} \int_{\tau}^{+\infty} (1 - F(u)) du, \text{ décroissante } (0 < \tau < \infty).$$

Proposition 2.3.1

Soit la variable aléatoire X de fonction de répartition F ayant une moyenne finie m .

1. Si F est *NBU* (resp. *NWU*), alors :

$$F \leq_{st} \exp(\lambda), \text{ (resp. } F \geq_{st} \exp(\lambda)),$$

pour un certain $\lambda \leq m^{-1}$ (resp. $\lambda \geq m^{-1}$), avec la possibilité d'avoir une égalité seulement si $F = \exp(m^{-1})$.

2. Si F est *NBUE* (resp. *NWUE*), alors

$$F \leq_v \exp(m^{-1}), \text{ (resp. } F \geq_v \exp(m^{-1})).$$

2.3.1 Relation avec les distributions paramétriques

- La loi d'Erlang E_k est *IFR*.
 - La loi de Weibull $W(a)$, pour $a > 1$ (paramètre de la forme), est *IFR*.
 - La loi de Weibull $W(a)$, pour $a \leq 1$, est *DFR*.
 - La loi Gamma $\Gamma(a)$, avec $0 \leq a < 1$, est *DFR*.
 - La loi exponentielle est à la fois *IFR* et *DFR*.
 - La distribution Hyper-exponentielle H est *DFR*.
-

2.3.2 Relation entre les classes de distributions non-paramétriques

La FIGURE 2.1 illustre les relations d'implication existantes entre certaines classes de distributions non-paramétriques.

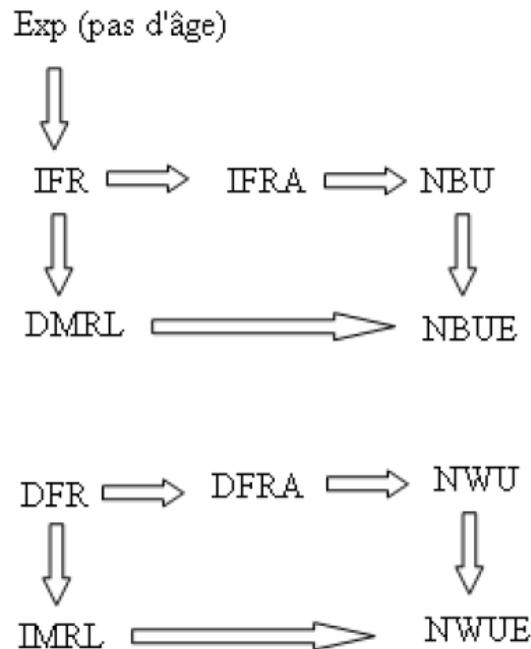


FIGURE 2.1 – Relations entre les classes de distributions d'âge

Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté quelques concepts de base de la théorie des ordres stochastiques et la monotonie des processus stochastiques. Ces techniques seront appliquées, dans le chapitre suivant sur le modèle d'attente $M/G/1$ avec rappels ayant plusieurs types d'appel.

CHAPITRE 3

ANALYSE STOCHASTIQUE DES PERFORMANCES DU SYSTÈME $M_1, M_2/G_1, G_2/1$ AVEC RAPPELS À COMMUNICATION BIDIRECTIONNELLE AYANT PLUSIEURS TYPES D'APPELS

Introduction

Les files d'attente avec rappels proviennent de différentes situations de la vie réelle ainsi que des systèmes de télécommunication et de réseaux [4, 28]. Dans divers situations de la vie réelle et particulièrement dans un contexte de centre d'appels [7, 13], un serveur sert non seulement des appels entrants, mais manipule également un certain travail privé dans le temps de son inactivité [13]. Ce travail privé est appelé un appel sortant. La file d'attente avec des appels entrants et sortants est appelé file d'attente à communication bidirectionnelle [5, 6].

Plusieurs études ont été réalisées pour l'analyse des systèmes de files d'attente avec rappels à communication bidirectionnelle. Alem (2013) [2] à obtenu des résultats explicites

sur les inégalités stochastiques des systèmes de files d'attente avec rappels à communication bidirectionnelle.

Récemment, Ouazine (2016) [27] a utilisé une méthode numérique pour l'évaluation des performances de la file d'attente $M/G/1$ avec rappels à communication bidirectionnelle et une orbite finie.

Dans ce présent chapitre, nous employons les techniques d'ordres stochastiques pour établir différents résultats de monotonie par rapport aux taux d'arrivée, distributions du temps de service et le paramètre de rappel sur le modèle de files d'attente $M/G/1$ avec rappels à communication bidirectionnelle ayant plusieurs types d'appels sortants.

En premier lieu, on décrit le modèle $M_1, M_2/G_1, G_2/1$ avec rappel à communication bidirectionnelle ayant plusieurs types d'appels.

Ensuite on énonce trois lemmes qui vont permettre la comparaison des probabilités du nombre de clients dans les deux systèmes, les conditions de la monotonie de l'opérateur de transition associé à la chaîne de Markov incluse et les conditions de comparabilité des distributions stationnaires.

3.1 Description du modèle

Nous considérons un système de files d'attente $M_1, M_2/G_1, G_2/1$ avec rappels à communication bidirectionnelle ayant plusieurs types d'appels sortants arbitrairement distribués, auquel les clients primaires arrivent au système selon un processus de Poisson de taux λ . Le temps de service d'un appel entrant suit une distribution exponentielle de paramètre ν . Les appels entrants qui trouvent le serveur occupé rejoignent l'orbite et répètent leur demande de service après un temps réparti exponentiellement avec une moyenne $\frac{1}{\mu}$. Si le serveur est inactif, il effectue un appel sortant du type i dans un temps exponentiellement distribué avec la moyenne $\frac{1}{\alpha_i}$ ($i = 2, 3, \dots, n+1$). Ainsi lorsque le serveur est inactif, l'état suivant est déterminé par une compétition entre l'arrivée d'un nouvel appel entrant,

l'arrivée d'un appel entrant depuis l'orbite et l'arrivée de plusieurs types d'appels sortants. $B_1(x)$ représente la fonction de distribution des appels entrants. La durée d'un appel sortant de type i ($i = 1, 2, \dots, n$) est une variable aléatoire de la fonction de distribution $B_{i+1}(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$). On note la transformée de Laplace-Stieljes et le $k^{\text{ème}}$ moment de $B_l(x)$ par $\tilde{B}_l(s)$ et B_l^k pour $l = 1, 2, \dots, N, n + 1$ et $k \in \mathbb{Z}_+$, où $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$. De plus on suppose l'arrivée de flux d'appels entrants et sortants, temps de service et les inter-rappels mutuellement indépendants [29].

L'état du système à l'instant t peut être décrit par le processus stochastique à temps continu

$$\{X(t) = (C(t), N(t)), \xi(t); t \geq 0\},$$

où,

$N(t)$: désigne le nombre de clients en orbite à l'instant t .

$C(t)$: la variable aléatoire indiquant l'état du serveur à l'instant t .

$\xi(t)$: représente le temps écoulé du service de l'appel (entrant ou sortant) en cours.

$$C(t) = \begin{cases} 0, & \text{si le serveur est inactif à l'instant } t ; \\ 1, & \text{si un appel entrant est en service à l'instant } t ; \\ 2, & \text{si un appel sortant du type } I \text{ est en service à l'instant } t ; \\ 3, & \text{si un appel sortant du type } II \text{ est en service à l'instant } t ; \\ \vdots & \\ n + 1, & \text{si un appel sortant du type } n \text{ est en service à l'instant } t. \end{cases}$$

La FIGURE 3.1 représente la file d'attente avec rappels à communication bidirectionnelle ayant plusieurs types d'appels sortants :

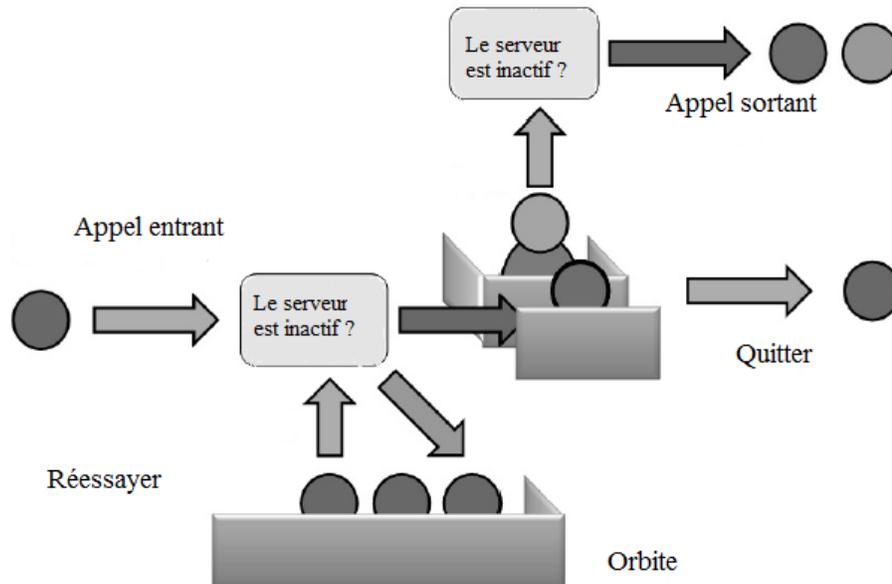


FIGURE 3.1 – Les flux d'appels dans ce modèle

3.2 Chaîne de Markov incluse

Soit η_n l'instant de fin de service du $n^{\text{ème}}$ client. La suite $N_n = N(\eta_n^+)$ forme une chaîne de Markov qui est le processus de renouvellement du processus de Markov à temps continu $X(t)$. On remarque que $\{N_n\}_{n=1}^{+\infty}$ vérifie l'équation fondamentale suivante [29] :

$$N_n = N_{n-1} - W_n + V_n, \quad (3.1)$$

où,

V_n est le nombre d'arrivées entrantes pendant le $n^{\text{ème}}$ temps de service, et

$$W_n = \begin{cases} 1, & \text{si le } n^{\text{ème}} \text{ client en service provienne de l'orbite;} \\ 0, & \text{si non.} \end{cases}$$

Il est clair que $\{N_n\}_{n=1}^{+\infty}$ est une chaîne de Markov à temps discret qui est irréductible et apériodique.

Les probabilités de transition de cette chaîne de Markov sont données comme suit :

$$p_{i,j} = \begin{cases} \frac{i\mu}{\lambda + \sum_{m=2}^{n+1} \alpha_m + i\mu} k_1^0, & \text{si } j = i - 1 \text{ et } i \geq 1; \\ \frac{\lambda}{\lambda + \sum_{m=2}^{n+1} \alpha_m + i\mu} k_1^{j-i} + \frac{\sum_{m=2}^{n+1} \alpha_m}{\lambda + \sum_{m=2}^{n+1} \alpha_m + i\mu} k_2^{j-i} + \frac{i\mu}{\lambda + \sum_{m=2}^{n+1} \alpha_m + i\mu} k_1^{j-i+1}, & \text{si } 0 \leq i \leq j; \\ 0, & \text{si } i - j \geq 2. \end{cases}$$

Où,

$$k_l^j = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^j}{j!} dB_l(x), \quad l = 1, 2, \dots, n+1 \text{ et } j \in \mathbb{Z}_+, \quad (3.2)$$

où k_l^j représente la probabilité qu'il y ait j arrivées entrantes pendant un temps de service d'un client avec la fonction de distribution $B_l(x)$, $l = 1, 2, \dots, n+1$. De plus, on a

$$k_l(z) = \sum_{j=0}^{+\infty} k_l^j z^j = \tilde{B}_l(\lambda - \lambda z), \quad l = 1, 2, \dots, n+1. \quad (3.3)$$

Remarque 3.2.1

La condition de stabilité de la chaîne de Markov incluse est $\rho = \lambda\beta_1^1 < 1$, qui peut être prouvé de la même manière que dans Artalejo et Phung-Duc [6].

3.3 Notations

On introduit les notations suivantes :

Soient Σ_1 et Σ_2 deux modèles d'attente $M_1, M_2/G_1, G_2/1$ avec rappels à communication bidirectionnelle ayant plusieurs types d'appels sortants de paramètres, pour $i = 1, 2$:

$\lambda^{(i)}$: taux d'arrivées entrantes dans Σ_i .

$\mu^{(i)}$: taux de rappels dans Σ_i .

$\alpha^{(i)}$: taux d'appels sortants dans Σ_i .

$B_1^{(i)}(x)$: distribution du temps de service d'un appel entrant dans Σ_i .

$B_l^{(i)}(x)$: distribution du temps de service d'un appel sortant dans Σ_i , $l = 2, \dots, n + 1$.

$k_n^{(i)}$: le nombre de nouvelles arrivées durant le service du $n^{\text{ème}}$ client dans Σ_i .

$\pi_n^{(i)}$: la distribution stationnaire du nombre de clients dans le système Σ_i .

3.4 Inégalités préliminaires

Les lemmes suivants donnent les conditions, sur les paramètres des deux systèmes sous lesquelles les probabilités $k_n^{(i)}$ sont comparables aux sens des ordres partiels suivant : stochastique (\leq_{st}), laplacien (\leq_l) et convexe (\leq_v).

Lemme 3.4.1 Si $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}$ et $B_l^{(1)} \leq_{st} B_l^{(2)}$ alors $\{k_n^{(1)}\} \leq_{st} \{k_n^{(2)}\}$,

où,

$$k_n^{j(i)} = \int_0^{+\infty} \exp^{-\lambda^{(i)}x} \frac{(\lambda^{(i)}x)^j}{j!} dB_l^{(i)}(x), \quad i = 1, 2, \quad l = 1, 2, \dots, n + 1 \quad \text{et } j \in \mathbb{Z}_+.$$

Preuve. Supposons que $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}$ et $B_l^{(1)} \leq_{st} B_l^{(2)}$, $l = 1, 2, \dots, n + 1$, par définition de l'ordre stochastique \leq_{st} , on a pour une loi discrète, les équivalences suivantes :

$$\{k_n^{(1)}\} \leq_{st} \{k_n^{(2)}\} \Leftrightarrow \bar{k}_n^{(1)} = \sum_{m=n}^{+\infty} k_m^{(1)} \leq \sum_{m=n}^{+\infty} k_m^{(2)} = \bar{k}_n^{(2)}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \sum_{m=n}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \exp\{-\lambda^{(1)}x\} \frac{(\lambda^{(1)}x)^m}{m!} dB_l^{(1)}(x) \\
&= \int_0^{+\infty} \sum_{m=n}^{+\infty} \exp\{-\lambda^{(1)}x\} \frac{(\lambda^{(1)}x)^m}{m!} dB_l^{(1)}(x) \\
&\leq \int_0^{+\infty} \sum_{m=n}^{+\infty} \exp\{-\lambda^{(2)}x\} \frac{(\lambda^{(2)}x)^m}{m!} dB_l^{(2)}(x), \quad l = 1, 2, \dots, n+1. \quad (3.4)
\end{aligned}$$

Pour prouver l'inégalité numérique (3.4), on considère la fonction

$$g_n(x, \lambda) = \sum_{m=n}^{+\infty} \exp\{-\lambda x\} \frac{(\lambda x)^m}{m!}.$$

En prenant sa dérivée par rapport à x , $\forall x \geq 0$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} g_n(x, \lambda) &= \sum_{m=n}^{+\infty} \left[-\lambda \exp\{-\lambda x\} \frac{(\lambda x)^m}{m!} + m \lambda \exp\{-\lambda x\} \frac{(\lambda x)^{m-1}}{m!} \right] \\
&= - \sum_{m=n}^{+\infty} \lambda \exp\{-\lambda x\} \frac{(\lambda x)^m}{m!} + \sum_{m=n}^{+\infty} m \lambda \exp\{-\lambda x\} \frac{(\lambda x)^{m-1}}{m!} \\
&= - \sum_{m=n}^{+\infty} \lambda \exp\{-\lambda x\} \frac{(\lambda x)^m}{m!} + \sum_{m=n}^{+\infty} \lambda \exp\{-\lambda x\} \frac{(\lambda x)^{m-1}}{(m-1)!} \\
&= \lambda \exp\{-\lambda x\} \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} - \sum_{m=n}^{+\infty} \lambda \exp\{-\lambda x\} \frac{(\lambda x)^m}{m!} \\
&\quad + \sum_{m=n+1}^{+\infty} \lambda \exp\{-\lambda x\} \frac{(\lambda x)^{m-1}}{(m-1)!} \\
&= \lambda \exp\{-\lambda x\} \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} > 0.
\end{aligned}$$

Donc $g_n(x, \lambda)$ est une fonction croissante en x .

La dérivée par rapport à λ s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \lambda} g_n(x, \lambda) &= \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\sum_{m=n}^{+\infty} \exp\{-\lambda x\} \frac{(\lambda x)^m}{m!} \right] \\
&= \sum_{m=n}^{+\infty} \left[-x \exp\{-\lambda x\} \frac{(\lambda x)^m}{m!} + mx \exp\{-\lambda x\} \frac{(\lambda x)^{m-1}}{m!} \right] \\
&= - \sum_{m=n}^{+\infty} x \exp\{-\lambda x\} \frac{(\lambda x)^m}{m!} + \sum_{m=n}^{+\infty} mx \exp\{-\lambda x\} \frac{(\lambda x)^{m-1}}{m!} \\
&= - \sum_{m=n}^{+\infty} x \exp\{-\lambda x\} \frac{(\lambda x)^m}{m!} + \sum_{m=n}^{+\infty} mx \exp\{-\lambda x\} \frac{(\lambda x)^{m-1}}{m(m-1)!} \\
&= x \exp\{-\lambda x\} \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} - \sum_{m=n}^{+\infty} x \exp\{-\lambda x\} \frac{(\lambda x)^m}{m!} \\
&\quad + \sum_{m=n+1}^{+\infty} x \exp\{-\lambda x\} \frac{(\lambda x)^{m-1}}{(m-1)!} \\
&= x \exp\{-\lambda x\} \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} > 0.
\end{aligned}$$

On remarque que la dérivée est positive pour toutes les valeurs positives que peut prendre le paramètre λ . Alors la fonction $g_n(x, \lambda)$ est croissante.

Comme $g_n(x, \lambda)$ est une fonction croissante en x et $B_l^{(1)} \leq_{st} B_l^{(2)}$, alors d'après le Théorème 2.1.1 énoncé dans le Chapitre 2, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\int_0^{+\infty} g_n(x, \lambda^{(1)}) dB_l^{(1)}(x) \leq \int_0^{+\infty} g_n(x, \lambda^{(1)}) dB_l^{(2)}(x), \quad l = 1, 2, \dots, n+1. \quad (3.5)$$

D'autre part, puisque la fonction $g_n(x, \lambda)$ est monotone par rapport à λ et que $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}$, on a :

$$\int_0^{+\infty} g_n(x, \lambda^{(1)}) dB_l^{(2)}(x) \leq \int_0^{+\infty} g_n(x, \lambda^{(2)}) dB_l^{(2)}(x), \quad l = 1, 2, \dots, n+1. \quad (3.6)$$

Par conséquent, des inégalités (3.5) et (3.6), l'inégalité (3.4) est vérifiée par transitivité. \square

Lemme 3.4.2 Si $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}$ et $B_l^{(1)} \leq_v B_l^{(2)}$, $l = 1, 2, \dots, n+1$, alors $\{k_n^{(1)}\} \leq_v \{k_n^{(2)}\}$.

Preuve. Par définition de l'ordre convexe \leq_v on a :

$$\begin{aligned} \{k_n^{(1)}\} \leq_v \{k_n^{(2)}\} &\Leftrightarrow \bar{k}_n^{(1)} = \sum_{m=n}^{+\infty} \bar{k}_m^{(1)} \leq \sum_{m=n}^{+\infty} \bar{k}_m^{(2)} = \bar{k}_n^{(2)} \\ \{k_n^{(1)}\} \leq_v \{k_n^{(2)}\} &\Leftrightarrow \int_0^{+\infty} \sum_{m=n}^{+\infty} \sum_{l=m}^{+\infty} \exp\{-\lambda^{(1)}x\} \frac{(\lambda^{(1)}x)^l}{l!} dB_l^{(1)}(x) \quad l = 1, 2, \dots, n+1 \\ &\leq \int_0^{+\infty} \sum_{m=n}^{+\infty} \sum_{l=m}^{+\infty} \exp\{-\lambda^{(2)}x\} \frac{(\lambda^{(2)}x)^l}{l!} dB_l^{(2)}(x) \quad l = 1, 2, \dots, n+1 \quad (3.7) \\ &\Leftrightarrow \int_0^{+\infty} \sum_{m=n}^{+\infty} g_m(x, \lambda^{(1)}) dB_l^{(1)}(x) \leq \int_0^{+\infty} \sum_{m=n}^{+\infty} g_m(x, \lambda^{(2)}) dB_l^{(2)}(x), \end{aligned}$$

avec,

$$g_m(x, \lambda^{(i)}) = \sum_{l=m}^{+\infty} \exp\{-\lambda^{(i)}x\} \frac{(\lambda^{(i)}x)^l}{l!}.$$

Les fonctions $g_m(x, \lambda)$ sont croissantes par rapport à λ , alors la fonction définie par :

$\bar{g}_n(x, \lambda) = \sum_{m=n}^{+\infty} g_m(x, \lambda)$ l'est aussi. D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \bar{g}_n(x, \lambda) &= \lambda \frac{\partial}{\partial x} \bar{g}_{n-1}(x, \lambda) \\ &= \sum_{m=n}^{+\infty} \lambda \left[-\lambda \exp\{-\lambda x\} \frac{(\lambda x)^{m-1}}{(m-1)!} + \lambda(m-1) \exp\{-\lambda x\} \frac{(\lambda x)^{m-2}}{(m-1)!} \right] \\ &= \sum_{m=n}^{+\infty} -\lambda^2 \exp\{-\lambda x\} \frac{(\lambda x)^{m-1}}{(m-1)!} + \sum_{m=n}^{+\infty} \lambda^2(m-1) \exp\{-\lambda x\} \frac{(\lambda x)^{m-2}}{(m-1)!} \\ &= -\sum_{m=n}^{+\infty} \lambda^2 \exp\{-\lambda x\} \frac{(\lambda x)^{m-1}}{(m-1)!} + \sum_{m=n}^{+\infty} \lambda^2 \exp\{-\lambda x\} \frac{(\lambda x)^{m-2}}{(m-2)!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x^2} \bar{g}_n(x, \lambda) &= \lambda^2 \exp\{-\lambda x\} \frac{(\lambda x)^{n-2}}{(n-2)!} - \sum_{m=n}^{+\infty} \lambda^2 \exp\{-\lambda x\} \frac{(\lambda x)^{m-1}}{(m-1)!} \\
&\quad + \sum_{m=n+1}^{+\infty} \lambda^2 \exp\{-\lambda x\} \frac{(\lambda x)^{m-2}}{(m-2)!} \\
&= \lambda^2 \exp\{-\lambda x\} \frac{(\lambda x)^{n-2}}{(n-2)!} > 0.
\end{aligned}$$

Par conséquent, $\bar{g}_n(x, \lambda)$ est croissante et convexe par rapport à la variable x .

D'après le Théorème 2.1.2 (voir chapitre 2), on obtient l'inégalité suivante :

$$\int_0^{+\infty} \bar{g}_n(x, \lambda^{(1)}) dB_l^{(1)}(x) \leq \int_0^{+\infty} \bar{g}_n(x, \lambda^{(1)}) dB_l^{(2)}(x), \quad l = 1, 2, \dots, n+1. \quad (3.8)$$

En outre, grâce à la monotonie de la fonction $\bar{g}_n(x, \lambda)$ par rapport à λ , on trouve que :

$$\int_0^{+\infty} \bar{g}_n(x, \lambda^{(1)}) dB_l^{(2)}(x) \leq \int_0^{+\infty} \bar{g}_n(x, \lambda^{(2)}) dB_l^{(2)}(x), \quad l = 1, 2, \dots, n+1. \quad (3.9)$$

Finalement, l'inégalité (3.7) est vérifiée par transitivité des inégalités (3.8) et (3.9). \square

Lemme 3.4.3 Si $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}$ et $B_l^{(1)} \leq_L B_l^{(2)}$, alors $\{k_n^{(1)}\} \leq_L \{k_n^{(2)}\}$.

Preuve. Par définition, on a :

$$\begin{aligned}
k(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} k_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \exp\{-\lambda x\} \frac{(\lambda x)^n}{n!} z^n dB(x) \\
&= \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \exp\{-\lambda x\} \frac{(\lambda x z)^n}{n!} dB(x) \\
&= \int_0^{+\infty} \exp\{-\lambda x(1-z)\} dB(x) = \tilde{B}(\lambda(1-z)).
\end{aligned}$$

Pour prouver que l'inégalité $\{k_n^{(1)}\} \leq_L \{k_n^{(2)}\}$ a lieu, il suffit d'établir le résultat suivant, pour les fonctions génératrices correspondantes

$$k^{(1)}(z) \geq k^{(2)}(z),$$

ce qui est équivalent à montrer que

$$\tilde{B}_l^{(1)}(\lambda^{(1)}(1-z)) \geq \tilde{B}_l^{(2)}(\lambda^{(2)}(1-z)),$$

c'est-à-dire, montrer l'équivalence suivante :

$$\{k_n^{(1)}\} \leq_L \{k_n^{(2)}\} \Leftrightarrow \tilde{B}_l^{(1)}(\lambda^{(1)}(1-z)) \geq \tilde{B}_l^{(2)}(\lambda^{(2)}(1-z)). \quad (3.10)$$

De plus, on a :

$$B_l^{(1)} \leq_L B_l^{(2)} \Rightarrow \tilde{B}_l^{(1)}(s) \geq \tilde{B}_l^{(2)}(s), \quad \forall s \geq 0, l = 1, 2, \dots, n+1.$$

En particulier, pour $s = \lambda^{(1)}(1-z)$, on obtient

$$\tilde{B}_l^{(1)}(\lambda^{(1)}(1-z)) \geq \tilde{B}_l^{(2)}(\lambda^{(1)}(1-z)). \quad (3.11)$$

Puisque toute transformée de Laplace est une fonction décroissante, l'inégalité $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}$ implique l'inégalité suivante :

$$\tilde{B}_l^{(2)}(\lambda^{(1)}(1-z)) \geq \tilde{B}_l^{(2)}(\lambda^{(2)}(1-z)), \quad l = 1, 2, \dots, n+1. \quad (3.12)$$

Par conséquent, l'inégalité (3.10) découle des inégalités (3.11) et (3.12). \square

3.5 Monotonie de la chaîne de Markov incluse

Les probabilités de transition en un pas de la chaîne de Markov incluse pour le système $M_1, M_2/G_1, G_2/1$ avec rappels à communication bidirectionnelle ayant plusieurs types d'appels sortants sont donnés par la formule suivante :

$$p_{n,m} = \begin{cases} \frac{n\mu}{\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + n\mu} k_1^0, & \text{si } m = n - 1 \text{ et } n \geq 1; \\ \frac{\lambda}{\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + n\mu} k_1^{m-n} + \frac{\sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i}{\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + n\mu} k_2^{m-n} + \frac{n\mu}{\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + n\mu} k_1^{m-n+1}, & \text{si } 0 \leq n \leq m; \\ 0, & \text{si } n - m \geq 2. \end{cases}$$

Soit l'opérateur de transition τ de la chaîne de Markov incluse. Pour chaque distribution $p = (p_n)_{n \geq 0}$, on associe une distribution $\tau p = q = (q_m)_{m \geq 0}$ telle que

$$q_m = \sum_{n \geq 0} p_n p_{nm}.$$

Les deux théorèmes suivants donnent les conditions sous lesquelles l'opérateur de transition τ est monotone par rapport aux ordres stochastique et convexe.

Théorème 3.5.1

Si l'inégalité $\sup_{2 \leq l \leq n+1} B_l \leq_{st} B_1$ a lieu, alors l'opérateur de transition τ est monotone par rapport à l'ordre stochastique. C'est-à-dire, pour deux distributions quelconques $p^{(1)}$ et $p^{(2)}$, l'inégalité $p^{(1)} \leq_{st} p^{(2)}$ implique

$$\tau p^{(1)} \leq_{st} \tau p^{(2)}.$$

Preuve. Un opérateur est monotone par rapport à l'ordre stochastique si et seulement si on a l'inégalité suivante :

$$\bar{p}_{n-1,m} \leq \bar{p}_{n,m}, \quad \forall n, m, \quad (3.13)$$

avec,

$$\begin{aligned} \bar{p}_{n,m} &= \sum_{k=m}^{+\infty} p_{n,k} = \sum_{k=m}^{+\infty} \left[\frac{\lambda}{\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + n\mu} k_1^{k-n} + \frac{\sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i}{\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + n\mu} k_2^{k-n} + \frac{n\mu}{\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + n\mu} k_1^{k-n+1} \right] \\ &= \frac{\lambda}{\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + n\mu} \bar{k}_1^{m-n} + \frac{\sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i}{\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + n\mu} \bar{k}_2^{m-n} + \frac{n\mu}{\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + n\mu} \bar{k}_1^{m-n+1} \\ &= \frac{\lambda}{\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + n\mu} \bar{k}_1^{m-n} + \frac{\sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i}{\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + n\mu} \bar{k}_2^{m-n} + \frac{n\mu}{\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + n\mu} \bar{k}_1^{m-n} \\ &\quad - \frac{n\mu}{\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + n\mu} k_1^{m-n} \\ &= \frac{\lambda + n\mu}{\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + n\mu} \bar{k}_1^{m-n} + \frac{\sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i}{\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + n\mu} \bar{k}_2^{m-n} - \frac{n\mu}{\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + n\mu} k_1^{m-n} \\ &= \frac{\lambda + n\mu}{\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + n\mu} \bar{k}_1^{m-n+1} + \frac{\sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i}{\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + n\mu} \bar{k}_2^{m-n} + \frac{\lambda}{\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + n\mu} k_1^{m-n}. \end{aligned}$$

et,

$$\bar{p}_{n-1,m} = \frac{\lambda + (n-1)\mu}{\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + (n-1)\mu} \bar{k}_1^{m-n+1} + \frac{\sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i}{\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + (n-1)\mu} \bar{k}_2^{m-n+1} - \frac{(n-1)\mu}{\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + (n-1)\mu} k_1^{m-n+1}.$$

Finalement, on trouve :

$$\begin{aligned} \bar{p}_{n,m} - \bar{p}_{n-1,m} &= \frac{\lambda + n\mu}{\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + n\mu} \bar{k}_1^{m-n+1} + \frac{\sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i}{\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + n\mu} \bar{k}_2^{m-n} + \frac{\lambda}{\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + n\mu} k_1^{m-n} \\ &\quad - \frac{\lambda + (n-1)\mu}{\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + (n-1)\mu} \bar{k}_1^{m-n+1} - \frac{\sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i}{\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + (n-1)\mu} \bar{k}_2^{m-n+1} + \frac{(n-1)\mu}{\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + (n-1)\mu} k_1^{m-n+1} \\ &= \left[\frac{\lambda + n\mu}{\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + n\mu} - \frac{\lambda + (n-1)\mu}{\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + (n-1)\mu} \right] \bar{k}_1^{m-n+1} + \frac{\sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i}{\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + n\mu} (\bar{k}_2^{m-n+1} + k_2^{m-n}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\lambda}{\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + n\mu} k_1^{m-n} - \frac{\sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i}{\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + (n-1)\mu} \bar{k}_2^{m-n+1} + \frac{(n-1)\mu}{\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + n\mu} k_1^{m-n+1} \\
\bar{p}_{n,m} - \bar{p}_{n-1,m} & = \left[\frac{(\lambda+n\mu)(\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + (n-1)\mu) - (\lambda+(n-1)\mu)(\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + n\mu)}{(\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + n\mu)(\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + (n-1)\mu)} \right] \bar{k}_1^{m-n+1} \\
& + \left[\frac{\sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i (\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + (n-1)\mu) - \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i (\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + n\mu)}{(\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + n\mu)(\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + (n-1)\mu)} \right] \bar{k}_2^{m-n+1} \\
& + \frac{\sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i}{\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + n\mu} k_2^{m-n} + \frac{\lambda}{\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + n\mu} k_1^{m-n} + \frac{(n-1)\mu}{\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + (n-1)\mu} k_1^{m-n+1} \\
& = \frac{\mu \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i}{(\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + n\mu)(\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + (n-1)\mu)} [\bar{k}_1^{m-n+1} - \bar{k}_2^{m-n+1}] \\
& + \frac{\lambda}{\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + n\mu} k_1^{m-n} + \frac{(n-1)\mu}{\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + (n-1)\mu} k_1^{m-n+1} + \frac{\sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i}{\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + n\mu} k_2^{m-n} \geq 0. \square
\end{aligned}$$

Par conséquent, puisqu'on a l'inégalité $\sup_{2 \leq l \leq n+1} B_l \leq_{st} B_1$, alors l'inégalité (3.13) est vérifiée. En conclusion, l'opérateur τ est monotone par rapport à l'ordre stochastique.

Théorème 3.5.2

Si l'inégalité $B_1 \equiv_v \sup_{2 \leq l \leq n+1} B_l$ a lieu, alors l'opérateur de transition τ est monotone, par rapport à l'ordre convexe. C'est-à-dire, pour deux distributions quelconques $p^{(1)}$ et $p^{(2)}$, l'inégalité $p^{(1)} \leq_v p^{(2)}$ implique

$$\tau p^{(1)} \leq_v \tau p^{(2)}.$$

Preuve. L'opérateur τ est monotone par rapport à l'ordre convexe si et seulement si :

$$2\bar{p}_{n,m} \leq \bar{p}_{n-1,m} + \bar{p}_{n+1,m}, \quad \forall n, m, \quad (3.14)$$

où,

$$\begin{aligned}
\bar{p}_{n,m} &= \sum_{k=m}^{+\infty} \bar{p}_{n,k} = \sum_{k=m}^{+\infty} \left[\frac{\lambda}{\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + n\mu} \bar{k}_1^{k-n} + \frac{\sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i}{\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + n\mu} \bar{k}_2^{k-n} + \frac{n\mu}{\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + n\mu} \bar{k}_1^{k-n+1} \right] \\
&= \frac{\lambda}{\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + n\mu} \bar{k}_1^{m-n} + \frac{\sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i}{\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + n\mu} \bar{k}_2^{m-n} + \frac{n\mu}{\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + n\mu} \bar{k}_1^{m-n+1} \\
&= \frac{\lambda}{\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + n\mu} \bar{k}_1^{m-n} + \frac{\sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i}{\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + n\mu} \bar{k}_2^{m-n} + \frac{n\mu}{\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + n\mu} \bar{k}_1^{m-n} \\
&\quad - \frac{n\mu}{\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + n\mu} \bar{k}_1^{m-n} \\
&= \frac{\lambda + n\mu}{\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + n\mu} \bar{k}_1^{m-n} + \frac{\sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i}{\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + n\mu} \bar{k}_2^{m-n} - \frac{n\mu}{\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + n\mu} \bar{k}_1^{m-n} \\
&= \frac{\lambda + n\mu}{\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + n\mu} \left(\bar{k}_1^{m-n+1} + \bar{k}_1^{m-n} \right) + \frac{\sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i}{\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + n\mu} \bar{k}_2^{m-n} - \frac{n\mu}{\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + n\mu} \bar{k}_1^{m-n} \\
&= \frac{\lambda + n\mu}{\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + n\mu} \bar{k}_1^{m-n+1} + \frac{\sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i}{\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + n\mu} \bar{k}_2^{m-n} + \frac{\lambda}{\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + n\mu} \bar{k}_1^{m-n}. \\
\bar{p}_{n-1,m} &= \frac{\lambda + (n-1)\mu}{\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + (n-1)\mu} \bar{k}_1^{m-n+1} + \frac{\sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i}{\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + (n-1)\mu} \bar{k}_2^{m-n+1} - \frac{(n-1)\mu}{\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + (n-1)\mu} \bar{k}_1^{m-n+1} \\
&= \frac{\lambda + (n-1)\mu}{\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + (n-1)\mu} \left(\bar{k}_1^{m-n} - \bar{k}_1^{m-n} \right) + \frac{\sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i}{\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + (n-1)\mu} \left(\bar{k}_2^{m-n} - \bar{k}_2^{m-n} \right) \\
&\quad - \frac{(n-1)\mu}{\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + (n-1)\mu} \left(\bar{k}_1^{m-n} - k_1^{m-n} \right) \\
&= \frac{\lambda + (n-1)\mu}{\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + (n-1)\mu} \bar{k}_1^{m-n} + \frac{\sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i}{\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + (n-1)\mu} \bar{k}_2^{m-n} - \frac{\sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i}{\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + (n-1)\mu} \bar{k}_2^{m-n} \\
&\quad - \frac{\lambda + (n-1)\mu}{\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + (n-1)\mu} \bar{k}_1^{m-n} + \frac{(n-1)\mu}{\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + (n-1)\mu} k_1^{m-n}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{p}_{n+1,m} &= \frac{\lambda+(n+1)\mu}{\lambda+\sum_{i=2}^{j+1}\alpha_i+(n+1)\mu} \bar{k}_1^{m-n} + \frac{\sum_{i=2}^{j+1}\alpha_i}{\lambda+\sum_{i=2}^{j+1}\alpha_i+(n+1)\mu} \bar{k}_2^{m-n-1} + \frac{\lambda}{\lambda+\sum_{i=2}^{j+1}\alpha_i+(n+1)\mu} \bar{k}_1^{m-n-1} \\
&= \frac{\lambda+(n+1)\mu}{\lambda+\sum_{i=2}^{j+1}\alpha_i+(n+1)\mu} \bar{k}_1^{m-n} + \frac{\sum_{i=2}^{j+1}\alpha_i}{\lambda+\sum_{i=2}^{j+1}\alpha_i+(n+1)\mu} \left(\bar{k}_2^{m-n} + \bar{k}_2^{m-n-1} \right) + \frac{\lambda}{\lambda+\sum_{i=2}^{j+1}\alpha_i+(n+1)\mu} \left(\bar{k}_1^{m-n} + k_1^{m-n-1} \right) \\
&= \frac{\lambda+(n+1)\mu}{\lambda+\sum_{i=2}^{j+1}\alpha_i+(n+1)\mu} \bar{k}_1^{m-n} + \frac{\sum_{i=2}^{j+1}\alpha_i}{\lambda+\sum_{i=2}^{j+1}\alpha_i+(n+1)\mu} \bar{k}_2^{m-n} + \frac{\sum_{i=2}^{j+1}\alpha_i}{\lambda+\sum_{i=2}^{j+1}\alpha_i+(n+1)\mu} \left(\bar{k}_2^{m-n} + k_2^{m-n-1} \right) \\
&\quad + \frac{\lambda}{\lambda+\sum_{i=2}^{j+1}\alpha_i+(n+1)\mu} \left(\bar{k}_1^{m-n} + k_1^{m-n-1} \right) \\
&= \frac{\lambda+(n+1)\mu}{\lambda+\sum_{i=2}^{j+1}\alpha_i+(n+1)\mu} \bar{k}_1^{m-n} + \frac{\sum_{i=2}^{j+1}\alpha_i}{\lambda+\sum_{i=2}^{j+1}\alpha_i+(n+1)\mu} \bar{k}_2^{m-n} + \frac{\sum_{i=2}^{j+1}\alpha_i}{\lambda+\sum_{i=2}^{j+1}\alpha_i+(n+1)\mu} \bar{k}_2^{m-n} \\
&\quad + \frac{\lambda}{\lambda+\sum_{i=2}^{j+1}\alpha_i+(n+1)\mu} \bar{k}_1^{m-n} + \frac{\sum_{i=2}^{j+1}\alpha_i}{\lambda+\sum_{i=2}^{j+1}\alpha_i+(n+1)\mu} k_2^{m-n-1} + \frac{\lambda}{\lambda+\sum_{i=2}^{j+1}\alpha_i+(n+1)\mu} k_1^{m-n-1}.
\end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}
\bar{p}_{n-1,m} + \bar{p}_{n+1,m} - 2\bar{p}_{n,m} &= \frac{\lambda+(n-1)\mu}{\lambda+\sum_{i=2}^{j+1}\alpha_i+(n-1)\mu} \bar{k}_1^{m-n} + \frac{\sum_{i=2}^{j+1}\alpha_i}{\lambda+\sum_{i=2}^{j+1}\alpha_i+(n-1)\mu} \bar{k}_2^{m-n} \\
&\quad - \frac{\sum_{i=2}^{j+1}\alpha_i}{\lambda+\sum_{i=2}^{j+1}\alpha_i+(n-1)\mu} \bar{k}_2^{m-n} - \frac{\lambda+(n-1)\mu}{\lambda+\sum_{i=2}^{j+1}\alpha_i+(n-1)\mu} \bar{k}_1^{m-n} \\
&\quad + \frac{(n-1)\mu}{\lambda+\sum_{i=2}^{j+1}\alpha_i+(n-1)\mu} k_1^{m-n} + \frac{\lambda+(n+1)\mu}{\lambda+\sum_{i=2}^{j+1}\alpha_i+(n+1)\mu} \bar{k}_1^{m-n} \\
&\quad + \frac{\sum_{i=2}^{j+1}\alpha_i}{\lambda+\sum_{i=2}^{j+1}\alpha_i+(n+1)\mu} \bar{k}_2^{m-n} + \frac{\sum_{i=2}^{j+1}\alpha_i}{\lambda+\sum_{i=2}^{j+1}\alpha_i+(n+1)\mu} \bar{k}_2^{m-n} \\
&\quad + \frac{\lambda}{\lambda+\sum_{i=2}^{j+1}\alpha_i+(n+1)\mu} \bar{k}_1^{m-n} + \frac{\sum_{i=2}^{j+1}\alpha_i}{\lambda+\sum_{i=2}^{j+1}\alpha_i+(n+1)\mu} k_2^{m-n-1} \\
&\quad + \frac{\lambda}{\lambda+\sum_{i=2}^{j+1}\alpha_i+(n+1)\mu} k_1^{m-n-1} - 2 \frac{\lambda+n\mu}{\lambda+\sum_{i=2}^{j+1}\alpha_i+n\mu} \bar{k}_1^{m-n} \\
&\quad - 2 \frac{\sum_{i=2}^{j+1}\alpha_i}{\lambda+\sum_{i=2}^{j+1}\alpha_i+n\mu} \bar{k}_2^{m-n} + 2 \frac{n\mu}{\lambda+\sum_{i=2}^{j+1}\alpha_i+n\mu} \bar{k}_1^{m-n}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{p}_{n-1,m} + \bar{p}_{n+1,m} - 2\bar{p}_{n,m} &= \left[\frac{\lambda+(n-1)\mu}{\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + (n-1)\mu} + \frac{\lambda+(n+1)\mu}{\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + (n+1)\mu} - 2 \frac{\lambda+n\mu}{\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + n\mu} \right] \bar{k}_1^{m-n} \\
&+ \left[\frac{\sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i}{\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + (n-1)\mu} + \frac{\sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i}{\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + (n+1)\mu} - 2 \frac{\sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i}{\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + n\mu} \right] \bar{k}_2^{m-n} \\
&+ \left[\frac{\lambda}{\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + (n+1)\mu} - \frac{\lambda+(n-1)\mu}{\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + (n+1)\mu} + 2 \frac{n\mu}{\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + n\mu} \right] \bar{k}_1^{m-n} \\
&+ \left[\frac{\sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i}{\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + (n+1)\mu} - \frac{\sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i}{\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + (n-1)\mu} \right] \bar{k}_2^{m-n} \\
&+ \frac{(n-1)\mu}{\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + (n-1)\mu} \bar{k}_1^{m-n} + \frac{\lambda}{\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + (n+1)\mu} \bar{k}_1^{m-n-1} \\
&+ \frac{\sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i}{\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + (n+1)\mu} \bar{k}_2^{m-n-1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{p}_{n-1,m} + \bar{p}_{n+1,m} - 2\bar{p}_{n,m} &= \frac{2\mu^2 \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i}{(\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + (n+1)\mu)(\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + n\mu)(\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + (n-1)\mu)} \left[\bar{k}_2^{m-n} - \bar{k}_1^{m-n} \right] \\
&+ \frac{2\mu(\lambda \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i^2 + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i n\mu + \lambda\mu + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i \mu)}{(\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + (n+1)\mu)(\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + (n-1)\mu)(\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + n\mu)} \bar{k}_1^{m-n} \\
&- \frac{2 \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i \mu}{(\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + (n+1)\mu)(\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + (n-1)\mu)} \bar{k}_2^{m-n} + \frac{(n-1)\mu}{\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + (n-1)\mu} \bar{k}_1^{m-n} \\
&+ \frac{\lambda}{\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + (n+1)\mu} \bar{k}_1^{m-n-1} + \frac{\sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i}{\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + (n+1)\mu} \bar{k}_2^{m-n-1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{p}_{n-1,m} + \bar{p}_{n+1,m} - 2\bar{p}_{n,m} &= \frac{2\mu^2 \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i}{\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + (n-1)\mu + \lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + (n+1)\mu - 2\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + n\mu} \left[\bar{k}_2^{m-n+1} - \bar{k}_1^{m-n+1} \right] \\
&+ \frac{2 \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i \mu^2}{\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + (n-1)\mu + \lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + (n+1)\mu - 2\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + n\mu} \left[\bar{k}_2^{m-n} - \bar{k}_1^{m-n} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2 \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i \mu (\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + n\mu)}{\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + (n-1)\mu + \lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + (n+1)\mu - 2\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + n\mu} [\bar{k}_1^{m-n} - \bar{k}_2^{m-n}] \\
& + \frac{2\mu^2 (\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i)}{\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + n\mu + \lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + (n+1)\mu} \bar{k}_1^{m-n} + \frac{(n-1)\mu}{\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + (n-1)\mu} k_1^{m-n} \\
& + \frac{\lambda}{\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + (n+1)\mu} k_1^{m-n-1} + \frac{\sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i}{\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + (n+1)\mu} k_2^{m-n-1} \geq 0. \quad \square
\end{aligned}$$

En conclusion, si on a l'inégalité $B_1 \equiv_v \sup_{2 \leq l \leq n+1} B_l$, alors l'opérateur de transition τ est monotone, par rapport à l'ordre convexe.

3.6 Comparaison des opérateurs de transition

Dans cette section, on compare les opérateurs de transition associés à deux chaînes de Markov incluse ayant la même structure mais de paramètres différents.

Théorème 3.6.1

Si $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}$, $\mu^{(1)} \geq \mu^{(2)}$, $\alpha^{(1)} \leq \alpha^{(2)}$, $B_1^{(1)} \leq_{st} B_1^{(2)}$ et $B_l^{(1)} \leq_{st} B_l^{(2)}$ alors $\tau^{(1)} \leq_{st} \tau^{(2)}$. C'est-à-dire, pour n'importe quelle distribution p on a $\tau^{(1)}p \leq_{st} \tau^{(2)}p$.

Preuve. D'après le Théorème 2.2.2, nous devons vérifier les inégalités suivantes pour l'ordre stochastique,

$$\bar{p}_{nm}^{(1)} \leq \bar{p}_{nm}^{(2)}, \quad \forall 0 \leq n \leq m.$$

Ce qui revient à montrer :

$$\begin{aligned}
& \frac{\lambda^{(1)} + n\mu^{(1)}}{\lambda^{(1)} + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i^{(1)} + n\mu^{(1)}} \bar{k}_1^{m-n+1(1)} + \frac{\sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i^{(1)}}{\lambda^{(1)} + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i^{(1)} + n\mu^{(1)}} \bar{k}_2^{m-n(1)} - \frac{n\mu^{(1)}}{\lambda^{(1)} + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i^{(1)} + n\mu^{(1)}} k_1^{m-n(1)} \leq \\
& \frac{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}}{\lambda^{(2)} + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i^{(2)} + n\mu^{(2)}} \bar{k}_1^{m-n+1(2)} + \frac{\sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i^{(2)}}{\lambda^{(2)} + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i^{(2)} + n\mu^{(2)}} \bar{k}_2^{m-n(2)} - \frac{n\mu^{(2)}}{\lambda^{(2)} + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i^{(2)} + n\mu^{(2)}} k_1^{m-n(2)}. \quad (3.15)
\end{aligned}$$

D'après le Lemme 3.4.1 on a :

$$\{k_n^{l(1)}\} \leq_{st} \{k_n^{l(2)}\}, \quad \forall n \geq 0. \quad (3.16)$$

D'autre part, si $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}$, $\mu^{(1)} \geq \mu^{(2)}$, $\sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i^{(1)} \leq \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i^{(2)}$,

alors :

$$\frac{\lambda^{(1)} + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i^{(1)}}{\mu^{(1)}} \leq \frac{\lambda^{(2)} + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i^{(2)}}{\mu^{(2)}},$$

et puisque la fonction : $x \rightarrow \frac{n}{x+n}$ est décroissante alors

$$\frac{n\mu^{(1)}}{\lambda^{(1)} + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i^{(1)} + n\mu^{(1)}} \geq \frac{n\mu^{(2)}}{\lambda^{(2)} + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i^{(2)} + n\mu^{(2)}}. \quad (3.17)$$

De plus, on a $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}$ et $\mu^{(1)} \geq \mu^{(2)}$ ce qui implique $\frac{\lambda^{(1)}}{\mu^{(1)}} \leq \frac{\lambda^{(2)}}{\mu^{(2)}}$ et comme la fonction $\frac{x}{x+n}$ est croissante, il est vrai que

$$\frac{\lambda^{(1)}}{\lambda^{(1)} + n\mu^{(1)}} \leq \frac{\lambda^{(2)}}{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}}$$

De la dernière inégalité nous pouvons trouver $\lambda^{(1)} + n\mu^{(1)} \geq \lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}$.

Les inégalités $\sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i^{(1)} \leq \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i^{(2)}$ et $\lambda^{(1)} + n\mu^{(1)} \geq \lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}$ donnent

$$\frac{\lambda^{(1)} + n\mu^{(1)}}{\sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i^{(1)}} \geq \frac{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}}{\sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i^{(2)}}$$

et comme, la fonction $\frac{x}{x+n}$ est croissante, alors :

$$\frac{\lambda^{(1)} + n\mu^{(1)}}{\lambda^{(1)} + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i^{(1)} + n\mu^{(1)}} \geq \frac{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}}{\lambda^{(2)} + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i^{(2)} + n\mu^{(2)}}, \quad a \ lieu. \quad (3.18)$$

Des inégalités (3.16), (3.17) et (3.18), on obtient :

$$\begin{aligned}
\bar{p}_{n,m}^{(1)} - \bar{p}_{n,m}^{(2)} &= \frac{\lambda^{(1)} + n\mu^{(1)}}{\lambda^{(1)} + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i^{(1)} + n\mu^{(1)}} \bar{k}_1^{m-n(1)} - \frac{n\mu^{(1)}}{\lambda^{(1)} + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i^{(1)} + n\mu^{(1)}} k_1^{m-n(1)} \\
&\quad - \frac{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}}{\lambda^{(2)} + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i^{(2)} + n\mu^{(2)}} \bar{k}_1^{m-n(2)} + \frac{n\mu^{(2)}}{\lambda^{(2)} + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i^{(2)} + n\mu^{(2)}} k_1^{m-n(2)} \\
&\leq \frac{\lambda^{(1)} + n\mu^{(1)}}{\lambda^{(1)} + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i^{(1)} + n\mu^{(1)}} \bar{k}_1^{m-n(1)} - \frac{n\mu^{(2)}}{\lambda^{(2)} + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i^{(2)} + n\mu^{(2)}} k_1^{m-n(2)} \\
&\quad - \frac{\lambda^{(1)} + n\mu^{(1)}}{\lambda^{(1)} + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i^{(1)} + n\mu^{(1)}} \bar{k}_1^{m-n(1)} + \frac{n\mu^{(2)}}{\lambda^{(2)} + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i^{(2)} + n\mu^{(2)}} k_1^{m-n(2)} = 0.
\end{aligned}$$

De la relation $\frac{\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + n\mu}{\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + n\mu} = 1$, on trouve que $\frac{\lambda + n\mu}{\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + n\mu} = 1 - \frac{\sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i}{\lambda + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i + n\mu}$.

Alors l'inégalité

$$\frac{\lambda^{(1)} + n\mu^{(1)}}{\lambda^{(1)} + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i^{(1)} + n\mu^{(1)}} \geq \frac{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}}{\lambda^{(2)} + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i^{(2)} + n\mu^{(2)}},$$

devient comme suit

$$1 - \frac{\sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i^{(1)}}{\lambda^{(1)} + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i^{(1)} + n\mu^{(1)}} \geq 1 - \frac{\sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i^{(2)}}{\lambda^{(2)} + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i^{(2)} + n\mu^{(2)}},$$

D'où, on constate que

$$\frac{\sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i^{(1)}}{\lambda^{(1)} + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i^{(1)} + n\mu^{(1)}} \leq \frac{\sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i^{(2)}}{\lambda^{(2)} + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i^{(2)} + n\mu^{(2)}}. \quad (3.19)$$

Par conséquent, si $B_1^{(1)} \leq_{st} B_1^{(2)}$ et $B_l^{(1)} \leq_{st} B_l^{(2)}$, $l = 2, \dots, n+1$, alors l'inégalité $\bar{p}_{n,m}^{(1)} \leq \bar{p}_{n,m}^{(2)}$ est vérifiée. \square

Théorème 3.6.2

Si $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}$, $\mu^{(1)} \geq \mu^{(2)}$, $\alpha^{(1)} \leq \alpha^{(2)}$, $B_1^{(1)} \leq_v B_1^{(2)}$ et $B_l^{(1)} \leq_v B_l^{(2)}$ alors $\tau^{(1)} \leq_v \tau^{(2)}$.

C'est-à-dire que, pour une distribution quelconque p on a $\tau^{(1)} p \leq_v \tau^{(2)} p$.

Preuve. D'après le Théorème 2.2.2, nous établirons les probabilités de transition en un pas $p_{n,m}^{(1)}$ et $p_{n,m}^{(2)}$, qui vérifient les inégalités suivantes :

$$\bar{p}_{n,m}^{(1)} \leq \bar{p}_{n,m}^{(2)}, \quad (3.20)$$

ce qui est équivalent à montrer :

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda^{(1)} + n\mu^{(1)}}{\lambda^{(1)} + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i^{(1)} + n\mu^{(1)}} \bar{k}_1^{m-n+1(1)} + \frac{\sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i^{(1)}}{\lambda^{(1)} + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i^{(1)} + n\mu^{(1)}} \bar{k}_2^{m-n(1)} - \frac{n\mu^{(1)}}{\lambda^{(1)} + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i^{(1)} + n\mu^{(1)}} \bar{k}_1^{m-n(1)} \\ & \leq \frac{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}}{\lambda^{(2)} + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i^{(2)} + n\mu^{(2)}} \bar{k}_1^{m-n+1(2)} + \frac{\sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i^{(2)}}{\lambda^{(2)} + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i^{(2)} + n\mu^{(2)}} \bar{k}_2^{m-n(2)} - \frac{n\mu^{(2)}}{\lambda^{(2)} + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i^{(2)} + n\mu^{(2)}} \bar{k}_1^{m-n(2)}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

D'après le Lemme 3.4.2, on a $\{k_n^{l(1)}\} \leq_v \{k_n^{l(2)}\}$, $\forall n \geq 0$ et $l = 1, \dots, n+1$.

En utilisant les mêmes techniques que la preuve précédente, on obtient le résultat suivant :

$$\begin{aligned} \bar{p}_{n,m}^{(1)} - \bar{p}_{n,m}^{(2)} &= \frac{\lambda^{(1)} + n\mu^{(1)}}{\lambda^{(1)} + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i^{(1)} + n\mu^{(1)}} \bar{k}_1^{m-n(1)} - \frac{n\mu^{(1)}}{\lambda^{(1)} + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i^{(1)} + n\mu^{(1)}} \bar{k}_1^{m-n(1)} \\ & \quad - \frac{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}}{\lambda^{(2)} + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i^{(2)} + n\mu^{(2)}} \bar{k}_1^{m-n(2)} + \frac{n\mu^{(2)}}{\lambda^{(2)} + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i^{(2)} + n\mu^{(2)}} \bar{k}_1^{m-n(2)} \\ & \leq \frac{\lambda^{(1)} + n\mu^{(1)}}{\lambda^{(1)} + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i^{(1)} + n\mu^{(1)}} \bar{k}_1^{m-n(1)} - \frac{n\mu^{(2)}}{\lambda^{(2)} + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i^{(2)} + n\mu^{(2)}} \bar{k}_1^{m-n(2)} \\ & \quad - \frac{\lambda^{(1)} + n\mu^{(1)}}{\lambda^{(1)} + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i^{(1)} + n\mu^{(1)}} \bar{k}_1^{m-n(1)} + \frac{n\mu^{(2)}}{\lambda^{(2)} + \sum_{i=2}^{j+1} \alpha_i^{(2)} + n\mu^{(2)}} \bar{k}_1^{m-n(2)} = 0. \end{aligned}$$

Donc

$$\bar{p}_{n,m}^{(1)} \leq \bar{p}_{n,m}^{(2)}. \quad \square$$

3.7 Bornes stochastiques des distributions stationnaires

On considère Σ_1 et Σ_2 deux systèmes de files d'attente $M_1, M_2/G_1, G_2/1$ avec rappels à communication bidirectionnelle ayant plusieurs types d'appels sortants. Soient $\pi_n^{(1)}$ et $\pi_n^{(2)}$ les distributions stationnaires du nombre de clients dans chaque système, respectivement.

Les deux théorèmes suivants donnent les conditions de comparabilité des distributions stationnaires du nombre de clients, pour les deux systèmes Σ_1 et Σ_2 , par rapport aux ordres partiels : stochastique et convexe.

Théorème 3.7.1

Si les inégalités suivantes ont lieu

$$\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}, \mu^{(1)} \geq \mu^{(2)}, \alpha^{(1)} \leq \alpha^{(2)}, B_1^{(1)} \leq_{so} B_1^{(2)}, B_l^{(1)} \leq_{so} B_l^{(2)} \text{ et } \sup_{2 \leq l \leq n+1} B_l^{(2)} \leq_{st} B_1^{(2)} \text{ (respectivement. } B_1^{(2)} \leq_v \inf_{2 \leq l \leq n+1} B_l^{(2)}), l = 2, \dots, n+1,$$

alors on a aussi les inégalités suivantes sur les distributions stationnaires

$$\{\pi_n^{(1)}\} \leq_{so} \{\pi_n^{(2)}\}, \quad \text{où } so = st(\text{ou } v).$$

Preuve. D'après les Théorèmes 3.3.3 et 3.3.4, les inégalités $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}, \mu^{(1)} \geq \mu^{(2)}, \alpha^{(1)} \leq \alpha^{(2)}, B_1^{(1)} \leq_{so} B_1^{(2)}$ et $B_l^{(1)} \leq_{so} B_l^{(2)}$, impliquent $\tau^{(1)} \leq_{so} \tau^{(2)}$, c'est-à-dire, pour une distribution quelconque p on a l'inégalité suivante :

$$\tau^{(1)}p \leq_{so} \tau^{(2)}p. \quad (3.22)$$

Des Théorèmes 3.3.1 et 3.3.2, l'opérateur $\tau^{(2)}$ associé à la chaîne de Markov incluse, du deuxième système, est monotone. C'est-à-dire, pour deux distributions quelconques $p_1^{(2)}, p_2^{(2)}$ telles que $p_1^{(2)} \leq_{so} p_2^{(2)}$, on a

$$\tau^{(2)}p_1^{(2)} \leq_{so} \tau^{(2)}p_2^{(2)}. \quad (3.23)$$

Cependant, de l'inégalité (3.22), on obtient

$$\tau^{(1)}p_1^{(1)} \leq_{so} \tau^{(2)}p_2^{(2)}. \quad (3.24)$$

Il existe une probabilité $p_1^{(2)}$ telle qu'on ait l'inégalité suivante

$$\tau^{(2)}p_1^{(1)} \leq_{so} \tau^{(2)}p_1^{(2)}. \quad (3.25)$$

En combinant les inégalités (3.23) et (3.25), on obtient le résultat suivant

$$\tau^{(1)}p^{(1)} \leq_{so} \tau^{(2)}p^{(2)}. \quad (3.26)$$

Pour deux distributions quelconques $p^{(1)}$, $p^{(2)}$. L'inégalité (3.26) peut être réécrite de la manière suivante

$$\tau^{(1)}p_n^{(1)} = P(X_k^{(1)} = n) \leq_{so} P(X_k^{(2)} = n) = \tau^{(2)}p_n^{(2)}.$$

Finalement, quand $k \rightarrow \infty$, nous avons $\{\pi_n^{(1)}\} \leq_{so} \{\pi_n^{(2)}\}$. \square

Théorème 3.7.2

Si pour le modèle $M_1, M_2/G_1, G_2/1$ avec rappels à communication bidirectionnelle ayant plusieurs types d'appels, la distribution de temps de service est *NBUE* (New Better than Used in Expectation), respectivement *NWUE* (New Worse than Used in Expectation), et si de plus $B_1^* = B_l^{(1)} \leq_v B_l^{(2)}$ alors la distribution stationnaire π_n du nombre de clients dans ce système est inférieure, (respectivement supérieure) par rapport à l'ordre \leq_v , à la distribution stationnaire, du nombre de clients dans le système $M_1, M_2/M_1, M_2/1$ avec rappels à communication bidirectionnelle ayant plusieurs types d'appels.

Preuve. Considérons un système de files d'attente $M_1, M_2/M_1, M_2/1$ avec rappels à communication bidirectionnelle ayant plusieurs types d'appels avec les mêmes paramètres :

taux d'appels entrants λ , taux de rappels μ , taux d'appels sortants α , temps moyen de service β_1^1 et β_l^1 , que le système $M_1, M_2/G_1, G_2/1$ avec rappels à communication bidirectionnelle ayant plusieurs types d'appels, mais avec des temps de service exponentiellement distribués avec des taux $\theta_1 = \frac{1}{\beta_1^1}$ et $\theta_2 = \frac{1}{\beta_l^1}$.

$$B_1^*(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x}{\beta_1^1}}, & \text{si } x \geq 0; \\ 0, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

$$B_l^*(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x}{\beta_l^1}}, & \text{si } x \geq 0, l = 2, \dots, n+1; \\ 0, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

D'après la Proposition 2.3.1, si $B_1(x)$ est NBUE (respectivement NWUE) alors $B_1(x) \leq_v B_1^*(x)$, (respectivement $B_1(x) \geq_v B_1^*(x)$).

Et comme $\sup_{2 \leq l \leq n+1} B_l^{(1)} \leq_v \sup_{2 \leq l \leq n+1} B_l^{(2)}$ et $B_1^* \leq_c \sup_{2 \leq l \leq n+1} B_l^{(2)}$ alors d'après le Théorème 3.4.1, on déduit que la distribution stationnaire du nombre de clients dans le système $M_1, M_2/G_1, G_2/1$ avec rappels à communication bidirectionnelle ayant plusieurs types d'appels est inférieure (respectivement supérieure) à la distribution stationnaire du nombre de clients dans le système $M_1, M_2/M_1, M_2/1$ avec rappels à communication bidirectionnelle ayant plusieurs type d'appels. \square

Conclusion

Dans ce chapitre, on a utilisé la théorie générale des ordres partiels pour étudier les propriétés de monotonie du système d'attente $M_1, M_2/G_1, G_2/1$ avec rappels à communication bidirectionnelle ayant plusieurs types d'appels sortants relativement aux ordres stochastique et convexe. Nous avons montré la monotonie de l'opérateur de transition de la chaîne de Markov incluse par rapport à l'ordre stochastique et convexe. On a aussi obtenu des conditions de comparabilité des deux opérateurs de transition. En outre, nous avons prouvé que la distribution stationnaire du nombre de clients liée au modèle considéré, est majorée (respectivement minorée) par la distribution stationnaire du nombre de clients dans un système $M_1, M_2/G_1, G_2/1$ avec rappels à communication bidirectionnelle ayant plusieurs types d'appels, si la distribution des temps de service est *NBUE* (respectivement *NWUE*).

CONCLUSION GÉNÉRALE

Ce mémoire est consacré, en premier lieu, à la présentation d'une revue de la littérature sur les systèmes d'attente avec rappels en définissant les notions de base qui lui sont liées. Ce phénomène de répétition de demandes du service est étudié par la théorie de files d'attente avec rappels dont nous avons actualisé une synthèse des résultats connus. Nous nous sommes ensuite intéressés aux modèles avec rappels et priorité. Nous avons ensuite étudié quelques problèmes de comparabilité pour l'analyse du système $M_1, M_2/G_1, G_2/1$ avec rappels à communication bidirectionnelle ayant plusieurs types d'appels sortants en utilisant la méthode de comparaison stochastique. L'avantage de ce type de méthode est de comparer des systèmes complexes avec des systèmes plus simples à analyser, ce qui conduit à l'obtention de bornes (inférieure et supérieure) pour les caractéristiques de ces systèmes.

Certaines caractéristiques de ce modèle sont en fait connues, mais ici, on considère deux problèmes :

1. La monotonie de la chaîne de Markov incluse.
2. La comparabilité des modèles de ce types, mais ayant des paramètres différents.

Concernant le premier problème, il s'avère que la chaîne de Markov incluse n'est pas monotone en général. Ceci nous a permis d'obtenir les conditions qui assurent la mono-

tonie de l'opérateur de transition associé à la chaîne de Markov incluse. Pour le second problème, nous avons établi des conditions sous lesquelles les opérateurs de transition ainsi que les distributions stationnaires de deux chaînes de Markov incluse associées à deux systèmes $M_1, M_2/G_1, G_2/1$ avec rappels à communication bidirectionnelle ayant plusieurs types d'appels sortants, ayant la même structure mais avec des paramètres différents, sont comparables au sens des ordres stochastique et convexe.

Finalement, on a montré que la distribution stationnaire du nombre de clients dans un système $M_1, M_2/G_1, G_2/1$ avec rappels à communication bidirectionnelle ayant plusieurs types d'appels sortants, est majorée (respectivement minorée) par la distribution stationnaire du nombre de clients dans un système $M_1, M_2/M_1, M_2/1$ avec rappels à communication bidirectionnelle ayant plusieurs types d'appels sortants, si la distribution des temps de service est NBUE (respectivement NWUE).

Parmi les perspectives de recherche, nous citons :

1. Confirmation des résultats théoriques obtenus, dans ce mémoire, par une application numérique.
 2. Obtention de bornes stochastiques pour d'autres mesures de performance, à savoir : le temps moyen d'attente, le nombre moyen de rappels par client, etc.
 3. Eventuellement, en utilisant d'autres ordres partiels (concave ordres en fonctions génératrices, en transformée de Laplace, ...).
-

BIBLIOGRAPHIE

- [1] D. Aïssani, A. Aïssani (2005). Méthodes statistiques en fiabilité, Cours de Post-Graduation Statistiques des Processus Aléatoires, Université de Constantine.
 - [2] L.M. ALEM (2013). Inégalités Stochastiques des Systèmes de Files d'Attente avec Rappels à Communication Bidirectionnelle. Thèse de Magister en Mathématiques Appliquées, Université de Béjaia.
 - [3] J.R. Artalejo and A. Gómez-Corral (1997). Steady state solution of single server queue with linear repeated requests, Journal of applied Probability, **34 (3-4)**, 223-233.
 - [4] J.R. Artalejo and A. Gómez-Corral (2008). Retrial Queues system : A computational approach, Berlin, Springer Edition.
 - [5] J. R. Artalejo and T. Phung-Duc (2012), Markovian retrial queues with two way communication, Journal of Industrial and Management Optimization, **8**, 781-806.
 - [6] J. R. Artalejo and T. Phung-Duc (2013), Single server retrial queues with two way communication, Applied Mathematical Modelling, **37**, 1811-1822.
 - [7] S. Bhulai and G. Koole (2003), A queueing model for call blending in call centers, IEEE Transactions on Automatic Control, **48**, 1434-1438.
-

-
- [8] M. Boualem, N. Djellab and D. Aïssani (2009). Stochastic inequalities for $M/G/1$ retrial queues with vacations and constant retrial policy, *International Journal MCM (Mathematical and Computer Modelling)*, Elsevier Ed, **50**, 207-212.
- [9] L. Boutarfa and N. Djellab(2015), On the performance of the $M_1, M_2/G_1, G_2/1$ retrial queue with pre-emptive resume policy, *Yugoslav Journal of Operations Research*, **25** (1), pp.153-164.
- [10] B.D. Choi, K.B. Choi and Y.W. Lee (1995). $M/G/1$ retrial queueing system with two types of calls and finite capacity, *Queueing Systems*, **19** 215-229.
- [11] B.D. Choi and K.K. Park (1990). The $M/G/1$ retrial queue with Bernoulli schedule, *Queueing Systems*, **7** 219-227.
- [12] B. D. Choi and Y.W. Shin and W. C. Ahn (1992). Retrial queues with collision arising from unslotted CSMA/CD protocol, *Queueing Systems*, **11** 335-356.
- [13] A. Deslauriers, P. L'Ecuyer, J. Pichitlamken, A. Ingolfsson and A. N. Avramidis (2007), Markov chain models of a telephone call center with call blending, *Computers Operations Research*, **34**, 1616-1645.
- [14] I. Dimitriou (2014), A modified vacation queueing model and its application on the Discontinuous Reception power saving mechanism in unreliable Long Term Evolution networks, *Performance Evaluation*, **77**, 37-56.
- [15] A. N. Dudin and A. Krishnamoorthy and V. C. Joshua and G. V. Tsarenkov (2004). Analysis of the BMAP/G/1 retrial system with search of customers from the orbit, *European Journal of Operational Research*, **157** 169-179.
- [16] G. I. Falin (1979), Model of coupled switching in presence of recurrent calls, *Engineering Cybernetics Review*, **17**, 53-59.
- [17] G.I. Falin (1990). A survey of retrial queues. *Queueing Systems*, **7**, 127-168.
- [18] G. I. Falin and J. R. Artalejo and M. Martin (1993). On the single server retrial queue with priority Customers, *Queueing Systems*, **14**, 439-455.
-

-
- [19] G.I. Falin and J.G.C. Templeton (1997). *Retrial Queues*, Chapman and Hall, London
- [20] G. Fayolle (1986). A simple telephone exchange with delayed feedbacks. In : Boxma, O. J. Cohen, J. W. Tijms, H. C. (Eds.), *Teletraffic Analysis and Computer Performance Evaluation*. Elsevier Science, Amsterdam, 245-253.
- [21] B. Genedenko and Y. Beliaev, and A. Soloviev(1972). *Méthodes mathématiques en théorie de la fiabilité*, Chapman and Hall, London.
- [22] E. Gine and C. Houdre and D. Nualart (2003). *Stochastic inequalities and applications*, Progress in Probability 56, Birkhäuser.
- [23] A. Krishnamoorthy, P. K. Pramod and S. R. Chakravarthy (2014), Queues with interruptions : a survey. *Top* **22**, 290-320.
- [24] H. Li and Y. Q. Zhao (2005). A retrial queue with a constant retrial rate, server breakdowns and impatient customers, *Stochastic Models*, 21, 531-550.
- [25] M. Martin and J. R. Artalejo (1995), Analysis of an $M/G/1$ queue with two types of impatient units, *Advances in Applied Probability*, **27**, 840-861.
- [26] A. Müller and D. Stoyan (2002). *Comparison methods for stochastic models and risk*, John Wiley and Sons, LTD.
- [27] S. Ouazine (2016). *Approche des Développements en Séries de Taylor pour l'Approximation Fonctionnelle des Systèmes de Files d'attente*, Thèse de Doctorat, en mathématiques appliquées Université de Béjaia.
- [28] T. Phung-Duc, H. Masuyama, S. Kasahara and Y. Takahashi (2009). Performance analysis of optical burst switched networks with limited-range wavelength conversion, retransmission and burst segmentation. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **52**, 58–74.
- [29] H. Sakurai and T. Phung-Duc (2015). Two-way communication retrial queues with multiple types of outgoing calls, *TOP*, vol. 23, No. 2, pp.466-492.
-

-
- [30] M. Shaked and J. G. Schantikumar (1994). Stochastic orders and their applications, Probability and Mathematical Statistics.
- [31] N. P. Shikata and Y. Suzuki and Y. Takahashi and T. Ihara and T. Nakanishi (1999). Loss probability evaluation of PCS call-terminating control, IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences E82A, 7, 1230-1234.
- [32] D. Stoyan (1983). Comparaison Methods for Queues and Other Stochastic Models, New York.
- [33] P. H. Theodore and H. Christian (1999). Stochastic inequalities and their applications, Contemporary Mathematics, 234, American Mathematical Society, Providence, RI.
- [34] T. Yang and J.G.C. Templeton (1987). A survey on retrial queues, Queueing Systems, **2**, 203-233.
-

Résumé

En raison de la complexité des modèles d'attente avec rappels ayant plusieurs types d'appels, les résultats analytiques sont généralement difficiles à obtenir ou ne sont pas très exploitables du point de vue pratique. Pour résoudre le problème, il existe plusieurs méthodes numériques et d'approximation.

Dans ce mémoire, nous focalisons sur les propriétés de monotonie et de comparabilité qui permettent d'établir quelques comparaisons stochastiques utiles dans la compréhension de modèles compliqués et leur remplacement par des modèles plus simples pour lesquels, une évaluation peut être faite. Pour cela, Nous considérons dans notre étude, la file d'attente M/G/1 avec rappels ayant plusieurs types d'appels, à savoir : les appels de type I sont en attente et vont être servis dès que le serveur est libre, et les appels de type II entrent en orbite pour retenter leurs chances, de sorte que les appels de type I ont la priorité sur les appels de type II.

Mots-clés: Files d'attente avec rappels, chaîne de Markov, monotonie, comparaison stochastique.

Abstrait

Due to the complexity of retrial queues models with multiple call types, analytical results are generally difficult to obtain or are not very practical from a practical point of view. To solve the problem, there are several numerical and approximation methods.

In this paper, we focus on the properties of monotony and comparability which allow us to establish some stochastic comparisons useful in the understanding of complicated models and their replacement by simpler models for which an evaluation can be made. For this purpose, we consider in our study the queue M / G / 1 with multiple types of outgoing calls, namely: type I calls are waiting and will be served as soon as the server is free, And Type II calls enter orbit to re-establish their chances, so that Type I calls take precedence over Type II calls.

Keywords: Retrial queues, Markov chain, monotony, stochastic comparison