

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE A. MIRA BEJAIA

Faculté des Sciences Exactes

Département de Mathématiques M/I

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de MASTER

En : MATHEMATIQUES

Spécialité : Analyse et Probabilité

Par : TAKHEDMIT Baya

THEME

**ANALYSE DES SYSTEMES DE FILES D'ATTENTE
PAR LA METHODE DES MARTINGALES.**

Soutenu publiquement le : 10 /06 /2012,
devant le jury composé de :

Mr M. BOUALEM, Président

Mme L. BOURAINE, Promotrice

Mme F. AMRI, Examinatrice

Mme F. TALBI, Examinatrice

DEDICACES

A la mémoire de ma belle soeur, Louiza.

A mes parents.

Plus profondément à mon mari.

A mes frères et soeurs.

A mes nièces et neveux.

A ma belle famille.

A mes amis(es).

Je dédie ce travail.

REMERCIEMENTS

*Je voudrais d'abord remercier ma promotrice Madame **BOURAINÉ Louiza**. Je la remercie de m'avoir orientée vers ce sujet, elle a pris le temps nécessaire pour m'éveiller à la recherche en montrant constamment une très grande rigueur et précision durant le travail. Elle a toujours été disponible, toujours de bonne humeur, elle n'a cessé de me soutenir et de m'encourager dans tous les moments où je peux douter, de mon travail. Elle m'a poussé en avant malgré ses nombreuses activités. Un très grand merci à elle, et toute ma reconnaissance.*

*Je remercie vivement Monsieur **BOUALEM Mohamed**, pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider le jury de ce mémoire.*

*Mes remerciements vont ensuite à Madame **AMRI Fadila** , Madame **TALBI Fatiha**, qui ont accepté d'examiner ce travail.*

*Je tiens à adresser mes plus vifs remerciements, premièrement à Monsieur **A. Dahmani**, Professeur à l'Université A.M Béjaïa ainsi que Madame **B. Barache**, Maître assistante "A" à l'Université A.M Béjaïa, grâce à eux que je suis en Master. Deuxièmement à tous les enseignants de la faculté, qui sont toujours disponibles pour toute demande du savoir.*

Mes remerciements s'adressent aussi à tous mes collègues, qui sont en P.G et ceux du Master2 avec lesquels j'ai partagé les années d'études de loin ou de près.

Sans oublier tous les membres de ma famille pour leur soutien et leurs encouragements particulièrement, mon cher mari, ma mère, mon père, mes grands mères, mes soeurs et frères.

Table des matières

Introduction Générale	1
1 Systèmes de files d'attente	4
1.1 Processus stochastique	5
1.2 Processus markoviens	6
1.2.1 Chaîne de Markov à temps discret	6
1.2.2 Propriétés fondamentales	7
1.2.3 Classification des états d'une chaîne de Markov	8
1.2.4 Comportement asymptotique	9
1.3 Processus de Poisson	10
1.3.1 Processus de comptage	10
1.3.2 Processus de poisson	10
1.3.3 Nombre d'événements pendant un intervalle de temps	11
1.3.4 Transformations	12
1.4 Théorie des files d'attente	13
1.4.1 Le formalisme des files d'attente	14
1.4.2 Analyse mathématique des systèmes des files d'attente	16
1.5 Les files d'attente simples	17
1.5.1 Le système M/M/1	17
1.5.2 Régime stationnaire	17
1.5.3 Caractéristiques du système	18
1.6 Processus de naissance et de mort	19
1.6.1 Régime transitoire et régime stationnaire	20

1.7	Systèmes markovien à plusieurs serveurs	21
1.7.1	Système à plusieurs stations M/M/s	21
1.7.2	Le système $M/M/\infty$	23
1.8	Le système $M/G/1$	23
1.8.1	La chaîne de Markov induite	24
1.8.2	Distribution stationnaire	26
1.8.3	Caractéristique du système M/G/1	28
1.9	Le système $G/M/1$	33
1.9.1	La chaîne de Markov induite	33
1.9.2	Les probabilités de transitions	34
1.9.3	Régime stationnaire du système	34
1.9.4	Caractéristiques du système	35
2	Les martingales	36
2.1	Quelques définitions	37
2.1.1	Espérance conditionnelle	37
2.1.2	Filtration	39
2.1.3	Temps d'arrêt	39
2.2	Les martingales	40
2.2.1	Martingale et temps d'arrêt	41
2.2.2	Décomposition	42
2.2.3	Surmartingales positives	42
2.2.4	La convergence des martingales	43
3	Application des martingales dans les systèmes de files d'attente	45
3.1	Analyse du système M/G/1 par la méthode des martingales	45
3.1.1	Martingales associées aux systèmes M/G/1	45
3.1.2	Stabilité du système M/G/1	48
	Conclusion	52
	Bibliographie	53

Introduction Générale

De nombreux phénomènes aléatoires se manifestent dans la nature : Fluctuations de la température, de la pression atmosphérique, etc. En électronique et en télécommunications, l'étude des processus aléatoires est utile notamment dans le contexte des communications numériques, certains signaux sont impossibles à caractériser a priori. L'exploitation des processus aléatoires est aussi à la base de nombreuses approches en traitement du signal, que ce soit pour caractériser le contenu fréquentiel du signal ou pour coder et tatouer un signal de parole. Plus généralement, les sources d'information telles que le son, les images sont aléatoires et varient dans le temps. Enfin, les processus aléatoires ont une application dans le cadre du traitement du trafic dans les réseaux et notamment pour l'analyse du temps de transfert et/ou du temps de traitement d'un paquet d'informations de taille aléatoire, généré à des intervalles de temps aléatoires (Théorie des Files d'Attente). La théorie des processus aléatoire vise à introduire les outils de traitement des phénomènes variant aléatoirement dans le temps.

Les phénomènes d'attente sont devenus l'une des préoccupations de l'Homme depuis bien longtemps. Attendre, constitue la tâche la plus désagréable de la vie moderne. Comment gérer un système présentant des files d'attente, afin d'améliorer sa qualité de service ? Cette question a été abordée, pour la première fois par A.K. Erlang avec ses travaux concernant le réseau téléphonique de Copenhague [14]. La théorie mathématique s'est ensuite développée notamment grâce aux contributions de Palm, Kolmogorov, Khintchine, Pollaczek [14] et fait actuellement toujours l'objet de nombreuses publications scientifiques. Andreï Markov a publié les premiers résultats sur les chaînes de Markov à espace d'états fini en 1906 [14]. Une généralisation à un espace d'états infini dénombrable a été publiée par Kolmogorov en 1936 [14].

Cette théorie s'est ensuite étendue à de nombreux champs d'application comme la gestion de stocks, les télécommunications en général, la fiabilité de systèmes complexes,...

Les problèmes liés à l'attente dans un centre de service sont omniprésents dans notre société.

Les exemples ne manquent pas :

- Attente à un guichet (caisse dans un supermarché, administration),
- trafic urbain ou aérien,
- réseaux téléphoniques,
- circulation de pièces dans un atelier,
- programmes dans un système informatique,...

En effet, afin d'analyser le comportement de ces systèmes, évaluer et optimiser leurs performances, il faut d'abord les représenter par des modèles mathématiques qui proviennent de la théorie des files d'attente. Un modèle typique de files d'attente nécessite la définition des processus d'inter-arrivées et la durée de service de client, la taille de la file qui peut être finie ou non, ainsi que la discipline de service. Tous ces paramètres sont indiqués dans la notation dite de Kendall. Dans certains systèmes, on est amené à imposer des priorités d'utilisation du service. Notre travail consiste à étudier une classe de systèmes de files d'attente, qui porte le nom de système de files d'attente simple comprenant une station de service et pour lequel la capacité de l'espace est infini et de discipline de service FIFO .

Dans ce mémoire, nous proposons l'analyse stochastique des systèmes de files d'attente via la méthode des martingales. Le système de files d'attente $M/G/1$ est considéré pour illustrer notre application. Cette démarche permet de statuer sur la facilité d'obtenir la fonction génératrice du nombre de clients servis dans la période d'activité du système en utilisant la méthode des martingales.

La théorie des martingales a son origine dans l'étude des jeux : elle modélise d'une part le caractère aléatoire d'un phénomène mais aussi son évolution dans le temps, elle était présente dans la thèse de L.Bachelier en 1900 [6] mais elle n'a commencé à être étudiée systématiquement par les mathématiciens que vers 1940, notamment par P.Levy et J.L.Doob [11].

Le nombre de publications sur l'utilisation des martingales en théorie de files d'attente est réduit, comparé au nombre total de publications disponibles dans la littérature sur la théorie de files d'attente.

Citons les articles :

Rosenkrantz (1983)[8], Baccelli (1986)[3], Baccelli et Makowski (1985, 1986, 1989, 1991)[8].

En utilisant la technique de Baccelli et Makowski, Roughan (1996) [22], [23], [24] analyse une variation du système M/G/1 (service avec phase), en définissant une martingale associée au processus induit. Kimberly K.J Kinatader et Eui Yong Lee (2000)[8] et Yongho Bae (2006)[8] ont utilisé les martingales pour trouver une formule explicite de la transformée de Laplace de la période d'activité d'un système M/M/1 avec un temps d'attente virtuel borné. Précisons que dans ces articles, les travaux ont été réalisés dans la théorie des systèmes "storage" (dam theory).

Dans ce travail, on s'est intéressé, en particulier, aux articles de Baccelli et Makovski. D'une part, nous avons redémontré la condition de stabilité du système M/G/1 d'une manière simple, d'autre part, nous avons obtenu quelques résultats concernant les caractéristiques du système à savoir le nombre de clients servis pendant la période d'activité.

Ce mémoire contient : une introduction, trois chapitres et une conclusion.

Le premier chapitre présente des définitions et des concepts relatifs aux processus stochastiques dans la première partie, et dans la seconde on expose la théorie des files d'attente markoviennes et semi markoviennes, avec leurs caractéristiques et propriétés.

Nous présentons dans le deuxième chapitre la théorie des martingales à temps discret, où la notion d'espérance conditionnelle joue un rôle fondamental. Dans cette partie, la notion de dynamique de l'information devient essentielle, et sa modélisation mathématique est mieux précisée. Les résultats essentiels concernent les théorèmes de Doob [11], qui permettent en particulier d'obtenir une démonstration simple. Les références essentielles pour ce chapitre est le livre de Jacques Neveu [20].

Le dernier chapitre présente l'application à des domaines où la théorie des martingales et les files d'attente jouent un rôle central, où on donne les éléments essentiels de la théorie de l'arrêt optimal, ainsi qu'une application au processus M/G/1. La référence pour ce chapitre est l'article de Baccelli et Makowski [3].

Chapitre 1

Systèmes de files d'attente

A la différence du calcul des probabilités, qu'on peut considérer comme étant le traitement mathématique de la notion intuitive du hasard, les processus stochastiques fournissent des modèles mathématiques de phénomènes aléatoires dont la dépendance du temps (ou d'un autre paramètre) joue un rôle prépondérant.

Des applications des processus stochastiques existent dans de nombreux domaines de l'ingénieur (transmission de signaux, télétrafic, transport, ou fiabilité), mais ce sont également des informaticiens, physiciens, biologistes, sociologues, ainsi que des spécialistes d'autres disciplines qui font appel, de plus , à la modélisation par les processus stochastiques , notamment ceux du types markovien. Les processus stochastiques décrivent l'évolution d'une grandeur aléatoire en fonction du temps. L'étude des processus stochastiques s'insère dans la théorie des probabilités, dont elle constitue l'un des objets les plus profonds.

Dans ce présent chapitre, nous introduisons quelques concepts fondamentaux de la théorie des processus aléatoires et de la théorie des files d'attente. Dans ce chapitre nous tenterons de formaliser la notion d'ergodicité des modèles stochastiques.

1.1 Processus stochastique

Les processus aléatoires décrivent l'évolution d'une grandeur aléatoire en fonction du temps. Il existe de nombreuses applications des processus aléatoires notamment en physique statistique (par exemple le ferromagnétisme, les transitions de phases, etc.), en biologie (évolution, génétique et génétique des populations), médecine (croissance de tumeurs, épidémie), et bien entendu les sciences de l'ingénieur. Dans ce dernier domaine, les applications principales sont pour l'administration des réseaux, de l'internet, des télécommunications et bien entendu dans les domaines économique et financier.

L'étude des processus aléatoires s'insère dans la théorie des probabilités dont elle constitue l'un des objectifs les plus profonds. Elle soulève des problèmes mathématiques intéressants et souvent très difficiles.

Définition 1.1.1. *On appelle processus stochastique une famille indexée $\{X_t, t \in T\}$ de variables aléatoires définies dans le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans l'espace mesurable $(E, \mathcal{E})$, $t \in T$ représente une date.*

Lorsque $T \subseteq \mathbb{Z}$, on parlera de processus à temps discret (suite stochastique) notée $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lorsque T est un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$, on parlera de processus à temps continu.

Définition 1.1.2. *On appelle espace des états (des phases) l'ensemble E où les variables X_n prennent leurs valeurs.*

L'ensemble E peut être discret ou continu. Par conséquent, on distingue quatre types de processus :

- 1. Suite stochastique à espace d'états discret.*
- 2. Suite stochastique à espace d'état continu.*
- 3. Processus continu à espace d'état discret.*
- 4. Processus continu à espace d'état continu.*

La loi d'un processus stochastique est caractérisée par la donnée de la loi du vecteur qui lui est associé.

Définition 1.1.3. *Un processus stochastique $\{\xi_t, t \geq 0\}$ est strictement stationnaire, si $\forall (t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}, \forall \tau \in \mathbb{R} : F(\xi_{t_0}, \dots, \xi_{t_n}) = F(\xi_{t_0+\tau}, \dots, \xi_{t_n+\tau})$*

Définition 1.1.4. $\{\xi_t, t \geq 0\}$ est un processus faiblement stationnaire, si

1. $\mathbb{E}(X_t) < \infty$, ne dépend pas de t
2. $\mathbb{E}(X_t^2) < \infty$, indépendant de t
3. $\text{Cov}(X_t, X_{t+\tau}) = f(\tau), \forall \tau \in \mathbb{R}, \forall t \geq 0$

Définition 1.1.5. $\{\xi_t, t \geq 0\}$ est à accroissement stationnaire (homogène), si

$\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}, \forall h \in \mathbb{R} : X_{t_2+h} - X_{t_1+h}$ et $X_{t_2} - X_{t_1}$ sont des variables aléatoire de même loi

1.2 Processus markoviens

Les chaînes de Markov sont des classes de processus aléatoires qui se caractérisent par la propriété que l'état présent du processus résume toute l'information utile pour connaître son évolution future.

L'analyse des chaînes de Markov est un préliminaire nécessaire à l'étude des systèmes de files d'attente.

1.2.1 Chaîne de Markov à temps discret

Définition 1.2.1. On appelle chaîne de Markov à temps discret un processus stochastique à espace d'état discret et à temps discret et qui vérifie la propriété d'absence de mémoire c-à-d : Un processus stochastique $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans l'espace mesurable $(E, \mathcal{E})$ est markovien si et seulement s'il vérifie la propriété de Markov :

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i) \quad (1.1)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout état j et pour toute suite d'états $i_0, \dots, i_{n-1}$, i pour lesquels la probabilité conditionnelle à un sens.

On peut alors définir la probabilité de transition d'un état i vers un état j , par p_{ij} :

$$p_{ij} = \mathbb{P}(X_n = j \mid X_{n-1} = i), \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (1.2)$$

La matrice de transition $P = [p_{ij}]_{i,j \in E}$ est une matrice carrée d'ordre fini ou infini.

Remarques. 1. $\forall (i, j) \in E^2 : 0 \leq p_{ij} \leq 1$.

2. $\forall i \in E, \sum_{j \in E} p_{ij} = 1$.

3. P admet "1" comme valeur propre.

4. A toute matrice de transition on associe son graphe tel que les sommets du graphe sont les différents états de la chaîne et il existe un arc pondéré p_{ij} entre le sommet i et le sommet j si et seulement si $p_{ij} > 0$.

1.2.2 Propriétés fondamentales

a. Probabilité de transition

Soit $p_{ij}^{(n)}$ la probabilité qu'une chaîne de Markov passe de l'état i à l'état j en n transitions ou étapes :

$$p_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}(X_n = j \mid X_0 = i), \quad n \geq 1 \quad (1.3)$$

en utilisant l'algèbre des événements, on a :

$$P^{(n)} = P^n, n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.4)$$

De façon plus générale, la relation matricielle

$$P^n P^m = P^{n+m}$$

s'écrit maintenant

$$P^{(n+m)} = \sum_{k \in E} P_{ik}^{(n)} P_{kj}^{(m)} = P_{ij}^{(n+m)} \quad (i, j \in E, m \geq 1, n \geq 1). \quad (1.5)$$

Ce système d'équations est connu sous le nom d'équations de **Chapman-Kolmogorov**.

b. Loi de probabilité de X_n

Nous introduisons les probabilités d'états :

$$\pi_k(n) = \mathbb{P}(X_n = k) \quad (n = 0, 1, 2, \dots, \quad k = 1, 2, 3, \dots) \quad (1.6)$$

la distribution de X_n peut alors être écrite sous forme de vecteur-ligne :

$$\Pi(n) = (\pi_1(n), \pi_2(n), \dots) \quad (1.7)$$

dont la somme des termes vaut 1.

Pour calculer $\Pi(n)$ on doit connaître la distribution initiale $\Pi(0)$ et la matrice de transition P ; ces probabilités d'états définissent le regime transitoire d'un phénomène aléatoire.

$$\Pi(n) = \Pi(0)P^n, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.8)$$

Lorsque

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pi(n) = \Pi. \quad (1.9)$$

On définit le regime permanent du processus (indépendant de la distribution initiale).

1.2.3 Classification des états d'une chaîne de Markov

On peut classer les états d'une chaîne de Markov en utilisant son graphe associé.

Définition 1.2.2. Soient i, j deux états de E , on dit que j est accessible à partir de i , s'il existe un chemin de i vers j dans le graphe de transition.

Définition 1.2.3. Si j est accessible à partir de i et i est accessible à partir de j , alors i et j sont dits communiquant.

la relation $\mathcal{R}$ "i et j communiquent" est une relation d'équivalence. Les classes d'équivalences de $\mathcal{R}$ sont les composantes fortement connexes du graphe de transition.

Définition 1.2.4. Un ensemble d'états C est fermé si,

$$\forall i \in C \text{ et } \forall j \text{ alors } p_{ij} = 0$$

Propriété 1.2.1.

$$\forall n > 0, \forall i \in C : \sum_{j \in C} p_{ij}^n = 1 \quad (1.10)$$

c.à.d : au bout de n transitions on est toujours dans C .

Périodicité

Définition 1.2.5. *Un état i est dit périodique de période $d(i)$, si*

$$d(i) = \text{pgcd}(\{n \geq 1 : p_{ii}^n > 0\}) > 1 \quad (1.11)$$

si

$$d(i) = 1 \quad (1.12)$$

alors i est dit "apériodique".

On représente le graphe correspondant, et grâce à celui-ci on détermine la nature des états de la chaîne comme suite :

- (i) Les sommets dans le graphe qui possèdent des successeurs sont appelés classes transitoires.
- (ii) Les sommets qui ne possèdent pas des successeurs sont appelés classes récurrentes.
- (iii) Parmi les classes récurrentes celle qui ne contiennent qu'un état sont appelés classes absorbantes.

Chaîne de Markov irréductible

Définition 1.2.6. *Une chaîne de Markov est dite irréductible, si elle ne contient aucun ensemble fermé (autre que celui de tous ces états).*

Propriété 1.2.2. *Dans une chaîne de Markov irréductible tous les états communiquent et sont de même nature.*

1.2.4 Comportement asymptotique

Le but est d'exprimer les probabilités d'états

$$\pi_k(n) = \mathbb{P}(X_n = k) \quad (1.13)$$

d'une chaîne de Markov en fonction du nombre n des transitions.

On dit qu'une chaîne de Markov converge vers Π ou possède une distribution limite Π si,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pi(n) = \Pi \quad (1.14)$$

Théorème 1.2.1. [25] *Si la matrice transition P est telle qu'une au moins de ses puissances n'a que des termes strictement positifs, alors*

$$\Pi(n) \rightarrow \Pi,$$

quelle que soit la distribution initiale $\Pi(0)$, et

$$P^n = P^*,$$

lorsque $n \rightarrow \infty$. Π est un vecteur de probabilité strictement positif, et P^ une matrice dont toutes les lignes sont identiques au vecteur limite Π . En plus*

$$\Pi P^* = \Pi.$$

1.3 Processus de Poisson

Parmi les processus stochastiques à temps continu et à espace d'états discret étudiés, le processus de Poisson occupe une place privilégiée. Il est utilisé avant tout pour décrire la réalisation dans le temps d'événements aléatoires d'un type donné.

1.3.1 Processus de comptage

Définition 1.3.1. *Un processus aléatoire $\{N_t, t \geq 0\}$ à valeurs entières est un processus de comptage si :*

- i) $N_0 = 0$;*
- ii) $N_s \leq N_t$ pour tout s inférieur ou égale à t .*

1.3.2 Processus de poisson

Définition 1.3.2. *Un processus de comptage $\{N_t, t \geq 0\}$ est un processus de Poisson, s'il satisfait aux conditions suivantes :*

$c_1 : \{N_t, t \geq 0\}$ *est homogène dans le temps,*

$$\mathbb{P}[N(s+t) - N(s) = k] = \mathbb{P}(N(t) = k) = p_k(t), \quad \forall \quad 0 < s < t.$$

$c_2 : \{N_t, t \geq 0\}$ est à accroissements indépendants,

$$\mathbb{P}[N(s+t) - N(s) = k, N(s) = j] = \mathbb{P}(N(t) = k) \cdot \mathbb{P}(N(s) = j) = p_k(t)p_j(s), \quad \forall 0 < s < t.$$

i.e : Pour tout système d'intervalles disjoints, le nombre d'événements s'y produisant sont des variables aléatoires indépendantes.

c_3 : La probabilité que deux événements ou plus se produisant dans un petit intervalle de longueur dt est négligeable par rapport à la probabilité qu'il n'y est qu'un seul événement,

$$p_k(dt) = \begin{cases} \lambda dt + o(dt), & \text{si } k = 1, \\ o(dt), & \text{si } k > 1, \\ 1 - \lambda dt + o(dt), & \text{si } k = 0. \end{cases}$$

Théorème 1.3.1. [25] Si $\{N_t, t \geq 0\}$ satisfait c_1, c_2, c_3 , alors

$$p_k(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \quad p.s \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad p.s; \quad t > 0 \quad (1.15)$$

et par conséquent

$$\mathbb{E}[N(t)] = \lambda t, \quad \text{Var}[N(t)] = \lambda t.$$

Ces relations définissent le régime transitoire du processus de Poisson. On s'aperçoit qu'aucun régime stationnaire n'existe vu que $p_k(t) \rightarrow 0$ pour tout k lorsque $t \rightarrow \infty$

Définition 1.3.3. Soit A_n la v.a mesurant l'instant d'arrivée du $n^{\text{ème}}$ client dans le système :

$$A_n = \inf\{t, N_t = n\}. \quad (1.16)$$

Soit T_n la v.a mesurant le temps séparant l'arrivée du $(n-1)^{\text{ème}}$ client et celle du $n^{\text{ème}}$ client :

$$T_n = A_n - A_{n-1}. \quad (1.17)$$

Propriété 1.3.1. Les v.a $(T_n)_{n \geq 1}$ sont des v.a exponentielles indépendantes de paramètre λ (donc identiquement distribuées).

1.3.3 Nombre d'événements pendant un intervalle de temps

Pour certaines applications, on est amené à considérer le nombre N d'événements qui ont lieu pendant un intervalle de durées aléatoire U dans la densité de probabilité $f(u)$ est supposée

connue. D'après le théorème 1.3.1

$$\mathbb{P}(N = n \mid U = u) = e^{-\lambda u} \frac{(\lambda u)^n}{n!},$$

d'où

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N = n) &= \int_0^\infty \mathbb{P}(N = n \mid U = u) f(u) du \\ &= \frac{1}{n!} \int_0^\infty e^{-\lambda u} (\lambda u)^n f(u) du. \end{aligned}$$

La fonction génératrice de N s'écrit alors :

$$g(z) = \int_0^\infty e^{\lambda u(z-1)} f(u) du \quad (1.18)$$

d'où on obtient

$$\mathbb{E}(N) = \lambda \mathbb{E}(U)$$

et

$$\text{Var}(N) = \lambda \mathbb{E}(U) + \lambda^2 \text{Var}(U).$$

1.3.4 Transformations

L'obtention des moments d'une v.a peut être une opération pénible. Les méthodes de transformation permettent souvent de lever la difficulté en modifiant les calculs à effectuer. Une transformation n'est, bien entendu, utile que si l'on est capable d'effectuer l'opération inverse.

Définition 1.3.4. *A une v.a X , on associe la fonction génératrice de moments ϕ_X définie par $\phi_X(\theta) = \mathbb{E}[e^{\theta X}]$ pour tout θ tel que $\mathbb{E}[e^{\theta X}] < \infty$.*

Propriété 1.3.2. *[5] Le moment d'ordre n de la variable aléatoire X s'obtient à partir de la fonction génératrice de moment en dérivant cette dernière n fois par rapport à θ et en posant dans l'expression obtenue $\theta = 0$.*

La transformée en z

Définition 1.3.5. Si X une v.a discrète à valeurs positives, la transformée en z de X est obtenue à partir de la fonction génératrice de moments en posant $\theta = \ln z$:

$$F(z) = \phi_X(\ln z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n \text{ pour } |z| < 1 \text{ avec } p_n = \mathbb{P}(X = n)$$

Propriété 1.3.3.

$$\mathbb{E}[X] = \left. \frac{dF(z)}{dz} \right|_{z=1} \quad (1.19)$$

Preuve

$$\phi_X(\theta) = F(e^\theta)$$

$$\frac{d\phi_X(\theta)}{d\theta} = \frac{d\phi_X(z)}{dz} \frac{dz}{d\theta}$$

$$\mathbb{E}[X] = \left. \frac{d\phi_X(\theta)}{d\theta} \right|_{\theta=0} = \left. \frac{d\phi_X(z)}{dz} \frac{dz}{d\theta} \right|_{\theta=0}$$

$$z = e^\theta \Rightarrow \frac{dz}{d\theta} = z$$

$$d'où \mathbb{E}[X] = \left. \frac{dF(z)}{dz} \right|_{z=1}$$

$$\text{Soit } \mathbb{E}[X] = \left. \frac{dF(z)}{dz} \right|_{z=1}.$$

La transformée de Laplace

Définition 1.3.6. Si X est v.a continue à valeurs positives de fonction de repartition B , la transformée de Laplace de X est définie par :

$$B^*(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dB(t) \quad \forall 0 < s < 1 \quad (1.20)$$

1.4 Théorie des files d'attente

Faire la queue! Voilà une chose dont quiconque a malheureusement déjà fait l'expérience. Pour acheter un timbre à la poste, pour se faire enregistrer à l'aéroport, il faut attendre son tour. De manière générale, nous pouvons définir un phénomène de file d'attente par les faits

suivants : chaque fois qu'un certain nombre d'unités que nous appellerons clients se présente de manière aléatoire, afin de recevoir un service d'une durée aléatoire de la part d'autres unités que nous appellerons stations, on est en présence d'une file d'attente.

Considérons l'exemple d'une file d'attente aux caisses d'un grand magasin. Le client pourra alors se poser plusieurs questions :

- (a) Combien de temps va-t-il attendre en moyenne dans la queue ?
- (b) Quelle probabilité a-t-il d'attendre plus d'un temps t ?
- (c) Combien de clients va-t-il trouver devant lui ?

Si nous essayions de répondre aux questions ci-dessus de manière analytique, il nous serait impossible de tenir compte du fait que les clients arrivent de façon aléatoire au magasin. Nous serions obligés de considérer que les clients arrivent de manière régulière, ou au moins à des moments connus, et que les temps de service soient eux aussi connus.

Or, il est certain qu'il y a beaucoup plus de clients aux heures de pointe qu'aux heures creuses de la journée. Les moments exacts où les clients arrivent et les temps de service sont tout sauf connus à l'avance. La prise en compte des différents aléas n'entre guère dans un modèle déterministe.

Pour pouvoir résoudre un tel problème, nous avons besoin de différentes notions que nous verrons dans ce chapitre, nous présentons les éléments essentiels et quelques résultats classiques concernant les systèmes de files d'attente.

Dans la première partie, nous allons nous attarder sur la présentation de certaines définitions et concepts relatifs à la théorie des files d'attente.

Dans la seconde partie, nous présentons quelques systèmes de files d'attente markoviens et semi markoviens avec leurs caractéristiques et propriétés.

1.4.1 Le formalisme des files d'attente

La théorie des files d'attente s'attache à modéliser et à analyser de nombreuses situations différentes en apparences, mais qui relèvent néanmoins du schéma descriptif général suivant : Des clients arrivent à intervalles aléatoires dans un système comportant un ou plusieurs serveurs auxquels ils vont adresser une requête. La durée du service auprès de chaque serveur est elle-même aléatoire. Après avoir été servis les clients quittent le système.

Définition 1.4.1. *On appelle système de files d'attente l'abstraction mathématique d'un sujet qu'on peut décrire par les éléments suivants :*

1. *Le flot des arrivées des clients.*
2. *La source des clients.*
3. *Le comportement du client.*
4. *La loi de la durée de service de chaque client.*
5. *La discipline de service.*
6. *Le nombre de serveurs.*
7. *La capacité de la file.*

Pour la classification des systèmes d'attente, on a recours à la notation symbolique introduite par Kendall au début des années cinquante. Cette notation comprend quatre symboles rangés dans l'ordre $A/B/s/K$ où

A : distribution des temps entre deux arrivées successives,

B : distribution des durées de service,

s : nombre de postes de service en parallèle,

K : capacité du système ($+\infty$ si non précisé).

On peut toutefois faire abstraction du dernier symbole lorsque $K = \infty$.

Pour spécifier les distributions A et B, les symboles suivants sont utilisés :

- M : distribution exponentielle (memoryless),
- E_k : distribution d'Erlang d'ordre k,
- G : distribution générale,
- H_k : distribution hyperexponentielle,
- D : cas déterministe (deterministic).

La discipline est la plus utilisée est FIFO (First In First Out) : les entités sortent dans l'ordre suivant lequel elles sont entrées.

1.4.2 Analyse mathématique des systèmes des files d'attente

L'étude mathématique d'un système d'attente se fait le plus souvent par l'introduction d'un processus stochastique défini de façon appropriée. En général, on s'intéresse au nombre X_t de clients se trouvant dans le système à l'instant $t \geq 0$. En fonction des quantités qui définissent la structure du système, on cherche à calculer

1. Les probabilités d'état

$$p_n(t) = \mathbb{P}(X_t = n) \quad (1.21)$$

qui définissent le régime transitoire du processus $\{X_t, t \geq 0\}$; les probabilités $p_n(t)$ doivent évidemment dépendre de l'état initial ou de la distribution initiale du processus.

2. Le régime stationnaire du processus stochastique, défini par

$$p_n = \lim_{t \rightarrow \infty} p_n(t) = \mathbb{P}(X = n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.22)$$

A partir de la distribution stationnaire du processus $\{X_t, t \geq 0\}$, il est possible d'obtenir d'autres caractéristiques d'exploitation du système.

Plusieurs variantes existent pour la modélisation selon la nature et le comportement du système. On distingue deux catégories de modèles en files d'attente : les modèles markoviens et les modèles non markoviens. Si pour les premiers, la propriété d'absence de mémoire permet une grande facilité dans l'étude, il n'en est pas de même pour les modèles non markoviens. Cependant, on dispose de plusieurs méthodes, qui permettent de rendre ces derniers markoviens moyennant certaines transformations.

1.5 Les files d'attente simples

1.5.1 Le système M/M/1

Pour ce système, le plus simple de la théorie des files d'attente, le flux des arrivées est poissonnien de paramètre λ et la durée de service est exponentielle de paramètre μ . La capacité d'attente est illimitée et il y a une seule station de service.

Le processus (X_t) est markovien (doté de la propriété d'absence de mémoire), ce qui rend son étude aisée.

Grâce aux propriétés fondamentales du processus de Poisson et de loi exponentielle, nous avons pour un petit intervalle de temps Δt les équations différentielles de Kolmogorov :

$$\begin{cases} P'_0(t) = -\lambda P_0(t) + P_1(t), & n = 0, \\ P'_n(t) = -(\lambda + \mu)P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) + \mu P_{n+1}(t), & n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

où

$$P_n(t) = \mathbb{P}(X_t = n).$$

1.5.2 Régime stationnaire

Quand $t \rightarrow \infty$, on peut montrer que $\lim_{t \rightarrow \infty} P_n(t) = P_n$ existent et sont indépendante de l'état initial du processus et que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P'_n(t) = 0, (n = 0, 1, 2, \dots)$$

On obtient alors un système d'équations linéaires homogènes

$$\begin{cases} \mu P_1 = \lambda P_0, & n=0, \\ \lambda P_{n-1} + \mu P_{n+1} = (\lambda + \mu)P_n, & n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

aux quelles on ajoute la condition $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$.

En additionnent les $(n+1)$ premières equations , on trouve

$$\mu P_{n+1} = \lambda P_n.$$

D'où

$$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0, n \in \mathbb{N},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1 \Rightarrow P_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = 1,$$

alors

$$P_n = (1 - \rho)(\rho)^n \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.23)$$

à condition que

$$\frac{\lambda}{\mu} = \rho < 1.$$

On constate que la file $M/M/1$ est gouvernée par la loi géométrique.

- $\frac{\lambda}{\mu} = \rho$ est le coefficient d'utilisation du système ou intensité du trafic.
- ρ correspond au nombre moyen d'arrivées par la durée moyenne du service.
- $P_0 = 1 - \rho$ correspond à la probabilité que le système soit inoccupé.

Si $\rho \geq 1$, alors

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_n(t) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

ie : la longueur de la file d'attente dépasse toute mesure.

1.5.3 Caractéristiques du système

Une importante caractéristique des systèmes de files d'attente est le nombre moyen de clients dans le système[9],[5]. Il est donné par,

$$N = \mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k \pi_k = (1 - \rho) \sum_{k=0}^{\infty} k \rho^k,$$

$$N = \frac{\rho}{1 - \rho} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}.$$

De la même manière, on peut trouver,

- La variance du nombre de clients dans le système

$$\sigma^2 = \text{Var}(X) = \sum_{k=0}^{\infty} (k - N)^2 \pi_k,$$

$$\sigma^2 = \frac{\rho}{(1 - \rho)^2}.$$

- Le temps moyen de séjour dans le système. on peut l'obtenir en appliquant la formule de Little.

$$T = \frac{N}{\lambda} = \frac{\rho}{1 - \rho} \frac{1}{\lambda},$$

$$T = \frac{\frac{1}{\mu}}{1 - \rho} = \frac{1}{\mu - \lambda}.$$

Remarque 1.5.1. *D'autres caractéristiques peuvent être déduites à partir de ces relations, en utilisant les formules de Little.*

1.6 Processus de naissance et de mort

Utilisés plus particulièrement en biologie, démographie, physique, sociologie, pour rendre compte de l'évolution de la taille d'une population, les processus de naissance et de mort sont des processus de Markov continus ($T = \mathbb{R}_+$), à valeurs dans $E = \mathbb{N}$. Ils sont caractérisés par deux conditions importantes :

- Ils sont sans mémoire
- A partir d'un temps donné n , des transitions ne sont possibles que vers l'un ou l'autre des états voisins $(n + 1)$ et $(n - 1)$ (à condition que $n \geq 1$).

Le processus de Poisson est un exemple simple de processus de naissance et de mort.

Définition 1.6.1. *Soit un processus stochastique $\{X_t, t \geq 0\}$ à états discrets $n = 0, 1, 2, \dots$ et homogène dans le temps,*

$$\mathbb{P}(X(t + s) = j \mid X(s) = i) = p_{ij}(t),$$

ne dépend pas de s . Alors $\{X_t, t \geq 0\}$ est un processus de naissance et de mort s'il satisfait les postulats suivants :

$$\begin{cases} P_{i,i+1}(dt) = \lambda_i dt + o(dt), & i > 0, \\ P_{i,i-1}(dt) = \mu_i dt + o(dt), & i \geq 1, \\ P_{i,i}(dt) = 1 - (\lambda_i + \mu_i)dt + o(dt), & i \geq 0. \end{cases}$$

Les coefficients non négatifs y figurant, λ_i et μ_i sont appelés taux de transition ; plus particulièrement, on parle de taux de naissance (ou de croissance) et de taux de mort (ou de décroissance).

De cette definition , on déduit immédiatement que

$$P_{i,i+1}(\Delta t) = o(\Delta t) \quad \text{si } |i - j| \geq 2.$$

1.6.1 Régime transitoire et régime stationnaire

Des méthodes identiques à celles décrites dans la section 1.5 permettent d'obtenir les equations de Kolmogorov d'un processus de naissance et de mort :

$$\begin{cases} P'_0(t) = -\lambda_0 P_0(t) + \mu_1 P_1(t), & n = 0, \\ P'_n(t) = -(\lambda_n + \mu_n) P_n(t) + \lambda_{n-1} P_{n-1}(t) + \mu_{n+1} P_{n+1}(t), & n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Ces équations, complétées par les conditions initiales, gouverne le régime transitoire du processus $\{X_t, t \geq 0\}$; on peut les considérées comme étant le système d'equations le plus fondamental en théorie des phénomènes d'attente.

Cependant, la résolution analytique des equations de Kolmogorov se montre généralement très complexe, voire impossible ; on ne considère donc généralement que la distribution stationnaire du processus

$$P_n = \lim_{t \rightarrow \infty} P_n(t);$$

et que les probabilités P_n satisfont les equations

$$\begin{cases} \mu_1 P_1 = \lambda_0 P_0, & n=0, \\ \lambda_{n-1} P_{n-1} + \mu_{n+1} P_{n+1} = (\lambda_n + \mu_n) P_n, & n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

appelées équations de balance.

Pour résoudre ce système d'equations linéaire, on pourrait procéder par la méthode des equations aux différences. Nous préférons cependant additionner les $n + 1$ premières equations, ce qui donne le système equivalent

$$\mu_{n+1} P_{n+1} = (\lambda_n) P_n, \quad (n \geq 0),$$

En admettant que $\lambda_0 > 0$, on trouve

$$P_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} P_0, \quad (n \geq 1),$$

où

$$P_0 = \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}\right)^{-1}.$$

Ces relations sont valables à condition que la somme figurant dans l'expression ci-dessus converge.

1.7 Systèmes markovien à plusieurs serveurs

Le concept probabiliste du processus de naissance et de mort, permet de construire des modèles mathématiques pour d'autres phénomènes d'attente dont les spécifications correspondent mieux à des situations concrètes. Par rapport au système $M/M/1$, nous envisagerons en premier lieu les modifications suivantes :

- L'espace de service comprendra plusieurs stations en parallèle,
- la capacité de l'espace d'attente ne sera plus illimitée.

D'autres généralisations ne seront pas introduites.

1.7.1 Système à plusieurs stations M/M/s

Le système comprenant s stations ; nous admettons que les durées de services correspondantes suivent la même distribution exponentielle de paramètre λ . Si les s stations en parallèle ; nous admettons que les clients qui arrivent forment une seule file d'attente ; le client placé en tête se fait servir à la première station libre.

Dans ces conditions, X_t , le nombre de client dans le système à l'instant t , constitue un processus de naissance et de mort dont les taux de transition sont

$$\lambda_n = \lambda \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

et

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu, & 1 \leq n \leq s, \\ s\mu, & n \geq s, \end{cases}$$

Cette dernière relation résulte d'une propriété de la loi exponentielle.

On appelle $s\mu$ le taux de service globale du système, et $\rho = \lambda/(s\mu)$ l'intensité du trafic globale.

L'utilisation des résultats de la section 1.6.1 nous fournit la distribution stationnaire du système M/M/s :

$$P_n = \begin{cases} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} P_0, & n \leq s, \\ \frac{(\lambda/\mu)^n}{s!s^{n-s}} P_0 = \rho^{n-s} P_s, & n \geq s, \end{cases}$$

où

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^s \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^{s+1}}{s!(s - \lambda/\mu)} \right]^{-1}.$$

Ces relations sont valables à condition que la somme figurant dans l'expression ci-dessous converge, ce qui a lieu si $\lambda/(s\mu) = \rho < 1$.

La probabilité qu'un client qui entre dans le système doit attendre est alors donnée par

$$\mathbb{P}(\text{attente}) = \mathbb{P}(X \geq s) = \sum_{n=s}^{\infty} P_n = \frac{P_s}{1 - \rho}.$$

A partir de la distribution stationnaire, on peut calculer les caractéristiques usuelles du système.

Distribution du temps de séjour

Pour le cas du système M/M/s [25], on peut également calculer la distribution du temps d'attente T_q . On constate d'abord que

$$\mathbb{P}(T_q = 0) = \sum_{n=0}^{s-1} P_n = 1 - \frac{P_s}{1 - \rho}.$$

Appelons T_q^* le temps d'attente d'un client qui est obligé d'attendre.

$$\mathbb{P}(T_q^* \leq t) = 1 - \frac{P_s}{1 - \rho} e^{s\mu t(1-\rho)}.$$

1.7.2 Le système $M/M/\infty$

Considérons maintenant un système comprenant une infinité de stations de service identique. Dans ce cas, il est évident qu'une file d'attente ne se forme ; chaque client est servi dès son entrée.

Ce système possède non seulement un intérêt théorique, mais il permet des études approximatives de phénomènes d'attente du type $M/M/s$ comprenant un grand nombre de stations en parallèles.

Pour le processus de naissance et de mort associé à ce système, on a :

$$\begin{cases} \lambda_n = \lambda, & n \geq 0, \\ \mu_n = n\mu, & n \geq 1, \end{cases}$$

où λ et μ sont les taux d'entrée et de service du système respectivement.

La distribution stationnaire de ce système d'attente peut être calculée d'après les méthodes décrites ci-dessus ; on trouve

$$P_n = (\lambda/\mu)^n \frac{e^{-\lambda/\mu}}{n!}.$$

En ce qui concerne les caractéristiques du système, on a

$$L = \mathbb{E}(X) = \frac{\lambda}{\mu},$$

et

$$W = \frac{1}{\mu},$$

tandis que

$$L_q = W_q = 0.$$

1.8 Le système $M/G/1$

Lorsque la loi de la durée inter-arrivée ou de celle de la durée de service perd sa propriété d'absence de mémoire, le processus du nombre de clients dans le système à l'instant t perd la

propriété de Markov, et n'est donc plus une chaîne de Markov. Il faut alors procéder autrement pour déterminer les probabilités stationnaires. Le système $M/G/1$ possède un processus d'arrivée poissonien de paramètre $\lambda > 0$ et des durées de service indépendantes et identiquement distribuées selon une loi quelconque $B(\cdot)$, de moyenne $1/\mu$. La propriété du Markov n'étant pas vérifiée pour le processus $\{X_t, t \geq 0\}$, son analyse se fera par l'une des méthodes d'analyse des processus non markoviens.

Définition 1.8.1. *On revient à un système formé d'une file FIFO à capacité illimitée et d'un seul serveur. Le processus d'arrivée des clients dans la file est toujours supposé poissonien de taux λ mais, maintenant, le temps de service d'un client est distribué selon une v.a générale Y qui s'est plus supposée exponentielle. Ce système est connu sous le nom de la file $M/G/1$. En fait, on suppose implicitement que les services successifs sont indépendants les uns des autres et distribués selon la même loi (i.i.d).*

La durée de Y service est caractérisée par sa fonction de densité de probabilité $b(t)$. Y est également caractérisée par la donnée de tout ses moments :

$$m_k = \mathbb{E}[Y^k] = \int_0^\infty t^k b(t) dt, \quad , \quad \text{pour } k \geq 1. \quad (1.24)$$

1.8.1 La chaîne de Markov induite

Les chaînes de Markov introduites nous permettent d'étudier des phénomènes aléatoires pour lesquels des changements d'état se produisent à des instants fixés à l'avance. Pour certaines situations concrètes, une telle discrétisation de l'échelle temporelle ne présente aucun inconvénient. Lors de l'étude de nombreux problèmes économiques ou sociologiques, il suffit d'observer un phénomène donné à des intervalles réguliers.

La plupart des systèmes rencontrés dans différents domaines technologique peuvent être représentés par des modèles de files d'attente. C'est le cas par exemple des réseaux de télécommunications.

Définition 1.8.2. *Soit un système d'attente du type $M/G/1$; le processus d'arrivée poissonien de paramètre $\lambda > 0$ et des durées de service Y est réparti suivant une loi quelconque $B(t)$. On admet que Y est continu, sa densité sera notée $b(t)$ et son espérance mathématique $\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{\mu}$.*

On se propose de déterminer la distribution stationnaire et les caractéristiques usuelles du processus $\{X(t)\}_{t \geq 0}$, où $X(t)$ est le nombre de clients dans le système à l'instant t .

Considérons le processus $X(t)$ aux instants $t_1, t_2, t_3, \dots$ où des clients terminent leur service et quittent le système. On définit ainsi un processus stochastique à temps discret :

$$\{X_n = X(t_n), n = 1, 2, \dots\}$$

où t_n est l'instant de départ du $n^{\text{ème}}$ client.

On considère les A_n : "le nombre de clients qui entrent dans le système pendant que le $n^{\text{ème}}$ client est servi".

Les variables A_n sont indépendantes entre elles, leur distribution commune est :

$$\mathbb{P}(A_n = k) = a_k = \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^k}{k!} dB(t), \quad , \quad \forall k \geq 0, \quad (1.25)$$

ainsi

$$X_{n+1} = X_n + A_{n+1} - \mathbf{1}_{\{X_n \neq 0\}}, \quad , \quad n \geq 1, \quad (1.26)$$

X_{n+1} ne depend alors que de X_n et A_{n+1} et non pas des valeurs prises par $X_{n-1}, X_{n-2}, \dots$

La suite de v.a $\{X_n, n \geq 1\}$ s'appelle chaîne de Markov induite du processus $\{X_t, t \geq 0\}$, dont les probabilités de transition sont :

$$p_{ij} = \mathbb{P}(X_{n+1} = j / X_n = i)$$

se calculent par :

$$P_{ij} = \begin{cases} a_j, & \text{si } i = 0, \\ a_{j-i+1}, & \text{si } 1 \leq i \leq j+1, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

D'où la matrice de transition chaîne de Markov induite est :

$$p_{ij} = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \dots \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{pmatrix}$$

Remarques. 1. L'expression (1.26) permet de vérifier la propriété de Markov.

2. Puisqu'on peut passer de chaque état vers n'importe quel autre état, il s'agit d'une chaîne de Markov irréductible.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(A_n) &= \sum_{k=0}^{\infty} k \mathbb{P}(A_n = k) \\ \mathbb{E}(A_n) &= \sum_{k=0}^{\infty} k \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} dB(t) \\ \mathbb{E}(A_n) &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{(\lambda t)^k}{k!} dB(t) \\ \mathbb{E}(A_n) &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \lambda t e^{\lambda t} dB(t) \\ \mathbb{E}(A_n) &= \lambda \int_0^{\infty} t dB(t) = \lambda \mathbb{E}(Y) = \frac{\lambda}{\mu} = \rho \end{aligned}$$

1.8.2 Distribution stationnaire

Supposons que $\rho < 1$, et soit $\Pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots)$ la distribution de la chaîne de Markov induite .

Il ne sera généralement pas possible de trouver la distribution Π elle-même, mais nous pouvons calculer la fonction génératrice correspondante $\Pi(z)$.

On a :

$$\begin{aligned} \Pi &= \Pi P \\ \pi_j &= \sum_{i=0}^{\infty} p_{ij} \pi_i \quad , \quad j = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

$$\pi_j = a_j \pi_0 + \sum_{i=1}^{j+1} a_{j-i+1} \pi_i$$

$$\pi_j = a_j \pi_0 + \sum_{i=0}^{j+1} a_{j-i+1} \pi_i - a_{j+1} \pi_0 \quad , \quad (j = 0, 1, 2, \dots)$$

Si l'on multiplie cette equation précédente par z^j et si l'on somme sur j, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} z^j \pi_j &= \pi_0 \sum_{j=0}^{\infty} z^j a_j + \sum_{j=0}^{\infty} z^j \sum_{i=0}^{j+1} a_{j-i+1} \pi_i - \pi_0 \sum_{j=0}^{\infty} z^j a_{j+1} \\ &= \pi_0 \sum_{j=0}^{\infty} z^j a_j + \frac{1}{z} \sum_{j=0}^{\infty} c_{j+1} z^{j+1} - \frac{\pi_0}{z} \sum_{j=0}^{\infty} z^{j+1} a_{j+1} \end{aligned}$$

où $c_{j+1} = \sum_{i=0}^{j+1} a_{j-i+1} \pi_i$

est le terme général du produit de convolution des deux distributions $a = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ et Π .

En introduisant les fonctions génératrices

$$\Pi(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i z^i$$

$$a(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$$

et

$$c(z) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i = \Pi(z) a(z)$$

on obtient

$$\Pi(z) = \pi_0 a_z + \frac{1}{z} [c(z) - c_0] - \frac{\pi_0}{z} [a(z) - a_0]$$

d'où

$$\Pi(z) = \frac{\pi_0 a(z)(z-1)}{z-a(z)} \tag{1.27}$$

De la relation (1.26) on a :

$$\mathbb{E}(a_{n+1}) = \mathbb{P}(X_n > 0) = 1 - \mathbb{P}(X_n = 0)$$

d'où

$$\rho = 1 - \pi_0 \Rightarrow \pi_0 = 1 - \rho$$

et la fonction génératrice de la distribution stationnaire s'écrit

$$\Pi(z) = \frac{(1 - \rho)a(z)(z - 1)}{z - a(z)}.$$

1.8.3 Caractéristique du système M/G/1

Nombre moyen de clients dans le système

$$L = \mathbb{E}(X) = \lim_{z \rightarrow 1} \Pi'(z).$$

On a : $X_{n+1} = X_n + A_{n+1} - \mathbf{1}_{\{X_n \neq 0\}}$

$$X_{n+1}^2 = X_n^2 - 2X_n + \mathbf{1}_{\{X_n \neq 0\}} + 2A_{n+1}X_n - 2A_{n+1}\mathbf{1}_{\{X_n \neq 0\}} + A_{n+1}^2,$$

A_{n+1} et indépendante de $\mathbf{1}_{\{X_n \neq 0\}}$ et de X_n

$$\mathbb{E}(X_{n+1}^2) = \mathbb{E}(X_n^2) \text{ et } \mathbb{E}(A_n) = \rho,$$

donc

$$\mathbb{E}[X_{n+1}^2] = \mathbb{E}[X_n^2 - 2X_n + \mathbf{1}_{\{X_n \neq 0\}} + 2A_{n+1}X_n - 2A_{n+1}\mathbf{1}_{\{X_n \neq 0\}} + A_{n+1}^2],$$

après calcul on obtient

$$\mathbb{E}(X_n) = \frac{\rho - 2\rho^2 + A_n^2}{2(1 - \rho)},$$

mais $\mathbb{E}(A_n^2) = V(A_n) + \mathbb{E}^2(A_n)$,

d'autre part, $\mathbb{E}(A_n^2) = A'(1) + A''(1)$.

Comme

$$a(z) = \int_0^\infty e^{-\lambda t(1-z)} dB(t),$$

alors

$$\mathbb{E}(A_n^2) = \lambda^2 \mathbb{E}(Y^2) + \lambda \mathbb{E}(Y),$$

donc

$$\mathbb{E}(X_n) = \frac{\rho - 2\rho^2 + \lambda^2 V(Y) + \rho^2 \rho}{2(1 - \rho)}.$$

D'où le résultat suivant :

Théorème 1.8.1. [25] *Pour le système $M/G/1$, le nombre moyen de client dans le système et la fonction génératrice de la distribution stationnaire sont respectivement donnés par :*

$$\mathbb{E}(X) = L = \rho + \frac{\rho^2 + \lambda^2 \text{Var}(Y)}{2}(1 - \rho),$$

et

$$\Pi(z) = \frac{(1 - \rho)a(z)(z - 1)}{z - a(z)}.$$

Le deuxième de ces deux résultats est connu sous le nom de la formule du **Pollaczek-Khintchine**.

π_n est la probabilité stationnaire de la chaîne de Markov induite $\{X_n, n = 1, 2, 3, \dots\}$

p_n est la probabilité stationnaire du processus à temps continu $\{X_t, t \geq 0\}$

Démonstration de $\pi_n = p_n$

Sur une période de temps donnée $[0; t]$, soient :

$A(n, t)$ le nombre de clients qui "trouvent en arrivant" n clients dans le système.

$D(n, t)$ le nombre de clients qui "quittent en laissant derrière eux" n clients dans le système.

$$A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A(n, t), \quad D(t) = \sum_{n=0}^{\infty} D(n, t)$$

On définit alors les "distributions aux instants de départ" et "distributions aux instants d'arrivée" de façon suivante :

$$p_a(n, t) = \frac{A(n, t)}{A(t)}$$

$$p_d(n, t) = \frac{D(n, t)}{D(t)}$$

Supposons que le système est stable est ergodique.

P_n : probabilité stationnaire qu'il y ait n clients dans le système.

$$P_n = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(t)$$

$P_a(n)$: probabilité stationnaire qu'un client qui arrive trouve n clients dans le système. $P_d(n)$: probabilité stationnaire qu'un client qui quitte le système laisse derrière lui n clients.

Propriété 1.8.1.

$$P_a(n) = P_d(n), \forall n \in \mathbb{N}$$

Preuve

On a

$$A(t) = D(t)$$

donc

$$A(n, t) = D(n, t)$$

on en déduit

$$p_a(n, t) = p_d(n, t) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P_a(n, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_d(n, t) \Rightarrow P_a(n) = P_d(n), \forall n \in \mathbb{N}$$

Propriété 1.8.2.

$$P_a(n) = P_n, \forall n \in \mathbb{N}$$

Preuve

$$\begin{aligned} p_a(n, t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbb{P}[X(t) = n / \text{une arrivée dans } (t, t + \Delta t)] \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbb{P}[X(t) = n / X(t + \Delta t) - X(t) = 1] \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbb{P}[X(t) = n, X(t + \Delta t) - X(t) = 1]}{\mathbb{E}[X(t + \Delta t) - X(t) = 1]} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbb{P}[X(t + \Delta t) - X(t) = 1 / X(t) = n]}{\mathbb{E}[X(t + \Delta t) - X(t) = 1]} \end{aligned}$$

Or

$$\mathbb{P}[X(t + \Delta t) - X(t) = 1 / X(t) = n] = \mathbb{P}[X(t + \Delta t) - X(t) = 1] = \lambda \Delta t + o(\Delta t)$$

car les arrivées sont poissonien.

D'où

$$P_a(n, t) = P_n(t) = \mathbb{P}(X(t) = n)$$

au régime stationnaire on aura

$$P_a(n) = P_n$$

Conclusion :

Dans le système $M/G/1$

$$P_a(n) = P_d(n) = P_n = \Pi(n), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Illustration de la technique de la chaîne de Markov induite en considérant le système $M/M/1$

On a

$$\Pi(z) = \frac{(1 - \rho)B^*(\lambda - \lambda z)(1 - z)}{B^*(\lambda - \lambda z) - z}$$

or

$$B^*(z) = \int_0^\infty e^{-zt} \mu e^{-\mu t} dt$$

et donc

$$\Pi(z) = \frac{1-\rho}{1-\rho z} = (1-\rho) \sum_{n=0}^{\infty} (\rho z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \Pi(n) z^n$$

D'où

$$\Pi(n) = (1-\rho)\rho^n, n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.28)$$

Ergodicité de (X_n)

Théorème 1.8.2. *La chaîne de Markov induite $\{X_n, n \geq 0\}$ du système $M/G/1$ est ergodique si et seulement si $\rho < 1$*

Preuve. Grâce à la structure récurrente de l'équation (1.26), il suffit d'utiliser le critère basé sur la théorie des fonction de Lyapounov.

Le résultat important de cette théorie est celui du critère de **Foster**[9] suivant :

Proposition 1.8.1. [8] *Pour une chaîne de Markov irréductible et apériodique (X_n) d'espace d'états S , la condition nécessaire pour l'ergodicité est d'exister d'une fonction non négative $f(s)$, $s \in S$ (dite de Lyapounov ou fonction test) et $\epsilon > 0$ tel que :*

$$\Delta_s = \mathbb{E}[f(X_{n+1}) - f(X_n) | X_n = s],$$

accroissement moyen est fini pour toute $s \in S$ et

$$\Delta_s \leq -\epsilon, \forall s \in S,$$

excepté peut être pour un nombre fini.

Remarque 1.8.1. Pour $S = \mathbb{N}$, il suffit de considérer $f(k) = k$

X_n est ergodique si

$$\Delta_k = \mathbb{E}[X_{n+1} - X_n | X_n = k] \leq -\epsilon, \forall k \geq N$$

où N est suffisamment grand.

Bien sûr, $\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta_k = x$ existe.

Cette condition est vérifiée si et seulement si $x < 0$.

$$\Delta_k = \mathbb{E}[X_{n+1} - X_n \mid X_n = k] = \mathbb{E}[A_{n+1} - \mathbf{1}_{\{X_n \neq 0\}} \mid X_n = k]$$

$$\Delta_k = \mathbb{E}[A_{n+1} \mid X_n = k] - \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{X_n \neq 0\}} \mid X_n = k]$$

$$\Delta_k = \rho - 1 \leq 0$$

D'où d'après le critère de Foster X_n est ergodique.

1.9 Le système $G/M/1$

Définition 1.9.1. *On considère toujours un système formé de file FIFO à capacité illimitée et d'un seul serveur. Le processus d'arrivée des clients dans la file est cette fois-ci, distribué selon un processus stochastique général qui n'est plus supposé poissonien. En revanche, les durées de service d'un client sont iid selon une loi exponentielle de taux μ . Ce système est connu sous le nom de file $M/G/1$.*

1.9.1 La chaîne de Markov induite

On peut montrer que le processus bidimensionnel $(X(t), \delta(t))$, où $(\delta(t))$: temps écoulé depuis la dernière arrivée avant t , est un processus Markovien.

Comme dans le cas du $M/G/1$, ce processus peut-être simplifié à unidimensionnel en le concentrant à des instants particuliers.

En effet,

En choisissant les instants t_n de l'arrivée du $n^{\text{ème}}$ client

alors, $\delta(t_n) = 0$, on aura donc à étudier la chaîne de Markov à temps discret $X_n = X(t_n)$.

$X_n = X(t_n)$: nombre de clients dans le système juste avant l'arrivée du $n^{\text{ème}}$ client.

Contrairement au système $M/G/1$, dans le système $G/M/1$ l'égalité entre P_n et Π_n , $n \in \mathbb{N}$, n'est pas généralement vérifiée.

Par ailleurs la condition d'ergodicité de la chaîne de Markov induite est la même que celle de la stabilité du système $G/M/1$ ($\rho < 1$).

1.9.2 Les probabilités de transitions

Soit

$$p_{ij} = \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i), i, j \in \mathbb{N}$$

les probabilités de transition de la chaîne de Markov induite X_n .

Considérons la v.a D_n : "nombre de clients servis entre l'arrivée du $n^{\text{ème}}$ client et l'arrivée du $(n+1)^{\text{ème}}$ client.

Leur distribution commune est :

$$\mathbb{P}(D_n = k) = B_k = \int_0^\infty e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^k}{k!} dF(t).$$

On a

$$X_{n+1} = X_n + 1 - D_n. \quad (1.29)$$

Alors

$$p_{ij} = \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = \begin{cases} \int_0^\infty e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^{i+1-j}}{(i+1-j)!} dF(t), & 1 \leq j \leq i+1, \\ 0, & j > i+1, \end{cases} \quad (1.30)$$

et

$$p_{i0} = 1 - \sum_{j=1}^{i+1} p_{ij}. \quad (1.31)$$

1.9.3 Régime stationnaire du système

Nous sommes à présent en mesure de trouver les probabilités ergodiques, P_k ($k \in \mathbb{N}$), de la chaîne de Markov induite X_n . La condition d'ergodicité étant $\rho < 1$. On peut vérifier que (voir [4])

$$P_k = (1 - \sigma)\sigma^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.32)$$

où, σ est l'unique solution de l'équation

$$\sigma = F^*(\mu - \mu\sigma) = \int_0^\infty e^{-(\mu - \mu\sigma)x} dF(x), \quad (1.33)$$

F^* étant la transformée de Laplace de la densité de probabilité des temps entre les arrivées des clients. Ainsi, le nombre de clients dans le système $G/M/1$ à l'instant d'occurrence d'une

arrivée, est distribué selon une loi géométrique. Si $\pi_k = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X(t) = k)$ alors on peut aisément vérifier les relations suivantes (voir [6]),

$$\pi_k = \rho P_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots \quad \text{et} \quad \pi_0 = 1 - \rho. \quad (1.34)$$

Ces relations confirment l'efficacité de la méthode de chaîne de Markov induite.

1.9.4 Caractéristiques du système

Le nombre moyen de clients dans le système

On remarque que l'étude de système de files d'attente $G/M/1$ est plus simple que celle du système $M/G/1$. Dans ce cas, il suffit de trouver la valeur de σ pour déduire toute les caractéristiques de ce système.

En effet, le nombre moyen de clients dans le système s'obtient facilement par la formule

$$N = \mathbb{E}(X) = \sum_{k \geq 0} k \pi_k = \sum_{k \geq 0} k \rho P_{k-1} = \rho \sum_{k \geq 0} k P_k + \rho \sum_{k \geq 0} P_k = \frac{\rho}{1 - \sigma}.$$

Temps moyen de séjour dans le système

D'après la formule de Little, on peut aisément obtenir le temps moyen de séjour T dans le système (voir [5], [6])

$$T = \frac{N}{\lambda} = \frac{1}{\mu(1 - \sigma)}.$$

Nombre moyen de clients dans le système à l'arrivée d'un client

On peut obtenir également le nombre moyen de clients dans le système que trouve un client à son arrivée N_a . Cette quantité contrairement au cas $M/G/1$ est différent de N .

$$N_a = \sum_{k \geq 1} k P_k = \frac{\sigma}{1 - \sigma}.$$

Remarque 1.9.1. *D'autres caractéristiques peuvent être déduites à partir de relations en utilisant les formules de Little (voir [5], [9]).*

Chapitre 2

Les martingales

La notion de martingale joue aujourd'hui un rôle central en finance mathématique, elle était déjà présente dans la thèse de Louis Bachelier en 1900[8] mais elle n'a commencé à être étudiée systématiquement par les mathématiciens que vers 1940[19], notamment par P. Levy et J.L. Doob, et plus tard par l'école de probabilités de Strasbourg, notamment P.A. Meyer. Ce n'est qu'à la fin des années 70 et au début des années 80[19](dans une série d'articles de M. J. Harrison, D. M. Kreps et S. R. Pliska) que l'on a commencé à comprendre les liens entre les notions économiques ou financières d'absence d'opportunité d'arbitrage et de complétude du marché et la notion mathématique de martingale[8].

La notion de martingale et le mot lui même ont été introduits dans la littérature des probabilités moderne par Ville dans son travail[8](1939).

La théorie des probabilités commence par la définition des espaces de probabilité. Mais dès qu'on étudie des phénomènes aléatoires se déroulant dans le temps, il importe aussi d'introduire les tribus des événements antérieurs aux divers instants possibles, car ces tribus sont à la base de toutes les définitions importantes ultérieures.

Dans toute la suite, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé.

2.1 Quelques définitions

2.1.1 Espérance conditionnelle

Théorème 2.1.1. *Soit X une variable aléatoire réelle telle que $\mathbb{E}(X) < \infty$ et $\mathcal{B}$ une sous tribu de $\mathcal{F}$.*

Il existe une et une seule variable aléatoire vérifiant les propriétés suivantes :

- (i) Y est $\mathcal{B}$ -mesurable.*
- (ii) Pour toute partie A de $\mathcal{B}$ on a $\int_A Y d\mathbb{P} = \int_A X d\mathbb{P}$.*

Définition 2.1.1. Y notée par $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{B})$ est appelée variable aléatoire conditionnelle.

Preuve.

L'unicité :

Si Y et Y_1 deux variables aléatoires, d'après les relations précédentes la variable $Y - Y_1$ est

$\mathcal{B}$ -mesurable et $\int_A Y d\mathbb{P} = \int_A Y_1 d\mathbb{P} = \int_A X d\mathbb{P}$

donc $\int_A (Y - Y_1) d\mathbb{P} = 0$

donc $Y - Y_1 = 0$ p.s avec $A = \{Y - Y_1 \geq 0\}$

L'existence :

L'existence de l'espérance conditionnelle est une conséquence du théorème de Radon-Nikodym [3].

En effet : L'application

$$\lambda : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$A \mapsto \lambda(A) = \int_A X d\mathbb{P}.$$

est une mesure de Borel absolument continue par rapport à $\mathbb{P}$.

Il existe donc une application $\mathcal{B}$ -mesurable, Y telle que $\lambda(A) = \int_A X d\mathbb{P} = \int_A Y d\mathbb{P}$, où Y est l'espérance conditionnelle de X sachant $\mathcal{B}$.

Proposition 2.1.1. ([4],[20]) Soit X variable aléatoire intégrable, alors

1. L'application $X \mapsto \mathbb{E}(X | \mathcal{B})$ est linéaire.
2. L'inégalité de Jensen, l'inégalité de Holder, le théorème de la convergence monotone et le théorème de la convergence dominée restent valables pour l'espérance conditionnelle.
3. Si $X \geq 0$ alors $\mathbb{E}(X | \mathcal{B}) \geq 0$
4. L'application $X \mapsto \mathbb{E}(X | \mathcal{B})$ est croissante.
5. L'espérance conditionnelle est contractante.
6. $\mathbb{E}(XZ | \mathcal{B}) = Z\mathbb{E}(X/\mathcal{B})$ pour tout Z $\mathcal{B}$ -mesurable.
7. Pour toute v.a X positive ou intégrable.

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}(X | \mathcal{B})] = \mathbb{E}(X) \tag{2.1}$$

8. Si $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ est une sous-tribu de $\mathcal{B}$,

alors

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}(X \mid \mathcal{B}) \mid \mathcal{C}] = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{C})$$

2.1.2 Filtration

Définitions 2.1.1.

- On appelle *filtration* toute suite croissante $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de sous tribu de $\mathcal{F}$.
- Si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un processus stochastique défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ alors $\mathcal{F}_n^X = \sigma(X_0, \dots, X_n)$
- $\mathcal{F}_\infty = \bigvee_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n = \sigma(\bigcup_n \mathcal{F}_n)$, est la plus petite tribu de $\mathcal{F}$ qui contient tous les $\mathcal{F}_n$.
- On dit qu'un processus est adapté à une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, si $\forall n \in \mathbb{N} : X_n$ est $\mathcal{F}_n$ -mesurable

Remarques.

1. Un processus est toujours adapté à sa filtration naturelle
2. Si un processus $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est adapté à une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et que $\mathcal{F}_0$ est une sous tribu complète, alors toute modification du processus est encore adapté

2.1.3 Temps d'arrêt

La notion de temps d'arrêt joue un rôle central dans l'analyse des processus aléatoire. C'est la vraie notion de temps aussi bien pour les d'enveloppements mathématiques que pour la modélisation.

Définition 2.1.2. Un temps d'arrêt est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ qui a la propriété suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}; \{T = n\} \in \mathcal{F}_n \quad (2.2)$$

Quelques propriétés des temps d'arrêt [20]

Soient T et S deux temps d'arrêt, alors $T + S$ et $\inf(T, S)$ notée $T \wedge S$ et $\sup(T, S)$ notée $T \vee S$ sont des temps d'arrêt.

Proposition 2.1.2. ([4]) Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un processus adapté à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$.

Pour tout $A \in \mathcal{E}$, on définit le premier temps d'atteinte :

$$T_A = \inf\{n \geq 0 : X_n \in A\} \quad (2.3)$$

avec la convention $\inf \emptyset = +\infty$, alors T_A est un temps d'arrêt.

2.2 Les martingales

Dans toute la suite, supposons $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(\mathcal{F}_n)_n$ une filtration.

Définition 2.2.1. Une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)_n$ est un processus stochastique $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tel que :

1. $\mathbb{E}(|X_n|) < +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;
2. $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est adapté à la filtration $(\mathcal{F}_n)_n$;
3. $\mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = X_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;

Si la dernière condition est remplacée par $\mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) \leq X_n$ on dit que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une surmartingale.

Si elle est remplacée par $\mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) \geq X_n$ on dit que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une sous-martingale.

Interprétation géométrique :

- L'espace des fonctions $\mathcal{F}_n$ -mesurable est un sous espace vectoriel de $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$
- $\mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n)$ est la projection orthogonale de la variable aléatoire X_{n+1} sur l'espace $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ des variables aléatoire $\mathcal{F}_n$ -mesurable.

Remarque 2.2.1. [18] Notons que pour une martingale : $X \rightarrow \mathbb{E}(X_n)$ est constante, est une suite croissante dans le cas d'une sous-martingale, décroissante dans le cas d'une surmartingale et que $\mathbb{E}(X_{n+p} \mid \mathcal{F}_n) = X_n$ pour tout $p \geq 0$.

Exemples 2.1.

1. Si $Z \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ alors $X_n = \mathbb{E}(Z \mid \mathcal{F}_n)$ est une martingale.

2. Soit $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes centrées et intégrable, X_0 une variable aléatoire donnée indépendante de $(Y_n)_n$,

alors

$S_n = X_0 + Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$ est une martingale par rapport à la filtration $(\sigma(X_0, Y_1, \dots, Y_n))$.

Proposition 2.2.1. Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction convexe, et soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un processus adapté, tel que $\mathbb{E}[\varphi(X_n)] < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1. Si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une martingale alors $\varphi(X_n)$ est une sous-martingale
2. Si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une sous-martingale et φ est croissante alors $\varphi(X_n)$ est une sous-martingale

Preuve. 1. D'après l'inégalité de Jensen pour les espérances conditionnelles :

$$\mathbb{E}[\varphi(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n)] \geq \varphi[\mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = \varphi(X_n)]$$

2. De même, puisque $X_n \leq \mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n)$ et φ est croissante alors

$$\mathbb{E}[\varphi(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n)] \geq \varphi[\mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) \geq \varphi(X_n)]$$

Notation

Notons $(\Delta X)_n = X_n - X_{n-1}$ le processus des accroissements de la suite (X_n) .

Proposition 2.2.2. [4] Soit X une martingale, Alors

1. $\forall n \geq 0, \forall k \geq 0, \quad \mathbb{E}(X_{n+k} \mid \mathcal{F}_n) = X_n ; \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_0)$
2. Si la martingale est de carré intégrable, les accroissements (ΔX_n) de X sont orthogonaux
3. L'espace des martingales est un espace vectoriel réel

2.2.1 Martingale et temps d'arrêt

Proposition 2.2.3. [20] Soit $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une martingale (resp. une surmartingale) relativement à une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$; et T un temps d'arrêt pour cette même filtration.

Le processus d'arrêt

$$X_T = (X_{n \wedge T})_{n \in \mathbb{N}} \tag{2.4}$$

est une martingale (resp. une surmartingale) pour la $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Théorème 2.2.1. [11] (*Optional Sampling Theorem* avec deux temps d'arrêt) Soit X une $\mathcal{F}$ – martingale, et soient S et T deux temps d'arrêts bornés avec $S \leq T$, alors X_S et X_T sont intégrables et on a avec probabilité égale à 1

$$X_S = \mathbb{E}(X_T \mid \mathcal{F}_S). \quad (2.5)$$

Si X est une sous-martingale (resp sur-martingale), alors l'égalité est remplacée par $\leq$ (resp $\geq$).

Corollaire 2.2.1. [4] Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une martingale.

1. Si T est un temps d'arrêt borné, alors $\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_0)$.
2. Si T est un temps d'arrêt fini, et si (X_n) est bornée, alors $\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_0)$.

2.2.2 Décomposition

On décompose une sous-martingale en la somme d'une martingale et d'une suite croissante de variables aléatoires :

Théorème 2.2.2. [4] (*décomposition de Doob*) :

Soit X une sous-martingale ; il existe une martingale M et un processus croissant prévisible A , nul en 0, unique, tel que pour tout entier n ,

$$X_n = M_n + A_n \quad (2.6)$$

Le processus A est appelé compensateur de X .

2.2.3 Surmartingales positives

Définition 2.2.2. Une suite adaptée

$$\{X_n, n \in \mathbb{N}\} \quad (2.7)$$

de v.a réelles positives appelée "surmartingale positive", si l'inégalité presque sûrement

$$X_n \geq \mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) \quad (2.8)$$

est vérifiée quelque soit $n \in \mathbb{N}$.

La suite (2.7) est appelée "martingale positive", si l'inégalité dans la relation (2.8) est remplacée par l'égalité.

Remarque 2.2.2. [8]

1. Une surmartingale est par définition une suite de v.a qui "décroît en espérance conditionnelle".
2. Sur une suite $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ de v.a positives représentant la suite de la valeur de la fortune d'un joueur, la condition de surmartingale exprime qu'en moyenne conditionnelle, le jeu est à chaque instant défavorable au joueur.
3. L'inégalité (2.8) entraîne que :

$$X_m \geq \mathbb{E}(X_p \mid \mathcal{F}_m) \quad \forall m, p \in \mathbb{N} \quad (m < p) \quad (2.9)$$

4. $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ est une surmartingale si et seulement si $\{-X_n, n \in \mathbb{N}\}$ est une sous-martingale

Lemme 2.2.1. [20] Étant donné deux surmartingales positives $\{X_n^i, n \in \mathbb{N}\}$ ($i = 1, 2$) et un temps d'arrêt ν tel que $X_\nu^1 \geq X_\nu^2$ sur $\{\nu < \infty\}$, la formule :

$$X_n(\omega) = \begin{cases} X_n^1(\omega), & n < \nu(\omega) \\ X_n^2(\omega), & n \geq \nu(\omega) \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (2.10)$$

définit une nouvelle surmartingale positive.

2.2.4 La convergence des martingales

Théorème 2.2.3. [20] (*Théorème de convergence des surmartingales*)

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une surmartingale relative à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E} |X_n| < \infty$$

Alors la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers une variable $X \in L^1$

Théorème 2.2.4. [20] Toute surmartingale positive $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge presque sûrement.

On outre, la limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X_\infty(p.s) \quad (2.11)$$

vérifie l'inégalités :

$$\mathbb{E}(X_\infty / \mathcal{F}_n), \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (2.12)$$

Théorème 2.2.5. [4](*temps d'arrêt*)

Soit M_n une martingale uniformément intégrable et soit T un temps d'arrêt quelconque ; alors on définissant $M_T = M_\infty$ sur $\{T = \infty\}$, on a

1. $M_T = \mathbb{E}(M_\infty \mid \mathcal{F}_T)$
2. Si T et S sont deux arrêts quelconques, on a

$$M_{T \wedge S} = \mathbb{E}(M_T \mid \mathcal{F}_S) \quad (2.13)$$

3. Pour une variable $\mathcal{A}$ – mesurable M intégrable, on posant $M_T = \mathbb{E}(M \mid \mathcal{F}_n)$, on a

$$M_T = \mathbb{E}(M \mid \mathcal{F}_T) \quad (2.14)$$

Lemme 2.2.2. Pour toute surmartingale positive $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite $(X_{n \wedge \nu})$ "arrêter au temps ν " est encore une surmartingale positive.

Remarque 2.2.3. Pour une martingale $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la suite arrêtée $(X_{n \wedge \nu})_{n \in \mathbb{N}}$ à un temps d'arrêt est elle même une martingale positive.

Chapitre 3

Application des martingales dans les systèmes de files d'attente

Ce chapitre comprend deux parties, la première partie concerne l'analyse de la chaîne de Markov induite dans un système $M/G/1$ en utilisant la méthode des martingales. La deuxième partie est consacrée aux principaux résultats obtenus sur la stabilité du système $M/G/1$ en utilisant toujours la méthode des martingales.

3.1 Analyse du système $M/G/1$ par la méthode des martingales

3.1.1 Martingales associées aux systèmes $M/G/1$

Considérons le système de file d'attente $M/G/1$. Le processus d'arrivée des clients, noté $(A_t)_{t \geq 1}$, est un processus de Poisson de paramètre λ . Les temps de service successifs sont des v.a i.i.d, indépendantes du processus des arrivées. On note $B(\cdot)$ la loi des temps de services et $B^*(\cdot)$ sa transformée de Laplace .

Pour tout $n \geq 0$, on note X_n le nombre de clients en attente (ou en train de se faire servir) juste après le $n^{\text{ème}}$ départ .

$$X_{n+1} = X_n + A_{n+1} - \mathbf{1}_{\{X_n \neq 0\}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (3.1)$$

où $\mathbf{1}_{\{E\}}$ est la fonction indicatrice de l'événement E .

Le processus $(A_n)_{n \geq 1}$ suit la loi du Poisson de paramètre λt , ce qui conduit en intégrant par rapport à la loi de la durée de service

$$\mathbb{P}(A_n = k) = \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} dB(t) \quad (3.2)$$

En introduisant la fonction génératrice

$$a(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k a_k \quad (3.3)$$

avec

$$a_k = \mathbb{P}(A_n = k)$$

On remarque que

$$a(z) = B^*(\lambda(1-z)), \quad (0 < z < 1) \quad (3.4)$$

où B^* est la transformée de Laplace de la durée de service.

En effet,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall 0 < a_k \leq 1, \quad \forall 0 < z < 1 : \quad |a_k z^k| \leq |z^k| \leq |z|^k < \infty$$

donc

$a(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k a_k$ converge.

$$a(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} dB(t)$$

$$a(z) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} z^k \frac{(\lambda t)^k}{k!} dB(t)$$

$$a(z) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{\lambda t z} dB(t)$$

$$a(z) = \int_0^\infty e^{-\lambda t(1-z)} dB(t)$$

$$a(z) = B^*(\lambda(1-z))$$

Proposition 3.1.1. *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et soit*

$$\mathcal{F}_n = \sigma(A_1, A_2, A_3, \dots); \mathcal{F} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_n, \mathcal{F}_0 = \sigma(X_0).$$

Les v.a X_n sont $\mathcal{F}_n$ -mesurable et la v.a A_{n+1} est indépendante de la sous tribu $\mathcal{F}_n$

On a

$$\mathbb{E}(z^{X_{n+1}} | \mathcal{F}_n) = a(z)z^{X_n - \mathbf{1}\{X_n \neq 0\}}, \quad \forall 0 \leq z \leq 1 \quad (3.5)$$

Preuve. $\mathbb{E}(z^{X_{n+1}} / \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(z^{X_n + A_{n+1} - \mathbf{1}\{X_n \neq 0\}} / \mathcal{F}_n)$

$$= \mathbb{E}(z^{X_n - \mathbf{1}\{X_n \neq 0\}} \cdot z^{A_{n+1}} / \mathcal{F}_n)$$

$$= z^{X_n - \mathbf{1}\{X_n \neq 0\}} \cdot \mathbb{E}(z^{A_{n+1}} / \mathcal{F}_n)$$

$$\mathbb{E}(z^{X_{n+1}} / \mathcal{F}_n) = z^{X_n - \mathbf{1}\{X_n \neq 0\}} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} z^k a_k$$

d'où la relation (3.5)

D'après la formule (3.4) on suggère d'une manière facile l'étude de la stabilité du système M/G/1 par la méthode des martingales.

Théorème 3.1.1. *Soit*

$$M_n(z) = \begin{cases} z^{X_0}, & \text{si } n = 0 \\ z^{X_n} \frac{z^{\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}\{X_k \neq 0\}}}{a(z)^n} & \text{si } n \in \mathbb{N}^* \end{cases} \quad (3.6)$$

Pour $0 < z \leq 1$ le processus $(M_n(z))_{n \in \mathbb{N}}$ est une martingale positive.

Preuve.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(M_{n+1}(z) / \mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}(z^{X_{n+1}} \frac{z^{\sum_{k=0}^n \mathbf{1}\{X_k \neq 0\}}}{a(z)^{n+1}} / \mathcal{F}_n) \\ &= \prod_{k=0}^n \frac{z^{\mathbf{1}\{X_k \neq 0\}}}{a(z)^{n+1}} \cdot \mathbb{E}(z^{X_{n+1}} / \mathcal{F}_n) \\ &= \frac{z^{\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}\{X_k \neq 0\}}}{a(z)^n} \cdot z^{X_n} \\ &= M_n(z) \end{aligned}$$

3.1.2 Stabilité du système M/G/1

Théorème 3.1.2. *Sous la supposition $\rho > 1$, le système M/G/1 est instable, on outre*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = \infty \quad p.s. \quad (3.7)$$

Preuve. $\forall n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq z \leq 1$, la relation (3.5) implique l'inégalité

$$\mathbb{E}(z^{X_{n+1}} \mid \mathcal{F}_n) \leq \frac{a(z)}{z} z^{X_n} \quad p.s. \quad (3.8)$$

Sous l'hypothèse $\rho > 1$ et d'après la convexité de $a(\cdot)$ et puisque $\frac{d}{dz}a(z)|_{z=1} = \rho$,

$$\exists z_0 \in]0, 1[: c_0 = \frac{a(z_0)}{z_0} < 1 \quad (\text{voir [8], p.75}).$$

Par conséquent :

$$\mathbb{E}(z_0^{X_{n+1}} \mid \mathcal{F}_n) \leq c_0 z_0^{X_n} \leq z_0^{X_n} \quad p.s$$

Ce qui prouve que $(z_0^{X_n})_{n \geq 1}$ est une surmartingale positive majorée par 1.

D'après le théorème 2.2.4 du chapitre (2), $(z_0^{X_n})_{n \geq 1}$ converge presque sûrement vers une v.a intégrable et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(z_0^{X_n}) = \mathbb{E}(\lim_{n \rightarrow \infty} z_0^{X_n})$$

Par récurrence sur n , et la relation (2.1) on en déduit que

$$\mathbb{E}(z_0^{X_n}) = c_0^n \mathbb{E}(z_0^{X_1}) \leq c_0^n$$

En passant à la limite quand $n \rightarrow \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(z_0^{X_n}) = \mathbb{E}(\lim_{n \rightarrow \infty} z_0^{X_n}) = 0$$

Ce qui donne

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_0^{X_n} = 0 \text{ p.s pour } 0 < z_0 < 1.$$

D'où le résultat.

Pour étudier le cas $\rho \leq 1$, considérons σ un temps d'arrêt arbitraire pour $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et on définit la variable aléatoire $\nu(\sigma)$ comme étant le premier instant après le temps d'arrêt σ où le système redevient vide, i.e

$$\nu(\sigma) = \begin{cases} \inf\{n \geq 1, X_{\sigma+n} = 0\}, & \sigma < \infty, \\ \infty, & \text{sinon,} \end{cases} \quad (3.9)$$

avec la convention $\inf \emptyset = \infty$.

Le théorème suivant formule une loi de conservation pour le système $M/G/1$ et qui est fondamental pour prouver les résultats de stabilité.

Théorème 3.1.3. *Sous l'hypothèse $\rho \leq 1$*

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}_{[\sigma < \infty, \nu(\sigma) < \infty]} \left[\frac{z}{a(z)} \right]^{\nu(\sigma)} \mid \mathcal{F}_\sigma] = \mathbf{1}_{[\sigma < \infty]} z^{X_\sigma + \mathbf{1}_{\{X_\sigma \neq 0\}}} \quad \text{p.s} \quad (3.10)$$

est vraie pour tout $0 < z \leq 1$.

Preuve. On considère $\tau(\sigma) = \sigma + \nu(\sigma)$ un temps d'arrêt pour $(\mathcal{F}_n)$, $\tau(\sigma) \wedge t$, $\sigma \wedge t$ seront encore des temps d'arrêt, où $\wedge$ est l'opérateur minimum.

Il est clair que : $\forall t \in \mathbb{N} : \tau(\sigma) \wedge t \geq \sigma \wedge t$

Comme $(M_n(z))_{n \in \mathbb{N}}$ est une martingale positive.

Alors, d'après le théorème de Doob (2.2.1) [11], pour tout $0 < z \leq 1$ et $t \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}[M_{\tau(\sigma) \wedge t}(z) \mid \mathcal{F}_{\sigma \wedge t}] = M_{\sigma \wedge t}(z) \quad \text{p.s,} \quad (3.11)$$

les v.a $M_{\tau(\sigma) \wedge t}(z)$ et $M_{\sigma \wedge t}(z)$ coïncident avec $M_t(z)$ sur l'ensemble $\{t \leq \sigma\}$ et l'égalité (3.10) peut être simplifiée sous la forme :

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}_{[\sigma < t]} M_{\tau(\sigma) \wedge t}(z) \mid \mathcal{F}_\sigma] = \mathbf{1}_{[\sigma < t]} M_\sigma(z) \quad \text{p.s,} \quad (3.12)$$

par conséquent

$$M_{\tau(\sigma) \wedge t}(z) = z^{X_{\tau(\sigma) \wedge t}} \frac{z^{\sum_{k=0}^{\sigma} \mathbf{1}_{\{X_k \neq 0\}}}}{a(z)^\sigma} z^{-\mathbf{1}_{\{X_\sigma = 0\}}} \left(\frac{z}{a(z)} \right)^{\tau(\sigma) \wedge t - \sigma} \quad \text{p.s,} \quad (3.13)$$

En remplaçant (3.13) dans (3.12) et après quelques calculs simples en utilisant la $\mathcal{F}_\sigma$ -mesurabilité des v.a. σ , X_σ et $\sum_{k=0}^\sigma \mathbf{1}[X_k \neq 0]$ on aura

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}_{[\sigma < t]} z^{X_{\tau(\sigma) \wedge t}} \left(\frac{z}{a(z)}\right)^{\tau(\sigma) \wedge t} \mid \mathcal{F}_\sigma] = \mathbf{1}_{[\sigma < t]} z^{X_\sigma} \left[\frac{z}{a(z)}\right]^\sigma z^{\mathbf{1}_{[X_\sigma \neq 0]}}. \quad p.s. \quad (3.14)$$

Sous l'hypothèse de la convexité de $a(z)$ et d'après ([8] p.77) on a $z < a(z)$ pour tout $0 < z < 1$ et pour tout $t \in \mathbb{N}$ on a :

$$0 \leq \mathbf{1}_{[\sigma < t]} z^{X_{\tau(\sigma) \wedge t}} \left[\frac{z}{a(z)}\right]^{\tau(\sigma) \wedge t} \leq \mathbf{1}_{[\sigma < t]} \left[\frac{z}{a(z)}\right]^{\tau(\sigma) \wedge t} \leq 1 \quad p.s. \quad (3.15)$$

Puisque $\tau(\sigma) \wedge t = t$ pour tout $t \in \mathbb{N}$ sur l'événement $[\nu(\sigma) = \infty]$, d'après (3.15), on aura :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{1}_{[\sigma < t, \nu(\sigma) = \infty]} z^{X_{\tau(\sigma) \wedge t}} \left[\frac{z}{a(z)}\right]^{\tau(\sigma) \wedge t} = 0 \quad (3.16)$$

D'où puisque $X_{\tau(\sigma)} = 0$ sur $[\sigma < \infty, \nu(\sigma) < \infty]$ on a la convergence suivante

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{1}_{[\sigma < t]} z^{X_{\tau(\sigma) \wedge t}} \left[\frac{z}{a(z)}\right]^{\tau(\sigma) \wedge t} = \mathbf{1}_{[\sigma < \infty, \nu(\sigma) < \infty]} \left[\frac{z}{a(z)}\right]^{\tau(\sigma)}. \quad (3.17)$$

En faisant tendre $t \rightarrow \infty$ dans la relation (3.14), on obtient

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}_{[\sigma < \infty, \nu(\sigma) < \infty]} \left[\frac{z}{a(z)}\right]^{\nu(\sigma) + \sigma} \mid \mathcal{F}_\sigma] = \mathbf{1}_{[\sigma < \infty]} \left[\frac{z}{a(z)}\right]^\sigma z^{X_\sigma + \mathbf{1}_{X_\sigma \neq 0}} \quad p.s. \quad (3.18)$$

La relation (3.10) est maintenant immédiate à partir de la relation (3.18) et en utilisant la $\mathcal{F}_\sigma$ -mesurabilité du temps d'arrêt σ .

Corollaire 3.1.1. Sous l'hypothèse $\rho \leq 1$,

$$\mathbb{P}(\sigma < \infty, \nu(\sigma) < \infty \mid \mathcal{F}_\sigma) = \mathbf{1}_{[\sigma < \infty]} \quad p.s., \quad (3.19)$$

en particulier $\nu(\sigma) < \infty$ p.s à chaque fois que $\sigma < \infty$ p.s

Preuve. Ce résultat s'obtient en utilisant le théorème précédent et en faisant tendre z vers 1 dans la formule (3.12).

Puisque $z < a(z)$ pour $0 < z < 1$:

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{z}{a(z)} = 1,$$

donc

$$\lim_{z \rightarrow 1} \mathbb{E}[\mathbf{1}_{[\sigma < \infty, \nu(\sigma) < \infty]} \left[\frac{z}{a(z)}\right]^{\tau(\sigma)} \mid \mathcal{F}_\sigma] = \mathbb{P}[\sigma < \infty, \nu(\sigma) < \infty \mid \mathcal{F}_\sigma] = \mathbf{1}_{[\sigma < \infty]} \quad p.s. \quad (3.20)$$

Dans ce qui suit, on s'intéresse au cas où σ est un temps d'arrêt pour $\mathcal{F}_n$ tel que :

$X_\sigma = 0$ sur $\{\sigma < \infty\}$.

Dans ce cas, la v.a $\nu(\sigma)$ représente le nombre de clients servis durant une période d'activité.

Pour $0 < z < 1$, il est clair que :

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}_{[\nu(\sigma) < \infty]} \left[\frac{z}{a(z)} \right]^{\nu(\sigma)}] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_{[\nu(\sigma) < \infty]} \left[\frac{z}{a(z)} \right]^{\nu(\sigma)} \mid \mathcal{F}_\sigma] \quad p.s. \quad (3.21)$$

Remarque 3.1.1. La formule (3.21) peut être interprétée comme la fonction génératrice de la variable aléatoire $\nu(\sigma)$ dans la variable aléatoire : $\xi = \frac{z}{a(z)}$; elle pourra être utilisée pour trouver la distribution de probabilité de $\nu(\sigma)$ ou ses moments.

Le corollaire suivant nous donne le nombre moyen de clients dans le système $M/G/1$ servis durant la période d'activité.

Corollaire 3.1.2. Considérons un $\mathcal{F}_n$ -temps d'arrêt fini p.s, σ tel que $X_\sigma = 0$ sur l'ensemble $[\sigma < \infty]$.

Sous l'hypothèse $\rho \leq 1$, le premier moment de la variable aléatoire $\nu(\sigma)$ est donné par :

$$\mathbb{E}[\nu(\sigma)] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_{[\nu(\sigma) < \infty]} \nu(\sigma)] = \begin{cases} \frac{1}{1-\rho}, & \text{si } \rho < 1, \\ \infty, & \text{si } \rho = 1, \end{cases} \quad (3.22)$$

et la variable aléatoire $\nu(\sigma)$ et la filtration $\mathcal{F}_n$ sont indépendantes.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons redémontré d'une manière simple la condition de stabilité du systèmes $M/G/1$ en utilisant l'équation recursive de la chaîne de Markov induite aux instants de départ des clients dans le système ainsi que l'approche des martingales à temps discret.

Puis, sous cette condition et par la même approche nous avons établi la fonction génératrice du nombre de clients servis dans la période d'activité.

Quelques perspectives de recherche

- Application des martingales à d'autres systèmes d'attente à savoir le système $GI/M/1$.
- Etude d'autres processus aléatoires via les martingales à temps continu.

Bibliographie

- [1] D. AISSANI, Processus Aléatoires et Files d'Attente, Cours première de année P.G , Département de Recherche Opérationnelle, Université de Béjaïa, 2011-2012.
- [2] D. AISSANI et A. AISSANI, La Théorie des Files d'Attente, Ecole Doctorale en Informatique, Département d'Informatique, Béjaïa 2004.
- [3] F. BACCELLI and A. M. MAKOWSKI, Direct martingale arguments for stability : The M/G/1 case , Systems and Control Letters 6 (1985), 181-186.
- [4] D. BAKRY L. COUTIN T. DELMOTTE, Martingales et Chaînes de Markov, Laboratoire de Statistique et de Probabilité, Toulouse (France), 2004.
- [5] B. BAYNAT, Théorie de files d'attente , Hermes Science Europe(2000).
- [6] M. BENAOUICHA, Estimation de Stabilité Forte dans un Système de Files d'Attente. Thèse de Magister, Université de A/MIRA, Béjaïa 2000.
- [7] N. BERGLUND, Processus aléatoires et applications , France, 2011.
- [8] L. BOURAINE, Analyse des Systèmes de Files d'Attente avec Rappel et Arrivées Négatives, Thèse de Doctorat, Université de Mouloud Mammeri, Tizi Ouzou 2007.
- [9] L. BOURAINE, Files d'Attente , Cours de Master1, Recherche Opérationnelle, Université de Béjaïa, 2008-2009.
- [10] S. CARLIN and H.M. TAYLOR, A first course in stochastic processes. Second edition , Academic Press, 1975. .
- [11] J.L. DOOB, Measure Theory , Springer- Verlag 1994.
- [12] D. DRIS, Etude comparative des méthodes de stabilité des modèles stochastiques , Mémoire de Magistère en Mathématiques Appliquées Université A. Mira- Béjaïa. Faculté des

- Sciences et des Sciences de l'Ingénieur Département de Recherche Opérationnelle, Béjaïa 2006.
- [13] C.H. FORDER, Eléments de théorie des files d'attente , France 2002.
- [14] W. GRASSMANN, Modeling Markovian Queues and Similar Processes, Departement of Computer Science, University of Saskatchewan, 2000.
- [15] N. HAMADOUCHE, Approximation dans les systèmes prioritaires , Mémoire de magister en Mathématiques Appliquées A. Mira- Béjaïa. Faculté des Sciences et des Sciences de l'Ingénieur Département de Recherche Opérationnelle, Béjaïa 2004.
- [16] J. LACROIX, Chaîne de Markov et Processus de Poisson, Paris 2002 , 181-186.
- [17] J.F. Le Gall, Integration, Probabilités et Processus Aléatoire , Paris (France) 2006.
- [18] O. LOPEZ, Modélisation stochastique, France 2000.
- [19] P.A. MEYER, Théorie des martingales et de semi-martingale.Tome 5 , Paris (France) 1960.
- [20] J. NEUVEU, Martingale à Temps Discret , Masson, Paris (1972), 181-186.
- [21] F. RAHMOUNE, Stabilité forte dans un système d'attente $M/G/1//N$ avec vacances , Mémoire de Magister, Université de A/MIRA, Béjaïa 2003
- [22] M. ROUGHAN, An Application of Martingales to Queuing Theory, Phd thesis, University of Adelaide, department of Applied Mathematics, 1995.
- [23] M. ROUGHAN, An analysis of a modified $M/G/1$ queue using a martingale technique, Journal of Applied Probability, 33 : 1-16, 1996.
- [24] M. ROUGHAN , C.E.M. PEARCE, Martingale methods for analysing single-server. Queueing Systems , 41 : 205-209, 2002
- [25] A. RUEGG, Processus stochastique , Presses polytechniques romandes. Lausanne, Suisse, 1989
- [26] YOADOLAH DODGE and M. GIUSEPPE , Premiers pas en simulation , Springer-Verlag France, 2008 .