



République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université A. MIRA-Bejaia  
Faculté de Technologie  
Département de Génie Civil

## Mémoire

Pour l'obtention du diplôme de Master en Génie Civil

Option : Matériaux et Structures

## Thème

Application de la méthode des éléments de  
frontières dans le cas  
des réservoirs semi-infinis

**Encadré par :**

Mr A. BOUROUBA

**Présenté par :**

Melle MEZIANI Amel

Melle TAIB Soraya

**Membres de Jury :**

Mr A.OURABAH

Melle M. MEZIANI

Promotion 2013

# Remerciements

*« Tous ce qui commence bien, finit bien »*

*Nos sincères remerciements à dieu le tout-puissant pour le courage, la force, la volonté, la persévérance, et la santé qu'il nous a donnée à fin de réaliser ce mémoire.*

*Nous tenons a remercier du fond du cœur nos parents qui ont su nous donner une bonne éducation qui nous a permis d'arriver a ce stade d'études.*

*Comme nous remercions notre promoteur, Monsieur Bourouba Abdelhalim, pour son encadrement et ses exigences de faire un bon travail de recherche.*

*Notre sincère remerciement s'adresse à l'ensemble du personnel de l'université de Bejaia, en particulier nos profs.*

*Enfin, nous remercions tous ceux et celles qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce modeste travail.*

*Melle MEZIANI AMEL*

*ET*

*Melle TAIB SORAYA*

## **Dédicaces**

*Je dédie ce travail ;*

*A mes très chers parents que je ne serai jamais à la hauteur de les remercier comme il se doit. Je me console donc, par ce vœu que je trouve le plus proche de ma reconnaissance de leur bien fait ; que notre seigneur leur rend leur bienfait par une félicité éternelle.*

*A mes chère frères ; mes sœurs.*

*A mes grands parents.*

*A mes cousines et cousins.*

*A mes oncles et tantes.*

*A tous mes amis.*

*A mon binôme, Amel.*

2013

**SORAYA**

# **Dédicaces**

*Je dédie ce travail à la plus belle mère des mères pour son soutien et le sacrifice qu'elle m'a ressenti, son grand amour, à celle qui n'a jamais cessé de prier pour que Dieu me protège.*

*A mon père pour son dévouement, son grand amour et ses directives.*

*A mon cher frère Djamel Eddine et mes chères sœurs « Hayet, Nadjat, Souad, Nora, Nawel », A mon beau frère et A mes adorables neveux « MALEK, YANI et DACINE ».*

*A mon très cher ami « chef SAMIR ».*

*A tous mes amies, amis et en particulier Sabrina, « K, M », Djaafar, Mohamed, Nabil, Loucif, Massi, ... etc.*

*A mon binôme pour sa complicité et sa précieuse collaboration dans ce travail.*

*A ceux qui ont pour vacation la paix, la sérénité et la prospérité.*

*A ceux qui auront l'occasion d'avoir ce modeste travail entre les mains.*

**AMEL**

## Listes des figures

<b>Figure 1.1</b> : Principe de la MEF.....	3
<b>Figure 2.1</b> : Illustration de domaine élargie quand le point singulier est dans la frontière.....	12
<b>Figure 2.2</b> : Domaine devisé en deux sous domaine FE et BE.....	15
<b>Figure 3.1</b> : Discrétisation de la frontière.....	17
<b>Figure 3.2</b> : Eléments quadratiques courbes pour problème bidimensionnels .....	19
<b>Figure 3.3</b> : Eléments constant.....	22
<b>Figure 3.4</b> : Représentation des paramètres utilisés.....	24
<b>Figure 3.5</b> : Eléments de référence pour éléments constants.....	26
<b>Figure 3.6</b> : Eléments linéaires .....	26
<b>Figure 3.7</b> : Eléments de référence pour éléments linéaires.....	27
<b>Figure 3.8</b> : Eléments de coins. ....	29
<b>Figure 3.9</b> : Eléments discontinus.....	31
<b>Figure 4.1</b> : Géométrie de la plaque.....	34
<b>Figure 4.2</b> : Comparaison entre les résultats numérique(BEM) et analytique.....	35
<b>Figure 4.3</b> : Comparaison entre les résultats numérique(BEM) et analytique pour les points internes.....	36
<b>Figure 4.4</b> : Réservoir semi-infini.....	37
<b>Figure 4.5</b> : Distribution de coefficient hydrodynamique sur l'interface-fluide.....	39
<b>Figure 4.6</b> : Variation de $C_p$ en fonction de $w$ .....	39
<b>Figure 4.7</b> : Domaine fluide borné .....	40
<b>Figure 4.8</b> : Distribution de coefficient hydrodynamique sur l'interface-fluide pour $w = 10, 20$ et $40 \text{rd/sec}$ pour les deux conditions Sharan et Maity.....	42

**Figure 4.9** : Comparaison entre les résultats des deux conditions Sharan et Maity pour  $L_t = 0.2H$  et  $L_t = 0.5H$  ..... 43

**Figure 4.10** : coefficient  $C_p$  en fonction du positionnement de la limite de troncature  $L_t$  pour des pulsations différentes  $w = 10, 20$  et  $40 \text{rd/sec}$  ..... 44

## Notations

$i, j, k, \ell$  : Indices

$J$  : Jacobienne

$(\xi, \eta)$  : Coordonnées de l'élément de référence

$w$  : Fonction de pondération

$ne$  : Nombre d'éléments

$nn$  : Nombre de nœuds

$npg$  : Nombre de points de Gauss

$r$  : Distance entre la source et un point sur la frontière

$\Omega$  : Domaine

$\Gamma$  : Frontière (contour)

$\partial$  : Opérateur de dérivée partielle

$\delta$  : Fonction de Dirac

$\nabla$  : Opérateur nabla

$\Delta$  : Opérateur Laplace

$u$  : Solution

$\bar{u}$  : Condition de Neumann

$\bar{q}$  : Condition de Dirichlet

$q$  : Gradients de la solution

$n$  : Vecteur normale

$\rho$  : Masse volumique

$p$  : Pression

$\omega$  : Pulsation

## Table des matières

Introduction générale :.....	1
Chapitre 1 : Généralités.....	2
1.1 Introduction.....	2
1.2 La Méthode des éléments finis :.....	3
1.3 La méthode des éléments de frontières :.....	4
1.4 Historique de la BEM :.....	4
1.5 Comparaison des deux méthodes.....	6
CHAPITRE 2 : Equations intégrales de frontières.....	9
2.1 Principe des méthodes intégrales :.....	9
2.2 Problèmes de potentiels (Equation de Laplace) :.....	10
2.3 Couplage éléments finis–éléments de frontières FEM/BEM.....	13
Chapitre 3 : Discrétisation par éléments de frontière.....	17
3.1 Introduction :.....	17
3.2 Transformation des coordonnées :.....	18
3.3 Système d'équations.....	20
3.4 Formulation en éléments constants :.....	21
3.5 Formulation en éléments linéaires :.....	26
3.6 Formulation en éléments discontinus :.....	30
3.7 Conclusion.....	32
Chapitre 4 : Applications.....	33
4.1 Introduction.....	33
4.2 Etape et caractéristique d'un programme BEM :.....	33
4.3 Outil de programmation :.....	34
4.4 Validation :.....	34
4.5 Application au cas des réservoirs semi-infinis.....	36
4.6 Conclusion.....	45
Conclusion générale :.....	47
Références bibliographique :.....	48

---

# Introduction générale

---

En ingénierie, plusieurs phénomènes ne peuvent pas être traités analytiquement et le recours aux méthodes numériques est indispensable. De nos jours, la modélisation numérique prend une proportion croissante devant la complexité des problèmes traités au vu des facilités et des gains de temps indéniables offerts par les ordinateurs. Cela s'avère particulièrement exacte dans le domaine de la mécanique des milieux continus où la méthode des éléments de frontière (Boundary Element Method) se pose comme une technique numérique puissante jouissant d'une grande précision. Les avantages que présente cette méthode l'amènent à concurrencer la méthode des éléments finis (Finite Element Method) plus largement utilisée dans les problèmes d'ingénierie et à prendre le pas sur cette dernière dans certains cas spécifiques.

Ce travail a fait l'objet de notre mémoire de fin d'étude sur les éléments de frontières. Pour cela, il est organisé en quatre chapitres. Dans le premier chapitre, on a donné quelques généralités concernant les deux méthodes numériques les plus utilisées en ingénierie à savoir la méthode des éléments finis « FEM » et la méthode des éléments de frontière « BEM ». Dans le second chapitre, on a exposé le principe des équations intégrales de frontière ainsi que les différents étapes de à savoir pour leur formulation et on a donné un aperçu sur la techniques de couplage entre la méthode des éléments finis et la méthode des éléments de frontière. Le troisième chapitre est consacré à la discrétisation des équations intégrales par les éléments de frontière. Le quatrième chapitre comporte la partie de notre travail où on a exposé les résultats obtenus ainsi que leurs comparaisons aux solutions analytiques existantes dans la littérature. Enfin, le manuscrit clôturé par une conclusion.

---

# Chapitre 1 : Généralités

---

## 1.1 Introduction

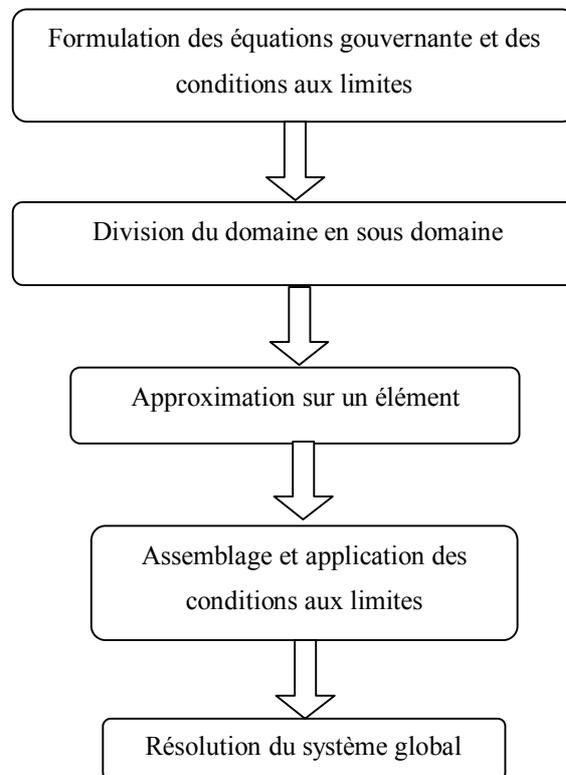
En générale pour vérifier un phénomène naturel ou un problème d'ingénierie, on est obligé de faire appelle à un modèle mathématique pouvant d'écrire d'une manière fiable le problème en question. Ce modèle s'appuie généralement sur des postulats de base et des hypothèses simplificatrices pour aboutir à des équations gouvernantes, qui sont souvent des équations différentielles aux quelles sont ajoutées des conditions au limites [20]. Dans plusieurs situations, la résolution analytique de ces équations s'avère difficile et parfois impossible, alors, le recours aux méthodes numériques est indispensable. Parmi ces méthodes on distingue [2,3] :

- La méthode des différences finies ;
- La méthode des volumes finis ;
- La méthode des éléments de frontière ;
- La méthode des éléments finis.

Le choix de la méthode dépend des particularités des équations constituant le modèle mathématiques du système à simuler, on les emploie parfois de façon combinée ou couplage entre méthodes numériques tel que éléments finis–éléments de frontières (MEF/BEM).

## 1.2 La Méthode des éléments finis :

La méthode des éléments finis est l'une des techniques numériques les plus puissantes, elle permet de résoudre de manière discrète une équation aux dérivées partielles, dont on cherche une solution approchée suffisamment fiable. De manière générale, cette méthode offre la possibilité de développer un programme permettant de résoudre plusieurs types de problèmes. En particulier, toute forme complexe d'un domaine géométrique ou un problème posé avec toutes les conditions aux limites peut être facilement traité par cette méthode. La résolution d'un problème physique par éléments finis suit les étapes suivantes :



**Fig.1.1** : principe de la MEF

Cette méthode s'applique dans les différents domaines tels que l'analyse linéaire (statique et dynamique) analyse non linéaire (grands déplacements, grandes déformations, contact et frottement, flambage, ...) mise en forme des matériaux thermique (en régime permanent et transitoire, ...) mécanique des fluides

électromagnétismes dynamiques rapides (choc, impact, crash) optimisation des structures.

### **1.3 La méthode des éléments de frontières :**

Est une méthode de calcul numérique qui sert à résoudre les équations aux dérivées partielles qui ont été formulées comme des équations intégrales de frontières. Elle remplace les équations aux dérivées partielles posées sur un domaine, par des équations intégrales sur la frontière du domaine, alors, le domaine sera ainsi réduit d'une dimension. Cette méthode est particulièrement intéressante pour des problèmes extérieurs comme elle peut être appliquée dans de nombreux domaines de l'ingénierie et de la science, y compris la mécanique des fluides, acoustique, électromagnétisme et mécanique de la rupture[4].

La résolution d'un problème physique par la BEM suit les étapes suivantes [1] :

- Etablissement des équations gouvernantes.
- Ecriture des équations sous forme intégrale.
- Calculer la solution fondamentale.
- Application du théorème de réciprocité.
- Division de la frontière en segments (éléments).
- Ecriture des matrices élémentaires.
- Assemblage et application des conditions aux limites.
- Résolution du système globale.

### **1.4 Historique de la BEM :**

Les techniques d'équations intégrales dans les problèmes de valeur aux limites ne datent pas d'aujourd'hui. En 1903, Fredholm a utilisé les équations intégrales discrétisées dans les problèmes de potentiels qui forment la base de l'approche indirecte des éléments de frontière. Cette approche est dite indirecte car elle utilise des fonctions de densité fictive ou des sources sans signification physique mais peut

être utilisée pour calculer des quantités physique telles que les déplacements ou les contraintes. Une équation intégrale traitant les valeurs des déplacements et des contraintes à la frontière a été établie par Somigliana (1886). L'identité de Somigliana forme la base de la formulation directe en éléments de frontière (BME) [5]. Plusieurs ouvrages et articles sur les équations intégrales en potentiels et en théorie d'élasticité ont été publiés par Kellogg (1929), Muskhelishvili (1953), Milkhin (1957) et Kupradze (1965). Cependant les formulations intégrales étaient résolues par des procédures analytiques qui limitaient leurs applications aux problèmes simples. Jusqu' aux années soixante, le champ d'application des équations intégrales était limité et leur résolution numérique n'était pas considérée. Au début des années soixante, grâce à l'évolution de l'outil informatique, des techniques numériques commençaient à être introduites en ingénierie. En 1963, une avancée considérable dans les solutions d'intégrales de frontière a été remarquée suite à la publication de deux articles par Jaswon et Symm[5]. Leur approche consistait à discrétiser les équations intégrales des problèmes de potentiel bidimensionnel gouvernés par l'équation de Laplace en éléments linéiques sur lesquels les fonctions de potentiel sont supposées constantes.

Le premier article utilisant l'approche directe en déplacements et contraintes dans une équation intégrale applicable sur la frontière a été publié par Rizzo(1967). Son travail était le premier à exploiter la forte analogie entre la théorie de potentiel et celle de l'élasticité et à proposer une résolution numérique.

L'extension aux problèmes tridimensionnels par Cruses (1969) a suivie une formulation similaire à celle des travaux de Rizzo mais en utilisant des éléments triangulaires dans la discrétisation de la surface. Durant cette période de développement(de 1967 à 1972), la formulation d'équation intégrale a été étendue aux problème : non homogène (Rizzo et Shippy 1968), électrodynamique (Cruse 1968 puis Cruse et Rizzo 1968),élastoplastiques (Swedlow et Cruse 1971), matériaux non isotrope(Cruse et Swedlow1971)et mécanisme de fracture en 3D (Cruse et Van 1972). Ces publications ont été cruciales car elles ont fourni une fondation stable pour promouvoir le déplacement de la BEM et démontrer sa fiabilité. Des modèles de résolution numérique ont été établis en utilisant des

éléments d'ordre supérieur avec des fonctions de forme quadratique (Lachat 1978) [5].

Depuis les années 70, l'approche par équation intégrales de frontière a continué de se développer à vive allure, tant bien du point de vue mathématique, élargissant ainsi ses champs d'application, on cite entre autres [13,14] :

- Aspect non linéaire de la mécanique continue.
- Décomposition et parallélisation du domaine/de la frontière.
- Couplage BME/FME.

## 1.5 Comparaison des deux méthodes

Lorsqu'on est habitué à utiliser une méthode aussi puissante telle que MEF on se demande souvent l'intérêt d'une nouvelle méthode telle que la BEM, ce pendant la citation de quelques avantages et inconvénients va nous aider à avoir un aperçu clair :

- Utilisation de notions mathématiques complexes : Les mathématiques utilisées dans la formulation des éléments de frontière peuvent paraître non usuelles aux ingénieurs (mais pas difficiles à apprendre). Cependant, plusieurs procédures numériques d'éléments finis sont directement applicables aux solutions d'éléments de frontière (telles que l'intégration numérique et le traitement des conditions aux limites). Durant les premières phases de développement des techniques d'éléments de frontière, des connaissances considérables en mathématiques avancées étaient nécessaires pour prouver l'existence et l'unicité de chaque solution ce qui n'est plus nécessaire maintenant que la formulation des éléments de frontière est bien établie, et que l'unicité des solutions est admise (l'exactitude des programmes par éléments de frontière est une preuve en elle-même).

- Les mathématiques utilisées dans la formulation des éléments finis sont plus familières aux ingénieurs. Cependant de plus en plus d'ouvrages traitant les éléments de frontières ont disponibles ce qui permet de rendre la méthode plus accessible.
- Moins de temps de préparation de données : Ceci est un résultat direct de la réduction d'une dimension du domaine étudié, le temps requis pour la préparation des données est ainsi considérablement réduit. De plus, les changements ultérieurs dans le maillage sont faciles.
- La FEM est plus établie et plus développée commercialement, particulièrement pour les problèmes non linéaires complexes où des tests approfondis ont été accomplis pour garantir sa fiabilité. De plus, les ingénieurs tendent à utiliser des logiciels et programmes informatiques déjà établis au lieu de s'aventurer dans de nouvelles méthodes.
- Avec moins de données on peut exécuter un programme efficace par contre avec la MEF nécessite une informatique puissante [23.10].
- Les outils de maillage et de représentation développés pour les éléments finis sont directement applicables aux problèmes d'éléments de frontière. Des matrices solution complètement pleines : La matrice solution résultant de la formulation par éléments de frontière est dissymétrique et complètement remplie, alors que les matrices d'éléments finis sont généralement de dimension plus grande mais moins remplies. Ce qui veut dire que la matrice solution par éléments de frontière doit être entièrement enregistrée dans la mémoire de l'ordinateur. Cependant, ce n'est pas un sérieux inconvénient car pour obtenir un même niveau de précision qu'en éléments finis, la méthode des éléments de frontière requière un nombre de nœuds et d'éléments relativement modeste [1.21.23].
- La BEM est très adaptée (et plus précise) pour les problèmes linéaires (particulièrement pour les problèmes 3D avec des variables qui changent rapidement telles que les cas de fissures et de problèmes de

contact, discontinuités géométriques ...). A cause de la grande réduction du temps requis pour modéliser un problème particulier, la BEM est très appropriée pour les modèles d'analyse préliminaires où la géométrie et le chargement peuvent être ultérieurement modifiés avec peu d'efforts. Cela donne plus de liberté au concepteur dans l'expérimentation avec de nouvelles formes et de nouvelles géométries [11.23].

- Dans le cas d'un calcul BEM sans couplage, le principal avantage de la méthode BEM réside en sa faculté à fournir une solution sur la frontière uniquement sur base d'une discrétisation de cette frontière et donc un degré de modélisation moindre que celui de la méthode FEM. Cet avantage est d'autant plus mis en avant dans un problème nécessitant l'introduction d'une condition aux limites appliquée infiniment loin de la structure étudiée. En effet, par la méthode FEM, l'utilisateur se verra dans l'obligation de discrétiser une grande partie du domaine extérieur afin d'imposer la condition aux limites suffisamment loin de la structure. Concernant la méthode BEM, cette condition aux limites est automatiquement respectée par la solution particulière et ne nécessite donc aucun traitement particulier. Comme il le sera mis en évidence dans la suite, les équations intégrales font intervenir deux inconnues en chacun des nœuds de la frontière. Il est donc indispensable d'imposer une de ces deux inconnues afin de pouvoir résoudre le problème [23].
- la méthode FEM s'applique à tout type de problème (équations linéaires et non linéaires) tandis que pour la méthode BEM, certaines solutions particulières ne sont pas encore connues, ce qui induit une limitation d'applicabilité de cette dernière méthode.

---

# Chapitre 2 : Equations intégrales de frontières

---

## 2.1 Principe des méthodes intégrales :

La méthode des équations intégrales permet de résoudre un problème aux limites d'inconnue  $u$ , posé dans un domaine  $\Omega$ , associé à un opérateur aux dérivées partielles du second ordre linéaire  $\mathcal{L}\mathcal{L}$ . Le problème aux limites peut se d'écrire par l'ensemble d'équations ci-dessous :

$$\begin{cases} \mathcal{L}u + f = 0 & |\Omega \\ u = g_1 & |\Gamma_1 \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g_2 & |\Gamma_2 \end{cases} \quad (2.1)$$

Où  $g_1$ ,  $g_2$  et la source  $f$  sont des données du problème et  $n$  désigne la normale à la frontière  $\Gamma$ . On peut montrer que l'opérateur  $u \rightarrow \frac{\partial u}{\partial n}$  apparait dans la formule de réciprocité ci-dessous qui peut être démontrée dans le cas où l'opérateur différentiel  $\mathcal{L}$  est à coefficients constants par utilisation du théorème de Green [5.6.18] :

$$\int_{\Omega} (\mathcal{L}u \cdot w - \mathcal{L}w \cdot u) dV = \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial u}{\partial n} \cdot w - \frac{\partial w}{\partial n} \cdot u \right) d\Gamma \quad (2.2)$$

Dans le cas où la solution recherchée est un scalaire, la fonction  $w$  est alors remplacée par une solution particulière, dite élémentaire, qui vérifie l'équation :

$$\mathcal{L}w + f = 0$$

où  $f$  représente une source ponctuelle ( $f(y) = \delta(y - x)$ ) appliquée en un point fixé  $x \notin \Gamma$ . Notons  $G(x, y)$  cette solution élémentaire, fonction du point courant  $y$ .

La mesure de Dirac  $\delta(y - x)$  vérifie la propriété :

$$\int_{\Omega} \delta(y - x)u(y)dV = ku(x) \quad \text{avec} \begin{cases} k = 1 & x \in \Omega - \Gamma \\ k = 0 & x \notin \Omega \end{cases} \quad (2.3)$$

La substitution de  $w$  par  $G$  dans la formule de réciprocité (2.2) conduit à la relation suivante, pour  $x \notin \Omega$  dénommée représentation intégrale :

$$ku(x) = \int_{\Omega} f(y)G(x, y)dV_y + \int_{\Gamma} [u(y)\frac{\partial G(x, y)}{\partial n} - \frac{\partial u(y)}{\partial n}G(x, y)]d\Gamma_y \quad (2.4)$$

## 2.2 Problèmes de potentiels (Equation de Laplace) :

Considérons un problème gouverné par l'équation de Laplace (2.5) définie dans un domaine  $\Omega$  de frontière  $\Gamma$  et qui est donnée par :

$$\nabla^2 u = 0 \quad (2.5)$$

Les conditions aux limites associées à l'équation (2.5) sont :

$$\begin{cases} u = \bar{u} & \text{sur } \Gamma_1 \\ q = \frac{\partial u}{\partial n} = \bar{q} & \text{sur } \Gamma_2 \end{cases}$$

Tel que  $\bar{u}$  et  $\bar{q}$  sont respectivement les conditions de Dirichlet et de Neumann, et  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  définissent une partition de la frontière  $\Gamma$ .

La forme intégrale de l'expression (2.5), en adoptant  $w$  comme fonction de pondération, peut être écrite sous la forme suivante :

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u)w d\Omega = 0 \quad (2.6)$$

En intégrant deux fois par partie l'équation (2.6), on obtient l'expression suivante :

$$\int_{\Omega} [(\Delta w)u]d\Omega = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} w d\Gamma - \int_{\Gamma} u \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma \quad (2.7)$$

L'un des points essentiels des équations intégrales consiste à obtenir une solution fondamentale ( $w = g$ ) au point  $y$ , relative à une impulsion Dirac  $\delta(y - x)$  appliqué en un point  $x \notin \Gamma$  :

$$\Delta w = \delta(y - x) \quad (2.8)$$

Dans le cas de problème bidimensionnel, la solution fondamentale de l'équation de Laplace est donnée par [2,5,14] :

$$g(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right) \quad (2.9)$$

avec  $r$  est la distance radiale entre le point  $x$  et  $y$ . La substitution de l'équation (2.8) dans (2.7), on obtient :

$$ku(x) = \int_{\Gamma} q(y)g(x, y)d\Gamma - \int_{\Gamma} h(x, y)u(y) d\Gamma \quad (2.10)$$

avec  $k$  prend la valeur 1 si  $x \in \Omega$  et 0 si  $x \notin \Omega$ .  $h(x, y)$  désigne la dérivée de  $g(x, y)$  par rapport à la normale  $n$  tel que :

$$h(x, y) = \frac{\partial g(x, y)}{\partial n} \quad (2.11)$$

Si  $x \in \Omega$ , alors  $k = 1$  et l'expression (2.10) devient :

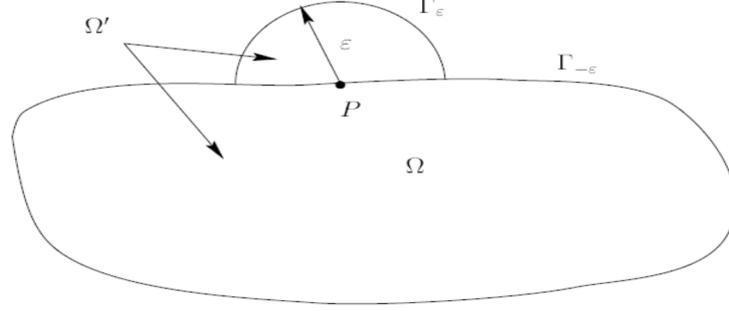
$$u(x) = \int_{\Gamma} q(y)g(x, y)d\Gamma - \int_{\Gamma} h(x, y)u(y) d\Gamma \quad (2.12)$$

qui donne explicitement la valeur de  $u$  en tout point  $x$  intérieur de  $\Omega$ . Si  $x \notin \Omega$ , alors  $k = 0$  et l'expression (2.10) devient :

$$\int_{\Gamma} q(y)g(x, y)d\Gamma - \int_{\Gamma} h(x, y)u(y) d\Gamma = 0 \quad (2.13)$$

L'expression (2.10) est valable pour  $x \notin \Gamma$ . Cependant, si le point  $x$  se trouve à la frontière ( $x \in \Gamma$ ), l'expression (2.10) devient une équation intégrale de frontière qui ne porte que sur des valeurs de  $u$  et  $q$  à la frontière. Cette équation présente alors des singularités non intégrables, et le terme  $k$  est déterminé par un passage à la limite (2.17) et (2.18) lorsque le point  $x$  est entouré par un demi-cercle de frontière

$\Gamma_\varepsilon$  et de rayon  $\varepsilon$  qui tend vers 0 (fig2.1). Dans ce cas, le point  $x = p$  appartenant au domaine  $\Omega'$  de frontière  $\Gamma_{-\varepsilon} \cup \Gamma_\varepsilon$ .



**Fig. 2.1** : Illustration de domaine élargie quand le point singulier est dans la frontière [19].

En étudiant terme par terme de l'équation (2.7), d'où :

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} u \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma = \int_{\Gamma_\varepsilon} u \frac{\partial}{\partial n} \left( -\frac{1}{2} \ln r \right) d\Gamma \quad (2.14)$$

qui est égale aussi à :

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} u \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma = \int_{\Gamma_\varepsilon} u \frac{\partial}{\partial r} \left( -\frac{1}{2} \ln r \right) d\Gamma \quad (2.15)$$

Après simplification on aura :

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} u \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{\varepsilon} u(x) \pi \varepsilon \quad (2.16)$$

Il est à noter que (2.16) est obtenu pour  $x \in \Omega'$ . Pour ramener  $x$  à la frontière, le rayon  $\varepsilon$  doit être infiniment petit. Pour cela, on utilise la limite suivante :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} u \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( -\frac{1}{2\pi} \frac{u(x)}{\varepsilon} \pi \varepsilon \right) = -\frac{u(x)}{2} \quad (2.17)$$

On procède de la même manière concernant le deuxième terme, d'où :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} w \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial u}{\partial n} (x) \pi \varepsilon \right) \ln \varepsilon = 0 \quad (2.18)$$

Par analogie, on obtient  $k = \frac{1}{2}$  ; Cela est valable pour une frontière régulière (lisse).

Dans le cas où la frontière n'est pas régulière  $k = \frac{\theta}{2\pi}$  , avec  $\theta$  angle interne entre deux frontières consécutives.

Alors, la constante  $k$  est donnée par :

$$k(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si la frontière est régulière} \\ \frac{\theta}{2\pi} & \text{si la frontière est irrégulière} \end{cases} \quad (2.19)$$

### 2.3 Couplage éléments finis–éléments de frontières FEM/BEM

La méthode des éléments de frontières(BEM) n'est pas toujours satisfaisante car cette méthode nécessite l'introduction d'autres méthodes numériques telle que la méthode des éléments finis (MEF). Cela signifie qu'on peut coupler entre ces deux méthodes selon le besoin ou le type de problème étudié (linéaire, non linéaire, borné, ...etc.).

L'idée de coupler les deux méthodes est fortement motivée par la combinaison de leurs avantages et la réduction de leurs inconvénients. Plusieurs études ont été accomplies en utilisant différentes formulations pour les équations intégrales de frontière telles que la méthode de Galerkin [5,6,16], éléments de frontière à réciprocity duale (DRBEM)[19,25], principe variationnel [25], fonctions de Green particulières [1], couplage direct par transformation des matrices [24], éléments de frontière discontinus[26]...etc. Même si la majeure partie des techniques de couplage force l'une des deux méthodes à être au même format que l'autre pour les rendre compatibles, bon nombre de chercheurs préfèrent cependant préserver les caractéristiques de chacune d'elles en utilisant un processus de couplage itératif pour satisfaire les conditions d'équilibre à l'interface de couplage[1].

Il y a parfois des avantages dans la combinaison des éléments finis (FE) et de frontière (BE).

Par exemple, dans beaucoup de problèmes traitant des domaines non bornés, les BE peuvent fournir les conditions appropriées pour représenter la partie infinie alors que les FE peuvent traiter les matériaux aux propriétés complexes dans la partie la plus proche. Les BE sont aussi intéressants dans les régions de concentration de contraintes ou de potentiels mais les FE peuvent être plus adéquats et plus simples à utiliser dans des cas de non homogénéité, anisotropie et non linéarité. Il est donc important de savoir modéliser un système physique en utilisant aussi bien les FE que les BE selon les géométries et les conditions aux limites (CAL).

On rapporte ici trois méthodes de couplage :

**1ere méthode :** on utilise la solution de la MEF pour définir les conditions aux limites de la BEM.

Cette technique est purement empirique et consiste en la résolution préalable par MEF pour zoomer dans un domaine particulier en utilisant les résultats obtenus comme CAL en déplacements ou en potentiels. L'approche ne peut pas être facilement justifiée d'un point de vue mathématique.

**2eme méthode :** on traite le problème par la BEM comme étant un problème de MEF. On considère les sous-domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ , tel que  $\Omega_1$  est représenté en BEM et  $\Omega_2$  Discrétisé en MEF, les matrices de BEM pour  $\Omega_1$  peuvent s'écrire :

$$HU = GQ \quad (2.20)$$

Et celles MEF pour  $\Omega_2$  sont :

$$KU = F \quad (2.21)$$

Où  $K$  est la matrice rigidité et  $F$  le vecteur force. Notons que  $U$  représente les déplacements (ou les potentiels) et  $Q$  les forces de surface (ou les flux). On peut réduire (2.21) à une forme FE en inversant le  $G$  :

$$G^{-1}HU = Q \quad (2.22)$$

Puis on convertit les valeurs des forces nodales  $Q$  en matrice force nodale équivalente de type utilisé en FE. Ceci est en pondérant les forces à la frontière par

la fonction d'interpolation utilisés pour les déplacements, ce qui produit une matrice  $M$  telle que :

$$F = MQ \quad (2.23)$$

Cette opération est standard en EF mais il est rare d'écrire la distribution de la matrice  $M$  sous forme explicite ; l'équation (2.23) peut s'écrire :

$$M(G^{-1}H)(U) = MQ = F \quad (2.24)$$

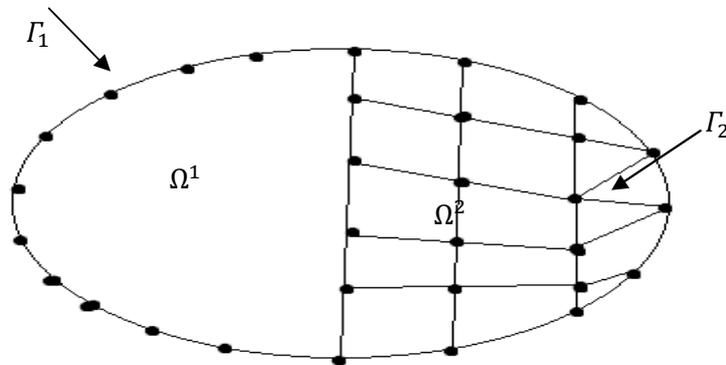
Ou le vecteur  $F'$  a la même forme qu'en éléments finis, et on peut donc réécrire la formule précédente sous la forme :

$$K'U = F' \quad (2.25)$$

Ou

$$K' = MG^{-1}H$$

$K'$  est une matrice de rigidité obtenue à partir de la formulation en BEM. Elle est généralement asymétrique du fait des approximations intervenant dans la discrétisation, même si cette matrice est parfois symétrisée simplement en prenant la moyenne des éléments extra-diagonaux c'est-à-dire on calcule:  $\frac{1}{2}(K' + K'^T)$ ; mais ce calcul n'est pas exact; il induit a des imprécisions de résultats dans plusieurs cas de pratique. La matrice équivalente en MEF de l'équation (2.25) peut maintenant être assemblée avec les matrices relatives au sous-domaine  $\Omega^2$  pour constituer la matrice globale de rigidité (Fig.2.2).



**Fig.2.2** : domaine divisé en deux sous domaine FE et BE

**3ème méthode** : cette méthode est l'inverse de la 2ème méthode, cette approche a été proposée par Brebbia et Georgiou (1979) [26] ; consiste à traiter le domaine par éléments finis comme étant un domaine d'éléments de frontières. Considérons les deux sous domaines, on peut écrire les équations gouvernantes de premier sous domaine  $\Omega_1$  de manière suivante :

$$[H^1 \quad H_I^1] \begin{Bmatrix} U^1 \\ U_I^1 \end{Bmatrix} = [G^1 G_I^1] \begin{Bmatrix} Q^1 \\ Q_I^1 \end{Bmatrix} \quad (2.26)$$

L'indice I représente l'interface.

Les matrices pour MEF dans le deuxième sous domaine peuvent être assimilées à la matrice  $M$  introduite dans l'équation (2.23) :

$$[K^2 \quad K_I^2] \begin{Bmatrix} U^2 \\ U_I^2 \end{Bmatrix} = [M^2 M_I^2] \begin{Bmatrix} Q^2 \\ Q_I^2 \end{Bmatrix} \quad (2.27)$$

En posant  $Q_I = Q_I^1 = -Q_I^2$  et  $U_I = U_I^1 = U_I^2$ , on satisfaisant automatiquement les conditions d'équilibre et de compatibilité ; les équations (2.26) et (2.27) peuvent être réarrangés dans le même système comme suit :

$$\begin{bmatrix} H^1 & H_I^1 - G_I^1 & 0 \\ 0 & K_I^2 & M_I^2 & K^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U^1 \\ U_I \\ Q_I \\ U^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G^1 & 0 \\ 0 & M^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q^1 \\ Q^2 \end{Bmatrix} \quad (2.28)$$

Ces équations nécessitent un réarrangement en concordance avec les conditions d'équilibre. Notons que cette approche ne nécessite aucune inversion de matrice.

---

# Chapitre 3 : Discrétisation par éléments de frontière.

---

## 3.1 Introduction :

Pour résoudre numériquement les équations intégrales, on subdivise le contour  $\Gamma$  en  $n_e$  éléments de frontières isoparamétriques. Sur chaque élément  $j$ , la solution  $u$  et le gradient de la solution  $q$  dépendent de type de l'élément considéré. L'interpolation nodale de  $u$  et  $q$  sont données par :

$$u = Nu^j \quad ; \quad q = Nq^j \quad (3.1)$$

où  $N$  est le vecteur des fonctions de forme de l'élément  $j$  (ces fonctions sont les mêmes qu'en éléments finis).  $u^j$  et  $q^j$  sont les valeurs nodales de  $u$  et  $q$  aux nœuds de l'élément  $j$ . En tenant compte de (2.19), l'expression discrète de l'équation (2.10) en un point  $i$  de la frontière s'écrit :

$$k^i u^i + \sum_{j=1}^{n_e} \left[ \int_{\Gamma_j} h N d\Gamma_j \right] u^j = \sum_{j=1}^{n_e} \left[ \int_{\Gamma_j} g N d\Gamma_j \right] q^j \quad (3.2)$$

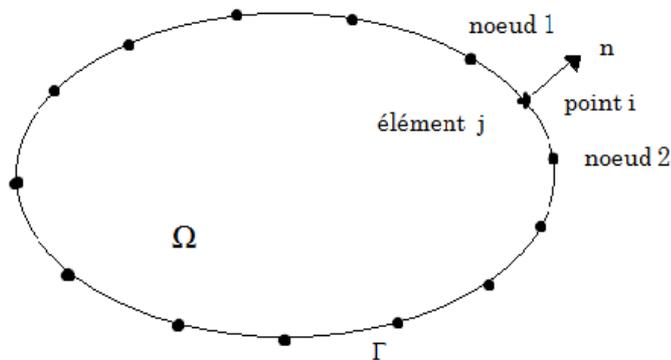


Fig. 3.1 : Discrétisation de la frontière.

En générale, les intégrales de l'équation (3.2) sont calculées numériquement, les fonctions d'interpolation tendent à être exprimées en un système homogène de coordonnées de référence  $\xi$ , qui nécessitent par la suite un transfert vers le système globale  $x_i$  (transformation géométrique)[1].

Les coordonnées cartésiennes de la frontière peuvent être aussi écrites en fonction des coordonnées nodales pour les éléments de références ; le changement se fait en introduisant le Jacobien.

### 3.2 Transformation des coordonnées :

Les éléments utilisés dans les problèmes bidimensionnels sont des segments de frontière généralement de type : droits ou curvilignes. Les fonctions  $u$  et  $q$  en plus celle utilisées pour décrire la géométrie peuvent être constantes sur chaque éléments, linéaires ou bien n'importe quelle autre fonction produisant un élément curviligne [1]. L'étude de l'élément nécessite le passage du repère global cartésien  $(x, y)$  au repère de référence  $(\xi, \eta)$ . La transformation pour une fonction donnée  $u$  est décrite comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (3.3)$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = J \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (3.4)$$

Ou  $J$  est la matrice Jacobienne.

La relation inverse est donnée par :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} = J^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (3.5)$$

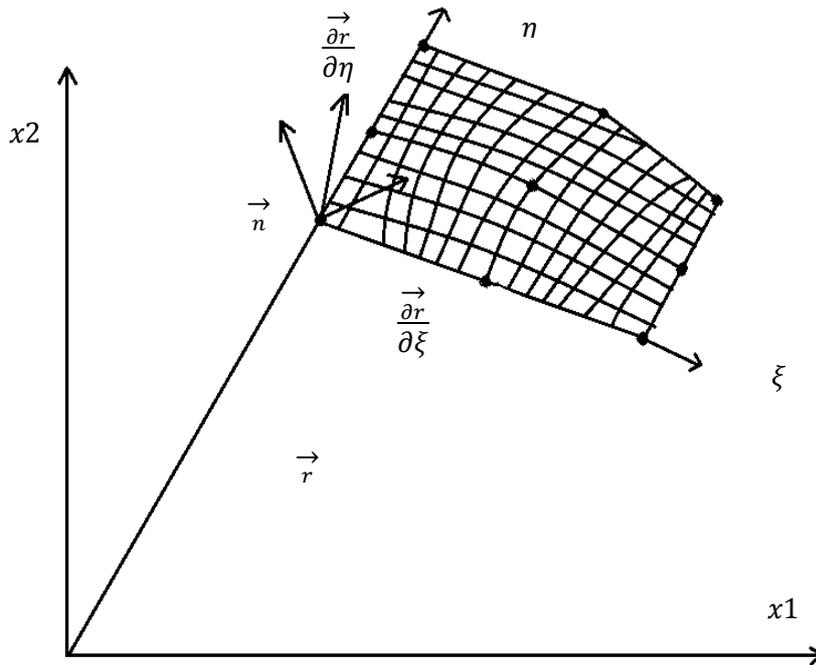
Les transformations de ce type nous permettent de décrire la différentiation d'une surface ou d'un contour en fonction des coordonnées de référence.

La différentielle d'une surface  $\Omega$  est écrite comme suit :

$$d\Omega = |J| d\xi d\eta = \left| \frac{\vec{dr}}{d\xi} \times \frac{\vec{dr}}{d\eta} \right| d\xi d\eta \quad (3.6)$$

$$d\Gamma = |J_{lin}| d\xi = \left| \frac{\vec{dr}}{d\xi} \right| d\xi \quad (3.7)$$

Avec  $J_{lin}$  : Jacobienne linéique.



**Fig. 3.2 :** Eléments quadratiques courbes pour problème bidimensionnels.

Pour calculer les valeurs de ces Jacobiennes, on a besoin de connaître la variation des coordonnées  $(x, y)$  en fonction du système  $(\xi, \eta)$  qui sont données en termes des mêmes fonctions d'interpolation utilisées pour la solution et les gradients de la solution (3.1).

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = N \begin{Bmatrix} x^j \\ y^j \end{Bmatrix} \quad (3.8)$$

Avec  $\begin{Bmatrix} x^j \\ y^j \end{Bmatrix}$  valeurs nodales des coordonnées de l'élément  $j$  considéré et  $N$  fonctions d'interpolation utilisées pour le champ de variables et les gradients de la solution ; l'élément dans ce cas est dit isoparamétrique. L'équation (3.2) peut être écrite comme suit :

$$k^i u^i + \sum_{j=1}^{n_e} \left[ \int_{\Gamma_j} h N(\xi) |J_{lin}| d\xi \right] u^j = \sum_{j=1}^{n_e} \left[ \int_{\Gamma_j} g N(\xi) |J_{lin}| d\xi \right] q^j \quad (3.9)$$

En appliquant l'intégration numérique (quadrature de Gauss) à l'équation précédente [4], on remplace les intégrales par des sommes :

$$k^i u^i + \sum_{j=1}^{n_e} \left\{ \sum_{k=1}^{npg} w_k (hN)_k |J_{lin}| \right\} u^j = \sum_{j=1}^{n_e} \left\{ \sum_{k=1}^{npg} w_k (gN)_k |J_{lin}| \right\} q^j \quad (3.10)$$

Où  $npg$  est le nombre de points d'intégration sur la frontière ainsi que les éléments et  $w$  le poids de ces points. Les quantités  $(hN)_k$ ,  $(gN)_k$  sont les valeurs des fonctions aux points de Gauss  $\xi_k$  ; où  $k$  représentante direction.

### 3.3 Système d'équations

L'équation(3.9) qui correspond à l'élément  $j$ , peut être écrite sous forme :

$$k^i u^i + \sum_{j=1}^{nn} \hat{H}^{ij} u^j = \sum_{j=1}^{nn} G^{ij} q^j \quad (3.11)$$

Où  $nn$  est le nombre des nœuds,  $u^j$  et  $q^j$  sont les déplacements et les gradients de déplacements défini sur l'élément  $j$  et les matrices  $H$  et  $G$  sont :

$$\hat{H}^{ij} = \int_{\Gamma_j} h N_t d\Gamma_j \quad ; \quad G^{ij} = \int_{\Gamma_j} g N_t d\Gamma_j \quad (3.12)$$

La sommation couvre tous les éléments de la frontière, y compris ceux auxquels appartient le nœud  $i$ . L'indice  $t$  représente le numéro du nœud  $i$  dans l'élément  $j$ . Pour des éléments constants, la sommation couvre uniquement un seul élément  $j \equiv i$  et  $N_t$  est la matrice identité.

Posons que :

$$H^{ij} = \begin{cases} \widehat{H}^{ij} & i \neq j \\ \widehat{H}^{ij} + k^i & i = j \end{cases} \quad (3.13)$$

L'équation(3.11) devient :

$$\sum_{j=1}^{nn} H^{ij} u^j = \sum_{j=1}^{nn} G^{ij} q^j \quad (3.14)$$

Donc on aura un système d'équations algébriques suivant :

$$HU = GQ \quad (3.15)$$

Les vecteurs de  $u$  et  $q$  représentent toutes les valeurs de la solution et les gradients de la solution avant applications des conditions aux limites. Ces conditions peuvent être introduites en réarrangeant les colonnes de  $H$  et  $G$  de manière à mettre tout les inconnues dans un vecteurs  $X$  à la partie gauche de l'équation, ce qui donne le système suivant :

$$AX = F \quad (3.16)$$

La résolution de ce système donne toute les valeurs à la frontière.

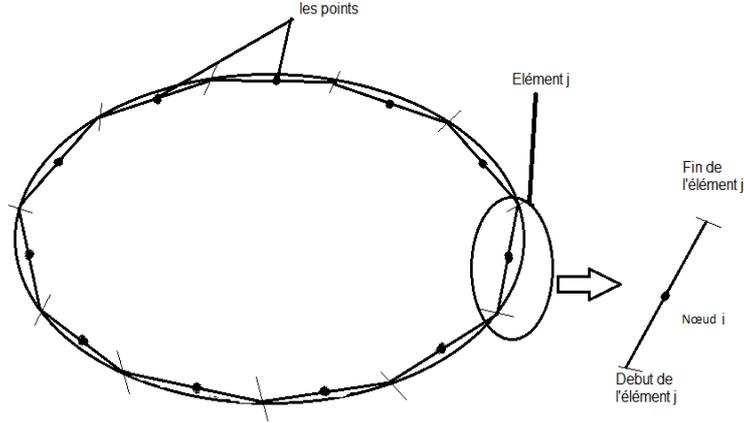
### 3.4 Formulation en éléments constants :

On considère que la frontière est subdivisée en  $ne$  éléments et les valeurs  $u$  et  $q$  sont supposées constantes sur chaque éléments et égales aux valeurs aux mi-éléments. Comme le montre la figure (3.3).

La forme discrétisée de l'équation (2.10) pour chaque point  $i$  , avant l'application des conditions aux limites est comme suit:

$$k^i u^i + \sum_{j=1}^{ne} \int_{\Gamma_j} h u d\Gamma = \sum_{j=1}^{ne} \int_{\Gamma_j} g q d\Gamma \quad (3.17)$$

Sachant que pour ce type d'éléments, la frontière est toujours régulière et pour  $i = j$  le paramètre  $k = 1/2$ .



**Fig.3.3** : Élément constant.

$\Gamma_j$  est la frontière de l'élément  $j$ . On tire les valeurs de  $u$  et  $q$  des intégrales puisque ils sont constants sur chaque éléments  $j$ , que seront notés  $u^j$  et  $q^j$  pour l'élément  $j$ . On aura l'équation suivante :

$$\frac{1}{2}u^i + \sum_{j=1}^{ne} \left( \int_{\Gamma_j} h d\Gamma \right) u^j = \sum_{j=1}^{ne} \left( \int_{\Gamma_j} g d\Gamma \right) q^j \quad (3.18)$$

Notons que les termes  $\int_{\Gamma_j} h d\Gamma$  et  $\int_{\Gamma_j} g d\Gamma$  reliant le nœud à l'élément. Pour cette raison les valeurs obtenu sont parfois appelées coefficients d'influence :

$$\hat{H}^{ij} = \int_{\Gamma_j} h d\Gamma_j \quad \text{et} \quad G^{ij} = \int_{\Gamma_j} g d\Gamma_j \quad (3.19)$$

On remplaçant les termes de (3.18) dans l'équation (3.19), on aura l'équation suivante :

$$\frac{1}{2}u^i + \sum_{j=1}^{ne} \hat{H}^{ij} u^j = \sum_{j=1}^{ne} G^{ij} q^j \quad (3.20)$$

Supposant que la position de  $i$  varie de 1 jusqu'à  $ne$ , nous obtenant un système d'équation résultant de l'équation (3.20) pour chaque point de la frontière :

$$H^{ij} = \begin{cases} \hat{H}^{ij} & i \neq j \\ \hat{H}^{ij} + \frac{1}{2} & i = j \end{cases} \quad (3.21)$$

Donc l'équation (3.20) peut être écrite :

$$\sum_{j=1}^{ne} H^{ij} u^j = \sum_{j=1}^{ne} G^{ij} q^j \quad (3.22)$$

Ce système peut être exprimé sous forme matricielle suivant :

$$HU = GQ \quad (3.23)$$

Où  $H$  et  $G$  sont deux matrices  $ne \times ne$  et  $U$ ,  $Q$  sont des vecteurs de longueurs  $ne$ .

Pour résoudre le système (3.23) et appliquer les conditions aux limites, on doit réarranger le système et déplacer les colonnes de  $H$  et  $G$  d'un côté à l'autre pour avoir

$$AX = F \quad (3.24)$$

Où  $X$  représente un vecteur d'inconnues  $u$ ,  $q$  de valeurs limites;  $F$  est trouvé en multipliant les colonnes correspondantes par les valeurs connues de  $u$  et  $q$ , tandis que les inconnues sont maintenant un mélange de potentiel et de ses dérivées. L'équation (3.24) peut être résolue et toutes les valeurs limites sont connues.

- **Points intérieurs:**

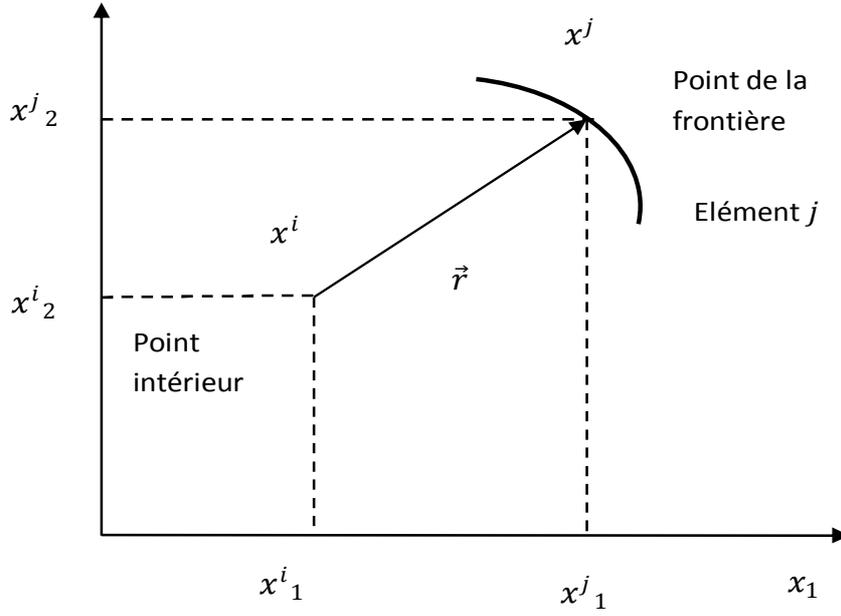
Une fois cela est fait, il est possible de calculer une valeur interne de  $u$  à l'intérieur du domaine  $\Omega$ ; on utilise l'équation (2.12), et qui peut être écrite comme suit :

$$u^i = \int_{\Gamma} hu \, d\Gamma - \int_{\Gamma} gq \, d\Gamma \quad (3.25)$$

Si on considère que la solution fondamentale agit sur un point  $i$  à l'intérieur du domaine  $\Omega$  et que toutes les valeurs de  $u$  et  $q$  sont connues. Le processus d'intégration et la discrétisation est le même que l'intégrale de frontière, on aura :

$$u^i = \sum_{j=1}^{ne} G^{ij} q^j - \sum_{j=1}^{ne} \hat{H}^{ij} u^j \quad (3.26)$$

Les coefficients  $G^{ij}$  et  $\hat{H}^{ij}$  sont calculés à nouveaux pour chaque point interne différents.



**Fig.3.4** : représentation des paramètres utilisés.

Les valeurs des flux internes dans les deux directions  $x_1$  et  $x_2$ .  $q_{x_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1}$  et  $q_{x_2} = \frac{\partial u}{\partial x_2}$  sont calculés en effectuant des dérivées sur(3.26), i.e.

$$(q_{x_1})^i = \left( \frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^i = \int_{\Gamma} q \left( \frac{\partial g}{\partial x_1} \right)^i d\Gamma - \int_{\Gamma} u \left( \frac{\partial h}{\partial x_1} \right)^i d\Gamma \quad (3.27)$$

$$(q_{x_2})^i = \left( \frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^i = \int_{\Gamma} q \left( \frac{\partial g}{\partial x_2} \right)^i d\Gamma - \int_{\Gamma} u \left( \frac{\partial h}{\partial x_2} \right)^i d\Gamma$$

Sachant que les dérivées ne sont effectuées que sur la solution fondamentale. Les fonctions  $g$  et  $h$  calculent les variations du flux autour du point  $i$ .

$$(q_{x_1})^i = \left( \frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^i = \sum_{j=1}^{ne} \left( \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial g}{\partial x_1} \right)^i \right) q^j - \sum_{j=1}^{ne} \left( \int_{\Gamma} u \left( \frac{\partial h}{\partial x_1} \right)^i \right) u^j \quad (3.28)$$

$$(q_{x_2})^i = \left( \frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^i = \sum_{j=1}^{ne} \left( \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial g}{\partial x_2} \right)^i \right) q^j - \sum_{j=1}^{ne} \left( \int_{\Gamma} u \left( \frac{\partial h}{\partial x_2} \right)^i \right) u^j$$

Les noyaux a intégrés toutes au long de l'élément sont :

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x_k}\right)^i = \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial}{\partial x_k} (-\ln r) = \frac{1}{2\pi r} r_{,k} \quad (3.29)$$

Et

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x_1}\right)^i = \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{1}{r} (r_{,1} n_1 + r_{,2} n_2)\right) = -\frac{1}{2\pi} [(2r_{,1}^2 - 1)n_1 + 2r_{,1} r_{,2} n_2] \quad (3.30)$$

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x_2}\right)^i = -\frac{1}{2\pi} [(2r_{,1}^2 - 1)n_2 + 2r_{,1} r_{,2} n_1]$$

Où  $r_{,k}$  indique la dérivé au point intégré; i.e.

$$\left(\frac{\partial r}{\partial x_k}\right)^i = -r_{,k}$$

Et  $n_1, n_2$  sont les composantes de l'unité normale, l'intégrale des données dans les expressions (3.30) se fait numériquement en utilisant une quadrature Gaussienne.

- **Evaluation des intégrales :**

Les intégrales comme  $G^{ij}$  et  $\hat{H}^{ij}$  peuvent être calculés en utilisant l'intégration numériques de Gauss Legendre pour le cas  $i \neq j$ ; et dans le cas  $i = j$  l'élément présente une singularité en raison de la solution fondamentale qui exige une intégration plus précise. Dans le cas des éléments de frontière, les intégrales de  $G^{ii}$  et  $\hat{H}^{ii}$  peuvent être calculé analytiquement, le terme  $\hat{H}^{ii}$  est identiquement nul car la normale  $n$  est perpendiculaire aux éléments :

$$\hat{H}^{ii} = \int_{\Gamma_j} h d\Gamma = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} d\Gamma = 0 \quad (3.31)$$

L'intégrale du terme  $G^{ii}$  :

$$G^{ii} = \int_{\Gamma_j} g d\Gamma = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_j} \ln \frac{1}{r} d\Gamma \quad (3.32)$$

Pour intégrer facilement on doit modifier les coordonnées réels par une coordonnée de référence  $\xi$  donc on aura  $r = \left|\xi \frac{l}{2}\right|$  ou  $l$  est la longueur de l'élément (figure 3.5).

Alors le terme (3.29) devient :

$$G^{ii} = \frac{1}{2\pi} \int_{p_1}^{p_2} \ln \frac{1}{r} d\Gamma = \frac{1}{\pi} \int_{nd_1}^{p_2} \ln \frac{1}{r} dr = \frac{1}{2\pi} \int_0^l \ln \frac{1}{\xi l/2} d\xi = \frac{1}{\pi} \frac{l}{2} \left[ \ln \left( \frac{1}{l/2} \right) \right] + 1 \quad (3.33)$$

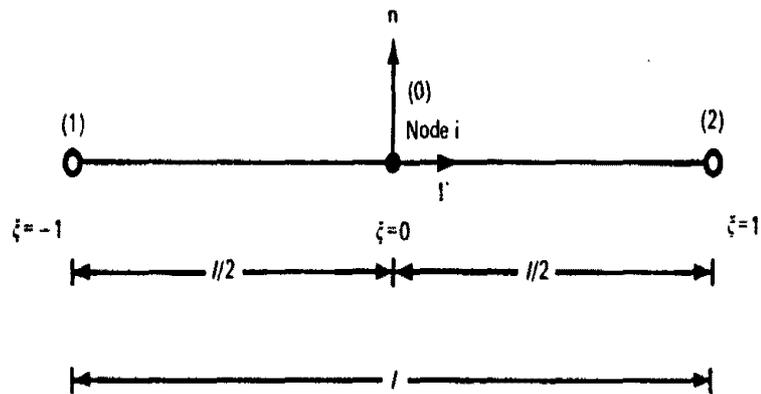


Fig. 3.5 : Élément de référence pour élément constants [6].

### 3.5 Formulation en éléments linéaires :

On considère maintenant une variation linéaire de  $u$  et  $q$ , les nœuds sont supposées être aux extrémités de l'élément comme le montre la figure suivant :

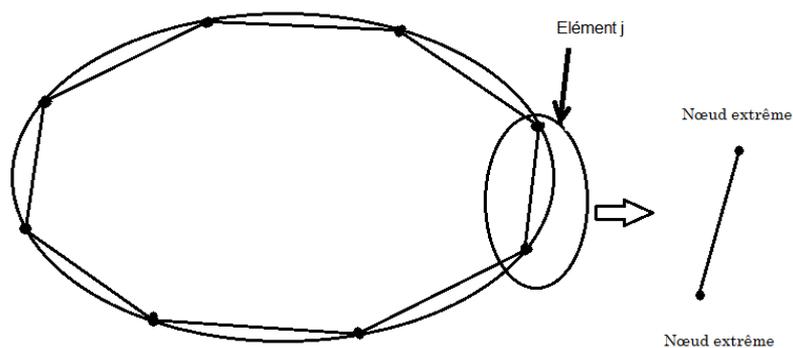


Fig. 3.6 : Élément linéaires.

L'équation intégrale gouvernante est :

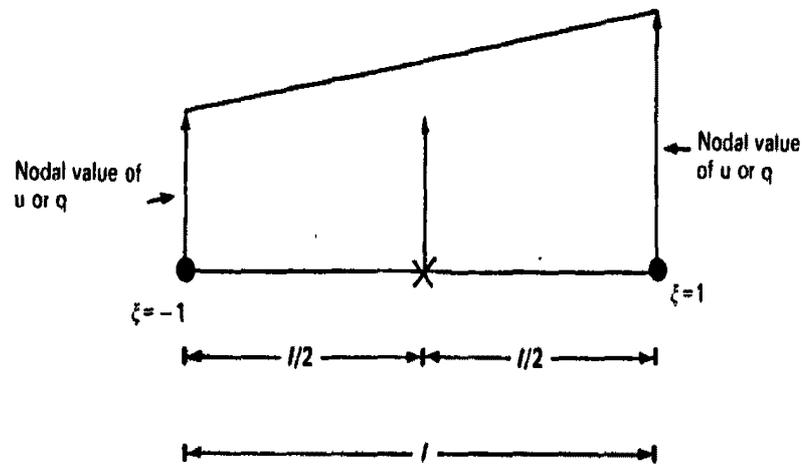
$$k^i u^i + \int_{\Gamma} h u d\Gamma = \int_{\Gamma} g q d\Gamma \quad (3.34)$$

Dans ce cas  $k^i = \frac{\theta}{2\pi}$  ou  $\theta$  est l'angle interne du coin en radian, après la discrétisation de la frontière en  $ne$  éléments l'équation (3.34) peut être écrite sous la forme suivante :

$$k^i u^i + \sum_{j=1}^{ne} \int_{\Gamma_j} h u d\Gamma = \sum_{j=1}^{ne} \int_{\Gamma_j} g q d\Gamma \quad (3.35)$$

Les intégrales de cette équation sont difficiles à évaluer que ceux des éléments constants,  $u$  et  $q$  varie linéairement sur chaque élément  $\Gamma_j$ , donc il n'est pas possible de les faire sortir des intégrales, leurs valeurs en un point de l'élément peut être défini en terme de leur valeurs nodales et les deux fonctions d'interpolation linéaire  $N_1$  et  $N_2$  qui sont données en termes de coordonnées homogènes  $\varepsilon$  (Figure 3.7) tel que :

$$u(\varepsilon) = N_1 u^1 + N_2 u^2 = [N_1 \ N_2] \begin{Bmatrix} u^1 \\ u^2 \end{Bmatrix} ; \quad q(\varepsilon) = N_1 q^1 + N_2 q^2 = [N_1 \ N_2] \begin{Bmatrix} q^1 \\ q^2 \end{Bmatrix} \quad (3.36)$$



**Fig.3.7:** Élément de référence pour élément linéaires [6].

$\varepsilon$  est une coordonné qui varie de  $-1$  à  $1$  les fonctions d'interpolation s'écrit :

$$N_1 = \frac{1}{2}(1 - \varepsilon) \quad ; \quad N_2 = \frac{1}{2}(1 + \varepsilon) \quad (3.37)$$

Les intégrales de l'équation (3.35) peuvent être écrites comme suit :

$$\int_{\Gamma_j} hu \, d\Gamma = \int_{\Gamma_j} [N_1 \ N_2] \begin{Bmatrix} u^1 \\ u^2 \end{Bmatrix} h \, d\Gamma = [h_1^{ij} \ h_2^{ij}] \begin{Bmatrix} u^1 \\ u^2 \end{Bmatrix} \quad (3.38)$$

Pour un élément  $j$  on a deux termes:

$$\begin{cases} h_1^{ij} = \int_{\Gamma_j} N_1 h \, d\Gamma \\ h_2^{ij} = \int_{\Gamma_j} N_2 h \, d\Gamma \end{cases} \quad (3.39)$$

De la même façon on obtient :

$$\int_{\Gamma_j} gq \, d\Gamma = \int_{\Gamma_j} [N_1 \ N_2] \begin{Bmatrix} q^1 \\ q^2 \end{Bmatrix} g \, d\Gamma = [g_1^{ij} \ g_2^{ij}] \begin{Bmatrix} q^1 \\ q^2 \end{Bmatrix} \quad (3.40)$$

Et

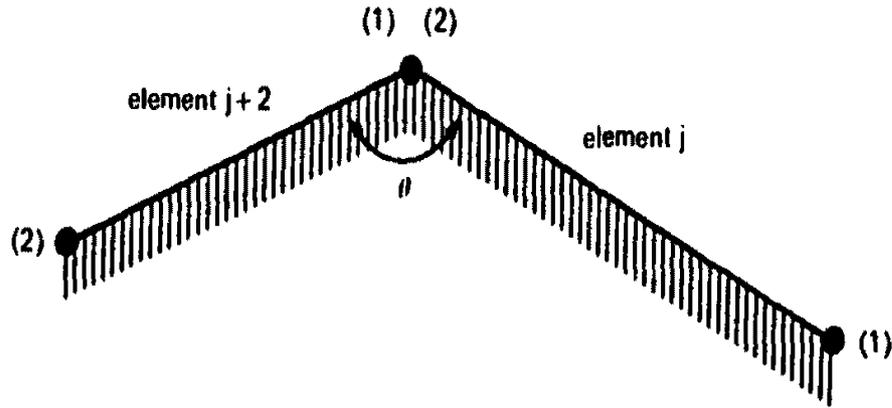
$$\begin{cases} g_1^{ij} = \int_{\Gamma_j} N_1 g \, d\Gamma \\ g_2^{ij} = \int_{\Gamma_j} N_2 g \, d\Gamma \end{cases} \quad (3.41)$$

Après avoir évalué les intégrales sur chaque élément, on obtient :

$$k^i u^i + \sum_{j=1}^{ne} H^{ij} u^j = \sum_{j=1}^{ne} G^{ij} q^j \quad (3.42)$$

- **Traitement des coins :**

Un domaine est discrétisé on utilisant les éléments de frontière présentera une série de problème qui nécessitent une attention particulière car les conditions des deux cotés des éléments ne peuvent pas être les mêmes. Lorsque la frontière est discrétisé en élément linéaire, le nœud 2 de l'élément  $j$  est le même point du nœud 1 de l'élément  $j + 1$ , (figure3.8) et comme le potentiel est constant sur chaque points de la frontière,  $u^2$  de l'élément  $j$  et  $u^1$  de l'élément  $j + 1$  sont tous les deux le même ; cependant, cet argument ne peut être appliqué que en règle générale de flux, comme il y a des points de frontière pour lesquels le flux varie et ceci lorsque la normale n'est pas unique (point de coins).



**Fig.3.8** : Élément de coins [6].

Il se peut aussi que le flux prévu le long de la frontière régulière présente des discontinuités en certains points particuliers, tandis que les coins avec des valeurs différents de flux des deux cotés existent dans de nombreux problèmes pratique, et les valeurs discontinues de flux le long d'une frontière lisse sont rarement prescrit.

Pour tenir compte de la possibilité que le flux du nœud 2 d'un élément peut être différent du flux du nœud 1 de l'élément suivant, les flux peuvent être disposés dans un tableau à  $2n$  vecteur ; la substitution de l'équation (3.38) et (3.40) pour tous les éléments  $j$  dans (3.35), on obtient l'expression du nœud  $i$  :

$$k^i u^i + [\hat{H}^{i1} \quad \hat{H}^{i2} \quad \dots \quad \hat{H}^{ine}] \begin{Bmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \vdots \\ u^{ne} \end{Bmatrix} = [G^{i1} \quad G^{i2} \quad \dots \quad G^{i2ne}] \begin{Bmatrix} q^1 \\ q^2 \\ \vdots \\ q^{2ne} \end{Bmatrix} \quad (3.43)$$

Où  $\hat{H}^{ij}$  est égale à  $h_1^{ij}$  le terme de l'élément  $j$  plus  $h_2^{ij-1}$  le terme de l'élément  $j-1$ , d'où l'équation (3.43) représente l'équation assemblée du nœud  $i$  ; l'équation (3.43) peut être écrite comme suit :

$$k^i u^i + \sum_{j=1}^{ne} \hat{H}^{ij} u^j = \sum_{j=1}^{2ne} G^{ij} q^j \quad (3.44)$$

L'équation (3.22), peut aussi être écrite comme suit :

$$\sum_{j=1}^{ne} H^{ij} u^j = \sum_{j=1}^{2ne} G^{ij} q^j \quad (3.45)$$

Et l'ensemble en forme matricielle devient :

$$HU = GQ \quad (3.46)$$

Où  $G$  est une matrice rectangulaire  $ne \times 2ne$ .

### 3.6 Formulation en éléments discontinus :

Pour éviter d'avoir des flux inconnus aux nœuds de coins (écrire une seule équation), les nœuds des deux éléments linéaires qui sont assemblés au coin peuvent être déplacé à l'intérieur ces éléments. Les nœuds deviennent comme deux nœuds différents (Figure 3.9) et une seule équation sera écrite pour chaque nœud. Le potentiel et le flux sont représentés par des fonctions linéaires ainsi que l'ensemble des éléments en fonctions de leurs valeurs nodales et deux d'entre eux sont discontinus dans le coin.

Les éléments discontinus sont également utiles pour situations dans lesquelles une des variables prend une valeur infinie à la fin de l'élément, dans ce cas, les valeurs de la variable au niveau de nœud décalé de l'extrémité de l'élément est finie et peut être calculé à partir du système d'équation sans difficulté numérique. Les valeurs de  $u$  et  $q$  en tout point sur un élément linéaire ont été définis en termes de leurs valeurs au point extérieur de l'équation (3.34).

$$u(\varepsilon) = N_1 u^1 + N_2 u^2 = [N_1 \ N_2] \begin{Bmatrix} u^1 \\ u^2 \end{Bmatrix} ; \quad q(\varepsilon) = N_1 q^1 + N_2 q^2 = [N_1 \ N_2] \begin{Bmatrix} q^1 \\ q^2 \end{Bmatrix} \quad (3.47)$$

Si les deux nœuds d'un élément sont décalés par rapport aux distances extrêmes  $A$  et  $B$  respectivement comme représentés sur la figure (Fig.3.9). Toute équation sera spécifiée pour chaque nœud.

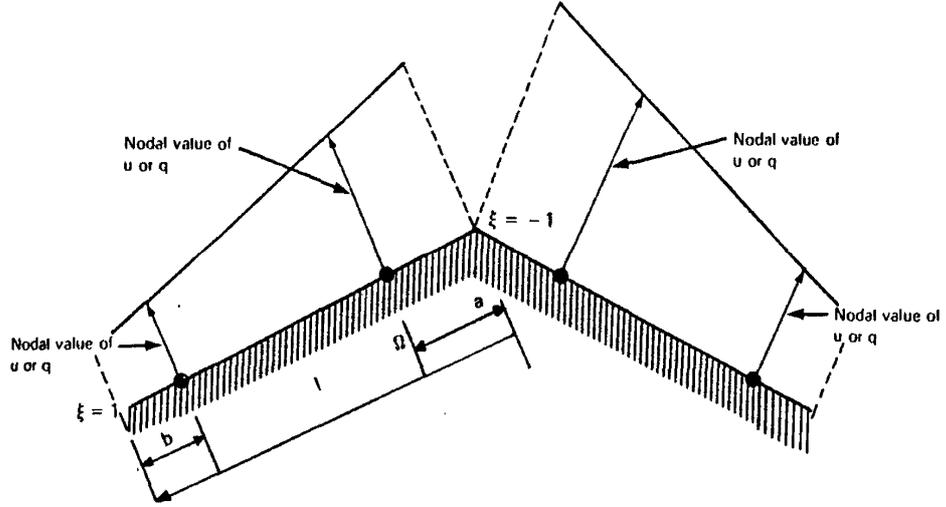


Fig.3.9 : Élément discontinus [6].

$$\begin{Bmatrix} u^a \\ u^b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1(\xi_a) & N_2(\xi_a) \\ N_1(\xi_b) & N_2(\xi_b) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^a \\ u^b \end{Bmatrix} \quad (3.48)$$

Ou  $\xi_a = (2a/l) - 1$  et  $\xi_b = 1 - (2b/l)$  sont des conditions locales pour les points nodales.

On remplaçant l'équation (3.48) dans l'équation (3.47) on obtient les valeurs de  $u$  en tout point de l'élément en fonction des valeurs nodales.

$$u(\xi) = [N_1 \quad N_2] Q \begin{Bmatrix} u^a \\ u^b \end{Bmatrix} \quad (3.49)$$

De la même manière on obtient :

$$q(\xi) = [N_1 \quad N_2] Q \begin{Bmatrix} q^a \\ q^b \end{Bmatrix} \quad (3.50)$$

Après discrétisation de la frontière en  $ne$  élément, l'équation intégrale pour chaque point  $i$  peut être écrite comme suit :

$$k^i u^i + \sum_{j=1}^{ne} \int_{\Gamma_j} h u d\Gamma = \sum_{j=1}^{ne} \int_{\Gamma_j} g q d\Gamma \quad (3.51)$$

Les intégrales sur un élément discontinu sont :

$$\int_{\Gamma_j} hu \, d\Gamma = \int_{\Gamma_j} [N_1 \ N_2] Qh \, d\Gamma_j \begin{Bmatrix} u^a \\ u^b \end{Bmatrix} = [h_a^{ij} \ h_b^{ij}] \begin{Bmatrix} u^a \\ u^b \end{Bmatrix} \quad (3.52)$$

$$\int_{\Gamma_j} gq \, d\Gamma = \int_{\Gamma_j} [N_1 \ N_2] Qg \, d\Gamma_j \begin{Bmatrix} q^a \\ q^b \end{Bmatrix} = [g_a^{ij} \ g_b^{ij}] \begin{Bmatrix} q^a \\ q^b \end{Bmatrix}$$

Lors de la résolution d'un problème potentiel, les éléments continus et discontinus peuvent être utilisés ensembles dans la même maille. Le nombre total des nœuds est égales au nombre total d'éléments, de plus un nœud supplémentaires pour chaque élément discontinu, le coefficient  $k^i$  est égales à  $1/2$  pour les nœuds sur les éléments discontinus, les intégrales  $h_a^{ij}$ ,  $h_b^{ij}$ ,  $g_a^{ij}$  et  $g_b^{ij}$  tout le long des éléments discontinus données par l'équation (3.52) peuvent être calculés par la quadrature gaussienne et lorsque le nœud  $i$  n'appartient pas à l'élément discontinu  $h_a^{ij} = h_b^{ij}$  et  $g_a^{ij}$  et  $g_b^{ij}$  peuvent être obtenu facilement par intégration analytique, l'élément est subdivisé en deux parties une sur chaque coté du nœud.

Les intégrales résultantes se composent des intégrales qui ont le même principe que ceux des éléments linéaires réguliers.

### 3.7 Conclusion

On peut déterminer dans ce chapitre que la méthode des éléments de frontière (BEM) possède plusieurs formules de discrétisation, qui lui permet de traiter des différents problèmes d'ingénieur quelque soit leurs complexités géométriques. De plus, elle nous permet des gains important en termes de temps de calcul par la réduction des tailles de maillage.

---

# Chapitre 4 : Applications

---

## 4.1 Introduction

Dans les chapitres précédents 1,2 et 3, nous avons exposé la méthode des éléments de frontière, ces avantages, ces inconvénients, le domaine d'application et nous avons vu les différentes étapes de formulation et de discrétisation.

Dans ce chapitre, nous allons procéder à la mise en œuvre de la BEM au cas des réservoirs semi-infinis. Tout d'abord, nous allons commencer par la validation de nos programmes de calcul élaborés dans le cadre de ce travail par un exemple numérique. Ensuite on passera aux différentes applications concernant les réservoirs semi-infinis avec l'hypothèse d'un fluide incompressible.

## 4.2 Etape et caractéristique d'un programme BEM :

Les programmes basés sur la méthode des éléments de frontière introduisent quelques blocs fonctionnels caractéristiques [1] :

- Lecture, vérification et organisation des données décrivant le maillage (nœuds et éléments), conditions aux limites.
- Construction des matrices élémentaires puis assemblage de celle-ci pour former les matrices globales associées aux déplacements et au gradient des déplacements.
- Résolution du système d'équations après prise en compte des conditions aux limites.
- Impression des résultats après calcul éventuel des variables additionnelles (déplacement et gradient des déplacements).

### 4.3 Outil de programmation :

MATLAB (Matrix Laboratory) est un logiciel de calcul numérique produit par Math Works, et est un langage simple, très efficace et puissant, optimisé pour le traitement des matrices. Il permet le traitement des données sans aucune limitation de taille et de réaliser des calculs numériques et symboliques de façon fiable et rapide, grâce aux diverses fonctions intégrées et à un ensemble d'outils testés et regroupés selon usage (toolbox) et il contient aussi une interface graphique puissante.

### 4.4 Validation :

Afin de valider les programmes de calcul élaborés dans le cadre de ce mémoire, on propose d'étudier une plaque semi-infinie de la figure (4.1) et qui est régie par l'équation par l'équation de Laplace  $\Delta u = 0$ , avec  $u$  est le champ de variable (la solution recherchée). Dans ce cas, le problème mathématique à résoudre est donné par le système suivant :

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & |\Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} = \bar{q} = 0 & |\Gamma_1 \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} = \bar{q} = \sin(y) & |\Gamma_2 \\ u = \bar{u} = 0 & |\Gamma_3 \end{cases}$$

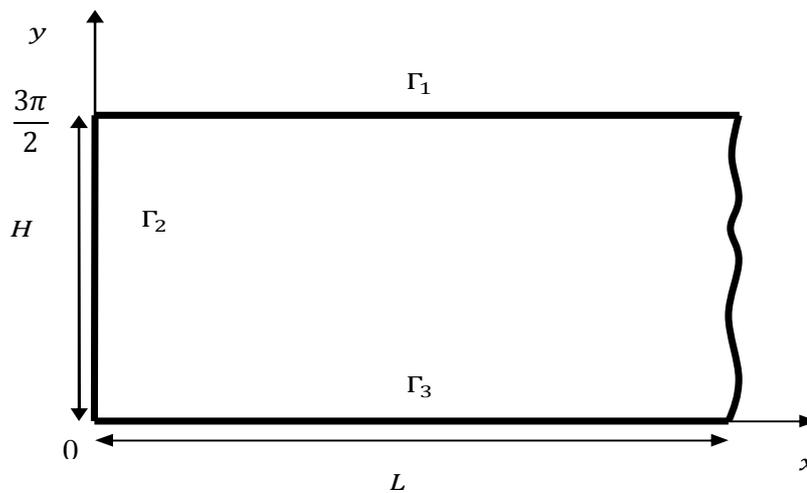
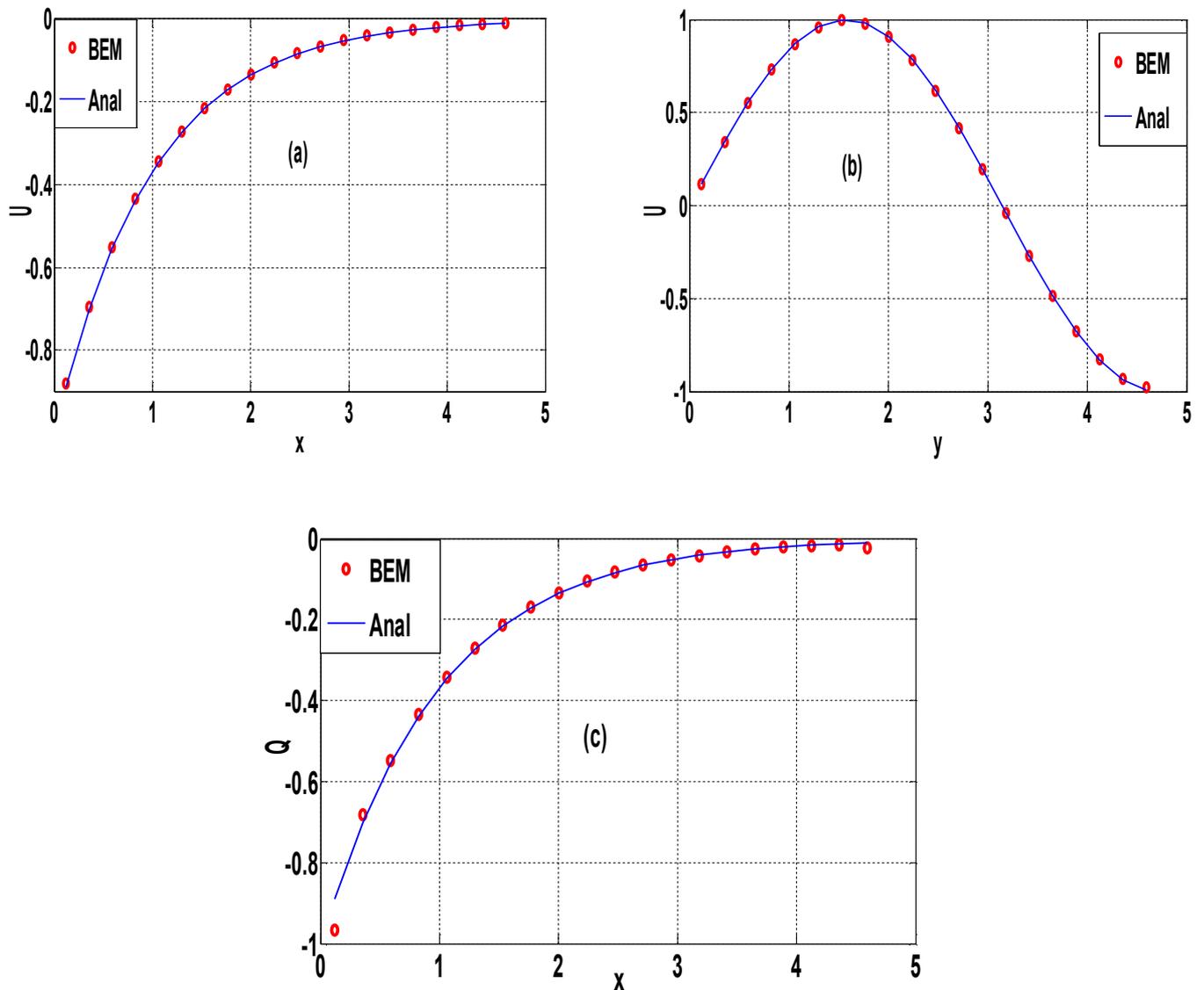


Fig.4.1 : Géométrie de la plaque.

Avec  $\bar{u}$  et  $\bar{q}$  sont respectivement les conditions de Dirichlet et de Neumann.

La solution analytique de système précédent et qui servira comme outil de comparaison est donnée par :  $u_a = e^{-x} \sin(y)$

Les résultats obtenus sont tracés sur la figure (4.2) ainsi que leurs comparaisons à la solution analytique :



**Fig. 4.2 :** Comparaison entre les résultats numériques (BEM) et analytique.

**(a) :** Solution  $u$  sur le bord haut      **(b) :** Solution  $u$  sur le bord gauche

**(c)** Gradient de la Solution  $q$  sur le bord bas.

D'après les courbes de la figure (4.2), on remarque que les résultats obtenus numériquement par la méthode des éléments de frontières (BEM) collent parfaitement avec la solution analytique. Cela confirme d'une part l'efficacité et la puissance de la méthode des éléments de frontière et d'autre par, la validation de nos programmes de calcul élaboré dans le cadre de ce mémoire.

Maintenant, nous allons essayer de valider le programme permettant le calcul de la solution à l'intérieur du domaine. Pour cela on refait la même application précédente avec un certain nombre de points internes, réparties sur l'axe médiane de la plaque.

Les résultats obtenus sont portés sur la figure (4.3) où on constate que la solution numérique coïncide parfaitement avec la solution analytique et ce qui confirme encore une fois la validité des programmes réalisés.

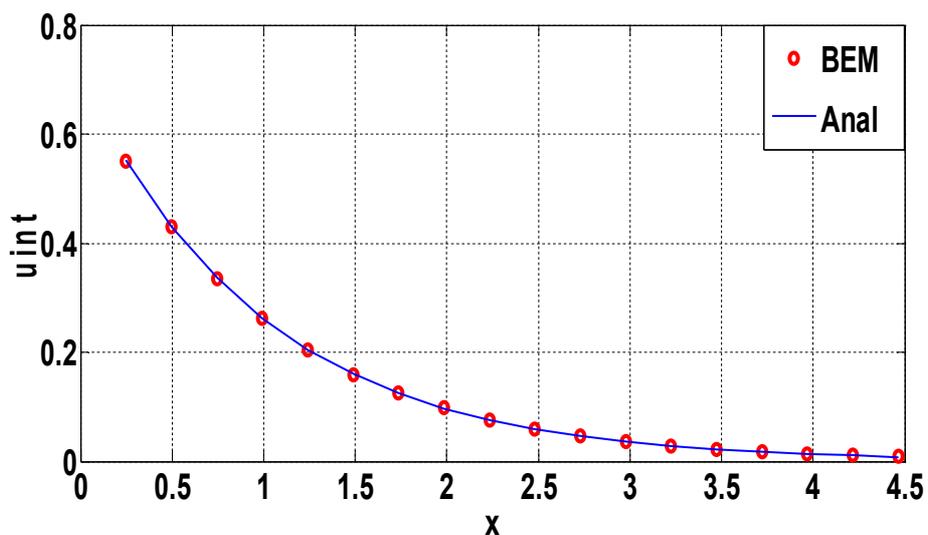


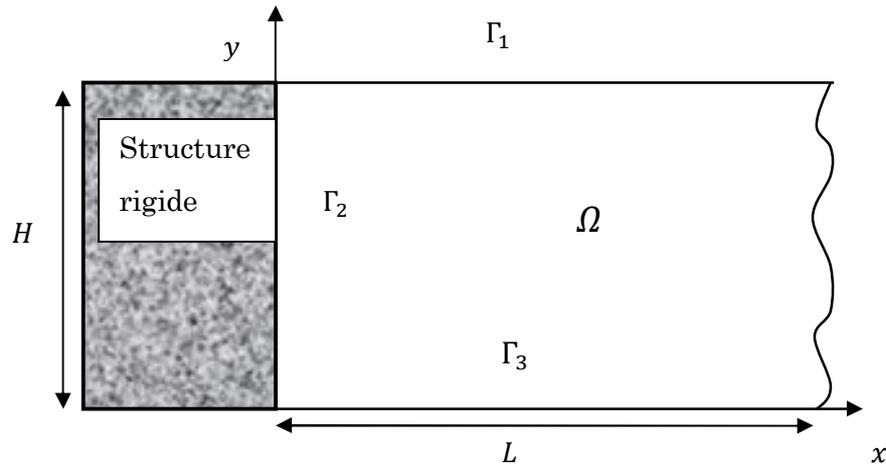
Fig.4.3 : Comparaison entre la solution BEM et la solution analytique, pour des points internes.

## 4.5 Application au cas des réservoirs semi-infinis

Dans cette partie nous allons étudier un réservoir semi-infini (fig.4.4) de hauteur  $H = 100 \text{ m}$  et de longueur assez grande pour être supposés infinie.

Le fluide du réservoir est supposé comme étant incompressible de masse volumique  $\rho = 1000 \text{ Kg/m}^3$  et qui subit de très faibles mouvements, sans écoulements. Alors le comportement des pressions hydrodynamiques est décrit par l'équation de Laplace suivante :

$$\Delta p = 0$$



**Fig.4.4** : réservoir semi-infini.

Les sollicitations considérées dans ce cas sont dans des déplacements harmoniques d'amplitude égale à l'unité et de pulsation d'excitation  $w$ , exercées directement sur le fluide par la structure rigide. Alors la condition nécessaire sur l'interface de fluide-structure  $\Gamma_2$  est :

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\partial p}{\partial x} = -\rho w^2 u_0$$

Avec  $n$  est la normale par rapport à l'interface fluide-structure et  $u_0$  est l'amplitude des déplacements définis dans l'espace de Fourier.

Dans la surface libre du réservoir  $\Gamma_1$ , la condition imposée est :

$$p = 0$$

et sur la frontière  $\Gamma_3$  :

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

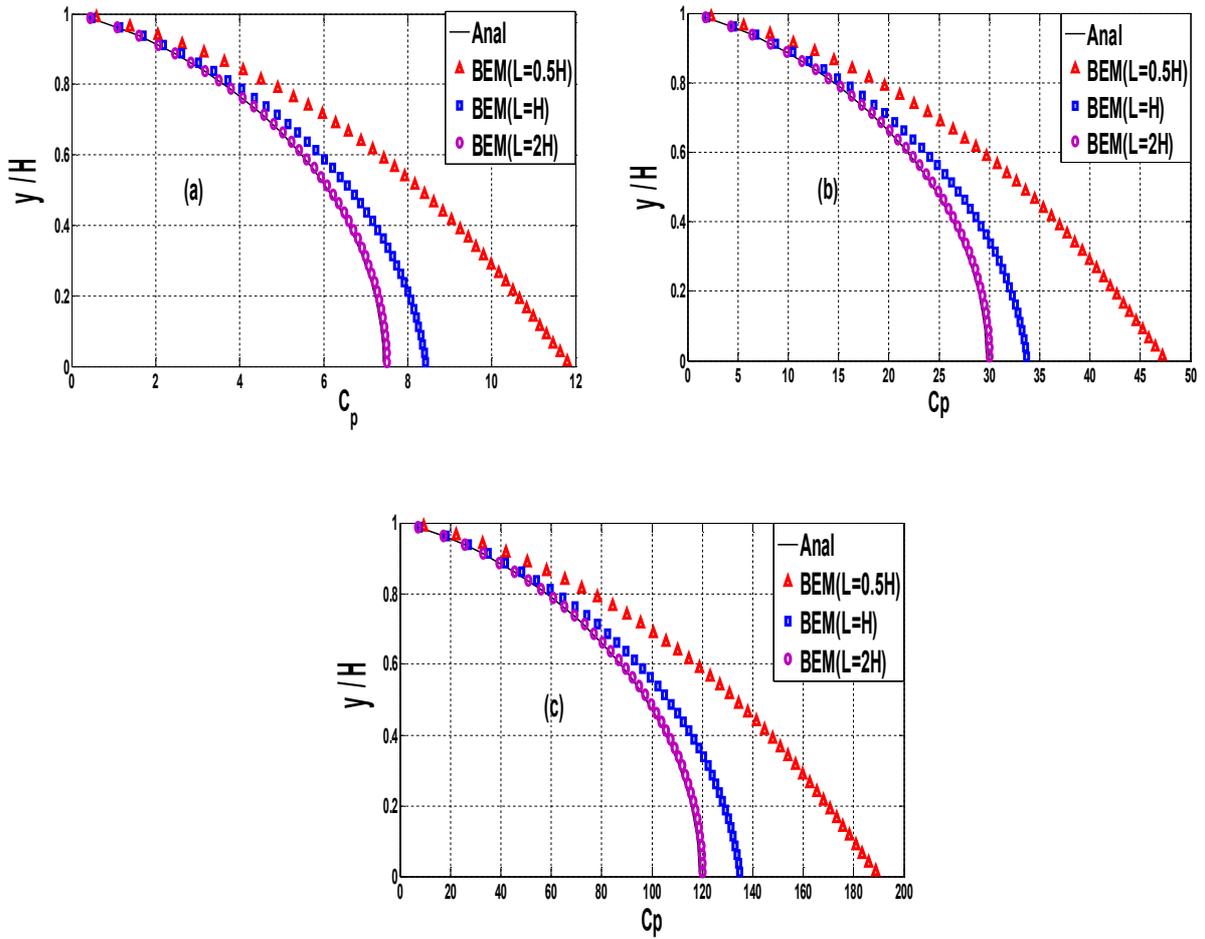
Donc le problème mathématique à résoudre est :

$$\begin{cases} \Delta p = 0 & |\Omega \\ p = 0 & |\Gamma_1 \\ \frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\partial p}{\partial x} = -\rho w^2 u_0 & |\Gamma_2 \\ \frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0 & |\Gamma_3 \end{cases}$$

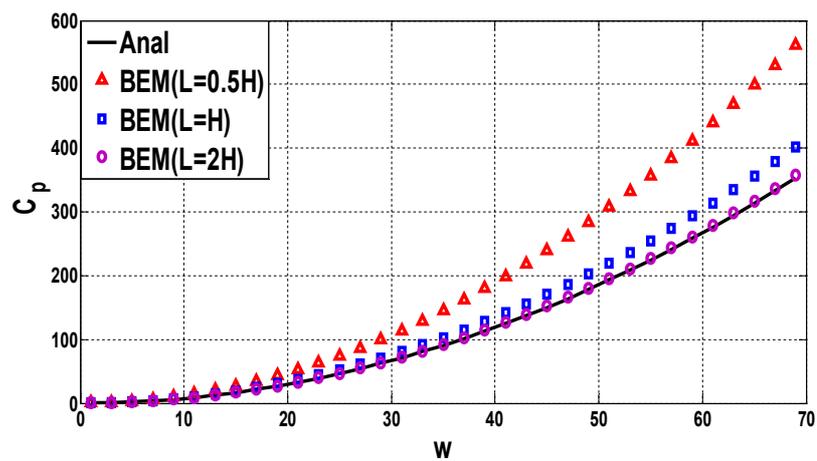
Il est à noter que les résultats obtenus seront exprimés par le coefficient de pression hydrodynamique  $C_p = p/\rho gh$  et comparés à la solution analytique de Westergaard [22].

Dans un premier temps, on a tronqué le domaine d'étude en trois positions différentes  $L = 0.5H, L = H$  et  $L = 2H$ . Ensuite, on a considéré trois pulsations d'excitation pour chaque position de la limite  $L$  ( $w = 10, 20$  et  $40 \text{rd/sec}$ ).

Les résultats obtenus sont montrés sur les figures (4.5 a, b et c) où on a tracé la distribution de  $C_p$  sur l'interface fluide-structure et sur la figure (4.6) on a tracé la variation de  $C_p$  en fonction de  $w$  du point le plus bas de l'interface fluide-structure en variant la pulsation d'excitation  $w$  de 1 jusqu'à 70  $\text{rd/sec}$ .



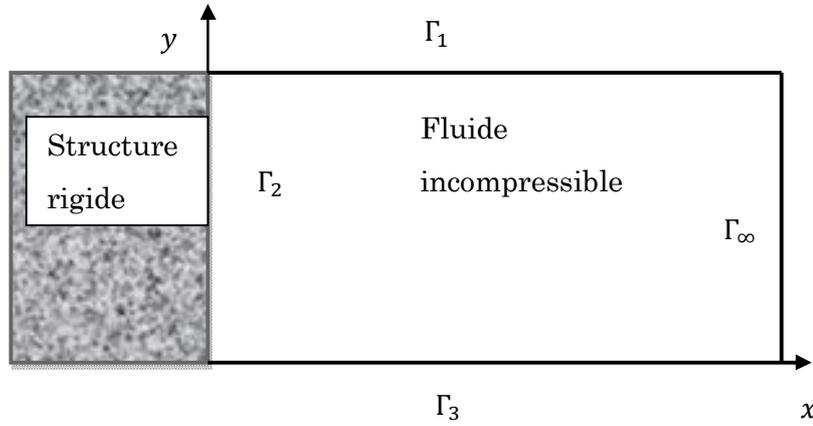
**Fig.4.5:** Distribution de coefficient hydrodynamique sur l'interface structure-fluide.  
 (a):  $w = 10rd/sec$ , (b):  $w = 20rd/sec$ , (c):  $w = 40rd/sec$ .



**Fig.4.6 :** Variation de  $C_p$  en fonction de  $w(rd/sec)$ .

Les figures (4.5) et (4.6) montre que la solution obtenue par éléments de frontière(BEM) ne fournit pas de bon résultats lorsque la position de la limite de troncature est proche de l'interface fluide-structure et la convergence à la solution analytique ne peut être observée que lorsque  $L_t \geq 2$ , ce qui montre que les éléments de frontière ne permettent pas de donner de très bon résultats dans le cas de domaine ouvert et notamment dans les réservoirs semi-infinis.

Pour améliorer la qualité des résultats obtenus, on doit ajouter une condition à la limite de troncature, afin de tenir compte des effets de dissipation d'énergie à l'infini. Pour cela la condition a imposée sur  $\Gamma_\infty$  (Fig.4.7) :  $\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\partial p}{\partial x} = \xi p$



**Fig.4.7** : Domaine fluide borné.

Le paramètre  $\xi$  dépend de la condition imposée. Si on adopte la condition de Sharan, alors [7] :

$$\xi = \frac{\pi}{2H}$$

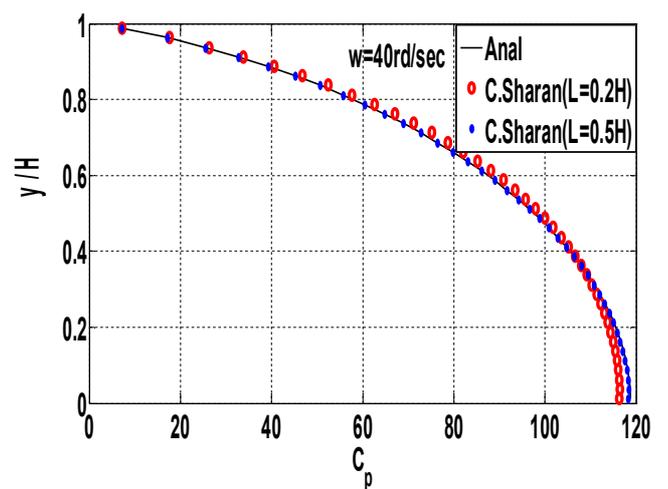
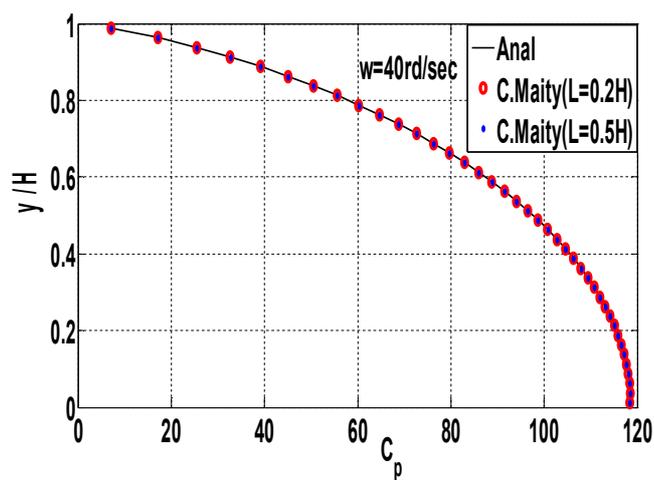
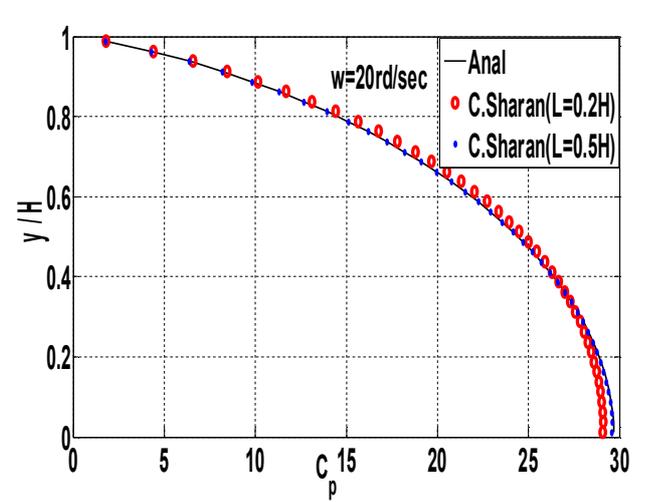
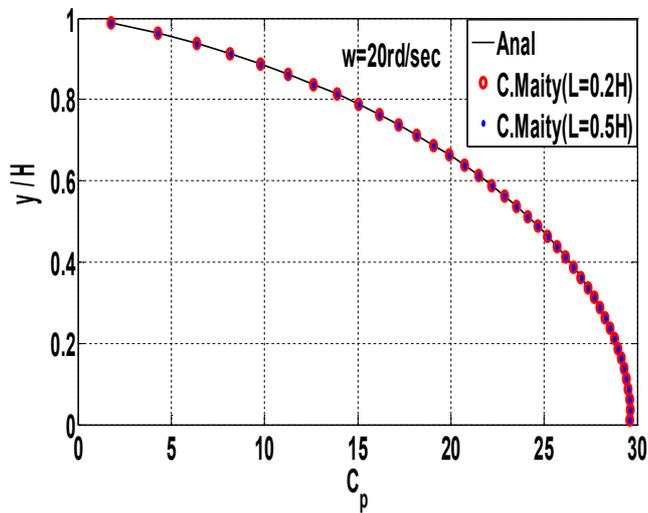
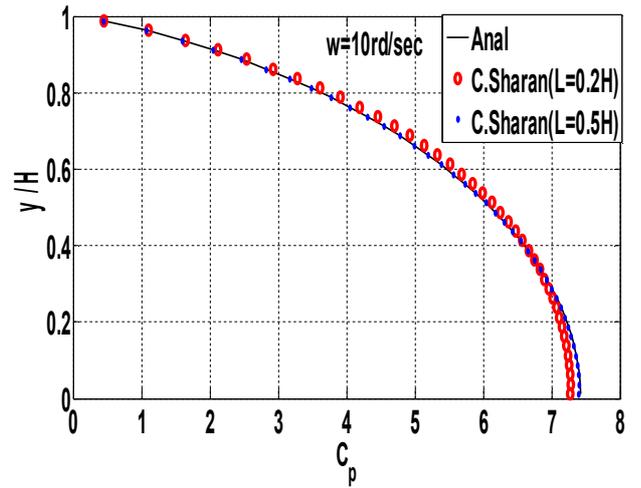
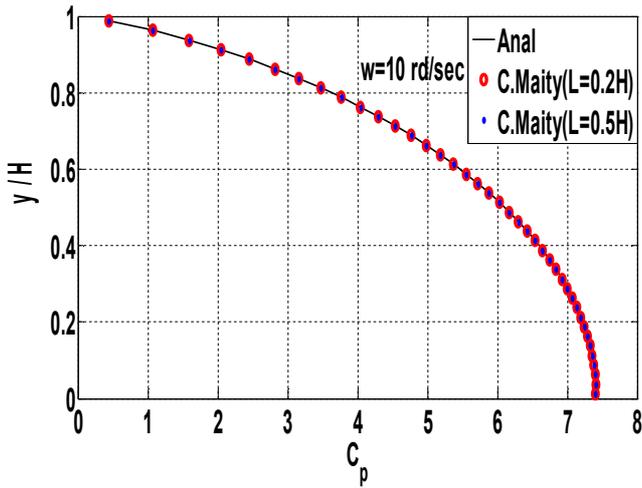
Maintenant si la condition de Maity Damodar est adoptée, le paramètre  $\xi$  est donnée par :

$$\zeta = \frac{1}{H} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\lambda_n} e^{(-\lambda_n \frac{x}{H})} \cos(\lambda_n \frac{y}{H})}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\lambda_n^2} e^{(-\lambda_n \frac{x}{H})} \cos(\lambda_n \frac{y}{H})} \quad \text{avec } \lambda_n = \frac{(2n-1)\pi}{2}$$

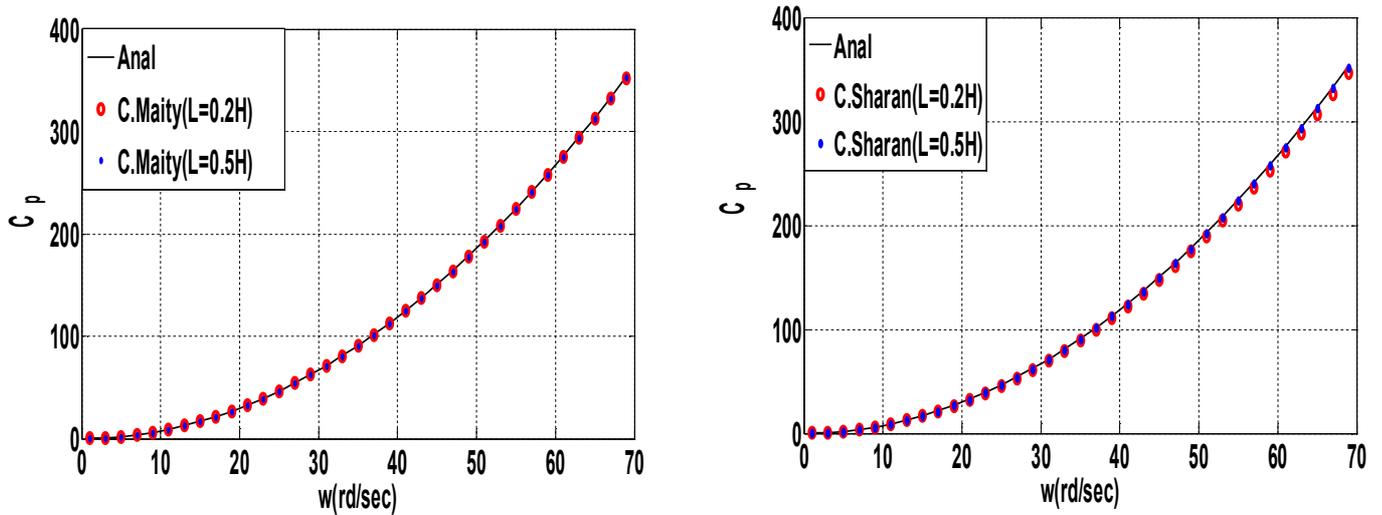
Dans les deux cas le système à résoudre est :

$$\begin{cases} \Delta p = 0 & |\Omega \\ p = 0 & |\Gamma_1 \\ \frac{\partial p}{\partial n} = -\rho \dot{u}_g & |\Gamma_2 \\ \frac{\partial p}{\partial n} = 0 & |\Gamma_3 \\ \frac{\partial p}{\partial n} = \xi p & |\Gamma_\infty \end{cases}$$

Pour étudier l'efficacité de l'insertion de ces deux conditions dans un modèle d'éléments de frontière, on va refaire les mêmes applications précédentes, les résultats obtenus sont reportés sur la figure (4.8) pour la distribution de  $C_p$  sur l'interface fluide-structure et sur la figure (4.9) pour la variation de  $C_p$  en fonction  $w$ .



**Fig.4.8** : Distribution de coefficient hydrodynamique sur l'interface structure-fluide pour  $w = 10, 20$  et  $40$  rd/sec pour les deux conditions Sharan et Maity.



**Fig.4.9** : Comparaison des résultats des deux conditions Sharan et Maity pour

$$L_t = 0.2H, L_t = 0.5H .$$

Les résultats obtenus par l'insertion de ces deux conditions dans un modèle d'éléments de frontière montrent une grande ressemblance avec la solution analytique de Westergaard et même pour des positions de troncature très proche de l'interface fluide-structure.

Si on compare entre la condition de Maity et la condition de Sharan, on constate que la première condition est la plus performante par rapport à la deuxième.

Dans la section qui suit, nous allons étudier l'efficacité des éléments de frontière avec traitement de la limite troncature par la condition de Sharan, par la condition de Maity, ou sans aucun traitement.

Pour cela, nous allons tracer la variation de  $C_p$  en fonction de la position de la limite de troncature  $L_t$ . Les résultats obtenus sont illustres sur les figures (4.10).

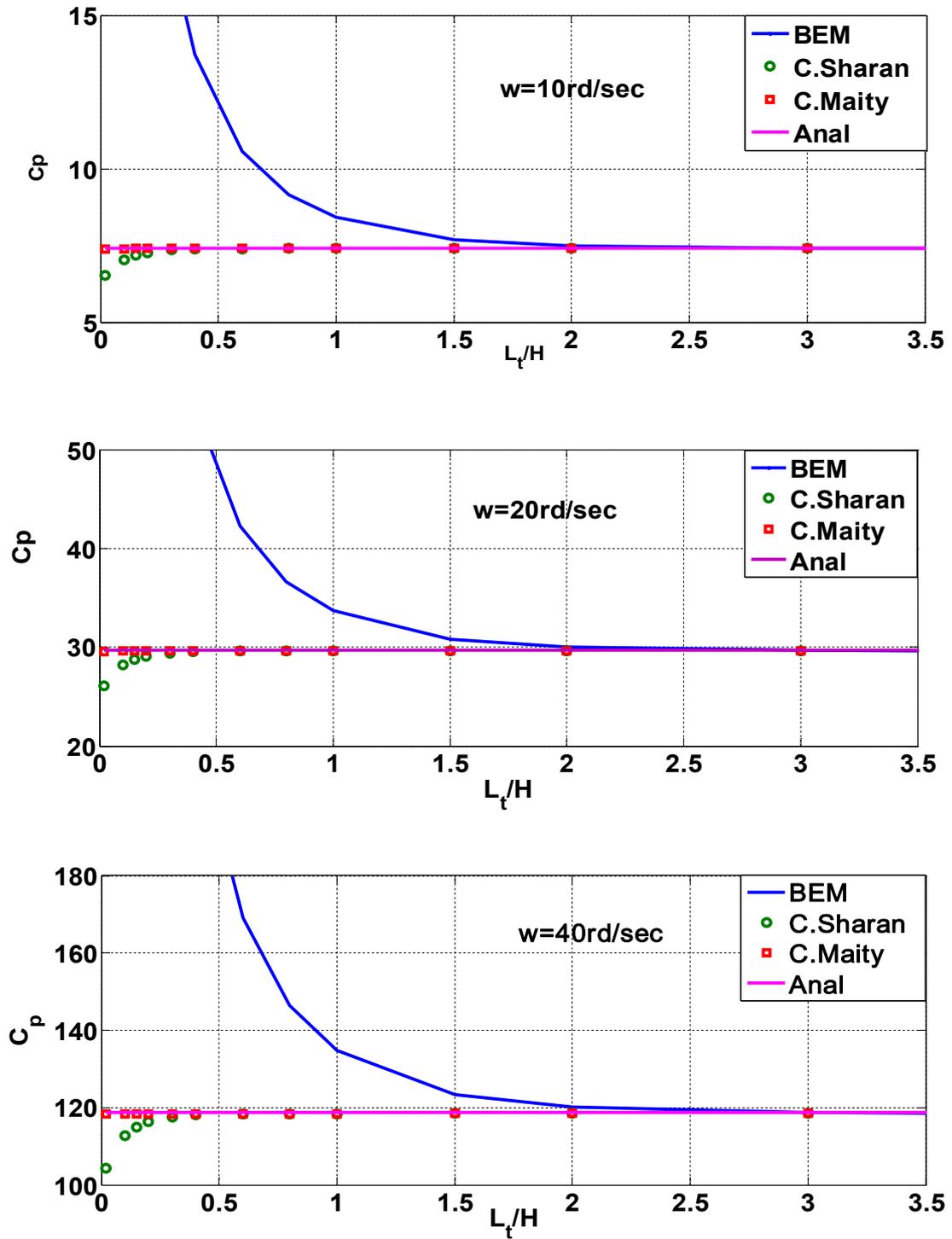


Fig.4.10 : Coefficient de pression  $C_p$  en fonction du positionnement de la limite de troncature  $L_t$  pour des pulsations différentes  $w = 10, 20$  et  $40 \text{ rd/sec}$ .

Ces figures montrent bien la puissance de la BEM avec traitement de la limite de troncature par la condition de Maity où de Sharan contrairement au BEM sans aucun traitement de limite qui demande le positionnement de  $L_t$  loin de l'interface fluide-structure.

## 4.6 Conclusion

On peut dire que pour le cas d'un domaine fluide incompressible considérée infini, la considération d'une limite de troncature libre sans condition, exige la troncature du domaine à une distance égale au moins deux fois la hauteur, pour obtenir la convergence de la solution recherché.

L'étude faite sur les éléments de frontière avec traitement de la limite de troncature, permet d'obtenir des résultats satisfaisant pour des limites de troncature proche de l'origine, les conditions que nous avons appliquées sur cette frontière sont la condition de Sharan et Maity Damodar et la condition de Maity semble la plus avantageuse pour obtenir la convergence recherché.

---

## Conclusion générale

---

Ce travail, qui a fait l'objet d'un mémoire de fin d'étude, sur la méthode des éléments de frontière. Cela nous a permis de s'initier et de se familiariser avec la méthode des équations intégrales et des éléments de frontières.

Nous avons exposés la méthode BEM, ces caractéristiques, ces avantages et nous avons montré que sa puissance réside dans la discrétisation particulière du système physique considérée et cela permet d'élaborer des modèles numériques.

Nous avons développées des programmes numériques sous l'environnement MATLAB, consolidé par des fonctions connexes, qui permettent de traiter des problèmes gouvernés par l'équation de Laplace.

L'étude faite sur l'exemple de la plaque a permis de valider les programmes numériques développés et d'obtenir une bonne convergence des résultats et cela en utilisant la formulation en éléments constants qui ont témoigné de cette bonne précision.

Nous avons utilisés les programmes développés pour calculer les pressions hydrodynamiques des fluides et cela nous permet de conclure que les éléments de frontières trouvent leurs efficacités dans la résolution des problèmes à domaines ouverts et cela par les solutions fondamentales (solution de Green) qui tiennent compte du caractère ouvert des domaines infinis.

L'utilisation des éléments de frontière seuls dans le calcul des réservoirs semi-infinis ne fournit pas de très bons résultats, alors le traitement de la limite de troncature doit être effectué par l'insertion d'une condition convenable à savoir la condition de Maity ou de Sharan.

---

## Références bibliographiques

---

[1] : **ABID Aissa, MENNAIS Adel.** Mémoire de Fin d'études de Modélisation par éléments de frontière des problèmes d'élastostatique linéaire bidimensionnelle. Université A.MIRA de Bejaia. Département de Génie Civil 2008.

[2]: **Bonnet M.** Equations intégrales et éléments de frontières- Applications en mécanique des solides et des fluides. Paris : CNRS Editions /Editions Eyrolles 1995.

[3]: **Bonnet M, Attilio Frangi.** Analyse des solides déformables par la méthode des éléments finis. Editions de l'école polytechnique- Novembre 2010.

[4] : **Behar Joachim, Tamagno Pierre.** Axe Elément finis, Ecoulement autour d'un obstacle par la méthode des éléments de frontières. EMSE 2010.

[5] : **Beker A.A.** The boundary Element Method in Engineering- A complete course. McGraw-HILL Book company 1992.

[6]: **Brebbia CA, Dominguez J.** Boundary elements-An introductory course. Southampton: computational Mechanics Publications 1998.

[7]: **BOUROUBA Abdelhalim.** Mémoire de fin d'étude de traitement des conditions de troncatures des milieux non bornés en dynamique des structures. Université A.MIRA de Bejaia. Département de Génie Civil 2008.

[8] : **Chen CC, Chen YH, Chuang CC.** Dual reciprocity BEM analysis of 2D transient elastodynamic problems by time discontinuous Galerkin FEM. Engineering Analysis with Boundary Elements 2003.

[9]: **Eliette Mathey.** Thèse Doctorat d'Optimisation numérique des refroidissements des moules d'injection de thermoplastiques basée sur la simulation des transferts thermiques par la méthode des éléments de frontières. Université Toulouse III. 17 Décembre 2004.

[10]: **Frey F et Studer Marc-André**. Analyse des structures et milieux continus. Volume 5. Presses Polytechniques et universitaires romandes. Lausanne 2003.

[11]: **Gael Bonithon**. Thèse doctorat de Méthodes numériques innovantes pour la simulation thermique de composantes électronique. **ENSAM** de Paris. 2 décembre 2010.

[12]: **Gaul L, Wenzel W**. A coupled symmetric BE-FE method for acoustic fluid-structure interaction. Engineering Analysis with Boundary Elements 2002.

[13]: **Goerge C. Hsiao**. Boundary Element Method-An Overview 2004.

[14]: **Hervé Lemmonier**. Note de cours d'applications de la méthode de éléments de frontières aux les écoulements diphasiques et aux les techniques de mesure correspondantes. Ecoles CEA/EDF/INRA-décembre 1996 (mise à jour de décembre 2001).

[15]: **John T. Katsikadelis**. Boundary Elements Theory and Applications. Department of civil engineering. National Technical University of Athens, Greece. ELSEVIER. 2002.

[16]: **Lehmann L, Antes H**. Dynamic structure-soil-structure interaction applying the symmetric Galerkin Boundary element method (SGBEM). Mechanic Research communications 2001.

[17]: **Minh\_Tuan NGUYEN**. Thèse doctorat de contribution à La Formulation symétrique du couplage équation intégrale-éléments Finis, Application à la géotechnique. Université Paris –EST-17 Septembre 2010.

[18]: **Mouhoubi Saida**. Thèse Doctorat de couplage symétrique. Eléments Finis-Eléments de frontière en mécanique : Formulation et implantation dans un code éléments Finis. Université de Limoges. 19 Décembre 2000.

[19]: **Peter Hunter et Andrew Pullan**. Notes de cours FME/BME. Department of Engineering Science. The University of Auckland. New Zealand. February 21, 2001.

[20]: **Seghir A.** Notes de cours d'éléments finis. Département de Génie civil. Université A.MIRA de Bejaïa. 2007/2008.

[21]: **Stephanie Chaillat, Marc Bonnet, Jean-François Semblat.** Notes de cours des Méthodes multipole rapide pour les éléments de frontières en électrodynamique tridimensionnelle. Applications à la propagation d'ondes sismiques. Ecoles polytechniques, Paris 2007.

[22]: **Wesstergaard,H.M.** "Water pressures on dams during earthquakes", ASCE,Novembre1931,1303-1318.

[23]: **Xavier Dechamps.** Méthodes de couplage éléments finis / frontières avec accélération pour l'équation d'induction.**ULB** .2009/2010.

[24]: **Yazdchi M,Khalili N, Valliappan S.** Dynamic soil-structure interaction analysis via coupled finite element –boundary element method. Soil Dynamic and Earthquake Engineering 1999.

[25]: **Zeng X,Bielak J.** Stable symmetric finite element-boundary integral coupling method for fluid-structure interface. Engineering Analysis with Boundary Elements 1995.

[26]: **Zhang X.** Coupling FEM and discontinuous BEM for electrostatics and fluid-structure interaction. Engineering Analysis with Boundary Element 2002.