

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université A. MIRA de Béjaïa  
Faculté des Sciences Exactes  
Département des Mathématiques

# Mémoire

Présenté par Mr. Abdelli Nassim  
En vue de l'obtention du diplôme de Master II en  
mathématiques

Option : Analyse et probabilité

## Thème

---

Une étude de la dynamique  
du modèle de Ricker

---

Soutenu publiquement devant le jury suivant :

Président	Mr N. MEHIDI
Examineur	Mme A. BOULKROUNE
Promoteur	Mr N. AKROUNE

promotion 2011

A mes très chers parents . . .

# Remerciements

Je tiens à exprimer ma gratitude à Mr N. AKROUNE, pour leurs confiance et pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant de diriger ce travail.

Je remercie Mr N. MEHIDI , pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider le jury de soutenance. Qu'il veuille agréer l'expression de ma haute considération.

Que Madame A. BOULKROUNE, puissent trouver ici l'expression de ma profonde gratitude pour l'honneur qu'ils me font, en acceptant de juger ce travail.

Enfin, je tiens à remercier toutes les personnes qu'ont contribué à la réalisation de ce travail du loin et du pré.

---

# Table des matières

---

<b>Introduction</b>	<b>6</b>
<b>1 Méthode du point fixe</b>	<b>7</b>
1.1 Existence et unicité du point fixe . . . . .	8
1.2 Convergence de la méthode des points fixes . . . . .	9
1.2.1 Points fixes attractifs et répulsifs . . . . .	10
1.3 Bassin d'attraction . . . . .	17
<b>2 Systèmes dynamiques et chaos</b>	<b>19</b>
2.1 Définitions et notations . . . . .	19
2.1.1 Définition mathématique d'un système dynamique . . . . .	19
2.1.2 Les différents types de flots de système dynamique . . . . .	20
2.2 Systèmes dynamiques discrets . . . . .	21
2.2.1 Systèmes dynamiques discrets . . . . .	21
2.2.2 Notion d'orbites (ou trajectoire) . . . . .	22
2.2.3 Représentation graphique de l'orbite de $x_0$ . . . . .	22
2.2.4 Points fixes . . . . .	23
2.2.5 Points périodiques et p-cycles . . . . .	23
2.2.6 Etude de stabilité . . . . .	24
2.2.7 Stabilité du point fixe . . . . .	24
2.2.8 Stabilité des points périodiques . . . . .	25
2.3 Conjugaison topologique . . . . .	26
2.3.1 Interêt de la conjugaison topologique . . . . .	26
2.4 Bifurcation . . . . .	27
2.4.1 Bifurcation nœud-col . . . . .	28
2.4.2 Bifurcation fourche . . . . .	30
2.4.3 Bifurcation transcritique . . . . .	31
2.4.4 Bifurcation dédoublement de période . . . . .	33
2.5 Théorie du chaos . . . . .	35
2.5.1 Les orbites denses . . . . .	35
2.5.2 Chaos, sensibilité et densité des points périodiques . . . . .	36
2.5.3 Routes vers le chaos . . . . .	36

2.5.4	Exemples de systèmes dynamiques chaotiques . . . . .	37
2.5.5	Etude de L'application logistique . . . . .	37
2.5.6	Diagramme de bifurcation . . . . .	41
2.5.7	La constante de Feigenbaum . . . . .	41
<b>3</b>	<b>Le Modèle de Ricker</b>	<b>43</b>
3.1	Historique . . . . .	43
3.2	Reformulation . . . . .	44
3.3	Propriété du modèle . . . . .	45
3.3.1	Recherche et nature des points fixes de $f_\alpha$ . . . . .	46
3.4	Zones des cycles d'ordre $2^n$ . . . . .	49
3.5	Diagramme de bifurcation . . . . .	54
3.6	Fenêtres périodiques . . . . .	56
	<b>Conclusion</b>	<b>57</b>
	<b>BIBLIOGRAPHIE</b>	<b>59</b>

---

# Introduction

---

La modélisation en biologie, et plus précisément en dynamique des populations, a débuté tardivement comparée à la modélisation en sciences physiques. Les raisons d'un tel retard s'expliquent par la complexité à quantifier les observations biologiques et par la grande variabilité des réponses à une même cause. Chaque population faisant partie d'un écosystème interagit avec un milieu mais également avec d'autres populations par le biais de la compétition de la symbiose ou d'une relation trophique. La modélisation doit donc trouver un compromis entre la complexité des phénomènes biologiques observés et les modèles mathématiques exploitables afin de mettre en évidence des mécanismes importants et généraux, et apporter des éléments de réponse cohérents aux problèmes d'écologie.

La démographie des populations humaines et animales a toujours fasciné les biologistes, le premier modèle mathématique a été introduit en 1798 par **Maltus** pour décrire la dynamique de la population américaine, ce modèle n'est pas réaliste car il ne décrit pas la saturation de l'environnement (aucune force extérieure n'intervient). En 1838, le mathématicien belge **pierre Verhulst** propose le modèle logistique : un paramètre  $K$ , appelé capacité biotique, est intégré dans ce modèle de croissance afin de décrire cette capacité d'accueil de l'environnement. En halieutique, les modèles de densités les plus utilisés sont ceux mis au point par **Beverton-Holt** et **Ricker**. Le premier a repris l'équation de Verhulst alors que le second donne plus d'importance aux mécanismes de prédation et de cannibalisme. Nous avons choisi le modèle de Ricker car la régulation qu'il assure est beaucoup plus forte.

Les systèmes dynamiques désignent couramment la branche de recherche active des mathématiques, à la frontière de la topologie, de l'analyse, de la géométrie, de la théorie de la mesure et des probabilités. Les systèmes dynamiques n'ont été étudiés en tant que tels qu'assez tardivement. Ils sont néanmoins apparus assez tôt dans l'histoire scientifique puisqu'on peut les reconnaître dans les premiers travaux de la mécanique donnant lieu à des équations différentielles.

Ainsi historiquement, les premières questions relevant des systèmes dynamiques concernaient la mécanique à une époque où elle était incluse dans l'enseignement des mathématiques. Une des questions majeures qui a motivé la recherche mathématique est le problème de la stabilité du système solaire. Les travaux de **Lagrange** sur le sujet consistèrent à interpréter l'influence des corps autres que le Soleil sur une planète comme une succession de chocs infinitésimaux : ces travaux retrouvent des échos dans le théorème dit de KAM

(Kolmogorov-Arnold-Moser).

Les systèmes dynamiques se sont développés et spécialisés au cours du *XIXe* siècle. En effet, vers la fin de ce siècle le mathématicien, physicien et philosophe français **Henri Poincaré** avait déjà mis en évidence le phénomène de **sensibilité aux conditions initiales** lors de l'étude astronomique du problème des trois corps (soleil, terre, lune).

Toujours au **XIXe** siècle, le mathématicien russe **Alexandre Lyapunov** effectue des recherches sur la stabilité du mouvement. Il introduit l'idée de mesurer l'écart entre deux trajectoires ayant des conditions initiales voisines ; lorsque cet écart évolue exponentiellement, on parle de sensibilité aux conditions initiales.

En 1963 ; le météorologue **Edward Lorenz** expérimentait une méthode lui permettant de prévoir les phénomènes météorologiques. C'est par pur hasard qu'il observa qu'une modification minimale des données initiales pouvait changer de manière considérable ses résultats. Lorenz venait de mettre en évidence le phénomène de sensibilité aux conditions initiales. Les systèmes répondant à cette propriété seront, à partir de 1975, dénommés systèmes chaotiques. C'est donc au cours des années soixante dix que la théorie du chaos a pris son essor. Evidemment, les travaux des prédécesseurs de Lorenz ont donc été très importants pour la compréhension du chaos, mais il faut souligner que ce qui va permettre aux scientifiques une compréhension plus accrue des systèmes chaotiques c'est l'ordinateur. En effet, les systèmes régissant un comportement chaotique sont nécessairement non linéaires et, sans ordinateur, leur résolution est en général impossible.

Nous consacrerons la première partie de notre travail à la présentation de la méthode du point fixe.

Dans le deuxième chapitre nous donnons des définitions relatives aux systèmes dynamiques discrets. Nous développons particulièrement des concepts liés à la dynamique chaotique et à la bifurcation en illustrant ces notions par des exemples. L'observation la succession des bifurcations permet de comprendre les mécanismes qui peuvent conduire à l'apparition du chaos.

Le dernier chapitre est consacré à l'application de la théorie du Chaos au modèle de W. Ricker. L'outil mathématique manque (concernant ce modèle), on aura recours à l'ordinateur. Pour cela, on a élaboré deux programmes écrits sous Matlab, le premier pour approcher les valeurs de bifurcation successives, alors que le deuxième nous a permis de visualiser le diagramme de bifurcation.

# Chapitre 1

---

## Méthode du point fixe

---

Une méthode du point fixe pour résoudre numériquement  $g(x) = 0$  consiste, dans une première phase, à transformer le problème  $g(x) = 0$  en un problème équivalent du type

$$f(x) = x$$

Clairement, il existe une infinité de manières pour opérer cette transformation. Par exemple, on prend  $f(x) = x - g(x)$  où plus généralement  $f(x) = x - \alpha g(x)$  avec  $\alpha \in \mathbb{R}^*$  quelconque.

**Définition 1.** *Un point fixe d'une fonction  $f(x)$  est une valeur de  $x$  qui reste invariante pour cette fonction. c'est-à-dire toute solution de :*

$$x = f(x)$$

*est un point fixe de la fonction  $f(x)$ .*

Du point de vue géométrique, un point fixe  $x^*$  de  $f$  est l'abscisse du point d'intersection du graphe de  $f$  avec la droite  $y = x$ .

Il existe un algorithme très simple permettant de déterminer les points fixes. Il suffit d'effectuer des itérations de la façon suivante :

$$\begin{cases} x_0 & \text{quelconque} \\ x_{n+1} & = f(x_n) \end{cases}$$

A partir d'une valeur estimée initiale  $x_0$ . L'algorithme est le suivant :

- 1-étant donné  $\epsilon$ , un critère d'arrêt.
- 2-étant donné  $N$ , le nombre maximal d'itérations.
- 3-étant donné  $x_0$ , une valeur estimée initiale du point fixe.
- 4-effectuer  $x_{n+1} = f(x_n)$
- 5-si  $\frac{|x_{n+1} - x_n|}{|x_{n+1}|} < \epsilon$  :

- convergence atteinte
- écrire la solution  $x_{n+1}$
- arrêt
- 6-si le nombre maximal d'itérations  $N$  est atteint :
- convergence non atteinte en  $N$  itérations.
- arrêt.

Naturellement cette méthode n'est pas forcément convergente. Par contre, si elle converge, c'est-à-dire si la suite  $(x_n)$  a une limite que nous notons  $x^*$ , et si  $f$  est continue, alors cette limite est nécessairement un point fixe de  $f$  puisque :

$$x^* = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(x^*)$$

## 1.1 Existence et unicité du point fixe

**Définition 2.** Soit  $(E, d)$  un espace métrique complet et  $f : E \rightarrow E$  une application continue. On dit que  $f$  est contractante si  $f$  est lipchitzienne de rapport  $k < 1$ , c'est-à-dire s'il existe  $k < 1$  tel que :

$$\forall x, y \in E, \quad d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$$

Remarquons que si  $f$  est contractante alors elle est nécessairement continue.

### **Théorème 1.**

Soit  $f : E \rightarrow E$  une application contractante d'un espace métrique complet dans lui-même. Alors  $f$  admet un point fixe unique  $x^* \in E$ . De plus, pour tout point initial  $x_0 \in E$ , la suite itérée  $(x_n)$  définie par  $x_{n+1} = f(x_n)$  converge vers  $x^*$ .

#### **Preuve    Unicité du point fixe**

Si  $f$  avait deux points fixes  $x_0^* \neq x_1^*$ , alors  $d(f(x_0^*), f(x_1^*)) = d(x_0^*, x_1^*)$  et  $d(x_0^*, x_1^*) \neq 0$ , donc  $f$  ne pourrait être contractante, contradiction.

#### **Existence du point fixe**

Soit  $x_0 \in E$  un point initial quelconque et  $(x_n)$  la suite itérée associée. On a alors

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(f(x_{n-1}), f(x_n)) \leq kd(x_{n-1}, x_n)$$

d'où par récurrence  $d(x_n, x_{n+1}) \leq k^n d(x_0, x_1)$ . Pour tout entier  $q > n$  il vient

$$d(x_n, x_q) \leq \sum_{l=n}^{q-1} d(x_l, x_{l+1}) \leq \left( \sum_{l=n}^{q-1} k^l \right) d(x_0, x_1)$$

avec

$$\sum_{l=n}^{q-1} k^l \leq \sum_{l=n}^{\infty} k^l = \frac{k^n}{1-k}$$

On a donc

$$d(x_n, x_q) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1), \quad \forall n < q$$

ce qui montre que  $(x_n)$  est une suite de Cauchy. Comme  $(E, d)$  est complet, la suite  $(x_n)$  converge vers un point limite  $x^* \in E$ . L'égalité  $x_{n+1} = f(x_n)$  et la continuité de  $f$  impliquent à la limite, que  $x^* = f(x^*)$ .

**Généralisation**

– *Le théorème précédent reste entièrement valable si on remplace l'hypothèse que  $f$  est contractante par l'hypothèse que  $f$  est continue et qu'il existe une certaine itérée  $f^m = f \circ f \circ \dots \circ f$  qui soit contractante.*

En effet, dans ce cas, l'hypothèse que  $f^m$  soit contractante implique que  $f^m$  admet un unique point fixe  $x^*$ . On a donc  $f^m(x^*) = x^*$  et en appliquant  $f$  à cette égalité on trouve

$$f^m(f(x^*)) = f^{m+1}(x^*) = f(f^m(x^*)) = f(x^*).$$

de sorte que  $f(x^*)$  est encore un point fixe de  $f^m$ . L'unicité du point fixe de  $f^m$  entraîne  $f(x^*) = x^*$ . Par ailleurs, comme tout point fixe de  $f$  est aussi un point fixe de  $f^m$ , ce point fixe est nécessairement unique. Enfin, pour tout point initial  $x_0$ , la sous-suite  $x_{mn} = f^{mn}(x_0) = (f^m)^n(x_0)$  (correspondant aux indices multiples de  $m$ ) converge vers  $x^*$ . Il en résulte que  $x_{mp+r} = f^r(x_{mp})$  converge aussi vers  $f^r(x^*) = x^*$  pour  $r = 0, 1, \dots, m-1$ , et on en déduit que  $\lim_{q \rightarrow \infty} x_q = x^*$ .

## 1.2 Convergence de la méthode des points fixes

Nous nous intéressons dans cette section au comportement de la méthode des points fixes.

Soit  $x^*$  le point fixe de  $f$  c'est-à-dire :

$$f(x) = x$$

on définit l'erreur à l'étape  $n$  comme étant :

$$e_n = x_n - x^* \tag{1.1}$$

On cherche à déterminer sous quelles conditions l'algorithme des points fixes converge vers  $x^*$ . Ce sera bien le cas si l'erreur  $e_n$  tend vers 0 lorsque  $n$  devient grand. Il est intéressant de suivre le comportement de l'erreur au fil des itérations. En vertu de 1.1 on a :

$$e_{n+1} = x_{n+1} - x^* = f(x_n) - f(x^*) \tag{1.2}$$

On constate aisément que :

$$x_n = x^* + (x_n - x^*) = x^* + e_n$$

et on peut alors utiliser un développement de Taylor de la fonction  $f(x)$  au voisinage de  $x^*$ . La relation 1.2 devient alors :

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= f(x^* + e_n) - f(x^*) \\ &= (f(x^* + f'(x^*)e_n + \frac{f''(x^*)}{2}e_n^2 + \frac{f'''(x^*)}{6}e_n^3 + \dots) - f(x^*) \end{aligned}$$

On en conclut que :

$$e_{n+1} = f'(x^*)e_n + \frac{f''(x^*)}{2}e_n^2 + \frac{f'''(x^*)}{6}e_n^3 + \dots \quad (1.3)$$

L'étude de la relation 1.3 est fondamentale pour la compréhension des méthodes de points fixes. Au voisinage de  $x^*$ , le premier terme non nul de l'expression de droite sera déterminant pour la convergence.

Selon l'équation 1.3, si  $f'(x^*) \neq 0$  et si on néglige les termes d'ordres supérieurs ou égaux à 2 en  $e_n$ , on a :

$$e_{n+1} \simeq f'(x^*)e_n \quad (1.4)$$

On voit que l'erreur à l'étape  $(n+1)$  est directement proportionnelle à l'erreur à l'étape  $n$ , l'erreur ne pourra donc diminuer que si :

$$|f'(x^*)| < 1 \quad (1.5)$$

La condition 1.5 est une condition nécessaire de convergence d'une méthode du point fixe. On remarque également que le signe de  $f'(x^*)$  a une influence sur la convergence. En effet, si :

$$-1 < f'(x^*) < 0$$

L'erreur changera de signe à chaque itération et les valeurs de  $x_n$  oscilleront de part et d'autre de  $x^*$ . La convergence n'en sera pas moins assurée.

La relation 1.4 donne la vitesse à laquelle l'erreur diminue. En effet, plus  $f'(x^*)$  est petit, plus l'erreur diminue vite et donc plus la convergence est rapide, et la méthode, dans ce cas, est à convergence linéaire.

### 1.2.1 Points fixes attractifs et répulsifs

Notre objectif est ici d'étudier le comportement itératif d'une fonction au voisinage de ses points fixes. Soit  $I$  un intervalle fermé de  $\mathbb{R}$  et  $f : I \rightarrow I$  une application de classe  $C^1$ .

Pour  $x^*$  un point fixe de  $f$ , on peut distinguer trois cas :

1)  $|f'(x^*)| < 1$

Soit  $k$  tel que  $|f'(x^*)| < k < 1$ . Par continuité de  $f'$ , il existe un intervalle  $J = [x^* - \epsilon, x^* + \epsilon]$  sur lequel  $f' < k$ , donc  $f$  est contractante de rapport  $k$  sur  $J$  on a nécessairement  $f(J) \subset J$  et par conséquent :

$$\forall x_0 \in J, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$$

On dit que  $x^*$  est un *point fixe attractif*. Dans ce cas, la convergence de la suite  $(x_n)$  est au moins exponentiellement rapide :

$$|x_n - x^*| \leq k^n |x_0 - x^*|$$

**Définition 3.**

Le point fixe  $x^*$  est attractif si :

$$\exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall x_0 \in ]x^* - \delta, x^* + \delta[ \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x^*$$

où  $x_n = f^n(x_0)$ .

**Théorème 2.**

Soit  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$  de classe  $C^1$ . On suppose que  $f$  admet un unique point fixe  $x^* \in [a, b]$  vérifiant  $|f'(x^*)| < 1$ , Alors il existe un voisinage  $V_{x^*}$  de  $x^*$  dans  $[a, b]$  tel que la suite  $(x_n)$  définie par :

$$\begin{cases} x_0 \in V_{x^*} \\ x_{n+1} = f(x_n), \quad \forall n \geq 0 \end{cases}$$

converge vers  $x^*$ .

Le réel  $x^*$  dans ce cas est appelé *point fixe Attractif*

**Cas particulier**  $f'(x^*) = 0$

Supposons de plus que  $f$  est de classe  $C^2$  et que  $|f''| \leq M$  sur  $J$ . La formule de Taylor donne :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x^*) + (x - x^*)f'(x^*) + \frac{(x - x^*)^2}{2} f''(c) \\ &= x^* + \frac{1}{2} f''(c)(x - x^*)^2, \quad c \in ]x^*, x[ \end{aligned}$$

d'où  $|f(x) - x^*| \leq \frac{1}{2} M |x - x^*|^2$ , soit encore :

$$\frac{1}{2} M |f(x) - x^*| \leq \left(\frac{1}{2} M |x - x^*|\right)^2$$

Par récurrence, on déduit :

$$|x_n - x^*| \leq \frac{2}{M} \left(\frac{1}{2} M |x_0 - x^*|\right)^{2^p}$$

En particulier si  $x_0$  est choisi tel que  $|x_0 - x^*| \leq \frac{1}{5M}$  on obtient

$$|x_n - x^*| \leq \frac{2}{M} 10^{-2^p}$$

La convergence est donc ici très rapide, ce phénomène est appelé *convergence quadratique*, et le point fixe  $x^*$  est alors parfois appelé point fixe *superattractif*.

2)  $f'(x^*) > 1$

Comme  $\lim_{x \rightarrow x^*} \left| \frac{f(x) - f(x^*)}{x - x^*} \right| = |f'(x^*)| > 1$ , il existe donc un voisinage  $J = [x^* - \epsilon, x^* + \epsilon]$  de  $x^*$  tel que :

$$\forall x \in J \setminus \{x^*\} \quad |f(x) - x^*| > |x - x^*|$$

On dit alors que le point fixe  $x^*$  est *répulsif*.

**Définition 4.**

*Nous dirons que  $x^*$  est répulsif si :*

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x_0 \in ]x^* - \delta, x^* + \delta[, \quad x_0 \neq x^* \quad \exists n \in \mathbb{N} / x_n \notin ]x^* - \delta, x^* + \delta[$$

où  $x_n = f^n(x_0)$ .

**Théorème 3.**

*Soit  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$  de classe  $C^1$ . On suppose que  $f$  admet un unique point fixe  $x^* \in [a, b]$  vérifiant  $f'(x^*) > 1$ , alors il existe un voisinage  $V_{x^*}$  de  $x^*$  dans  $[a, b]$  tel que la suite  $(x_n)$  définie par :*

$$\begin{cases} x_0 \in V_{x^*} \\ x_{n+1} = f(x_n), \quad \forall n \geq 0 \end{cases}$$

*ne converge pas vers  $x^*$ .*

*Le réel  $x^*$  dans ce cas est appelé point fixe répulsif.*

Si  $x^*$  est un point fixe vérifiant  $|f'(x^*)| = 1$ , alors  $x^*$  est appelé **point indifférent** (ou neutre) de  $f$ , car il peut être attractif ou répulsif (ou les deux, de part et d'autre) comme le montre les trois exemples suivants :

**Exemple 1.**

1) Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \sin x$ ,  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ . On a  $\forall x \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ ,  $\sin x < x$  et pour tout  $x_0 \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ , la suite itérée  $(x_n)$  définie par  $x_{n+1} = f(x_n)$  est strictement décroissante minoré par 0 donc convergente vers une limite  $x^*$ . Comme  $f$  est continue et que  $f(x^*) = x^*$ ,  $x^* = 0$  est l'unique point fixe de  $f$  sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$  qui est attractif (Fig1 - 1).

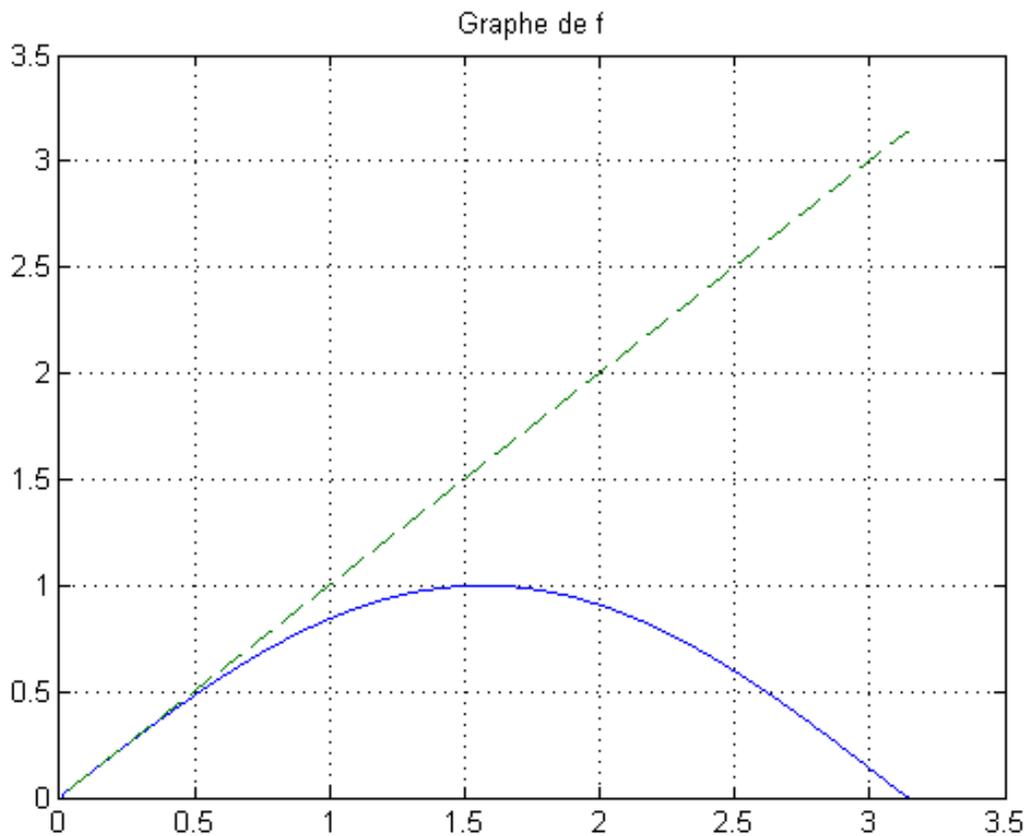


FIG. 1.1 -

2) Soit la fonction  $g(x) = \sinh x$ ,  $x \in [0, +\infty[$ . On a  $\sinh x > x$  et pour tout  $x_0 \in ]0, +\infty[$ , la suite itérée  $(x_n)$  définie par  $x_{n+1} = g(x_n)$  est strictement croissante et non majorée donc divergente. Par conséquent, le point fixe  $x^* = 0$  de  $g$  est répulsif (Fig 1 - 2).

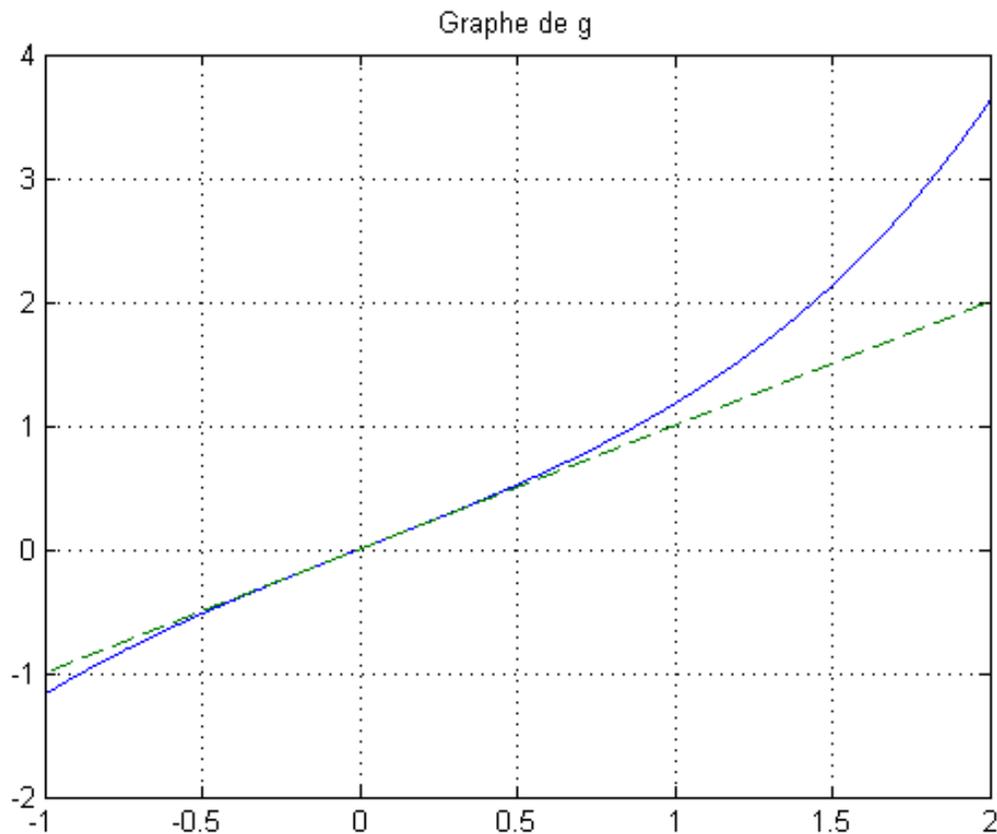


FIG. 1.2 –

3) Soit la fonction  $h(x) = x^2 + \frac{1}{4}$ . On a  $h'(x) = 2x$ , le point fixe  $x^* = \frac{1}{2}$  est attractif sur  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ , répulsif ailleurs.

**Théorème 4** ([14]).

si  $x^*$  est un point fixe de  $f$  avec  $f \in \mathcal{C}^2$  et  $f'(x^*) = 1$  alors :

i)  $f''(x^*) > 0 \Rightarrow x^*$  est inférieurement asymptotiquement stable et supérieurement instable (ou répulsif).

ii)  $f''(x^*) < 0 \Rightarrow x^*$  est supérieurement asymptotiquement stable et inférieurement instable (ou répulsif).

inférieurement stable

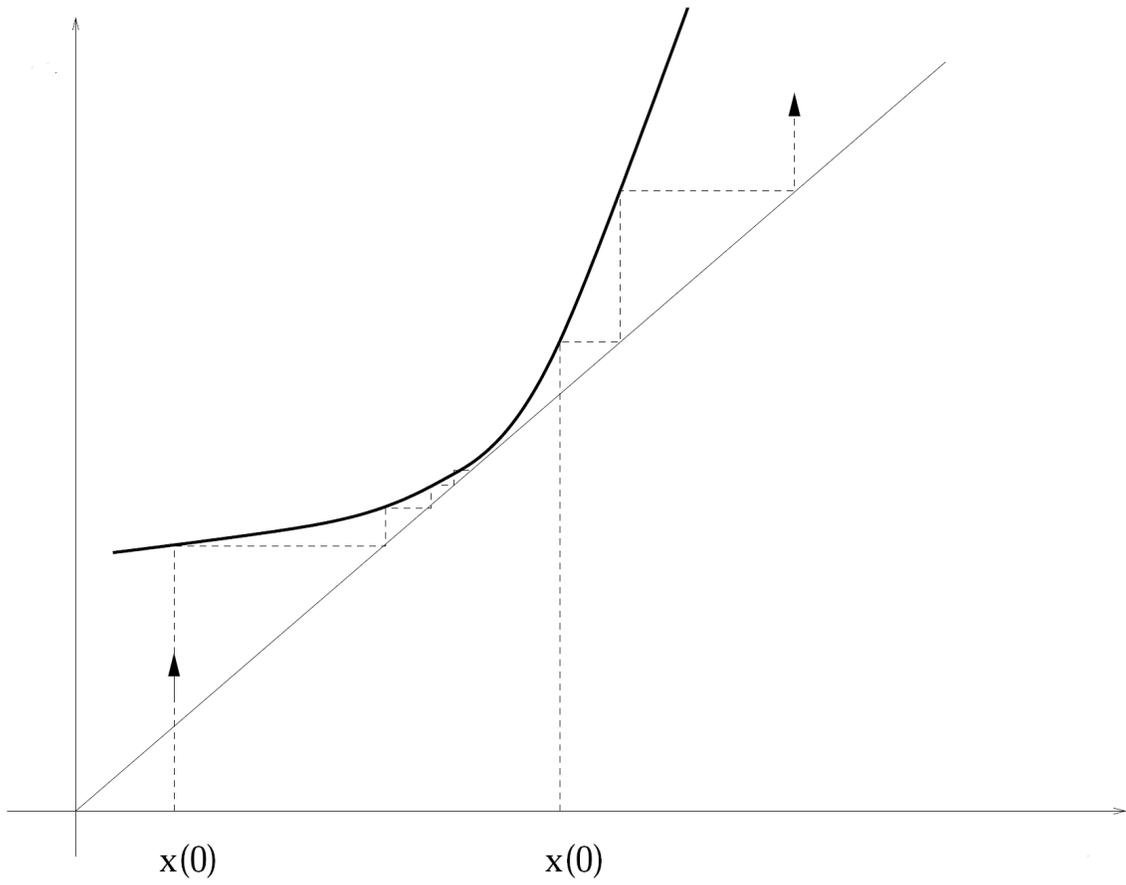


FIG. 1.3 –

supérieurement stable

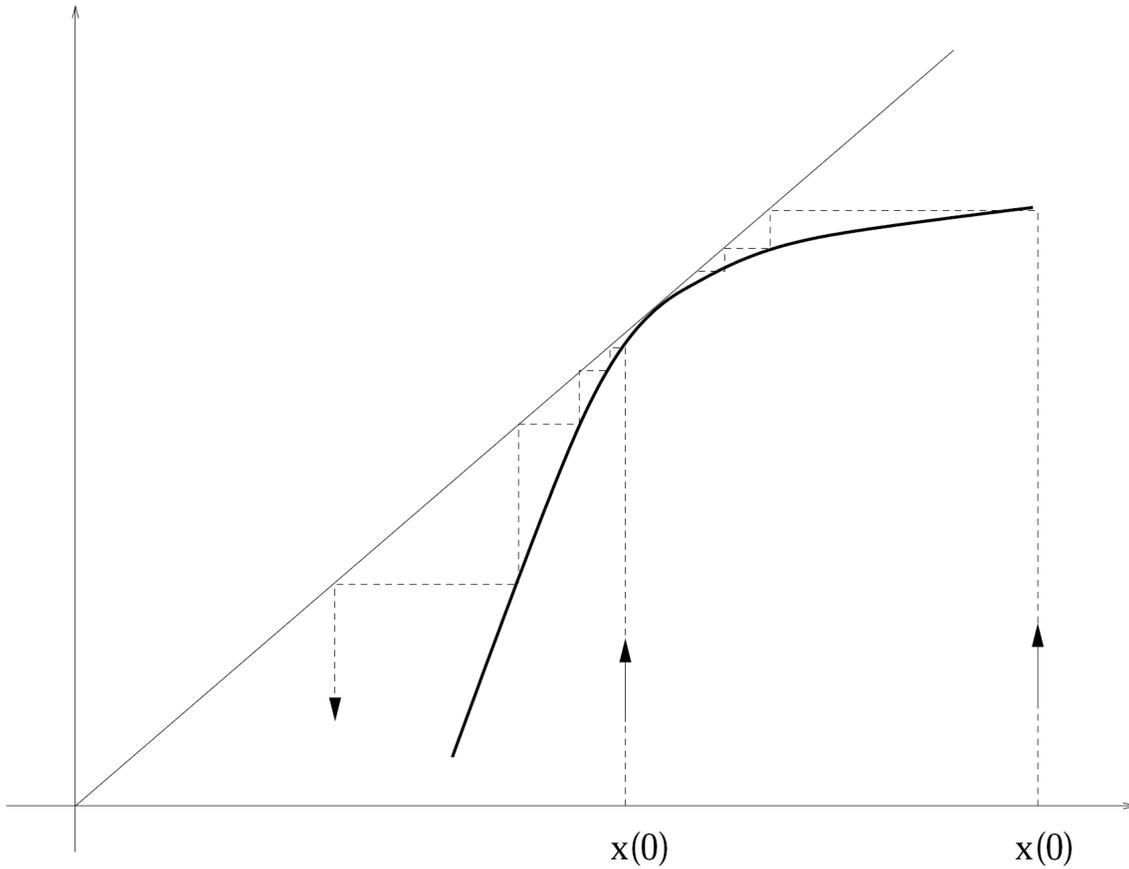


FIG. 1.4 –

**Théorème 5.** [14]

si  $x^*$  est un point fixe de  $f$  avec  $f \in C^3$  et  $f'(x^*) = 1, f''(x^*) = 0$  alors :

i)  $f'''(x^*) > 0 \Rightarrow x^*$  est instable.

ii)  $f'''(x^*) < 0 \Rightarrow x^*$  est localement asymptotiquement stable.

**Définition 5.**

La dérivée Schwartzienne de la fonction  $f$  est définie par :

$$Sf(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left[ \frac{f''(x)}{f'(x)} \right]^2$$

**Théorème 6.** [14]

si  $x^*$  est un point fixe de  $f$  avec  $f \in \mathcal{C}^3$  et  $f'(x^*) = -1$  alors :

i)  $Sf(x^*) > 0 \Rightarrow x^*$  est instable.

i)  $Sf(x^*) < 0 \Rightarrow x^*$  est localement asymptotiquement stable.

La convergence de la méthode des points fixes est également assujettie au choix de la valeur initiale  $x_0$ . En effet, un mauvais choix de  $x_0$  peut résulter en un algorithme divergent même si la condition 1.5 est respectée.

### 1.3 Bassin d'attraction

**Définition 6.** Le bassin d'attraction noté  $W^s(x^*)$  du point fixe  $x^*$  pour la méthode du point fixe  $x_{n+1} = f(x_n)$ , est l'ensemble des valeurs initiales  $x_0$  pour lesquelles  $x_n$  tend vers  $x^*$  lorsque  $n$  tend vers l'infini, c'est-à-dire :

$$W^s(x^*) = \{x : \lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x) = x^*\}$$

En d'autres termes, le bassin d'attraction de  $x^*$  est formé de tous les points  $x_0$  pour lesquels la méthode du point fixe converge vers  $x^*$ . Pour assurer la convergence, il faut donc choisir  $x_0$  dans le bassin d'attraction de  $x^*$ .

**Théorème 7.** [1]

Soit  $f(x)$ , une fonction continue dans l'intervalle  $I = [a, b]$  et telle que  $f(x) \in I$  pour tout  $x$  dans  $I$ . Si de plus  $f'(x)$  existe et si :

$$|f'(x)| \leq k < 1$$

pour tout  $x$  dans l'intervalle  $]a, b[$ , alors tous les points  $x_0$  de l'intervalle  $I$  appartiennent au bassin d'attraction de l'unique point fixe  $x^*$  de  $f$  dans  $I$ .

**Exemple 2.** Considérons la fonction  $f(x) = x^2$  qui possède les points fixes  $x = 0$  et  $x = 1$ . Ce dernier est répulsif, car la dérivée de  $f$  vaut 2 en  $x = 1$ . Le seul point fixe intéressant est donc  $x = 0$ . La méthode des points fixes engendre, à partir de la valeur initiale  $x_0$ , la suite :

$$x_0, x_0^2, x_0^4, x_0^8, x_0^{16}, \dots$$

Cette suite convergera vers 0 seulement si  $x_0 \in ]-1, 1[$ . Ce dernier intervalle constitue donc le bassin d'attraction de ce point fixe. toute valeur de  $x_0$  choisi à l'extérieur de cet intervalle résultera en un algorithme divergent.

Dans le cas d'un point fixe  $x^*$  répulsif, le bassin d'attraction se réduit le plus souvent à l'ensemble  $\{x^*\}$  et de ses antécédents.

## Chapitre 2

---

# Systemes dynamiques et chaos

---

Nous consacrerons ce deuxieme chapitre de notre travail à l'introduction des elements fondamentaux associes aux systemes dynamiques discrets, et aux systemes chaotiques. Nous illustrons ensuite toutes ces notions par l'exemple de l'application logistique.

### 2.1 Définitions et notations

En mathematiques, en physique, en ingenierie un systeme dynamique est un systeme "classique" qui evolue au cours du temps de facon à la fois :

- causale (c.à.d que son avenir ne depend que des phenomenes du passe ou du present).
- deterministe (c.à.d qu'à une "condition initiale" donnee à l'instant present va correspondre à chaque instant ulterieur "un et un seul etat futur" possible).

#### 2.1.1 Définition mathematique d'un systeme dynamique

Soient  $X$  un espace metrique (generalement  $X = \mathbb{R}^n$ ),  $T$  est l'ensemble ( $\mathbb{R}, \mathbb{Z}$  ou  $\mathbb{N}$ ) et  $f$  une application continue.

$$\begin{aligned} f : X \times T &\longrightarrow X \\ (x, t) &\longrightarrow f(x, t) \end{aligned}$$

Le triplet  $(X, T, f)$  est appele systeme dynamique si :  $\forall x \in X$

$$\begin{aligned} f(x, 0) &= x \\ f(f(x, t_1), t_2) &= f(x, t_1 + t_2), \quad \forall t_1, t_2 \in T, \end{aligned}$$

où

$X$  : espace de phases.

$T$  : espace temporel.

$f$  : flot du système dynamique ou encore (fonction d'évolution).

Dans le cas où le temps  $T$  est continu, le système  $(X, T, f)$  est dit continu. Dans le cas où le temps  $T$  est discret, le système  $(X, T, f)$  est dit discret.

### 2.1.2 Les différents types de flots de système dynamique

#### Flot engendré par une équation différentielle ordinaire

Soit le problème de Cauchy suivant :

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(x(t)) \quad x(0) = x_0, \quad x(t) \in X \tag{2.1}$$

où  $X$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .

Ceci permet de définir un système dynamique continu  $(X, \mathbb{R}, f)$  où  $f$  est la solution de 2.1 définie par

$$f(x_0, t) = x_0 + \int_0^t F(x(\xi))d\xi, \quad f(x_0, 0) = x_0$$

L'existence et l'unicité de la solution de 2.1 sont assurées par le théorème de Cauchy.

#### Flot engendré par un homéomorphisme

Soit  $F(x, t)$  un flot engendré par une équation différentielle ordinaire autonome.

Posons  $h(x) = F(x, 1)$  :  $h$  admet une inverse continue, c'est donc un homéomorphisme de  $X \rightarrow X$ . On définit  $F(x, n) = h^n(x)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , avec

$$h^n = \begin{cases} h \circ h \circ h \dots \circ h & n \text{ fois, si } n \geq 0 \\ h^{-1} \circ h^{-1} \circ \dots \circ h^{-1} & n \text{ fois, si } n < 0 \end{cases}$$

Alors le triplet  $(X, \mathbb{Z}, f)$  est un système dynamique discret engendré par l'homéomorphisme  $h$ .

#### Flot engendré par une application continue

Soit  $(X, \mathbb{Z}, f)$  un système dynamique engendré par un homéomorphisme  $h : X \rightarrow X$  où  $f(x, n) = h^n(x)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

Restreignons  $n$  à  $\mathbb{N}$ , on obtient un système dynamique discret  $(X, \mathbb{N}, f)$  où  $f(x, n) = g^n(x)$  avec  $g : X \rightarrow X$  continue et  $\forall n \in \mathbb{N} \quad g^n(x) = h^n(x)$ .

Posons  $x_n = f(x, n)$  d'où :

$$x_{n+1} = f(x, n) = g^{n+1}(x) = g(g^n(x)) = g(x_n)$$

Donc l'étude d'un système dynamique discret engendré par une application continue revient à étudier la récurrence :

$$\begin{cases} x_0 \in X \\ x_{n+1} = g(x_n) \end{cases}$$

**Exemple 3.** *Cas continu (L'oscillateur de Duffing)*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = x - x^3 - \delta y + \gamma \cos \omega t \end{cases}$$

Où  $\delta, \gamma, \omega$  sont des paramètres physiques réels.

L'espace des phases est :  $\mathbb{R}^2$ , l'espace des paramètres est  $\mathbb{R}^3$ , ce système est non linéaire, non autonome.

**Exemple 4.** *Cas discret (L'application de Hénon)*

$$\begin{cases} x_{k+1} = y_k + 1 - ax_k^2 \\ y_{k+1} = bx_k \end{cases}$$

Où  $a, b$  sont des paramètres réels, l'espace des phases est  $\mathbb{R}^2$ , l'espace des paramètres est  $\mathbb{R}^2$  :

Dans tout ce qui suit, nous ne considérons que des systèmes dynamiques discrets obtenus en itérant une fonction continue  $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

## 2.2 Systèmes dynamiques discrets

### 2.2.1 Systèmes dynamiques discrets

Soit  $f : D \rightarrow D, D \subseteq \mathbb{R}^n$  une application continue (ou une transformation),  $f^k$  désigne la  $k^{ième}$  itérée de  $f$ , c'est-à-dire :

$$f^0(x) = x, f^1(x) = f(x), f^2(x) = f(f(x)), \dots, f^k(x) = f(f^{k-1}(x))$$

Dans la pratique  $x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f^2(x_0), \dots$  représentent les valeurs d'une certaine quantité au temps 0, 1, 2...

Ainsi la valeur de la quantité aux temps  $k + 1$  est en fonction de sa valeur au temps  $k$ . L'application  $f$  est couramment appelée "système dynamique discret".

**Exemple 5.** soit  $x_0$  un capital placé à un taux d'intérêt  $r$  composé annuellement et pour  $n \geq 1$  désignons par  $x_n$  le capital après  $n$  années. Alors on a :

$$\begin{aligned}x_1 &= x_0 + rx_0 = (1+r)x_0 \\x_2 &= x_1 + rx_1 = (1+r)^2x_0 \\&\vdots \\x_n &= (1+r)^nx_0\end{aligned}$$

on obtient le système dynamique discret

$$\begin{aligned}\mathbb{R} \times \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\(x, n) &\longrightarrow (1+r)^nx\end{aligned}$$

Il est obtenu en itérant la fonction

$$\begin{aligned}f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\x &\longrightarrow (1+r)x\end{aligned}$$

### 2.2.2 Notion d'orbites (ou trajectoire)

L'**orbite positive** de  $x$  par le système dynamique  $f$  est définie par :

$$O_+^f = \{f^k(x), k \in \mathbb{N}\}$$

Si  $f$  est bijective, on définit l'**orbite** de  $x$  par :

$$O^f = \{f^k(x), k \in \mathbb{Z}\}$$

Ainsi que l'**orbite négative** :

$$O_-^f = \{f^{-k}(x), k \in \mathbb{N}\}$$

### 2.2.3 Représentation graphique de l'orbite de $x_0$

Dans  $\mathbb{R}$ , on représente couramment l'orbite issue d'un point  $x_0$  par le graphique suivant :

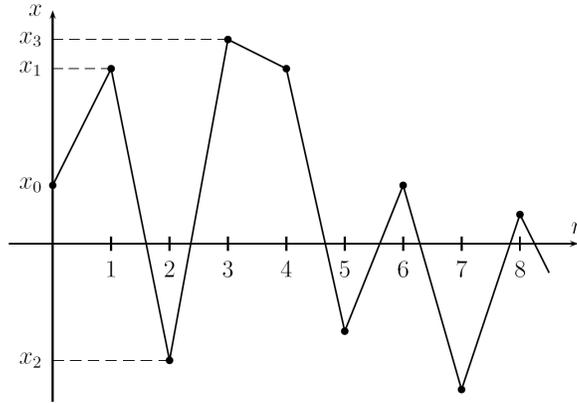


FIG. 2.1 –

### 2.2.4 Points fixes

Soit  $(X, \mathbb{N}, f)$  un système dynamique. Un point  $x \in X$  est un point fixe de  $f$  si est seulement si

$$f(x^*) = x^*$$

**Exemple 6.** soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = x^3$  alors  $0, 1, -1$  sont des points fixes de  $f$ .

### 2.2.5 Points périodiques et p-cycles

S'il existe  $n \geq 2$ , tel que  $f^n(x) = x$ , on dit que  $x$  est un point **périodique**. La **période** d'un point périodique  $x$  est le plus petit entier  $n \geq 2$  tel que :

$$f^n(x) = x$$

Un ensemble  $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{p-1}\}$  forme un **cycle** d'ordre  $p$  (ou une **orbite périodique** d'ordre  $p$ , ou encore un **p-cycle**), si :

$$\begin{cases} x_{i+1} = f(x_i), & \text{pour } i = 0, 1, 2, \dots, p-1 \\ f(x_{p-1}) = x_0 \end{cases}$$

Autrement dit, chaque point d'un cycle d'ordre  $p$  est un point fixe pour  $f^p$ , ou  $f^p(x_i) = x_i$  pour  $i = 0, 1, 2, 3, \dots, p-1$ , et n'est pas un point fixe pour  $f^k$  si  $k < p$ .

**Exemple 7.** la paire  $\{x_0^*, x_1^*\}$  est un cycle d'ordre 2 si est seulement si  $x_0^*$  et  $x_1^*$  sont des point d'équilibre de  $f^2$  mais pas de  $f$ .

### 2.2.6 Etude de stabilité

L'étude d'un système dynamique discret, consiste, entre autre, en la recherche des points fixes et des points périodiques, ainsi que leurs natures (stabilité).

Les deux théorèmes suivants donnent respectivement l'existence et l'unicité des points fixes.

**Théorème 8.** [Brouwer][8]

Toute application continue  $f : \overline{B}^n \rightarrow \overline{B}^n$  avec  $\overline{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x\| \leq 1\}$ , admet un point fixe c'est-à-dire l'équation  $f(x) = x$  admet une solution dans  $\overline{B}^n$ .

**Théorème 9.** [de contraction de Banach][8]

Soit  $f : \overline{B}^2 \rightarrow \overline{B}^2$  une application continue, où  $\overline{B}^2$  est le disque unité fermé ;  $\overline{B}^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 / \|x\| \leq 1\}$ .

Supposons que :

$$\|f(x_2) - f(x_1)\| < \lambda \|x_2 - x_1\|$$

pour tous vecteurs  $x_1, x_2 \in \overline{B}^2$  et un certain  $0 < \lambda < 1$ . Alors il existe un point fixe unique  $x^* \in \overline{B}^2$ . De plus on'a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x) = x^* \text{ pour tout } x \in \overline{B}^2$$

### 2.2.7 Stabilité du point fixe

\* Un sous ensemble  $A$  de  $D$  est invariant par  $f$  si  $f(A) = A$ .

\* Un sous ensemble compact fermé  $A$  de  $D$  est un **attractif** ou est **attracteur** si  $A$  est invariant par  $f$  ; et s'il existe un voisinage  $V$  de  $A$  tel que pour  $x_0 \in V$  ; l'orbite de  $x_0$  est une suite qui converge vers  $A$ . Le voisinage  $V$  est appelé le **bassin d'attraction** de  $A$  et on a :

$$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} f^k(V)$$

\* Le sous ensemble  $A$  est **répulsif** ou **instable** s'il existe un voisinage  $V$  de  $A$  tel que pour tout  $x_0 \in V$ , l'orbite de  $x_0$  s'éloigne de  $A$ .

\* L'attracteur le plus simple est le point fixe, il peut être attractif, répulsif ou indifférent.

**Définition 7.** [stabilité]

un point d'équilibre  $x^* \in X$  est dit **stable** si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \quad \forall y \in X \quad d(y, x^*) < \delta \Rightarrow d(f^n(y), x^*) < \epsilon$$

En dimension un,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable, c'est la pente  $m = f'(x^*)$  de la tangente au point fixe  $x^*$  qui détermine le type du point fixe.

**Théorème 10.**

Pour  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  le point fixe est :

1- super attractif (ou super stable) si  $m = 0$  ;

2- attractif (ou stable) si  $|m| < 1$  ;

3- répulsif (ou instable) si  $|m| > 1$  ;

4-indifférent si  $|m| = 1$  ;

$m$  s'appelle le **multiplicateur** de  $f$  au point  $x^*$ .

En dimension  $n$ , pour déterminer si un point fixe  $x^*$  est attractif ou non, il faut calculer les valeurs propres de la matrice jacobienne  $Df(x) = J(x)$ .

**Théorème 11.**

Si toutes les valeurs propres de  $Df(x) = J(x)$  sont à l'intérieur du disque unité,  $x$  est stable. Si une au moins de ces valeurs propres a un module plus grand que un,  $x$  est instable.

## 2.2.8 Stabilité des points périodiques

Comme les points périodiques d'ordre  $p$  sont des points fixes de  $f^p$ , alors le théorème suivant est une généralisation du théorème ci-dessus.

**Théorème 12.**

Soit  $x$  un point d'un cycle d'ordre  $p$ . Si le spectre de la matrice  $Df^p(x)$  est à l'intérieur du cercle unité, le cycle est stable, si une des valeurs propres a un module plus grand que un, le cycle est instable.

En dimension un, si  $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{p-1}\}$  est un cycle d'ordre  $p$ , les dérivées  $f^p(x_i)$  pour  $i = 0, 1, 2, \dots, p - 1$  sont égales. En effet, la dérivée de  $f^p$  au point  $x_0$  s'écrit :

$$\begin{aligned} (f^p)'(x_0) &= (f \circ f \circ \dots \circ f)'(x_0) \\ &= (f^{p-1} \circ f)'(x_0) \\ &= (f^{p-1})'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) \\ &= (f^{p-2})'(f^2(x_0)) \cdot f'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) \end{aligned}$$

$$= (f'(x_{p-1}) \cdot f'(x_{p-2}) \cdots f'(x_1) \cdot f'(x_0))$$

Mais  $x_0 = x_p$ . On en déduit que cette valeur  $(f^p)'(x_0)$  est la même pour toutes les dérivées  $(f^p)'(x_i), i = 0, 1, 2, \dots, p - 1$  :

$$m_p = (f^p)'(x_0) = \dots = (f^p)'(x_{p-1})$$

Cette valeur commune  $m_p$  est appelée le *multiplicateur* du cycle  $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{p-1}\}$ , cette dernière détermine le type du cycle.

**Théorème 13.**

Pour  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , le cycle  $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{p-1}\}$  est :

- 1- super attractif (ou super stable) si  $m_p = 0$  ;
- 2- attractif (ou stable) si  $|m_p| < 1$  ;
- 3- répulsif (ou instable) si  $|m_p| > 1$  ;
- 4-indifférent si  $|m_p| = 1$  ;

**Exemple 8.**

Soit  $f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 1$  le point 0 est 3-périodique car  $f(0) = 1, f(1) = 2, f(2) = 0$  on a  $f'(0) = 5/2, f'(1) = -1/2, f'(2) = -7/2$  et  $(f^3)'(0) = f'(0)f'(1)f'(2) = 35/8 > 1$  ainsi 0 est un point 3 -périodique répulsif.

## 2.3 Conjugaison topologique

La notion de conjugaison topologique est introduite pour identifier les systèmes dynamiques qui ont les mêmes propriétés qualitatives.

Deux systèmes dynamiques  $(X \subseteq \mathbb{R}^n, \mathbb{N}, f), (Y \subseteq \mathbb{R}^n, \mathbb{N}, g)$ , sont dits **topologiquement conjugués** s'il existe un homéomorphisme  $\psi : X \rightarrow Y$  tel que  $\psi \circ f = g \circ \psi$  i.e  $\psi \circ f \circ \psi^{-1} = g$ .

### 2.3.1 Interêt de la conjugaison topologique

Soient  $(X \subseteq \mathbb{R}^n, \mathbb{N}, f), (Y \subseteq \mathbb{R}^n, \mathbb{N}, g)$  deux systèmes dynamiques topologiquement conjugués via  $\psi : X \rightarrow Y$ .

**Cas d'un point fixe**

Si  $x^*$  est un point fixe de  $f$ , alors  $\psi(x^*)$  est un point fixe de  $g$  et inversement.

En effet, comme  $x^*$  est un point fixe de  $f$  et  $(\psi \circ f)(x) = (g \circ \psi)(x)$ , alors pour  $x = x^*$  on a  $g(\psi(x^*)) = \psi(f(x^*)) = \psi(x^*)$ .

Donc si  $x^*$  est un point fixe de  $f$ , alors  $\psi(x^*)$  est un point fixe de  $g$ . Cette relation nous amène à poser la question suivante : y-a-t-il une relation entre le multiplicateur de  $f$  et

$g$  ?.

**Stabilité des points fixes**

Supposons que  $f$  et  $g$  de classe  $\mathcal{C}^1(X)$ ,  $\mathcal{C}^1(Y)$  respectivement et  $\psi$  un difféomorphisme de  $X$  sur  $Y$ .

$\forall x \in X$ ,  $(\psi \circ f)(x) = (g \circ \psi)(x)$ , en dérivont les deux membres on obtient :

$$\psi'(f(x)).f'(x) = g'(\psi(x)).\psi'(x)$$

Et en  $x^*$  on aura :

$$\psi'(x^*).f'(x^*) = g'(\psi(x^*)).\psi'(x^*)$$

Comme  $\psi'(x^*) \neq 0$  alors :

$$f'(x) = g'(\psi(x^*))$$

On a  $f'(x^*)$  est le multiplicateur de  $f$  en  $x^*$  et  $g'(\psi(x^*))$  est le multiplicateur de  $g$  en  $\psi(x^*)$ .

On conclut que si deux systèmes dynamiques sont topologiquement conjugués, alors les multiplicateurs de leurs points fixes sont égaux.

**Cas d'un cycle d'ordre  $k > 1$**

Les deux systèmes étant topologiquement équivalents via  $\psi$  alors  $\forall k \in \mathbb{N}$  on a :

$$\psi \circ f^k = g^k \circ \psi$$

Par récurrence sur  $k$

Pour  $k = 1$  c'est trivial.

Supposons que la propriété est vraie pour  $k$ , montrons qu'elle est vraie pour  $(k + 1)$

On a  $\psi \circ f^{k+1} = (\psi \circ f^k) \circ f = g^{k+1} \circ \psi$

Pour  $x^*$  point périodique de période  $k$  on a  $f^k(x^*) = x^*$

On déduit que :

$$(\psi \circ f^k)(x^*) = (g^k \circ \psi)(x^*)$$

On aura :

$$\psi(x^*) = g^k(\psi(x^*))$$

$\psi(x^*)$  est aussi un point périodique d'ordre  $k$ .

## 2.4 Bifurcation

La bifurcation signifie un changement qualitatif de la dynamique du système, qui résulte du changement d'un des paramètres du système. Par exemple : déstabilisation d'un

équilibre stable, apparition ou disparition d'un cycle ou d'un attracteur,...etc

La valeur du paramètre pour laquelle la bifurcation se produit est nommée le point de bifurcation.

En particulier, on peut définir quelque bifurcation classiques , bifurcation nœud-col, bifurcation doublement de période , bifurcation transcritique et bifurcation fourche. L'étude de la succession des bifurcations permet de comprendre les mécanismes qui conduisent à l'apparition du chaos.

A l'aide d'exemples, nous illustrons les quatres bifurcations typiques couramment rencontrées dans des systèmes dynamiques discrets en dimension un.

### 2.4.1 Bifurcation nœud-col

Cette bifurcation correspond à  $f'(x^*) = 1$ , ce type de bifurcation donne naissance a deux cycles d'ordre  $k$  l'un est attractif et l'autre est instable.

Cette situation peut être représentée par :

$\emptyset \longrightarrow$  cycle attractif + cycle répulsif

où  $\emptyset$  signifier absence de cycle d'ordre  $k$ .

Considérons la fonction  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  avec  $f_r(x) = x^2 + r$  où  $r$  est un paramètre réel . Les points fixes sont solutions de  $x = x^2 + r$  qui sont :

$$x_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{(1-4r)}}{2}$$

$$x_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{(1-4r)}}{2}$$

qui existent seulement pour  $r \leq \frac{1}{4}$  (et coincident si  $r = \frac{1}{4}$ ).

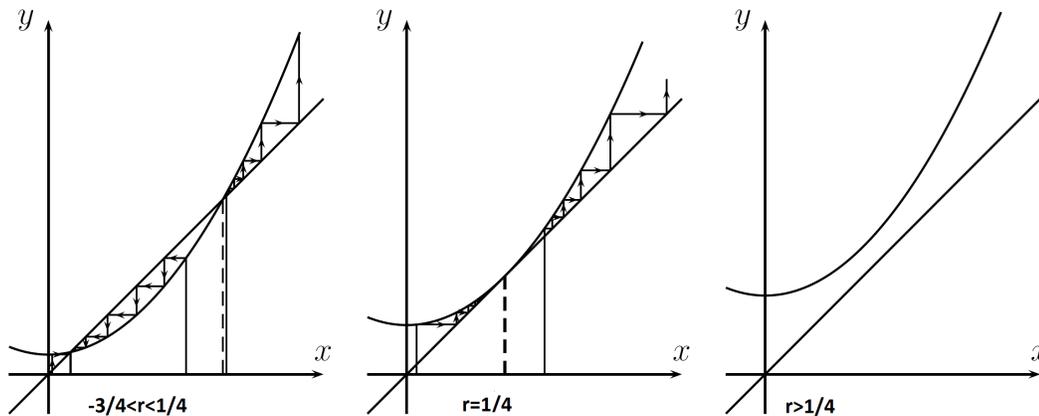


FIG. 2.2 -

On représente ci-dessous l'ensemble  $D = \{(r, x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \text{ point fixe de } f\}$   
 C'est ici la parabole  $x^2 - x + r = 0$  dans le plans  $rOx$ .

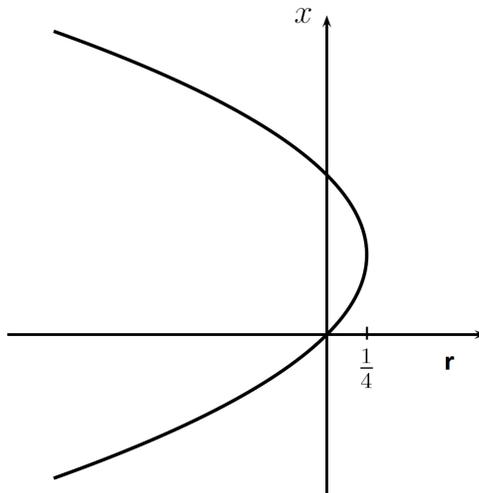


FIG. 2.3 -

Etudions la stabilité de  $x_1$  et  $x_2$  en fonction de  $r$ . On a  $f'_r(x) = 2x$  d'où  $f'_r(x_1) = 2x_1 = 1 + \sqrt{1 - 4r}$  et  $f'_r(x_2) = 1 - \sqrt{1 - 4r}$ .

pour  $r < 1/4$ ,  $x_1$  est répulsif, et  $x_2$  attractif si seulement si :  
 $|1 - \sqrt{1 - 4r}| < 1$  c'est-à-dire  $(-3/4 < r < 1/4)$

Afin de compléter la figure précédente, nous représentons en pointillés la partie de l'en-

semble  $D$  qui correspond a des points fixes instables, ce qui donne :

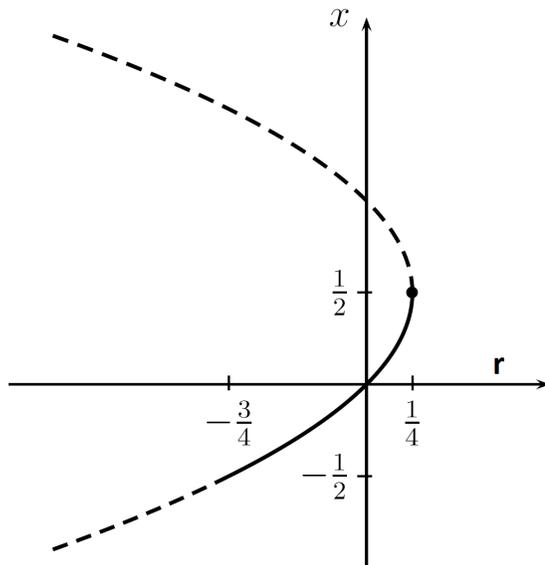


FIG. 2.4 –

On obtient ainsi une première portion de ce qui s'appelle le diagramme de bifurcation de  $f_r$ .

La situation, concernant les point fixes est décrite par :

$r = 1/4$   $f_r$  a un seul point fixe.

$\forall r > 1/4$   $f_r$  n'a pas de points fixes réels.

$\forall r < 1/4$   $f_r$  a deux points fixes réels : l'un est toujours instable, alors que l'autre est stable tant que  $r > -3/4$ .

C'est ce que l'on appelle *une bifurcation noeud-col*,  $r = 1/4$  est appelée valeur de bifurcation et le point  $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$  est appelé point de bifurcation.

### 2.4.2 Bifurcation fourche

Considérons la fonction  $f_r(x) = rx - x^3$ . Ici, nous nous limiterons aux valeurs de  $r > 0$ .

#### Recherche des Points fixes

Les points fixes de  $f_r$  sont les solutions de  $rx - x^3 = x$ . Ainsi 0 est un point fixe de  $f_r \forall r > 0$  et, pour  $r > 1$  deux points fixes vont apparaître  $x_1 = \sqrt{r-1}$  et  $x_2 = -\sqrt{r-1}$ .

#### Stabilité des points fixes

Nous avons  $f'_r(x) = r - 3x^2$ . Ainsi  $f'_r(0) = r$  et  $f'_r(x_1) = f'_r(x_2) = 3 - 2r$ . Il s'ensuit donc

que 0 est attractif si  $0 < r < 1$  et répulsif si  $r > 1$ , alors que  $x_1$  et  $x_2$  sont attractif pour  $1 < r < 2$  et répulsif pour  $r > 2$ .

Traçons maintenant l'ensemble

$$D = \{(x, r) | r > 0 \text{ et } x \text{ un point fixe de } f_r\}$$

où encore :

$$D = \{(x, r) | r > 0\} \cup \{(x, r) | x^2 = r - 1, \forall r \geq 1\}$$

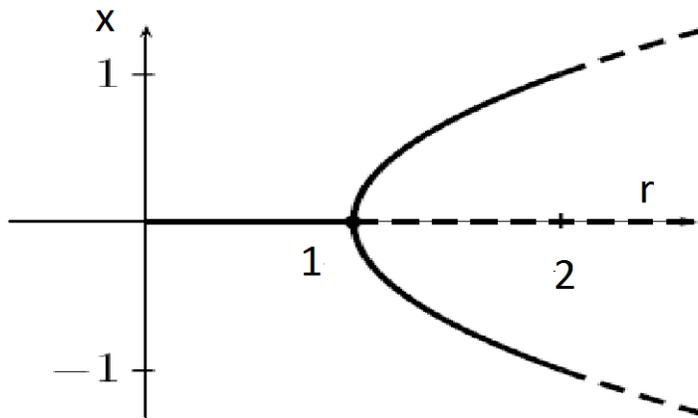


FIG. 2.5 –

Ce type de bifurcation s'appelle bifurcation fourche.

### 2.4.3 Bifurcation transcritique

Pour illustrer ce type de bifurcation, nous considérons le système dynamique :

$$\begin{cases} x_0 & \text{quelconque} \\ x_{k+1} & = rx_k(1 - x_k) \end{cases}$$

où  $r$  est un paramètre réel, nous nous limiterons au cas où  $r > 0$ . La fonction  $f_r(x) = rx(1 - x)$  est appelé fonction logistique, les points fixes de ce système dynamique sont  $x_1 = 0$  et  $x_2 = (r - 1)/r$ . Pour  $r = 1$ , les deux points fixes coïncident. Les figures suivantes

illustrent ces trois cas :

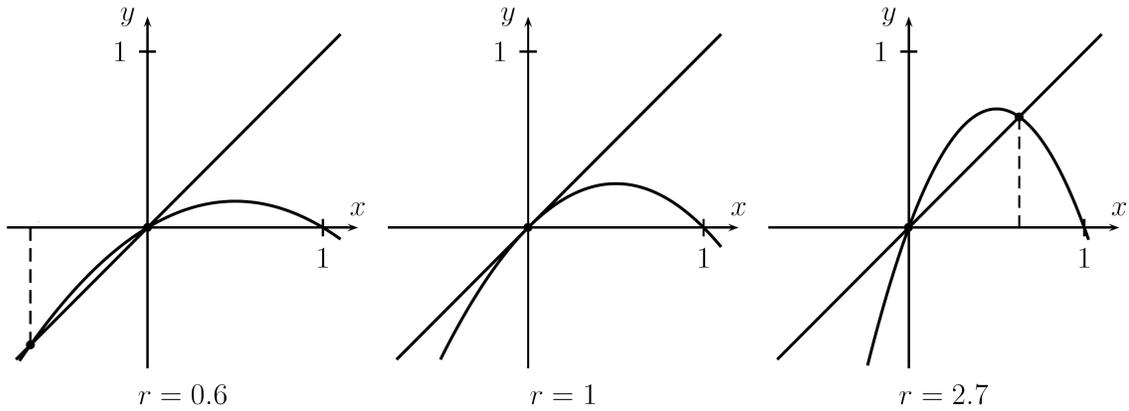


FIG. 2.6 –

On peut représenter les point fixes pour les différentes valeurs du paramètre  $r$  à l'aide de la figure suivante dans le plan  $rOx$  qui est une partie du diagramme de bifurcation.

$$\begin{aligned}
 D &= \{(r, x) | x = rx(1 - x)\} \\
 &= \{(r, x) | x \text{ est un point fixe de } f_r\}
 \end{aligned}$$

Il est clair que  $D = \{(r, x) | x = 0\} \cup \{(r, x) | x = \frac{(r-1)}{r}\}$   
 ainsi on obtient :

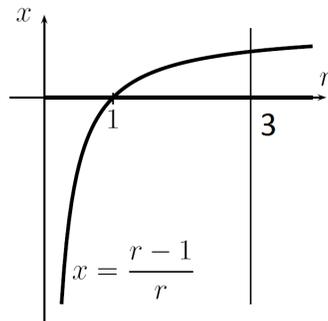


FIG. 2.7 –

Le point  $(r, x) = (1, 0)$  est un point de bifurcation .Pour  $r$  fixé, l'intersection de  $D$  avec la droite verticale passant par  $(r, 0)$  donne l'ensemble des points fixes de  $f_r$ .  
 Pour étudier la stabilité des points fixes de  $f_r$ , nous utilisons la méthode de linéarisation .  
 On a  $f'_r(r) = r(1 - 2x)$ ,d'où 0 est stable si  $0 < r < 1$  et est répulsif si  $r > 1$ .  
 On a  $f'_r(x_2) = 2 - r$  et on aura  $f'_r(x_2) < 1$  si et seulement si  $1 < r < 3$  ainsi :  
 $x_2$  est répulsif (donc instable) si et seulement si  $0 < r < 1$  ou  $r > 3$ .  
 $x_2$  est attractif (donc stable) si et seulement si  $1 < r < 3$  .  
 Ayant établi la nature des points fixes, nous allons préciser en indiquant, en pointillés, les branches constituées des points fixes instables, ce qui donne :

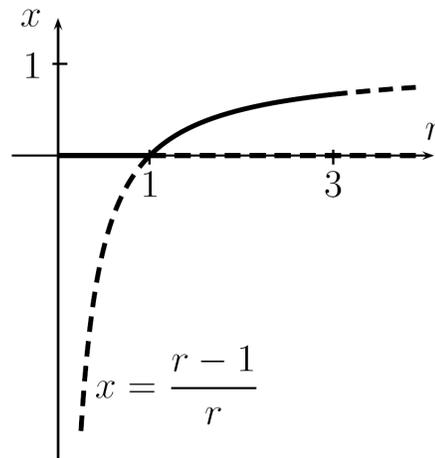


FIG. 2.8 –

ce type de bifurcation est appelé bifurcation transcritique en  $r = 1$ .

### 2.4.4 Bifurcation dédoublement de période

Cette bifurcation a lieu lorsque  $f'(x^*) = -1$ , un cycle d'ordre  $k$  qui subit cette bifurcation va changer de nature et créer un cycle d'ordre  $2k$  de même nature. Un point fixe stable d'ordre 1 par exemple, devient instable en même temps que l'apparition d'un cycle d'ordre 2 stable.

cette situation peut être représentée par :

Cycle attractif d'ordre  $k \longrightarrow$  Cycle répulsif d'ordre  $k$  + Cycle attractif d'ordre  $2k$ .

Nous considérons ici la fonction logistique, c'est-à-dire  $f_r(x) = rx(1 - x)$ , elle admet deux points fixes,  $x_1 = 0$  et  $x_2 = (r - 1)/r$  nous avons  $f'(x_2) = 2 - r$  d'ou :

\* $f'(x_2) > -1$  si  $r < 3$

\* $f'(x_2) = -1$  si  $r = 3$

\* $f'(x_2) < -1$  si  $r > 3$

Ainsi en  $r = 3$  le point fixe  $x_2$  perd sa stabilité. Montrons que des points de période 2 bifurquent du point fixe lorsque  $r = 3$ .  
 les points de période 2 sont les solutions de :

$$x = f_r^2 = r^2x(1-x)(1-rx(1-x))$$

c'est-à-dire :

$$x = f_r^2 = r^2x(1-x)(1-rx(1-x)) - x = 0$$

Puisque 0 et  $x_2 = (r-1)/r$  sont des points fixes de  $f$ , ce sont aussi des points fixes pour  $f_r^2$  ainsi :

$$x = f_r^2 = r^2x(1-x)(1-rx(1-x)) - x = x(x-x_2)p(x)$$

Avec  $p(x) = -r(r^2x^2 - r^2x - rx + r + 1)$  dont les racines sont :

$$p_1 = \frac{1}{2r}[(r+1) + \sqrt{(r+1)(r-3)}]$$

$$p_2 = \frac{1}{2r}[(r+1) - \sqrt{(r+1)(r-3)}]$$

qui existent dans  $\mathbb{R}$  pour  $r \geq 3$ . Lorsque  $r = 3$ ,  $p_1 = p_2 = 2/3$   
**études maintenant la stabilité des points de période 2**

On calcule

$$\begin{aligned} (f_r^2)'(p_1) &= f_r'(f_r(p_1)) \cdot f'(p_1) \\ &= f_r'(p_2) \cdot f'(p_1) \\ &= 4 + 2r - r^2 \end{aligned}$$

Ainsi  $p_1$  est attractif pour les valeurs de  $r$  telle que :

$$|4 + 2r - r^2| < 1$$

c'est-à-dire :

$$3 < r < 1 + \sqrt{6}$$

et  $p_1$  est répulsif pour  $r > 1 + \sqrt{6}$ , il est de même pour  $p_2$ .  
 d'où pour  $r = 1 + \sqrt{6}$ , on a les deux points fixes sont neutres.

$$(f^2)'(p_1) = (f^2)'(p_2) = -1$$

On peut donc s'attendre à une bifurcation dédoublement de période en  $r = 1 + \sqrt{6}$  (pour la fonction  $f_r^2$ ).

Les résultats précédents nous permettent d'ajouter au diagramme précédent (Fig.2-8) la

figure suivante :

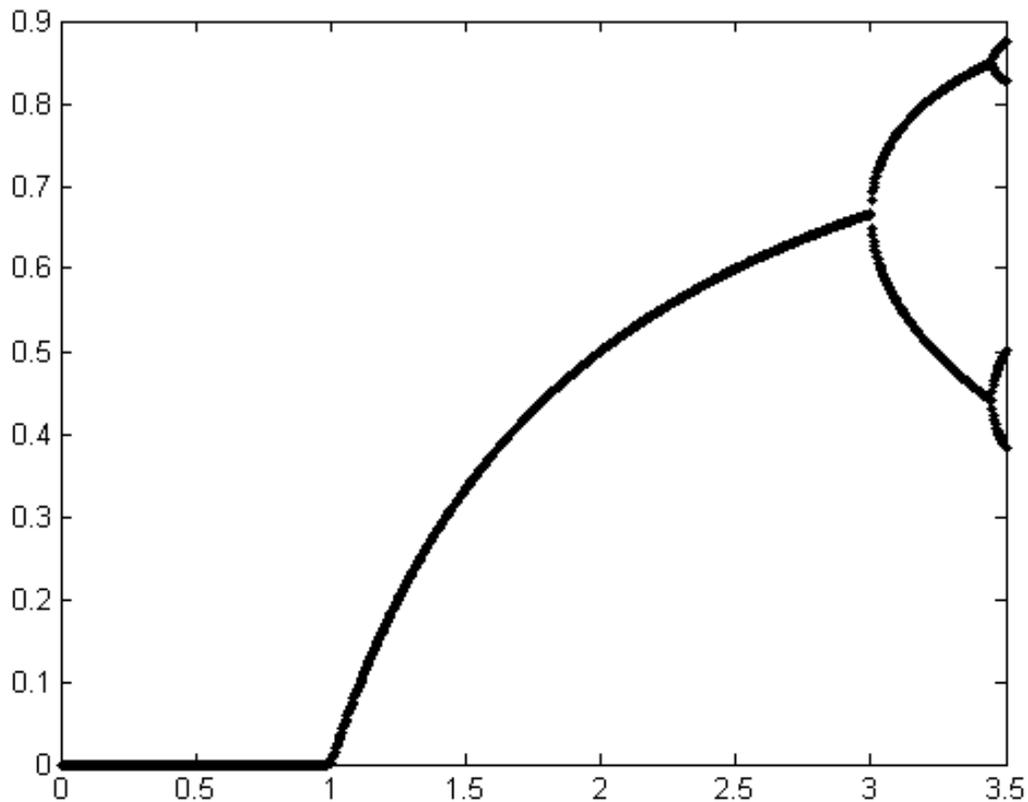


FIG. 2.9 –

## 2.5 Théorie du chaos

### 2.5.1 Les orbites denses

#### Définition 8.

Soit  $f_\alpha : I \rightarrow I$  une fonction continue. la dynamique associée à  $f$  sera dit **chaotique** s'il existe  $x_0 \in I$  tel que la suite récurrente  $x_n$  associée à  $f_\alpha$  et  $x_0$  soit partout dense dans  $I$ .

Si cette propriété est vraie, les points dont l'orbite issue de  $x_0$  est dense, sont eux-mêmes denses dans  $I$ . En effet, si  $x_0$  convient, tous les  $x_n$  de la suite associée à  $x_0$  conviennent

aussi.

Une propriété équivalente est la suivante :

**Définition 9.**

Soit  $f_\alpha : I \longrightarrow I$  une fonction continue. On dit que  $f_\alpha$  est **topologiquement transitive** ou simplement **transitive** si, étant donnés deux ouverts non vides  $U$  et  $V$  de  $I$ , il existe un entier  $p$  tel que

$$f_\alpha^p(U) \cap V \neq \emptyset$$

Avec les notations précédentes, la dynamique est chaotique si et seulement si  $f$  est transitive.

### 2.5.2 Chaos, sensibilité et densité des points périodiques

Le chaos au sens précédent implique deux autres propriétés fondamentales. Donnons d'abord une autre définition.

**Définition 10.**

Soit  $f_\alpha : I \longrightarrow I$  une fonction continue. On dit que  $f_\alpha$  est **sensible aux conditions initiales** ou simplement **sensitive**, s'il existe  $\epsilon$  tel que, pour tout  $x \in I$ , on a :

$$\forall \eta > 0, \exists y \in I, \exists n \in \mathbb{N} : |x - y| < \eta \text{ et } |f^n(x) - f^n(y)| \geq \epsilon$$

On a alors le théorème suivant :

**Théorème 14** ([5]).

Soit  $f_\alpha : I \longrightarrow I$  une fonction continue. On suppose que la dynamique associée est chaotique. Alors :

- l'ensemble des points périodiques de  $f_\alpha$  est partout dense dans  $I$ .
- $f_\alpha$  est sensitive.

### 2.5.3 Routes vers le chaos

Un système dynamique possède en général un ou plusieurs paramètres dit (s)"de contrôle", qui agissent sur les caractéristiques de la fonction d'évolution. Selon la valeur du paramètre de contrôle, les mêmes conditions initiales mènent à des trajectoires correspondant à des régimes dynamiques qualitativement différents. La modification continue du paramètre de

contrôle conduit, dans bien des cas, à une complexification progressive du régime dynamique développé par le système.

Il existe plusieurs scénarios qui décrivent le passage du point fixe au chaos. On constate dans tous les cas que l'évolution du point fixe vers le chaos n'est pas progressive, mais marquée par des changements discontinus qu'on appelle "bifurcations". Une bifurcation marque le passage soudain d'un régime dynamique à un autre, qualitativement différent.

### 2.5.4 Exemples de systèmes dynamiques chaotiques

Un système chaotique est un système dynamique déterministe non linéaire qui se distingue par son imprévisibilité due à son extrême sensibilité aux conditions initiales. on présente un exemple classique de système dynamique chaotique qui est : l'application logistique.

#### L'application logistique

On présente ici un modèle de classe de systèmes dynamiques non linéaires à temps discret. Ce modèle est appelé application **quadratique** (ou **logistique**).

Nous allons suivre la démarche de Feigenbaum [9], qui s'est intéressé tout particulièrement à la cascade de doublement de période, dans le cadre des itérations d'une fonction mathématique  $f$  à valeurs réelles, vérifiant les hypothèses suivantes :

- $f$  doit être continue et différentiable de  $[0, 1]$  dans lui-même.
- $f$  a un maximum  $x_m$  avec  $f'(x_m) \neq 0$ .
- $f$  est monotone dans  $[0, x_m]$  et  $[x_m, 1]$ .
- $f$  a une dérivée Schwartzienne  $S_f(x) < 0$  pour tout  $x \in [0, 1]$

### 2.5.5 Etude de L'application logistique

Considérons l'application  $f$  qui est définie de  $[0, 1]$  dans lui-même par l'itération suivante :

$$f(x_n) = 4\lambda x_n(1 - x_n), \quad x_n \in [0, 1]$$

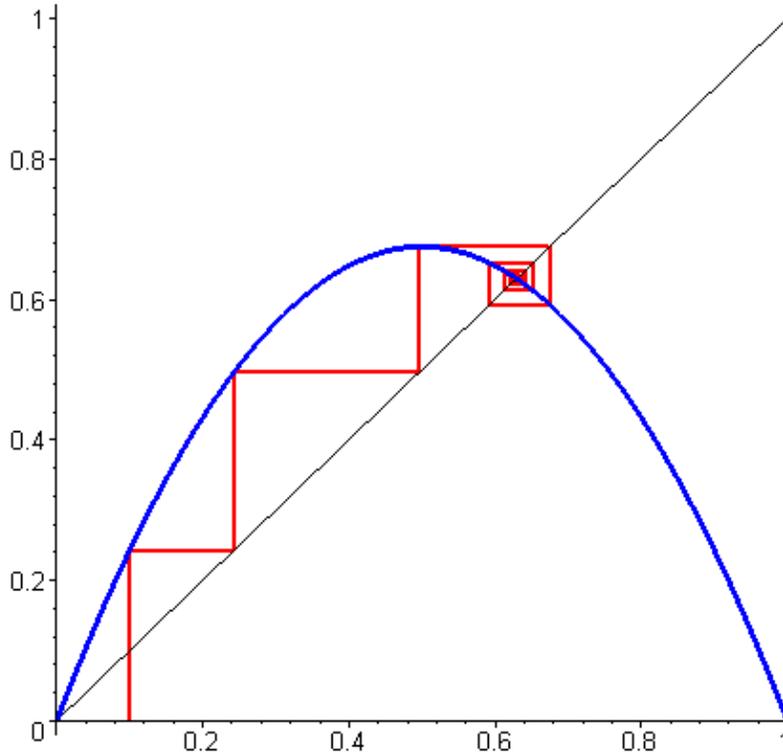


FIG. 2.10 – Orbite des itérations de la fonction  $f$  ; avec  $\lambda = 0,7$  et  $x_0 = 0,1$

où  $n = 0, 1, 2, \dots$  dénote le temps discret,  $x_n$  l'unique variable dynamique, et  $0 \leq \lambda \leq 1$  un paramètre.

$f$  est la fonction logistique, elle s'annule pour  $x = 0$  et  $x = 1$ , et sa dérivée s'annule pour  $x = 1/2$  donc atteint le maximum à  $x = 1/2$  et  $f(1/2) = \lambda$ .

Les points fixes de  $f$  sont les solutions de l'équation :  
 $x = 4\lambda x(1 - x), \lambda > 0$ , d'où  $x_1 = 0$  et  $x_2 = 1 - 1/4\lambda$  On voit bien sur la figure que les points d'équilibre de la suite considérée correspondent aux intersections de la courbe d'équations  $y = f(x)$  et  $y = x$ .

La dynamique de cette application présente un comportement très différent selon la valeur du paramètre  $\lambda$ .

**Valeurs de  $\lambda$  comprises entre 0 et 1**

Les domaines de stabilité sont alors donnés par :

\* $x_i$  est stable si  $|f'(x_i)| < 1$  ( $i = 1, 2$ )

\* $0 < \lambda < 0.25$  pour  $x_1$ .

\* $0.25 \leq \lambda \leq \lambda_1$  avec  $\lambda_1 = 0.75$  pour  $x_2$ .

Il existe alors, pour  $0 < \lambda \leq \lambda_1$ , un unique point fixe stable.

en modifiant la condition initiale  $x_0$ , la suite converge toujours mais la vitesse de convergence est différente.

-pour  $\lambda_1 = 0.75 : f'(x_2) = -1$  donc  $x = 3/2$  est un point de bifurcation.

**Valeurs de  $\lambda$  comprises entre  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$**

On relève que pour des valeurs de  $\lambda$  comprises entre  $\lambda_1 = 0.75$  et  $\lambda_2 = 0.86237$ , deux points de convergence  $x_3$  et  $x_4$  prennent naissance autour de  $x_2$ , et vérifient :

$$x_3 = f(x_4) \text{ et } x_4 = f(x_3)$$

Ces points ne sont donc pas des points fixes de  $f$  mais de  $g = f \circ f$ , où  $\circ$  désigne la composition, ils forment un attracteur d'ordre 2 (cycle).

pour  $\lambda_2 = 0.86237$  le cycle d'ordre 2 perd sa stabilité et donne lieu à un cycle d'ordre 4.

**Valeurs de  $\lambda$  comprises entre  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$**

De même, pour des valeurs de  $\lambda$  comprises entre  $\lambda_2 = 0.86237$  et  $\lambda_3 = 0.87$ ; la pente devient supérieure à 1, et la suite prend alors quatre valeurs différentes, qui sont :

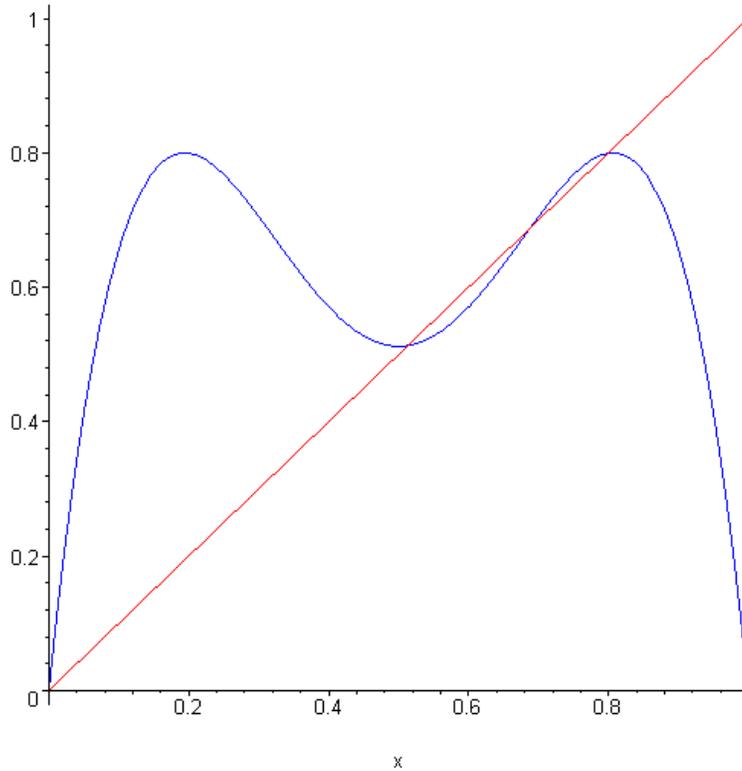


FIG. 2.11 – la fonction  $g$  pour  $\lambda = 0,8$

$$x_5 = f(x_8), x_6 = f(x_5), x_7 = f(x_6), x_8 = f(x_7)$$

Ces points sont des points de la fonction  $h = g \circ g$ .

Il y a ainsi **quadruplement de période**.

On assiste ainsi à toute une série de doublement de période, pour des valeurs du paramètre de plus en plus rapprochées, ce qu'on appelle une **"cascade sous-harmonique"**.

Cette cascade se produit jusqu'à atteindre une valeur limite du paramètre de bifurcation  $\lambda = \lambda_c = 0.892489418$ , au-delà de laquelle le comportement devient chaotique.

La longueur des plages de paramètres correspondant à un comportement donné ( $\lambda_j - \lambda_{j-1}$ ) diminue au fur et à mesure des bifurcations de la manière suivante :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\lambda_n - \lambda_{n-1})}{(\lambda_{n+1} - \lambda_n)} = C_F = 4.6692016609102\dots$$

où  $C_F$  est la constante de **Feigenbaum**.

### 2.5.6 Diagramme de bifurcation

Il est intéressant de visualiser ces différents comportements sur un diagramme de bifurcation. On trace tous les points obtenus en fonction de la valeur du paramètre de bifurcation  $\lambda$  correspondante. Le nombre de points différents représentés sur une même droite verticale donne donc ainsi le facteur par lequel est multipliée la période initiale. On y retrouve bien les valeurs des seuils de bifurcation  $\lambda_i$ . (voir Fig.2-13)

### 2.5.7 La constante de Feigenbaum

La découverte de cette constante est due entièrement au mathématicien **Mitchell J. Feigenbaum**, qui l'a calculée à l'aide d'une simple calculette vers 1975. Il avait observé que les bifurcations de l'application quadratique convergeaient vers une limite d'une façon régulière. Il a donc été conduit à étudier la suite  $u_k = \lambda_{k+1} - \lambda_k$  et il a remarqué qu'elle se conduisait presque comme une suite géométrique. Presque, car le rapport  $\delta_k = u_k/u_{k+1}$  n'est pas constant, mais  $\delta_k$  tend vers une limite  $C_F$ . Avec les valeurs de  $\lambda_k$  que l'on a, cela donne :

$$\delta_1 = 4.7514, \delta_2 = 4.6562, \delta_3 = 4.6682, \delta_4 = 4.6687\dots$$

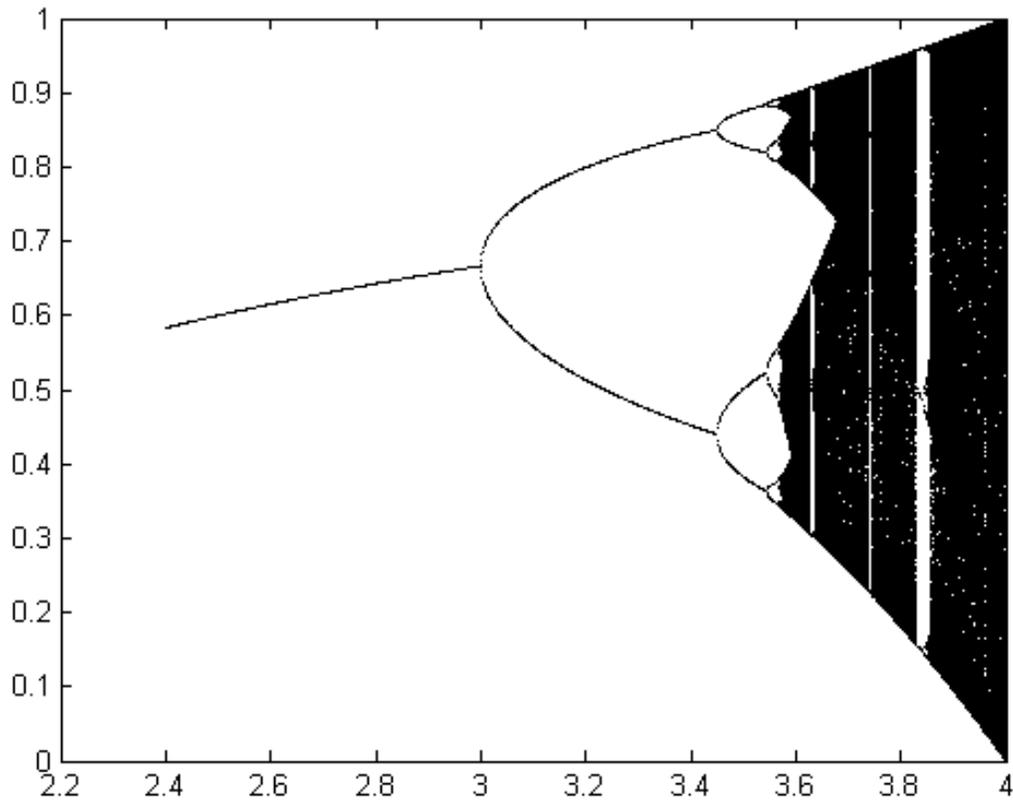


FIG. 2.12 – Diagramme de bifurcation de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \lambda x(1 - x)$  et  $2.4 \leq \lambda \leq 4$

Ce nombre est la constante de Feigenbaum. On le retrouve dans un grand nombre de phénomènes liés aux systèmes dynamiques, dans des domaines aussi variés que l'hydrodynamique, l'électronique, l'acoustique et le laser.

## Chapitre 3

---

# Le Modèle de Ricker

---

Un des modèles mathématiques les plus employés pour l'étude de la population des saumons a été développé par **W. Ricker (1954)**. Dans ce chapitre, nous décrivons ce modèle et ses propriétés, puis nous montrons que ce modèle, plutôt simple, présente néanmoins un comportement chaotique dans certaines circonstances.

### 3.1 Historique

#### La vie du saumon

Quelque années après leur naissance, les saumons adultes commencent un voyage laborieux vers leur lieu de naissance, guidés par leur instinct, ils nagent des milliers de kilomètres contre le courant, ils atteignent finalement leur lieu de naissance. Les saumons femelles pondent leurs œufs qui sont alors fertilisés par les saumons mâles ; à ce moment, les saumons ont perdu un quart de leur poids, ayant jeûné pendant leur voyage, puis ils meurent bientôt dans les mêmes eaux. Quelques mois plus tard, les bébé saumons émergent. A ce stade, ils sont vulnérables aux oiseaux et aux poissons prédateurs. Quand les survivants deviennent assez grands, ils commencent leur voyage de nouveau vers l'océan où le cycle de vie recommence.

#### Dérivation du modèle<sup>[4]</sup>

Puisque la génération précédente meurt avant que la prochaine n'apparaisse, on va donc employer une équation aux différences pour exprimer la population de n'importe quelle génération en terme de la précédente.

Le modèle exige six suppositions : nous commençons par la première. Le nombre d'œufs pondus est proportionnel au nombre de saumons adultes et, en second lieu, la population de la deuxième génération est proportionnel au nombre d'œufs pondus. Cette supposition semble raisonnable et quand nous les regroupons nous obtenons :  $y_{n+1} \propto y_n$ , où :  $y_{n+1}$  population de l'année  $n + 1$ .

$y_n$  population de l'année  $n$ .

La population de saumons augmente exponentiellement c'est-à-dire que nous aurons  $y_{n+1} = y_0 k'^n$  où  $k'$  la constante de proportionnalité.

Mais cette croissance est limitée par les oiseaux et d'autre poissons qui attaquent les jeunes saumons. La troisième supposition est que, jusqu'à ce qu'ils atteignent une certaine taille, les saumons sont mangés avec un taux proportionnel à leur nombre. Posons  $R$  la population de la nouvelle génération, connue sous le nom de recrues, on aura :  $dR/dt = -cR$  où  $c$  est une constante. Notons que si  $R$  est grand, la prédation continue sans interruption sur une certaine période  $T$ . La solution de l'équation différentielle est :  $R = R_0 e^{-ct}$ .

Notre quatrième supposition est qu'après un moment  $T$ , les jeunes saumons deviennent trop grands pour que la plupart des prédateurs les avalent, et ainsi leur population cesse de diminuer. La cinquième supposition est que  $T$  est proportionnel au nombre d'œufs pondus, nombre que nous avons supposé être proportionnelle à la population adulte ainsi nous supposons que :  $T = ky_n$ ,  $k$  est une constante de proportionnalité.

Enfin, nous supposons que le nombre d'adultes dans la deuxième génération est proportionnel au nombre de recrues, on aura :  $y_{n+1} \propto y_n e^{-cky_n}$ .

Puisque les deux quantités sont proportionnelles alors elles doivent être proportionnelle a leur produit, nous prenons cette constante de proportionalité égale à  $e^r$  on aura alors :

$$y_{n+1} = y_n e^{r - cky_n}$$

Si  $y_n = r/ck$  donc ( $y_{n+1} = y_n$ ) par conséquent, toutes les populations suivantes sont égales c'est une valeur singulière de population, connue sous le nom de population d'équilibre. Notons  $p = r/ck$ , et nous supposons  $r$  positif, autrement la population d'équilibre n'existera pas. Donc la population va diminuer quand le temps passe :

$$y_{n+1} = y_n e^{r(1 - \frac{y_n}{p})} \tag{3.1}$$

C'est la forme générale du modèle de Ricker avec :

$p$  représente la capacité limite du milieu.

$r$  le taux de croissance intrinsèque de la population.

Ce modèle ne doit pas être confondu avec la réalité, néanmoins c'est une première étape vers une étude qualitative de la population de saumons ; une fois traités en tenant compte du contexte, les résultats peuvent être utiles.

## 3.2 Reformulation

Nous commençons par simplifier 3.1 on posant  $\alpha = e^r$ ,  $b = \frac{r}{k}$ ,  $x_n = by_n$ , nous obtenons  $x_{n+1} = f_\alpha(x_n)$  qui est le modèle simplifié de Ricker avec :

$$f_\alpha : [0, +\infty[ \longrightarrow [0, +\infty[$$

$$x \longrightarrow f_\alpha(x) = \alpha x e^{-x}$$

Où  $\alpha$  est un paramètre réel positif ( $\alpha > 0$ ).

### 3.3 Propriété du modèle

On a  $f'(x) = \alpha e^{-x}(1 - x)$  et  $\lim_{x \rightarrow \infty} = 0$ , nous voyons que : si  $x < 1$ ,  $f'(x) > 0$ , ainsi  $f$  est croissante, et  $f$  est décroissante pour  $x > 1$ . La population de la deuxième génération est plus grande quand  $x = 1$ , cette valeur de  $x$  est connue comme le niveau maximum de recrutement.

Sur la figure, nous avons tracé pour différentes valeurs de  $\alpha$ , le graphe de  $f$  avec la droite  $y = x$ , la population se développe si  $f(x) > x$

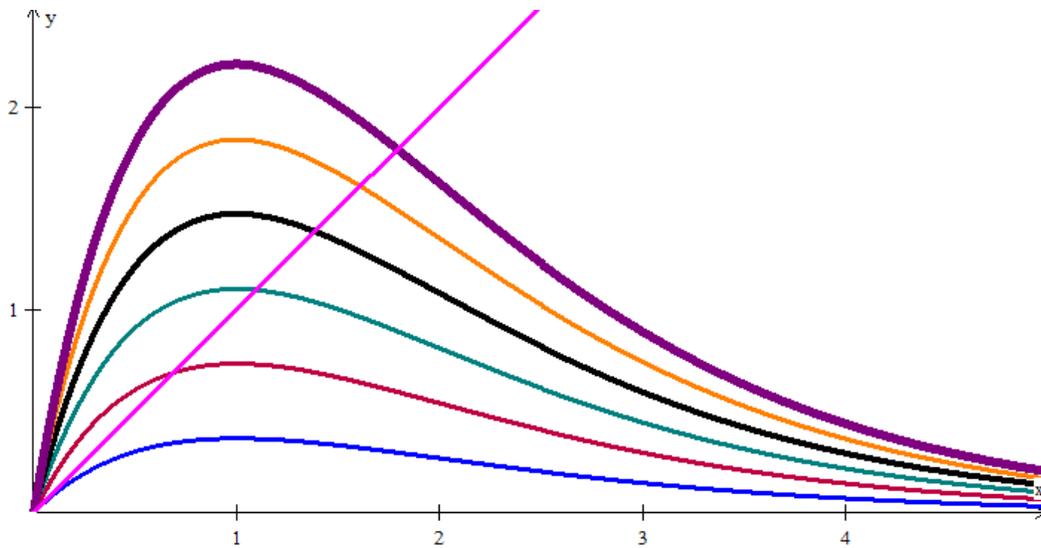


FIG. 3.1 – Le graphe de la deuxième génération en fonction de la première génération

### 3.3.1 Recherche et nature des points fixes de $f_\alpha$

#### Recherche des points fixes

$$\begin{aligned}
 f_\alpha(x) = x &\implies \alpha x e^{-x} = x \\
 &\implies \alpha x e^{-x} - x = 0 \\
 &\implies x(\alpha e^{-x} - 1) = 0 \\
 &\implies x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \ln \alpha
 \end{aligned}$$

Comme  $x \geq 0$  donc le point fixe  $x = \ln \alpha$  existe si et seulement si  $\alpha \geq 1$ .

Donc, on a :

Si  $0 < \alpha < 1$ ,  $f_\alpha$  admet un seul point fixe  $x = 0$ .

Si  $\alpha > 1$ ,  $f_\alpha$  admet deux points fixes  $x_1 = 0$  et  $x_2 = \ln \alpha$ .

Si  $\alpha = 1$ , les deux points fixes sont confondus  $x_1 = x_2 = 0$ .

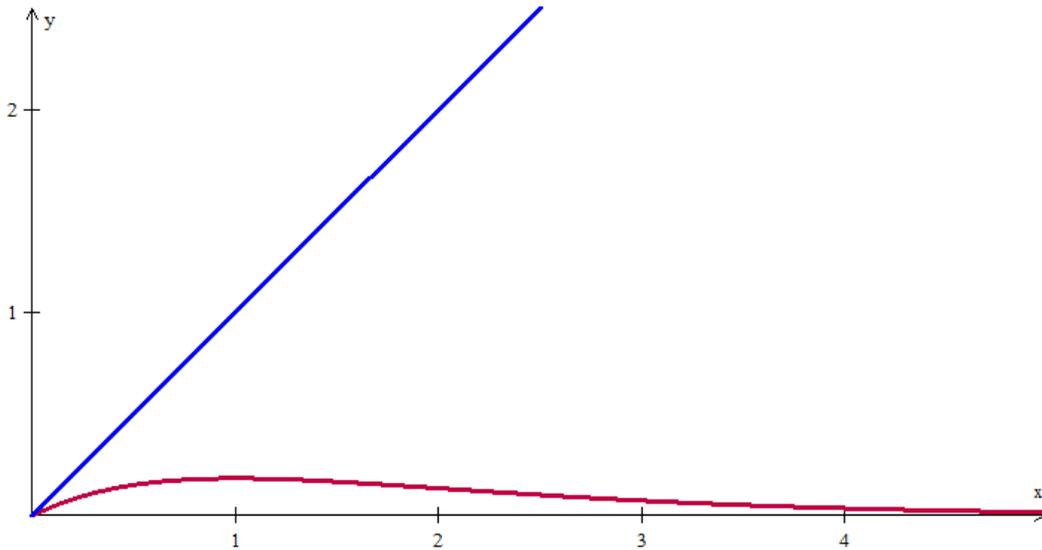


FIG. 3.2 – Le graphe de  $f$  avec  $\alpha = \frac{1}{2}$

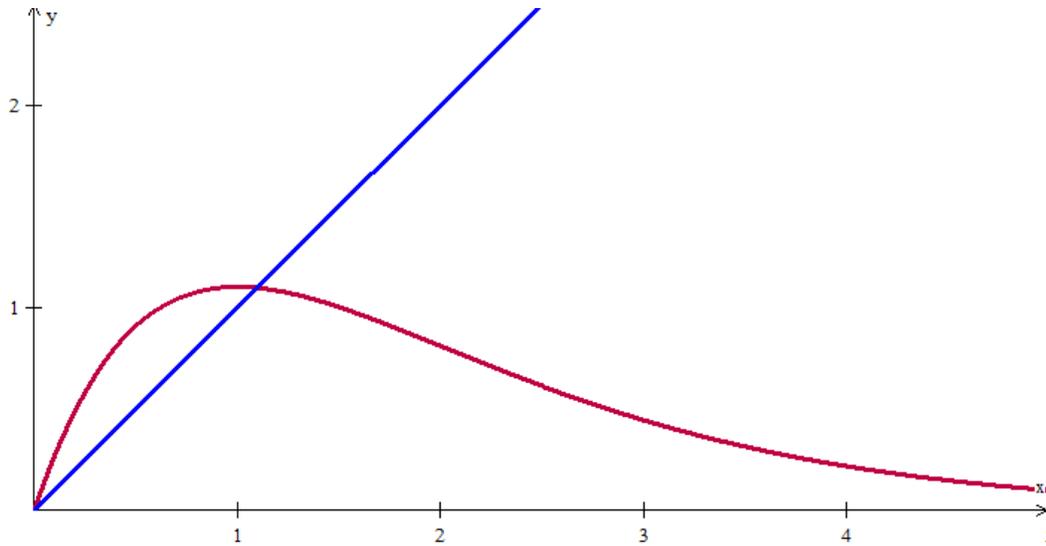


FIG. 3.3 – Le graphe de  $f$  avec  $\alpha = 3$

### Stabilité des points fixes

La stabilité des points fixes  $x^*$  dépend évidemment du paramètre  $\alpha$ .

-Si  $0 < \alpha \leq 1$

$f_\alpha$  admet un seul point fixe  $x^* = 0$ , étudions sa stabilité.

$$f'_\alpha(x) = \alpha e^{-x}(1-x) \text{ d'où } f'_\alpha(x^*) = \alpha$$

-Si :

$-0 < \alpha < 1 \implies x^*$  est stable.

-  $\alpha = 1 \implies x^* = 0$  est indifférent.

Pour  $\alpha = 1$  on a :

$f''_1(x^*) < 0$  en vertu du théorème 4 (Chapitre I) le point fixe  $x^*$  est stable.

-Si  $\alpha > 1$  :

On a montré que  $f$  admet deux points fixes  $x_1 = 0$  et  $x_2 = \ln \alpha$ .

-  $f'_\alpha(x_1) = \alpha > 1 \implies x_1 = 0$  est un point fixe repulsif.

-  $f'_\alpha(x_2) = f'_\alpha(\ln \alpha) = 1 - \ln \alpha$ .

Si

$$|1 - \ln \alpha| < 1 \implies -1 < 1 - \ln \alpha < 1$$

$$\implies -2 < -\ln \alpha < 0$$

$$\implies 0 < \ln \alpha < 2$$

$$\implies 1 < \alpha < e^2$$

$$\implies 1 < \alpha < 7.389\dots$$

alors  $x_2 = \ln \alpha$  est un point fixe stable.

Si  $|1 - \ln \alpha| = 1$  alors  $\alpha = e^2$  donc  $x_2 = 2$  est un point fixe indifférent et  $x_1 = 0$  est un point fixe instable.

Pour  $\alpha = e^2$  on a :  $f'_{e^2}(x_2) = -1$ ,  $f''_{e^2}(x_2) = 0$  et,  $Sf'''_{e^2}(x_2) < 0$  d'où en vertu du théorème 6 (Chapitre I)  $x_2$  est stable.

-Si  $|1 - \ln \alpha| > 1$  alors  $\alpha > e^2$  donc  $x_1 = 0$  et  $x_2 = \ln \alpha$  deviennent tous les deux instables.

On représente les points fixes pour différentes valeurs du paramètre  $\alpha$  à l'aide de la figure (3 - 4) suivant le plan  $\alpha O x$  qui est une partie du diagramme de bifurcation.

$$\begin{aligned} D &= \{(\alpha, x) | x = \alpha x e^{-x}\} \\ &= \{(\alpha, x) | x \text{ est un point fixe de } f_\alpha\} \end{aligned}$$

Il est clair que  $D = \{(\alpha, x) | x = 0\} \cup \{(\alpha, x) | x = \ln \alpha\}$  Ainsi on obtient :

Le point  $(\alpha, x) = (1, 0)$  est un point de bifurcation .

Pour  $\alpha$  fixé, l'intersection de  $D$  avec la droite verticale passant par  $(\alpha, 0)$  donne l'ensemble des points fixes pour  $f_\alpha$ .

Ayant établi la nature des points fixes, nous allons préciser en indiquant, en pointillés, les branches constituées des points fixes instables, ce qui donnera :

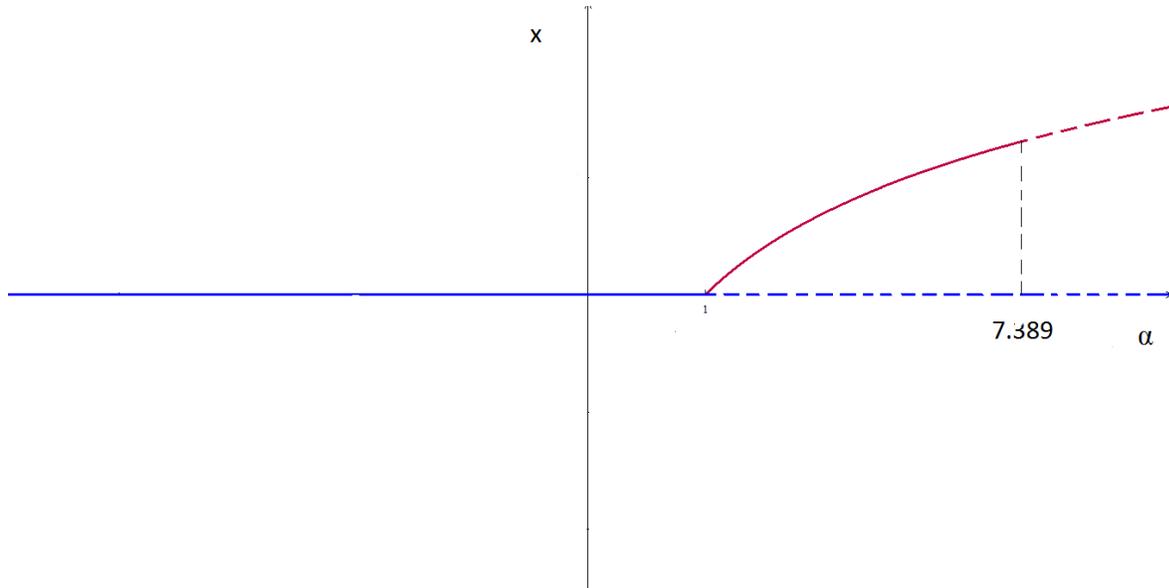


FIG. 3.4 –

### 3.4 Zones des cycles d'ordre $2^n$

**Valeur de  $\alpha$  comprise entre  $\alpha_1 = e^2$  et  $\alpha_2 = 12.509119730$**

Pour  $\alpha > e^2$  le point fixe  $x_2 = 2$  perd sa stabilité et sa dérivé vaut  $-1$  donc on peut s'attendre à une bifurcation de type "dédoublément de période".

On relève (Figure 3 – 5) que pour des valeurs de  $\alpha > e^2$ , deux points de convergence  $x_3$  et  $x_4$  prennent naissance et vérifient

$$x_3 = f_\alpha(x_4) \quad \text{et} \quad x_4 = f_\alpha(x_3)$$

Donc ces point ne sont pas des points fixes de  $f_\alpha$  mais de  $g = f \circ f$ , il forment un attracteur d'ordre 2.

La résolution analytique (sous Maple et Matlab) de l'équation  $f^2(x) = x$  s'est averée infructueuse : on n'a pas pu trouver les points du 2-cycle en fonction de  $\alpha$ . On a eu recours à la résolution numérique pour chaque valeur de  $\alpha$ .

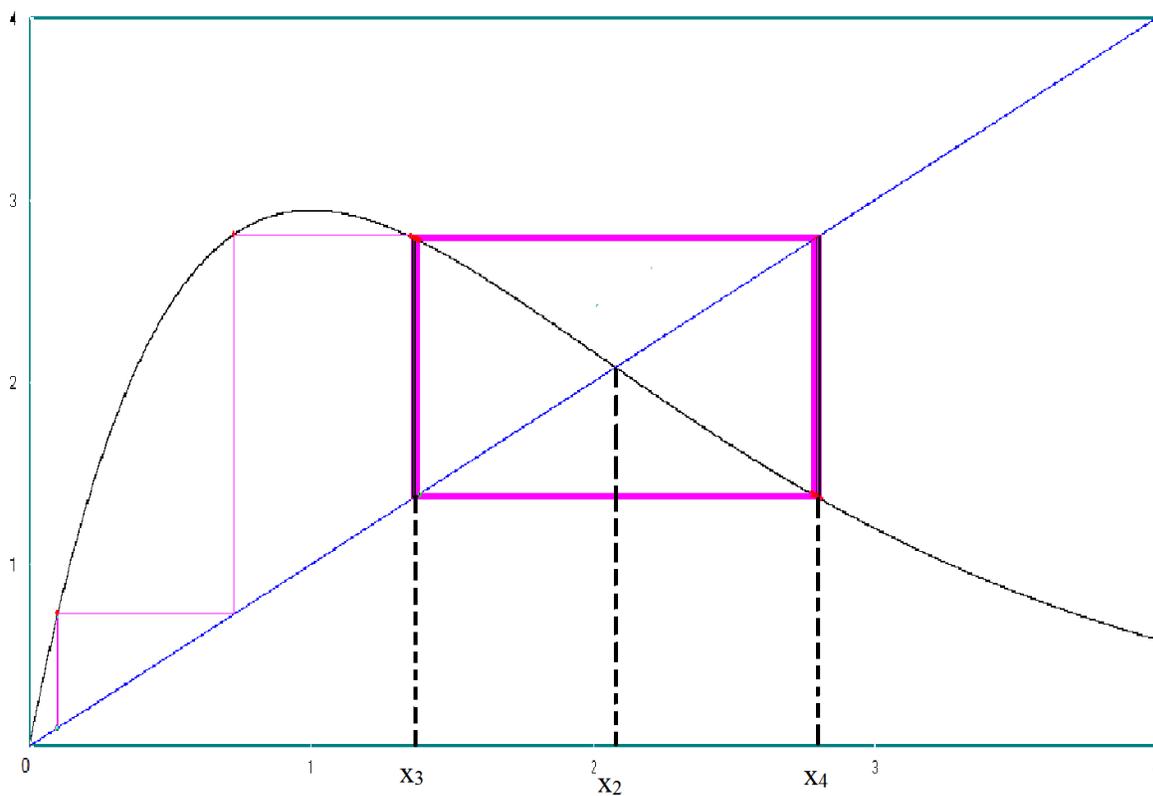


FIG. 3.5 – Orbite de  $f$  avec  $\alpha = 8$  et  $x_0 = 0, 1$

Par contre,  $f$  n'admet pas des cycles d'ordre 3 dans  $] \alpha_1, \alpha_2[$ . La figure (3 – 6) ci-après illustre ce fait pour  $\alpha = 8$ . La fonction  $f^3$  n'admet que  $x_1 = 0$  et  $x_2 = \ln \alpha$  comme points fixes.

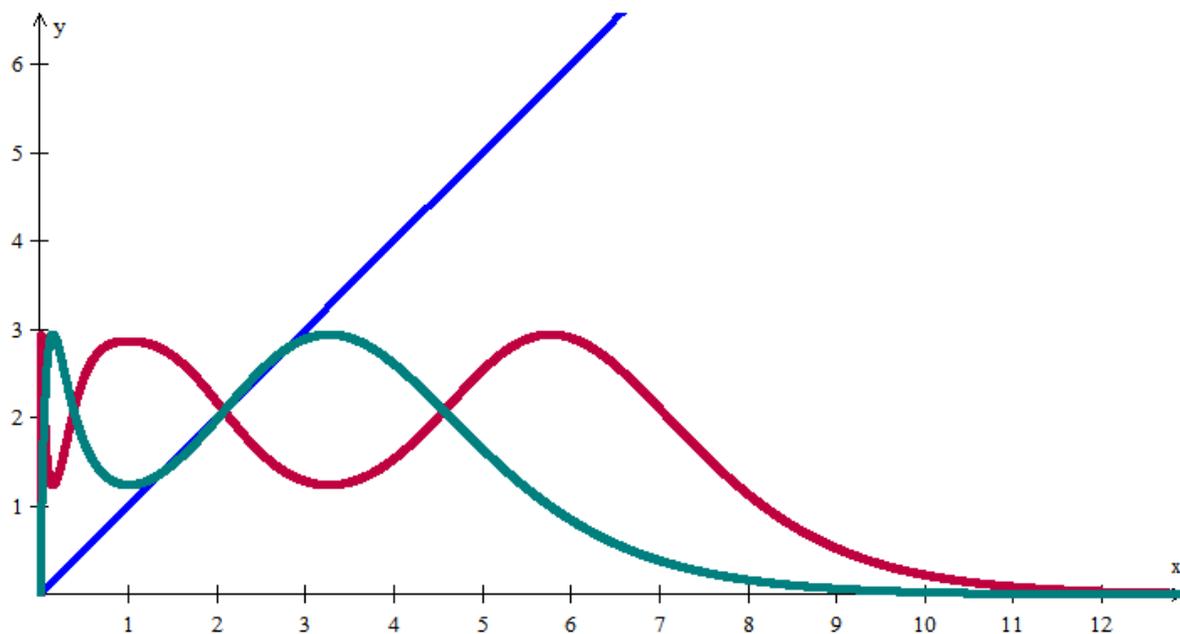


FIG. 3.6 – Les graphes de  $f^2$ (en vert) et  $f^3$ (en rouge) avec  $\alpha = 8$

Pour  $\alpha > e^2$ , les résultats précédents nous permettent d'ajouter au diagramme précédent la figure suivante :

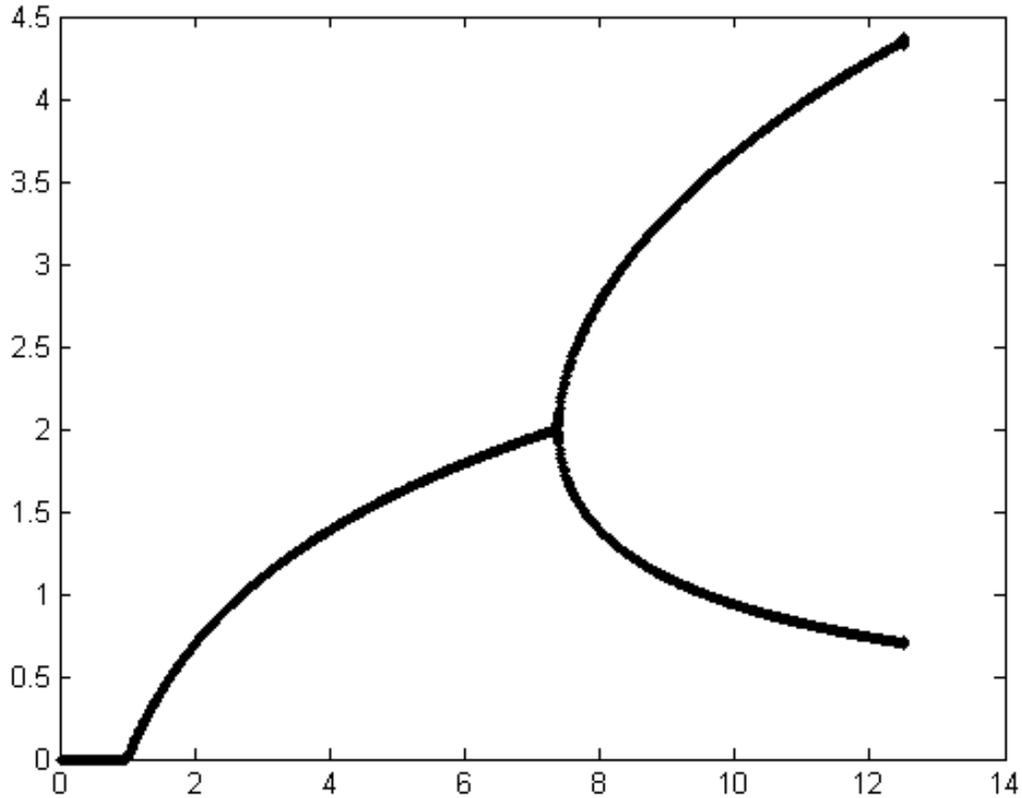


FIG. 3.7 – Diagramme partiel du modèle de Ricker avec  $0 < \alpha < \alpha_2$

**Valeur de  $\alpha$  comprise entre  $\alpha_2$  et  $\alpha_3 = 14.244200395$**

De même, pour des valeurs de  $\alpha$  comprises entre  $\alpha_2$  et  $\alpha_3$ , le 2-cycle devient instable, la pente de  $g$  devient supérieur à 1 en valeur absolue et la suite prend quatre valeurs différentes qui sont

$$x_5 = f_\alpha(x_8), \quad x_6 = f_\alpha(x_5), \quad x_7 = f_\alpha(x_6), \quad x_8 = f_\alpha(x_7)$$

Ces points sont des points fixes de la fonction  $h = g \circ g$  où  $g = f \circ f$ .

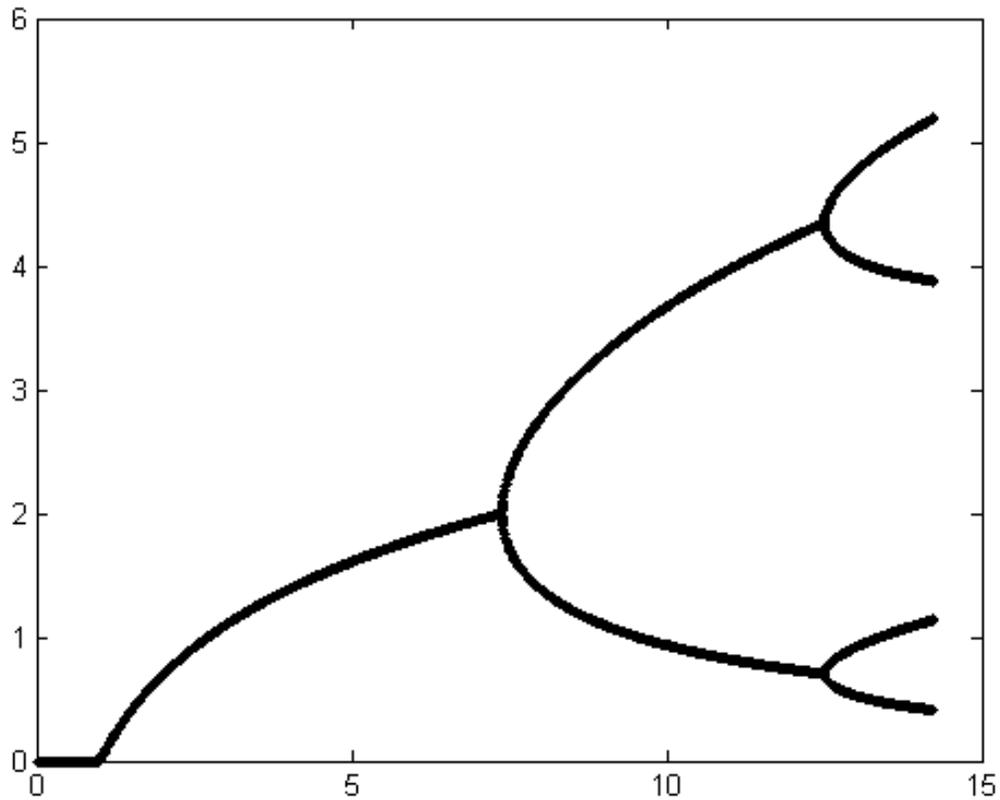


FIG. 3.8 – Diagramme partiel du modèle de Ricker avec  $0 < \alpha < \alpha_3$

Ainsi on va assister à une cascade de dédoublements de période. Pour détecter les zones des cycle d'ordre  $2^n$ ,  $n \geq 1$ , on a élaboré un programme, écrit sous Matlab, pour approcher les valeurs de bifurcation successives  $\alpha_i$   $i \geq 2$ .

Les valeurs  $\alpha_i$  trouvées (à  $10^{-9}$  près) sont reportées dans la table présentée ci-après.

passage du cycle d'ordre $2^k$	au cycle d'ordre $2^{k+1}$	valeur de bifurcation
$2^0$	$2^1$	$\alpha_2 = 7.389056099$
$2$	$2^2$	$\alpha_2 = 12.509119730$
$2^2$	$2^3$	$\alpha_3 = 14.244200395$
$2^3$	$2^4$	$\alpha_4 = 14.652666041$
$2^4$	$2^5$	$\alpha_5 = 14.742117721$
$2^5$	$2^6$	$\alpha_6 = 14.761364472$
$2^6$	$2^7$	$\alpha_7 = 14.765492823$
$2^7$	$2^8$	$\alpha_8 = 14.766398563$
$2^8$	$2^9$	$\alpha_9 = 14.766594701$
$2^9$	$2^{10}$	$\alpha_{10} = 14.766653856$

TAB. 3.1 –

Afin de vérifier ces résultats, calculons les rapports  $\delta_k = \frac{\alpha_{k+1} - \alpha_k}{\alpha_{k+2} - \alpha_{k+1}} \quad \forall k \geq 1$ .

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_3 - \alpha_2} = \frac{5.120063631}{1.735080665} \simeq 2.950908124 \\ \delta_2 &= \frac{\alpha_3 - \alpha_2}{\alpha_4 - \alpha_3} = \frac{1.735080665}{0.408465646} \simeq 4.24780072 \\ \delta_3 &= \frac{\alpha_4 - \alpha_3}{\alpha_5 - \alpha_4} = \frac{0.408465646}{0.08945168} \simeq 4.566327273 \\ \delta_4 &= \frac{\alpha_5 - \alpha_4}{\alpha_6 - \alpha_5} = \frac{0.08945168}{0.01924671} \simeq 4.647634843 \\ \delta_5 &= \frac{\alpha_6 - \alpha_5}{\alpha_7 - \alpha_6} = \frac{0.01924671}{0.004128351} \simeq 4.662081785 \end{aligned}$$

Ces valeurs  $\delta_k$  s'approchent de la constante universelle de Feigenbaum  $\delta \simeq 4.6692116609\dots$  qui caractérise la transition vers le chaos par dédoublement de période.[9]

**Remarque**

Il y a lieu de relever qu'à l'approche de  $\alpha^* = \lim_{i \rightarrow \infty} \alpha_i = \alpha^{10}$ , les quantités ( $\delta_k$ ,  $k = 6, 7$  et  $8$ ) sont caractérisées par une grande instabilité numérique due à la taille du cycle et à la précision-machine

### 3.5 Diagramme de bifurcation

Il est intéressant de visualiser ces différents comportements sur un diagramme de bifurcation. On trace tous les points obtenus en fonction de la valeur du paramètre de bifurcation correspondant.

Dans la figure ci-après, on présente le diagramme de bifurcation de notre modèle. Pour cela, on a élaboré un programme sous Matlab dans lequel on a procédé de la manière suivante :

-On fixe la condition initiale.

-On fait varier le paramètre  $\alpha$  de 0 à 40 avec un pas de  $10^{-4}$ .

-Pour chaque valeur de  $\alpha$ , on fait  $5 \times 10^4$  itérations pour éliminer le régime transitoire éventuel. Puis on stocke les dernières valeurs.

Ensuite, on calcule/stocke les  $10^6$  itérés  $x_k$  suivants, et pour chaque valeur du paramètre  $\alpha$ , on trace les points  $(\alpha, x_k)$ .

On a obtenu le diagramme de bifurcation suivant :

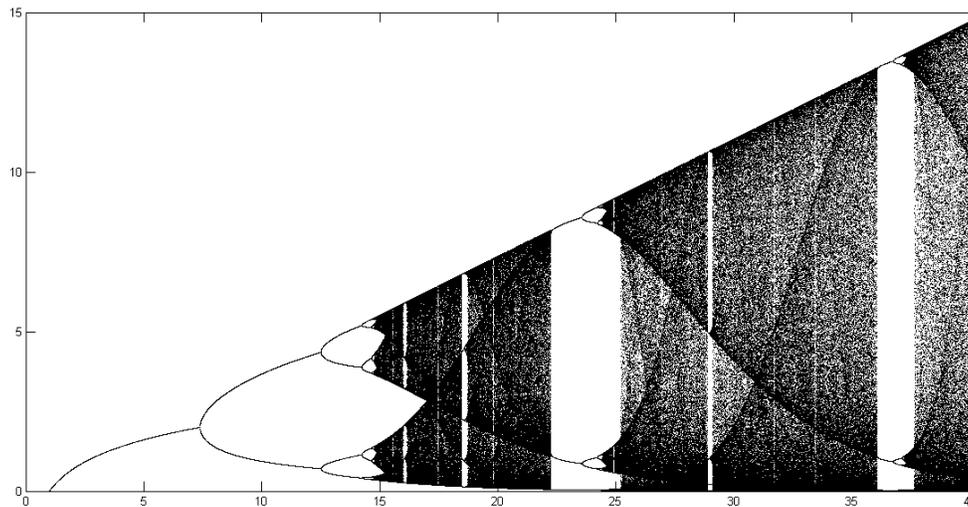


FIG. 3.9 – Diagramme de bifurcation de  $f_\alpha(x) = \alpha x e^{-x}$   $0 < \alpha < 40$

**Théorème 15.** [Li et York]

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue et ayant un point de période 3. Alors  $f$  a des cycles de tout ordre.

Il s'est avéré que l'observation de Li et York est un cas particulier d'un résultat plus général dû au mathématicien Ukrainien A. N. Sarkovskii.

Pour énoncer ce dernier, nous allons d'abord ordonner les nombres naturels comme suit  $3 \triangleleft 5 \triangleleft 7 \triangleleft \dots \triangleleft 2 \times 3 \triangleleft 2 \times 5 \triangleleft 2 \times 7 \triangleleft \dots \triangleleft 2^n \times 3 \triangleleft 2^n \times 5 \triangleleft 2^n \times 7 \triangleleft \dots \triangleleft 2^n \triangleleft \dots \triangleleft 2^3 \triangleleft 2^2 \triangleleft 2 \triangleleft 1$

**Théorème 16.** [Sarkovskii]

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue. Supposons que  $f$  a un point de période  $n$ . Alors  $f$  a au

*moins un point de période  $m$  pour tout  $m$  tel que  $n \triangleleft m$ .*

On constate, sur le diagramme de bifurcation (Fig 3 – 9), que  $f$  admet un cycle d'ordre 3 pour, par exemple  $\alpha = 22.5$  ; un 5-cycle pour  $\alpha = 18.5$  et un 7-cycle pour  $\alpha = 17.46$ .

### 3.6 Fenêtres périodiques

Le diagramme de bifurcation (pour  $\alpha \simeq \alpha_{10}$ ) montre qu'il y a de nombreux intervalles de valeurs de  $\alpha$  pour lesquelles on a un point périodique stable. On appelle ces intervalles des "fenêtres périodiques".

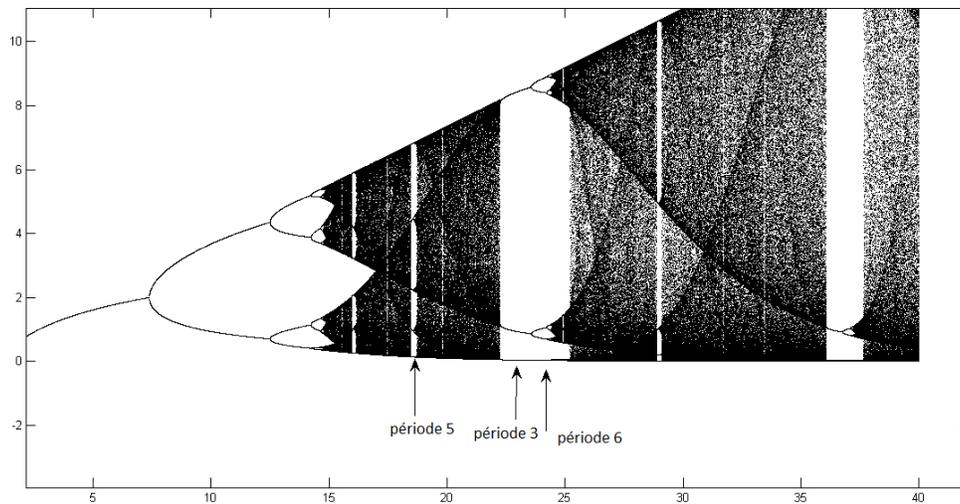


FIG. 3.10 –

On voit clairement (Fig 3-10), les fenêtres de période 3, 5, 7 et 6. Pour une perception meilleure de la fenêtre de période 3, on présente en figure (3-11) l'agrandissement du diagramme entre  $\alpha = 22$  et  $\alpha = 25$ .

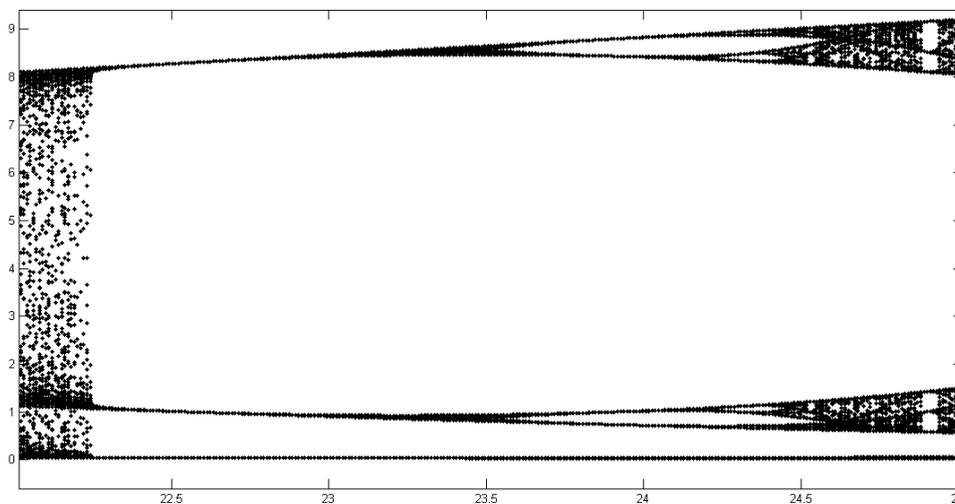


FIG. 3.11 – Fenêtre de période 3

A droite de cette dernière plage de variation, on remarque la présence d'un cycle d'ordre ( $6 = 2^1 \times 3$ ), celui-ci se dédouble pour donner naissance à un cycle d'ordre ( $12 = 2^2 \times 3$ ) et ainsi de suite.

le même scénario se répète pour les fenêtres de période 5, 7, 9... *etc.* Ceci illustre les résultats du théorème de Sarkovskii.

---

# Conclusion

---

Dans ce travail, nous avons étudié le modèle de Ricker qui décrit l'évolution de la population de saumons.

Nous avons vu comment ce modèle, plutôt mathématiquement simple (application continue, différentiable), présente néanmoins un comportement chaotique pour certaines valeurs du paramètre.

Le manque flagrant de documentation sur le modèle de Ricker nous a amenés, lors de son étude, à recourir aux aspects programmation et applications graphiques.

Grace à la puissance des ordinateurs, la théorie des systèmes dynamiques, ainsi que la notion de chaos, ont induit des avancées importantes dans différentes disciplines (Sciences de l'ingénieur, économie, biologie...etc). Cette théorie ne cesse d'ailleurs pas de se développer et d'attirer l'attention de nombreux chercheurs de profils différents.

---

# Bibliographie

---

- [1] A. Fortin, Analyse numérique pour ingénieurs, édition de l'école polytechnique de Montréal.
- [2] B. F. Dos Reis, Le chaos. Une étude de la théorie de la bifurcation (2008).
- [3] B. Ricker, An appreciation, Springer volume 75, 2006.
- [4] B. Ricker, [1954] Stock and recruitment, J. fisheries Res. board Can, 11, 559 – 623
- [5] D. Perrin. La suite logistique. Institut de la recherche sur l'enseignement des Mathématiques. Paris 7.
  
- [6] O. Kornad, S. J. Linz and M. Luck. Ricker model, Physical review 1991.
- [7] Gerda de Vries, T. Hillen, M. Lewis, J. Muller, B. Schonfish. A Course in Mathematical Biology. SIAM (Society for Industrial and Applied Mathematics Philadelphia).
- [8] H. Le Dret. Équation aux dérivées partielles elliptiques. Université Pierre et Marie Curie. La science à Paris. 2010
- [9] Feigenbaum. Quantitative Universality for a Class of Non linear Transformation, Journal of statistical Physics, 1978.
- [10] F. Jędrzejewski, Introduction aux méthodes numériques. Deuxième édition. Springer.
- [11] F.M. Hilker and F. H. Westerhoff. Preventing Extinction and Outbreaks in Chaotic Population. Vol. 170, N 2 Instituto Gulbenkian de Ciencia Germany 2007.
- [12] J. Bricmont, Introduction à la dynamique non linéaire Unité de Physique théorique et mathématique, Chemin du Cyclotron 2, B-1348 LLN
- [13] J. Murray. Mathematical Biology, Springer, 1989
- [14] Calgary, Alberta. A Spatial Generalisation of the Ricker Model and the Break of Chaos J. Haroutunian 2009.
  
- [15] J. P. Demailly, Analyse numérique et équation différentielle. EDP Sciences (2006).
- [16] J-J. Gervais, Introduction aux fractals et aux systèmes dynamiques. 2<sup>e</sup> version Août 2009

- [17] J.A Meyer, Sur la dynamique des système écologiques non linéaires. Journal de Physique 1978.
- [18] M.Gatto, The Evolutionary Optimality of Oscillatory and Chaotic Dynamic in Simple Population Models. Theoretical Population Biology 1993
- [19] P. Magel, S. Ruan (EDS). Structured population in Biology and Epidemiology. Springer (1956).
- [20] P. Halay, The Art of Mathematics and Fishing.
- [21] Raymond N. Gronweel, Ho Kuen Ng. The Ricker Salmon Model. The UMP Journal, Vol, V, No 3 (1984).
- [22] T. Contenza, M. Cox, j. Novak, M. Teboh-Ewungkem, M. Vanderschoot. Modeling Biological Population. DIMAC (2007).
- [23] Yuri. A. Kuznetnov. Elements of Applied Bifurcation Theory, Second Edition, Springer Volume (112)

# Résumé

Les systèmes d'équations différentielles paramétrées peuvent avoir différents comportements asymptotiques (tendre vers un équilibre, un cycle limite . . .) en fonction des valeurs de leurs paramètres. Il peut donc exister certaines valeurs pour lesquelles le comportement du système passe d'un état qualitatif à un autre (l'attracteur du système était un équilibre et devient un cycle par exemple). Ce changement d'état qualitatif est une bifurcation et la valeur du paramètre associée est appelée valeur de bifurcation. Sur un intervalle de valeurs d'un paramètre qui contient une valeur de bifurcation, un système est donc structurellement instable. L'analyse de bifurcations a pour objectif de localiser ces éventuelles valeurs particulières des paramètres.

Nous consacrerons la première partie de notre travail à la présentation de la méthode du point fixe.

Dans le deuxième chapitre nous donnons des définitions relatives aux systèmes dynamiques discrets. Nous développons particulièrement des concepts liés à la dynamique chaotique et à la bifurcation en illustrant ces notions par des exemples. L'observation la succession des bifurcations permet de comprendre les mécanismes qui peuvent conduire à l'apparition du chaos.

Le dernier chapitre est consacré à l'application de la théorie du Chaos au modèle de W. Ricker. L'outil mathématique manque (concernant ce modèle), on aura recours à l'ordinateur. Pour cela, on a élaboré deux programmes écrits sous Matlab, le premier pour approcher les valeurs de bifurcation successives, alors que le deuxième nous a permis de visualiser le diagramme de bifurcation.