

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement et de recherche scientifique
Université A.Mira-BEJAIA
Faculté de la Technologie
Département de Génie Civil

*En vue de l'obtention du Diplôme d'études
universitaire Master*

Option : matériaux et structures

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

Thème :

*Utilisation des éléments infinis périodiques dans un réservoir semi-
infinis*

Présenté par :

*M^{lle} MEGRI Katia
M^{lle} MERZOUG Zouleykha*

Encadré par :

M^{ER}: A.BOUROUBA

MEMBRE DE JURY :

*M^{ER}: OURABAH
M^{ELLE} : MEZIANI*

PROMOTION : 2012/2013

Remerciements

Nos remerciements vont en premier lieu à Dieu qui nous a donnée le courage et la patience d'arriver au terme de ce travail.

*Ensuite à notre encadreur Mr : **A. BOUROUBA** pour son aide, sa disponibilité durant toute l'année.*

*Nous remercions également les membres de jury Mr : **OURABAH** et M^{lle} : **MEZIANI** qui nous ont fait l'honneur d'accepter de juger notre travail.*

Nous exprimons tous nos remerciements à tous les enseignants qui nous éclairé le chemin par leur savoir et expériences, Ainsi notre promotion et tous les étudiants de Génie Civil.

Dédicace

Je remercie Dieu tout puissant de m'avoir donné la force et le courage de finir ce modeste travail, qui est le fruit de mes années de quête et de savoir.

Un travail que je dédie aux deux êtres les plus chers pour moi: mes parents (yemma et vava), qui sont la source de lumière qui m'éclairait depuis ma naissance et à qui j'exprime ma sincère et éternelle gratitude pour leur attention, l'éducation et les principes qu'ils m'ont inculqué ainsi que pour leur soutien.

- *A mes frères (Mokhtar, Slimane, Ahmed, Ferhet, Nacer).*
- *A mes soeurs (wrida, Djamila).*
- *A mes neveux et nièces (Khaled, Hanane, Belal, Amine, Nelia).*
- *A mes belles sœurs (Katia, Nabila) et leurs familles.*
- *A mon binôme (Kati) et sa famille.*
- *A tous mes amis.*

Sans oublier toutes les personnes qui me sont et qui me seront toujours chères

souhila

Dédicace

Je remercie Dieu tout puissant de m'avoir donné la force et le courage de finir ce modeste travail, qui est le fruit de mes années de quête et de savoir.

Un travail que je dédie aux deux êtres les plus chers pour moi: mes parents (yemma et vava), qui sont la source de lumière qui m'éclairait depuis ma naissance et à qui j'exprime ma sincère et éternelle gratitude pour leur attention, l'éducation et les principes qu'ils m'ont inculqué ainsi que pour leur soutien.

- *A mes frères (Mourad et H'manou).*
- *A mes soeurs (Lamia, Yasmina, Rachida).*
- *Ma nièce Dania et son père Belkacem.*
- *A mon fiancé Sofiane et sa famille.*
- *A mon binôme (soussou) et sa famille.*
- *A mes très chères cousins Hocine et Lyes.*

Sans oublier toutes les personnes qui me sont et qui me seront toujours chères

katia

Sommaire

Sommaire	i
La liste des figures.....	iii
Introduction générale	1
Chapitre 1 : Eléments infinis classiques	2
1.1 Introduction	2
1.2 Approche directe	3
1.2.1 Fonctions de décroissance	5
1.2.2 Intégration des fonctions de forme d'éléments infinis [2,4,5]	7
1.3 Approche inverse	11
1.3.1 Transformation de Zienkiewicz	11
1.3.2 Transformation de Abdel-Fattah.....	16
1.4 Algorithmes de calcul des matrices élémentaires.....	20
1.5 Conclusion.....	20
Chapitre 2 : Eléments infinis périodiques.....	21
2.1 Introduction	21
2.2 Propagation d'ondes en milieux infinis	21

2.3	Eléments infinis périodiques selon l'approche directe	23
2.3.1	Intégration des éléments infinis périodiques [4]	25
2.4	Eléments infinis périodiques selon l'approche inverse.....	26
2.4.1	Cas de trois dimensions	27
2.4.2	Cas de deux dimensions.....	28
2.5	Conclusion.....	29
Chapitre 3 : Modélisation et discrétisation par éléments finis		30
3.1	Introduction	30
3.2	Formulation mathématique des réservoirs semi-infini.....	30
3.3	Condition aux limites	32
3.4	Discrétisation spatiale par éléments finis.....	34
3.4.1	Traitement de la troncature géométrique par des éléments infinis	35
3.5	Conclusion.....	36
Chapitre 4 : Application dans le cas d'un milieu fluide.....		37
4.1	Introduction	37
4.2	Validation des programmes de calculs	37
4.3	Application aux cas d'un réservoir semi-infini	39
4.4	Conclusion.....	45
Conclusion générale.....		46

La liste des figures

<i>figure 1.1 : Approche directe – élément infini dans la direction horizontale</i>	03
<i>figure 1.2: Transformation de Zienkiewicz d'un élément infini unidimensionnel</i>	12
<i>figure 1.3: Transformation d'Abdel – Fattah d'un élément infini unidimensionnel</i>	16
<i>figure 2.1: Présentation des fonction de forme d'un élément périodique</i>	25
<i>figure 3.1: Réservoir semi – infini</i>	31
<i>figure 4.1: Problème d'une plaque semi – infini</i>	37
<i>figure 4.2: Solution u sur les bords droit et gauche de la plaque pour $B = 0.2H$</i>	38
<i>figure 4.3: solution u sur les bords droit et gauche de la plaque pour $B = H$</i>	39
<i>figure 4.4: Maillage du réservoir</i>	40
<i>figure 4.5a: Distribution de C_p sur l'interface $B = 0.2H$</i>	40
<i>figure 4.5b: Distribution de C_p sur l'interface $B = H$</i>	41
<i>figure 4.6: Variation de C_p en fonction du positionnement de la limite de troncature B</i>	41
<i>figure4.7a : Distribution de C_p à l'interface $B = 0.2H$</i>	42
<i>figure 4.7b : : Distribution de C_p à l'interface $B = H$</i>	42
<i>figure 4.8: Variation de C_p en fonction de ω pour $B = 0.5H$</i>	43
<i>figure 4.9 : Variation de C_p en fonction de ω pour $B = 3H$</i>	44

Introduction générale

Parmi les méthodes numériques les plus utilisées pour résoudre les problèmes de l'ingénierie est sans doute la méthode des éléments finis, qui présente une grande flexibilité et qui permet en outre la prise en compte de la complexité géométrique et de la variation des propriétés du phénomène à étudier. Le succès de cette méthode et la nécessité de traiter des domaines non bornés, ont conduits au développement de nouveaux éléments à base des éléments finis appelés "éléments infinis".

Le couplage entre les éléments finis et les éléments infinis dans un milieu fluide semble attractif à la discrétisation des domaines ouverts, car le champ proche peut être traité par des éléments finis, quant à la géométrie non bornée du champ lointain est représentée par des éléments infinis soit, classiques ou périodiques.

Ce travail fait l'objet de notre mémoire de fin d'étude, dont le thème est éléments infinis périodiques dans un milieu fluide semi-infini. A cet effet, le manuscrit est organisé en quatre chapitres. Dans le premier, on a exposé les éléments infinis classiques ainsi que les différentes approches existantes pour leurs constructions. Le second est consacré aux éléments infinis périodiques qui traitent les problèmes de propagations d'ondes dans les domaines infinis, le chapitre trois a fait l'objet de modélisation et de discrétisation par éléments finis des réservoirs semi-infini. par contre dans le quatrième chapitre comporte la partie pratique de notre travail où les résultats sont commentés et comparés à des solutions analytiques, Enfin, une conclusion générale clôture le manuscrit.

Eléments infinis classiques

1.1 Introduction

Du fait que les éléments finis ne sont pas adaptés à la résolution des problèmes aux domaines ouverts, ce qui a conduit à développer d'autres méthodes permettant la résolution de ce type de problèmes, et parmi celle-ci on trouve les éléments infinis.

Les premiers éléments infinis apparus ont été produits par Ungless et Anderson en 1973, et sont appelés "éléments finis infinis" [4,10]. Ce travail fut l'objet d'une thèse qui n'a été publiée qu'en 1977. Ainsi, le premier travail publié sur les éléments infinis est l'article de Zienkiewicz et Bettess, paru en 1975 [4]. L'idée introduite dans l'élément d'Ungless et Anderson était l'utilisation d'une fonction de forme, qui varie comme $1/(1+r)$ dans la direction radiale r . Ceci est suffisamment simple pour manier la plus part des opérations analytiquement. L'élément était tridimensionnel à base triangulaire, définie dans le plan local xy et s'étend à partir de cette base à l'infini dans la direction z . Les matrices élémentaires étaient calculées en utilisant l'intégration analytique dans le plan xy et l'intégration numérique par la règle des trapèzes dans la direction z après une transformation géométrique.

Une autre origine de la formulation des éléments infinis, totalement différente est décrite par Bettess. Le domaine de l'élément est étendu à l'infini en utilisant n'importe quel élément fini comme base. Les fonctions de forme sont ensuite multipliées par des fonctions de décroissance appropriées au problème traité. Une décroissance de type exponentielle a été d'abord utilisée et les matrices élémentaires obtenues comprenaient des termes d'intégrales de polynômes multipliés par e^{-r} et simplement évaluées analytiquement.

Ces deux origines de formulation des éléments infinis ont constitué les deux lignes principales du développement de nouveaux types d'éléments. Ce qui a conduit à la

classification des éléments infinis en deux approches [1,2,4,5,7,10] : l'approche directe par fonctions de forme décroissantes et l'approche inverse (indirecte) par des fonctions de transformations géométriques.

Le but visé dans le présent chapitre est de présenter la théorie des éléments infinis concernant les deux approches direct et inverse.

1.2 Approche directe

Cette approche consiste à étendre à l'infini le domaine de définition des coordonnées naturelles et des coordonnées de référence d'un élément fini. La figure (1.1) montre un exemple d'élément infini obtenu à partir d'élément fini quadrilatéral linéaire.

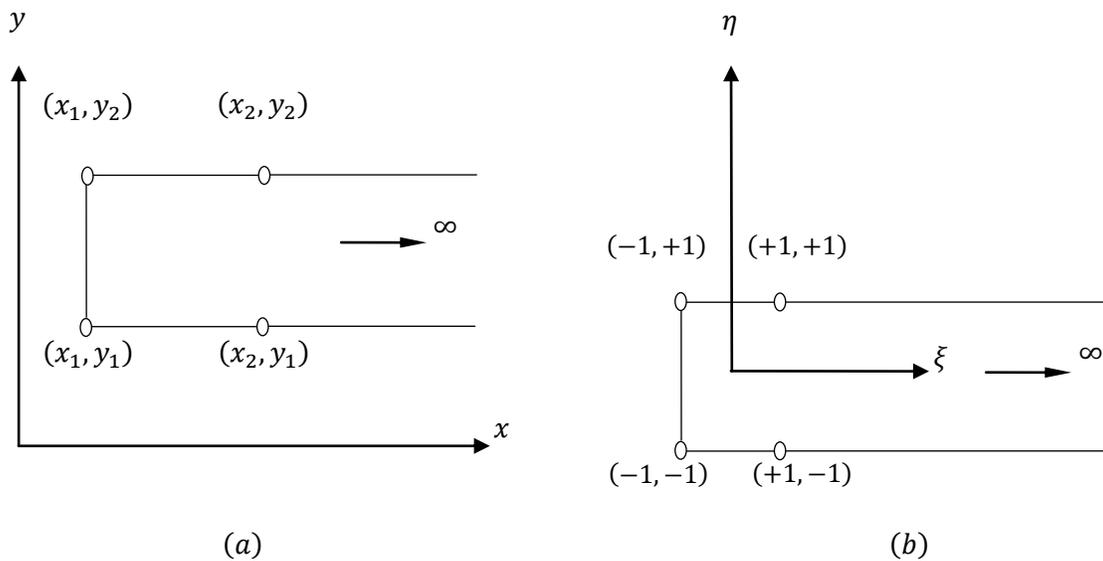


Figure 1.1 : Approche directe - élément infini dans la direction horizontale.

- (a) Coordonnées physique.
 (b) Coordonnées de référence.

Avec cette définition d'élément infini, les mêmes fonctions de transformations géométriques sont gardées comme dans le cas d'élément fini. Le seul changement est dans l'utilisation des fonctions de décroissance en conjonction avec les fonctions de formes ordinaires de l'élément pour construire les fonctions de forme infinies, ainsi que le domaine d'intégration qui s'allonge à l'infini dans la direction considérée.

Quelque soit l'ordre de l'élément, lorsque ξ prend la valeur au nœud ($\xi = \xi_i$), la somme se réduit à la seule fonction h_i définie en ce même nœud et donc à l'unité, puisque par définition $h_i(\xi_i) = 1$; alors :

$$\sum V_i(\xi = \xi_i) = h_i(\xi = \xi_i) = 1 \quad (1.4)$$

Si les fonctions h_i sont correctement définies, lorsque ξ augmente de +1 à l'infini, la somme décroît d'une manière asymptotique vers zéro. Ce type de variation permet de représenter à la fois les valeurs de champ constant, à l'intérieur du domaine fini, et les valeurs nulles, par l'hypothèse, à l'infini. Des paramètres sont souvent introduits afin de contrôler la décroissance.

1.2.1 Fonctions de décroissance

1.2.1.1 Décroissance du type exponentielle

Cette formulation est suggérée par Peter Bettess, elle a l'avantage de décroître vers zéro à l'infini que d'autre type en plus, elle est facile à manipuler mathématiquement.

Elle a comme expression :

$$h_i(\xi, \eta) = e^{-\frac{(\xi_i - \xi)}{L}} \quad (1.5)$$

L'expression (1.5) correspond à une décroissance seulement dans la direction ξ . L'introduction de ξ_i assure que les fonctions de forme complètes gardent la valeur unité aux nœuds ($H_i = 1$). Pour une décroissance dans les deux directions ξ et η , l'expression de h_i devient :

$$h_i(\xi, \eta) = e^{-\frac{(\xi_i - \xi + \eta_i - \eta)}{L}} \quad (1.6)$$

Le paramètre L est une longueur déterminant la sévérité de décroissance. Il est possible de le fixer à l'unité et de contrôler la sévérité par la distance entre les nœuds de l'élément réel, dans le maillage du problème physique à étudier. La plus part des auteurs préfèrent varier L . Dans le cas où la tendance de la solution théorique du problème posé est connue a priori en champ lointain, la valeur du

paramètre L pourrait être estimée, mais généralement il est déterminé par une étude paramétrique.

Enfin, les expressions des fonctions de forme complètes d'un élément infini dans la direction ξ peuvent être écrites :

$$V_i(\xi, \eta) = N_i(\xi, \eta) e^{\frac{(\xi_i - \xi)}{L}} \quad (1.7)$$

et leurs dérivées :

$$\frac{\partial V_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} = \left[\frac{\partial N_i}{\partial \xi} - \frac{N_i}{L} \right] e^{\frac{(\xi_i - \xi)}{L}} \quad ; \quad \frac{\partial V_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \frac{N_i}{\partial \eta} e^{\frac{(\xi_i - \xi)}{L}} \quad (1.8)$$

1.2.1.2 Décroissance du type puissance

Dans le cas de problèmes présentant un comportement du type l/r , où l est une longueur constante spécifique au problème et r est un rayon assez grand pour être infini, il est naturel de chercher un élément infini dont le comportement est essentiellement dominé par la même forme de comportement. Ceci peut être réalisé par l'utilisation des fonctions décroissantes du type puissance, qui assurent une tendance en $1/r$ quand ξ tend vers l'infini. Pour une décroissance seulement dans la direction ξ , ces fonctions ont pour expression [4,5,10] :

$$h_i(\xi, \eta) = \left[\frac{\xi_i - \xi_0}{\xi - \xi_0} \right]^n \quad (1.9)$$

Avec ξ_0 est un point origine quelconque appelé pôle. Ce point doit être en dehors de l'élément ; dans la face opposée à celle s'étendant à l'infini. Si la décroissance est dans la direction positive de ξ , alors ξ_0 doit être inférieur à -1 , sinon il doit être supérieur à 1 pour éviter des singularités à l'intérieur de l'élément [4,10].

Le paramètre de sévérité n , contrôlant la décroissance en puissance, doit être supérieur au plus grand ordre des polynômes en ξ , intervenant dans les fonctions de forme standard N . Ceci permet d'assurer quand ξ augmente, les fonctions de forme complètes V_i tendent vers $1/\xi$, qui est le comportement attendu du problème posé. Il n'existe aucune règle à suivre pour déterminer n , encore, seule l'expérimentation permet de porter un jugement. Cependant, il est clair que si n est trop petit, alors

d'une part, les conditions d'application de l'identité de Green pourraient être violées, et d'autre part les fonctions de forme complètes V_i deviennent ascendantes. S'il est trop grand, d'importantes propriétés physiques du problème peuvent être mal représentées et même omises [4].

La décroissance peut être généralisée pour les deux directions :

$$h_i(\xi, \eta) = \left[\frac{\xi_i - \xi_0}{\xi - \xi_0} \right]^n \left[\frac{\eta_i - \eta_0}{\eta - \eta_0} \right]^m \quad (1.10)$$

Les paramètres n et m ne sont pas nécessairement des entiers et peuvent être égaux, ce qui est généralement supposé pour simplifier l'étude paramétrique [9,10].

Les expressions des fonctions de forme complètes pour un élément infini dans la direction ξ sont :

$$V_i(\xi, \eta) = N_i(\xi, \eta) \left[\frac{\xi_i - \xi_0}{\xi - \xi_0} \right]^n \quad (1.11)$$

Et leurs dérivées :

$$\frac{\partial V_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} = \left[\frac{\partial N_i}{\partial \xi} - \frac{n N_i}{\xi - \xi_0} \right] \left[\frac{\xi_i - \xi_0}{\xi - \xi_0} \right]^n \quad ; \quad \frac{\partial V_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \left[\frac{\xi_i - \xi_0}{\xi - \xi_0} \right]^n \quad (1.12)$$

1.2.2 Intégration des fonctions de forme d'éléments infinis [2,4,5]

Il est possible d'intégrer analytiquement les matrices élémentaires de l'élément infini ; ceci est donné par Bettess lors du développement des premiers éléments infinis. Cependant, la méthode d'intégration numérique est aussi disponible pour l'intervalle $[0, \infty[$ et elle est aussi simple que celle utilisée pour les éléments finis. Ainsi, l'intégration numérique est plus générale par rapport à l'intégration analytique.

1.2.2.1 Intégration numérique des formes de décroissance exponentielles

La formule standard d'intégration numérique de Gauss-Laguerre permet d'évaluer les intégrales de la forme :

$$I = \int_0^{\infty} f(x)e^{-x} dx \quad (1.13)$$

L'intégration numérique est exacte si la fonction $f(x)$ est un polynôme et un nombre approprié des points d'intégration est utilisé. Il est clair que cette formule d'intégration convient parfaitement à la décroissance du type exponentiel. Les termes d'intégrales intervenant dans les fonctions de forme complètes ou leurs dérivées sont de la forme suivante :

$$I = \int_{-1}^{\infty} p(\xi)e^{\frac{-\xi}{L}} d\xi \quad (1.14)$$

Maintenant, le domaine d'intégration s'étale de -1 à l'infini et p est un polynôme en ξ correspondant aux fonctions de forme ou leurs dérivées. Les matrices élémentaires à évaluer font intervenir des multiplications de ces termes, et les intégrales finales prennent la forme :

$$I = \int_{-1}^{\infty} q(\xi)e^{\frac{-2\xi}{L}} d\xi \quad (1.15)$$

$q(\xi)$ est un autre polynôme résultant des produits intervenant dans les expressions des matrices élémentaires. La formule d'intégration de Gauss-Laguerre peut être adaptée pour évaluer ce genre d'intégrale par un simple changement de variable. Une nouvelle variable s peut être définie de telle sorte que quand $\xi = -1$, $s = 0$ et quand $\xi = \infty$, $s = \infty$.

$$s = \frac{2}{L}(\xi + 1) \quad ; \quad \xi = \frac{L}{2}s - 1 \quad (1.16)$$

Et pour les dérivées :

$$ds = \frac{2}{L}d\xi \quad ; \quad d\xi = \frac{L}{2}ds \quad (1.17)$$

Ainsi, l'intégrale (1.15) devient :

$$\int_{-1}^{\infty} q(\xi)e^{\frac{-2\xi}{L}} d\xi = \int_0^{\infty} q\left(\frac{L}{2}s - 1\right) \frac{L}{2} e^{\frac{2}{L}(\frac{L}{2}s - 1)} e^{-s} ds = \frac{L}{2} e^{-\frac{2}{L}} \int_0^{\infty} p(s)e^{-s} ds \quad (1.18)$$

Pour utiliser l'intégration de Gausse-Laguerre, les abscisses et poids (s, w_0) doivent être modifiés de la façon suivante :

$$\xi = \frac{L}{2}s - 1 \quad ; \quad w = w_0 \frac{L}{2} e^{\frac{2\xi}{L}} \quad (1.19)$$

Ainsi, ξ et w sont les nouvelles valeurs des abscisses et des poids à remplacer dans la somme, permettant de calculer les matrices élémentaires. Si la décroissance est dans la direction négative, les expressions correspondantes deviennent :

$$\int_{-\infty}^1 q(\xi) e^{\frac{2\xi}{L}} d\xi = \int_0^{\infty} q\left(1 - \frac{L}{2}s\right) \frac{L}{2} e^{\frac{2\xi}{L}} e^{-s} ds = \frac{L}{2} e^{\frac{2\xi}{L}} \int_0^{\infty} p(s) e^{-s} ds \quad (1.20)$$

avec un changement de variable :

$$s = \frac{2}{L}(1 - \xi) \quad ; \quad \xi = 1 - \frac{L}{2}s \quad (1.21)$$

1.2.2.2 Intégration numérique des formes de décroissance en puissance

Il est possible d'utiliser l'intégration numérique de Gausse-Laguerre pour des fonctions de décroissance en puissance qui ne contiennent pas un terme exponentiel, simplement en les multipliant par e^{-x} [4]:

$$\int_0^{\infty} f(x) e^{-x} dx = \int_0^{\infty} [f(x) e^x] e^{-x} dx \quad (1.22)$$

Cela peut fonctionner seulement dans le cas où la fonction se comporte raisonnablement bien quand x tend vers l'infini.

Cependant, une autre possibilité d'intégration peut être admise. La technique consiste à transformer le domaine d'intégration infini en un domaine fini, puis utiliser l'intégration numérique de Gauss-Legendre qui est applicable dans le domaine $[-1, +1]$. Pour les éléments infinis construits à base d'éléments de référence finis, le domaine d'intégration est $[-1, +\infty[$ ou bien $]-\infty, +1]$ selon la direction de

décroissance considérée. Une telle transformation peut être réalisée par le changement de variables suivant :

$$\xi = \frac{2s}{1-s} \quad ; \quad d\xi = \frac{2}{(1-s)^2} ds \quad (1.23)$$

Pour une décroissance dans la direction positive, et

$$\xi = \frac{2s}{1+s} \quad ; \quad d\xi = \frac{2}{(1+s)^2} ds \quad (1.24)$$

pour une décroissance dans la direction négative.

Avec ce changement de variables, l'intégration numérique de Gauss-Legendre peut être effectuée pour évaluer les expressions des matrices élémentaires d'un élément infini. Pour une décroissance dans la direction positive, la forme correspondante est :

$$\int_{-1}^{+\infty} f(\xi) d\xi = \int_{-1}^{+1} f\left(\frac{2s}{1-s}\right) \frac{2}{(1-s)^2} ds \quad (1.25)$$

Pour une décroissance dans la direction négative :

$$\int_{-\infty}^{+1} f(\xi) d\xi = \int_{-1}^{+1} f\left(\frac{2s}{1+s}\right) \frac{2}{(1+s)^2} ds \quad (1.26)$$

Dans ce cas aussi, les abscisses et les poids (s, w_0) tabulés pour l'intégration par la méthode de Gauss-Legendre doivent être modifiés. Pour une direction infinie positive :

$$\xi = \frac{2s}{1-s} \quad ; \quad w = w_0 \frac{2}{(1-s)^2} \quad (1.27)$$

Pour une direction infinie négative :

$$\xi = \frac{2s}{1+s} \quad ; \quad w = w_0 \frac{2}{(1+s)^2} \quad (1.28)$$

1.3 Approche inverse

Dans l'approche inverse, le domaine de définition de l'élément de référence, ainsi que les fonctions d'interpolation sont gardées et retenus comme définis pour un élément fini standard. Cependant, le seul changement est dans les calculs des matrices Jacobéenne ou on utilise les fonctions de transformation géométrique qui sont construites ascendantes avec une singularité aux nœuds limites de l'élément de référence, de telle sorte à projeter les nœuds physique de l'élément naturel correspondant à l'infini.

Afin de réaliser une telle transformation géométrique, il convient d'abord de considérer la projection sur le domaine de référence $[-1, +1]$ d'un élément infini unidimensionnel défini par deux nœuds. Les fonctions de transformations géométriques pour les éléments de plus haut ordre et les éléments bis-et tridimensionnels sont élaborées sur la base de cette projection. Deux transformations sont considérées dans cette section, la première est celle proposée par Zienkiewicz [4] et la seconde par Abdel-Fattah [1].

1.3.1 Transformation de Zienkiewicz

Pour donner l'idée de base, on considère un élément quadratique unidimensionnel représenté sur la figure 1.2, s'étendant du point x_1 à travers x_2 en x_3 qui se trouve à l'infini avec l'utilisation d'une transformation convenable qui peut s'écrire sous :

$$x = \frac{-\xi}{1-\xi}x_0 + \left(1 + \frac{\xi}{1-\xi}\right)x_2 \quad (1.29)$$

L'expression (1.29) permet d'avoir :

$$\begin{cases} x = \infty & \text{pour } \xi = +1 \\ x = x_2 & \text{pour } \xi = 0 \\ x = \frac{1}{2}(x_0 + x_2) = x_1 & \text{pour } \xi = -1 \end{cases} \quad (1.30)$$

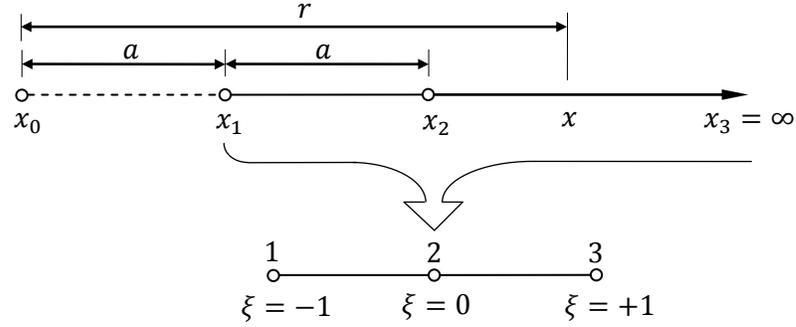


Figure 1.2 : Transformation de Zienkiewicz d'un élément infini unidimensionnel.

Le point x_1 est l'abscisse du milieu entre x_0 et x_2 , ce qui implique que la moitié interne de l'élément infini est de même étendue que celle du domaine fini, à partir du point x_0 qui est le pôle du problème.

Cette transformation peut aussi s'écrire directement en fonction des seules coordonnées de l'élément infini en éliminant x_0 de l'équation (1.29) :

$$x = M_1(\xi) x_1 + M_2(\xi) x_2 \quad (1.31)$$

Avec :

$$M_1(\xi) = \frac{-2\xi}{1-\xi} \quad ; \quad M_2 = \frac{1+\xi}{1-\xi} \quad (1.32)$$

Ce qui définit les fonctions de transformation géométrique de l'élément. Une caractéristique importante de ces fonctions est qu'elles conduisent à une transformation indépendante de l'origine du système des coordonnées car :

$$M_1(\xi) + M_2(\xi) = 1 \quad (1.33)$$

En effet, un décalage de l'origine de Δx conduit aux nouvelles coordonnées :

$$x + \Delta x = (x_1 + \Delta x)M_1(\xi) + (x_2 + \Delta x)M_2(\xi) \quad (1.34)$$

qui peuvent être écrites :

$$x + \Delta x = [M_1(\xi)x_1 + M_2(\xi)x_2] + \Delta x[M_1(\xi) + M_2(\xi)] \quad (1.35)$$

qui n'est vrai que dans le seul cas où la propriété (1.33) est vérifiée. Ce qui montre que :

$$M_1(\xi + \Delta\xi) + M_2(\xi + \Delta\xi) = M_1(\xi) + M_2(\xi) \quad (1.36)$$

Une transformation géométrique entre le domaine fini et le domaine infini étant parfaitement établie. La prochaine étape consiste à voir en quelle forme le polynôme dans le domaine fini ξ est transformé en domaine infini x .

Soit u un polynôme typique en éléments finis, représentant l'approximation nodale de la variable du champs dans le domaine fini ξ et qui peut se mettre sous la forme suivante :

$$u = \sum N_i u_i = \alpha_0 + \alpha_1 \xi + \alpha_2 \xi^2 + \alpha_3 \xi^3 + \dots \quad (1.37)$$

Avec α_i les combinaisons linéaires des valeurs nodales u_i . L'expression de ξ obtenue à partir de la transformation (1.29) s'écrit :

$$\xi = \frac{x - x_2}{x - x_0} = 1 - \frac{x_2 - x_0}{r} = 1 - \frac{2a}{r} \quad (1.38)$$

où $r = x - x_0$ la distance radiale mesurée à partir du pôle x_0 , qui représente le centre à partir duquel la perturbation prend naissance. La substitution de (1.38) dans (1.37) conduit au développement suivant :

$$u = \beta_0 + \frac{\beta_1}{r} + \frac{\beta_2}{r^2} + \frac{\beta_3}{r^3} + \dots \quad (1.39)$$

Les β_i sont des coefficients déterminés à partir des α_i et a . Particulièrement, si le polynôme requis doit tendre vers zéro à l'infini, alors $\beta_0 = 0$.

1.3.1.1 Généralisation de la transformation de Zienkiewicz

La généralisation de la transformation de Zienkiewicz au cas d'éléments unidimensionnels linéaires ou de plus haut ordre est simple et pratique, et conduit aussi à la génération des fonctions de transformation de n'importe quel élément.

Considérons les deux premières fonctions de forme de l'élément unidimensionnel quadratique de la figure (1.2) relatives aux nœuds $\xi = -1$ et $\xi = 0$ et qui s'écrivent par :

$$N_1 = \frac{-\xi(1-\xi)}{2} \quad ; \quad N_2 = (1+\xi)(1-\xi) \quad (1.40)$$

La comparaison entre les expressions (1.40) et les fonctions de transformations géométriques M_1 et M_2 de (1.32), permet de remarquer que la seule différence réside dans le dernier terme qui est inversé. Ce qui montre immédiatement la possibilité de générer des fonctions de transformation géométrique pour des éléments infinis de n'importe quel ordre désiré. L'expression générale de ces fonctions s'écrit par [10] :

$$M_i = \frac{1-\xi_i}{1-\xi} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-1} \frac{\xi - \xi_j}{\xi_i - \xi_j} \quad ; \quad i = 1, n-1 \quad (1.41)$$

avec n est le nombre de nœuds y compris celui qui est à l'infini correspondant à $\xi = +1$.

Il est à noter que l'expression (1.41) peut s'écrire sous la forme :

$$M_i = N_i \bar{h}_i \quad (1.42)$$

qui est le produit des fonctions de forme standards N_i par des fonctions croissantes \bar{h}_i présentant une singularité au nœud infini, et par conséquent d'identifier la transformation géométrique des éléments infinis comme approche analogue à l'approche directe utilisant des fonctions de décroissance.

Avec les \bar{h}_i :

$$\bar{h}_i = \left(\frac{1-\xi_i}{1-\xi} \right)^2 \quad (1.43)$$

Sont des fonctions croissantes puisque l'intervalle sur lequel elles sont définies est restreint à celui de l'élément fini $[-1, +1]$.

Dans le cas où la direction infinie est négative, les expressions (1.41) et (1.43) deviennent respectivement :

$$M_i = \frac{1 + \xi_i}{1 + \xi} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-1} \frac{\xi - \xi_j}{\xi_i - \xi_j} \quad ; \quad i = 1, n-1 \quad (1.44)$$

$$\bar{h}_i = \left(\frac{1 + \xi_i}{1 + \xi} \right)^2 \quad (1.45)$$

et permettent d'avoir :

$$\begin{cases} x = \infty & \text{pour } \xi = -1 \\ x = x_2 & \text{pour } \xi = 0 \\ x = \frac{1}{2}(x_0 + x_2) = x_1 & \text{pour } \xi = +1 \end{cases} \quad (1.46)$$

Les fonctions de transformations géométriques des éléments infinis à deux ou trois dimensions avec une direction infinie, peuvent être générées par l'expression (1.42) en utilisant directement les fonctions ascendantes (1.43) ou (1.45) selon la direction infinie considérée. Pour un élément s'étendant à l'infini dans les deux directions, les fonctions croissantes appropriées se généralisent par :

$$\bar{h}_i = \left(\frac{1 - \xi_i}{1 - \xi} \right)^2 \left(\frac{1 - \eta_i}{1 - \eta} \right)^2 \quad (1.47)$$

Evidemment dans cette expression, les directions infinies sont supposées positives. Cette technique est très pratique et fortement recommandée si les fonctions de forme de l'élément fini de base sont connues. Dans le cas contraire, les fonctions de transformation peuvent être obtenues à partir du cas unidimensionnel. Pour plus de détail sur la construction des fonctions de transformations géométriques dans les cas bi-et tridimensionnel, nous demandons aux lecteurs de se référer à [2,4,5,9,10].

Finalement, il est nécessaire de noter que lors de la représentation d'un domaine physique non borné par un maillage d'éléments finis et d'éléments infinis, il faut veiller à ce que la relation entre les coordonnées de référence ξ et celles de l'élément réel infini x vérifie l'équation (1.38) pour que le développement (1.39) soit obtenu. A

cet effet, les coordonnées naturelles x_i des n nœuds disposés dans la direction s'étendant à l'infini doivent être calculées par l'expression [10] :

$$x_i = \frac{(n-1)x_{n-1} + (n+1-2i)x_0}{2(n-i)} \quad (1.48)$$

1.3.2 Transformation de Abdel-Fattah

L'élément unidimensionnel de la figure (1.3) qui forme la base pour les éléments bis et tridimensionnels. Encore une fois, l'élément s'étend du nœud 1 qui se trouve sur l'interface éléments finis-éléments infinis en passant par le nœud 2, puis le nœud 3 qui se trouve à l'infini. Le système des coordonnées globales $x \in [x_0, \infty[$ est transformé en élément fini défini par le système de coordonnées locales $\xi \in [-1, +1]$. Comme montré sur la figure suivante, le terme x_0 représente le pôle qui est la coordonnée globale de l'origine de la perturbation

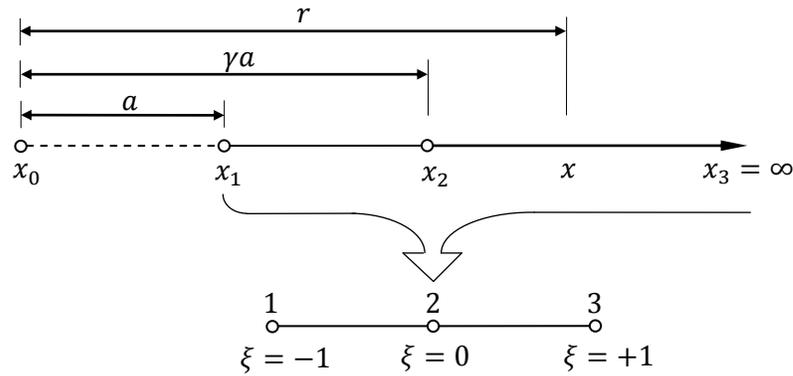


Figure 1.3 : Transformation d'Abdel-Fattah d'un élément infini unidimensionnel.

La position du pôle est déterminée en accord avec le paramètre γ , qui est donné par la relation :

$$\gamma = \frac{x_2 - x_0}{x_1 - x_0} \quad (1.49)$$

L'expression (1.31) est réécrite ici pour transformer le système global au système local :

$$x = M_1(\xi) x_1 + M_2(\xi) x_2 \quad (1.50)$$

Pour inclure le paramètre de décroissance dans la transformation géométrique, $M_i(\xi)$ doit être écrit sous la forme :

$$M_1(\xi) = A_0 + A_1 r(\xi) \quad ; \quad M_2(\xi) = B_0 + B_1 r(\xi) \quad (1.51)$$

Où $r(\xi)$ est la fonction de variation, en accord avec la tendance du champ de variables à l'infini. Les constantes A_0, A_1, B_0 et B_1 sont déterminées en satisfaisant les conditions de base suivantes :

$$\begin{cases} M_i(\xi_j) = 1 & \text{pour } i = j \\ M_i(\xi_j) = 0 & \text{pour } i \neq j \end{cases} \quad (1.52)$$

Les expressions (1.51) et (1.52) permettent de donner :

$$\begin{cases} A_0 = \frac{-r(\xi_2)}{r(\xi_1) - r(\xi_2)} \\ A_1 = \frac{1}{r(\xi_1) - r(\xi_2)} \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} B_0 = \frac{r(\xi_1)}{r(\xi_1) - r(\xi_2)} \\ B_1 = \frac{-1}{r(\xi_1) - r(\xi_2)} \end{cases} \quad (1.53)$$

Le champ de variables u peut être interpolé, en utilisant les fonctions de forme standard, qui sont, pour l'élément de la figure (1.3) :

$$u = N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 \quad (1.54)$$

Avec :

$$N_1 = -\frac{1}{2}\xi(1 - \xi) \quad ; \quad N_2 = 1 - \xi^2 \quad ; \quad N_3 = \frac{1}{2}\xi(1 + \xi) \quad (1.55)$$

Le terme $r(\xi)$ dans les expressions (1.53) est déterminé en accord avec la forme de décroissance voulue à l'infini. Trois types de décroissances sont considérés.

1.3.2.1 Transformation géométrique à décroissance en puissance

Une décroissance en puissance du champ de variables est choisie pour des problèmes présentant un comportement de type $(1/r^n)$. Les variables nodales de la figure (1.3) pour ce type de décroissance peuvent être écrites :

$$u_1 = \left(\frac{r(\xi)}{a}\right)^n u \quad ; \quad u_2 = \left(\frac{r(\xi)}{\gamma a}\right)^n u \quad (1.56)$$

En résolvant les expressions (1.52) à (1.55) pour $r(\xi)$ avec $u_3 = 0$, on obtient :

$$r(\xi) = \frac{2^{\frac{1}{n}} \gamma a}{[\xi^2(\gamma^n - 2) - \xi \gamma^n + 2]^{\frac{1}{n}}} \quad (1.57)$$

1.3.2.2 Transformation géométrique à décroissance exponentielle

La même chose comme dans le cas de décroissance en puissance, le seul changement est dans le type de comportement qui est sous forme $(1/e^{nr})$. Cette fois-ci, les variables nodales s'expriment par :

$$u_1 = \frac{e^{nr(\xi)}}{e^{na}} u \quad ; \quad u_2 = \frac{e^{nr(\xi)}}{e^{n\gamma a}} u \quad (1.58)$$

Tenant compte des expressions (1.53), (1.54), (1.55) et (1.58) qui nous permettent d'avoir :

$$r(\xi) = \frac{1}{n} \ln \left(\frac{2e^{na} e^{n\gamma a}}{k_1(\xi)} \right) \quad (1.59)$$

Avec :

$$k_1(\xi) = 2e^{na}(1 - \xi^2) - e^{n\gamma a} \xi(1 - \xi) \quad (1.60)$$

1.3.2.3 Transformation géométrique à décroissance logarithmique

Pour une décroissance logarithmique $[1/\ln(r)]^n$ du champ de variables, les variables nodales s'écrivent par :

$$u_1 = \left[\frac{\ln(r(\xi))}{\ln(a)} \right]^n u \quad ; \quad u_2 = \left[\frac{\ln(r(\xi))}{\ln(\gamma a)} \right]^n u \quad (1.61)$$

Dans cette transformation, le terme $r(\xi)$ est exprimé par :

$$r(\xi) = \exp \left\{ \frac{2^{\frac{1}{n}} \ln(a) \ln(\gamma a)}{[k_2(\xi)]^{\frac{1}{n}}} \right\} \quad (1.62)$$

Avec maintenant :

$$k_2(\xi) = 2(1 - \xi^2)(\ln(a))^n - \xi(1 - \xi)(\ln(\gamma a))^n \quad (1.63)$$

1.3.2.4 Positionnement du pôle

Comme nous l'avons déjà indiqué, pour l'approche inverse, le Jacobien se calcule grâce aux fonctions de transformation géométrique et non pas par les fonctions de forme comme le cas des éléments finis. A cet effet, le positionnement du pôle doit se faire en conséquence.

En effet, le déterminant du Jacobien des différentes transformations géométrique n'est positif que pour les valeurs du paramètre γ suivantes :

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{n}} \leq \gamma \leq (4)^{\frac{1}{n}} \quad (1.64)$$

pour une transformation géométrique à décroissance en puissance,

$$\ln\left(\frac{4e^{na}}{3na}\right) \leq \gamma \leq \ln\left(\frac{4e^{na}}{na}\right) \quad (1.65)$$

pour une transformation géométrique à décroissance exponentielle, et finalement

$$\frac{1}{a} e^{\left[\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{n}} \ln(a)\right]} \leq \gamma \leq \frac{1}{a} e^{\left[(4)^{\frac{1}{n}} \ln(a)\right]} \quad (1.66)$$

pour une transformation géométrique à décroissance logarithmique.

Quant à la transformation de Zienkiewicz, la seule condition qui s'impose, est que le pôle se trouve en dehors de l'élément infini.

L'extension de la transformation géométrique d'Abdel-Fattah aux cas bi et tridimensionnels est simple, et nous demandons à ceux qui sont intéressés de se

référer à la référence [1] où la procédure est clairement expliquée pour les éléments du type Serendip comme de Lagrange.

1.4 Algorithmes de calcul des matrices élémentaires

Dans le cas de l'approche directe, les modifications nécessaires pour insérer des éléments infinis dans un code de calcul en éléments finis, consistent essentiellement à l'intégration numérique et à l'évaluation des nouvelles fonctions de forme et de leurs dérivées. Les points et les poids d'intégration numérique sont calculés selon la méthode de Gauss-Laguerre puis modifiés pour l'intervalle $[-1, \infty[$.

L'algorithme permettant de construire les matrices élémentaires des éléments infinis ne diffère pas trop de celui des matrices élémentaires d'éléments finis. La même boucle sur les points de Gausse-Legendre est appliquée pour les points de Gauss-Laguerre et l'appel aux fonctions de forme à l'intérieur s'applique aux fonctions de formes décroissantes infinies. La matrice Jacobienne originale ainsi que le maillage d'éléments finis initial restent inchangés.

Dans le cas de l'approche inverse, les mêmes expressions des matrices élémentaires sont gardées et assemblées, ainsi le même algorithme de calcul pour les éléments finis est utilisé. Le seul changement requis pour rendre l'élément infini, réside dans la nouvelle expression de la matrice Jacobienne exprimée par :

$$J = \begin{bmatrix} M_{,\xi} \\ M_{,\eta} \end{bmatrix} [X \quad Y] \quad (1.67)$$

Avec X et Y sont les coordonnées nodales de l'élément infini construit. Ce qui impose l'insertion d'un appel aux fonctions de transformation géométrique.

1.5 Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté les deux approches de construction des éléments infinis classique. On a vu dans l'approche directe, par des fonctions décroissantes, qu'elle nous permet de contrôler la vitesse de décroissance, par les paramètres de sévérité. Par contre, dans l'approche inverse, par des fonctions de transformations géométrique, cette possibilité ne s'offre pas.

Eléments infinis périodiques

1.6 Introduction

Les premiers éléments infinis périodiques ont été développés par Bettess et Zienkiewicz en 1975 juste après le développement des premiers types d'éléments infinis classique de l'approche directe [4,5], Ces éléments ont été conçus dans le but de traités des problèmes extérieurs, gouvernés par l'équation d'Helmholtz (2.2).

1.7 Propagation d'ondes en milieux infinis

Le phénomène de propagation d'ondes intervient dans plusieurs domaines de l'ingénierie notamment dans électromagnétiques, la caustiques, élastodynamique,... etc., et son expression est donnée par :

$$\Delta u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (2.1)$$

Dans le domaine des temps et

$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad (2.2)$$

Dans le cas des domaines fréquentielles, d'où u est le champ de variable, $k = \frac{\omega}{c}$ est la longueur d'ondes en fonction de la vitesse de propagation d'ondes c et la pulsation d'excitation ω .

Dans le cas où la propagation d'onde est dans le sens , la solution générale d'équation (2.1) qui a été donnée par Alembert sous la forme [4,8,12] :

$$u = u_1(x - ct) + u_2(x + ct) \quad (2.3)$$

L'équation (2.3) représente une somme de deux ondes, l'une propage dans la direction positive notée u_1 et l'autre réfléchi voyageant dans la direction négative notée u_2 .

Si le domaine s'étend à l'infini dans la direction de x , alors il doit être tronqué à une certaine limite fictive. Afin de supprimer la contribution de l'onde réfléchi, c'est-à-dire à satisfaire les relations suivantes [4]:

$$u_2(x + ct) = 0 \quad (2.4)$$

$$u = u_1(x - ct) \quad (2.5)$$

La dérivation de (2.5) par rapport au temps et par rapport à la normale n nous donne le système suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -cu'_1 \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} = u'_1 \quad (2.7)$$

La substitution de l'équation (2.7) dans (2.6) nous permet d'avoir :

$$\frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2.8)$$

dans les domaines des temps, et

$$\frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{i\omega}{c} u \quad (2.9)$$

dans les domaines des fréquences, avec $i = \sqrt{-1}$. L'expression (2.8) ou (2.9) est appelée la condition de Sommerfeld [3,8] qui a été présentée pour la première fois en 1949, sous forme d'une limite qui tend vers zéro quand la distance entre la source et

le point considéré tend vers l'infini. L'expression de cette limite dans le domaine des temps s'écrit par [5,6, 9,13] :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} \right) = 0 \quad (2.10)$$

Où r est la distance entre la source et le point considéré, $n = 1, 2$ ou 3 selon la dimension du problème qui est 1D, 2D ou 3D. Dans le domaine des fréquences, l'expression (2.10) devient :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{i\omega}{c} u \right) = 0 \quad (2.11)$$

Ces expressions ont été appliquées pour la première fois en 1969 par Zienkiewicz et Newton dans le cas des milieux fluides et par Lysmer et Kuhlemeyer dans le cas des milieux élastiques. Elles représentent des éléments absorbants de coefficient $\frac{1}{c}$, imposés sur la limite de troncature[4].

1.8 Eléments infinis périodiques selon l'approche directe

Dans le cas de l'approche directe, la différence entre les éléments périodiques et les éléments classiques est dans les fonctions de forme dans lesquelles on a ajoutée l'expression e^{ikr} , avec r est la distance radiale entre le nœud i et le point considéré [4].

L'idée de base est de multiplier les fonctions de formes v_i d'un élément infini classique par une fonction périodique permettant de tenir compte de la propagation d'ondes. Les expressions complètes des fonctions de forme sont alors données par :

$$p_i(\xi, \eta) = v_i(\xi, \eta) e^{ikr} \quad (2.12)$$

Avec

$$v_i(\xi, \eta) = N_i(\xi, \eta) h_i(\xi, \eta) \quad (2.13)$$

Fonction de forme d'un élément infini classique selon l'approche directe.

Pour une direction infini suivant ξ , les dérivées des fonctions de forme p_i sont alors :

$$\frac{\partial p_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial \xi} h_i e^{ikr} + N_i \frac{\partial h_i}{\partial \xi} e^{ikr} + N_i h_i ik \frac{\partial r}{\partial \xi} e^{ikr} \quad (2.14)$$

Par rapport à ξ , et

$$\frac{\partial p_i}{\partial \eta} = \frac{\partial N_i}{\partial \eta} h_i e^{ikr} \quad (2.15)$$

par rapport à η .

Dans le cas où les fonctions de décroissances considérées sont de type exponentiel, l'expression (2.12) devient

$$p_i(\xi, \eta) = N_i(\xi, \eta) e^{\frac{(\xi_i - \xi)}{l}} e^{ikr} \quad (2.16)$$

pour une direction infini suivant ξ , et

$$p_i(\xi, \eta) = N_i(\xi, \eta) e^{\frac{(\xi_i - \xi + \eta_i - \eta)}{l}} e^{ikr} \quad (2.17)$$

pour deux directions infinis suivant ξ et η .

dans le cas où les fonctions de décroissances sélectionnées sont de type puissance, alors :

$$p_i(\xi, \eta) = N_i(\xi, \eta) \left[\frac{\xi_i - \xi_0}{\xi - \xi_0} \right]^n e^{ikr} \quad (2.18)$$

pour une direction infini suivant ξ , et

$$p_i(\xi, \eta) = N_i(\xi, \eta) \left(\frac{\xi_i - \xi_0}{\xi - \xi_0} \right)^n \left(\frac{\eta_i - \eta_0}{\eta - \eta_0} \right)^m e^{ikr} \quad (2.19)$$

pour deux directions infinis suivant ξ et η .

La présentation des fonctions de formes d'un élément infini périodique pour un système quadratique linéaire est donnée par la figure suivante :

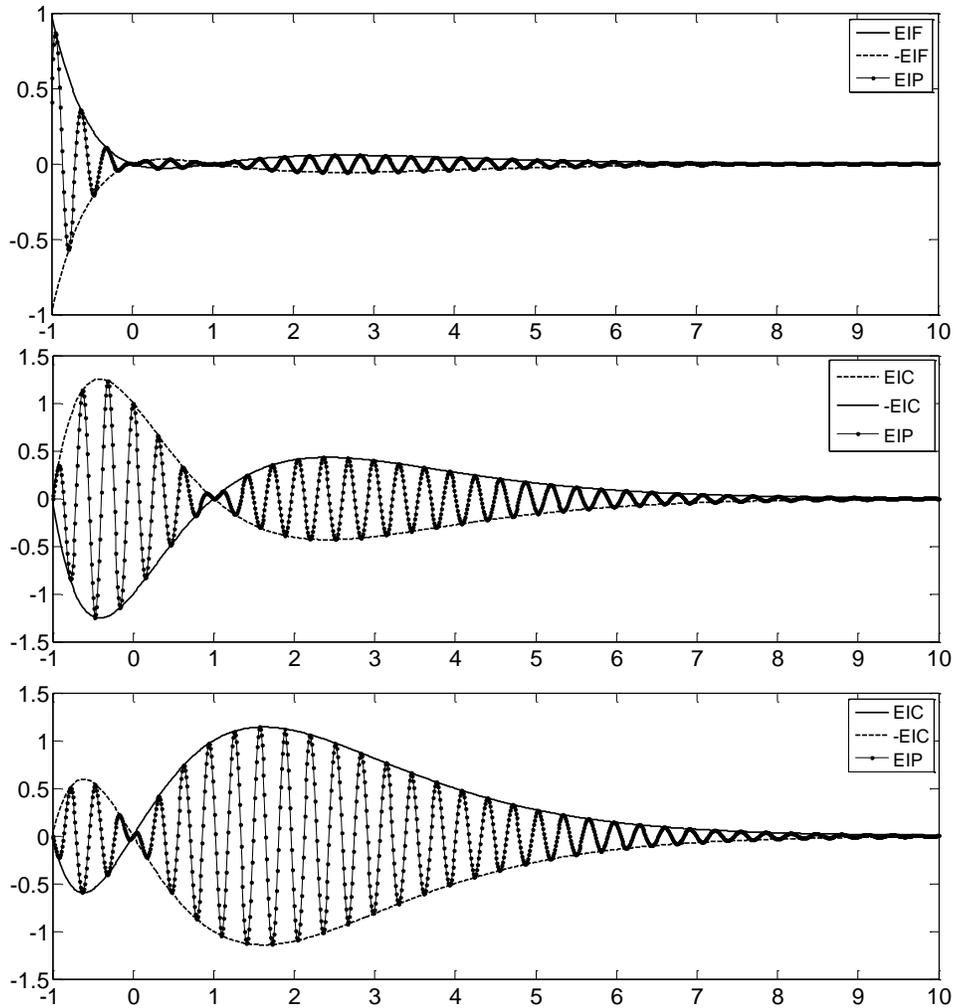


figure 2.1: présentation des fonctions de forme d'un élément infini périodique

1.8.1 Intégration des éléments infinis périodiques [4]

Les fonctions de forme des éléments infinis périodiques de l'approche directe contiennent des termes faisant intervenir la propagation d'ondes, et pour le calcul des matrices élémentaires de ces éléments, on doit faire appel à l'intégration numérique de Newton-Cotes qui permet d'évaluer des intégrales de forme :

$$\int_0^{\infty} f(x) e^{-\alpha x} e^{i\beta x} dx \quad (2.20)$$

Qu'on peut mettre sous forme

$$\int_0^{\infty} f(x) e^{(-\alpha+i\beta)x} dx \quad (2.21)$$

Avec α une constante qui dépend de la vitesse de décroissance, et la constante β dépend du nombre d'ondes k qui est généralement $\beta = 2k$. Dans la formule (2.20), les bornes d'intégration sont de 0 à l'infini, alors que dans notre cas sont de -1 à l'infini, ce qui requière un changement de variable adéquat :

$$\beta x = \frac{\pi}{4}(2j + 1) \quad j = 0, 1, 2, \dots, n \quad (2.22)$$

Avec n nombre de point d'intégration.

Dans la fonction (2.21), $f(x)$ peuvent être écrite sous la forme d'une combinaison linéaire suivante :

$$f(x) = \sum_{i=1}^n p_i L_i(x) \quad (2.23)$$

Avec L_i un polynôme de Lagrange qui est donnée par :

$$L_i(x) = \prod_{i \neq j} \frac{x-x_j}{x_i-x_j} \quad (2.24)$$

On remplace la fonction (2.23) dans (2.21) ce qui permet d'écrire l'égalité suivante:

$$\int_0^{\infty} f(x) e^{(-\alpha+i\beta)x} dx = \sum_{i=1}^n p_i \int_0^{\infty} L_i e^{(-\alpha+i\beta)x} dx \quad (2.25)$$

Qu'on peut résoudre numériquement par l'intégration de Newton-Cote.

1.9 Eléments infinis périodiques selon l'approche inverse

Cette approche est basée sur la transformation de Zienkiewicz (approche inverse), dans laquelle la décroissance de l'amplitude des ondes est sous la forme $\frac{1}{r}$ [4], qui est

déjà défini par les expressions (1.37) et (1.39), et r donné par (1.38) quand peut écrire sous la forme :

$$r = \frac{A}{1 - \xi} \quad (2.26)$$

La seule différence entre ces éléments et les éléments infinis classiques de l'approche inverse est dans les fonctions de formes qui sont multipliées par un terme tenant compte de la propagation d'ondes qui dépend de la dimension du problème (2D, 3D).

1.9.1 Cas de trois dimensions

Dans le cas de tridimensionnels, la propagation d'ondes dans les domaines infinis est dominée par le terme $\frac{e^{ikr}}{r}$. Les fonctions de formes N complètes sont obtenues par la multiplication des fonctions de formes des éléments finis N par e^{ikr} :

$$p(\xi, \eta) = N(\xi, \eta)e^{ikr} \quad (2.27)$$

On remplace (2.28) dans (2.29), on obtient :

$$p(\xi, \eta) = N(\xi, \eta)e^{\frac{ikA}{1-\xi}} \quad (2.28)$$

Pour assurer la continuité du champ de variables entre les éléments finis et les éléments infinis, $p(\xi, \eta)$ doit être égale à l'unité quand $\xi = -1$. Pour cela, on multiplie l'équation (2.28) par $e^{\frac{ikA}{2}}$. Alors on aura :

$$p(\xi, \eta) = N_i(\xi, \eta)e^{-\frac{ikA}{2}} e^{\frac{ikA}{1-\xi}} \quad (2.29)$$

Qu'on peut mettre sous cette forme :

$$p(\xi, \eta) = CN(\xi, \eta)e^{\frac{ikA}{1-\xi}} \quad (2.30)$$

Et leur dérivée sera comme suite :

$$\frac{\partial p(\xi, \eta)}{\partial \xi} = C e^{\frac{ikA}{1-\xi}} \left(\frac{\partial N}{\partial \xi} + N ikA \frac{1}{1-\xi^2} \right) \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial p(\xi, \eta)}{\partial \eta} = C \frac{\partial p}{\partial \eta} e^{\frac{ikA}{1-\xi}} \quad (2.32)$$

1.9.2 Cas de deux dimensions

En bidimensionnels, la solution de l'équation de Helmholtz dans un domaine infinis dépend de la fonction de Hankel $H^0(kr)$ d'ordre zéro [4]. Pour des valeurs de r très grandes, la fonction de Hankel tend vers $\frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}}$ et dans ce cas les fonctions de formes sont données par:

$$p(\xi, \eta) = N(\xi, \eta) \sqrt{r} e^{ikr} \quad (2.33)$$

On remplace (2.26) dans (2.33) et pour assurer la continuité du champ de variable, on multiplie l'équation (2.33) par $\left(\frac{2}{A}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{ikA}{2}}$, on obtient :

$$p(\xi, \eta) = N_i(\xi, \eta) \left(\frac{2}{A}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{ikA}{2}} e^{\frac{ikA}{1-\xi}} \quad (2.34)$$

Qu'on peut mettre sous cette forme :

$$p(\xi, \eta) = DN(\xi, \eta) e^{\frac{ikA}{1-\xi}} \quad (2.35)$$

Sa dérivée sera :

$$\frac{\partial p_i}{\partial \xi} = D \left[\frac{\partial N}{\partial \xi} \left(\frac{A}{1-\xi}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{N}{2} \left(\frac{1}{(1-\xi)^3}\right)^{\frac{1}{2}} + N ikA \left(\frac{A}{1-\xi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(1-\xi)^2} \right] \quad (2.36)$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial \eta} = \frac{\partial N}{\partial \eta} \left(\frac{A}{1-\xi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{ikA}{1-\xi}} \quad (2.37)$$

1.10 Conclusion

La différence entre les éléments infinis classiques et les éléments infinis périodiques est dans les fonctions de forme de ces derniers qui contiennent des termes tenant compte de propagation d'ondes. L'utilisation des éléments infinis périodiques demande des techniques d'intégrations numériques très avancées.

Modélisation et discrétisation par éléments finis

1.11 Introduction

L'analyse des problèmes d'ingénierie nous amènent à développer des modèles mathématiques qui s'appuient sur des hypothèses simplificatrices pour aboutir à des équations différentielles auxquelles sont ajoutées des conditions aux limites. La méthode numérique la plus utilisée pour résoudre ces problèmes est celle des éléments finis, car elle offre la possibilité de développer un programme de calcul qui peut résoudre avec peu de modification plusieurs types de problèmes.

Dans ce chapitre, nous allons mettre en équations le problème mathématique des réservoirs semi-infini ; dont lesquelles le fluide est supposée compressible. Et le domaine est discrétisé par des éléments finis.

1.12 Formulation mathématique des réservoirs semi-infini

En traite un exemple d'un réservoir de hauteur H et de longueur assez grande pour le considérer infinie qui est présenté dans la figure 3.1. Le fluide du réservoir est supposé linéairement compressible, non visqueux et subit des mouvements de petites amplitudes, son équation dynamique qui est donnée par Navier Stokes est de forme suivante :

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = -\nabla p \quad (3.1)$$

Où v est la vitesse, ρ est la masse volumique du fluide, p est la pression hydrodynamique et ∇ l'opérateur nabla.

Sous l'hypothèse de fluide linéairement compressible, le changement relatif de volume ($\Delta v/v$) est relié, selon la théorie de l'élasticité linéaire, à la pression appliquée p par le coefficient de compressibilité k [10].

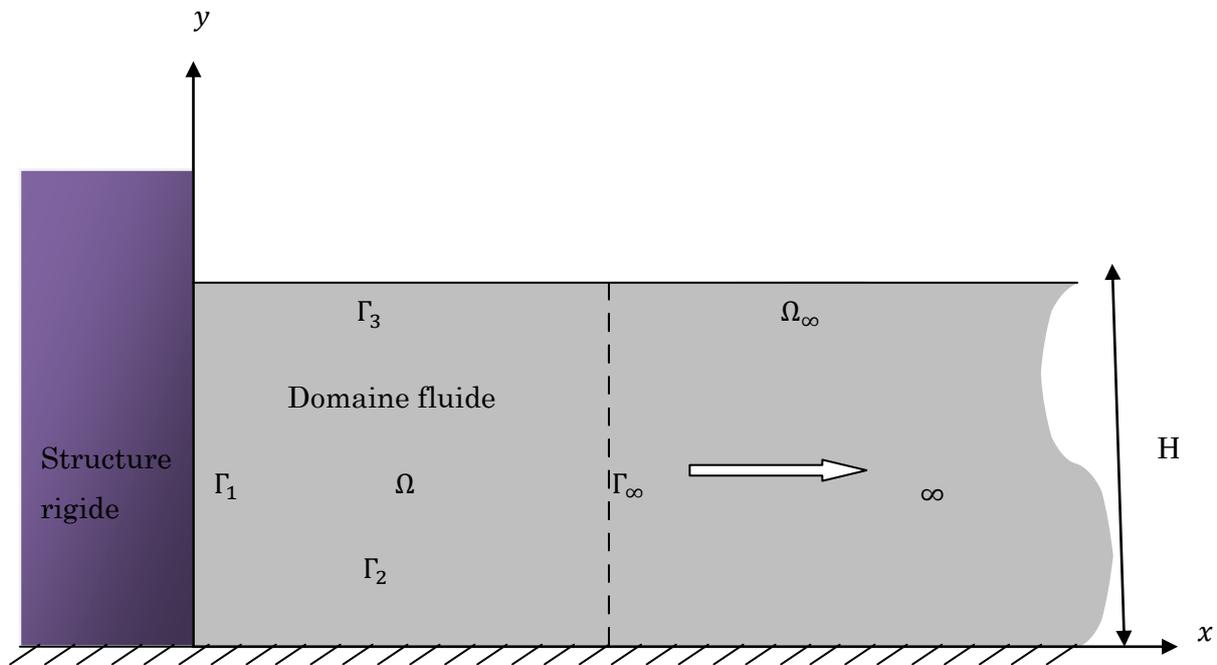


figure 3.1: reservoir semi – infini.

$$p = -k \frac{\Delta v}{v} = -k \text{Tr}(\varepsilon) \quad (3.2)$$

ε est le tenseur de déformations dont la trace est la divergence du champ de déplacements u_l des particules du fluide :

$$\text{Tr}(\varepsilon) = \nabla \cdot u_l \quad (3.3)$$

La dérivé de (3.2) par rapport au temps donne :

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -k \nabla v \quad (3.4)$$

Avec

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla u_l = \nabla \frac{\partial u_l}{\partial t} \quad (3.5)$$

La divergence de (3.1) et la dérivée de (3.4) par rapport au temps nous donne :

$$\Delta p = -\rho \nabla \frac{\partial v}{\partial t} \quad ; \quad \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -k \frac{\partial}{\partial t} \nabla v \quad (3.6)$$

Ceci donne l'équation de propagation d'onde :

$$\Delta p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (3.7)$$

Le milieu est caractérisé par sa densité et son coefficient de compressibilité, le rapport de ces deux paramètres correspond au carré de la vitesse de propagation d'onde c .

$$c^2 = \frac{k}{\rho} \quad (3.8)$$

Et qui s'exprime dans le domaine des fréquences par :

$$\Delta p + \frac{\omega^2}{c^2} p = 0 \quad (3.9)$$

1.13 Condition aux limites

Afin de bien poser le problème mathématique on doit ajouter les conditions aux limites. En se référant à la figure 3.1, la frontière Γ_1 présente l'interface entre le fluide du réservoir et la structure rigide. Donc la condition nécessaire est :

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\rho \ddot{u}_n \quad (3.10)$$

Avec \ddot{u}_n la projection des accélérations sismiques sur la normale n de l'interface fluide-structure. Si cette interface est verticale, l'équation (3.10) sera comme suite :

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\partial p}{\partial x} = -\rho \ddot{u}_g \quad (3.11)$$

Où \ddot{u}_g est l'accélération sismique à la base de la structure.

Sur la frontière Γ_2 , les accélérations sismiques \ddot{u}_g , sont supposées horizontales. Donc, la condition imposée est donnée par :

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (3.12)$$

Sur la surface libre Γ_3 , la condition la plus simple consiste à prendre une pression atmosphérique nulle, et de négliger les ondes de surfaces.

$$p = 0 \quad (3.13)$$

La frontière Γ_∞ représente la limite artificielle sur laquelle le domaine fluide est tronqué. La condition convenable à introduire sur cette frontière est celle de Sommerfeld suivante :

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (3.14)$$

Pour résoudre le problème mathématique classique, on se réfère au système suivant pour l'inconnu p :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 & | \Omega \\ \frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\partial p}{\partial x} = -\rho \ddot{u}_g & | \Gamma_1 \\ \frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0 & | \Gamma_2 \\ p = 0 & | \Gamma_3 \\ \frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial p}{\partial t} & | \Gamma_\infty \end{array} \right. \quad (3.15)$$

Le problème variationnel associés au système (3.15) s'obtient en adoptant la formulation de type Galerkin et prenant comme fonction poids $w = \delta p$.

La forme variationnel forte s'écrit:

$$\int_{\Omega} w \Delta p d\Omega - \int_{\Omega} w \frac{1}{c^2} \ddot{p} d\Omega = 0 \quad (3.16)$$

Afin appliquer les conditions aux limites, on doit écrire (3.16) sous la forme faible suivante :

$$- \int_{\Omega} \nabla w \nabla p d\Omega - \int_{\Omega} w \frac{1}{c^2} \ddot{p} d\Omega + \int_{\Gamma} w \frac{\partial p}{\partial n} d\Gamma = 0 \quad (3.17)$$

Avec Ω domaine du fluide et Γ son contour.

En remplaçant l'intégrale sur le contour Γ par les différentes conditions qui correspondent à chaque frontière, on obtient :

$$\int_{\Omega} \nabla w \nabla p d\Omega + \int_{\Omega} w \frac{1}{c^2} \ddot{p} d\Omega + \int_{\Gamma_1} w \rho \ddot{u}_g d\Gamma + \int_{\Gamma_\infty} w \frac{1}{c} \dot{p} d\Gamma = 0 \quad (3.18)$$

1.14 Discrétisation spatiale par éléments finis

Le domaine géométrique du fluide est subdivisé en éléments isoparamétrique, la variable p est remplacée par des interpolations nodales entre les valeurs qu'elles prennent aux nœuds des éléments. La pression est approchée comme suit :

$$p \approx \sum_{i=1}^n N_{pi} p_i \quad ; \quad p = NP \quad (3.19)$$

Où n est le nombre de nœuds des éléments choisis pour la discrétisation de variable p , N vecteur ligne contenant les fonctions de forme, et P vecteur colonne contenant les valeurs de pressions aux nœuds des éléments.

L'opérateur de perturbation est :

$$w = \delta P^T N^T \quad (3.20)$$

L'opérateur de dérivation spatiale est :

$$\nabla p = dNP \quad (3.21)$$

Et les deux en même temps :

$$\nabla w = \delta P^T dN^T \quad (3.22)$$

En remplaçant les expressions (3.19), (3.20), (3.21) et (3.22) dans la forme faible variationnelle (3.18) on aura :

$$\int_{\Omega} N^T \frac{1}{c^2} N \dot{P} d\Omega + \int_{\Gamma_{\infty}} N^T \frac{1}{c} N \dot{P} d\Gamma + \int_{\Omega} dN^T dNP d\Omega = - \int_{\Gamma_1} \rho \ddot{u}_g N^T d\Gamma \quad (3.23)$$

Ou sous forme matricielle, dans le domaine des temps s'écrit :

$$[M]\{\ddot{P}\} + [C]\{\dot{P}\} + [K]\{P\} = \{F\} \quad (3.24)$$

Et dans le domaine des fréquences :

$$[-\omega^2[M] + i\omega[C] + [K]]\{\hat{P}\} = \{F\} \quad (3.25)$$

Avec

\hat{P} est la pression hydrodynamique dans l'espace de Fourier.

$$[M] = \int_{\Omega} N^T \frac{1}{c^2} N d\Omega \quad (3.26)$$

$$[C] = \int_{\Gamma_{\infty}} N^T \frac{1}{c} N d\Gamma \quad (3.27)$$

$$[K] = \int_{\Omega} dN^T dN d\Omega \quad (3.28)$$

$$\{F\} = -\rho \ddot{u}_g \int_{\Gamma_1} N^T d\Gamma \quad (3.29)$$

Dans lesquels M, C et K représentent respectivement les matrices masses, amortissement et rigidité du fluide qui quantifient l'énergie cinétique, l'énergie dissipée et l'énergie potentielle.

L'expression (3.27) est le résultat de discrétisation de la condition de Sommerfeld à la limite de troncature, et présente le seul effet de radiation et de dissipation d'énergie dans le fluide.

1.14.1 Traitement de la troncature géométrique par des éléments infinis

Dans le cas où la technique de couplage éléments finis-infinis est adoptée, on remplace le terme correspondant à la limite de troncature Γ_{∞} (l'amortisseur) par les deux matrices masse et rigidité du domaine infini du fluide. Les matrices totales masse et rigidité du système seront définies comme suit :

$$[M_T] = [M] + [M_{\infty}] \quad (3.30)$$

$$[K_T] = [K] + [K_{\infty}] \quad (3.31)$$

Avec

$$[M_{\infty}] = \int_{\Omega_{\infty}} V^T \frac{1}{c^2} V d\Omega \quad (3.32)$$

$$[K_{\infty}] = \int_{\Omega_{\infty}} dV^T dV d\Omega \quad (3.33)$$

V représente la fonction de forme d'éléments infinis et dV sa dérivée.

Dans ce cas le système à résoudre dans le domaine des temps est :

$$[M_T]\{\ddot{P}\} + [K_T]\{P\} = \{F\} \quad (3.34)$$

Dans le domaine des fréquences s'écrit comme suite :

$$[-\omega^2[M_T] + [K_T]]\{\hat{P}\} = \{F\} \quad (3.35)$$

1.15 Conclusion

La modélisation et la discrétisation d'une frontière absorbante à la limite de troncature conduit à une matrice d'amortissement non proportionnelle qui n'intervient pas dans l'analyse des vibrations libres, contrairement au traitement de la limite de troncature par les éléments infinis, où la radiation est considérée par les matrices masse et rigidité, et qui permettent d'inclure les effets radiatifs dans le problème des valeurs et vecteurs propres.

Application dans le cas d'un milieu fluide

1.16 Introduction

Ce chapitre comporte la partie pratique de notre travail. On commence tout d'abord par la validation des programmes de calcul, ensuite, on passera à d'autres applications concernant les réservoirs semi-infinis et d'examinés l'apport des éléments infinis périodiques [4,10].

1.17 Validation des programmes de calculs

Afin de valider nos programmes de calcul, on a pris l'exemple qui est représenté dans la figure 4.1 suivante :

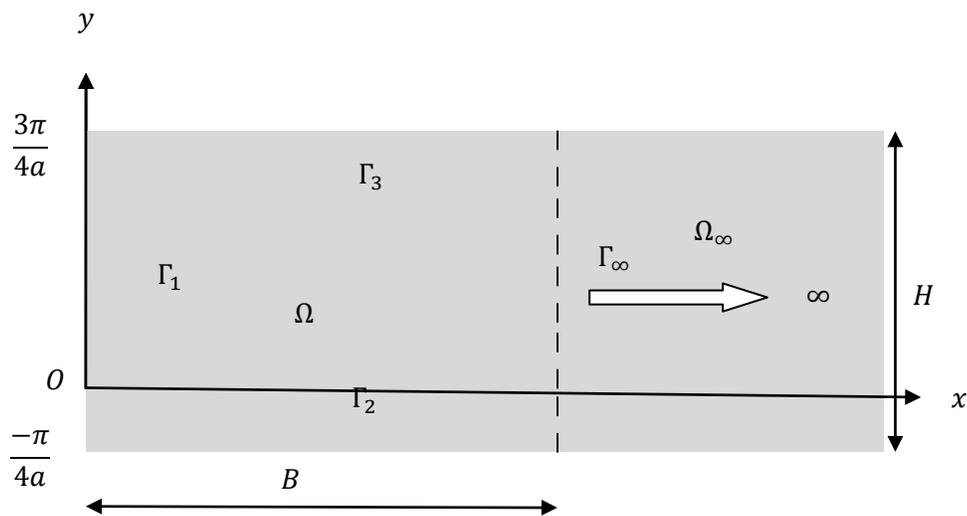


figure4.1: problème d'une plaque semi – infini

Dont lequel le problème mathématique à résoudre est le suivant :

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0 & |\Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \cos(ay) + \sin(ay) & |\Gamma_1 \\ u = 0 & |\Gamma_2 \\ u = 0 & |\Gamma_3 \end{cases} \quad (4.1)$$

La solution analytique qui servie pour la comparaison est :
 $u_e = e^{-x} * (\cos(ay) + \sin(ay))$,

Avec $a = \sqrt{k^2 + 1}$ et k est le nombre d'onde.

Dans cet exemple, trois modes de traitement de la limite fictive sont considérés, le premier est de supposée une limite libre sans condition (EF). Le deuxième et le troisième est d'introduire les éléments infinis classiques (EIC) et périodiques (EIP), afin de représenté la partie tronqué du domaine. Dans le premier temps, on a tronqué le domaine à une distance $B = 0.2H$ ensuite à une distance un peut loin de l'origine $B = H$, et on à tracé sur les figure 4.2 et 4.3 la solution analytique u_e sur les bords gauche et droite de la plaque.

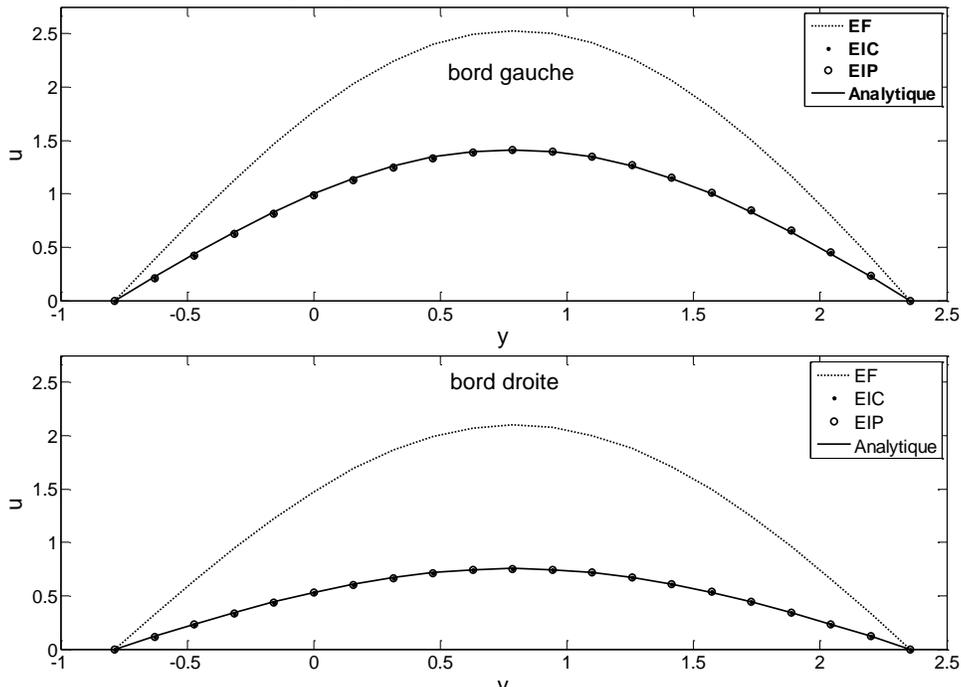


figure 4.2: solution u sur les bord gauche et droite de la plaque pour $B = 0.2H$

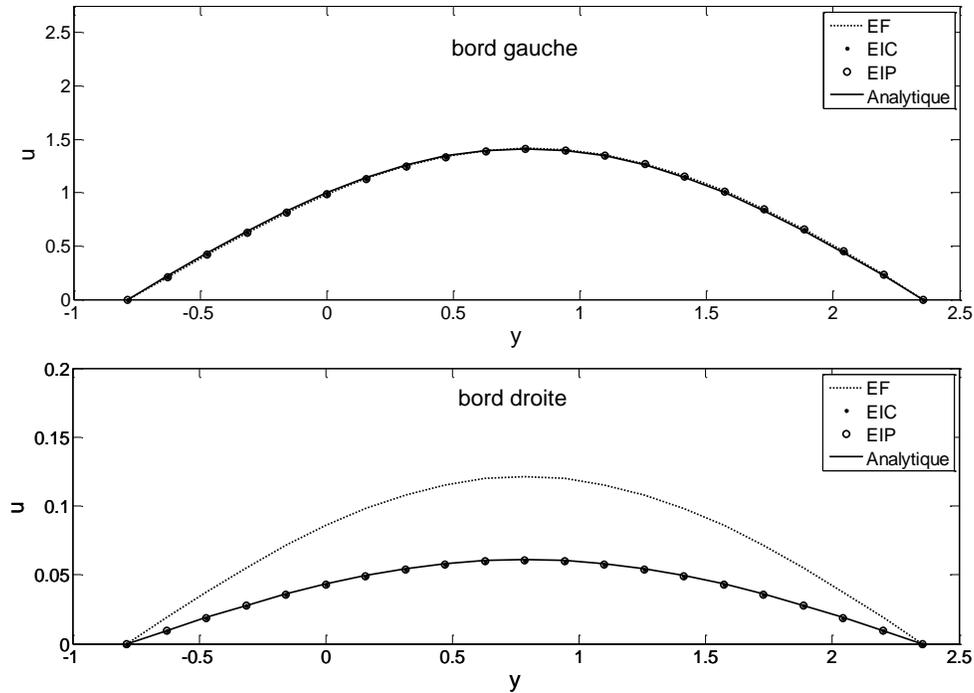


figure 4.3: solution u sur les bords gauche et droite de la plaque pour $B = H$

En analysant les figures 4.2 et 4.3, on remarque que le model EF ne converge pas à la solution analytique et cela revient à la limite de troncature qui est supposée libre sans condition, par contre, les modes EIC et EIP coïncident parfaitement avec la solution analytique et cela pour les deux positions de B choisis. Ces figures montrent bien, d'une part, l'efficacité des éléments infinis soit classiques où périodiques dans la prise en compte de la partie infinie qui est tronquée, et d'autre part, la validité de nos programmes de calcul élaborés dans le cadre de ce mémoire.

1.18 Application aux cas d'un réservoir semi-infini

Dans ce qui suit, on propose d'étudier un réservoir de hauteur $H = 100\text{m}$ et de longueur assez loin pour être supposée infinie et qui est tronqué à une distance B de l'interface fluide-structure. Le fluide de réservoir est décrit par le champ de pressions hydrodynamique et les sollicitations considérées sont des accélérations harmoniques d'amplitude égale à l'unité, exercée directement sur le fluide par le monolithe de la structure. Les caractéristiques mécaniques du fluide tels que la masse volumique et la vitesse de propagation de ondes sont fixées respectivement à $\rho = 1000\text{ kg/m}^3$ et $c = 1440\text{ m/s}$. Les résultats trouvés seront exprimés par le coefficient de pression hydrodynamique $c_{p=p/\rho g H}$, et comparés à la solution

analytique citée par les références suivantes [5,11], dans l'expression de c_p les paramètres ρ, g, H représentent respectivement la masse volumique du fluide, l'accélération de la gravité et la hauteur du réservoir.

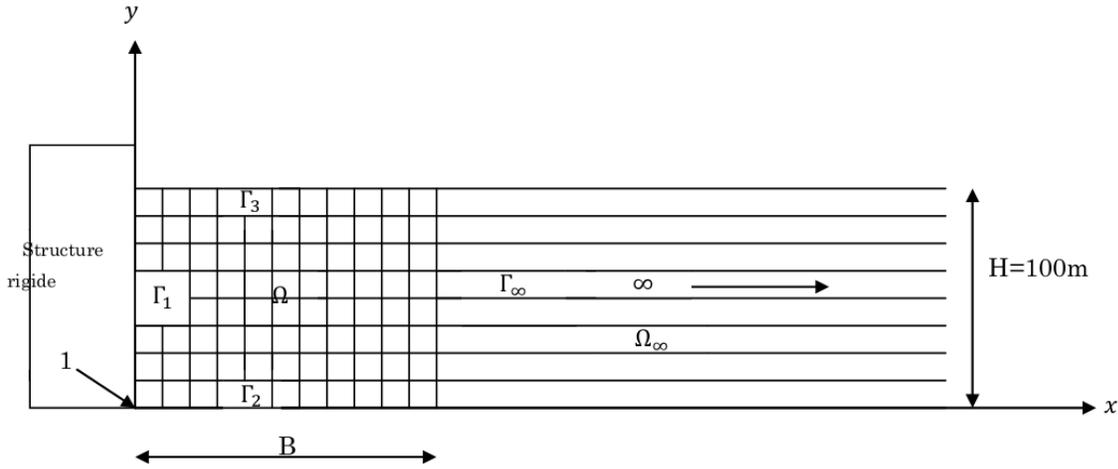


figure4.4 : maillage du reservoir.

Comme première application on a fixé la position de la limite de troncature à $B = 0.2H$ ensuite a $B = H$. La pulsation d'excitation dans ce cas est prise égale à $\omega = 0.5\omega_0$, tel que ω_0 est la pulsation fondamentale propre au système qui est donnée par ω_0 qui est donnée par $\omega_0 = \frac{\pi * c}{2 * H}$ [5]. Pour les deux positions de la limite de troncature, on a tracé sur la figure 4.5a et 4.5b la distribution de c_p sur l'interface fluide-structure.

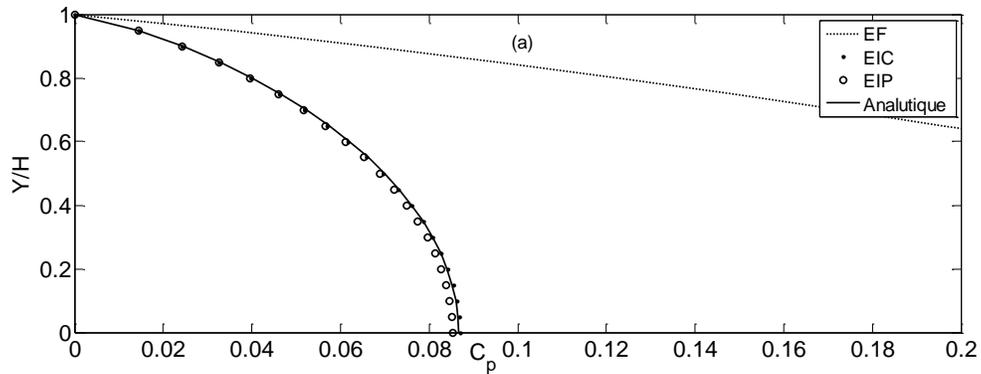


figure (4.5a): distribution de C_p sur l'inteface $B = 0.2H$.

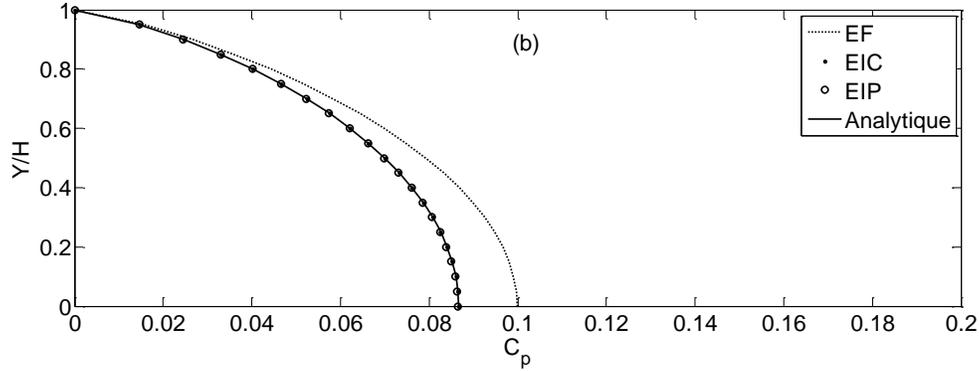


figure (4.5b): distribution de C_p sur l'interface $B = H$.

D'après les figures 4.5a et 4.5b, on remarque que le modèle EF fournit des résultats qui diffèrent trop de la solution analytique. Et cet écart est diminué lorsque on a pris $B = H$ comparativement à l'interface $B = 0.2H$. Par contre les modèles EIC et EIP qui fournissent des résultats semblables à la solution analytique car ils tiennent compte de la troncature du domaine.

Afin de confirmer les remarques qu'on vient de dire, on a tracé sur la figure 4.6 la variation de C_p en fonction de la position de la limite de troncature B enregistré sur le point le plus bas de l'interface fluide-structure.

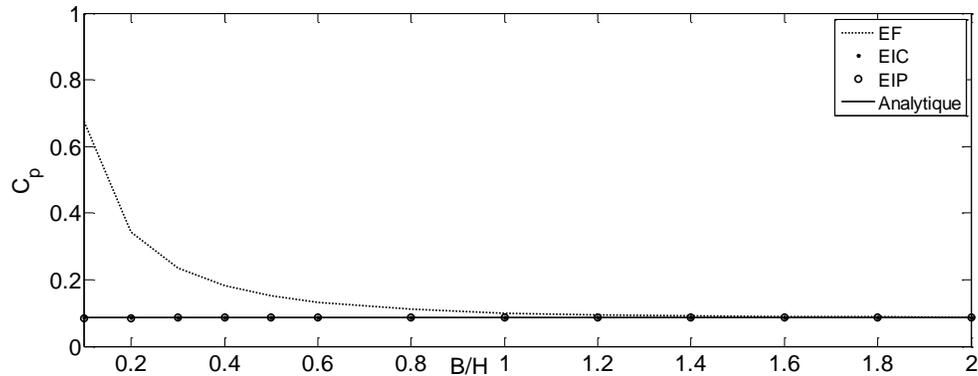


figure 4.6: variation de C_p en fonction du positionnement de la limite de troncature B

A travers cette figure on remarque que quelque soit la position de la limite de troncature, les modèles EIC et EIP fournissent toujours de bons résultats, qui se convergent à la solution analytique, par contre le modèle EF, la convergence ne peut

être observée que pour des positions de la limite troncature B supérieur à $1.4H$ ($B \geq 1.4H$), ce qui fait d'augmenté la taille de maillage et d'alourdir les calculs.

Il est a noter que les remarques qu'on vient de souligner restent valable uniquement pour une pulsation d'excitation $\omega = 0.5\omega_0$.

Pour la généralisation, on préfère de refaire les même applications précédents mais pour une pulsation d'excitation $\omega = 1.5\omega_0$.

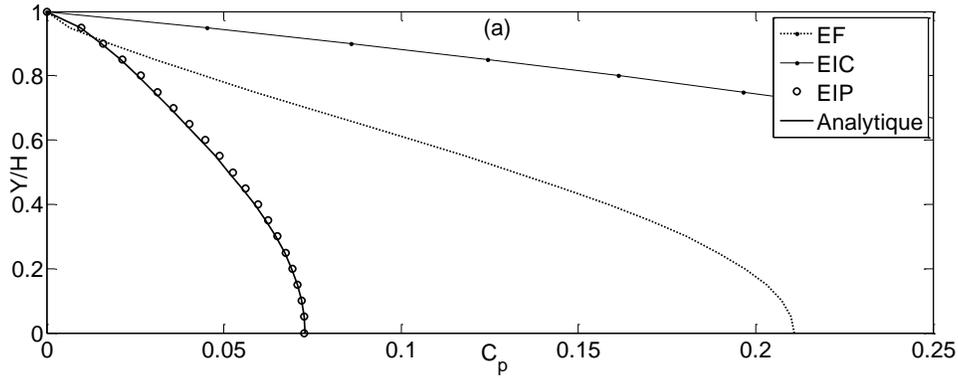


figure (4.7a): distribution de C_p sur l'inteface $B = 0.2H$.

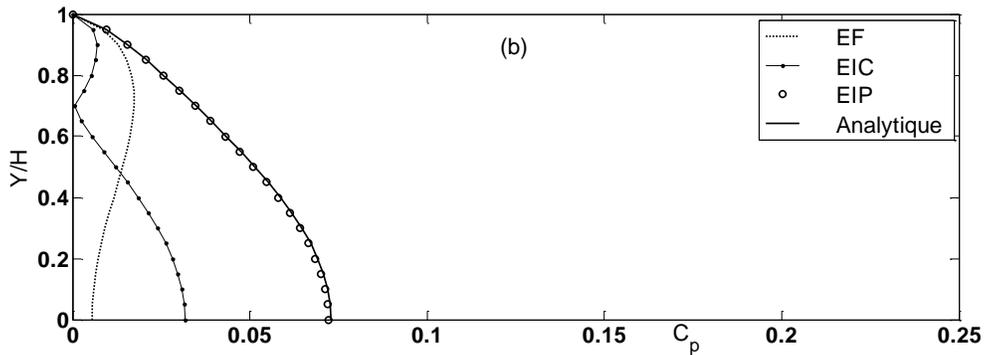


figure (4.7b): distribution de C_p sur l'inteface $B = H$.

Pour $\omega = 1.5\omega_0$, on remarque que les modèles EF et EIC sont fortement sensible au positionnement de la limite de troncature ce qui induit une instabilité et une divergence des résultats. Par contre les éléments infinis périodiques (EIP) fournissent de très bons résultats qui coïncident parfaitement à la solution

analytique, cela montre l'efficacité des éléments infinis périodique.

Dans le but d'étudier l'influence de la pulsation d'excitation, on trace sur la figure 4.8 et 4.9 la variation de C_p en fonction de ω et cela pour les deux positions de la limite de troncature $B = 0.5H$ et $B = 3H$.

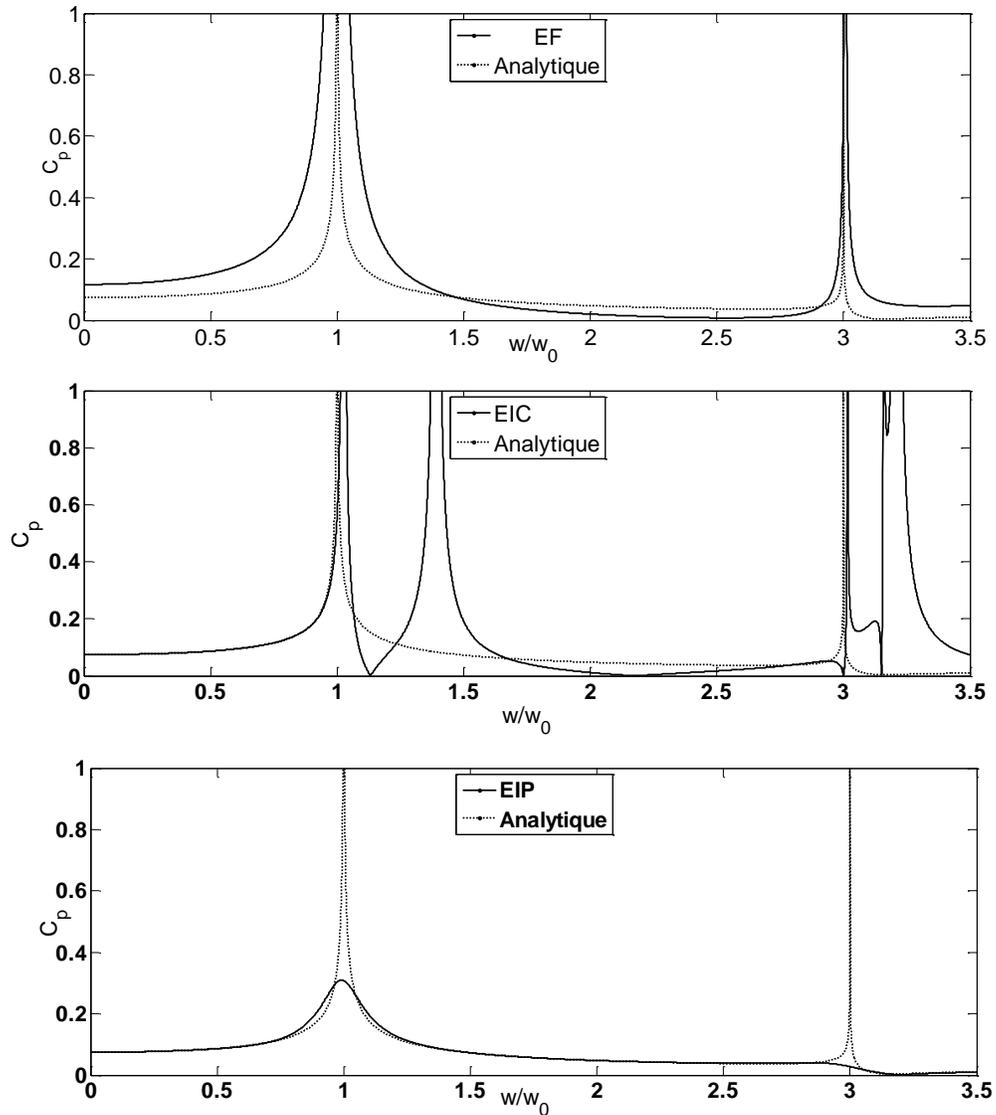


figure4.8: variation de C_p en fonction de ω pour $B = 0.5H$.

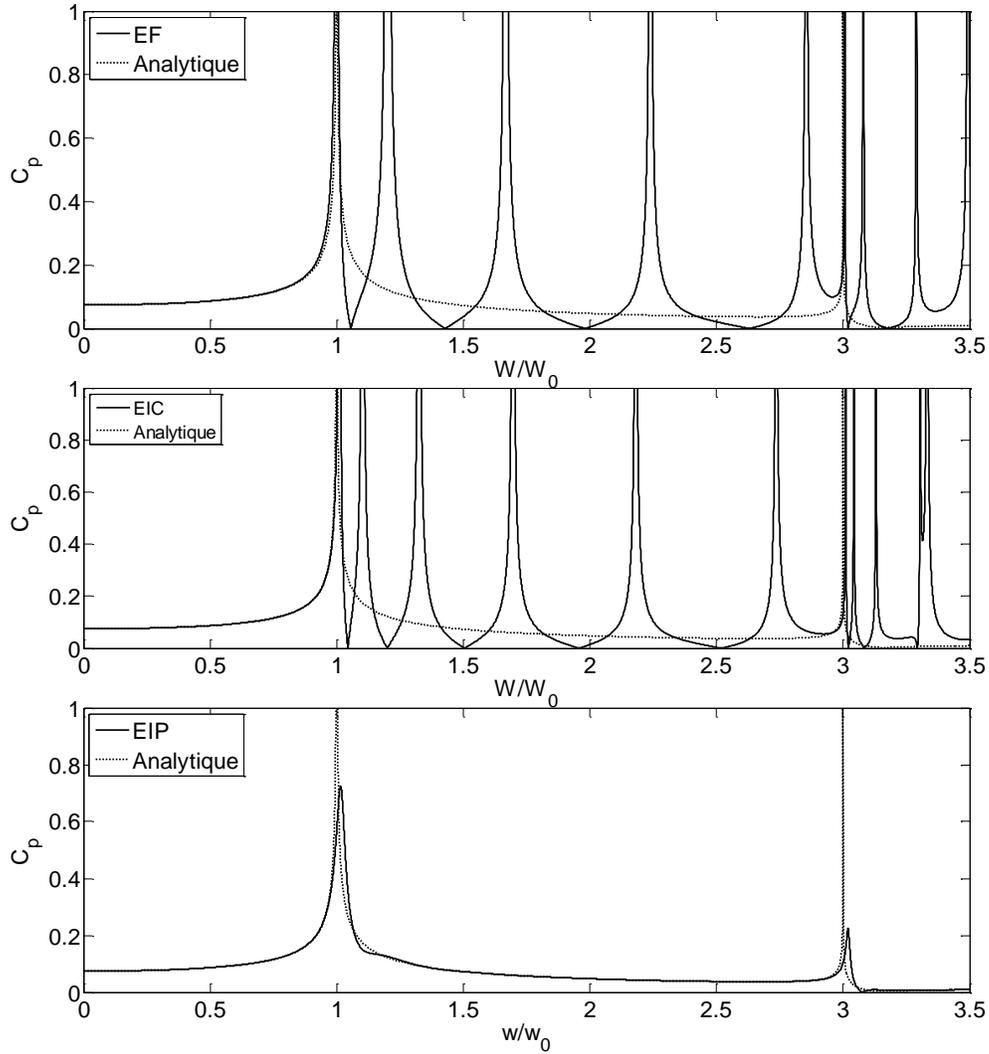


figure4.8: variation de C_p en fonction de ω pour $B = 3H$.

Dans ces figures, on remarque que pour EF et EIC à chaque fois que la position de B s'éloigne de l'interface fluide-structure, on constate la remonté des modes supérieur qui perturbent la solution recherché. Car ces modes de traitements sont très sensibles à la position de troncature B qui influe sur les périodes propres obtenues par ces deux modèles numériques. Par contre quelque soit la position de la limite de troncature B et quelque soit la pulsation d'excitation les EIP fournissent toujours de très bons résultats.

1.19 Conclusion

L'utilisation des éléments infinis périodique dans le cas des réservoirs semi-infinis comportant des fluides compressible, conduit à des résultats satisfaisant même pour des positions de B très proche de l'interface fluide-structure. Cela nous permet de modéliser économiquement le domaine d'étude et qui nous permet aussi des gains importants du temps de calcul.

Conclusion générale

Ce modeste travail a fait l'objet d'un mémoire de fin d'étude, sur l'utilisation des éléments infinis périodiques dans un milieu fluide semi-infini. La réalisation de ce travail nous a permis d'une part de s'initier au calcul numérique, et d'autre part, d'avoir une idée sur les paramètres qui influent sur l'étude des domaines non bornés notamment la position de la limite de troncature et la fréquence d'excitation.

En réalisant ce mémoire, on a tiré les conclusions suivantes :

- L'utilisation des éléments infinis périodiques ou classiques permet d'une part de modéliser économiquement le domaine d'étude, et d'autre part, d'éviter l'insertion des frontières absorbantes ou des éléments absorbants à la limite de troncature.
- L'introduction des éléments infinis dans un programme de calcul par élément fini permet d'accélérer la convergence de la solution recherchée, ainsi que de positionner la limite de troncature à une distance très proche de l'origine, cela nous permet de réduire la taille de maillage et des gains importants du temps de calcul.
- Quant il s'agit d'un problème de propagation d'ondes en domaines ouverts, les éléments infinis classiques sont mal adaptés à ce genre de problème, il est préférable donc d'utiliser les éléments infinis périodiques qui tiennent compte toujours de la décroissance d'amplitude des ondes en champ lointain.
- Les éléments infinis périodiques sont plus adaptés aux problèmes faisant intervenir la propagation d'ondes en domaines non bornés.

Bibliographie

- [1] Abdel-fattah, T.T., Hodlhod, H. A and Akl, A.Y. «A novel formulation of infinite elements for static analysis »
- [2] Adjissa,K,Izem.Y. calcul des tassements instantanés et différés des sols sous fondations sous fondations par couplage éléments finis-infinis» ingénieures d'état
- [3] Basu,U.& Chopra, A.K. «perfectly matched layers for time_harmonic elastodynamics of unbounded domains : theory and finite_element implementation »,comput methods Appl Mech Engrg,192(11-12)(2003)1337-1375.
- [4] Betess .P. «infinite elements »Penshaw Press, 1992.
- [5] Bourouba,A «Traitement des conditions aux limites de troncatures des milieux non bornés en dynamique des structure» thèse de magister. département de génie civil, université de A. Mira de Bejaia
- [6] Khani, M.H.B.M. «Dynamic soil-structure interaction analysis using the scaled boundary finite element methode », Phd, the university of new South Wales Sydney, Australien, 2007.
- [7] Liu, G.R and Quek, S.S. «the finite element method : A Pratical course»,Betterworth-Heinemann.
- [8] Nguyen, V.H. «comportement dynamique de structure non linéaires soumises à des charges mobiles », thèse de doctorale, école Nationale des ponts est chaussées, France, 2002.
- [9] Seghir.A ,tahakourt,A,«Analyse dynamique des systèmes barrage-réservoir avec couplage éléments finis-éléments infinis» ,département de génie civil,LTMGP. université d'A. Mira de Bejaia, 2007.
- [10] Seghir,A «contribution à la modélisation numérique de la réponse sismique des ouvrages avec interaction sol-structure et interaction fluide-structure» thèse de doctorat, paris- Est.
- [11] Weber, B. «Rational transmitting boundaries for time-domain analysis of dam-reservoir interaction »,D thesis, Swiss Federal Institue of technology(ETH),Zurich,1994.Diss,10673.
- [12] Zienkiewicz, O.M. and Taylor, R.L. «the finite element method, volume 1 : the basis» Butterworth-Heinerman, 5th edition, 2000.

- [13] Zienkiewicz, O.M. and Taylor, R.L. «the finite element method, volume 3 :fluid dynamics »
Butterworth-Heinemann, 5th edition,2000