République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université A.Mira de Béjaia
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques

Mémoire

En vue de l'obtention du diplôme de

Master en Mathématiques

Option : Analyse et Probabilité

Thème

Quelques méthodes de résolution de problèmes aux limites du second ordre sur les intervalles infinis

Présenté par :

REDOUANE Fahima
OUCHENE Louiza

Devant le jury composé de :

M^r A. BERBOUCHA	Président	U.A.MIRA.BEJAIA
M^{me} K. KHELOUFI	Examinatrice	U.A.MIRA.BEJAIA
M^{me} S. ZAHAR-Allili	Promotrice	U.A.MIRA.BEJAIA

Béjaia, juin 2017

Remerciements

Nous tenons à exprimer nos remerciements avec une profonde reconnaissance à notre promotrice Madame ***S. ALLILI-ZAHAR*** pour ses conseils, ses orientations et sa coopération à réaliser ce mémoire.

Nous tenons aussi à remercier profondément les membres du jury Monsieur le président ***A. BERBOUCHA*** et Madame ***K. KHELOUFI*** qui nous ont honorés en acceptant de juger ce mémoire.

Dédicaces

Je dédie ce modeste mémoire à toute ma famille sans exception, surtout :

A ma chère mère,
A mon cher frère ***Rabah***,
A mon cher fiancé ***Belal***,

pour leur soutien moral et financier, pour la confiance qu'ils nous ont faite et pour leurs conseils précieux en leurs disant grand merci.

Et à touts mes amies et mes collègues.

Une spéciale dédicace à ma promotrice ***M**^{me}* ***ALLILI ZAHAR*** et à tous mes enseignants du département de mathématiques.

Fahima

Dédicaces

Je dédie ce mémoire :

A mes très chers parents qui m'ont suivie durant mes études, et pour tout ce qu'ils font pour ma réussite.

A celui avec lequel je vais partager ma vie, mon cher mari ***Saadi*** pour ses conseils, ainsi qu'à toute sa famille.

A mes frères : ***Amirouche et Hakim*** pour leurs soutien moral.

A mes soeurs : ***Kahina, Nawel, karima, Cilia et Katia***.

A toute ma famille sans exception et à toutes mes amies.

Une spéciale dédicace à ma promotrice ***M^{me} ALLILI ZAHAR*** pour sa présence, ces conseils, et ses remarques et à tous mes enseignants du département de mathématiques.

Louiza

Table des matières

Introduction **6**

1 Préliminaires **9**
1.1 Quelques notations 9
1.2 Quelques définitions 11
1.3 Quelques théorèmes du points fixes 13
1.4 Quelques critères de compacité 14
1.4.1 Critère de compacité d'Ascoli-Arzéla 15
1.4.2 Critères de compacité sur des intervalles non-bornés . . 15
1.4.3 Critère de compacité dans les espace L^P 16

2 Etude d'un problème aux limites sur $[0, +\infty[$ **17**

3 Etude d'un problème aux limites sur $\mathbb{R}$ **23**
3.1 La solution classique pour un problème aux limites sur $\mathbb{R}$ . . . 23
3.2 Existence d'une solution faible 27

4 Etude d'un problème aux limites à trois points sur la demi-droite réelle **31**

5 Existence de solutions positives pour un problème aux limites sur la demi-droite réelle **42**
5.1 Construction de la fonction de Green 43
5.2 Propriétés de la fonction de Green 45
5.3 Existence d' une solution positive 47
5.4 Existence de deux solutions positives 55
5.5 Example d'application 58

Annexes **59**

Conclusion **61**

Bibliographie **62**

Introduction

L'objectif de ce mémoire est d'étudier quelques méthodes de résolution de problèmes aux limites du second ordre sur les intervalles non bornés, et mettre le point sur l'utilisation de la théorie du point fixe pour résoudre de tels problèmes, et sur les problèmes de compacité qui sont souvent roncontrés.

Les problèmes aux limites sur les intervalles infinis ont d'abord été étudiés à la fin du $19^{ème}$ siècle avec les travaux importants de A. Kneser [20] sur les solutions monotones sur $[0, +\infty[$ des équations différentielles ordinaires du second ordre du type

$$u''(t) = f(t, u(t)), \quad t \in [0, +\infty[\tag{1}$$

Le résultat du type Kneser a été suivi par A. Mambriani [24] en 1929. (voir aussi Gross [18], Wong [26]). Dans tous ces travaux, les conditions sur la fonction f sont imposées pour assurer l'existence locale d'une solution unique pour l'équation (1).

Au début des années cinquante, la recherche de solutions bornées pour les problèmes aux limites est initié par C. Corduneanu [12], [13] qui a considéré les problèmes aux limites du second ordre suivants :

$$\begin{cases} u''(t) = f(t, u(t)), \quad t \in]0, +\infty[\\ u(0) = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R} \\ u(t) \quad \text{bornée sur } [0, +\infty[, \end{cases} \tag{2}$$

et

$$\begin{cases} u''(t) = f(t, u(t)), \quad t \in \mathbb{R} \\ u(t) \quad \text{bornée sur } \mathbb{R}. \end{cases} \tag{3}$$

Depuis le début des années soixante-dix, les problèmes aux limites sur les intervalles infinis ont été étudiés intensivement. Granas, Guenther, Lee, et O'Regan [17], Baxley[8], Bobisud [7], Agarwal et O'Regan, [2], [3], [4], [5] et Ma et Zhu [23] ont utilisé une variété de méthodes pour étudier les problèmes aux limites associés aux équations différentielles ordinaires du second ordre sur les intervalles infinis.
On peut étudier les problèmes aux limites du second ordre sur les intervalles infinis directement sur les non bornés ou utiliser un processus de diagonalisation.

Pour celà on a divisé notre travail en cinq chapitres, organisés comme suit :

Le premier chapitre est consacré à quelques définitions principales utilisées dans la suite du travail, on a donné aussi les différents théorèmes de point fixe qui sont : le théorème de Schauder, le théorème de Furi-Pera, l'Alternative nonlinéaire de Leray-Schauder et le théorème du point fixe de Krasnoselskii et quelques critères de compacité à savoir, le critère de Corduneanu et le critère de compacité sur les espaces L^p.

Dans le deuxième chapitre, on va établir l'existence de solution pour le problème aux limites sur $[0, +\infty[$:

$$\begin{cases} -u''(t) + m^2 u(t) = f(t, u(t)), \quad \text{p.p } t \geq 0, \\ u(0) = a, \quad \lim\limits_{t \to +\infty} u(t) = 0, \end{cases}$$

avec $m > 0, a \in \mathbb{R}$, on utilisera le théorème du point fixe de Furi-Pera et le critère de compacité d'Ascoli-Arzéla. La solution ici est construite à partir de solutions partielles définies sur des intervalles compacts de type $[0, t_m]$.

Dans le troisième chapitre, on s'intéresse à l'existence de solutions d'un problème aux limites sur $\mathbb{R}$, on étudie le problème suivant :

$$\begin{cases} -u''(t) + cu'(t) + \lambda u(t) = f(t, u(t)), \quad t \in \mathbb{R}, \\ \lim\limits_{|t| \to +\infty} u(t) = 0, \end{cases}$$

avec $c > 0, \lambda > 0$ et $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue qui satisfait $\lim\limits_{|t| \to +\infty} f(t, 0) = 0$.

Ce chapitre comporte deux parties :

Dans la première partie, on montre l'existence d'une solution dans l'espace $E_0 = C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ en utilisant le théorème du point fixe de Schauder, et dans la deuxième partie on montre l'existence d'une solution faible dans l'espace $L^r(\mathbb{R})$, en utilisant le théorème du point fixe de Schauder-Tychonoff.
Pour montrer la compacité de l'opérateur du point fixe, on va employer le critère de compacité d'Ascoli-Arzéla dans la première partie et le critère compacité de Fréchet-kolmogorov dans la deuxième partie.

Dans le quatrième chapitre, on va étudier l'existence d'une solution pour le problème à trois points suivant :

$$\begin{cases} -u''(t) = f(t, u(t), u'(t)), \quad t > 0, \\ u(0) = \alpha u(\eta), \quad \lim\limits_{t \to +\infty} u'(t) = 0, \end{cases}$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0, \eta \in \mathbb{R}_*^+$ et $f : I \times \in \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est S-Carathéodory. On va utiliser l'Alternative nonlinéaire de Leray-Schauder et le critère de compacité de Corduneanu.

Dans le chapitre cinq, nous avons étudié l'existence des solutions positives pour le problème au limites suivant :

$$\begin{cases} -u''(t) + k^2(t)u(t) = \lambda m(t) f(t, u(t)), \quad t \in \mathbb{R}_*^+, \\ u(0) = 0, \quad \lim\limits_{t \to +\infty} u(t) = 0, \end{cases}$$

Ici k est une fonction au lieu d'une constante ; ce qui pose beaucoup de difficultés notament pour la construction de la fonction de Green.
On utilise le théorème du point fixe de krasnoselskii et le critère de compacité de Corduneanu sur les cônes.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Quelques notations

$C^k(I,J)$:= l'ensembles des fonctions $f : I \to J$, k fois continument dérivables.

$C^0(I,J) := C(I,J)$.

$C^k(I) := C^k(I,\mathbb{R})$.

$C_0(\mathbb{R},\mathbb{R}) := \{u \in C(\mathbb{R},\mathbb{R}) : \lim\limits_{|t|\to+\infty} u(t) = 0\}$, muni de la norme $\|u\|_\infty$.

$\|u\|_\infty := \|u\|_C = \sup\limits_{t\in I} |u(t)|$.

$C_b(I,\mathbb{R})$:= l'espace de toutes les fonctions bornées de $C(I,\mathbb{R})$.

$C^1_\infty(I,\mathbb{R}) := \{u \in C^1(I,\mathbb{R}) : \lim\limits_{t\to+\infty} u(t) \quad \text{et} \quad \lim\limits_{t\to+\infty} u'(t) \quad \text{existe}\}$.

$L^p(I) := \{u, \int_I |u(t)|^p dt < +\infty\}$.

$\|u\|_{L^p(I)} := (\int_I |u(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}}$.

$W^{k,p}(I) := \{u \in C^{k-1}(I,\mathbb{R}), u^{(k)} \in L^p(I)\}$.

L^p_{Loc} := l'espace des fonctions localement L^p-intégrables.

$W^{k,p}_{loc}(I) := \{u \in C^{k-1}(I, \mathbb{R}), u^{(k)} \in L^p_{loc}(I)\}$.

$C_l(\mathbb{R}^+) := \{u \in C(\mathbb{R}^+), \lim\limits_{t \to +\infty} u(t) \quad \text{existent}\}$.

$\mathbb{R}^+ := [0, +\infty[$.

$\mathbb{R}^+_* :=]0, +\infty[$.

1.2 Quelques définitions

Définition 1.1. ***(Espace métrique)***
Un espace métrique (E, d) *est la donnée d'un ensemble* E *et d'une application* $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *appelée distance qui vérifie :*

1. $x, y \in E$ *et* $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

2. $\forall x, y \in E : d(x, y) = d(y, x)$,

3. $\forall x, y, z \in E : d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$*(inégalité triangulaire).*

Définition 1.2. ***(Espace vectoriel normé)***
Soit E *un espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$*, une norme sur* E *est une application*

$$\begin{aligned} \|.\| : E &\longrightarrow [0, +\infty[\\ x &\mapsto \|x\|. \end{aligned}$$

ayant les propriètées suivantes :

— $x \in E$ *et* $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$,

— $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}$*, on a* $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$,

— $\forall x \in E, \forall y \in E : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Le couple $(E, \|.\|)$ *est dit espace vectoriel normé.*

Définition 1.3. ***(Espace complet)***
On dit que (E, d) *est complet si toutes les suites de Cauchy sont convergentes.*

Définition 1.4. ***(Espace de Banach)***
On appelle un espace de Banach, un espace vectoriel normé qui est complet pour la distance issue de sa norme.

Définition 1.5. *On dit que* f *est un homéomorphisme de* E *sur* F *si* f *est bijective et continue de* E *sur* F *et si* f^{-1} *est continue de* F *sur* E.
On dit que E *et* F *sont homéomorphes s'il existe un homéomorphisme de* E *sur* F.

Définition 1.6. *Un espace topolgique E est dit métrisable s'il est homéomorphe à un espace métrique.*

Définition 1.7. *Une topologie est dite métrisable si et seulement s'il existe une métrique telle que la topologie soit associée à cette métrique.*

Définition 1.8. ***(Espace de Fréchet)*** *On appelle espace de Fréchet un espace vectoriel muni d'une topologie métrisable, et complet pour cette topologie.*

Soit E un espace vectoriel normé, A un sous-ensemble de E.

Définition 1.9. ***(Borné)*** *On dit que A est un sous-ensemble borné de E si, $\exists M > 0$ tel que $\forall x \in A, \|x\| < M$.*

Définition 1.10. ***(Fermé)*** *On appelle A un sous-ensemble fermé de E si, pour toute suite convergente $(f_n)_{n\geq 1} \subset A$ le point limite est aussi dans A.*

Définition 1.11. ***(Ouvert)*** *On dit que A est un sous-ensemble ouvert de E si, $\forall x \in A, \exists \delta > 0$ tel que $y \in E, \|x - y\| < \delta \Rightarrow y \in A$.*

Définition 1.12. *On dit que A est convexe si, pour chaque $x, y \in A$ et $\lambda \in [0, 1]$, on a $\lambda x + (1 - \lambda)y \in A$.*

Définition 1.13. *Soit $I \subset \mathbb{R}$, on dit que $f : I \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de Carathéodory si :*

1. *l'application $x \mapsto f(x, y)$ est mesurable pour tout $y \in \mathbb{R}$,*

2. *l'application $y \mapsto f(x, y)$ est continue sur $\mathbb{R}$ pour presque tout $x \in I$.*

Si pour chaque nombre réel $r > 0$, il existe $h_r \in L^1(I)$ tell que $|f(x, y)| < h_r(x)$, pour presque tout $x \in I$ et pour tout $y \in \mathbb{R}$, avec $|u|, |u| < r$, alors f est dite L^1-Carathéodory.

Définition 1.14. *$f : I \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est S-Carathéodory si :*

— *l'application $x \mapsto f(x, y, z)$ est mesurable pour tout $(y, z) \in \mathbb{R}^2$.*

— *l'application $(y, z) \mapsto f(x, y, z)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ pour presque tout $x \in I$.*

— *pour chaque* $r > 0$, *il existe* $\varphi_r \in L^1(I, [0, +\infty[)$ *avec* $x\varphi_r \in L^1([0, +\infty[)$ *tell que*
  $\max(|y|, |z|) \leq r \Rightarrow |f(x, y, z)| \leq \varphi_r$, *pour presque tout* $x \in I$.

Définition 1.15. ***(Cône)***
Soit E *un espace de Banach, et* $K \subset E$ *un sous-ensemble non-vide, fermé et convexe.*
K *est un cône sur* E *s'il verifie les conditions suivantes :*

1. $\forall x \in K, \quad \lambda x \in K$ *pour tout réel* $\lambda > 0$,
2. *si* $x \in K$ *et* $-x \in K$, *alors* $x = 0$.

Définition 1.16. *Une application* $F : E \longrightarrow E$ *est dite complètement continue si* F *est continue et l'image de tout ensemble borné de* E *est relativement compacte.*

1.3 Quelques théorèmes du points fixes

Dans cette section, on va citer quelques théorèmes de points fixes utilisés dans les chapitres qui suivent.
On commence par le théorème de Schauder qui généralise le théorème de Brouwer en dimension infinie.

Théorème 1.1. ***(Schauder)****[28] Soit* E *un espace de Banach et* K *une partie non vide de* E, *convexe, fermée et bornée. Si* T *est une application continue de* K *dans* K, *et* $T(K)$ *est relativement compact sur* E, *alors* T *admet un point fixe dans* K.

Théorème 1.2. ***(Furi-Pera)****[16]*
Soit E *espace de Fréchet,* Q *un sous-ensemble convexe fermé de* E, $0 \in Q$ *et soit* $T : Q \longrightarrow E$ *une application continue compacte. De plus, pour toute suite* $(u_j, \lambda_j)_{j \geq 1}$ *de* $\partial Q \times [0, 1]$ *qui converge vers* (u, λ) *avec* $u = \lambda T(u), 0 \leq \lambda < 1$, *on a* $\lambda_j T(u_j) \in Q$ *pour tout* j *assez-grand. Alors,* T *admet un point fixe dans* Q.

Théorème 1.3. ***(Leray-Schauder)****[28]*
Soit E *un espace de Banach et* $F : E \to E$ *un opérateur. Si*

1. F *est un opérateur complètement continu*

2. Il existe $r > 0$ tel que si $x = \lambda F(x)$ avec $\lambda \in]0, 1[$, alors $\|x\| \leq r$,

alors F admet un point fixe.

Théorème 1.4. ***(Alternative nonlinéaire de leray-Schauder)****[14], [25], [28]*
Soient E un espace de Banach et $F : E \to E$ un opérateur complètement continu. Alors on a :

ou bien

1. *L'équation $x = \lambda F(x)$ admet une solution x pour $\lambda = 1$,*

   ou bien

2. *Pour tout $\lambda \in]0, 1[$ l'ensemble $\{x \in E, x = \lambda Fx\}$ n'est pas borné.*

Théorème 1.5. ***(Schauder-Tychonoff)****[28]*
Soit K un sous-ensemble convexe, fermé d'un espace de Fréchet. Si $F : K \to K$ est une application continue et compacte alors F admet un point fixe dans K.

On fera appel au chapitre 5 au théorème de Krasnoselskii du à Guo (1988) qui est une version de type norme du théorème d'expansion et de compression d'un cône de Krasnoselskii (voir annexe).

Théorème 1.6. ***(Krasnoselskii)****[19] Soit K un cône d'un espace de Banach E. On suppose que Ω_1, Ω_2 sont des sous-ensembles bornés de E avec $0 \in \Omega_1, \bar{\Omega_1} \subset \Omega_2$. Soit $A : K \cap (\bar{\Omega_2} \setminus \Omega_1) \to K$ un opérateur complètement continu et si l'une des conditions suivantes est satisfaite :*

1. *$\|Ax\| \leq \|x\|, x \in K \cap \partial\Omega_1$ et $\|Ax\| \geq \|x\|, x \in K \cap \partial\Omega_2$,*
2. *$\|Ax\| \geq \|x\|, x \in K \cap \partial\Omega_1$ et $\|Ax\| \leq \|x\|, x \in K \cap \partial\Omega_2$.*

Alors A admet un point fixe dans $K \cap (\bar{\Omega_2} \setminus \Omega_1)$.

1.4 Quelques critères de compacité

Pour montrer la compacité de l'opérateur du point fixe, on aura besoin de quelques critères de compacité. On commence par le critère d'Ascoli-Arzéla qui donne la compacité sur les intervalles bornés.

1.4.1 Critère de compacité d'Ascoli-Arzéla

Théorème 1.7. *[9] Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C([a,b],\mathbb{R})$ une suite vérifiant :*

1. *$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément bornée, i.e $\exists g \subset C_b([a,b],\mathbb{R})$,*

$$\exists c > 0, \forall n \in \mathbb{N} : \|f_n\| \leq c\|g\|.$$

2. *$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équi-continue, i.e*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon), \forall t, s \in [a,b] : |t-s| \leq \delta \Rightarrow |f_n(t)-f_n(s)| \leq \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Alors, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est relativement copmacte. (i.e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente).

1.4.2 Critères de compacité sur des intervalles non-bornés

Critère de compacité de Corduneanu

Soit $C_l = \{u \in C(\mathbb{R}^+), \lim\limits_{t\to+\infty} u(t) \quad \text{existe}\}$.
C_l est un espace de Banach muni de la norme

$$\|u\|_l = \sup_{t\in\mathbb{R}^+} |u(t)|.$$

Définition 1.17. *La famille $\mathcal{A} \subset C_l$ est dite équi-convergente si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists T = T(\varepsilon) > 0, \forall t > T, |u(t) - \lim_{t\to+\infty} u(t)| < \varepsilon, \forall u \in \mathcal{A}.$$

Définition 1.18. *La famille $\mathcal{A} \subset C_l$ est dite équi-continue sur chaque intervalle compact de $\mathbb{R}$ si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0, \forall (t_1,t_2) \in I^2, |t_1 - t_2| \leq \delta \Rightarrow |u(t_1) - u(t_2)| < \varepsilon, \forall u \in \mathcal{A}.$$

La proposition suivante donne le critère de compacité de Corduneanu utilisé dans le chapitre 4.

Proposition 1.1. ***(Critère de Corduneanu)****[6], [10],[11] Une famille $\mathcal{A} \subset C_l$ est relativement compacte si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :*

1. $\mathcal{A}$ *est uniformément bornée dans* C_l.

2. $\mathcal{A}$ *est équi-continue sur chaque intervalle compact de* $\mathbb{R}$.

3. $\mathcal{A}$ *est équi-convergente.*

1.4.3 Critère de compacité dans les espace L^P

Proposition 1.2. ***(Fréchet-Kolmogorov)****[27, p.275] Un ensemble* $S \subset L^p(\mathbb{R})$ $(1 \leq p < +\infty)$ *est relativement compact si et seulement si* S *est borné et pour chaque* $\varepsilon > 0$*, on a :*

1. $\exists \delta > 0$ *tel que* $\int_{-\infty}^{+\infty} |u(x+h) - u(x)|^p dx < \varepsilon, \forall u \in S, \forall 0 < h < \delta$.

2. *il existe* $N > 0$ *tel que* $\int_{\mathbb{R} \setminus [-N,N]} |u(x)|^p dx < \varepsilon, \forall u \in S$.

Chapitre 2

Etude d'un problème aux limites sur $[0, +\infty[$

Dans ce chapitre, on va établir l'existence d'une solution pour le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} -u''(t) + m^2u(t) = f(t, u(t)), & \text{p.p } t \geq 0 \\ u(0) = a, \quad \lim\limits_{t\to+\infty} u(t) = 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

où $m > 0$ et $f : [0, +\infty[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est telle que :

1. f est une fonction de L^1-Carathéodory avec

$$\lim_{t\to+\infty} e^{-m^2t} \int_0^t e^{m^2s} h_r(s)ds = 0,$$

2. $\exists M_0 > |a|$ tel que $|u(t)| \leq M_0, \quad t \in \mathbb{R}^+$ pour toute fonction $u \in C_b(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}) \cap W^{2,1}_{loc}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ qui satisfait

$$\begin{cases} -u''(t) + m^2u(t) = \lambda f(t, u(t)), & \text{p.p } t \geq 0 \\ u(0) = a, \quad \lim\limits_{t\to+\infty} u(t) = 0, \end{cases}$$

pour tout $0 \leq \lambda < 1$.
La solution est construite en utilisant un processus de diagonalisation.

Théorème 2.1. *[1] Sous les conditions* 1. *et* 2. *le problème* (2.1) *admet une solution* $u \in C_b(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}) \cap W^{2,1}_{loc}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$.

Démonstration. On va utiliser le théorème du point fixe de Furi-Pera (théorème 1.3). Il est facile de voir de la condition 1. que le problème (2.1) est équivalent à trouver une solution u qui satisfait

$$\begin{aligned} u(t) = ae^{-m^2t} - \frac{1}{m^2}\int_t^{+\infty} f(s, u(s))ds \\ - \frac{e^{-m^2t}}{m^2}\int_0^t e^{m^2s} f(s, u(s))ds \\ + \frac{e^{-m^2t}}{m^2}\int_0^{+\infty} f(s, u(s))ds. \end{aligned}$$

Soit $Q = \{u \in C_b(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}) : \|u\|_\infty \leq M_0 + 1 = c\}$ et soit l'opérateur $T : Q \to C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ défini par :

$$\begin{aligned} Tu(t) = ae^{-m^2t} - \frac{1}{m^2}\int_t^{+\infty} f(s, u(s))ds \\ - \frac{e^{-m^2t}}{m^2}\int_0^t e^{m^2s} f(s, u(s))ds \\ + \frac{e^{-m^2t}}{m^2}\int_0^{+\infty} f(s, u(s))ds. \end{aligned}$$

Q est un sous-ensemble borné, convexe fermé de $C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, on montre que $T : Q \to C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ est continu et compact.

D'abord, on montre la continuité.

Soit $u_k \to u$ dans Q on doit montrer $Tu_k \to Tu$ dans $C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$. Il existe $h_c \in L^1(\mathbb{R}^+)$ avec $|f(s, u_k(s))| \leq h_c(s)$ et $|f(s, u(s))| \leq h_c(s)$ pour presque tout $s \in \mathbb{R}^+$. Nous avons aussi

$$f(s, u_k(s)) \to f(s, u(s)) \quad \text{p.p } s \in \mathbb{R}^+,$$

ainsi d'après le théorème de la convergence dominé de Lebesgue $Tu_k(s) \to Tu(s)$

sur $[0, t_m]$. Soit $t, \nu \in [0, t_m]$ avec $t < \nu$. Alors

$$\begin{aligned}
|Tu_k(t) - Tu_k(\nu)| = \;& |ae^{-m^2 t} - \frac{1}{m^2}\int_t^{+\infty} f(s, u_k(s))ds - \frac{e^{-m^2 t}}{m^2}\int_0^t e^{m^2 s} f(s, u_k(s))ds \\
& + \frac{e^{-m^2 t}}{m^2}\int_0^{+\infty} f(s, u_k(s))ds - ae^{-m^2\nu} + \frac{1}{m^2}\int_\nu^{+\infty} f(s, u_k(s))ds \\
& + \frac{e^{-m^2\nu}}{m^2}\int_0^\nu e^{m^2 s} f(s, u_k(s))ds - \frac{e^{-m^2\nu}}{m^2}\int_0^{+\infty} f(s, u_k(s))ds| \\
= \;& |a(e^{-m^2 t} - e^{-m^2\nu}) - \frac{1}{m^2}\int_t^\nu f(s, u_k(s))ds \\
& + \frac{e^{-m^2\nu} - e^{-m^2 t}}{m^2}\int_0^t e^{m^2 s} f(s, u_k(s))ds + \frac{e^{-m^2\nu}}{m^2}\int_t^\nu e^{m^2 s} f(s, u_k(s))ds \\
& + \frac{e^{-m^2 t} - e^{-m^2\nu}}{m^2}\int_0^{+\infty} f(s, u_k(s))ds| \\
\leq \;& |a|\left|e^{-m^2 t} - e^{-m^2\nu}\right| + \frac{1}{m^2}\int_t^\nu h_c(s)ds \\
& + \frac{1}{m^2}\left|e^{-m^2 t} - e^{-m^2\nu}\right|\int_0^t h_c(s)ds + \frac{e^{-m^2\nu}}{m^2}\int_t^\nu h_c(s)ds \\
& + \frac{1}{m^2}\left|e^{-m^2 t} - e^{-m^2\nu}\right|\int_0^{+\infty} h_c(s)ds.
\end{aligned}$$

Puisque $h_c \in L^1(\mathbb{R}^+)$ et la fonction exponentielle est continue, alors $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que $t, \nu \in [0, t_m]$ et $|t - \nu| < \delta$ implique $\forall k$

$$|Tu_k(t) - Tu_k(\nu)| \leq \varepsilon. \tag{2.2}$$

et de la même façon on obtient

$$|Tu(t) - Tu(\nu)| \leq \varepsilon. \tag{2.3}$$

Par conséquent, $(2.2), (2.3)$ et la limite ponctuelle sur $[0, t_m]$ impliquant la convergence uniforme sur $[0, t_m]$, ainsi l'opérateur $T : Q \to C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ est continu.

On montre maintenant que $T(Q)$ est relativement compact dans $C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$. Pour le faire, on montre que $T(Q)$ est uniformément borné et équi-continu sur $[0, t_m]$. On sait qu'il existe $h_c \in L^1(\mathbb{R}^+)$ avec $|f(s, u(s))| \leq h_c(s)$ pour presque tout $s \in \mathbb{R}^+$. L'équi-continuité de $T(Q)$ sur $[0, t_m]$, se fait de la même manière que la démonstration de la continuité. De même, $T(Q)$ est uniformément borné puisque pour tout $t \in [0, t_m]$ et pour tout $u \in Q$ on a :

$$\begin{aligned}
|Tu(t)| &\leq |a||e^{-m^2 t}| + \frac{1}{m^2}\int_t^{+\infty} h_c(s)ds \\
&+ \frac{1}{m^2}|e^{-m^2 t}| \int_0^t |e^{-m^2 s}| h_c(s)ds \\
&+ \frac{1}{m^2}|e^{-m^2 t}| \int_0^{+\infty} h_c(s)ds \\
\\
&\leq |a| + \frac{1}{m^2}\int_t^{+\infty} h_c(s)ds + \frac{1}{m^2}\int_0^t h_c(s)ds \\
&+ \frac{1}{m^2}\int_0^{+\infty} h_c(s)ds \\
\\
&\leq |a| + \frac{3}{m^2}\int_0^{+\infty} h_c(s)ds
\end{aligned}$$

Donc $T(Q)$ est relativement compact dans $C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, ainsi $T : Q \to C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ est compact.

Maintenant on va montrer que la condition du théorème de Furi-Pera (théorème 1.3) est satisfaite.

On prend une suite $(u_j, \lambda_j)_{j \geq 1}$ de $\partial Q \times [0, 1]$ qui converge vers (u, λ) avec $u(t) = \lambda T u(t)$ et $0 \leq \lambda < 1$, on doit montrer que $\lambda_j T(u_j) \in Q$ pour j assez-grand. Soit $u \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ avec $|u(t)| \leq c$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$. Alors

$$\begin{aligned}
|Tu(t)| \leq \quad & |a|e^{-m^2 t} + \frac{1}{m^2}\int_t^{+\infty} h_c(s)ds \\
&+ \frac{e^{-m^2 t}}{m^2}\int_0^t e^{m^2 s} h_c(s)ds \\
&+ \frac{e^{-m^2 t}}{m^2}\int_0^{+\infty} h_c(s)ds \equiv \Psi_c(t).
\end{aligned}$$

On a $\lim\limits_{t \to +\infty} \Psi_c(t) = 0$. Ceci, ainsi que le fait que $u \in \partial Q$ impliquent qu'il existe $a_0 \geq 0$ avec $|Tu_k(t)| \leq M_0 + 1 = c$ pour $t \in [a_0, +\infty[$ et $j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Par conséquent

$$|\lambda_j Tu_j(t)| \leq c, \quad t \in [a_0, +\infty[\quad \text{et } j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}. \tag{2.4}$$

Etudions maintenant le cas $t \in [0, a_0]$. Puisque T est continu sur Q on a $Tu_j \to Tu$ uniformément sur $[0, a_0]$. De plus, puisque $\lambda_j \to \lambda$ et $T(Q)$ est borné dans $C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, on a $\lambda_j Tu_j \to \lambda Tu$ uniformément sur $[0, a_0]$, car

$$\begin{aligned}
|\lambda_j Tu_j(t) - \lambda Tu(t)| = \; & |\lambda_j a e^{-m^2 t} - \lambda_j \frac{1}{m^2} \int_t^{+\infty} f(s, u_j(s)) ds \\
& - \lambda_j \frac{e^{-m^2 t}}{m^2} \int_0^t e^{m^2 s} f(s, u_j(s)) ds + \lambda_j \frac{e^{-m^2 t}}{m^2} \int_0^{+\infty} f(s, u_j(s)) ds \\
& - \lambda a e^{-m^2 t} + \lambda \frac{1}{m^2} \int_t^{+\infty} f(s, u(s)) ds + \lambda \frac{e^{-m^2 t}}{m^2} \int_0^t e^{m^2 s} f(s, u(s)) ds \\
& - \lambda \frac{e^{-m^2 t}}{m^2} \int_0^{+\infty} f(s, u(s)) ds| \\
\leq \; & |\lambda_j - \lambda||a| + |\lambda_j - \lambda| \frac{1}{m^2} \int_t^{+\infty} h_c(s) ds + |\lambda_j - \lambda| \frac{1}{m^2} \int_0^t h_c(s) ds \\
& + |\lambda_j - \lambda| \frac{1}{m^2} \int_0^{+\infty} h_c(s) ds \\
= \; & |\lambda_j - \lambda|(|a| + \frac{1}{m^2} \int_t^{+\infty} h_c(s) ds + \frac{1}{m^2} \int_0^t h_c(s) ds \\
& + \frac{1}{m^2} \int_0^t h_c(s) ds + \frac{1}{m^2} \int_0^{+\infty} h_c(s) ds) \\
& \to 0.
\end{aligned}$$

Ainsi il existe $j_0 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ avec

$$|\lambda_j Tu_j(t)| \leq |\lambda Tu(t)| + 1, \quad t \in [0, a_0] \quad \text{pour } j \geq j_0. \tag{2.5}$$

Puisque $u(t) = \lambda Tu(t)$ alors

$$|\lambda Tu(t)| \leq M_0.$$

donc (2.5) implique pour $j \geq j_0$

$$|\lambda_j Tu_j(t)| \leq M_0 + 1 = c, \quad \text{pour } t \in [0, a_0]. \tag{2.6}$$

Donc (2.4) et (2.6) impliquent que $\lambda_j T u_j \in Q$ pour $j \geq j_0$.
Par conséquent toutes les conditions du théorème 1.3 de Furi-Pera sont satisfaites, alors T admet un point fixe u dans Q.
Donc le problème (2.1) admet une solution. $\square$

Chapitre 3

Etude d'un problème aux limites sur $\mathbb{R}$

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'existence de la solution classique dans l'espace $C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et de la solution faible dans $L^r(\mathbb{R})$ du problème suivant :

$$\begin{cases} -u''(t) + cu'(t) + \lambda u(t) = f(t, u(t)), t \in \mathbb{R} \\ \lim\limits_{|t| \to +\infty} u(t) = 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

où $c > 0, \lambda > 0$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue qui satisfait $\lim\limits_{|t| \to +\infty} f(t, 0) = 0$. La fonction de Green associée au problème (3.1) est définie par :

$$G(t, s) = \frac{1}{r_1 - r_2} \begin{cases} e^{r_1(t-s)} & \text{si } t \leq s \\ e^{r_2(t-s)} & \text{si } t \geq s \end{cases} \tag{3.2}$$

où

$$r_1 = \frac{c + \sqrt{c^2 + 4\lambda}}{2} > 0 \quad \text{et } r_2 = \frac{c - \sqrt{c^2 + 4\lambda}}{2} < 0.$$

3.1 La solution classique pour un problème aux limites sur $\mathbb{R}$

Dans cette section, on considère l'espace $E_0 := C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On a le résultat d'existence suivant :

Théorème 3.1. *[15] Soit G la fonction de Green définie par* (3.2)*, on suppose que les hypothèses suivantes sont vérifiées :*

$$\begin{cases} \exists \Psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \quad \textit{continue et croissante}; \\ \exists q \in E_0 \quad \textit{positive, continue telle que} \\ |f(t,u)| \leq q(t)\Psi(|u|), \forall (t,u) \in \mathbb{R}^2; \\ \exists M_0 \in \mathbb{R}^+_*, \frac{\alpha \Psi(M_0)}{M_0} \leq 1 \qquad \textit{avec } \alpha := \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s)q(s)ds < +\infty. \end{cases} \tag{3.3}$$

Alors le problème (3.1) *admet une solution $u \in E_0$.*

Démonstration. Il est clair que le problème (3.1) est équivalent à trouver une solution de l'équation intégrale :

$$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s)f(s,u(s))ds,$$

On définit l'opérateur $T : E_0 \to E_0$ par

$$Tu(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s)f(s,u(s))ds. \tag{3.4}$$

On va utiliser le théorème du point fixe de Schauder (théorème 1.2), pour l'existence des points fixes de l'opérateur T dans l'espace de Banach E_0. Pour cela on va partager la démonstration en quatre étapes.

Étape 1 : *L'opérateur T est bien défini.*
En effet, pour tout $u \in E_0$, on obtient, par les hypothèses (3.3) :

$$\begin{aligned} |Tu(t)| &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s)|f(s,u(s))|ds \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s)q(s)\Psi(|u(s)|)ds \\ &\leq \Psi(\|u(s)\|) \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s)q(s)ds, \quad t \in \mathbb{R} \\ &\leq \alpha\Psi(\|u\|) < \infty. \end{aligned}$$

De plus, pour tout $s \in \mathbb{R}, G(\pm\infty, s) = 0$, et alors, en prenant la limite dans l'expression $Tu(t)$, on obtient : $Tu(\pm\infty) = 0$. Donc l'opérateur $T : E_0 \to E_0$

est bien défini.

Étape 2 : *L'opérateur T est continu.*
Soit $(u_n)_n \in E_0$ une suite convergente uniformément vers u_0 sur tout sous intervalle compact de $\mathbb{R}$. Pour $a > 0$, on montre la convergence uniforme de $(Tu_n)_n$ vers Tu_0 sur l'intervalle $[-a, a]$.

$$\begin{aligned}
Tu_n(t) - Tu_0(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s)f(s,u_n(s)) - \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s)f(s,u_0(s)ds \\
&= \int_{-\infty}^{-b} G(t,s)f(s,u_n(s))ds + \int_{+b}^{+\infty} G(t,s)f(s,u_n(s))ds \\
&\quad + \int_{-b}^{+b} G(t,s)[f(s,u_n(s)) - f(s,u_0(s)]ds - \int_{-\infty}^{-b} G(t,s)f(s,u_0(s)ds \\
&\quad - \int_{+b}^{+\infty} G(t,s)f(s,u_0(s)ds \\
&= \int_{-b}^{+b} G(t,s)[f(s,u_n(s)) - f(s,u_0(s)]ds \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}\setminus[-b,+b]} G(t,s)f(s,u_n(s))ds - \int_{\mathbb{R}\setminus[-b,+b]} G(t,s)f(s,u_0(s))ds,
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
|Tu_n(t) - Tu_0(t)| \leq & \int_{-b}^{+b} G(t,s)|f(s,u_n(s)) - f(s,u_0(s)|ds \\
&+ \int_{\mathbb{R}\setminus[-b,+b]} G(t,s)|f(s,u_n(s))|ds - \int_{\mathbb{R}\setminus[-b,+b]} G(t,s)|f(s,u_0(s))|ds.
\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$ et on choisit un certain $b > a$ assez-grand. Par la convergence uniforme de la suite $(u_n)_n$ sur $[-b, b]$ et la cotnuité de f, il existe un entier $N = N(\varepsilon, b)$ tel que

$$n \geq N \Rightarrow I_1 := \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_{-b}^{+b} G(t,s)|f(s,u_n(s)) - f(s,u_0(s)|ds < \frac{\varepsilon}{2},$$

par le critère de la convergence de Cauchy et $\lim\limits_{|s|\to+\infty} f(s,u(s)) = 0$, on a

$$I_2 := \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}\setminus[-b,b]} G(t,s)|f(s,u_0(s)|ds < \frac{\varepsilon}{4},$$

et par le théorème de la convergence dominée de Lebegue, on a aussi

$$\begin{aligned}
I_3 :=& \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}\setminus[-b,b]} G(t,s)|f(s,u_n(s)|ds \\
\leq& \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}\setminus[-b,b]} G(t,s)q(s)\Psi(|u_n(s)|)ds \\
\leq& \Psi(\|u_n\|) \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}\setminus[-b,b]} G(t,s)q(s)ds \\
<& \frac{\varepsilon}{4}.
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$|Tu_n(t) - Tu_0(t)| \leq I_1 + I_2 + I_3 < \varepsilon.$$

Ceci prouve la convergence uniforme de la suite $(Tu_n)_n$ vers la limite Tu_0 sur l'intervalle $[-a,a]$.

Étape 3 : *Pour $M > 0$, l'ensemble $\{Tu, \|u\| \leq M\}$ est relativement compact dans E_0.*

Par le théorème d'Ascoli-Arzéla, il suffit de montrer que toutes les fonctions de cet ensemble sont équi-continues sur chaque sous intervalle $[-a,a]$ et qu'il existe une fonction $\gamma \in E$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}, |Tu(t)| \leq \gamma(t)$.

Soit $t_1, t_2 \in [-a,a]$; on a les estimations suivantes :

$$\begin{aligned}
|Tu(t_1) - Tu(t_2)| &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |G(t_1,s) - G(t_2,s)||f(s,u(s)|ds \\
&\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |G(t_1,s) - G(t_2,s)|q(s)\Psi(|u(s)|)ds \\
&\leq \Psi(M) \int_{-\infty}^{+\infty} |G(t_1,s) - G(t_2,s)|q(s)ds
\end{aligned}$$

Par la continuité de la fonction de Green G, le second membre de cette inégalité tend vers 0, quand $t_1 \to t_2$, d'où l'équicontinuité de l'ensemble $\{Tu, \|u\| \leq M\}$.

Maintenant, on a :

$$\begin{aligned}|Tu(t)| &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s)|f(s,u(s))|ds \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s)q(s)\Psi(|u(s)|)ds \\ &\leq \Psi(M)\int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s)q(s)ds := \gamma(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

on a γ est continue grâce à la contnuité des fonctions G, q et Ψ. De plus $\lim\limits_{t\to\pm\infty} \gamma(t) = 0$, donc $\gamma \in E_0$.

Étape 4 : *Il existe $R > 0$ tel que $T(B(0,R)) \subset B(0,R)$.*
D'après les hypothèses (3.3), on sait que $\exists M_0$ tel que $\frac{\alpha\Psi(M_0)}{M_0} \leq 1$. Si $\|u\| \leq M_0$, alors

$$\begin{aligned}\|Tu(t)\| &\leq \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s)q(s)\Psi(|u(s)|)ds \\ &\leq \alpha\Psi(M_0) \\ &\leq M_0,\end{aligned}$$

donc il suffit de prendre $R = M_0$.
Donc d'après le théorème du point fixe de Schauder (théorème 1.2) l'opérateur T admet un point fixe u dans E_0. □

3.2 Existence d'une solution faible

Ici on cherche une solution dans $L^r(\mathbb{R})$ pour le probème (3.1). On a le théorème d'existence suivant.

Théorème 3.2. *[15] Supposons que la nonlinéairité à variables séparées $f(t,v) = q(t)g(v)$ est de type Carathéodory avec $q \in L^p(\mathbb{R})$ $(1 < p < +\infty)$ et g satisfait la condition de croissance polynomiale générale :*

$$\begin{cases} \exists k, \sigma > 0, |g(s)| \leq k|s|^\sigma, \quad p.p\ t \in \mathbb{R} \quad \text{et pour tout } s \in \mathbb{R}. \\ \alpha := \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |G(t,s)|^p q^p(s)ds\right)^{\frac{\sigma}{p-1}} dt < +\infty, \\ \quad \text{avec } (\theta \neq 1) \quad \text{ou } (\theta = 1 \quad \text{et } k\alpha^{\frac{p-1}{p\sigma}} \leq 1) \quad \text{avec } \theta := \frac{(p-1)^2}{p^2\sigma}. \end{cases} \tag{3.5}$$

Alors le problème (3.1) admet une solution u dans $L^r(\mathbb{R})$ avec $r = \frac{p\sigma}{p-1}$.

Démonstration. Considérons l'espace de Banach $E = L^r(\mathbb{R})$ muni la norme

$$\|u\|_r = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |u(s)|^r ds\right)^{\frac{1}{r}},$$

et l'opérateur $T : E \to E$ défini par (3.4).
On va utiliser le théorème du point fixe de Schauder-Tychonoff pour montrer l'existence d'un point fixe de l'opérateur T.
La démonstration est partagée en trois étapes.

Étape 1 : *L'opérateur T est continu.*

Considérons un certain $u_0 \in L^r(\mathbb{R})$ et montrons la continuité de T en u_0. D'après l'inégalité de Hölder, nous avons :

$$\begin{aligned}
\|Tu - Tu_0\|^r &= \int_{-\infty}^{+\infty} |Tu(t) - Tu_0(t)|^r dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s)q(s)[g(u(s)) - g(u_0(s))]ds\right|^r dt \\
&\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |G(t,s)|^p q(s)^p ds\right)^{\frac{r}{p}} . \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |g(u(s)) - g(u_0(s))|^{p^*} ds\right)^{\frac{r}{p^*}} dt.
\end{aligned}$$

Notons que $\frac{r}{p} = \frac{\sigma}{p-1}$, donc

$$\|Tu - Tu_0\|^r \leq \alpha \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |g(u(s)) - g(u_0(s))|^{p^*} ds\right)^{\frac{r}{p^*}}.$$

Soit $\varepsilon > 0$. A partir de la condition de croissance satisfaite par la fonction g dans l'hypothèse (3.5), nous savons que l'opérateur de Nemyts'kii $\mathcal{G}$ défini par :

$$\begin{gathered}
\mathcal{G} : L^r(\mathbb{R}) \to L^{p^*}(\mathbb{R}) \\
\mathcal{G}u(t) = g(u(t))
\end{gathered}$$

est continu. Alors pour un ε donné, il existe un certain $\delta > 0$ tel que

$$\|u - u_0\| < \delta \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |g(u(s)) - g(u_0(s))|^{p^*} ds < \frac{\varepsilon^{p^*}}{\alpha},$$

d'où $\|Tu - Tu_0\|^r < \varepsilon^r$, donc T est continu sur $L^r(\mathbb{R})$.

Étape 2 : *Pour tout $M > 0$, l'image $\{T(u), \|u\| \leq M\}$ est relativement compacte dans E.*
On utilise l'inégalité de Hölder, on obtient :

$$\begin{aligned}
\|Tu\|^r &= \int_{-\infty}^{+\infty} |Tu(t)|^r dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s)q(s)g(u(s))ds \right|^r dt \\
&\leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |g(u(s))|^{p^*} ds \right)^{\frac{r}{p*}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |G(t,s)|^p q^p(y) ds \right)^{\frac{r}{p}} dt \\
&\leq \alpha k^r \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |u(s)|^{\alpha p^*} ds \right)^{\frac{r}{p^*}} = \alpha k^r \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |u(s)|^r ds \right)^{\frac{r}{p^*}} \\
&\leq \alpha k^r \|u\|^{\frac{r^2}{p^*}},
\end{aligned}$$

on en déduit que $\|Tu\| \leq k\alpha^{\frac{1}{r}} \|u\|^{\frac{r}{p^*}}$.
En posant $S = \{u \in E; \|u\| \leq M\}$, nous obtenons enfin $\|Tu\| \leq k\alpha^{\frac{1}{r}} M^{\frac{r}{p^*}}$, pour tout $u \in S$. Alors l'image $S' = T(S)$ est bornée dans $L^r(\mathbb{R})$.
De plus, par l'inégalité de Hölder nous avons pour tout $u \in S$:

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty} |Tu(t+h) - Tu(t)|^r dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} (G(t+h,s) - G(t,s))q(s)g(u(s))ds \right|^r dt \\
&\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |G(t+h,s) - G(t,s)|^p q^p(s) ds \right)^{\frac{r}{p}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |g(u(s))|^{p^*} ds \right)^{\frac{r}{p^*}} dt \\
&\leq k^r M^{\frac{r^2}{p^*}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |G(t+h,s) - G(t,s)|^p q^p(s) ds dt \right)^{\frac{r}{p}}.
\end{aligned}$$

puisque $0 < \alpha < \infty$, nous en déduisons que $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall u \in S$, $\forall h (0 < h < \delta)$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |Tu(t+h) - Tu(t)|^r dt < \varepsilon^r.$$

De plus, on résulte que pour tout $u \in S$

$$\int_{\mathbb{R}\setminus[-N,N]} |Tu(t)|^r dt \leq k^r M^{\frac{r^2}{p^*}} \int_{\mathbb{R}\setminus[-N,N]} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |G(t,s)|^p q^p(s) ds \right)^{\frac{\sigma}{p-1}} dt.$$

On conclut pour tout $u \in S$, et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un certain $N = N(\varepsilon)$ tel que

$$\int_{\mathbb{R}\setminus[-N,N]} |Tu(t)|^r dt < \varepsilon^r.$$

Grâce au critère de Fréchet-Kolmogorov (proposition 1.2), on déduit que l'ensemble image $T(S)$ est relativement compact dans $L^r(\mathbb{R})$.

Étape 3 : *Il existe un certain $R > 0$ tel que $T(B(0,R)) \subset B(0,R)$.*
En effet, pour tout $u \in E$ satisfaisant $\|u\| \leq R$, nous avons

$$\|Tu\| \leq k\alpha^{\frac{1}{r}} \|u\|^{\frac{(p-1)^2}{p^2\sigma}} \leq k\alpha^{\frac{1}{r}} R^{\frac{(p-1)^2}{p^2\sigma}}.$$

Maintenant, pour tout $\theta \neq 1$, il existe un certain $R > 0$ tel que $k\alpha^{\frac{1}{r}} R^\theta \leq R$. Ceci reste vraie si $\theta = 1$ et $k\alpha^{\frac{1}{r}} \leq 1$. Alors l'implication suivante est vraie

$$\|u\| \leq R \Rightarrow \|Tu\| \leq R,$$

d'où $T(B) \subset B$.

D'après le théorème de point fixe de Schauder-Tychonoff (théorème 1.6) T admet un point fixe dans E. $\square$

Chapitre 4

Etude d'un problème aux limites à trois points sur la demi-droite réelle

Dans ce chapitre, on va étudier l'existence d'une solution pour le problème à trois points suivant, où la nonlinéairité dépend de la dérivée u'

$$\begin{cases} -u''(t) = f(t, u(t), u'(t)), \quad t > 0 \\ u(0) = \alpha u(\eta), \quad \lim\limits_{t \to +\infty} u'(t) = 0. \end{cases} \tag{4.1}$$

où $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0, \eta \in \mathbb{R}_*^+$ et $f : I \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est S-Carathéodory.

Théorème 4.1. *[22] Soit $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction S-Carathéodory qui satisfait la condition suivante :*

Il existe trois fonctions positives $p, q, r \in L^1([0, +\infty[)$ avec $tp(t), tq(t), tr(t) \in L^1([0, +\infty[)$ telles que :

$|f(t, u(t), u'(t))| \leq p(t)|u(t)| + q(t)|v(t)| + r(t), \quad$ *pour p.p* $t \in [0, +\infty[\quad$ *et tout* $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

Le problème (4.1) admet au moins une solution u si l'une des conditions suivantes est satisfaite :

1. *$\eta P + P_1 + Q < 1$ et $\alpha < 0$,*

2. *$\frac{\alpha\eta}{1-\alpha} P + P_1 + Q < 1$ et $0 \leq \alpha < 1$,*

3. $\max\left(\frac{\alpha\eta}{1-\alpha}P + P_1 + Q, \frac{\eta}{\alpha-1}P + \frac{\alpha}{\alpha-1}P_1\right) < 1$ *et* $\alpha > 1$,

avec

$$P = \int_0^{+\infty} p(t)dt, \quad P_1 = \int_0^{+\infty} tp(t)dt, \quad Q = \int_0^{+\infty} q(t)dt,$$
$$Q_1 = \int_0^{+\infty} tq(t)dt \quad R = \int_0^{+\infty} r(t)dt, \quad R_1 = \int_0^{+\infty} tr(t)dt.$$

Pour montrer ce résultat, on a besoin de construire l'opérateur du point fixe et la fonction de Green associée. On a besoin de quelques lemmes.

Lemme 4.1. *[22] Pour un certain $v \in L^1(\mathbb{R}^+)$ avec $tv(t) \in L^1(\mathbb{R}^+)$, le problème suivant :*

$$\begin{cases} -u''(t) = v(t), & t > 0 \\ u(0) = \alpha u(\eta), & \lim\limits_{t\to+\infty} u'(t) = 0. \end{cases}$$

admet une solution unique u qui s'écrit sous la forme :

$$u(t) = \int_0^{+\infty} G(t,s)v(s)ds$$

où G est la fonction de Green associée, définie par :

$$G(t,s) = \frac{1}{1-\alpha}\begin{cases} s & 0 \le s \le \min(\eta, t), \\ \alpha(s-t)+t & 0 \le t \le s, \\ \alpha(\eta - s) + s & 0 < \eta \le s \le t, \\ \alpha(\eta - t) + t & 0 < \max(\eta, t) \le s. \end{cases}$$

Lemme 4.2. *[22] Pour tout $t, s \in [0, +\infty[$, on a :*

$$|G(t,s)| \le \begin{cases} s & \alpha < 0, \\ \frac{s}{1-\alpha} & 0 \le \alpha < 1, \\ \max\left(\frac{\alpha s}{\alpha-1}, \frac{\eta}{\alpha-1}\right) & \alpha > 1. \end{cases}$$

Lemme 4.3. *[22] La fonction de Green satisfait :*

$$\lim_{t\to+\infty} G(t,s) = \bar{G}(s) := \frac{1}{1-\alpha}\begin{cases} s & s < \eta, \\ \alpha(\eta - s) + s & \eta \le s. \end{cases}$$

On définie maintenant l'opérateur $T : C^1_\infty(\mathbb{R}^+) \times [0,1] \to C^1_\infty(\mathbb{R}^+)$ par :

$$T(u,\lambda)(t) = \lambda \int_0^{+\infty} G(t,s) f(s,u(s),u'(s))ds, \tag{4.2}$$

avec $C^1_\infty(\mathbb{R}^+) := \{u \in C^1(\mathbb{R}^+), \lim_{t\to+\infty} u(t) \quad \text{et} \quad \lim_{t\to+\infty} u'(t) \quad \text{existent}\}$ muni de la norme

$$\|u\| = \max(\|u\|_\infty, \|u'\|_\infty).$$

Grâce au lemme 4.1, u est une solution de problème (4.1) si et seulement si u est un point fixe de $T(.,1)$.
Pour démontrer le théorème 4.1, nous aurons besoin du lemme principal suivant :

Lemme 4.4. *[22] Soit $f : [0,+\infty[\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction S-Carathéodory. Alors, pour tout $\lambda \in [0,1]$, l'opérateur $T(u,\lambda)$ défini par (4.2) est complètement continu en u.*

Démonstration. (du lemme 4.4) On va utiliser le critère de compacité de Corduneanu (proposition 1.1). On va partager la démonstration en trois étapes :

Étape 1. *T est bien défini.*
Soit $u \in C^1_\infty$, il existe $r > 0$ tel que $\|u\| \le r$. Puisque f est S-Carathéodory, il existe $\varphi_r \in L^1(\mathbb{R}^+)$, avec $s\varphi_r \in L^1(\mathbb{R}^+)$ tel que $|f(s,u(s),u'(s))| \le \varphi_r(s)$, pour chaque $\lambda \in [0,1]$ et pour presque tout $t > 0$ on a :

$$\begin{aligned}|T(u,\lambda)(t)| &= |\lambda \int_0^{+\infty} G(t,s) f(s,u(s),u'(s))ds| \\ &\le \lambda \int_0^{+\infty} |G(t,s)||f(s,u(s),u'(s))|ds \\ &\le \int_0^{+\infty} |G(t,s)|\varphi_r(s)ds < +\infty.\end{aligned}$$

Car par le lemme 4.2 on a $|G(t,s)| \le ks$ ou bien $|G(t,s)| \le k'$ pour certaines constantes positives k, k'.

Soit $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^+_*$, on a les estimations suivantes

$$\begin{aligned}|T(u,\lambda)(t_1) - T(u,\lambda)(t_2)| &\le \int_0^{+\infty} |G(t_1,s) - G(t_2,s)||f(s,u(s),u'(s))|ds \\ &\le \int_0^{+\infty} |G(t_1,s) - G(t_2,s)|\varphi_r(s)ds.\end{aligned}$$

Par la continuité de la fonction de Green et le théorème de la convergence dominé de Lebesgue, le second membre de cette inégalité tend vers 0 lorsque $t_1 \to t_2$.
La dérivation de la fonction de Green G en t donne :

$$\frac{\partial}{\partial t}G(t,s) = \begin{cases} 0 & \text{si } s \leq t \\ 1 & \text{si } s \geq t, \end{cases}$$

donc

$$\begin{aligned} T(u,\lambda)'(t) = & \quad \lambda \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t}G(t,s)f(s,u(s),u'(s))ds \\ = & \quad \lambda \int_t^{+\infty} f(s,u(s),u'(s))ds. \end{aligned}$$

Soit $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_*^+$, on a

$$\begin{aligned} |T(u,\lambda)'(t_1) - T(u,\lambda)'(t_2)| = & \quad |\lambda \int_{t_1}^{+\infty} f(s,u(s),u'(s))ds - \lambda \int_{t_2}^{+\infty} f(s,u(s),u'(s))ds| \\ = & \quad |\lambda \int_{t_1}^{t_2} f(s,u(s),u'(s))ds| \\ \leq & \quad \lambda \int_{t_1}^{t_2} |f(s,u(s)),u'(s)|ds \\ \leq & \quad \lambda \int_{t_1}^{t_2} \varphi_r(s)ds. \end{aligned}$$

Ce qui tend vers 0 lorsque $t_1 \to t_2$, puisque $\varphi_r \in L^1(\mathbb{R})$.
Alors $T(u,\lambda) \in C^1(\mathbb{R}^+)$.

D'après le lemme 4.3 nous avons :

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to+\infty} T(u,\lambda)(t) = &\quad \lim_{t\to+\infty} \lambda \int_0^{+\infty} G(t,s)f(s,u(s),u'(s))ds \\
= &\quad \lambda \int_0^{+\infty} \bar{G}(s)f(s,u(s),u'(s))ds \\
= &\quad \frac{\lambda}{1-\alpha}\int_0^{\eta} sf(s,u(s),u'(s))ds \\
&\quad + \frac{\lambda}{1-\alpha}\int_\eta^{+\infty} (\alpha\eta + (1-\alpha)s)f(s,u(s),u'(s))ds \\
\leq &\quad \frac{\lambda}{1-\alpha}\int_0^{+\infty} sf(s,u(s),u'(s))ds \\
&\quad + \frac{\alpha\eta\lambda}{1-\alpha}\int_0^{+\infty} f(s,u(s),u'(s))ds + \lambda\int_0^{+\infty} sf(s,u(s),u'(s))ds \\
\leq &\quad \frac{\lambda}{1-\alpha}\int_0^{+\infty} s\varphi_r(s)ds + \frac{\alpha\eta\lambda}{1-\alpha}\int_0^{+\infty}\varphi_r(s)ds + \lambda\int_0^{+\infty} s\varphi_r(s)ds \\
< &+\infty,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to+\infty} T(u,\lambda)'(t) = &\quad \lambda \lim_{t\to+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t}G(t,s)f(s,u(s),u'(s))ds \\
= &\quad \lambda \lim_{t\to+\infty}\int_t^{+\infty} f(s,u(s),u'(s))ds \\
= &\quad 0.
\end{aligned}$$

Donc $T(u,\lambda) \in C^1_\infty(\mathbb{R}^+)$, pour chaque $(u,\lambda) \in C^1_\infty(\mathbb{R}^+) \times [0,1]$.

Étape 2. *Pour chaque $\lambda \in [0,1]$, $T(u,\lambda)$ est continu par rapport à u.* Soit $u_n \to u$ lorsque $n \to +\infty$ sur $C^1_\infty(\mathbb{R}^+)$. Nous montrons que pour chaque $\lambda \in [0,1]$, $T(u_n,\lambda) \to T(u,\lambda)$ lorsque $n \to +\infty$ sur $C^1_\infty(\mathbb{R}^+)$.
Soit $r_0 > 0$ un nombre réel tel que $\max(\|u\|, \max_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \|u_n\|) \leq r_0$. Nous avons

$$\begin{aligned}
|T(u_n,\lambda)(t)-T(u,\lambda)(t)| &= \left|\int_0^{+\infty} G(t,s)[f(s,u_n(s),u_n'(s))ds - f(s,u(s),u'(s))]ds\right| \\
&\leq \left|\int_0^{+\infty} \bar{G}(s)[f(s,u_n(s),u_n'(s)) - f(s,u(s),u'(s))]ds\right| \\
&\leq \int_0^{+\infty} |\bar{G}(s)| \left(|f(s,u_n(s),u_n'(s))| + |f(s,u(s),u'(s))|\right) ds \\
&\leq 2\int_0^{+\infty} |\bar{G}(s)|\varphi_{r_0}(s) < +\infty.
\end{aligned}$$

De plus, f est une fonction Carathéodory. Alors, lorsque $n \to +\infty$

$$\begin{aligned}
&|T(u_n,\lambda)(+\infty) - T(uu_n,\lambda)(+\infty)| \\
&\leq \lambda \int_0^{+\infty} |\bar{G}(s)||f(s,u_n(s),u_n'(s)) - f(s,u(s),u'(s))|ds \to 0.
\end{aligned}$$

Aussi, nous avons lorsque $t \to +\infty$

$$\begin{aligned}
|T(u_n,\lambda)(t) - T(uu_n,\lambda)(+\infty)| &\leq \lambda \int_0^{+\infty} |G(t,s)-\bar{G}(s)||f(s,u_n(s),u_n'(s))|ds \\
&\leq \int_0^{+\infty} |G(t,s)-\bar{G}(s)|\varphi_{r_0}(s)ds \to 0
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
|T(u_n,\lambda)'(t) - T(u,\lambda)'(+\infty)| &\leq \int_t^{+\infty} |f(s,u_n(s),u_n'(s))|ds \\
&\leq \int_t^{+\infty} \varphi_{r_0}(s)ds \to 0.
\end{aligned}$$

De même, nous avons

$$|T(u,\lambda)(t) - T(u,\lambda)(+\infty)| \to 0, \quad \text{lorsque } t \to +\infty$$

et

$$|T(u,\lambda)'(t) - T(u,\lambda)'(+\infty)| \to 0, \quad \text{lorsque } t \to +\infty$$

Soit $A > 0$. pour tout $t \in [0,A]$, nous avons lorsque $n \to +\infty$,

$$\begin{aligned}
&|T(u_n,\lambda)(t) - T(u,\lambda)(t)| \\
&\leq \int_0^{+\infty} |G(t,s)||f(s,u_n(s),u_n'(s)) - f(s,u(s),u'(s))|ds \to 0.
\end{aligned}$$

et

$$
\begin{aligned}
&|T(u_n,\lambda)'(t) - T(u,\lambda)'(t)| \\
&\leq \int_t^{+\infty} |f(s,u_n(s),u_n'(s)) - f(s,u(s),u'(s))|ds \to 0.
\end{aligned}
$$

Étape 3. *Pour chaque $\lambda \in [0,1]$, $T(u,\lambda)$ envoie les ensembles bornés de E en des ensembles relativement compacts.*
Soit $B \subset E$ un sous ensemble borné.
Il est facile de voir que TB est uniformément borné. Montrer que TB est équi-continu et équi-convergent se fait de la même manière que la démonstration de la continuité de $T(u,\lambda)$.

Par conséquent, $T(.,\lambda)$ est complètement continu. □

Démonstration. (du théorème 4.1)
On va utiliser l'Alternative nonlinéaire de Leray-Schauder(Théorème 1.5), il suffit de montrer que les points fixes de $T(.,\lambda)$ appartiennent à une boule fermée de $C^1_\infty(\mathbb{R}^+)$, indépendament de λ. Soit $u(t) = T(u,\lambda)(t)$.
On a

$$
\begin{aligned}
|u'(t)| &= \left| \int_t^{+\infty} \lambda f(s,u(s),u'(s))ds \right| \\
&\leq \int_t^{+\infty} |\lambda f(s,u(s),u'(s))|ds \\
&\leq \int_0^{+\infty} |\lambda f(s,u(s),u'(s))|ds,
\end{aligned}
$$

d'où

$$
\|u'\|_\infty \leq \|\lambda f(t,u,u')\|_{L^1}.
$$

On distingue trois cas :

<u>1^{er} cas</u> : $\alpha < 0$.

Pour tout $u \in C^1_\infty(\mathbb{R}^+)$ on a $u(0)u(\eta) \leq 0$, par conséquent il existe un certain $t_0 \in [0,\eta]$ tel que $u(t_0) = 0$. Alors on a

$$
|u(t)| = \left| \int_{t_0}^t u'(s)ds \right| \leq (t+t_0)\|u'\|_\infty \leq (t+\eta)\|u'\|_\infty, \qquad t \in \mathbb{R}^+. \tag{4.3}
$$

D'après la condition du théorème 4.1 et l'inégalité (4.3), on obtient

$$\begin{aligned}
\|u'\|_\infty &\leq \int_0^{+\infty} |f(t,u(t),u'(t))|dt \quad \text{car } 0<\lambda<1\\
&\leq \int_0^{+\infty} p(t)|u(t)|dt + \int_0^{+\infty} q(t)|u'(t)|dt + \int_0^{+\infty} r(t)dt\\
&\leq \|u'\|_\infty \int_0^{+\infty} (t+\eta)p(t)dt + \|u'\|_\infty \int_0^{+\infty} q(t)dt + \int_0^{+\infty} r(t)dt\\
&= (\eta P + P_1 + Q)\|u'\|_\infty + R,
\end{aligned}$$

et puisque $\eta P + P_1 + Q < 1$, alors :

$$\|u'\|_\infty \leq \frac{R}{1-\eta P - P_1 - Q} := M_1'. \tag{4.4}$$

Au même temps, nous avons pour $t \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned}
|u(t)| &\leq \left| \int_0^{+\infty} G(t,s)f(s,u(s),u'(s))ds \right|\\
&\leq \int_0^{+\infty} |sf(s,u(s),u'(s))ds|\\
&\leq \int_0^{+\infty} sp(s)|u(s)|ds + \int_0^{+\infty} sq(s)|u'(s)|ds + \int_0^{+\infty} sr(s)ds\\
&\leq P_1\|u\|_\infty + Q_1\|u'\|_\infty + R_1\\
&\leq P_1\|u\|_\infty + Q_1 M_1' + R_1,
\end{aligned}$$

et d'après l'inégalité (4.4), on a :

$$\|u\|_\infty \leq \frac{Q_1 M_1' + R_1}{1-P_1} := M_1.$$

Ainsi

$$\|u\| \leq M,$$

où $M = \max(M_1, M_1')$ qui est indépendant de λ.

2ème cas : $0 \leq \alpha < 1$. Pour tout $u \in C^1_\infty$ nous avons pour $t \in \mathbb{R}^+$,

$$|u(t)| = \left| \alpha u(\eta) + \int_0^t u'(s)ds \right| \leq \alpha|u(\eta)| + t\|u'\|_\infty, \tag{4.5}$$

On fait le même travail pour $u(\eta)$, on aura :

$$|u(\eta)| \leq \frac{\eta}{1-\alpha}\|u'\|_\infty, \tag{4.6}$$

on remplace (4.6) dans (4.5), on obtient

$$|u(t)| \leq (\frac{\alpha\eta}{1-\alpha}+t)\|u'\|_\infty \quad \text{pour tout } u \in C^1_\infty. \tag{4.7}$$

D'après la condition du théorème 4.1 et l'inégalité (4.7), on obtient

$$\begin{aligned}
\|u'\|_\infty &\leq \int_0^{+\infty} |f(t,u(t),u'(t))|dt \\
&\leq \int_0^{+\infty} p(t)|u(t)|dt + \int_0^{+\infty} q(t)|u'(t)|dt + \int_0^{+\infty} r(t)dt \\
&\leq \|u'\|_\infty \int_0^{+\infty} \left(\frac{\alpha\eta}{1-\alpha}+t\right) p(t)dt + \|u'\|_\infty \int_0^{+\infty} q(t)dt + \int_0^{+\infty} r(t)dt \\
&= \left(\frac{\alpha\eta}{1-\alpha}P + P_1 + Q\right)\|u'\|_\infty + R,
\end{aligned}$$

et puisque $\frac{\alpha\eta}{1-\alpha}P + P_1 + Q < 1$, alors :

$$\|u'\|_\infty \leq \frac{(1-\alpha)R}{(1-\alpha)(1-P_1-Q)-\alpha\eta P} := M_2', \tag{4.8}$$

et on a aussi

$$\begin{aligned}
|u(t)| &\leq \int_0^{+\infty} \left|\frac{s}{1-\alpha}f(s,u(s),u'(s))ds\right|_{L^1} \\
&\leq \frac{1}{1-\alpha}\left(\int_0^{+\infty} sp(s)|u(s)|ds + \int_0^{+\infty} sq(s)|u'(s)|ds + \int_0^{+\infty} sr(s)\right) \\
&\leq \frac{1}{1-\alpha}(P_1\|u\|_\infty + Q_1\|u'\|_\infty + R_1),
\end{aligned}$$

d'après l'inégalité (4.8) on a :

$$\|u\|_\infty \leq \frac{Q_1 M_2' + R_1}{(1-\alpha-P_1)} := M_2.$$

Ainsi

$$\|u\| \leq M,$$

où $M = \max(M_2, M_2')$ qui est indépendant de λ.

$3^{ème}$ cas : $\alpha > 1$. Pour tout $u \in C^1_\infty$ et pour $t \in \mathbb{R}^+$, nous avons

$$|u(t)| = \left| u(\eta) + \int_\eta^t u'(s)ds \right| \leq \frac{1}{\alpha}|u(0)| + |t-\eta|\|u'\|_\infty, \tag{4.9}$$

On fait le même travail pour $u(0)$, on aura :

$$|u(0)| \leq \frac{\eta}{\alpha - 1}\|u'\|_\infty, \tag{4.10}$$

on remplace (4.10) dans (4.9) on obtient

$$\begin{aligned} |u(t)| &\leq \frac{\eta}{\alpha-1}\|u'\|_\infty + |t-\eta|\|u'\|_\infty \\ &\leq \left(\frac{\eta}{\alpha-1} + t + \eta\right)\|u'\|_\infty, \end{aligned}$$

donc

$$|u(t)| \leq \left(\frac{\alpha\eta}{\alpha-1} + t\right)\|u'\|_\infty. \tag{4.11}$$

D'après la condition du théorème 4.1 et l'inégalité (4.11), on obtient

$$\begin{aligned} &\|u'\|_\infty \leq \int_0^{+\infty} |f(t,u(t),u(t)')|dt \\ &\leq \int_0^{+\infty} p(t)|u(t)|dt + \int_0^{+\infty} q(t)|u'(t)|dt + \int_0^{+\infty} r(t)dt \\ &\leq \|u'\|_\infty \int_0^{+\infty}\left(\frac{\alpha\eta}{\alpha-1} + t\right)p(t)dt + \|u'\|_\infty\int_0^{+\infty} q(t)dt + \int_0^{+\infty} r(t)dt \\ &= \left(\frac{\alpha\eta}{\alpha-1}P + P_1 + Q\right)\|u'\|_\infty + R, \end{aligned}$$

alors :

$$\|u'\|_\infty \leq \frac{(\alpha-1)R}{(\alpha-1)(1-P_1-Q) - \alpha\eta P} := M_3'. \tag{4.12}$$

D'après le lemme 4.2, si $\alpha > 1$, on a

$$|G(t,s)| \leq \begin{cases} \frac{\alpha s}{\alpha-1} & \text{si } s > \frac{\eta}{\alpha} \\ \frac{\eta}{\alpha-1} & \text{si } s < \frac{\eta}{\alpha}. \end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned}|u(t)| \leq & \int_0^{\frac{\eta}{\alpha}} \left|\frac{\eta}{\alpha-1} f(s,u(s),u'(s))\right| ds + \int_{\frac{\eta}{\alpha}}^{+\infty} \left|\frac{\alpha s}{\alpha-1} f(s,u(s),u'(s))\right| ds \\ \leq & \int_0^{+\infty} \left|\frac{\eta}{\alpha-1} f(s,u(s),u'(s))\right| ds + \int_0^{+\infty} \left|\frac{\alpha}{\alpha-1} s f(s,u(s),u'(s))\right| ds \\ \leq & \frac{\eta}{\alpha-1}\left(\int_0^{+\infty} p(s)|u(s)|ds + \int_0^{+\infty} q(s)|u'(s)|ds + \int_0^{+\infty} r(s)ds\right) \\ & + \frac{\alpha}{\alpha-1}\left(\int_0^{+\infty} p(s)|u(s)|ds + \int_0^{+\infty} q(s)|u'(s)|ds + \int_0^{+\infty} r(s)ds\right) \\ \leq & \frac{\eta}{\alpha-1}(P\|u\|_\infty + Q\|u'\|_\infty + R) + \frac{\alpha}{\alpha-1}(P_1\|u\|_\infty + Q_1\|u'\|_\infty + R_1).\end{aligned}$$

D'après l'inégalité (4.12), on a :

$$\|u\|_\infty \leq \frac{\alpha(Q_1 M_3' + R_1) + \eta((QM_3' + R)}{(\alpha-1) - (\alpha P_1 + \eta P} := M_3,$$

ainsi

$$\|u\| \leq M,$$

où $M = \max(M_3, M_3')$ qui est indépendant de λ.

Finalement, il est facile de voir que dans les trois cas, M est indépendant de λ. Donc l'ensemble $\{u \in C^1_\infty(\mathbb{R}^+), u = T(u,\lambda)\}$ est borné pour tout $\lambda \in]0,1[$. D'après l'alternative nonlinéaire de Leray-Schauder, $\exists u : u(t) = T(u,\lambda)(t)$ donc le problème (4.1) admet une solution $u \in C^1_\infty(\mathbb{R}^+)$.

$\square$

Chapitre 5

Existence de solutions positives pour un problème aux limites sur la demi-droite réelle

Dans ce chapitre, on va étudier l'existence de solutions positives pour un problème aux limites dont l'opérateur de dérivation est à coefficients variables. Ce type de problèmes présente beaucoup de difficultés car la fonction de Green n'est pas connue explicitement. Elle résulte d'une série de lemmes. On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} -u''(t) + k^2(t)u(t) = \lambda m(t) f(t, u(t)), \quad t \in \mathbb{R}_*^+, \\ u(0) = 0, \quad \lim\limits_{t \to +\infty} u(t) = 0, \end{cases} \tag{5.1}$$

où λ est un paramètre, $m : \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R}^+$ est continue et $m(t) \neq 0$ sur $\mathbb{R}_*^+$.
$f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ est continue et $k : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}_*^+$ est telle que

($\mathbf{A}_1$) $k : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}_*^+$ est continue et bornée. On note :

$$H = \sup_{t \in \mathbb{R}^+} k(t), \quad h = \inf_{t \in \mathbb{R}^+} k(t).$$

On considère aussi l'hypothèse suivante :

($\mathbf{A}_2$) $\exists d \in [h, H], \forall \rho, \lim\limits_{t \to +\infty} e^{-\rho t} \int_0^t e^{\rho s}[k^2(s) - d^2]ds$ existe.

5.1 Construction de la fonction de Green

Nous avons besoin des lemmes suivants : (voir [23])

Lemme 5.1. *Sous l'hypothèse* (A_1), *le problème de cauchy*

$$\begin{cases} -u''(t) + k^2(t)u(t) = 0, & t \in \mathbb{R}_*^+, \\ u(0) = 0, \quad u'(0) = 1, \end{cases}$$

admet une solution unique $\phi_1(t)$ *définie sur* $[0, +\infty[$. *De plus,* $\phi_1'(t) > 0$ *sur* $\mathbb{R}^+$, *et* ϕ_1 *n'est pas bornée.*

Lemme 5.2. *Sous l'hypothèse* (A_1), *le problème suivant :*

$$\begin{cases} -u''(t) + k^2(t)u(t) = 0, & t \in \mathbb{R}_*^+, \\ u(0) = 1, \quad \lim\limits_{t\to+\infty} u(t) = 0, \end{cases} \tag{5.2}$$

admet une solution unique $\phi_2(t)$ *définie sur* $[0, +\infty[$. *De plus,*

$$\phi_2(t) > 0 \text{ et } \phi_2'(t) < 0 \text{ sur } [0, +\infty[.$$

Lemme 5.3. *Sous les hypothèses* (A_1) *et* (A_2), *la solution unique du problème* (5.2) *satisfait*

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\phi_2'(t)}{\phi_2(t)} = -d.$$

Lemme 5.4. *Sous les hypothèses* (A_1) *et* (A_2), *il existe* $M > 0$ *tel que*

$$\sup_{t\in[0,+\infty[} \phi_1(t)\phi_2(t) < M.$$

Maintenant, soit

$$G(t,s) = \begin{cases} \phi_1(t)\phi_2(s), & s \geq t, \\ \phi_1(s)\phi_2(t), & s \leq t. \end{cases} \tag{5.3}$$

Lemme 5.5. *Sous les hypothèses* (A_1) *et* (A_2), *pour tout* $v \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R}^+)$, *le problème suivant :*

$$\begin{cases} -u''(t) + k^2(t)u(t) = v(t), & t \in \mathbb{R}_*^+, \\ u(0) = 0, \quad \lim\limits_{t\to+\infty} u(t) = 0, \end{cases} \tag{5.4}$$

est équivalent à l'équation intégrale

$$u(t) = \int_0^{+\infty} G(t,s)v(s)ds. \tag{5.5}$$

Démonstration. D'abord, on montre que la solution unique du problème (5.4) peut être représentée par (5.5).
En fait, on sait que l'équation

$$u''(t) - k^2(t)u(t) = 0, \quad t \in]0, +\infty[,$$

admet deux solutions linéairement indépendantes ϕ_1 et ϕ_2,
puisque $\begin{vmatrix} \phi_1(0) & \phi_2(0) \\ \phi_1'(0) & \phi_2'(0) \end{vmatrix} = -\phi_1'(0) = -1 \neq 0.$
Par la méthode de variation des constantes, on peut obtenir que la solution unique du problème (5.4) peut être représentée par

$$u(t) = \int_0^{+\infty} G(t,s)v(s)ds,$$

où $G(t,s)$ est définie par (5.3).
Maintenant, on vérifie que la fonction définie par l'équation intégrale (5.5) est une solution du problème (5.4).
De (5.5), on sait que

$$u(t) = \int_0^t \phi_1(s)\phi_2(t)v(s)ds + \int_t^{+\infty} \phi_2(s)\phi_1(t)v(s)ds,$$

$$\begin{aligned} u'(t) =& \phi_2'(t) \int_0^t \phi_1(s)v(s)ds + \phi_2(t)\phi_1(t)v(t) \\ &+ \phi_1'(t) \int_t^{+\infty} \phi_2(s)v(s)ds - \phi_1(t)\phi_2(t)v(t) \\ =& \phi_2'(t) \int_0^t \phi_1(s)v(s)ds + \phi_1'(t) \int_t^{+\infty} \phi_2(s)v(s)ds, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} u''(t) =& \phi_2''(t) \int_0^t \phi_1(s)v(s)ds + \phi_2'(t)\phi_1(t)v(t) \\ &+ \phi_1''(t) \int_t^{+\infty} \phi_2(s)v(s)ds - \phi_1'(t)\phi_2(t)v(t). \end{aligned}$$

De sorte que

$$u''(t) - k^2(t)u(t) = \begin{vmatrix} \phi_1(t) & \phi_2(t) \\ \phi_1'(t) & \phi_2'(t) \end{vmatrix} v(t) = \begin{vmatrix} \phi_1(0) & \phi_2(0) \\ \phi_1'(0) & \phi_2'(0) \end{vmatrix} v(t) = -v(t).$$

On a $G(0, s) = 0$ implique $u(0) = 0$.
En appliquant le lemme 5.4 et le fait que $v \in L^1(\mathbb{R}^+)$, on a pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $N_1 > 0$ tel que

$$\int_t^{+\infty} \phi_1(s)\phi_2(s)|v(s)|ds \leq M \int_t^{+\infty} |v(s)|ds < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{pour tout } t \geq N_1.$$

De $\lim\limits_{t\to+\infty} \phi_2(t) = 0$, il existe N_2 tel que

$$\phi_1(N_1)\phi_2(t) \int_0^{+\infty} |v(s)|ds < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall t \geq N_2.$$

Soit $N := \max\{N_1, N_2\}$. Alors pour $t > N$, on obtient

$$\begin{aligned}
|u(t)| &= \left| \int_0^t \phi_1(s)\phi_2(t)v(s)ds + \int_t^{+\infty} \phi_1(t)\phi_2(s)v(s)ds \right| \\
&\leq \int_0^{N_1} \phi_1(s)\phi_2(t)|v(s)|ds + \int_{N_1}^t \phi_1(s)\phi_2(t)|v(s)|ds + \int_t^{+\infty} \phi_1(s)\phi_2(t)|v(s)|ds \\
&\leq \phi_1(N_1)\phi_2(t) \int_{N_1}^{+\infty} |v(s)|ds + \int_{N_1}^{+\infty} \phi_1(s)\phi_2(t)|v(s)|ds + \int_{N_1}^{+\infty} \phi_1(s)\phi_2(t)|v(s)|ds \\
&\leq \phi_1(N_1)\phi_2(t) \int_0^{+\infty} |v(s)|ds + 2M \int_{N_1}^{+\infty} |v(s)|ds \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t) = 0$.
D'où la solution de (5.4) peut être écrite sous la forme $u(t) = \int_0^{+\infty} G(t, s)v(s)ds$ $\square$

5.2 Propriétés de la fonction de Green

Maintenant, on a par le lemme 5.5 précédent, pour tout $v \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R}^+)$, les problèmes

$$\begin{cases} -u''(t) + h^2u(t) = v(t), & t \in \mathbb{R}^+_*, \\ u(0) = 0, & \lim\limits_{t\to+\infty} u(t) = 0, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} -u''(t) + H^2 u(t) = v(t), & t \in \mathbb{R}_*^+, \\ u(0) = 0, & \lim\limits_{t \to +\infty} u(t) = 0, \end{cases}$$

sont équivalents aux équations intégrales

$$u_1(t) = \int_0^{+\infty} G_1(t,s) v(s) ds,$$

et

$$u_2(t) = \int_0^{+\infty} G_2(t,s) v(s) ds,$$

respectivement, où

$$G_1(t,s) = \frac{1}{2h} \begin{cases} (e^{ht} - e^{-ht}) e^{-hs}, & t \leq s, \\ (e^{hs} - e^{-hs}) e^{-ht}, & t \geq s. \end{cases}$$

et

$$G_2(t,s) = \frac{1}{2H} \begin{cases} (e^{Ht} - e^{-Ht}) e^{-Hs}, & t \leq s, \\ (e^{Hs} - e^{-Hs}) e^{-Ht}, & t \geq s. \end{cases}$$

Lemme 5.6. *[23] Pour tout $(t,s) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, on a*

$$G_2(t,s) \leq G(t,s) \leq G_1(t,s) < \frac{1}{2h}$$

Lemme 5.7. *[23] Pour $\theta \in]1, +\infty[$, on a*

$$\phi_2(s) G(s,s) \geq \frac{h}{H} G(t,s) \phi_2^{\theta}(t) \quad \textit{pour } (t,s) \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}_*^+.$$

Lemme 5.8. *[23] Pour tout sous-intervalle $[\bar{\alpha}, \bar{\beta}] \subset]0, +\infty[$, $t \in [\bar{\alpha}, \bar{\beta}]$ et $s \in]0, +\infty[$, on a*

$$G(t,s) \geq \delta G(s,s) \phi_2(s),$$

où

$$\delta := \min\{q(t) | \quad t \in [\bar{\alpha}, \bar{\beta}]\},$$

et

$$q(t) = \min\{2h\phi_1(t), \phi_2(t)\}, \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Lemme 5.9. *[23] On suppose que les hypothèses* (A_1) *et* (A_2) *sont satisfaites, soit* $w(t)$ *l'unique solution du problème suivant :*

$$\begin{cases} -u''(t) + k^2 u(t) = \phi_2^{\mu}(t), & t \in \mathbb{R}_*^+, \quad \mu \in]1, +\infty[\\ u(0) = 0, & \lim_{t \to +\infty} u(t) = 0, \end{cases}$$

Alors il existe $L > 0$ *tel que* $w(t) \leq Lq(t), t \in \mathbb{R}_*^+$, *avec*

$$w(t) = \int_0^{+\infty} G(t,s)\phi_2^{\mu}(s)ds. \tag{5.6}$$

5.3 Existence d' une solution positive

Soit $E = \{u \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}), \lim_{t \to +\infty} |u(t)|\phi_2^{\theta}(t) = r \quad \text{pour un certain } r \in \mathbb{R}\}$. E est un espace de Banach muni de la norme

$$\|u\| = \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \{|u(t)|\phi_2^{\theta}(t)\}, \quad \text{pour } \theta > 1.$$

Pour montrer la compacité de l'opérateur du point fixe on a besoin du lemme suivant qui est une conséquence immédiate du critère de Corduneanu (lemme 1.1).

Lemme 5.10. *[23] Soit* $D \subseteq E$. *Alors* D *est relativement compact dans* E *si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :*

1. *D est borné dans E,*
2. *les fonctions appartenant à* $\{v : v(t) = \phi_2^{\theta}(t)u(t), u \in D\}$ *sont localement équi-continues sur* $\mathbb{R}^+$,
3. *les fonctions appartenant à* $\{v : v(t) = \phi_2^{\theta}(t)u(t), u \in D\}$ *sont équi-convergentes.*

On considère les hypothèses suivantes :

($\mathbf{A}_3$) $f : [0, +\infty[\times[0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est continue et il existe $M > 0, \mu > 1, 0 < p < 1$ tels que :

$$0 \leq f(t,s) + M\phi_2^{\mu}(t) \leq a(t) + b(t)u^p, \quad \forall (t,u) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+,$$

où $a, b \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$.

(A$_4$) $M_1 := \int_0^{+\infty} \phi_2(s)G(s,s)a(s)m(s)ds < +\infty$

(A$_5$) il existe une constante $\theta \in]1, +\infty[$ telle que :

$$M_2 := \int_0^{+\infty} G(s,s)b(s)\phi_2^{1-p\theta}(s)m(s)ds < +\infty.$$

(A$_6$) il existe un sous intervalle $[\alpha, \beta[\subset \mathbb{R}_*^+$, tel que

$$\lim_{u \to +\infty} \frac{f(t,u)}{u} = +\infty \quad \text{uniformément sur } [\alpha, \beta[.$$

On défini un cône P de E

$$P = \{u \in E : u(t) \geq 0, t \in \mathbb{R}_*^+, \quad \text{et } u(t) \geq \frac{h}{H} q(t)\|u\|\}$$

et l'opérateur $A : P \to P$

$$Au(t) = \lambda \int_0^{+\infty} G(t,s)m(s)(f(s,u(s)) + M\phi_2^{\mu}(s))ds.$$

Lemme 5.11. *[23] Sous les hypothèses $(A_1) - (A_5)$, on a $A(P) \subseteq P$ et $A : P \to P$ est complètement continu.*

Démonstration. (du lemme 5.11)
On utilisera le critère de compacité de Corduneanu (Lemme 1.1) et la démonstration est partagée en trois étapes.

Étape 1 : $A(P) \subseteq P$.
Pour tout $u \in P$, d'après le lemme 5.7 on a :

$$\begin{aligned}
\phi_2^{\theta}(t)Au(t) &= \lambda \int_0^{+\infty} \phi_2^{\theta}(t)G(t,s)m(s)(f(s,u(s)) + M\phi_2^{\mu}(s))ds \\
&\leq \lambda \frac{H}{h} \int_0^{+\infty} \phi_2(s)G(s,s)(a(s) + b(s)M|u(s)|^p)ds \\
&\leq \lambda \frac{H}{h} \left(M_1 + \|u(s)\|^p \int_0^{+\infty} \phi_2^{1-\theta p}(s)G(s,s)b(s)m(s) \right) ds \\
&\leq \lambda \frac{H}{h} (M_1 + M_2\|u\|^p).
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Alors
$$\sup_{t\in\mathbb{R}^+}\{|Au(t)|\phi_2^{\theta}(t)\} \leq \lambda\frac{H}{h}(M_1+M_2\|u\|^p) < +\infty.$$
Donc $Au \in E, \forall u \in P$.
Par les lemmes 5.7 et 5.8, nous avons :

$$\begin{aligned}
Au(t) &= \lambda\int_0^{+\infty} G(t,s)m(s)(f(s,u(s))+M\phi_2^{\mu}(s))ds\\
&\geq \lambda\int_0^{+\infty} q(t)G(s,s)\phi_2(s)m(s)(f(s,u(s))+M\phi_2^{\mu}(s))ds\\
&\geq \lambda\int_0^{+\infty} \frac{h}{H}q(t)G(\xi,s)\phi_2^{\theta}(\xi)m(s)(f(s,u(s))+M\phi_2^{\mu}(s))ds\\
&= \frac{h}{H}q(t)\phi_2^{\theta}(\xi)Au(\xi), \quad \forall\xi>0.
\end{aligned}$$

En passant au supremum sur ξ, on déduit que

$$Au(t) \geq \frac{h}{H}q(t)\|Au\|, \quad \forall u \in P.$$

D'ou $A(P) \subseteq P$.

Étape 2 : *A est continu.*
Soit $(u_n)_{n\geq 1} \in P$ une suite convergente vers $u_0 \in P$. Alors $\exists M>0$, tel que $\|u_n\| \leq M, n \in \mathbb{N}$. Donc

$$\begin{aligned}
&|Au_n(t)-Au_0(t)|\\
= \quad & \left|\lambda\int_0^{+\infty} G(t,s)m(s)[f(s,u_n(s))+M\phi_2^{\mu}(s)-f(s,u_0(s))-M\phi_2^{\mu}(s)]ds\right|\\
\leq \quad & \int_0^{+\infty} \phi_2(s)G(s,s)m(s)|f(s,u_n(s))+M\phi_2^{\mu}(s)-f(s,u_0(s))-M\phi_2^{\mu}(s)|ds\\
\leq \quad & \int_0^{+\infty} \phi_2(s)G(s,s)m(s)(f(s,u_n(s))+M\phi_2^{\mu}(s)+f(s,u_0(s))+M\phi_2^{\mu}(s))ds\\
\leq \quad & 2\int_0^{+\infty} \phi_2(s)G(s,s)a(s)m(s)ds+2M^p\int_0^{+\infty} \phi_2^{1-\theta p}(s)G(s,s)b(s)m(s)ds\\
= \quad & 2M_1+2M^pM_2.
\end{aligned}$$

Dans, par la contnuité de f et le théorème de la convergence dominée de Lebesgue nous avons :

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty} \|Au_n - Au_0\| \\
&= \lambda \lim_{n\to+\infty} \sup_{t\in\mathbb{R}^+} \Big| \int_0^{+\infty} \phi_2^\theta(t)G(t,s)m(s)(f(s,u_n(s)) + M\phi_2^\mu(s))ds \\
&- \int_0^{+\infty} \phi_2^\theta(t)G(t,s)m(s)(f(s,u_0(s)) + M\phi_2^\mu(s))ds \Big| \\
&\leq \lambda \frac{H}{h} \lim_{n\to+\infty} \sup_{t\in\mathbb{R}^+} \int_0^{+\infty} \phi_2(s)G(s,s)m(s)|f(s,u_n(s)) + M\phi_2^\mu(s) - f(s,u_0(s)) - M\phi_2^\mu(s)ds| \\
&= 0,
\end{aligned}$$

ainsi, A est continu.

Étape 3 : *L'opérateur A est relativement compact.*
Soit $D \subseteq P$ un ensemble borné i.e $\exists M > 0$ tel que $\|u\| \leq M, \forall u \in D$. On doit montrer que les hypothèses de lemme (5.10) sont satisfaites.

(a) On montre que $A(D)$ est un ensemble borné dans E.
Pour tout $u \in D$, d'après $(A_3) - (A_5)$ et les premières inégalités de l'étape 1, on conclut que

$$\|Au\| \leq \lambda \frac{H}{h}(M_1 + M_2\|u\|^p) \leq \lambda \frac{H}{h}(M_1 + M_2 M^p),$$

ce qui implique que $A(D)$ est borné dans E.

(b) On montre que les fonctions appartenant à $\{v : v(t) = \phi_2^\theta(t)Au(t), u \in D\}$ sont localement équi-continues sur $\mathbb{R}^+$.

Pour tout $u \in D$ et tout $T > 0$, si $t_1, t_2 \in [0, T]$ avec $t_1 < t_2$, on a

$$\begin{aligned}
&|\phi_2^\theta(t_1)Au(t_1) - \phi_2^\theta(t_2)Au(t_2)| \\
&= \lambda \left| \int_0^{+\infty} (G(t_1, s)\phi_2^\theta(t_1) - G(t_2, s)\phi_2^\theta(t_2))m(s)(f(s, u(s)) + M\phi_2^\mu(s))ds \right| \\
&\leq \lambda \int_0^T \left|G(t_1, s)\phi_2^\theta(t_1) - G(t_2, s)\phi_2^\theta(t_2)\right| m(s)(a(s) + b(s)|u|^p)ds \\
&+ \lambda \int_T^{+\infty} \left|G(t_1, s)\phi_2^\theta(t_1) - G(t_2, s)\phi_2^\theta(t_2)\right| m(s)(a(s) + b(s)|u|^p)ds \\
&= \lambda \int_0^T \left|G(t_1, s)\phi_2^\theta(t_1) - G(t_2, s)\phi_2^\theta(t_2)\right| m(s)(a(s) + b(s)|u|^p)ds \\
&+ \lambda|\phi_1(t_1)\phi_2^\theta(t_1) - \phi_1(t_2)\phi_2^\theta(t_2)| \int_T^{+\infty} \phi_2(s)|m(s)(a(s) + b(s)|u|^p)ds.
\end{aligned}$$

De (A_4) et (A_5), on conclut que

$$\int_T^{+\infty} \phi_2(s)a(s)m(s)ds < +\infty, \quad \int_T^{+\infty} \phi_2^{1-\theta p}(s)a(s)m(s)ds < +\infty.$$

Donc, pour tout $\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$, tel que $\forall t_1, t_2 \in [0, T]$ avec $t_1 < t_2$ et $|t_1 - t_2[< \delta$,

$$|\phi_2^\theta(t_1)Au(t) - \phi_2^\theta(t_2)Au(t_2)| < \varepsilon, \quad u \in D.$$

Comme T est arbitraire, les fonctions appartenant à $\{v : v(t) = \phi_2^\theta(t)Au(t), u \in D\}$ sont localement équi-continues sur $\mathbb{R}^+$.

(c) On montre que les fonctions appartenant à $\{v : v(t) = \phi_2^\theta(t)Au(t), u \in D\}$ sont équi-convergentes.
Soit $\sigma = \frac{\theta-1}{2}$, alors $\sigma > 0$. Comme $\lim\limits_{t\to+\infty} \phi_2(t) = 0$, on a $\forall\varepsilon > 0, \exists T > 0$, tel que

$$|\phi_2(t) - 0| < \left(\frac{h\varepsilon}{\lambda H(M_1 + M_2M^p)}\right)^{\frac{1}{\sigma}}, \quad \forall t \in]T, +\infty[.$$

Ainsi, d'après le lemme 5.7 il vient que pour $\varepsilon > 0, \exists T > 0$, tel que $u \in D$ et

$t \geq T$ impliquent

$$\begin{aligned}
0 &\leq \phi_2^\theta(t)Au(t) \\
&= \lambda \int_0^{+\infty} \phi_2^\theta(t)G(t,s)m(s)(f(s,u(s)) + M\phi_2^\mu(s))ds \\
&= \lambda\phi_2^\sigma(t) \int_0^{+\infty} \phi_2^{1+\sigma}(t)G(t,s)m(s)(f(s,u(s)) + M\phi_2^\mu(s))ds \\
&\leq \lambda\phi_2^\sigma(t)\frac{H}{h} \int_0^{+\infty} \phi_2(s)G(s,s)m(s)(a(s) + b(s)|u|^p)ds \\
&\leq \lambda\phi_2^\sigma(t)\frac{H}{h} \left(\int_0^{+\infty} \phi_2(s)G(s,s)a(s)m(s)ds + \|u\|^p \int_0^{+\infty} \phi_2^{1-\theta p}(s)G(s,s)b(s)m(s)ds\right) \\
&\leq \lambda\phi_2^\sigma(t)\frac{H}{h}(M_1 + M_2\|u\|^p) \\
&\leq \lambda\phi_2^\sigma(t)\frac{H}{h}(M_1 + M_2M^p) \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Donc, les fonctions appartenant à $\{v : v(t) = \phi_2^\theta(t)Au(t), u \in D\}$ sont équi-convergentes.
Comme les hypothèses de lemme 5.10 sont vérifiées, alors l'opérateur A est relativement compact. □

Le résultat d'existence pour cette section est le suivant.

Théorème 5.1. *[23] Sous les hypothèses* $(A_1)-(A_6)$*, le problème* (5.1) *admet au moins une solution positive si* $\lambda > 0$ *est assez petit.*

Démonstration. (du théorème 5.1) On va utiliser le théorème du point fixe de Krasnoselskii (théorème 1.7).

On pose $z = \lambda M w$, où w est défini par (5.6). Alors (5.1) admet une solution positive u si et seulement si $u + z = \tilde{u}$ est une solution de

$$\begin{cases} -\tilde{u}''(t) + k^2(t)\tilde{u}(t) - \lambda m(t)g(t, \tilde{u} - z) = 0, & t \in]0, +\infty[, \\ \tilde{u}(0) = 0, \quad \lim\limits_{t \to +\infty} \tilde{u}(t) = 0, \end{cases}$$

et $\tilde{u} > z$ pour $t \in]0, +\infty[$, où $g : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ est définie par

$$g(t, \tilde{u}) = \begin{cases} f(t, \tilde{u}) + M\phi_2^\mu(t), & (t, \tilde{u}) \in [0, +\infty[\times[0, +\infty[, \\ f(t, 0) + M\phi_2^\mu(t), & (t, \tilde{u}) \in [0, +\infty[\times[-\infty, 0[. \end{cases}$$

Pour $v \in P$, soit Av l'unique solution de :

$$\begin{cases} -\tilde{u}''(t) + k^2(t)\tilde{u}(t) - \lambda m(t) g(t, v - z) = 0, \quad t \in]0, +\infty[, \\ \tilde{u}(0) = 0, \quad \lim_{t \to +\infty} \tilde{u}(t) = 0, \end{cases}$$

Alors $Av(t) = \lambda \int_0^{+\infty} G(t,s)m(s)g(s, v(s) - z(s))ds$. Par le lemme 5.10, $A(P) \subset P$. Soit

$$\lambda \in]0, \Lambda[\quad \text{fixé}, \quad \text{où } \Lambda := \min \left\{ \frac{1}{M_1 + \left(\frac{2H}{h}\right)^p M_2}, \frac{1}{LM} \right\}. \tag{5.8}$$

On montre que la condition (i) du théorème de Krasnoselskii (théorème 1.7) est satisfaite.
On pose

$$\Omega_1 = \{\tilde{u} \in E, \|\tilde{u}\| < \frac{2H}{h}\}$$

et on montre que $\|A\tilde{u}\| \leq \|\tilde{u}\|, \tilde{u} \in P \cap \partial\Omega_1$.
Pour $\tilde{u} \in P \cap \partial\Omega_1$, nous avons $\tilde{u}(t) \geq 2q(t), 0 < z(t) \leq q(t)$, alors

$$\begin{aligned} \|\tilde{u} - z\| &= \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \phi_2^\theta(t)|\tilde{u}(t) - z(t)| \\ &\leq \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \phi_2^\theta(t)\tilde{u}(t) \\ &= \|\tilde{u}\| \end{aligned}$$

et par la suite

$$\begin{aligned} \phi_2^\theta(t)A\tilde{u}(t) &= \lambda \phi_2^\theta(t) \int_0^{+\infty} G(t,s)m(s)g(s, \tilde{u}(s) - z(s))ds \\ &\leq \lambda \int_0^{+\infty} \phi_2(s)G(s,s)m(s)g(s, \tilde{u}(s) - z(s))ds \\ &\leq \lambda \int_0^{+\infty} \phi_2(s)G(s,s)m(s)(a(s) + b(s)|\tilde{u}(t) - z(t)|^p)ds \\ &\leq \lambda(M_1 + (\frac{2H}{h})^p M_2) \\ &\leq 1 < \frac{2H}{h}. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Donc $\|A\tilde{u}\| \leq \|\tilde{u}\|, \forall \tilde{u} \in P \cap \partial\Omega_1$.
Maintenant on pose

$$\delta = \min_{\alpha \leq t \leq \beta} q(t), \tag{5.10}$$

on fixe $t_0 \in [\alpha, \beta]$ et on choisit un nombre réel $N > 0$, tel que

$$\frac{N\lambda\delta^2 h}{2H}\phi_2^\theta(t_0)\int_\alpha^\beta \phi_2(s)G(s,s)m(s)ds \geq 1. \tag{5.11}$$

D'après (A_6) on choisit $\bar{R} > \frac{2H}{h}$, tel que si $\tilde{u} \geq \frac{h}{2H}\bar{R}\delta$, alors

$$\frac{g(t,\tilde{u})}{\tilde{u}} \geq N, \qquad \text{pour } t \in [\alpha, \beta] \tag{5.12}$$

et

$$1 - \frac{\lambda LMH}{\bar{R}h} \geq \frac{1}{2}. \tag{5.13}$$

Soit

$$\Omega_2 = \{\tilde{u} \in E, \|\tilde{u}\| < \bar{R}\}$$

Montrons que $\|A\tilde{u}\| \geq \|\tilde{u}\|, \tilde{u} \in P \cap \partial\Omega_2$.
Pour $\tilde{u} \in P \cap \partial\Omega_2$, on a

$$z(t) = \lambda Mw(t) \leq \lambda MLq(t) \leq \lambda ML\frac{H}{h}\frac{\tilde{u}(t)}{\|\tilde{u}\|} = \frac{\lambda MLH}{\bar{R}h}\tilde{u}(t).$$

Ainsi,

$$\tilde{u}(t) - z(t) \geq (1 - \frac{\lambda MLH}{\bar{R}h})\tilde{u}(t). \tag{5.14}$$

En combinant (5.13) avec (5.14) et en utilisant le lemme 5.9, il en résulte que

$$\tilde{u}(t) - z(t) \geq \frac{1}{2}\tilde{u}(t) \geq \frac{h}{2H}q(t)\|\tilde{u}\| \geq \frac{h}{2H}\bar{R}\delta, \quad t \in [\alpha, \beta].$$

Ceci avec (5.12) impliquent

$$g(t, \tilde{u} - z) \geq N(\tilde{u} - z) \geq N\frac{\bar{R}\delta h}{2H}, \quad t \in [\alpha, \beta].$$

Donc de (5.11), on obtient

$$\begin{aligned}
\phi_2^\theta(t_0)A\tilde{u}(t_0) &= \lambda\phi_2^\theta(t_0)\int_0^{+\infty} G(t_0,s)m(s)g(s,\tilde{u}(s)-z(s))ds \\
&\geq \lambda\phi_2^\theta(t_0)\int_\alpha^\beta G(t_0,s)m(s)N\frac{\bar{R}\delta h}{2H}ds \\
&\geq \lambda\phi_2^\theta(t_0)\int_\alpha^\beta \delta\phi_2(s)G(s,s)m(s)N\frac{\bar{R}\delta h}{2H}ds \\
&\geq \bar{R} = \|\tilde{u}\|,
\end{aligned}$$

Donc $\|A\tilde{u}\| \geq \|\tilde{u}\|, \tilde{u} \in P \cap \partial\Omega_2$.
D'où, d'après le théorème du point fixe de Krasnoselskii A admet un point fixe $\tilde{u} \in P \cap (\bar{\Omega_1} \setminus \Omega_2)$, tel que

$$\frac{2H}{h} \leq \|\tilde{u}\| \leq \bar{R}. \tag{5.15}$$

De plus, en combinant (5.15) avec (5.8) et en utilisant le lemme 5.9, on obtient pour $t > 0$

$$\begin{aligned}
\tilde{u} \geq & \quad \frac{h}{H}q(t)\|\tilde{u}\| \geq 2q(t) \geq 2\lambda MLq(t) \\
\geq & \quad 2\lambda Mw(t) \equiv 2z(t),
\end{aligned} \tag{5.16}$$

alors $u = \tilde{u} - z \geq \frac{1}{2}\tilde{u}$ est une solution positive de (5.1). □

5.4 Existence de deux solutions positives

On considère l'hypothèse suivante :
($\mathbf{A_7}$) il existe $a > 0$ tel que $f(t,u) > 0$ pour $(t,u) \in [0,+\infty[\times[0,a]$.

Théorème 5.2. *[23] Sous les hypothèses* $(A_1)-(A_7)$*, le problème* (5.1) *admet au moins deux solutions positives si* $\lambda > 0$ *est assez petit.*

Démonstration. (du théorème 5.2) on va utiliser le théorème du point fixe de Krasnoselskii.

De (5.15) et (5.16), il vient que le problème (5.1) admet une solution positive u_1 satisfaisant

$$\|u_1\| \geq \frac{1}{2}\|\tilde{u}_1\| \geq 1. \tag{5.17}$$

Pour trouver la deuxième solution positive du problème (5.1), on pose

$$f^*(t,u) = \begin{cases} f(t,u), & (t,u) \in \mathbb{R}^+ \times [0,a], \\ f(t,a), & (t,u) \in \mathbb{R}^+ \times [a,\infty[. \end{cases} \tag{5.18}$$

Alors $f^*(t,u) \geq 0$ pour tout $(t,u) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, où a est la constante de la condition (A_7).
Maintenant, nous considérons le problème aux limites auxiliaire suivant :

$$-u''(t) + k^2(t)u(t) = \lambda m(t) f^*(t,u), \quad t \in \mathbb{R}^+_*, \tag{5.19}$$

avec les conditions au bords du problème (5.1). Il est facile de vérifier que (5.19) est équivalent à l'équation du point fixe $u = Fu$,
où

$$Fu(t) := \lambda \int_0^\infty G(t,s)m(s)f^*(s,u(s))ds.$$

Il n'est pas dificile de vérifier que $F : P \to P$ est complètement continue et $F(P) \subset P$. On définit

$$\rho = \min\{0.9, a\}, \tag{5.20}$$

et

$$\lambda \in]0, \Lambda_1[\quad \text{fixé}, \quad \text{où } \Lambda_1 = \min\left\{\frac{\rho}{M_1 + H^p M_2}, \Lambda\right\}. \tag{5.21}$$

On choisit

$$\Omega_3 = \{u \in C(\mathbb{R}^+), \|u\| < \rho\}$$

et on montre que $\|Fu\| \leq \|u\|, \quad$ pour $u \in P \cap \partial\Omega_3$.
Pour $u \in P \cap \partial\Omega_3$, on a

$$\begin{aligned}
\phi_2^\theta(t)Fu(t) &= \lambda \phi_2^\theta(t) \int_0^\infty G(t,s)m(s)f^*(s,u(s))ds \\
&\leq \lambda \int_0^\infty \phi_2(s)G(s,s)m(s)f^*(s,u(s))ds \\
&\leq \lambda \int_0^\infty \phi_2(s)G(s,s)m(s)(a(s) + b(s)|u(s)|^p - M\phi_2^\mu)ds \\
&\leq \lambda \int_0^\infty \phi_2(s)G(s,s)m(s)(a(s) + b(s)|u(s)|^p)ds \\
&\leq \lambda \left(M_1 + \int_0^\infty \phi_2^{1-p\theta}(s)G(s,s)m(s)b(s)(\phi_2^\theta(s)|u(s)|)^p\right) ds \\
&\leq \lambda(M_1 + M_2\rho^p) \\
&< \rho.
\end{aligned}$$

Par conséquent
$$\|Fu\| \leq \|u\|, \forall u \in P \cap \partial\Omega_3.$$
De (A_7), on a
$$\lim_{u \to 0^+} \frac{f^*(t,u)}{u} = +\infty$$
uniformément sur $[0, \infty[$. Celà signifie qu'il existe une constante $r : r < \rho$, telle que
$$f^*(t,u) \geq \eta u, \quad (t,u) \in [0, \infty[\times [0, r], \tag{5.22}$$
où
$$\frac{\eta\lambda\delta^2 h}{H}\phi_2^\theta(\beta) \int_\alpha^\beta \phi_2(s)G(s,s)m(s)ds \geq 1, \tag{5.23}$$
où δ est comme dans le lemme 5.8. Maintenant, pour $u \in P$ et $\|u\| = \phi_2^\theta(\beta)r$, on a
$$\phi_2^\theta(t)u(t) \leq \|u\| = \phi_2^\theta(\beta)r, \quad t \in [\alpha, \beta].$$
Alors $u(t) \leq r, t \in [\alpha, \beta]$.
En combinant (5.10) avec (5.22) et (5.23) et en utilisant le lemme 5.9, il résult que
$$\begin{aligned}
\phi_2^\theta(\beta)Fu(\beta) &= \lambda\phi_2^\theta(\beta) \int_0^\infty G(\beta,s)m(s)f^*(s,u(s))ds \\
&\geq \lambda\phi_2^\theta(\beta) \int_\alpha^\beta \delta G(s,s)\phi_2(s)m(s)f^*(s,u(s))ds \\
&\geq \lambda\phi_2^\theta(\beta) \int_\alpha^\beta \delta G(s,s)\phi_2(s)m(s)\eta u(s)ds \\
&\geq \lambda\phi_2^\theta(\beta) \int_\alpha^\beta \delta G(s,s)\phi_2(s)m(s)\eta \frac{h}{H}\delta\|u\|ds \\
&\geq \frac{\eta\lambda\delta^2 h}{H}\phi_2^\theta(\beta)\|u\| \int_\alpha^\beta \phi_2(s)G(s,s)m(s)ds \\
&\geq \|u\|.
\end{aligned}$$
Ainsi, on peut définir
$$\Omega_4 = \{u \in E, \|u\| < \phi_2^\theta(\beta)r\},$$
pour que
$$\|Fu\| \geq \|u\|, u \in P \cap \partial\Omega_4.$$

Par la deuxième partie du théorème de Krasnoselskii, il en suit que le problème (5.19) avec les conditions aux limites dans (5.1) a une solution positive u_2 satisfaisant

$$\phi_2^\theta(\beta)r \leq \|u_2\| \leq \rho.$$

Ceci avec (5.18) et (5.20) impliquent que u_2 est également une solution du problème (5.1).
De (5.20),(5.17) et (5.21), on en conclut que (5.1) a deux solutions positives distinctes u_1 et u_2 pour $\lambda \in]0, \Lambda_1[$. $\square$

Remarque 5.1. *On considère la condition suivante :*

(A_2') *k est une fonction périodique,*

les résultats des théorèmes 5.1 *et* 5.2 *restent vrais si on remplace la condition* (A_2) *par* (A_2') *(voir [21])*

5.5 Example d'application

Le théorème 5.1 est appliquable pour le problème suivant :

$$\begin{cases} -u''(t) + (\sin t + 3)^2 u(t) - \frac{\lambda}{t}(e^{-20t}u^2(t) - e^{-8t}) = 0, \qquad t \in I, \\ u(0) = 0, \qquad \lim\limits_{t \to +\infty} u(t) = 0, \end{cases}$$

qui admet au moins une solution positive pour $\lambda \in]0, \Lambda[$ où $\Lambda = \min\{\frac{1}{M_1 + 16M_2}, 2\}$ et $M_1 < \frac{1}{4}, M_2 < \frac{1}{4}$.

Annexes

Le théorème de la convergence dominée de Lebesgue

Théorème 6.3. *Soit* $(f_n)_n$ *une suite de fonctions appartenant à* $L^1(\Omega)$ *avec* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.
On suppose que :

1. $f_n \to f$ *p.p sur* Ω,
2. *il existe une fonction* $g \in L^1(\Omega)$ *telle que :* $\forall n, |f_n(t)| \leq g(t)$ *p.p* $t \in \Omega$.

Alors $f \in L^1(\Omega)$ *et* $\|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} \to 0$.

Inégalité de Hölder

Soit $1 \leq p \leq +\infty$, p^* l'exposant conjugué de p (i.e $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$).
Soit $f \in L^p$ et $g \in L^{p_*}$ alors

$$f.g \in L^1 \quad \text{et} \|fg\| \leq \|f\|_p.\|g\|_{p^*}.$$

Théorème du point fixe de Brouwer, 1912

Théorème 6.4. *Soit* K *un compact, convexe non vide de* $\mathbb{R}^n$ *et* $f : K \to K$ *une application continue. Alors* f *admet au moins un point fixe dans* K.

Théorème du point fixe de Krasnoselskii

Théorème 6.5. *[21] Soit* K *un cône d'un espace de Banach* E *et* $A : K \to K$ *un opérateur compact verifiant l'une des conditions suivantes :*

1. $Ax \ngeq x, \forall x \in \partial K_r$, *et* $Ax \nleq x, \forall x \in \partial K_R$,

2. $Ax \nleq x, \forall x \in \partial K_r$, *et* $Ax \ngeq x, \forall x \in \partial K_R$,

avec $0 < r < R$.
Alors A *admet un point fixe* $x \in K$ *tel que* $r \leq \|x\| \leq R$,
avec : $K_r = K \cap B(0, r), K_R = K \cap B(0, R)$.

Conclusion

Dans ce mémoire nous avons étudié quelques méthodes de résolutions de problèmes aux limites du second ordre sur les intervalles non bornés.
Notre travail consiste à comprendre et faire une synthèse de quelques articles de recherche sur la résolution de quelques problèmes aux limites sur les intervalles non bornés en utilisant different théorèmes du point fixe.

Nous avons utilisé les théorèmes du point fixe de Schauder, de Furi-Pera, le théorème de Schauder-Tycnoff, d'Alternative nonlinéaire de Leray-Schauder et le théorème de Krasnoselskii pour montrer l'existence des solutions pour ces problèmes.

Ainsi nous avons utilisé, pour la compacité de l'opérateur du point fixe, le théorème d'Ascoli-Arzéla sur les intervalles bornés, le critère de Corduneanu sur les intervalles non bornés et le critère de compacité de Fréchet-Kolmogorov dans les espaces L^p.

Les démonstrations des résultats principaux sont détaillées pour mieux expliquer la manière dont les théorèmes du point fixe sont utilisés. Des démonst-rations de quelques lemmes sont omises lorsque c'est purement technique et sort de l'objectif de ce mémoire.

Bibliographie

[1] R. P. Agarwal and D.O'Regan, *Infinite Interval Problems For Differntial, Difference and Integral Equations*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 2001.

[2] R. P. Agarwal and D.O'Regan, *An infinite interval problem arising in circularly symmetric deformations of shallow membrane caps*, Internal. J. Nonlin. Mech. 39, 2004, 779-784.

[3] R. P. Agarwal and D.O'Regan, *infinite interval problem modelling the flow of a gas through a semi-infinite porous medium*, Stud. Appl. Math. 108, 2002, 245-257.

[4] R. P. Agarwal and D.O'Regan, *infinite interval problem modeling phenomena which arise in the theory of plasma and electrical potential theory*, Stud. Appl. Math. 111, 2003, 339-358.

[5] R. P. Agarwal and D.O'Regan, *Nonlinear boundary value problems on the semi-infinite interval : an upper and lower solution approach*, Mathematika 49, 2002, 129-140.

[6] C. Avramescu, *Sur l'existence des solutions convergentes des systémes d'équations différentielles non linéaires*, Ann. Mat. Pura. 481, 1969, 147-168.

[7] L. E. Bobisud, *Existence of positive solutions to some nonlinear singular boundary value problems on the infinite intervals*, J. Math. Anal. Appl 173, 1993, 69-83.

[8] J. V. Baxley, *Existence and uniqueness for nonlinear boundary value problems on the infinite intervals*, J. Math. Anal. Appl 147, 1990, 122-133.

[9] H. Brezis, *Analyse Fonctionnelle : Théorie et Application*, Masson, Paris, 1983.

[10] C. Corduneanu, *Integral Equation and Stability of Feedback Systems*, Academic Press, New York, 1973.

[11] C. Corduneanu, *Principles of Differential and Integral Equations*, Chelsea Publ. Comp, New York, 1977.

[12] C. Corduneanu, *Citive probleme globale referitoare la ecuatiile differntiale nenineare de ordinue al doilea*, Acad. Rep. Pop. Rom. Fil. Iasi. Stud. Cer. St. Mat. 7, 1956, 1-7.

[13] C. Corduneanu, *Existence solutiilar marginuite pentru unele ecuatii differentiale de ordinue al doilea*, Acad. Rep. Pop. Rom. Fil. Iasi. Stud. Cer. St. Mat. 7, 1957, 127-134.

[14] K. Deimling, *Nonlinear Functional Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1985.

[15] S. Djebali and T. Moussaoui, *A class of second order BVPs on infinite intervals*, EJQTDE, No. 4, 2006, 1-19.

[16] M. Furi and P. Pera, *A continuation method on locally convex spaces and applications to ODE on noncompact intervals*, Annales Polonici Mathematici. 47, 1987, 331-346.

[17] A. Granas, R. B. Guenther, J. W. Lee and D. O'Regan, *Boundary value problems on infinite intervals and semiconductor devices*, J. Math. Anal. Appl. 116, 1986, 335-348.

[18] O. A. Gross, *The boundary value problem on an infinite interval*, J. Math. Anal. Appl. 7, 1963, 100-109.

[19] D. J. Guo, V. Lakshmikantham, *Nonlinear Problems in Abstract Cones*, Academic Press, 1988.

[20] A. Kneser, *Untersuchung und asymptotische darstellung der integrale gewisser differentialgleichungen bei grossen werthen des arguments*, J. Reine Angen. Math 1(116), 1896, 178-212.

[21] M. A. Krasnoselskii, *Topplogical Methods in the Theory of Nonlineair Integral Equations*, Pergamon, Elmsford, New York, 1964.

[22] H. Lian, H. Ge, *Solvability for Second-order Three-point Boundary Value Problems on a Half-line*, Appl. Math. Let. 19, 10, 2006, 1000-1006.

[23] R. Ma, B. Zhu, *Existence of positives solutions for a semipositone boundary value problem on the half-line*, Computers and Mathematics with Applications, 58, 2009, 1672-1686.

[24] A. Mambriani, *Su un teoreme relativo alle equazioni difernziali ordinarie del 20 ordine*, Atii Accad. Naz. Lincei, Cl. Sci Fis. Mat. Nat. 9, 1929, 620-622.

[25] D. R. Smart, *Fixed point Theory*, Cambridge Univ. Press, 1974.

[26] P. K. Wong, *Existence and asymptotic behavior of proper solutions of a class of second order nonlinear differential equations*, Pacific J. Math. 13, 1963, 737-760.

[27] K. Yoshida, *Functional Analysis*, Third edition, Springer Verlag, Berlin, 1971.

[28] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications.* vol. I : Fixed Point Theorems, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1986.