

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ Abderrahmane Mira - Béjaia
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

Département de Mathématiques

Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques

Option : Analyse et Probabilités

Par

KHELADI Tinhinan

THÈME

Équations de Navier-Stokes

Soutenu devant le jury composé de :

Mr.	F. Bouhmila	M.C.A	Université A-Mira de Béjaia	Président
Mme.	S. Tas	Prof.	Université A-Mira de Béjaia	Directrice
Mme.	H. Bechir	M.C.B	Université A-Mira de Béjaia	Jury

Juin 2013

Remerciements

Je serais bien ingrate si j'espérais épuiser en ces quelques lignes ma dette envers tous ceux qui m'ont aidé à parachever ce travail.

Je tiens à remercier Mme. S. TAS qui m'a fait l'honneur de diriger mon travail, je la remercie aussi pour la confiance qu'elle m'a accordée.

Je remercie Mr. Bouhmila de l'honneur qu'il me fait en acceptant la présidence du jury, je tiens aussi à le remercier pour son aide durant mon cursus et à l'attention porté à notre égard.

Je remercie Mme. Bechir d'avoir accepté d'examiner cet humble travail, et pour l'aide et les encouragements qu'elle m'a manifestée durant tout mon cursus.

Merci à tous les enseignants des départements de Mathématiques et de Physique, tout particulièrement Mr. B. Kerai pour sa patience et sa disponibilité, ainsi que Mr. B. Meziani pour m'avoir fait confiance et prêté la documentation qui m'a été nécessaire à l'avancement de mon travail.

Ma reconnaissance va également à ma famille et à mes amis qui m'ont soutenue et supportée durant cette longue année de travail, merci pour les innombrables moments passés en votre compagnie.

Table des matières

Introduction	1
1 Historique et position du problème	2
1.1 Aperçu historique des équations de Navier-Stokes	2
1.2 Position du problème	5
2 Rappels et notions de base	8
2.1 Espaces de Sobolev	8
2.2 Formulation variationnelle de problèmes aux limites elliptiques linéaires . .	14
2.3 Méthodes d'approximation interne	16
2.3.1 Méthode de Galerkin	19
2.3.2 Principes généraux de la méthode des éléments finis	20
3 Les équations de Navier-Stokes stationnaires	28
3.1 Une classe de problèmes non-linéaires	28
3.2 Application aux équations de Navier-Stokes	35
3.2.1 Solution du problème de Navier-Stokes	35
3.3 Méthode pour approximer les équations de Navier-Stokes	42
3.3.1 Le cas de l'unicité	42
3.3.2 Le cas de non unicité	48
4 Simulation des fluides et interaction avec des solides déformables	56
4.1 Simulateur de fluide	57
4.1.1 Principe de la méthode MAC	57

4.1.2	Matérialisation du liquide	58
4.1.3	Conditions aux limites considérées	59
4.1.4	Résolution des équations de Navier-Stokes	60
4.1.5	Résultats	61
4.2	Interaction avec des solides déformables	66
4.2.1	Interaction	66
4.2.2	Résultats	68
	Conclusion	72
	Bibliographie	73

Introduction

Le cours d'une rivière, les phénomènes météorologiques, certains aspects du climat, les coulées de lave, le sang dans les vaisseaux, le mouvement des étoiles dans une galaxie, mais aussi la circulation de l'air autour d'une aile d'avion ou d'une voiture; autant d'exemples de phénomènes que modélisent les équations de Navier-Stokes. La compréhension et la prévision du comportement des fluides en mouvement sont donc cruciales, aussi bien pour les scientifiques que pour la société dans son ensemble.

Dans ce travail, nous nous intéressons à l'étude des équations de Navier-Stokes stationnaires. En mécanique des fluides, celles-ci sont des équations aux dérivées partielles non linéaires, censées décrire le mouvement des fluides (liquide ou gaz). Ces équations ont été nommées ainsi en référence à leurs découvreurs Claude Louis Marie Henri Navier, mathématicien et ingénieur français et George Gabriel Stokes, mathématicien et physicien britannique, qui les ont établies séparément.

Au 20^{ème} siècle, la question de l'existence globale ou de la régularité des solutions des équations aux dérivées partielles de la mécanique des fluides devint d'une grande actualité. Nous citons les travaux d'Oseen publiés en 1911 et 1912 dans Acta Mathematica [25], [26], suivis de ceux de Lichtenstein entre 1927 et 1930, de Wolibner en 1933 dans [37] et viennent s'inclure les travaux de Leray en 1934 [21]. La résolution des équations de Navier-Stokes fait partie des sept *Problèmes du Millénaire* proposés par la Fondation Clay. Pour gagner un million de dollars, il s'agit soit de démontrer que les équations de Navier-Stokes sont bien posées au sens d'Hadamard (existence, unicité et stabilité), soit de démontrer qu'il existe un état initial du fluide tel qu'à un certain instant ultérieur, il "explose en temps fini".

Le but de ce travail est d'exposer une méthode de résolution de ces équations, mais nous nous limiterons au cas stationnaire. Notre travail est structuré en quatre chapitres. Pour bien comprendre le problème qui se pose, nous allons retracer, dans le premier chapitre, le contexte dans lequel s'est faite la construction de ces équations, et suivre leurs évolutions dans le temps. Ensuite, dans le second chapitre, nous donnerons quelques rappels d'analyse fonctionnelle et de formulation variationnelle, et introduirons la notion d'approximation numérique interne, nous n'exposerons que le cas particulier de la méthode des éléments finis dont nous donnerons les principes généraux et quelques théorèmes utiles. Le troisième chapitre constitue le cœur de notre travail, dans un premier temps, nous exhibons une méthode type pour la résolution d'une classe de problèmes non-linéaires, où nous énonçons quelques résultats d'existence et d'unicité de solutions faibles ainsi que des solutions approchées. Ensuite nous appliquons cette méthode au cas des équations de Navier-Stokes stationnaires. Nous approfondissons les notions de la méthode type proposée auparavant et nous présentons une méthode se basant sur la méthode des éléments finis pour approximer le problème de Navier-Stokes.

Comme actuellement, les physiciens et ingénieurs se sont mis d'accord sur le fait qu'il n'y a de bon modèle que s'il est validé par l'expérience, nous proposons dans le quatrième et dernier chapitre, une méthode de simulation des fluides, ainsi que leurs interactions avec des solides grâce aux équations de Navier-Stokes. Le but étant de donner une idée générale sur les résultats que nous pouvons obtenir grâce à la méthode MAC (Markers And Cells), dont nous présenterons le principe brièvement. En effet, à l'époque du "tout informatique", le calcul est roi! La mécanique des fluides n'échappe pas à cette règle et les progrès considérables des logiciels permettent de résoudre de très nombreux problèmes.

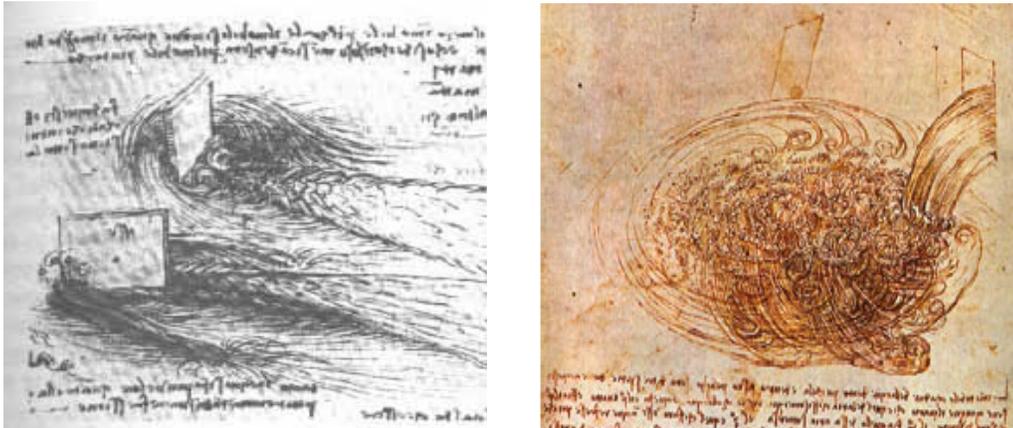
Historique et position du problème

Dans ce premier chapitre, nous abordons deux points importants à la compréhension des chapitres ultérieurs, le premier étant le contexte dans lequel les équations de Navier-Stokes ont vu le jour et le second, concerne les problèmes rencontrés lors de la résolution de ces dernières.

1.1 Aperçu historique des équations de Navier-Stokes

L'étude du comportement des fluides remonte au moins à Archimède, qui découvre notamment que tout corps plongé dans un liquide (ou un gaz) reçoit une poussée, qui s'exerce de bas en haut, et qui est égale au poids du volume de liquide déplacé. Après une longue interruption, l'étude des fluides reprend un véritable élan au *XV^{ème}* siècle, avec Leonard de Vinci, qui propose de nombreuses descriptions d'écoulements (jets, tourbillons,

ondes de surface) et invente le terme "turbulence".



Descriptions des fluides par De Vinci

Ce n'est qu'à partir du XVI^{ème} siècle que la mathématisation de la Physique a permis une étude systématique de la mécanique des fluides. C'est à Newton que nous devons l'essor des mathématiques en Physique, avec notamment les lois fondamentales de la dynamique (1687). De nombreux phénomènes physiques peuvent ainsi être mis en équations.

Ce sont J. d'Alembert et L. Euler [10] qui ont pu établir les équations fondamentales de la mécanique des fluides, appelées aujourd'hui équations d'Euler. Ces équations voient le jour suite à un *Prix de Mathématiques* proposé en 1748 par l'Académie des sciences de Berlin: il s'agit de "*déterminer la théorie de la résistance que souffrent les corps solides dans leur mouvement, en passant par un fluide, tant par rapport à la figure et aux divers degrés de vitesse des corps qu'à la densité et aux divers degrés de compression du fluide*". En d'autres termes, il s'agit d'établir une théorie permettant d'interpréter, voire d'anticiper, le mouvement des fluides (ici en présence d'un obstacle solide). Nous devons à d'Alembert, dans son manuscrit, l'introduction dans l'étude de la dynamique des fluides les notions fondamentales de dérivées partielles et de champ de vitesses.

Son étude reste cependant incomplète, car il ne parvient pas à définir correctement la notion de *pression*, qui est fondamentale pour comprendre le caractère incompressible des fluides (incompressible veut dire que le volume du fluide demeure constant sous l'action d'une pression externe). En 1775, Euler publie un traité dans lequel apparaît pour la première fois le système complet d'équations aux dérivées partielles décrivant les fluides parfaits incompressibles. Son travail est complètement abouti, contrairement à celui de

d'Alembert, en outre il parvient à dégager la notion de gradient de pression. Si nous notons par u le champ de vitesse du fluide, qui dépend du temps t et de la position x et si p désigne sa pression, les équations d'Euler s'écrivent:

$$(E) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u + \nabla p = 0 \\ \operatorname{div} u = 0 \end{cases}$$

La première équation représente la conservation de la quantité de mouvement, alors que la seconde correspond à la conservation de la masse (le fluide est *incompressible*).

Cependant dès 1752, d'Alembert s'aperçoit qu'un corps plongé dans un liquide satisfaisant aux principes décrits par ces équations, peut se déplacer sans se voir opposer aucune résistance, ce qui est manifestement contraire à l'intuition et à l'expérience physique. C'est ce que nous appelons le "paradoxe de d'Alembert", qu'il formule ainsi: "*Il me semble que la théorie, développée avec toute la rigueur possible, donne, au moins dans plusieurs cas, une résistance nulle, paradoxe singulier que je laisse les Géomètres futurs résoudre*".

Pour comprendre pourquoi un solide plongé dans un liquide va subir en général une force de résistance, tendant à le freiner, il faut en fait prendre en compte des phénomènes de *frottement* au niveau moléculaire dans le fluide. Lors de son évolution, un fluide va en effet avoir tendance à dissiper de l'énergie, sous forme de chaleur simplement par le frottement d'une couche de fluide sur l'autre. Inclure un tel phénomène dans les équations d'Euler semble difficile puisque celles-ci formulent l'écoulement de la vitesse macroscopique du fluide, alors que cette dissipation d'énergie a lieu à un niveau microscopique.



Claude Louis Marie Henri Navier,
France (1785 – 1836)



George Gabriel Stokes,
Irlande (1819 – 1903)

Nous devons à C. Navier [24] l'idée, en 1820, d'introduire un terme supplémentaire à l'équation d'Euler, censé représenter cette perte d'énergie dans le fluide. En simplifiant sa démarche, nous pouvons considérer qu'il a cherché à incorporer aux équations d'Euler précisément une équation dite de la chaleur. Cette équation s'écrit ainsi: si T est la température d'un solide, son évolution au cours du temps obéit à:

$$(C) \quad \frac{\partial T}{\partial t} - \Delta T = 0$$

Ainsi Navier, suivi par G. Stokes [30] en 1845 propose le modèle suivant pour décrire l'évolution d'un fluide visqueux (en tenant compte précisément de cette dissipation d'énergie sous forme de chaleur):

$$(NS) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u - \nu \Delta u + \nabla p = 0 \\ \operatorname{div} u = 0 \end{cases}$$

Le paramètre $\nu > 0$, désigne la *viscosité* du fluide.

1.2 Position du problème

Lorsque nous sommes devant un tel problème, la première chose à laquelle nous pensons est d'essayer de chercher des solutions analytiques explicites. Malheureusement, cette démarche est vouée à l'échec. Alors vient l'étape où nous cherchons à construire des solutions approchées, cela a conduit à développer une théorie de *résolution d'équations aux dérivées partielles*.

Pour développer une telle théorie, il faut tout d'abord se mettre d'accord sur ce que nous appelons résolution des équations, dès lors que nous abandonnons l'idée d'en trouver des solutions explicites. Selon Hadamard nous dirons qu'une équation aux dérivées partielles est *bien posée* si les trois conditions suivantes sont satisfaites, (existence, unicité et stabilité):

Existence: l'état du fluide étant supposé connu à un instant donné, il existe une solution à l'équation aux instants futurs, coïncidant avec cet état initial

Unicité: il n'existe qu'une seule solution à l'équation coïncidant avec cet état à l'instant initial

Stabilité: cette solution est stable sous perturbations, du moins pendant un certain temps.

D'un point de vue physique, ces trois principes correspondent au fait que:

◆ Il est effectivement possible de réaliser une expérience correspondant à l'évolution décrite par les équations

◆ Si nous réalisons l'expérience deux fois, nous trouverons deux fois le même résultat

◆ Si nous faisons de petites erreurs de mesures, cela ne modifiera pas trop violemment la solution (pendant un temps fixé).

Ce dernier point est particulièrement important si nous songeons par exemple à des applications numériques: il est impossible d'implémenter l'équation exacte dans un ordinateur, nous sommes obligés de la remplacer par une approximation (un ordinateur ne reconnaît que des quantités discrètes, et pas continues comme les variables x et t qu'il faut donc discrétiser au préalable) et il est bon de vérifier tout d'abord que la solution ne sera pas trop sensible à ce type de procédé.

Le seul cas où les équations sont bien posées, est lorsque l'écoulement a une direction invariante, ce qui n'est pas très réaliste.

En trois dimensions d'espace en revanche, la situation est beaucoup moins claire, et pour résumer l'état de nos connaissances sur la question, nous pouvons dire que nous ne savons résoudre ces équations, au sens précédent, que si l'état du fluide à l'instant initial est suffisamment proche du repos.

Dans le cas contraire (une mer un peu agitée par exemple), nous ne sommes pas capables de décider si la solution de l'équation correspondant à cet état initial va exister éternellement ou exploser en temps finis. Cette dernière notion signifie qu'à un certain instant ultérieur, une des composantes de la vitesse va devenir plus grande que n'importe quel nombre donné à l'avance. Cela peut paraître physiquement peu concevable, mais

la signification physique de ce fait est simplement qu'à partir d'un certain instant, la vitesse du fluide devient très grande et en particulier dépasse la vitesse du son. Mais alors l'hypothèse d'incompressibilité du fluide ne peut plus être satisfaite, et il faut simplement changer de modèle à cet instant. D'un point de vue physique, de telles solutions "explosives" sont une indication que le modèle mathématique choisi cesse d'être valable.

Rappels et notions de base

Le but de ce chapitre est d'énoncer des rappels concernant les espaces de Sobolev, des notions d'analyse fonctionnelle et de formulation variationnelle dont nous avons besoin dans la suite de notre travail. De plus, nous introduisons la méthode d'approximation interne de manière très générale, sans trop aller dans les détails.

En ce qui concerne les rappels sur les espaces de Sobolev, la plupart des résultats sont énoncés sans démonstration, pour plus de détails voir [31].

2.1 Espaces de Sobolev

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n , $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $u \in L^2(\Omega)$, u s'identifie à une distribution sur Ω notée encore u .

Notons $\frac{\partial u}{\partial x_j}$ pour $j = \overline{1, n}$, les dérivées partielles premières de u , au sens des distributions.

Définition 2.1.1 *Nous appelons "espace de Sobolev" d'ordre 1 sur Ω , l'espace*

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_j} \in L^2(\Omega), \forall j = 1, \dots, n \right\}$$

La dérivation est à comprendre au sens des distributions. En d'autres termes, une fonction $u \in L^2(\Omega)$ est dans $H^1(\Omega)$, s'il existe des fonctions v_1, \dots, v_n dans $L^2(\Omega)$ telles

que:

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = - \int_{\Omega} v_j \varphi dx, \forall \varphi \in D(\Omega), \forall j = 1, \dots, n$$

Nous avons alors,

$$v_j = \frac{\partial u}{\partial x_j}, \forall j = 1, \dots, n$$

L'espace $H^1(\Omega)$ est muni de la norme:

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^1(\Omega)} &= \left(\sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) \right|^2 dx + \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 + \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Pour la topologie induite par cette norme, une suite $(u_n)_n$ de $H^1(\Omega)$ converge vers $u \in H^1(\Omega)$ si $u_n \rightarrow u$ dans $L^2(\Omega)$ et $\frac{\partial u_n}{\partial x_j} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_j}$ dans $L^2(\Omega)$, pour tout $j = 1, \dots, n$.

La norme de $H^1(\Omega)$ est issue d'un produit scalaire noté $(u, v)_{H^1(\Omega)}$ et défini par:

$$\begin{aligned} (u, v)_{H^1(\Omega)} &= \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx + \int_{\Omega} u(x) v(x) dx \\ &= \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_{\Omega} u(x) v(x) dx \end{aligned}$$

Proposition 2.1.1 [31] *L'espace $H^1(\Omega)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ est un espace de Hilbert.*

Définition 2.1.2 *De la même façon, nous définissons les espaces de Sobolev d'ordre m , ($m \in \mathbb{N}^*$) par:*

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : D^\alpha u \in L^2(\Omega), \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq m\}$$

Pour $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n : |\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j$, $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$.

Muni de la norme naturelle:

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.1.1)$$

Proposition 2.1.2 [31] *L'espace $H^m(\Omega)$ ($m \in \mathbb{N}^*$) muni de la norme $\|\cdot\|_{H^m(\Omega)}$ est un espace de Hilbert.*

Dans le cas où $\Omega = \mathbb{R}^n$, il est possible de définir les espaces de Sobolev en utilisant la transformée de Fourier. Si $u \in S'(\mathbb{R}^n)$, on note \hat{u} sa transformée de Fourier.

Proposition 2.1.3 [31] *L'espace $H^m(\mathbb{R}^n)$ ($m \in \mathbb{N}^*$) peut être défini par:*

$$H^m(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in S'(\mathbb{R}^n) : (1 + |\xi|^2)^{\frac{m}{2}} \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n) \right\}$$

et la norme définie par (2.1.1) est équivalente à:

$$\|u\|_{H^m(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\Omega} (1 + |\xi|^2)^m |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.1.2)$$

Cette proposition permet de définir l'espace $H^m(\mathbb{R}^n)$ pour tout $m \in \mathbb{R}$ (et plus seulement $m \in \mathbb{N}^*$). Si m n'est pas entier, on le note alors plutôt $H^s(\mathbb{R}^n)$, $s \in \mathbb{R}$. Le théorème de Plancherel nous assure alors que si $s \geq 0$, $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ ce qui n'est plus le cas si $s < 0$.

Définition 2.1.3 *D'une façon plus générale; pour tout $1 \leq p \leq \infty$ et pour tout $m \in \mathbb{N}$, on définit les espaces de Sobolev:*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq m\}$$

que l'on munit de la norme:

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$(W^{m,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)})$ est un espace de Banach.

Théorème 2.1.1 [13] *Soit $m \in \mathbb{N}$ avec $m \geq 1$ et soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p \leq \infty$. Si Ω est un ouvert de \mathbb{R}^n avec une frontière Γ de classe C^1 , alors les assertions suivantes sont vérifiées algébriquement et topologiquement:*

$$W^{m,p}(\Omega) \subset \begin{cases} L^q(\Omega) & \text{pour } \frac{1}{p} = \frac{1}{q} - \frac{m}{n} > 0 \\ L^q_{loc}(\Omega), \forall q & \text{avec } 1 \leq q \leq \infty \text{ pour } \frac{1}{p} = \frac{m}{n} \\ C^0(\overline{\Omega}) & \text{pour } \frac{1}{p} < \frac{m}{n} \end{cases} \quad (2.1.3)$$

De plus, si Ω est borné, l'inclusion canonique de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $L^{q_1}(\Omega)$ est compacte $\forall q_1 \in \mathbb{R}$ satisfaisant:

$$\begin{cases} 1 \leq q_1 < q \text{ quand } \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n} > 0 \\ 1 \leq q_1 < \infty \text{ quand } p \geq n \end{cases} \quad (2.1.4)$$

Dans le cas des équations de Navier-Stokes, la dimension n est égale à 2 ou à 3, et l'espace le plus utilisé est $H^1(\Omega)$. Nous avons les assertions suivantes:

Si $n = 2$, $H^1(\Omega) \subset L_{loc}^q(\Omega)$ pour $1 \leq q < \infty$

Si $n = 3$, $H^1(\Omega) \subset L^6(\Omega)$.

De plus, quand Ω est borné, l'inclusion canonique de $H^1(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ est compacte pour:

$$1 \leq q < \infty \text{ quand } n = 2$$

et

$$1 \leq q < 6 \text{ quand } n = 3$$

Théorème 2.1.2 [31] *Supposons que Γ est de classe C^1 . Alors*

$$H^s(\Omega) \subset L^p(\Omega)$$

algébriquement et topologiquement, où

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{2} - \frac{s}{n} \text{ à condition que } \frac{1}{2} - \frac{s}{n} > 0 \quad (2.1.5)$$

Par ailleurs, si Ω est borné, l'inclusion de $H^s(\Omega)$ dans $L^{q_1}(\Omega)$ est compacte, $\forall q_1$ tel que $1 \leq q_1 < p$ avec p défini par (2.1.5).

Finalement, le théorème suivant résume brièvement les propriétés les plus importantes relatives aux espaces de Sobolev.

Théorème 2.1.3 [13] *Soit $\theta \in [0, 1]$, soient s_i et t_i deux couples de réels avec $0 \leq t_i \leq s_i$, pour $i = 1, 2$. Soit \mathcal{L}_i et \mathcal{L}_θ respectivement, $\mathcal{L}(H^{s_i}(\Omega); H^{t_i}(\Omega))$ et $\mathcal{L}(H^{(1-\theta)s_1 + \theta s_2}(\Omega); H^{(1-\theta)t_1 + \theta t_2}(\Omega))$. Soit π un opérateur de $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$. Alors π appartient à \mathcal{L}_θ et il existe une constante C telle que:*

$$\|\pi\|_{\mathcal{L}_\theta} \leq C \|\pi\|_{\mathcal{L}_1}^{1-\theta} \|\pi\|_{\mathcal{L}_2}^\theta$$

Théorème 2.1.4 [31] *Si Ω est un ouvert de classe C^1 , avec $\Gamma = \partial\Omega$ bornée, alors $D(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$.*

$H_0^1(\Omega)$ est l'adhérence (ou bien la fermeture) de $D(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$, pour la norme de $H^1(\Omega)$.

Plus généralement, comme $D(\Omega) \subset H^m(\Omega)$, nous définissons

$$H_0^m(\Omega) = \overline{D(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H^m}}$$

c.à.d. $H_0^m(\Omega)$ est la fermeture de $D(\Omega)$ dans $H^m(\Omega)$ pour la norme de $H^m(\Omega)$.

Théorème 2.1.5 [23] *(de densité)*

$D(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $H^m(\mathbb{R}^n)$, $\forall m \in \mathbb{R}$.

Dans ce cas, nous avons $H^1(\mathbb{R}^n)$ et $H_0^1(\mathbb{R}^n)$ se confondent.

Théorème 2.1.6 [23] *Soit Ω un ouvert de classe C^1 , alors il existe un opérateur linéaire continu, appelé opérateur trace et noté γ_0 de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma)$ qui coïncide avec l'opérateur de restriction usuel pour les fonctions continues, tel que:*

- 1) $\text{Ker}(\gamma_0) = H_0^1(\Omega)$.
- 2) L'image de γ_0 est un sous-espace propre et dense de $L^2(\Gamma)$, appelé $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

Pour μ dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, nous définissons

$$\|\mu\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} = \inf_{\substack{v \in H^1(\Omega) \\ \gamma_0 v = \mu}} \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

L'application qui à $\mu \mapsto \|\mu\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}$ est une norme sur $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ et $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ est un espace de Hilbert pour cette norme. Soit $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ l'espace dual de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ muni de la norme suivante:

$$\|\mu^\star\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} = \sup_{\substack{\mu \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \\ \mu \neq 0}} \frac{|\langle \mu^\star, \mu \rangle|}{\|\mu\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}} \quad (2.1.6)$$

où encore une fois nous notons $\langle \cdot, \cdot \rangle$ la dualité entre $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ et $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Nous remarquons que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une extension du produit scalaire dans $L^2(\Gamma)$ dans le sens où quand $\mu^\star \in L^2(\Gamma)$, nous pouvons identifier $\langle \mu^\star, \mu \rangle$ avec $\int_{\Gamma} \mu^\star(\sigma) \mu(\sigma) d\sigma$.

Soit $n = (n_1, \dots, n_n)$ le vecteur unité normal à Γ qui existe partout sur Γ grâce à la lipschitzienne de ce dernier. Si v est une fonction de $H^2(\Omega)$, nous définissons sa dérivée normale par:

$$\frac{\partial v}{\partial n} = \sum_{i=1}^n n_i \gamma_0 \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \right) \quad (2.1.7)$$

Nous pouvons démontrer que l'application qui à $v \mapsto \frac{\partial v}{\partial n} \in \mathcal{L} \left(H^2(\Omega); H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \right)$. De plus, nous pouvons caractériser $H_0^2(\Omega)$ comme suit:

Théorème 2.1.7 [13]

$$H_0^2(\Omega) = \left\{ v \in H^2(\Omega); \gamma_0 v = 0 \text{ et } \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \right\}$$

Quand Γ est suffisamment régulier, le rang de γ_0 peut toujours être étendu comme suit:

Pour $m \in \mathbb{N}, m \geq 1$, nous définissons $H^{m-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ comme étant l'image de $H^m(\Omega)$ par la transformation γ_0 , muni de la norme:

$$\|f\|_{H^{m-\frac{1}{2}}(\Gamma)} = \inf_{\substack{v \in H^m(\Omega) \\ \gamma_0 v = f}} \|v\|_{H^m(\Omega)}$$

Alors, nous pouvons vérifier que $\frac{\partial u}{\partial n} \in H^{m-\frac{3}{2}}(\Gamma)$ pour u dans $H^m(\Omega)$.

Théorème 2.1.8 [20] *Inégalité de Poincaré*

Soit Ω un ouvert borné (au moins dans une direction). Alors,

$$\exists c = c(\Omega) > 0 \text{ tel que } \forall u \in H_0^1(\Omega), \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq c \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

Par suite:

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

est une norme sur $H_0^1(\Omega)$ équivalente à celle induite par $H^1(\Omega)$.

Théorème 2.1.9 [23] *Formule de Green*

Soit Ω un ouvert de classe C^1 de \mathbb{R}^n , avec $\Gamma = \partial\Omega$ borné (ou bien $\Omega = \mathbb{R}^n$), alors: $\forall u \in H^2(\Omega)$ et $\forall v \in H^1(\Omega)$, nous avons:

$$\int_{\Omega} (\Delta u) v = - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\sigma$$

où,

$$\bullet \frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot \vec{n} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j} \cdot n_j$$

$$\bullet n = \begin{pmatrix} n_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ n_j \end{pmatrix} \text{ normale unitaire extérieur.}$$

Lemme 2.1.1 [29]

1) Soient u et $v \in H^1(\Omega)$. Alors, pour $1 \leq i \leq n$,

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx + \int_{\Gamma} u v \nu_i d\sigma \quad (2.1.8)$$

2) Par ailleurs, si $u \in H^2(\Omega)$, alors

$$\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} v dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Gamma} \nu_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v d\sigma \quad (2.1.9)$$

Remarque 2.1.1 Adoptons les notations suivantes:

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$$

(2.1.9) devient:

$$(\nabla u, \nabla v) = - (\Delta u, v) + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} v d\sigma \quad (2.1.10)$$

2.2 Formulation variationnelle de problèmes aux limites elliptiques linéaires

Dans cette section, nous donnons un bref résumé des théorèmes et notions nécessaires à l'étude des problèmes aux limites elliptiques linéaires.

Nous appelons formulation variationnelle, tout problème du type suivant:

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H \text{ tel que} \\ a(u, v) = \langle l, v \rangle, \forall v \in H \end{cases} \quad (2.2.1)$$

où,

(i) H est un espace de Hilbert (réel) dont le produit scalaire est noté: $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ et la norme associée est notée $\|\cdot\|_H$.

(ii) $a(\cdot, \cdot)$ est une forme bilinéaire sur $H \times H$ qui de plus est continue, c.à.d.

$$\exists C_a > 0, \forall (u, v) \in H \times H, |a(u, v)| \leq C_a \|u\|_H \|v\|_H$$

(iii) l est une forme linéaire sur H , qui de plus est continue, c.à.d.

$$\exists C_l > 0, \forall v \in H, |\langle l, v \rangle| \leq C_l \|v\|_H$$

Définition 2.2.1 Une forme bilinéaire $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ est dite coercive (H -elliptique), si:

$$\exists \alpha > 0, \forall v \in H : a(v, v) \geq \alpha \|v\|_H^2$$

Théorème 2.2.1 [32] (Théorème de Lax-Milgram)

Soit H un espace de Hilbert (réel) et H' son dual.

Soit $a(\cdot, \cdot)$ une forme bilinéaire sur $H \times H$, continue et coercive. Alors,

(i) $\forall l \in H', \exists ! u \in H$, solution de:

$$(FV) \quad a(u, v) = \langle l, v \rangle, \forall v \in H$$

(ii) De plus, $\exists c > 0$ (ne dépendant pas de l), telle que:

$$\|u\|_H \leq c \|l\|_{H'}$$

(iii) Si de plus, $a(\cdot, \cdot)$ est symétrique, alors l'unique solution u de (FV) est caractérisée par:

$$J(u) = \min_{v \in H} J(v) \quad \text{où } J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - \langle l, v \rangle$$

Remarque 2.2.1 *Le théorème de Lax-Milgram donne des conditions suffisantes pour que le problème soit bien posé (c'est à dire, existence, unicité et stabilité de la solution), pas des conditions nécessaires. Si les hypothèses de ce théorème ne sont pas satisfaites, nous ne pouvons pas en déduire que le problème est mal posé. Toutefois, dans le cas où toutes les hypothèses autres que la coercivité de a sont satisfaites, nous avons le résultat suivant: si a est symétrique et positive ($a(v, v) \geq 0, \forall v \in V$), alors a non coercive implique que le problème est mal posé.*

2.3 Méthodes d'approximation interne

Soit Ω un domaine de \mathbb{R}^n ($n = 1, 2$ ou 3 en pratique), de frontière $\partial\Omega$, et sur lequel nous cherchons à résoudre une équation aux dérivées partielles, munie de conditions aux limites.

En écrivant la formulation variationnelle, nous obtenons un problème de la forme

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que} \\ a(u, v) = \langle l, v \rangle, \forall v \in V \end{cases} \quad (2.3.1)$$

où V est un espace de Hilbert. Sous réserve que l'équation de départ ait de bonnes propriétés, c'est à dire par exemple que nous soyons dans les hypothèses du théorème de Lax-Milgram, (2.3.1) admet une solution unique u . L'approximation interne de (2.3.1) consiste à remplacer l'espace de Hilbert V par un sous-espace de dimension finie V_h , c'est à dire à chercher la solution de:

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que} \\ a(u_h, v_h) = \langle l, v_h \rangle, \forall v_h \in V_h \end{cases} \quad (2.3.2)$$

V_h étant de dimension finie, c'est un fermé de V .

V étant un espace de Hilbert, V_h l'est donc aussi. D'où l'existence et l'unicité de u_h , à nouveau par exemple d'après le théorème de Lax-Milgram.

L'espace V_h sera en pratique construit à partir d'un maillage du domaine Ω , l'indice h désignant la "taille typique" des mailles. Lorsque nous construisons des maillages de plus en plus fins, la suite de sous-espaces $(V_h)_h$ formera une **approximation interne** de V .

La résolution de l'approximation interne (2.3.2) est facile comme le montre le lemme suivant.

Lemme 2.3.1 *Soit V un espace de Hilbert réel, et V_h un sous-espace de dimension finie. Soit $a(.,.)$ une forme bilinéaire continue et coercive sur V . Alors l'approximation interne (2.3.2) admet une unique solution. Par ailleurs cette solution peut s'obtenir en résolvant un système linéaire de matrice définie positive (et symétrique si $a(.,.)$ est symétrique).*

Démonstration. L'existence et l'unicité de $u_h \in V_h$, solution de (2.3.2), découle du théorème de Lax-Milgram appliqué à V_h . Pour mettre le problème sous une forme plus simple, nous introduisons une base $(\phi_j)_{1 \leq j \leq n_h}$ de V_h . Si $u_h = \sum_{j=1}^{n_h} u_j \phi_j$, posons $U_h = (u_1, \dots, u_{n_h})$ le vecteur dans \mathbb{R}^{n_h} des coordonnées de u_h . Le problème (2.3.2) est équivalent à:

$$\begin{cases} \text{Trouver } U_h \in \mathbb{R}^{n_h} \text{ tel que} \\ a\left(\sum_{j=1}^{n_h} u_j \phi_j, \phi_i\right) = \langle l, \phi_i \rangle, \forall 1 \leq i \leq n_h \end{cases}$$

ce qui s'écrit sous la forme d'un système linéaire

$$K_h U_h = b_h \tag{2.3.3}$$

avec, pour $1 \leq i, j \leq n_h$,

$$(K_h)_{ij} = a(\phi_j, \phi_i), \quad (b_h)_i = l(\phi_i)$$

La coercivité de la forme bilinéaire $a(u, v)$ entraîne le caractère défini positif de la matrice K_h , et donc son inversibilité. En effet, pour tout vecteur $U_h \in \mathbb{R}^{n_h}$, nous avons

$$K_h U_h \cdot U_h \geq \nu \left\| \sum_{j=1}^{n_h} u_j \phi_j \right\|^2 \geq C |U_h|^2 \text{ avec } C > 0$$

car toutes les normes sont équivalentes en dimension finie ($|\cdot|$ désigne la norme euclidienne dans \mathbb{R}^{n_h}). De même, la symétrie de $a(.,.)$ implique celle de K_h . Dans les applications mécaniques la matrice K_h est appelée **matrice de rigidité**. ■

Remarque 2.3.1 Dans le cas de la formulation générale suivante:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que} \\ a(u, w) = \langle l, w \rangle, \forall w \in W \end{array} \right. \quad (2.3.4)$$

où $a(.,.)$ est une forme bilinéaire sur $V \times W$ et $l(.)$ est une forme linéaire sur W . V est alors appelé espace des solutions et W espace des fonctions-tests. La formulation (2.3.1) correspond donc au cas particulier $W = V$.

Dans le cas de cette formulation, nous avons le théorème suivant.

Théorème 2.3.1 (Banach-Necàs-Babuska)

Soient V et W deux espaces de Hilbert, $a(.,.)$ une forme bilinéaire continue sur $V \times W$, l une forme linéaire continue sur W . Alors le problème (2.3.4) admet une et une seule solution si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \inf_{v \in V} \sup_{w \in W} \frac{a(v, w)}{\|v\|_V \|w\|_W} \geq \alpha \\ \forall w \in W, (a(v, w) = 0, \forall v \in V) \implies (w = 0) \end{array} \right.$$

Remarques 2.3.2 ♦ La première condition est appelée **condition inf-sup**.

♦ Contrairement au théorème de Lax-Milgram, ce théorème fournit une condition nécessaire et suffisante pour que la formulation soit bien posée.

Nous allons maintenant comparer l'erreur commise en remplaçant l'espace V par son sous-espace V_h . Précisons auparavant quelques notations: soit $\alpha > 0$ la constante de coercivité et $M > 0$ la constante de continuité de la forme bilinéaire $a(u, v)$ qui vérifie

$$\begin{aligned} a(u, v) &\geq \alpha \|u\|^2, \forall u \in V \\ |a(u, v)| &\leq M \|u\| \|v\|, \forall u, v \in V \end{aligned}$$

Le lemme précédent montre que la distance entre la solution exacte u et la solution approchée u_h est majorée uniformément par rapport au sous-espace V_h par la distance entre u et V_h .

Finalement pour démontrer la convergence de cette approximation variationnelle, nous donnons un dernier lemme général.

Lemme 2.3.2 [1]

On se place dans les hypothèses du lemme 2.3.1. Supposons qu'il existe un sous-espace $\mathcal{V} \subset V$ dense dans V et une application r_h de \mathcal{V} dans V_h (appelée **opérateur d'interpolation**) tels que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|v - r_h(v)\| = 0, \forall v \in \mathcal{V} \quad (2.3.5)$$

Alors la méthode d'approximation variationnelle interne converge, c'est à dire que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\| = 0 \quad (2.3.6)$$

En résumé, pour obtenir une approximation numérique de la solution exacte du problème variationnelle (2.3.1), il faut introduire un espace V_h de dimension finie puis résoudre un simple système linéaire associé à l'approximation variationnelle interne (2.3.2). Néanmoins, le choix de V_h n'est pas évident. Il faut qu'il respecte deux critères:

- 1) Nous devons pouvoir construire un opérateur d'interpolation r_h de \mathcal{V} dans V_h satisfaisant (2.3.5) (où typiquement \mathcal{V} est un espace de fonctions régulières),
- 2) Il faut que la résolution du système linéaire $K_h U_h = b_h$ soit économique (en pratique ces système linéaires sont de très grandes tailles).

La méthode des éléments finis consiste précisément à fournir de tels "bons" espaces V_h . Avant de nous approfondir dans la méthode des éléments finis, disons quelques mots sur la méthode de Galerkin qui rentre aussi dans ce cadre.

2.3.1 Méthode de Galerkin

La méthode de Galerkin a été un précurseur de la méthode des éléments finis. C'est une méthode très générale et très robuste. Bien qu'elle n'ai aucun intérêt numérique en général, elle est très utile d'un point de vue théorique.

L'idée de la méthode est la suivante: nous supposons que l'espace de Hilbert V est séparable de dimension infinie, ce qui entraîne, qu'il existe une base hilbertienne $(e_i)_{i \geq 1}$ de V . Nous choisissons alors \mathcal{V} comme le sous-espace engendré par cette base hilbertienne, qui est bien sur dense dans V . En posant $h = \frac{1}{n}$, nous définissons V_h comme le sous-espace

de dimension finie engendré par (e_1, \dots, e_n) . Finalement, l'opérateur d'interpolation r_h est simplement la projection orthogonale sur V_h .

Malgré son adéquation au cadre théorique développé ci-dessus, la méthode de Galerkin est peu commode d'un point de vue numérique. En effet, la matrice K_h que nous obtenons ainsi est généralement "pleine", c'est à dire que tous les coefficients sont non nuls en général, et "mal conditionnée", c'est à dire que la résolution numérique du système linéaire sera instable car très sensible aux erreurs d'arrondi du calcul sur ordinateur.

2.3.2 Principes généraux de la méthode des éléments finis

Le principe de la méthode des éléments finis est de construire des espaces d'approximation interne V_h des espaces fonctionnels usuels $H^1(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$, $H^2(\Omega)$,..., dont la définition est basée sur la notion géométriques de **maillage** du domaine de Ω . Un maillage est un pavage de l'espace en volumes géométriques élémentaires: triangles, tétraèdres, parallélépipèdes,...etc. Dans ce contexte le paramètre h de V_h correspond à la taille maximale des mailles ou cellules qui composent le maillage.

Une base de V_h sera constituée de fonctions dont le support est localisé sur une ou quelques mailles. Ceci aura deux conséquences importantes: d'une part, dans la limite $h \rightarrow 0$, l'espace V_h sera de plus en plus "gros" et approchera de mieux en mieux l'espace V tout entier, et d'autre part, la matrice de rigidité K_h du système linéaire (2.3.3) sera **creuse**, c'est-à-dire que la plupart de ses coefficients seront nuls (ce qui limitera le coût de la résolution numérique).

Dans le cas de notre présent travail, nous nous contenterons d'exhiber uniquement la méthode des éléments finis en dimension $n \geq 2$.

Eléments finis en dimension $n \geq 2$

Nous nous plaçons en dimension d'espace $n \geq 2$ (en pratique $n = 2, 3$). Pour simplifier l'exposé, certains résultats ne seront démontrés qu'en dimension $n = 2$, mais ils s'étendent à la dimension $n = 3$ (au prix, parfois, de complications techniques et pratiques importantes).

Dans tout ce qui suit nous supposons que le domaine Ω est polyédrique (polygonaux si $n = 2$), c'est-à-dire que $\bar{\Omega}$ est une réunion finie de polyèdres de \mathbb{R}^n . Un polyèdre est une intersection finie de demi-espaces de \mathbb{R}^n et que les parties de son bord qui appartiennent à un seul hyperplan sont appelées ses faces.

Eléments finis triangulaires Commençons par définir ce qu'est un maillage du domaine Ω par des triangles en dimension $n = 2$ et des tétraèdres en dimension $n = 3$. Nous regroupons les triangles et les tétraèdres dans la famille plus générale des n -simplexes. Nous appelons n -simplexe K de \mathbb{R}^n l'enveloppe convexe de $(n + 1)$ points $(a_i)_{1 \leq i \leq n+1}$ de \mathbb{R}^n , appelés sommets de K . Un 2-simplexe est simplement un triangle et un 3-simplexe un tétraèdre.

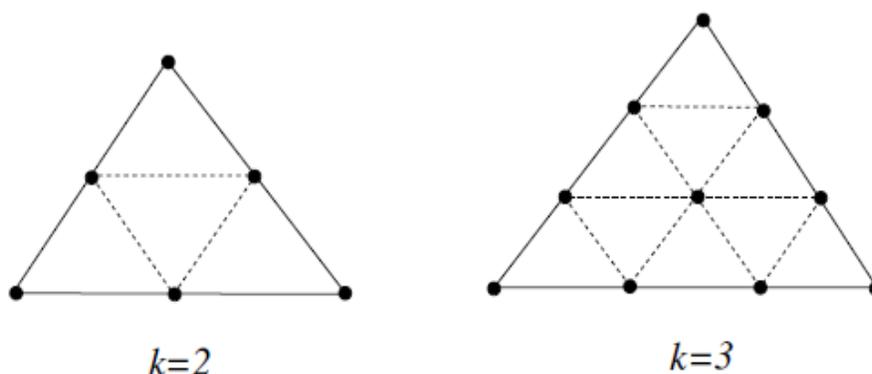


Figure 2.1: Gauche: un 2-simplexe. Droite: 3-simplexe.

Définition 2.3.1 Soit Ω un ouvert connexe polyédrique de \mathbb{R}^n . Un maillage triangulaire ou une triangulation de $\bar{\Omega}$ est un ensemble \mathcal{T}_h de n -simplexe $(K_i)_{1 \leq i \leq n}$ qui vérifient

- 1) $K_i \subset \bar{\Omega}$ et $\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^n K_i$,
- 2) l'intersection $K_i \cap K_j$ de deux n -simplexe distincts est un m -simplexe, avec $0 \leq m \leq n - 1$, dont tous les sommets sont aussi des sommets de K_i et K_j .

(En dimension $n = 2$, l'intersection de deux triangles est soit vide, soit réduite à un sommet commun, soit une arête commune entière; en dimension $n = 3$, l'intersection de deux tétraèdres est soit vide, soit un sommet commun, soit une arête commune entière, soit une face commune entière.)

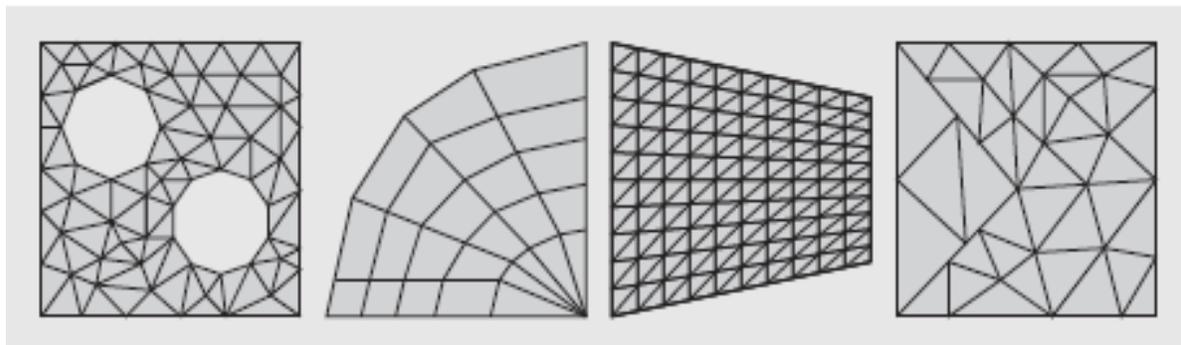


Figure 2.2: Exemples de maillages.

De gauche à droite: maillage uniquement composé de triangles, maillage avec différents types d'éléments, maillage régulier et maillage non conforme.

Les sommets ou nœuds du maillage \mathcal{T}_h sont les sommets des n -simplexes K_i qui les composent. Par convention, le paramètre h désigne le maximum des diamètres des n -simplexe K_i . Nous dirons que le n -simplexe K est non dégénéré si les points $(a_j)_{1 \leq j \leq n+1}$ n'appartiennent pas à un même hyperplan de \mathbb{R}^n (c.à.d. le triangle ou le tétraèdre est non plat). Si $(a_{ij})_{1 \leq i \leq n}$ désignent les coordonnées du vecteur a_j , la condition de non dégénérescence de K est que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n+1} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn+1} \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (2.3.7)$$

soit inversible.

Remarque 2.3.3 *Un N -simplexe a autant de faces que de sommets, qui sont elles-mêmes des $(N - 1)$ -simplexes.*

Dans un n -simplexe K , il est commode d'utiliser des coordonnées barycentriques au lieu des coordonnées cartésiennes usuelles. Si K est un N -simplexe non dégénéré de

sommets $(a_j)_{1 \leq j \leq n+1}$, les coordonnées barycentriques $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n+1}$ de $x \in \mathbb{R}^n$ sont définies par

$$\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j = 1, \quad \sum_{j=1}^{n+1} a_{i,j} \lambda_j = x_i \text{ pour } 1 \leq i \leq n \quad (2.3.8)$$

qui admet bien une unique solution car la matrice A , définie par (2.3.7), est inversible.

Les λ_j sont des fonctions affines de x . Nous vérifions alors que

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \lambda_j(x) \geq 0 \text{ pour } 1 \leq j \leq n+1\}$$

et que les $(n+1)$ faces de K sont les intersections de K et des hyperplans $\lambda_j(x) = 0$, $1 \leq j \leq n+1$. Nous pouvons ainsi définir un ensemble de points de K comme suit: pour tout entier $k \geq 1$, nous appelons "treillis" d'ordre k l'ensemble

$$\Sigma_k = \left\{ x \in K \text{ tel que } \lambda_j(x) \in \left\{ 0, \frac{1}{k}, \dots, \frac{k-1}{k}, 1 \right\} \text{ pour } 1 \leq j \leq n+1 \right\} \quad (2.3.9)$$

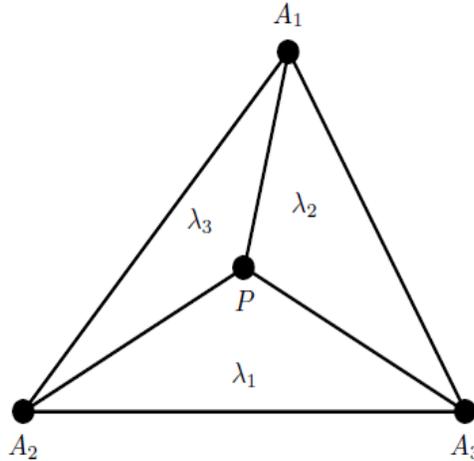


Figure 2.3: Coordonnées barycentriques

Nous définissons maintenant l'ensemble \mathcal{P}_k des polynômes à coefficients réels de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} de degré inférieur ou égal à k , c'est à dire que tout $p \in \mathcal{P}_k$ s'écrit sous la forme

$$p(x) = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_n \geq 0 \\ i_1 + \dots + i_n \leq k}} \alpha_{i_1, \dots, i_n} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} \text{ avec } x = (x_1, \dots, x_n)$$

Lemme 2.3.3 [1] *Soit K un n -simplexe. Pour un entier $k \geq 1$, soit Σ_k le treillis d'ordre k , défini par (2.3.9), dont les points sont notés $(\sigma_j)_{1 \leq j \leq n_k}$. Alors, tout polynôme de \mathcal{P}_k est déterminé de manière unique par ses valeurs au points $(\sigma_j)_{1 \leq j \leq n_k}$. Autrement dit, il existe une base $(\psi_j)_{1 \leq j \leq n_k}$ de \mathcal{P}_k telle que*

$$\psi_j(\sigma_i) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq n_k$$

Lemme 2.3.4 [1] *Soit K et K' deux n -simplexes ayant une face commune $\Gamma = \partial K \cap \partial K'$. Soit un entier $k \geq 1$. Alors, leurs treillis d'ordre k , Σ_k et Σ'_k coïncident sur cette face Γ . De plus, étant donné p_K et $p_{K'}$ deux polynômes de \mathcal{P}_k , la fonction v définie par*

$$v(x) = \begin{cases} p_K(x) & \text{si } x \in K \\ p_{K'}(x) & \text{si } x \in K' \end{cases}$$

est continue sur $K \cup K'$, si et seulement si p_K et $p_{K'}$ ont des valeurs qui coïncident aux points du treillis sur la face commune Γ .

Définition 2.3.2 *Etant donné un maillage \mathcal{T}_h d'un ouvert connexe polyédrique Ω , la méthode des éléments finis \mathcal{P}_k , ou éléments finis triangulaire de Lagrange d'ordre k , associée à ce maillage, est définie par l'espace discret*

$$V_h = \{v \in C(\overline{\Omega}) \text{ tel que } v|_{K_i} \in \mathcal{P}_k \text{ pour tout } K_i \in \mathcal{T}_h\} \quad (2.3.10)$$

*Nous appelons **nœuds des degrés de liberté** l'ensemble des points $(\hat{a}_i)_{1 \leq i \leq n_{dl}}$. Nous définissons aussi le sous-espace V_{0h} par*

$$V_{0h} = \{v \in V_h \text{ tel que } v = 0 \text{ sur } \partial\Omega\} \quad (2.3.11)$$

Remarques 2.3.4 1) *Lorsque $k = 1$ les nœuds des degrés de liberté coïncident avec les sommets du maillage. Lorsque $k = 2$ ces deux nœuds sont constitués d'une part des sommets du maillage et d'autre part des points milieux des arêtes reliant deux sommets.*

2) *L'appellation "éléments finis de Lagrange" correspond aux éléments finis dont les degrés de liberté sont des valeurs ponctuelles des fonctions de l'espace V_h .*

Proposition 2.3.1 [1] *L'espace V_h défini par (2.3.10), est un sous-espace de $H^1(\Omega)$ dont la dimension est finie, égale au nombre de degré de liberté. De plus, il existe une base de V_h $(\phi_i)_{1 \leq i \leq n_{dl}}$ définie par*

$$\phi_i(\hat{a}_j) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq n_{dl},$$

telle que

$$v(x) = \sum_{i=1}^{n_{dl}} v(\hat{a}_i) \phi_i(x).$$

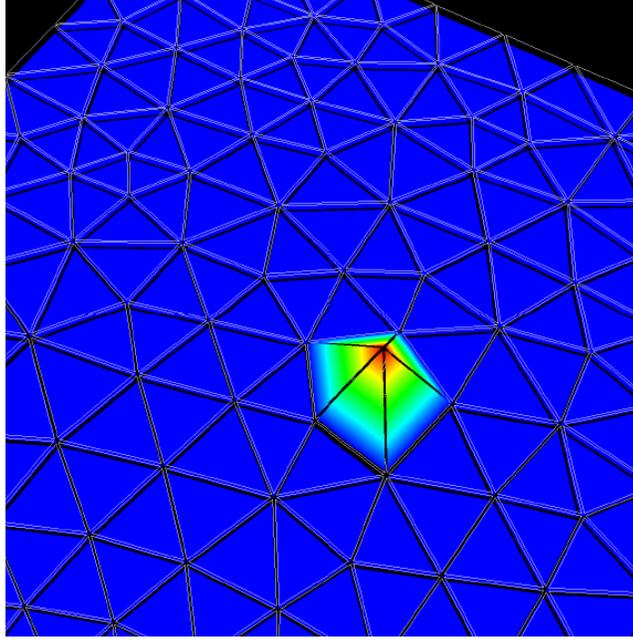


Figure 2.4: Fonction de base P_1 en dimension $n = 2$.

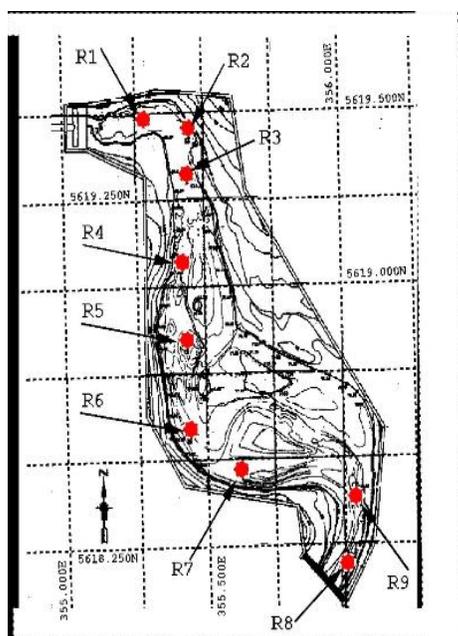
Remarques 2.3.5 1) *Nous obtenons un résultat semblable pour le sous-espace V_{0h} , défini par (2.3.11), qui est un sous-espace de $H_0^1(\Omega)$ de dimension finie égale au nombre de degrés de libertés intérieurs (nous ne comptons pas les nœuds sur le bord $\partial\Omega$).*

2) *Pour simplifier l'analyse (aussi bien que la mise en œuvre), nous pouvons utiliser une transformation affine pour ramener tout n -simplexe K du maillage \mathcal{T}_h à un n -simplexe de "référence" K_0 . Par ce simple changement de variable, tous les calculs se ramènent à des calculs sur K_0 . En pratique, nous choisissons souvent:*

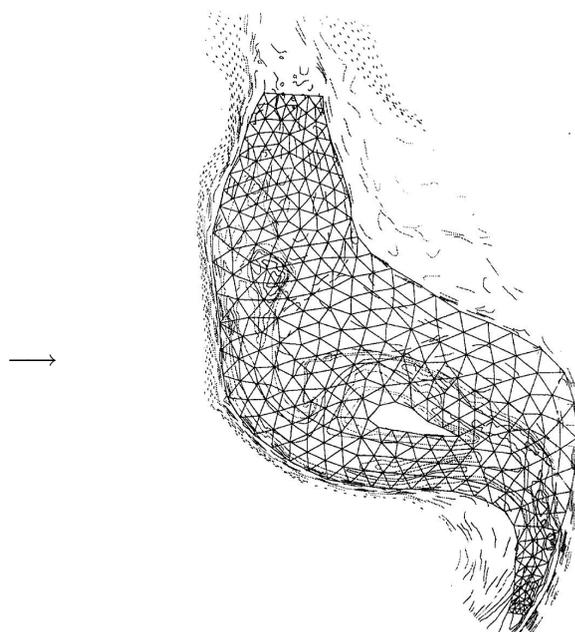
$$K_0 = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \sum_{i=1}^n x_i \leq 1, x_i \geq 0, 1 \leq i \leq n \right\}, \quad (2.3.12)$$

et nous vérifions que tout n -simplexe K est l'image par une transformation affine F_K de K_0 . En effet, les coordonnées barycentriques, définies par (2.3.8) sont les mêmes pour K et K_0 et, en notant $\lambda = (\lambda_i)_{1 \leq i \leq n+1}$, $\tilde{x} = (x, 1)$ le point courant dans K , $\tilde{x}_0 = (x_0, 1)$ le point courant dans K_0 , nous avons $A\lambda = \tilde{x}$, et $A_0\lambda = \tilde{x}_0$, où les matrices A et A_0 sont définies par (2.3.7) et inversibles. Nous en déduisons donc que $\tilde{x} = AA_0^{-1}\tilde{x}_0$, c'est-à-dire qu'il existe une matrice B , inversible d'ordre n , et un vecteur $b \in \mathbb{R}^n$ tels que $x = Bx_0 + b$, ou bien $F_K(\tilde{x}) = B\tilde{x} + b$.

Exemple 2.3.1 Maillage d'une rivière.



Vue de la rivière.



Maillage triangulaire appliqué à la rivière.

Définition 2.3.3 Soit $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ une suite de maillage de Ω . On dit qu'il s'agit d'une suite de maillages réguliers si:

- 1) la suite $h = \max_{K_i \in \mathcal{T}_h} \text{diam}(K_i)$ tend vers zéro,
- 2) il existe une constante C telle que, pour tout $h > 0$ et tout $K \in \mathcal{T}_h$,

$$\frac{\text{diam}(K)}{\rho(K)} \leq C \quad (2.3.13)$$

où $\rho(K)$ désigne le diamètre de la plus grande boule contenue dans K .

De plus, \mathcal{T}_h est dite uniformément régulière quand h tend vers zéro, s'il existe une autre constante C' telle que:

$$C'h \leq \text{diam}(K) \leq C\rho(K), \forall K \in \mathcal{T}_h$$

Les équations de Navier-Stokes stationnaires

Ce chapitre est consacré à l'étude des équations de Navier-Stokes stationnaires. Le premier paragraphe est consacré à présenter une méthode de résolution de problèmes non-linéaires, que nous appliquons par la suite au problème de Navier-Stokes. Nous présentons par la suite, dans le second paragraphe, une méthode d'approximation de ces équations, se basant sur la méthode des éléments finis.

3.1 Une classe de problèmes non-linéaires

Considérons deux espaces de Hilbert X et M (normés respectivement par $\|\cdot\|_X$ et $\|\cdot\|_M$) et une forme bilinéaire continue $b(v, \mu)$ dans $X \times M$. Nous introduisons $a(w, u, v)$, définie sur $X \times X \times X$, où pour w dans X , l'application $(u, v) \rightarrow a(w, u, v)$ est une forme bilinéaire continue sur $X \times X$. Alors, pour un élément l de X' donné, nous considérons le problème suivant:

$$(Q) \begin{cases} \text{Trouver un couple } (u, \lambda) \text{ dans } X \times M \text{ satisfaisant} \\ a(u, u, v) + b(v, \lambda) = \langle l, v \rangle, \forall v \in X \\ b(u, \mu) = 0, \forall \mu \in M \end{cases}$$

Nous introduisons l'opérateur $A(w) \in \mathcal{L}(X; X')$, pour w dans X et $B \in \mathcal{L}(X; M')$ définies par:

$$\begin{aligned} \langle A(w)u, v \rangle &= a(w, u, v), \forall u, v \in X \\ \langle Bv, \mu \rangle &= b(v, \mu), \forall v \in X, \forall \mu \in M \end{aligned}$$

Avec ces opérateurs, le problème (Q) devient:

$$(Q) \begin{cases} \text{Trouver } u \in X \text{ et } \lambda \in M \text{ tels que} \\ A(u)u + B'\lambda = l \text{ dans } X' \\ Bu = 0 \text{ dans } M' \end{cases}$$

Posons $V = \text{Ker}(B)$, alors le problème (P) associé au problème (Q) est:

$$(P) \begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ satisfaisant} \\ a(u, u, v) = \langle l, v \rangle, \forall v \in V \end{cases}$$

Si (u, λ) est une solution du problème (Q), alors u est aussi une solution du problème (P).

La véritable difficulté donc réside

dans la résolution du problème non linéaire (P). Pour commencer, nous avons besoin d'une conséquence du théorème classique du point fixe de Brouwer [22]:

Théorème 3.1.1 [13] *Soit C un ensemble non vide, convexe et compact d'un espace de dimension finie et soit F une application continue de C dans C . Alors F admet au moins un seul point fixe.*

Corollaire 3.1.1 *Soit H un espace de Hilbert de dimension finie, muni du produit scalaire noté par (\cdot, \cdot) et de la norme correspondante notée par $|\cdot|$. Soit P une application continue de H dans H vérifiant:*

Il existe $\xi > 0$ telle que

$$(P(f), f) > 0, \forall f \in H \text{ avec } |f| = \xi \tag{3.1.1}$$

Alors, il existe un élément f dans H tel que:

$$|f| \leq \xi, \quad P(f) = 0 \quad (3.1.2)$$

Démonstration. Nous allons démontrer ce corollaire par l'absurde. Supposons que $P(f) \neq 0$ dans la sphère $D = \{f \in H; |f| \leq \xi\}$. Alors l'application

$$f \longmapsto -\xi \frac{P(f)}{|P(f)|}$$

est une forme continue de D dans D . Comme l'espace H est de dimension finie, et de plus D est convexe, compact et non-vide, nous pouvons appliquer le théorème 3.1.1 qui nous donne l'existence d'un f dans D tels que

$$f = -\xi \frac{P(f)}{|P(f)|}$$

D'où, nous avons exhibé un f tel que $|f| = \xi$ et $(P(f), f) = -\xi |P(f)| < 0$, car $f \in D$. Ceci contredit (3.1.1). ■

Maintenant, nous sommes en position d'établir le résultat d'existence suivant.

Théorème 3.1.2 *Supposons que les hypothèses suivantes sont vérifiées:*

(i) *il existe une constante $\alpha > 0$ telle que*

$$a(v, v, v) \geq \alpha \|v\|_X^2, \quad \forall v \in V \quad (3.1.3)$$

(ii) *l'espace V est séparable et la forme $u \longmapsto a(u, u, v)$ est faiblement continue dans V , c.à.d.*

$$\begin{aligned} & u_m \rightarrow u \\ & \text{(quand } m \rightarrow \infty) \end{aligned} \quad \text{faiblement dans } V \implies \lim_{m \rightarrow \infty} a(u_m, u_m, v) = a(u, u, v), \quad \forall v \in V \quad (3.1.4)$$

Alors, le problème (P) admet au moins une solution u dans V .

Démonstration. Nous allons construire une suite approximante des solutions par la méthode de Galerkin.

Comme V est séparable, il existe une suite $(w_i)_{i \geq 1}$ dans V telle que:

(i) pour tout $m \geq 1$, les éléments w_1, \dots, w_m sont linéairement indépendants,

(ii) La combinaison linéaire finie des w_i , $\sum_i \xi_i w_i$, est dense dans V .

Alors, nous notons V_m le sous-espace de V générée par w_1, \dots, w_m et nous approximons le problème (P) par:

$$(P_m) \begin{cases} \text{Trouver } u_m \in V_m \text{ satisfaisant} \\ a(u_m, u_m, v) = \langle l, v \rangle, \forall v \in V_m \end{cases} \quad (3.1.5)$$

C'est un système à m équations non-linéaires et à m inconnues.

Notre objective maintenant est de montrer que pour tout m , (P_m) a au moins une solution u_m . Alors, nous devons construire une suite (u_m) en prenant pour chaque m l'une de ces solutions et d'établir qu'une telle suite (u_m) converge vers une solution de (P) .

Pour pouvoir démontrer l'existence de u_m , considérons l'opérateur $P_m : V_m \mapsto V_m$, définie $\forall v \in V_m$, par:

$$(P_m(v), w_i) = a(v, v, w_i) - \langle l, w_i \rangle \text{ pour } 1 \leq i \leq m$$

En particulier,

$$(P_m(v), v) = a(v, v, v) - \langle l, v \rangle$$

Ainsi, si nous notons par $\|l\|^\star = \sup_{v \in V} \frac{|\langle l, v \rangle|}{\|v\|_X}$, la norme de l dans V' , alors l'hypothèse (3.1.3) implique que:

$$(P_m(v), v) \geq \left(\alpha \|v\|_X - \|l\|^\star \right) \|v\|_X$$

D'où, nous choisissons $\xi > \frac{\|l\|^\star}{\alpha}$ et $\forall v \in V_m$ tels que $\|v\|_X = \xi$, nous obtenons:

$$(P_m(v), v) > 0$$

Par ailleurs, P_m est continue dans V_m grâce à l'hypothèse (3.1.4). Comme la dimension de V_m est finie, nous pouvons donc utiliser le corollaire 3.1.1. D'où, il existe un élément u_m de V_m qui satisfasse le problème P_m et de plus

$$0 = (P(u_m), u_m) \geq \left(\alpha \|u_m\|_X - \|l\|^\star \right) \|u_m\|_X$$

alors

$$\|u_m\|_X \leq \frac{\|l\|^\star}{\alpha} \quad (3.1.6)$$

Maintenant, nous examinons la convergence de (u_m) . De (3.1.6), nous voyons que la suite (u_m) est bornée dans V . Donc, nous pouvons extraire une sous suite (u_{m_p}) telle que:

$$u_{m_p} \rightarrow u \text{ faiblement dans } V \text{ quand } p \rightarrow \infty$$

Alors, l'hypothèse (3.1.4) implique que:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} a(u_{m_p}, u_{m_p}, v) = a(u, u, v), \forall v \in V$$

Combinée avec (3.1.5), avec $m = m_p$ suffisamment grand, ce qui nous donne:

$$a(u, u, w_i) = \langle l, w_i \rangle, \forall i \geq 1$$

Par densité

$$a(u, u, v) = \langle l, v \rangle, \forall v \in V$$

Par conséquent, u est une solution de (P) . ■

Maintenant, nous passons à l'unicité de la solution. Cela demande des hypothèses plus fortes que (3.1.3) et (3.1.4). Supposons que:

(i) $a(., .)$ est uniformément elliptique par rapport à w , c.à.d. il existe une constante $\alpha > 0$ telle que:

$$a(w, v, v) \geq \alpha \|v\|_X^2, \forall v, w \in V \quad (3.1.7)$$

(ii) L'application $w \mapsto A(w)$ est localement continue lipchitzienne dans V ; c'est pour cela, qu'il existe une fonction continue et monotone (décroissante) $L : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que $\forall \xi > 0$:

$$|a(w_1, u, v) - a(w_2, u, v)| \leq L(\xi) \|u\|_X \|v\|_X \|w_1 - w_2\|_X \quad (3.1.8)$$

$$\forall u, v \in V, \forall w_1, w_2 \in D_\xi, \text{ où } D_\xi = \{v \in V; \|v\|_X \leq \xi\}$$

Avec ces hypothèses, nous avons les résultats d'unicité suivants.

Théorème 3.1.3 *Supposons que (3.1.7) et (3.1.8) sont vérifiées. Alors, sous la condition*

$$\frac{\|l\|^\star}{\alpha^2} L\left(\frac{\|l\|^\star}{\alpha}\right) < 1 \quad (3.1.9)$$

le problème (P) admet une unique solution u dans V .

Démonstration. D'après l'hypothèse (3.1.7) et le théorème de Lax-Milgram, il vient que pour tout w dans V , l'opérateur $A(w) \in \mathcal{L}(V; V')$ est inversible. De plus, son opérateur inverse, $T(w)$, appartient à $\mathcal{L}(V'; V)$ et satisfait:

$$\|T(w)\|_{\mathcal{L}(V'; V)} \leq \frac{1}{\alpha} \quad (3.1.10)$$

Avec ces notations, l'équation du problème (P) devient:

$$A(u)u = l \text{ dans } V'$$

c.à.d.

$$u = T(u)l \text{ dans } V$$

Maintenant, montrons que, grâce aux hypothèses (3.1.8) et (3.1.9), l'application qui à $v \mapsto T(v)l$ est strictement contractante de D_ξ dans D_ξ avec $\xi = \frac{\|l\|^\star}{\alpha}$. Premièrement, nous vérifions que $T(v)l$ appartient à D_ξ :

$$\|T(v)l\|_X \leq \|T(v)\|_{\mathcal{L}(V'; V)} \|l\|^\star \leq \frac{1}{\alpha} \|l\|^\star = \xi$$

Après cela, nous évaluons $T(u) - T(v)$ pour u et v dans D_ξ . En vertu de l'identité

$$T(u) - T(v) = T(u)(A(v) - A(u))T(v)$$

et (3.1.10), nous trouvons:

$$\|T(u) - T(v)\|_{\mathcal{L}(V'; V)} \leq \frac{1}{\alpha^2} \|A(v) - A(u)\|_{\mathcal{L}(V; V')}$$

Par conséquent (3.1.8) vérifie:

$$\|T(u)l - T(v)l\|_X \leq \frac{1}{\alpha^2} \|l\|^\star L(\xi) \|v - u\|_X < \|v - u\|_X$$

grâce à (3.1.9). ■

Remarque 3.1.1 Comme l'application $v \mapsto T(v)l$ est une contraction stricte D_ξ , son point fixe peut être calculée par la méthode des approximations successives. Plus précisément, à partir de n'importe quel u_0 dans D_ξ , nous construisons la suite (u_m) comme suit:

$$u_{m+1} = T(u_m)l$$

ou de façon équivalente par:

$$a(u_m, u_{m+1}, v) = \langle l, v \rangle, \forall v \in V$$

Alors

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|u_m - u\|_X = 0$$

Notons aussi que u_0 n'a pas besoin d'être pris dans D_ξ , car pour tout u_0 dans V , $u_1 = T(u_0)l$ est nécessairement dans D_ξ .

Nous terminons ce paragraphe par la résolution du problème (Q).

Théorème 3.1.4 [13] Supposons que $b(.,.)$ satisfait la condition inf-sup:

$$\sup_{v \in V} \frac{b(v, \mu)}{\|v\|_X} \geq \beta \|\mu\|_M, \forall \mu \in M, \text{ avec } \beta > 0 \quad (3.1.11)$$

Alors, pour toute solution u du problème (P), il existe un unique λ dans M tel que, le couple (u, λ) satisfasse le problème (Q).

Remarque 3.1.2 Sous les hypothèses (3.1.7), (3.1.8), (3.1.9) et (3.1.11), nous pouvons étendre le schéma itérative de la remarque 3.1.1 pour résoudre le problème (Q). Plus précisément, en partant de n'importe quels élément u_0 dans V , nous construisons une suite $(u_m, \lambda_m) \in V \times M$, avec $m \geq 1$, en résolvant le système linéaire suivant:

$$a(u_{m-1}, u_m, v) + b(v, \lambda_m) = \langle l, v \rangle, \forall v \in X \quad (3.1.12)$$

Il peut être prouvé que, quel que soit u_0 dans V ,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \{\|u_m - u\|_X + \|\lambda_m - \lambda\|_M\} = 0$$

3.2 Application aux équations de Navier-Stokes

La théorie non-linéaire générale du paragraphe précédent est appliquée ici aux équations de Navier-Stokes stationnaires.

3.2.1 Solution du problème de Navier-Stokes

Nous avons la formulation "pression-vitesse" des équations de Navier-Stokes stationnaires:

$$\begin{cases} -\nu \Delta \vec{u} + \sum_{j=1}^n u_j \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_j} + \nabla p = \vec{f} & \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div} \vec{u} = 0 & \text{dans } \Omega \\ \vec{u}|_{\Gamma} = \vec{0} \end{cases} \quad (3.2.1)$$

Encore une fois Ω est un domaine borné de \mathbb{R}^n avec une frontière Γ de classe C^1 .

Dans le but d'écrire le problème (3.2.1) sous forme variationnelle, nous introduisons la fonction trilinéaire

$$a_1(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} w_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} v_i dx \quad (3.2.2)$$

nous obtenons immédiatement:

$$\left(\sum_{j=1}^n u_j \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_j}, \vec{v} \right) = a_1(\vec{u}, \vec{u}, \vec{v})$$

Soit les espaces suivants:

$$\mathcal{V} = \{ \vec{v} \in (D(\Omega))^n ; \operatorname{div} \vec{v} = 0 \}$$

$$V = \{ \vec{v} \in (H_0^1(\Omega))^n ; \operatorname{div} \vec{v} = 0 \}$$

et

$$L_0^2(\Omega) = \left\{ q \in L^2(\Omega) \text{ tel que } \int_{\Omega} q dx = 0 \right\}.$$

Les deux lemmes suivant énoncent des propriétés utiles de a_1 .

Lemme 3.2.1 *Pour $n \leq 4$, la forme trilinéaire a_1 est continue sur $[(H^1(\Omega))^n]^3$.*

Démonstration. D'après le théorème 2.1.1, $H^1(\Omega)$ est continûment inclu dans $L^4(\Omega)$, où $n \leq 4$. Alors, l'inégalité de Hölder implique que:

$$w_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} v_i \in L^1(\Omega), \forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in (H^1(\Omega))^n$$

et

$$\left| \int_{\Omega} w_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} v_i dx \right| \leq C_1 \|w_j\|_{H^1(\Omega)} \|u_i\|_{H^1(\Omega)} \|v_i\|_{H^1(\Omega)}$$

Ainsi la forme a_1 est bien définie et continue sur $[(H^1(\Omega))^n]^3$ et

$$|a_1(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v})| \leq C_2 \|\vec{w}\|_{H^1(\Omega)} \|\vec{u}\|_{H^1(\Omega)} \|\vec{v}\|_{H^1(\Omega)} \quad (3.2.3)$$

■

Lemme 3.2.2 Soit $\vec{u} \in (H^1(\Omega))^n$ avec $\operatorname{div} \vec{u} = 0$ et $\gamma_{\nu} \vec{u} = 0$ et soit $\vec{v}, \vec{w} \in (H_0^1(\Omega))^n$; alors nous avons:

$$a_1(\vec{u}, \vec{v}, \vec{v}) = 0 \quad (3.2.4)$$

$$a_1(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = -a_1(\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}) \quad (3.2.5)$$

Démonstration. Il suffit de vérifier (3.2.5). Pour cela, prenons \vec{u} dans \mathcal{V} , \vec{v} et \vec{w} dans $(D(\Omega))^n$; nous avons:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_j \left(w_i \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + v_i \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \right) dx &= \int_{\Omega} u_j \frac{\partial}{\partial x_j} (v_i w_i) dx \\ &= - \int_{\Omega} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} v_i w_i dx \end{aligned}$$

D'où

$$a_1(\vec{u}; \vec{v}, \vec{w}) + a_1(\vec{u}; \vec{w}, \vec{v}) = 0$$

Alors nous obtenons (3.2.5) par densité. ■

Maintenant, soit

$$a_0(\vec{u}, \vec{v}) = \nu (\nabla \vec{u}, \nabla \vec{v})$$

$$a(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}) = a_0(\vec{u}, \vec{v}) + a_1(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}) \quad (3.2.6)$$

Alors le problème (3.2.1) admet la formulation variationnelle équivalente suivante:

$$\begin{cases} \text{Trouver un couple } (\vec{u}, p) \text{ dans } V \times L_0^2(\Omega) \text{ tels que} \\ a(\vec{u}, \vec{u}, \vec{v}) - (p, \operatorname{div} \vec{v}) = \left(\vec{f}, \vec{v} \right), \forall \vec{v} \in (H_0^1(\Omega))^n \end{cases} \quad (3.2.7)$$

Théorème 3.2.1 Soit $n \leq 4$ et Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n avec une frontière Γ de classe C^1 . Etant donnée une fonction \vec{f} dans $(H^{-1}(\Omega))^n$, il existe au moins un couple (\vec{u}, p) dans $V \times L_0^2(\Omega)$ qui satisfasse (3.2.7).

Démonstration. Nous ferons appel aux outils utilisés dans le premier paragraphe de ce chapitre. Avec $X = (H_0^1(\Omega))^n$ normé par $|\cdot|_{H^1(\Omega)}$, $M = L_0^2(\Omega)$, $a(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v})$ donnée par (3.2.6),

$$b(\vec{v}, q) = -(q, \operatorname{div} \vec{v})$$

et

$$\langle l, \vec{v} \rangle = \left\langle \vec{f}, \vec{v} \right\rangle$$

Nous pouvons considérer que (3.2.7) est un cas particulier du problème (Q) du premier paragraphe. Premièrement, grâce à (3.2.4), nous obtenons

$$a(\vec{u}, \vec{v}, \vec{v}) = a_0(\vec{v}, \vec{v}) = \nu |\vec{v}|_{H^1(\Omega)}^2$$

Par conséquent, $a(\cdot, \cdot, \cdot)$ satisfait la propriété (3.1.7).

Ensuite, soit \vec{u} une fonction de V et \vec{u}_m une suite dans V telle que $u_m \rightarrow u$ faiblement dans V quand $m \rightarrow \infty$. Alors le théorème 2.1.1 implique que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} u_m = u \text{ dans } (L^2(\Omega))^n$$

Maintenant, soit $\vec{v} \in \mathcal{V}$ et prenons la limite de $a(\vec{u}_m, \vec{u}_m, \vec{v})$. D'après (3.2.5), nous avons

$$a_1(\vec{u}_m, \vec{u}_m, \vec{v}) = -a_1(\vec{u}_m, \vec{v}, \vec{u}_m) = - \left(\sum_{j=1}^n u_{mj} \frac{\partial v}{\partial x_j}, \vec{u}_m \right)$$

Comme $\frac{\partial \vec{v}}{\partial x_j} \in (L^\infty(\Omega))^n$ et $\lim_{m \rightarrow \infty} u_{mj} u_{mi} = u_j u_i$ dans $L^1(\Omega)$, il vient que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} a_1(\vec{u}_m, \vec{u}_m, \vec{v}) = - \left(\sum_{j=1}^n u_j \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_j}, \vec{u} \right) = a_1(\vec{u}, \vec{u}, \vec{v})$$

En plus de cela, nous avons $\lim_{m \rightarrow \infty} a_0(\vec{u}_m, \vec{v}) = a_0(\vec{u}, \vec{v})$. Donc,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} a(\vec{u}_m, \vec{u}_m, \vec{v}) = a(\vec{u}, \vec{u}, \vec{v}), \forall \vec{v} \in V$$

grâce à la densité de \mathcal{V} dans V et à la trilinearité de $a(\cdot, \cdot, \cdot)$.

Ainsi les hypothèses du théorème 3.1.2 sont satisfaites et par conséquent le problème (3.2.7) admet au moins une solution \vec{u} dans V . Nous avons vu dans le chapitre précédent que la forme $b(\cdot, \cdot)$ satisfait la condition inf-sup du théorème 3.1.4. D’ou, pour toute solution \vec{u} de (3.2.7) il existe un unique p dans $L_0^2(\Omega)$ tel que (\vec{u}, p) satisfasse (3.2.7). ■

Dans la suite, nous nous concentrerons sur le rapprochement des solutions non singulières des équations de Navier-Stokes. Le concept défini ci-dessous est une condition suffisante commode pour l’unicité locale.

Définition 3.2.1 *Soit X et Y deux espaces de Banach. Soit F une application différentiable de X dans Y , F' sa dérivée, et soit $u \in X$ une solution de l’équation $F(u) = 0$. Nous dirons que u est une solution non singulière s’il existe une constante $\gamma > 0$ telle que*

$$\|F'(u) \cdot v\|_{Y'}^{\star} \geq \gamma \|v\|_X, \forall v \in X$$

Dans le cas des équations de Navier-Stokes, l’application $F : V \rightarrow V'$ est définie par:

$$\langle F(\vec{u}), \vec{v} \rangle = a(\vec{u}, \vec{u}, \vec{v}) - \langle \vec{f}, \vec{v} \rangle, \forall \vec{u}, \vec{v} \in V$$

Clairement, F est partout différentiable dans V et sa dérivée $F'(\vec{u}) \in \mathcal{L}(V; V')$ est donnée par:

$$\langle F'(\vec{u}) \vec{v}, \vec{w} \rangle = a_0(\vec{v}, \vec{w}) + a_1(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) + a_1(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})$$

Ainsi, si $c(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ définie une forme trilinéaire sur X^3 par:

$$c(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = a_0(\vec{v}, \vec{w}) + a_1(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) + a_1(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}) \quad (3.2.8)$$

alors $\vec{u}_0 \in V$ est une solution non singulière des équations de Navier-Stokes si et seulement si il existe une constante $\gamma > 0$ telle que

$$\sup_{\vec{v} \in V} \frac{|c(\vec{u}_0, \vec{u}, \vec{v})|}{|\vec{v}|_{H^1(\Omega)}} \geq \gamma |\vec{u}|_{H^1(\Omega)}, \forall \vec{u} \in V \quad (3.2.9)$$

Cette définition signifie que le problème:

$$\begin{cases} \text{Trouver } \vec{u} \in V \text{ tel que} \\ c(\vec{u}_0, \vec{u}, \vec{v}) = \langle \vec{g}, \vec{v} \rangle, \forall \vec{v} \in V \end{cases} \quad (3.2.10)$$

est bien posé.

Afin d'étudier les solutions non singulières des équations de Navier-Stokes, il sera très utile d'introduire l'opérateur $K = K_{\vec{u}_0} \in \mathcal{L}(X; V)$, en fonction d'un paramètre $\vec{u}_0 \in X$, et définis comme suit:

Pour tout $\vec{u} \in X$, $K\vec{u}$ est la solution dans V du problème,

$$a_0(K\vec{u}, \vec{v}) = a_1(\vec{u}_0, \vec{u}, \vec{v}) + a_1(\vec{u}, \vec{u}_0, \vec{v}), \forall \vec{v} \in V \quad (3.2.11)$$

Il vient de (3.2.8) et (3.2.11) que:

$$c(\vec{u}_0, \vec{u}, \vec{v}) = a_0((I + K_{\vec{u}_0})\vec{u}, \vec{v}), \forall \vec{u}_0, \vec{u} \in X, \forall \vec{v} \in V \quad (3.2.12)$$

L'importance de K apparait dans les deux lemmes suivants:

Lemme 3.2.3 [13] *Supposons que Γ est de classe C^2 (ou bien, si Γ est seulement de classe C^1 , supposons que $n = 2$ et Ω est convexe). Alors, pour $n \leq 4$, l'opérateur K est compact de X dans V .*

Lemme 3.2.4 [13] *Soit les hypothèses du lemme 3.2.3 satisfaites. Si u est une solution non singulière de (3.2.7), alors l'opérateur $I + K_{\vec{u}_0}$ est inversible dans $\mathcal{L}(X; X)$ ou dans $\mathcal{L}(V; V)$ et son inverse est continue.*

Maintenant, nous pouvons nous tourner vers l'unicité globale de la solution. Pour cela, nous introduisons la norme de $a_1(\cdot, \cdot, \cdot)$ dans V^3 :

$$N = \sup_{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V} \frac{|a_1(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v})|}{|\vec{u}|_{H^1(\Omega)} |\vec{v}|_{H^1(\Omega)} |\vec{w}|_{H^1(\Omega)}} \quad (3.2.13)$$

Théorème 3.2.2 *Sous les hypothèses du théorème 3.2.1 et si de plus*

$$\frac{N}{\nu^2} \|l\|^\star < 1 \quad (3.2.14)$$

alors le problème (3.2.7) de Navier-Stokes admet une unique solution (\vec{u}, p) dans $V \times L_0^2(\Omega)$.

Démonstration. Nous allons nous référer au théorème 3.1.3. Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}_1$ et $\vec{w}_2 \in V$; nous avons:

$$\begin{aligned} |a(\vec{w}_1, u, v) - a(w_2, u, v)| &= |a_1(w_1 - w_2, u, v)| \\ &\leq N |w_1 - w_2|_{H^1(\Omega)} |u|_{H^1(\Omega)} |v|_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

Par conséquent, $a(\cdot, \cdot, \cdot)$ satisfait (3.1.8) avec $L(\xi) = N, \forall \xi$. Alors la condition (3.2.14) coïncide précisément avec (3.1.9). D'où la conclusion du théorème 3.1.3 est valide. ■

Remarques 3.2.1 1) En vue de la remarque 3.1.2, nous voyons que les conditions du théorème 3.2.2 sont suffisantes pour garantir que le schéma itérative:

$$\begin{cases} (\vec{u}^m, p^m) \in V \times L_0^2(\Omega) \text{ satisfait} \\ a(\vec{u}^{m-1}, \vec{u}^m, \vec{v}) - (p^m, \operatorname{div} \vec{v}) = \langle \vec{f}, \vec{v} \rangle, \forall \vec{v} \in (H_0^1(\Omega))^n \end{cases} \quad (3.2.15)$$

partant d'un $u_0 \in V$ arbitraire, définit de façon unique une suite (\vec{u}^m, p^m) dans $V \times L_0^2(\Omega)$ telle que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(|\vec{u}^m - \vec{u}|_{H^1(\Omega)} + \|p^m - p\|_{H_0^1(\Omega)} \right) = 0$$

2) La condition (3.2.14) implique que la solution u n'est pas seulement unique mais aussi non singulière. En effet, grâce à (3.2.4) et (3.2.14), nous avons:

$$\begin{aligned} c(\vec{u}, \vec{v}, \vec{v}) &= \nu |\vec{v}|_{H^1(\Omega)}^2 + a_1(\vec{v}, \vec{u}, \vec{v}) \\ &\geq \left(\nu - N |\vec{u}|_{H^1(\Omega)} \right) |\vec{v}|_{H^1(\Omega)}^2, \forall \vec{v} \in V \end{aligned}$$

Mais comme $|\vec{u}|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{1}{\nu} \|\vec{f}\|^\star$, ceci implique que

$$c(\vec{u}, \vec{v}, \vec{v}) \geq \left(\nu - \frac{N}{\nu} \|f\|^\star \right) |\vec{v}|_{H^1(\Omega)}^2, \forall \vec{v} \in V$$

Ainsi, à cause de (3.2.14), la forme bilinéaire de $(\vec{v}, \vec{w}) \mapsto c(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est V -elliptique et à fortiori satisfait (3.2.9).

Passons maintenant au cas bidimensionnel. Soit Φ l'espace des fonctions de flux associés à V :

$$\Phi = \left\{ \phi \in H^2(\Omega); \phi|_{\Gamma_0} = 0, \phi|_{\Gamma_i} = \text{une constante } c_i \text{ arbitraire, } 1 \leq i \leq p, \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \right\}$$

En termes de fonctions de flux, le problème (3.2.7) s'écrit comme suit:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \psi \in \Phi \text{ satisfait:} \\ \nu (\Delta\psi, \Delta\phi) + \int_{\Omega} \Delta\psi \left(\frac{\partial\psi}{\partial x_2} \frac{\partial\phi}{\partial x_1} - \frac{\partial\psi}{\partial x_1} \frac{\partial\phi}{\partial x_2} \right) dx = \langle \vec{f}, \overrightarrow{\text{rot}} \phi \rangle, \forall \phi \in \Phi \end{array} \right. \quad (3.2.16)$$

Le théorème établit l'équivalence entre (3.2.7) et (3.2.16).

Théorème 3.2.3 *Les problèmes (3.2.7) et (3.2.16) sont équivalents dans le sens où si (\vec{u}, p) est solution de (3.2.7) alors la fonction de flux $\psi \in \Phi$ de \vec{u} satisfait (3.2.16); inversement si ψ est une solution de (3.2.16). Alors il existe exactement un élément p de $L_0^2(\Omega)$ tel que le couple $(\vec{u} = \overrightarrow{\text{rot}} \psi, p)$ satisfait (3.2.7).*

Démonstration. Soit $V = \{ \overrightarrow{\text{rot}} \phi; \phi \in \Phi \}$ et que

$$(\nabla \vec{u}, \nabla \vec{v}) = (\Delta\psi, \Delta\phi), \forall \vec{u}, \vec{v} \in V$$

où $\overrightarrow{\text{rot}} \psi = \vec{u}$ et $\overrightarrow{\text{rot}} \phi = \vec{v}$. Cela prend en considération le terme visqueux.

Maintenant, nous regardons le terme de convection; nous avons:

$$a_1(\vec{u}, \vec{u}, \vec{v}) = \int_{\Omega} \text{rot } \vec{u} (u_1 v_2 - u_2 v_1) dx, \forall \vec{u}, \vec{v} \in V \quad (3.2.17)$$

En effet, pour \vec{u} et \vec{v} dans \mathcal{V} , nous avons immédiatement:

$$\begin{aligned} u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} (u_1^2 + u_2^2) - u_2 \text{rot } \vec{u} \\ u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_2} (u_1^2 + u_2^2) + u_1 \text{rot } \vec{u} \end{aligned}$$

Ainsi, par intégration par parties, cela donne:

$$a_1(\vec{u}, \vec{u}, \vec{v}) = -\frac{1}{2} (u_1^2 + u_2^2, \text{div } v) - \int_{\Omega} \text{rot } u (u_2 v_1 - u_1 v_2) dx$$

Par conséquent (3.2.17) est vérifiée pour tout \vec{u} et \vec{v} dans \mathcal{V} , et par densité pour tout \vec{u} et \vec{v} dans V .

Donc, le terme de convection peut aussi être exprimé comme:

$$a_1(\vec{u}, \vec{u}, \vec{v}) = \int_{\Omega} \Delta\psi \left(\frac{\partial\psi}{\partial x_2} \frac{\partial\phi}{\partial x_1} - \frac{\partial\psi}{\partial x_1} \frac{\partial\phi}{\partial x_2} \right) dx \quad (3.2.18)$$

Il suit que le problème:

$$\begin{cases} \text{Trouver } \vec{u} \text{ dans } V \text{ satisfaisant} \\ a(\vec{u}, \vec{u}, \vec{v}) = \langle \vec{f}, \vec{v} \rangle, \forall \vec{v} \in V \end{cases}$$

est équivalent à (3.2.16). ■

Il reste à interpréter le problème (3.2.16). Nous pouvons vérifier par intégration par parties que ψ satisfait les équations suivantes:

$$\begin{aligned} \nu \Delta^2 \psi - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\Delta \psi \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\Delta \psi \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right) &= \text{rot } \vec{f} \\ \psi|_{\Gamma_0} &= 0, \quad \psi|_{\Gamma_i} = \text{une constante } c_i, 1 \leq i \leq p \\ \frac{\partial \psi}{\partial \nu} |_{\Gamma} &= 0, \quad \int_{\Gamma_i} \left(\nu \frac{\partial}{\partial n} \Delta \psi - \gamma_\tau \vec{f} \right) d\sigma = 0, 1 \leq i \leq p \end{aligned}$$

3.3 Méthode pour approximer les équations de Navier-Stokes

Les paragraphes suivant sont consacrés à des approximations par éléments finis du problème de Navier-Stokes en deux dimensions. En particulier, nous conservons les notations du deuxième paragraphe.

3.3.1 Le cas de l'unicité

Dans cette section, la solution \vec{u} est supposée unique et, plus précisément, nous admettons que:

$$\frac{N}{\nu^2} \left\| \vec{f} \right\|^\star \leq 1 - \delta \text{ pour } \delta > 0 \quad (3.3.1)$$

Pour tout h , soit W_h et M_h deux espaces de dimension finie tels que:

$$W_h \subset H^1(\Omega), M_h \subset L_0^2(\Omega) = M$$

Ensuite, nous posons

$$W_{h,0} = W_h \cap H_0^1(\Omega), X_h = (W_{h,0})^n \subset X$$

Encore une fois, l'espace V_h correspondant à la forme $b(.,.)$ est défini par:

$$V_h = \{ \vec{v}_h \in X_h; (q_h, \operatorname{div} \vec{v}_h) = 0, \forall q_h \in M_h \}$$

Comme auparavant, $V_h \not\subseteq V$ et en particulier, les fonctions de V_h ne sont pas à divergences nulles. D'où certaines précautions doivent être prises afin de préserver l'antisymétrie la forme $a_1(.,.,.)$, qui joue un rôle fondamentale dans cette section. Pour ce faire, le plus simple est d'introduire une légère variante de $a_1(.,.,.)$:

$$\tilde{a}_1(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \frac{1}{2} (a_1(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) - a_1(\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}))$$

Grâce à (3.2.5), il est clair que \tilde{a}_1 et a_1 coïncident sur $V \times X \times X$ et, bien sûr, \tilde{a}_1 est antisymétrique par rapport à ses deux derniers arguments.

Donc, les résultats du deuxième paragraphe restent valides si nous remplaçons partout a_1 par \tilde{a}_1 . Ici, nous travaillons exclusivement avec \tilde{a}_1 mais afin d'éviter d'alourdir les notations, nous laissons tomber le tilde.

Finalement, nous définissons la norme discrète suivante:

$$N_h = \sup_{\vec{u}_h, \vec{v}_h, \vec{w}_h \in V_h} \frac{|a_1(\vec{w}_h, \vec{u}_h, \vec{v}_h)|}{|\vec{u}_h|_{H^1(\Omega)} |\vec{v}_h|_{H^1(\Omega)} |\vec{w}_h|_{H^1(\Omega)}} \quad (3.3.2)$$

et

$$\|f\|_h^\star = \sup_{\vec{v}_h \in V_h} \frac{|\langle \vec{f}, \vec{v}_h \rangle|}{|\vec{v}_h|_{H^1(\Omega)}}$$

Avec les notations ci-dessus, le problème discret analogue au problème (3.2.7) est:

$$(Q_h) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver un couple } (\vec{u}_h, p_h) \text{ dans } V_h \times M_h \text{ tels que} \\ a(\vec{u}_h, \vec{u}_h, \vec{v}_h) - (p_h, \operatorname{div} \vec{v}_h) = \langle \vec{f}, \vec{v}_h \rangle, \forall \vec{v}_h \in X_h \end{array} \right. \quad (3.3.3)$$

Son problème correspondant (P_h) est:

$$(P_h) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \vec{u}_h \text{ dans } V_h \text{ satisfaisant} \\ a(\vec{u}_h, \vec{u}_h, \vec{v}_h) = \langle \vec{f}, \vec{v}_h \rangle, \forall \vec{v}_h \in V_h \end{array} \right. \quad (3.3.4)$$

Nous commençons par examiner problème (P_h) et de montrer la convergence des \vec{u}_h vers \vec{u} .

Théorème 3.3.1 [13] *Le problème (P_h) admet au moins une solution \vec{u}_h dans V_h . Par ailleurs, si*

$$\frac{N_h}{\nu^2} \left\| \vec{f} \right\|_h^\star < 1$$

alors cette solution est unique et est une limite d'une suite définie par le schéma itérative suivant:

$$a(\vec{u}_h^m, \vec{u}_h^m, \vec{v}_h) = \left\langle \vec{f}, \vec{v}_h \right\rangle, \forall \vec{v}_h \in V_h \quad (3.3.5)$$

démarrant d'un \vec{u}_h^0 dans V_h arbitraire.

Avant de passer à la convergence de \vec{u}_h , rappelons brièvement les propriétés d'approximation des X_h et M_h .

Supposons que:

(H1): Il existe une application $r_h \in \mathcal{L}((H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))^n; X_h)$ et un entier l tels que:

$$(q_h, \operatorname{div}(\vec{v} - r_h \vec{v})) = 0, \forall q_h \in M_h \quad (3.3.6)$$

$$\|r_h \vec{v} - \vec{v}\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^m \|\vec{v}\|_{H^{m+1}(\Omega)}, \forall \vec{v} \in (H^{m+1}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))^n \quad (3.3.7)$$

$$\forall m \in \mathbb{N} \text{ avec } 1 \leq m \leq l$$

(H2): L'opérateur de projection orthogonal ρ_h sur M_h satisfait:

$$\|q - \rho_h q\|_{0,\Omega} \leq Ch^m \|q\|_{H^m(\Omega)}, \forall q \in H^m(\Omega) \cap L_0^2(\Omega), 0 \leq m \leq l \quad (3.3.8)$$

Avec ces hypothèses, nous pouvons démontrer les résultats suivants.

Lemme 3.3.1 *Si les hypothèses (H1) et (H2) sont satisfaites, alors*

$$\lim_{h \rightarrow 0} N_h = N, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \left\| \vec{f} \right\|_h^\star = \left\| \vec{f} \right\|^\star$$

Démonstration. Nous allons juste démontrer la première assertion, puisque la démonstration de la deuxième se fait exactement de la même façon. Comme la dimension de V_h est finie, il existe des fonctions \vec{u}_h , \vec{v}_h et \vec{w}_h dans V_h telles que

$$|\vec{u}_h|_{H^1(\Omega)} = |\vec{v}_h|_{H^1(\Omega)} = |\vec{w}_h|_{H^1(\Omega)} = 1 \quad (3.3.9)$$

et

$$|a_1(\vec{w}_h, \vec{u}_h, \vec{v}_h)| = N_h \quad (3.3.10)$$

Aussi, grâce à (3.2.3), N_h est borné quand h tend vers zéro. Donc, nous pouvons extraire une sous suite $(h_\rho)_{\rho \geq 1}$ telle que

$$\vec{u}_{h_\rho} \rightharpoonup \vec{u}^\star, \vec{v}_{h_\rho} \rightharpoonup \vec{v}^\star, \vec{w}_{h_\rho} \rightharpoonup \vec{w}^\star \text{ faiblement dans } (H_0^1(\Omega))^n \text{ quand } \rho \rightarrow \infty \quad (3.3.11)$$

et

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} N_{h_\rho} = N^\star$$

Montrons maintenant que $N^\star = N$. La démonstration se fait en deux étapes.

1) Premièrement, montrons que $N^\star \leq N$.

Nous remarquons que \vec{u}^\star , \vec{v}^\star et \vec{w}^\star sont des éléments de V . En effet, grâce à (3.3.11), (3.3.8) et la définition de V_h , nous avons

$$(\operatorname{div} \vec{u}^\star, q) = 0, \forall q \in H^1(\Omega)$$

et donc, par densité $\operatorname{div} \vec{u}^\star = 0$. D'où, $\vec{u}^\star \in V$ de même pour \vec{v}^\star et \vec{w}^\star .

Maintenant, comme la dimension $n \leq 3$, $H_0^1(\Omega)$ s'injecte de façon compacte dans $L^4(\Omega)$. Donc, (3.3.11) implique que

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \vec{u}_{h_\rho} = \vec{u}^\star, \lim_{\rho \rightarrow \infty} \vec{v}_{h_\rho} = \vec{v}^\star, \lim_{\rho \rightarrow \infty} \vec{w}_{h_\rho} = \vec{w}^\star \text{ dans } (L^4(\Omega))^n$$

Par conséquent,

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (w_{h_\rho}) \frac{\partial (u_{h_\rho})_i}{\partial x_j} (v_{h_\rho})_i dx = \int_{\Omega} w_j^\star \frac{\partial u_i^\star}{\partial x_j} v_i^\star dx$$

Comme il s'agit d'un terme général dans l'expression de $a_1(\cdot, \cdot, \cdot)$, il vient que

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} |a_1(\vec{w}_{h_\rho}, \vec{u}_{h_\rho}, \vec{v}_{h_\rho})| = |a_1(\vec{w}^\star, \vec{u}^\star, \vec{v}^\star)| = N^\star \quad (3.3.12)$$

Finalement, de (3.3.9) et de la semi-continuité faible de la norme pour la topologie faible, nous tirons les bornes supérieures

$$|\vec{u}^\star|_{H^1(\Omega)} \leq 1, |\vec{v}^\star|_{H^1(\Omega)} \leq 1, |\vec{w}^\star|_{H^1(\Omega)} \leq 1$$

Combiné avec (3.3.12), nous obtenons

$$N^\star \leq \frac{|a_1(\vec{w}^\star, \vec{u}^\star, \vec{v}^\star)|}{|\vec{w}^\star|_{H^1(\Omega)} |\vec{v}^\star|_{H^1(\Omega)} |\vec{u}^\star|_{H^1(\Omega)}} \leq N$$

prouvant ainsi la première inégalité.

2) Ensuite, nous montrerons que $N^\star \geq N$.

Soient \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} appartenant à \mathcal{V} . De (3.3.7), nous en déduisons que:

$$\lim_{h \rightarrow 0} r_h \vec{u} = \vec{u}, \quad \lim_{h \rightarrow 0} r_h \vec{v} = \vec{v}, \quad \lim_{h \rightarrow 0} r_h \vec{w} = \vec{w} \quad \text{dans } V$$

D'où

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a_1(r_h \vec{w}, r_h \vec{u}, r_h \vec{v})}{|r_h \vec{u}|_{H^1(\Omega)} |r_h \vec{v}|_{H^1(\Omega)} |r_h \vec{w}|_{H^1(\Omega)}} = \frac{a_1(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v})}{|\vec{u}|_{H^1(\Omega)} |\vec{v}|_{H^1(\Omega)} |\vec{w}|_{H^1(\Omega)}}$$

Ainsi

$$N^\star \geq \frac{|a_1(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v})|}{|\vec{u}|_{H^1(\Omega)} |\vec{v}|_{H^1(\Omega)} |\vec{w}|_{H^1(\Omega)}}, \quad \forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathcal{V}$$

et en raison de la densité de \mathcal{V} dans V , ceci veut dire que $N^\star \geq N$.

Donc $\lim_{\rho \rightarrow \infty} N_{h_\rho} = N$. L'unicité de cette limite implique la convergence de la suite entière, c.à.d.

$$\lim_{h \rightarrow 0} N_h = N$$

■

Théorème 3.3.2 *Sous les hypothèses (H1) et (H2), la condition (3.3.1) et si h est suffisamment petit alors le problème (P_h) a une unique solution \vec{u}_h dans V_h et*

$$\lim_{h \rightarrow 0} |\vec{u} - \vec{u}_h|_{H^1(\Omega)} = 0 \quad (3.3.13)$$

De plus, si la solution (\vec{u}, p) appartient à $(H^{m+1}(\Omega))^n \times (H^m(\Omega) \cap L_0^2(\Omega))$ pour $m \leq l$, nous avons l'estimation suivante:

$$|\vec{u} - \vec{u}_h|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^m \left(\|\vec{u}\|_{H^{m+1}(\Omega)} + \|p\|_{H^m(\Omega)} \right) \quad (3.3.14)$$

Démonstration. D'après le lemme 3.3.1 et la condition (3.3.1), nous pouvons choisir h suffisamment petit pour que

$$\frac{N_h}{\nu^2} \left\| \vec{f} \right\|_h^\star \leq 1 - \frac{\delta}{2} \quad (3.3.15)$$

Alors, grâce au théorème 3.3.1, le problème (P_h) admet exactement une solution \vec{u}_h dans V_h .

Soit \vec{v}_h un élément arbitraire de V_h , soit $\vec{w}_h = \vec{u}_h - \vec{v}_h$ et considérons l'expression:

$$E_h = a(\vec{u}_h, \vec{u}_h, \vec{w}_h) - a(\vec{v}_h, \vec{v}_h, \vec{w}_h)$$

Tirons une borne inférieure pour E_h . Nous obtenons:

$$E_h = a_0(\vec{w}_h, \vec{w}_h) + a_1(\vec{u}_h, \vec{u}_h, \vec{w}_h) - a_1(\vec{v}_h, \vec{v}_h, \vec{w}_h)$$

Par (3.2.4), cela devient:

$$E_h = \nu |\vec{w}_h|_{H^1(\Omega)}^2 + a_1(\vec{w}_h, \vec{u}_h, \vec{w}_h)$$

Par conséquent,

$$E_h \geq \nu |\vec{w}_h|_{H^1(\Omega)}^2 - N_h |\vec{u}_h|_{H^1(\Omega)} |\vec{w}_h|_{H^1(\Omega)}^2$$

Mais de (3.3.4) nous obtenons que

$$|\vec{u}_h|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{1}{\nu} \|\vec{f}\|_h^\star$$

D'où

$$E_h \geq \nu \left(1 - \frac{N_h}{\nu^2} \|\vec{f}\|_h^\star\right) |\vec{w}_h|_{H^1(\Omega)}^2$$

et en vue de (3.3.15)

$$E_h \geq \nu \frac{\delta}{2} |\vec{w}_h|_{H^1(\Omega)}^2 \tag{3.3.16}$$

Maintenant, trouvons une borne supérieure à E_h . Grâce à (3.3.4), nous avons:

$$E_h = \langle \vec{f}, \vec{w}_h \rangle - a(\vec{v}_h, \vec{v}_h, \vec{w}_h)$$

et du fait de (3.2.7), nous pouvons écrire:

$$E_h = a(\vec{u}, \vec{u}, \vec{w}_h) - (p, \operatorname{div} \vec{w}_h) - a(\vec{v}_h, \vec{v}_h, \vec{w}_h)$$

Mais comme $\vec{w}_h \in V_h$, ce qui peut aussi s'écrire comme suit:

$$E_h = a_0(\vec{u} - \vec{v}_h, \vec{w}_h) + a_1(\vec{u}, \vec{u}, \vec{w}_h) - a_1(\vec{v}_h, \vec{v}_h, \vec{w}_h) - (p - q_h, \operatorname{div} \vec{w}_h), \forall q_h \in M_h$$

ou de manière équivalente,

$$E_h = a_0(\vec{u} - \vec{v}_h, \vec{w}_h) + a_1(\vec{u}, \vec{u} - \vec{v}_h, \vec{w}_h) + a_1(\vec{u} - \vec{v}_h, \vec{v}_h, \vec{w}_h) - (p - q_h, \operatorname{div} \vec{w}_h)$$

Alors, de (3.2.3) on obtient la borne supérieure:

$$|E_h| \leq \left[|\vec{u} - \vec{v}_h|_{H^1(\Omega)} \left(\nu + C_1 |\vec{u}|_{H^1(\Omega)} + C_1 |\vec{v}_h|_{H^1(\Omega)} \right) + \|p - q_h\|_{0,\Omega} \right] |\vec{w}_h|_{H^1(\Omega)} \quad (3.3.17)$$

Combinant les bornes (3.3.16) et (3.3.17), nous obtenons:

$$|\vec{u}_h - \vec{v}_h|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{2}{\nu\delta} \left[|\vec{u} - \vec{v}_h|_{H^1(\Omega)} \left(\nu + C_1 |\vec{u}|_{H^1(\Omega)} + C_1 |\vec{v}_h|_{H^1(\Omega)} \right) + \|p - q_h\|_{0,\Omega} \right] \\ \forall \vec{v}_h \in V_h, \forall q_h \in M_h$$

Ceci implique que:

$$|\vec{u} - \vec{u}_h|_{H^1(\Omega)} \leq C_2 \left[\inf_{v_h \in V_h} |\vec{u} - \vec{v}_h|_{H^1(\Omega)} + \inf_{q_h \in M_h} \|p - q_h\|_{0,\Omega} \right] \quad (3.3.18)$$

où C_2 dépend de ν , δ et \vec{u} mais pas de h . Le théorème découle de (3.3.18) et des hypothèses (H1) et (H2). ■

3.3.2 Le cas de non unicité

Dans cette section, nous admettons que le problème de Navier-Stokes a une solution non singulière $\vec{u}_0 \in V$, c.à.d. qui satisfait

$$\sup_{w \in V} \frac{|c(\vec{u}_0, \vec{v}, \vec{w})|}{|\vec{w}|_{H^1(\Omega)}} \geq \gamma |\vec{v}|_{H^1(\Omega)}, \forall \vec{v} \in V \quad (3.3.19)$$

où $c(., ., .)$ est définie par:

$$c(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = a_0(\vec{v}, \vec{w}) + a_1(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) + a_1(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}) \quad (3.3.20)$$

Dans ce cas, nous avons l'intention de montrer que le problème (P_h) a une unique solution \vec{u}_h au voisinage de la projection $\pi_h \vec{u}_0$ sur V_h . Quand \vec{u}_0 est suffisamment régulière, ce voisinage devrait donner une bonne estimation de l'erreur. Enfin, nous voulons établir que \vec{u}_h peut être calculée efficacement par la méthode de Newton.

Plus précisément, soit $\pi_h \vec{u} \in V_h$ définie par:

$$a_0(\vec{u} - \pi_h \vec{u}, \vec{v}_h) = 0, \forall \vec{v}_h \in V_h \quad (3.3.21)$$

c.à.d.

$$|\vec{u} - \pi_h \vec{u}|_{H^1(\Omega)} = \inf_{\vec{v}_h \in V_h} |\vec{u} - \vec{v}_h|_{H^1(\Omega)}$$

L'idée est d'établir une discrétisation analogue à (3.3.19) dans V_h avec \vec{u}_0 remplacé par $\pi_h \vec{u}_0$. Ceci est réalisé à l'aide de l'opérateur $K_h \in \mathcal{L}(X; V_h)$ défini comme suit:

Pour tout $\vec{u} \in X$, $K_h \vec{u}$ est la solution dans V_h du problème approché.

$$a_0(K_h \vec{u}, \vec{v}_h) = a_1(\pi_h \vec{u}_0, \vec{u}, \vec{v}_h) + a_1(\vec{u}, \pi_h \vec{u}_0, \vec{v}_h), \forall \vec{v}_h \in V_h \quad (3.3.22)$$

Lorsqu'elle est combiné avec (3.3.20), nous obtenons:

$$a_0((I + K_h) \vec{u}, \vec{v}_h) = c(\pi_h \vec{u}_0, \vec{u}, \vec{v}_h) \quad (3.3.23)$$

Lemme 3.3.2 *Soient les hypothèses (H1) et (H2) satisfaites et admettons que Ω satisfasse les hypothèses de régularité du lemme 3.2.3. Alors, pour $n = 2$ ou $n = 3$, nous avons:*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|K - K_h\|_{\mathcal{L}(X; X)} = 0$$

Démonstration. Soit $\vec{u}_0 \in V$ et $\vec{u} \in X$. Comme mentionnée dans la démonstration du lemme 3.2.3, $K \vec{u} \in V$ satisfait:

$$a_0(K \vec{u}, \vec{v}) = (\vec{g}, \vec{v}) = a_1(\vec{u}_0, \vec{u}, \vec{v}) + a_1(\vec{u}, \vec{u}_0, \vec{v}), \forall \vec{v} \in V \quad (3.3.24)$$

De même, selon (3.3.22), $K_h \vec{u} \in V_h$ satisfait:

$$a_0(K_h \vec{u}, \vec{v}_h) = (\vec{g}_h, \vec{v}_h) = a_1(\pi_h \vec{u}_0, \vec{u}, \vec{v}_h) + a_1(\vec{u}, \pi_h \vec{u}_0, \vec{v}_h), \forall \vec{v}_h \in V_h \quad (3.3.25)$$

c.à.d. $K_h \vec{u}$ est une approximation de la solution $\vec{z} \in V$ du problème suivant:

$$a_0(\vec{z}, \vec{v}) = (\vec{g}_h, \vec{v}), \forall \vec{v} \in V \quad (3.3.26)$$

Il suit de (3.3.24) et (3.3.26) que

$$|K \vec{u} - \vec{z}|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{1}{\nu} \|\vec{g} - \vec{g}_h\|^\star$$

et

$$(\vec{g} - \vec{g}_h, \vec{v}) = a_1(\vec{u}_0 - \pi_h \vec{u}_0, \vec{u}, \vec{v}) + a_1(\vec{u}, \vec{u}_0 - \pi_h \vec{u}_0, \vec{v}), \forall \vec{v} \in V$$

Ainsi

$$\|\vec{g} - \vec{g}_h\|^\star \leq C_1 |\vec{u}_0 - \pi_h \vec{u}_0|_{H^1(\Omega)} |\vec{u}|_{H^1(\Omega)}$$

Par conséquent

$$|K\vec{u} - \vec{z}|_{H^1(\Omega)} \leq C_2 |\vec{u}_0 - \pi_h \vec{u}_0|_{H^1(\Omega)} |\vec{u}|_{H^1(\Omega)} \quad (3.3.27)$$

D'autre part, soit λ l'élément de $L_0^2(\Omega)$ qui satisfait:

$$a_0(\vec{z}, \vec{v}) - (\lambda, \operatorname{div} \vec{v}) = (\vec{g}_h, \vec{v}), \forall \vec{v} \in X \quad (3.3.28)$$

Alors, nous obtenons l'erreur suivante:

$$|\vec{z} - K_h \vec{u}|_{H^1(\Omega)} \leq C_3 \left(\inf_{\vec{v}_h \in V_h} |\vec{z} - \vec{v}_h|_{H^1(\Omega)} + \inf_{q_h \in M_h} \|\lambda - q_h\|_{0,\Omega} \right) \quad (3.3.29)$$

Maintenant, de (3.3.21) et des hypothèses (H1) nous en déduisons immédiatement que

$$\lim_{h \rightarrow 0} |\vec{u}_0 - \pi_h \vec{u}_0|_{H^1(\Omega)} = 0 \quad (3.3.30)$$

Ensuite, comme dans le lemme 3.2.3, nous trouvons que, pour $n = 2$ ou 3 , g_h appartient à $(L^{\frac{3}{2}}(\Omega))^n$. Donc, $\vec{z} \in (W^{2, \frac{3}{2}}(\Omega))^n$, $\lambda \in W^{1, \frac{3}{2}}(\Omega)$ et

$$\|\vec{z}\|_{W^{2, \frac{3}{2}}(\Omega)} + \|\lambda\|_{W^{1, \frac{3}{2}}(\Omega)} \leq C_4 |\pi_h \vec{u}_0|_{H^1(\Omega)} |\vec{u}|_{H^1(\Omega)} \leq C_4 |\vec{u}_0|_{H^1(\Omega)} |\vec{u}|_{H^1(\Omega)}$$

Par ailleurs, il vient du théorème 2.1.2 que $W^{2, \frac{3}{2}}(\Omega) \subset H^{\frac{3}{2}}(\Omega)$ et $W^{1, \frac{3}{2}}(\Omega) \subset H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$.

Par conséquent,

$$\|\vec{z}\|_{H^{\frac{3}{2}}(\Omega)} + \|\lambda\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Omega)} \leq C_5 |\vec{u}_0|_{H^1(\Omega)} |\vec{u}|_{H^1(\Omega)} \quad (3.3.31)$$

alors, nous pouvons utiliser le théorème 2.1.3 afin d'en tirer une estimation appropriée de la partie droite de (3.3.29). En effet, les hypothèses (H2) avec $m = 0$ et 1 donnent respectivement:

$$\|q - \rho_h q\|_{0,\Omega} \leq \|q\|_{0,\Omega}, \quad \|q - \rho_h q\|_{0,\Omega} \leq C_6 h \|q\|_{H^1(\Omega)}$$

Ainsi l'opérateur $I - \rho_h$ appartient à $\mathcal{L}(M; M) \cap \mathcal{L}(M \cap H^1(\Omega); M)$. Donc, d'après le théorème 2.1.3, $I - \rho_h \in \mathcal{L}(M \cap H^{\frac{1}{2}}(\Omega); M)$ et

$$\|q - \rho_h q\|_{0,\Omega} \leq C_7 h^{\frac{1}{2}} \|q\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Omega)}, \forall q \in M \cap H^{\frac{1}{2}}(\Omega) \quad (3.3.32)$$

Egalement, (3.3.21) et les hypothèses (H1) avec $m = 1$ implique:

$$\begin{aligned} |\vec{v} - \pi_h \vec{v}|_{H^1(\Omega)} &\leq |\vec{v}|_{H^1(\Omega)}, \forall \vec{v} \in V \\ |\vec{v} - \pi_h \vec{v}|_{H^1(\Omega)} &\leq |\vec{v} - r_h \vec{v}|_{H^1(\Omega)} \leq C_8 h |\vec{v}|_{H^2(\Omega)}, \forall \vec{v} \in V \cap (H^2(\Omega))^n \end{aligned}$$

Par conséquent

$$|\vec{v} - \pi_h \vec{v}|_{H^1(\Omega)} \leq C_9 h^{\frac{1}{2}} \|\vec{v}\|_{H^{\frac{3}{2}}(\Omega)}, \forall \vec{v} \in V \cap (H^{\frac{3}{2}}(\Omega))^n \quad (3.3.33)$$

Finalement, en compilant ensemble (3.3.32), (3.3.33), (3.3.31) et (3.3.29), nous obtenons:

$$|\vec{z} - K_h \vec{u}|_{H^1(\Omega)} \leq C_{10} h^{\frac{1}{2}} |\vec{u}_0|_{H^1(\Omega)} |\vec{u}|_{H^1(\Omega)} \quad (3.3.34)$$

Alors (3.3.27) et (3.3.34) donnent

$$|K \vec{u} - K_h \vec{u}|_{H^1(\Omega)} \leq C_{11} \left(|\vec{u}_0 - \pi_h \vec{u}_0|_{H^1(\Omega)} + h^{\frac{1}{2}} |\vec{u}_0|_{H^1(\Omega)} \right) |\vec{u}|_{H^1(\Omega)}$$

En vu de (3.3.30), ceci prouve le lemme. ■

Lemme 3.3.3 *Sous les hypothèses du lemme 3.3.2, il existe deux constantes $h_0 > 0$ et $\gamma_\star > 0$, toutes deux indépendantes de h , telle que, $\forall h \leq h_0$:*

$$\sup_{\vec{w}_h \in V_h} \frac{c(\pi_h \vec{u}_0, \vec{v}_h, \vec{w}_h)}{|\vec{w}_h|_{H^1(\Omega)}} \geq \gamma_\star |\vec{v}_h|_{H^1(\Omega)}, \forall \vec{v}_h \in V_h \quad (3.3.35)$$

Démonstration. Grâce au lemme 3.2.4, nous pouvons écrire:

$$I + K_h = (I + K) [I + (I + K)^{-1} (K_h - K)]$$

Mais d'après le lemme 3.3.2, il existe $h_0 > 0$ tels que, $\forall h \leq h_0$:

$$\|(I + K)^{-1} (K_h - K)\|_{\mathcal{L}(X,X)} < 1$$

Par conséquent $I + K_h$ est non singulière dans $\mathcal{L}(X, X)$ et

$$\|(I + K_h)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X,X)} \leq C \quad (3.3.36)$$

Alors, en vue de (3.3.23), nous pouvons écrire que:

$$\begin{aligned} \sup_{\vec{v}_h \in V_h} \frac{c(\pi_h \vec{u}_0, \vec{v}_h, \vec{w}_h)}{|\vec{w}_h|_{H^1(\Omega)}} &\geq \frac{a_0((I+K_h)\vec{v}_h, (I+K_h)\vec{v}_h)}{|(I+K_h)\vec{v}_h|_{H^1(\Omega)}} = \nu |(I+K_h)\vec{v}_h|_{H^1(\Omega)} \\ &\geq \frac{\nu}{C} |\vec{v}_h|_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

grâce à (3.3.36). Ceci prouve (3.3.35) avec $\gamma_\star = \frac{\nu}{C}$. ■

Remarque 3.3.1 *Le lemme 3.3.3 est toujours valide au "voisinage" de $\pi_h \vec{u}_0$. Plus spécialement, il existe deux constantes $\bar{\gamma} > 0$ et $\bar{\delta} > 0$ telles que*

$$\sup_{\vec{w}_h \in V_h} \frac{c(\vec{z}_h, \vec{v}_h, \vec{w}_h)}{|\vec{w}_h|_{H^1(\Omega)}} \geq \bar{\gamma} |\vec{v}_h|_{H^1(\Omega)}, \forall \vec{v}_h \in V_h, \forall h \leq h_0 \quad (3.3.37)$$

pour tout $\vec{z}_h \in V_h$ qui satisfait $|\vec{z}_h - \pi_h \vec{u}_0|_{H^1(\Omega)} \leq \bar{\delta}$.

En effet, de l'équation

$$c(\vec{z}_h, \vec{v}_h, \vec{w}_h) = c(\pi_h \vec{u}_0, \vec{v}_h, \vec{w}_h) + a_1(\vec{z}_h - \pi_h \vec{u}_0, \vec{v}_h, \vec{w}_h) + a_1(\vec{v}_h, \vec{z}_h - \pi_h \vec{u}_0, \vec{w}_h)$$

et le lemme 3.3.3, nous obtenons

$$\sup_{\vec{w}_h \in V_h} \frac{c(\vec{z}_h, \vec{v}_h, \vec{w}_h)}{|\vec{w}_h|_{H^1(\Omega)}} \geq \left(\gamma_\star - 2N_h |\vec{z}_h - \pi_h \vec{u}_0|_{H^1(\Omega)} \right) |\vec{v}_h|_{H^1(\Omega)}, \forall \vec{v}_h \in V_h$$

Maintenant, nous sommes en position d'établir l'existence d'un solution \vec{u}_h du problème (P_h) dans un voisinage de $\pi_h \vec{u}_0$.

Lemme 3.3.4 *Sous les hypothèses du lemme 3.3.2, le problème (P_h) admet au moins une solution \vec{u}_h dans la boule $B_h \subset V_h$ centrée en $\pi_h \vec{u}_0$ et de rayon $\mathfrak{R}_1(h)$, où $\mathfrak{R}_1(h)$ est une constante telle que*

$$0 < \mathfrak{R}_1(h) \leq C \left(|\vec{u}_0 - \pi_h \vec{u}_0|_{H^1(\Omega)} + \|p - \rho_h p\|_{0,\Omega} \right) \quad (3.3.38)$$

Démonstration. Soit $T_h : V_h \mapsto V_h$ l'application qui associe à tout $\vec{v}_h \in V_h$ l'élément $\vec{\phi}_h = T_h \vec{v}_h$ définie par:

$$\begin{aligned} c(\pi_h \vec{u}_0, \vec{\phi}_h, \vec{w}_h) &= a_1(\pi_h \vec{u}_0, \vec{v}_h, \vec{w}_h) + a_1(\vec{v}_h, \pi_h \vec{u}_0, \vec{w}_h) \\ &\quad - a_1(\vec{v}_h, \vec{v}_h, \vec{w}_h) + \left\langle \vec{f}, \vec{w}_h \right\rangle, \forall \vec{w}_h \in V_h \end{aligned} \quad (3.3.39)$$

Clairement, grâce au lemme 3.3.3 l'application T_h est bien définie par (3.3.39). Nous proposons d'établir que T_h admet au moins un point fixe dans la boule B_h centrée en $\pi_h \vec{u}_0$ et de rayon $\mathfrak{R}_1(h)$. Il vient de (3.3.39) que chacun de ces points fixe est une solution du problème (P_h) .

De (3.3.39) et (3.3.19), nous obtenons:

$$c(\pi_h \vec{u}_0, \phi_h - \pi_h \vec{u}_0, \vec{w}_h) = a_1(\pi_h \vec{u}_0, \vec{v}_h, \vec{w}_h) + a_1(\vec{v}_h, \pi_h \vec{u}_0, \vec{w}_h) - a_1(\vec{v}_h, \vec{v}_h, \vec{w}_h) + \langle \vec{f}, \vec{w}_h \rangle - a_0(\pi_h \vec{u}_0, \vec{w}_h) - 2a_1(\pi_h \vec{u}_0, \pi_h \vec{u}_0, \vec{w}_h)$$

Avec (3.2.7), ceci devient

$$c(\pi_h \vec{u}_0, \vec{\phi}_h - \pi_h \vec{u}_0, \vec{w}_h) = a_0(\vec{u}_0 - \pi_h \vec{u}_0, \vec{w}_h) + a_1(\vec{u}_0, \vec{u}_0, \vec{w}_h) - a_1(\pi_h \vec{u}_0, \pi_h \vec{u}_0, \vec{w}_h) + a_1(\pi_h \vec{u}_0, \vec{v}_h, \vec{w}_h) + a_1(\vec{v}_h, \pi_h \vec{u}_0, \vec{w}_h) - a_1(\vec{v}_h, \vec{v}_h, \vec{w}_h) - a_1(\pi_h \vec{u}_0, \pi_h \vec{u}_0, \vec{w}_h) - (p, \operatorname{div} \vec{w}_h)$$

Par conséquent,

$$\begin{cases} c(\pi_h \vec{u}_0, \vec{\phi}_h - \pi_h \vec{u}_0, \vec{w}_h) = a_0(\vec{u}_0 - \pi_h \vec{u}_0, \vec{w}_h) + a_1(\vec{u}_0 - \pi_h \vec{u}_0, \vec{u}_0, \vec{w}_h) \\ + a_1(\pi_h \vec{u}_0, \vec{u}_0 - \pi_h \vec{u}_0, \vec{w}_h) - a_1(\pi_h \vec{u}_0 - \vec{v}_h, \pi_h \vec{u}_0 - \vec{v}_h, \vec{w}_h) \\ - (p - q_h, \operatorname{div} \vec{w}_h), \forall q_h \in M_h, \forall \vec{w}_h \in V_h \end{cases} \quad (3.3.40)$$

D'une part, en vertu du lemme 3.3.3, nous pouvons prendre \vec{w}_h dans V_h telle que

$$|\vec{w}_h|_{H^1(\Omega)} = 1, \quad c(\pi_h \vec{u}_0, \vec{\phi}_h - \pi_h \vec{u}_0, \vec{w}_h) \geq \gamma_\star \left| \vec{\phi}_h - \pi_h \vec{u}_0 \right|_{H^1(\Omega)}$$

D'autre part, pour ce \vec{w}_h (3.3.40) donne la borne supérieure,

$$\left| c(\pi_h \vec{u}_0, \vec{\phi}_h - \pi_h \vec{u}_0, \vec{w}_h) \right| \leq \left(\nu + 2C_1 |\vec{u}_0|_{H^1(\Omega)} \right) |\vec{u}_0 - \pi_h \vec{u}_0|_{H^1(\Omega)} + C_1 |\pi_h \vec{u}_0 - \vec{v}_h|_{H^1(\Omega)}^2 + \|p - q_h\|_{0,\Omega}, \forall q_h \in M_h$$

Donc,

$$\left| \vec{\phi}_h - \pi_h \vec{u}_0 \right|_{H^1(\Omega)} \leq \epsilon(h) + \lambda |\pi_h \vec{u}_0 - \vec{v}_h|_{H^1(\Omega)}^2$$

où

$$\epsilon(h) \leq C_2 \left(|\vec{u}_0 - \pi_h \vec{u}_0|_{H^1(\Omega)} + \|p - \rho_h p\|_{0,\Omega} \right), \quad \lambda = \frac{C_1}{\gamma_\star}$$

D'où T_h applique dans elle-même chaque boule de centre $\pi_h u_0$ et de rayon \mathfrak{R} , pour tout nombre positive \mathfrak{R} qui satisfait:

$$\mathfrak{R} \geq \epsilon(h) + \lambda \mathfrak{R}^2$$

c.à.d. pour tout \mathfrak{R} tels que $\mathfrak{R}_1(h) \leq \mathfrak{R} \leq \mathfrak{R}_2(h)$, où

$$\left. \begin{array}{l} \mathfrak{R}_1(h) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\lambda\epsilon(h)}}{2\lambda} \sim \epsilon(h) \\ \text{et} \\ \mathfrak{R}_2(h) = \frac{1 + \sqrt{1 - 4\lambda\epsilon(h)}}{2\lambda} \sim \frac{1}{\lambda} - \epsilon(h) \end{array} \right\} \text{ quand } h \rightarrow 0$$

Par ailleurs, nous pouvons démontrer que T_h est continue dans chacune de ces boules. En particulier, en choisissant $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1(h)$, nous constatons que T_h applique continuellement B_h dans lui même. Donc, le théorème 3.1.1 implique que T_h admet au moins un point fixe dans B_h . ■

Maintenant, la méthode de Newton appliquée au problème (P_h) consiste à trouver une suite (\vec{u}_h^m) d'éléments de V_h définis $\forall m \geq 1$ par

$$c(\vec{u}_h^{m-1}, \vec{u}_h^m, \vec{v}_h) = a_1(\vec{u}_h^{m-1}, \vec{u}_h^{m-1}, \vec{v}_h) + \langle \vec{f}, \vec{v}_h \rangle, \forall \vec{v}_h \in V_h \quad (3.3.41)$$

en partant d'un quelconque \vec{u}_h^0 dans V_h . Le lemme suivant établit l'existence et la convergence de cette suite.

Lemme 3.3.5 [13] *Sous les hypothèses du lemme 3.3.2, il existe une constante $\rho > 0$ telle que pour tout h suffisamment petit, la condition*

$$|\vec{u}_h^0 - \pi_h \vec{u}_0|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{\rho}{2} \quad (3.3.42)$$

implique que la suite (\vec{u}_h^m) est définie par (3.3.41) et

$$|\vec{u}_h^{m+1} - \vec{u}_h^m|_{H^1(\Omega)} \leq \rho, \quad |\vec{u}_h^{m+1} - \vec{u}_h^m|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{N_h}{\bar{\gamma}} |\vec{u}_h^m - \vec{u}_h|_{H^1(\Omega)}^2, \quad \forall m \geq 0 \quad (3.3.43)$$

où $\bar{\gamma}$ est la constante de la remarque 3.3.1.

Bien sûr, ρ peut être choisi tels que $\rho < \frac{\bar{\gamma}}{N_h}$ et donc

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \vec{u}_h^m = \vec{u}_h$$

En d'autres termes, si la première approximation \vec{u}_h^0 est suffisamment proche de $\pi_h \vec{u}_0$ alors la suite (\vec{u}_h^m) converge quadratiquement vers \vec{u}_h . Par ailleurs, comme ρ et \vec{u}_h^0 sont indépendants de la solution particulière \vec{u}_h , il vient que le problème (P_h) a exactement une seule solution \vec{u}_h dans la boule de rayon ρ et de centre $\pi_h \vec{u}_0$. Ces résultats sont résumés dans le théorème suivant.

Théorème 3.3.3 [13] *Supposons que Ω satisfait les hypothèses de régularité du lemme 3.2.3 et que les hypothèses (H1) et (H2) sont vérifiées. Alors, si \vec{u}_0 est une solution non-singulière du problème de Navier-Stokes, il existe deux constantes $h_0 > 0$ et $\rho > 0$ telles que pour tout $h \in (0, h_0]$ le problème (P_h) a une unique solution $\vec{u}_h \in V_h$ dans la boule de rayon ρ et de centre $\pi_h \vec{u}_0$. De plus, si $(\vec{u}_0, p) \in (V \cap (H^{m+1}(\Omega))^n) \times (L_0^2(\Omega) \cap H^m(\Omega))$, nous avons l'erreur suivante:*

$$|\vec{u}_0 - \vec{u}_h|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^m \left(\|\vec{u}_0\|_{H^{m+1}(\Omega)} + \|p\|_{H^m(\Omega)} \right) \text{ pour } 1 \leq m \leq l$$

Encore, si $\vec{u}_h^0 \in V_h$ satisfait

$$|\vec{u}_h^0 - \pi_h \vec{u}_0|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{\rho}{2}$$

et la suite (\vec{u}_h^k) définie par la méthode de Newton:

$$c(\vec{u}_h^{k-1}, \vec{u}_h^k, \vec{v}_h) = a_1(\vec{u}_h^{k-1}, \vec{u}_h^{k-1}, \vec{v}_h) + \langle \vec{f}, \vec{v}_h \rangle, \forall \vec{v}_h \in V_h$$

converge quadratiquement vers \vec{u}_h .

Simulation des fluides et interaction avec des solides déformables

Dans ce chapitre nous présentons une méthode pour simuler des fluides ainsi que leurs interactions avec des objets déformables.

Le cadre de simulation traité est celui des solides déformables de taille significative, en interaction avec un liquide à surface libre. En termes d'échelle, nous supposons un liquide approximativement d'un ordre de grandeur supérieur à celui des solides présents. Toutefois, les tailles des objets et du fluide restent toujours comparables.

Nous devons donc simuler le fluide tout seul, puis les objets solides, et faire l'interaction entre eux.

Pour ce qui est de la simulation des fluides, nous optons pour la méthode MAC, dont nous présentons le principe général.

4.1 Simulateur de fluide

4.1.1 Principe de la méthode MAC

La méthode MAC-*Markers And Cells*- a été introduite en infographie (informatique de l'image) par Foster et Metaxas [11], bien que proposée initialement par Harlow et Welch [15]. Cette méthode s'appuie sur une double représentation du fluide, d'où son nom *Markers and Cells*: l'une destinée au calcul des champs de vitesse et de pression du fluide sur une grille fixe, et l'autre, comme un nuage de marqueurs sans masse, advectés par le champ de vitesse du fluide. Ce nuage est employé pour localiser la position du liquide, qui change au cours du temps, dans l'environnement de simulation. Puisque le fluide est matérialisé par un nuage volumique de marqueurs ponctuels, aucune hypothèse de représentation ne vient restreindre les mouvements autorisés, et le fluide peut évoluer librement dans son environnement. La simulation des équations de Navier-Stokes est réalisée par une méthode de différences finies.

Comme l'illustre la figure 4.1, de la position des marqueurs, nous pouvons déduire, la position du liquide dans l'environnement. Simultanément, la position de la surface du liquide est repérée, ce qui permet de spécifier les conditions aux limites adéquates sur la grille pour la résolution des équations de Navier-Stokes. Cette résolution permet alors de faire évoluer les champs de vitesse et de pression. Ensuite, les marqueurs du liquide sont advectés, complétant le calcul du pas de temps.

Les deux modèles du fluide sont donc étroitement couplés: les marqueurs permettent de spécifier de manière dynamique le domaine de simulation, quant à l'autre, elle détermine

les mouvements du fluide et déplace les marqueurs.

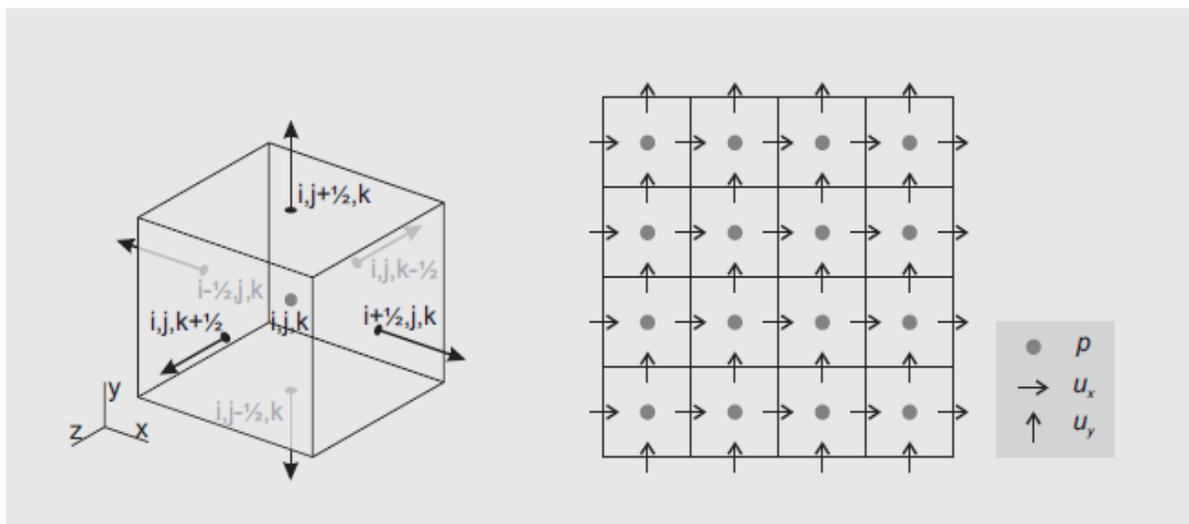


Figure 4.1: Figure de gauche: détail de la cellule (i,j,k) avec ses faces adjacentes.

Figure de Droite: illustration des positions de discrétisation des différentes quantités:

les échantillons de la pression sont figurés par des disques, ceux de la vitesse par des flèches.

4.1.2 Matérialisation du liquide

La détermination de la configuration du liquide dans la grille est assurée par les marqueurs sans masse advectés par le champ de vitesse. Les cellules de la grille sont partitionnées en deux groupes: celles dépourvues de tout marqueurs, et celles qui en contiennent au moins un. Ce partitionnement détermine directement le domaine de simulation du liquide, mobile au cours du temps. Les cellules composant sa surface, qui sont le lieu de l'imposition des conditions aux limites relatives à la surface libre, sont déterminées comme étant les cellules pleines adjacentes par une face à au moins une cellule vide, c'est à dire les cellules pleines voisines à ,au moins, une cellule.

Les marqueurs déterminent, par leur seule présence, le statut des cellules de la grille. Il n'est pas requis que la distribution des marqueurs dans l'espace soit parfaitement homogène pour la simulation du fluide. Du moins, le champ de vitesse du fluide portant les particules étant incompressible, la distribution reste dans les faits globalement homogène, même si nous pouvons constater des variations d'autant plus importantes que les mouvements du fluide sont violents.

4.1.3 Conditions aux limites considérées

La simulation numérique d'un fluide prend tout son intérêt en infographie lorsque celui-ci évolue dans un environnement complexe parsemé d'obstacles. La prise en compte de ces obstacles est réalisée en considérant un domaine de simulation de forme adaptée, domaine muni de conditions aux limites adéquates sur ses frontières. En fait, plutôt que de considérer des grilles de forme arbitraire, une grille englobant l'environnement avec ses obstacles est employée, les obstacles correspondant alors à des cellules particulières dans lesquelles le fluide ne peut pénétrer. Avec une grille décalée, la définition des conditions aux limites concernant les obstacles se révèle très naturelle, sous réserve que les frontières du domaine coïncident avec les bords des cellules.

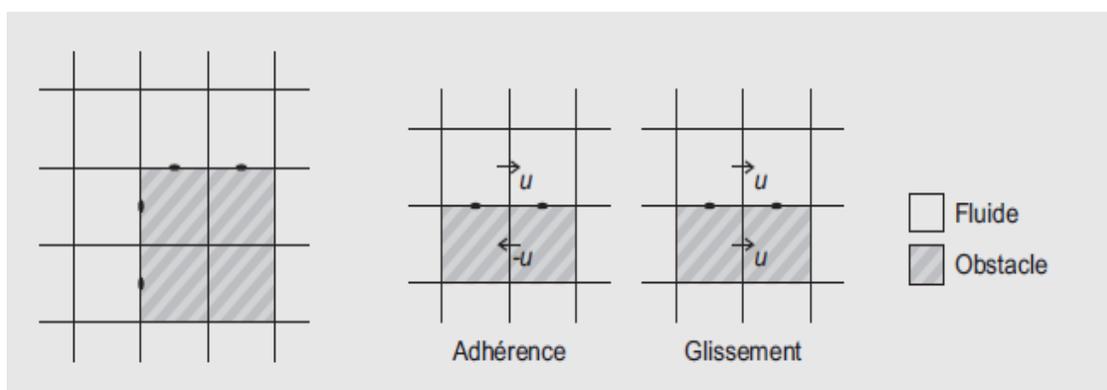


Figure 4.2: Conditions aux limites.

Figure de gauche: si les obstacles sont alignés avec les faces de la grille, la spécification d'une condition de non-pénétration revient à imposer une vitesse nulle pour les points de discrétisation de la frontière de l'obstacle.

Figure de droite: les conditions d'adhérence $u=0$ et de glissement $u \cdot n=0$ sont imposables en considérant les paires de points de la vitesse tangentielle de part et d'autre de la frontière de l'obstacle.

A des fins de modélisation, il est également possible d'imposer des conditions de Dirichlet arbitraires à la surface d'un obstacle ou dans le corps du fluide. En outre, une condition particulière est employée afin de gérer une frontière ouverte du domaine. Pour simuler l'ouverture de la grille, une double condition de Neumann est adoptée sur la pression $\frac{\partial p}{\partial n} = 0$, et sur la vitesse $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$.

4.1.4 Résolution des équations de Navier-Stokes

Pour résoudre ces équations, il n'est pas fait usage de l'approche discrète proposée par Foster et Metaxas [11] mais d'une variante de l'approche proposée par Stam [29] qui repose sur la méthode de projection de Chorin [5].

Algorithme général

L'algorithme de résolution est détaillé dans la figure 4.4. Il correspond à la résolution des équations de Navier-Stokes par la méthode résumée dans la figure 4.3, en tenant compte des conditions aux limites.

-
- The figure shows a list of steps for solving the Navier-Stokes equations on a time step. The steps are:
 - A1. Résolution de $\frac{\partial v_0}{\partial t} = -(v_0 \cdot \nabla)v_0$ avec $v_0^t = u^t$ par la méthode des caractéristiques
 - A2. Résolution de $\frac{\partial v_1}{\partial t} = \nu \Delta v_1$ avec $v_1^t = v_0^{t+1}$ par différences centrées
 - A3. Résolution de $\frac{\partial v_2}{\partial t} = f^t$ avec $v_2^t = v_1^{t+1}$ par la méthode d'Euler avant
 - $u^* = v_2^{t+1}$
 - P1. Calcul de la pression par résolution de $\Delta p = \frac{1}{\delta t} \nabla \cdot u^*$ avec $\frac{\partial p}{\partial n} = 0$ sur Γ_D par la méthode du gradient conjugué
 - P2. Application de la correction : $u^{t+1} = u^* - \delta t \nabla p$

Figure 4.3: Méthode de résolution des équations de Navier-Stokes sur un pas de temps. [12]

Les étapes notées *A* correspondent à la prise en compte des différents termes d'accélération et celles indiquées par *P*, à la projection pour satisfaire à la contrainte d'incompressibilité.

Cette prise en compte est réalisée en analysant leur influence sur la grille préalablement à la simulation, puis en mettant à jour la grille en conséquence durant chaque pas de temps quand cela est nécessaire. Les différentes étapes de mise à jours de la grille n'ont alors plus à se préoccuper des conditions aux limites et opèrent avec une parfaite régularité sur

l'intégralité de la grille.

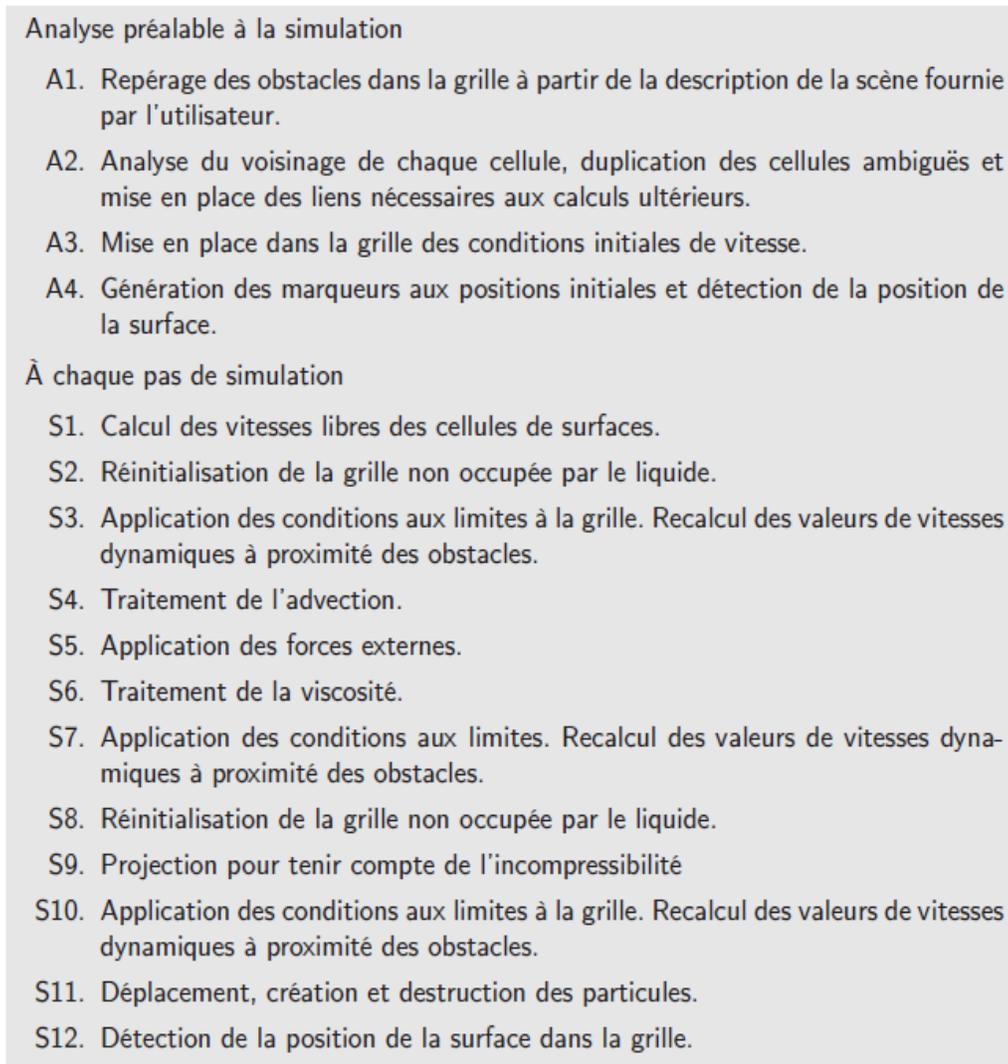


Figure 4.4: Algorithme de simulation MAC implémenté. [12]

4.1.5 Résultats

Nous présentons maintenant quelques résultats obtenus à l'aide du simulateur décrit précédemment. L'objectif de cette présentation est de donner un bref aperçu des capacités, et des limites, de ce mode de simulation.

Les figures 4.5 et 4.6 présentent deux environnements dans lesquels le fluide adopte automatiquement un comportement naturel, grâce au simulateur. Même si les situations restent relativement simples, l'animation est intéressante du point de vue visuel.

S'il est possible de varier l'environnement pour changer du tout au tout le résultat d'une animation, nous pouvons également altérer le comportement du fluide en modifiant sa viscosité. Comme l'illustre la figure 4.7, des animations très différentes sont obtenues par ce biais. Le fluide apparaît ainsi tantôt comme de l'eau, tantôt comme de la glu.

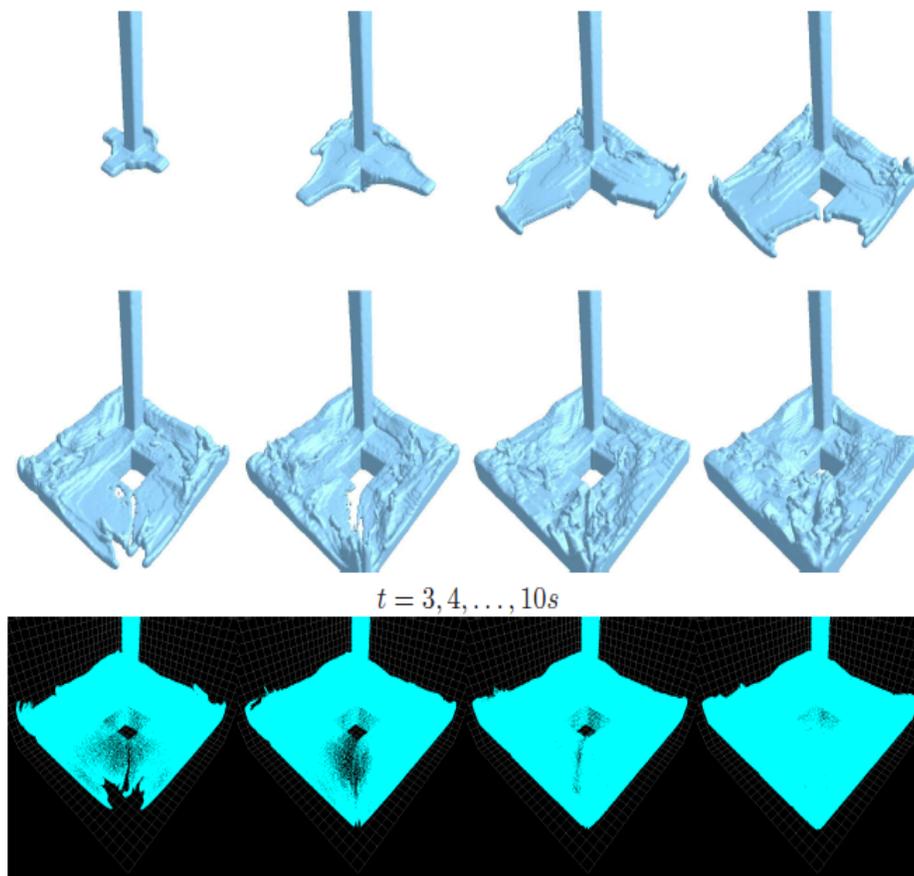


Figure 4.5: Exemple: boîte à fond percé.

Une surface est reconstruite à partir des données du simulateur. Le fluide est introduit en continu dans un coin de la boîte et évolue sous l'influence de la gravité. La deuxième partie de l'animation est présentée sous forme reconstruite et sous forme brute.

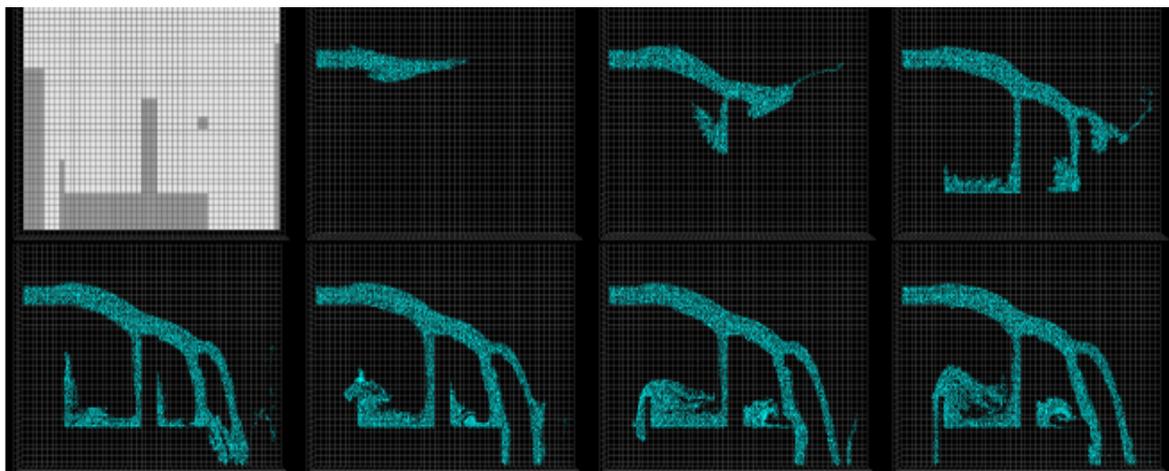


Figure 4.6: Exemple: Jet et obstacles.

L'environnement de simulation est figuré dans la première image. Le fluide est introduit en continu avec une vitesse imposée sur la gauche du domaine.

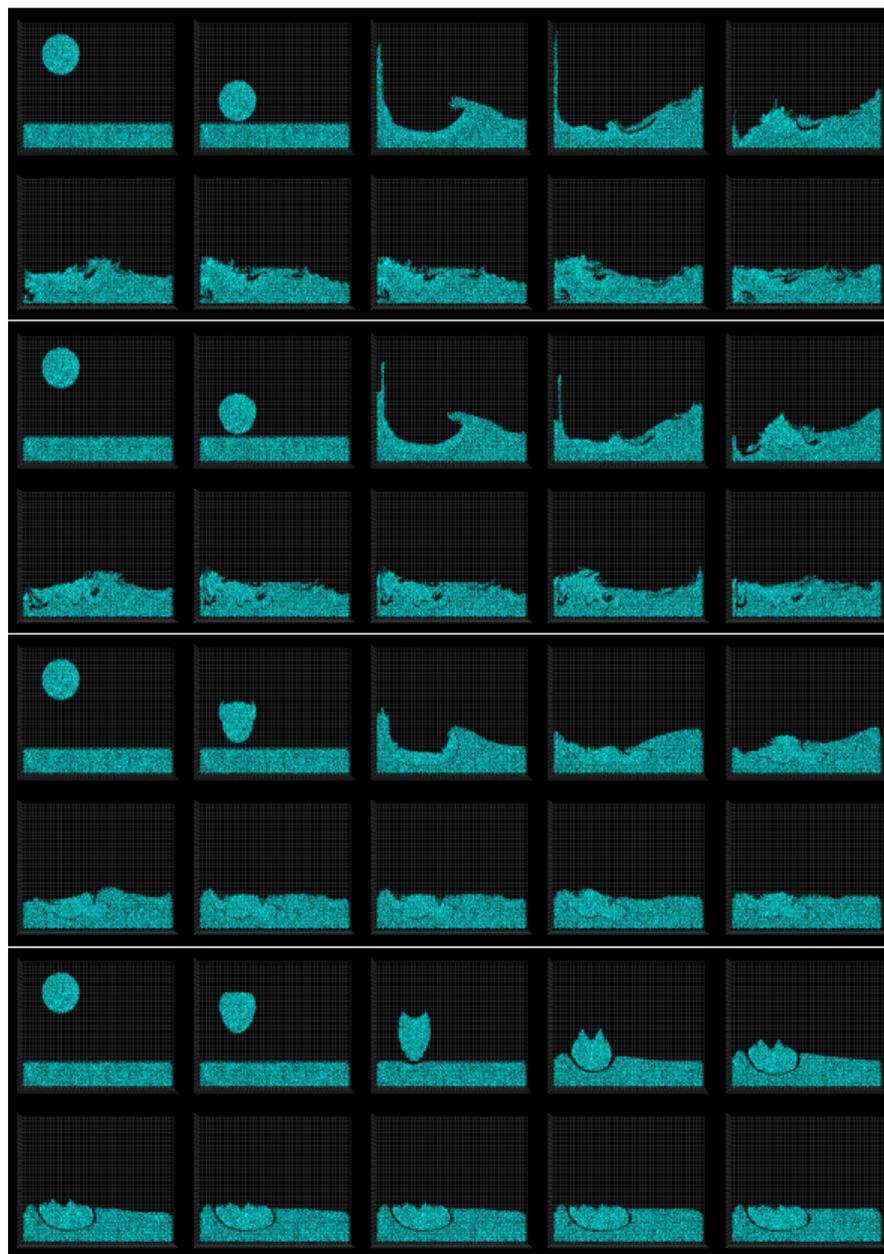


Figure 4.7: Exemple: variation de la viscosité.

De haut en bas: $\nu = 0, 0.1, 1, 10$.

Remarque 4.1.1 Bien que les possibilités de simulation soient vaste, et le comportement réaliste du fluide visuellement intéressant, plusieurs critiques peuvent être formulées sur les résultats.

Les temps d'exécution pour deux simulations différentes sont présentés dans la figure 4.9. La première situation présentée correspond à la chute d'un disque de fluide tombant

dans le bac partiellement rempli de la figure 4.6, et la seconde au remplissage progressif d'une boîte percée par un liquide dans la figure 4.5.

Précisons que les temps rapportés n'incluent que la simulation, hors visualisation ou export de données.

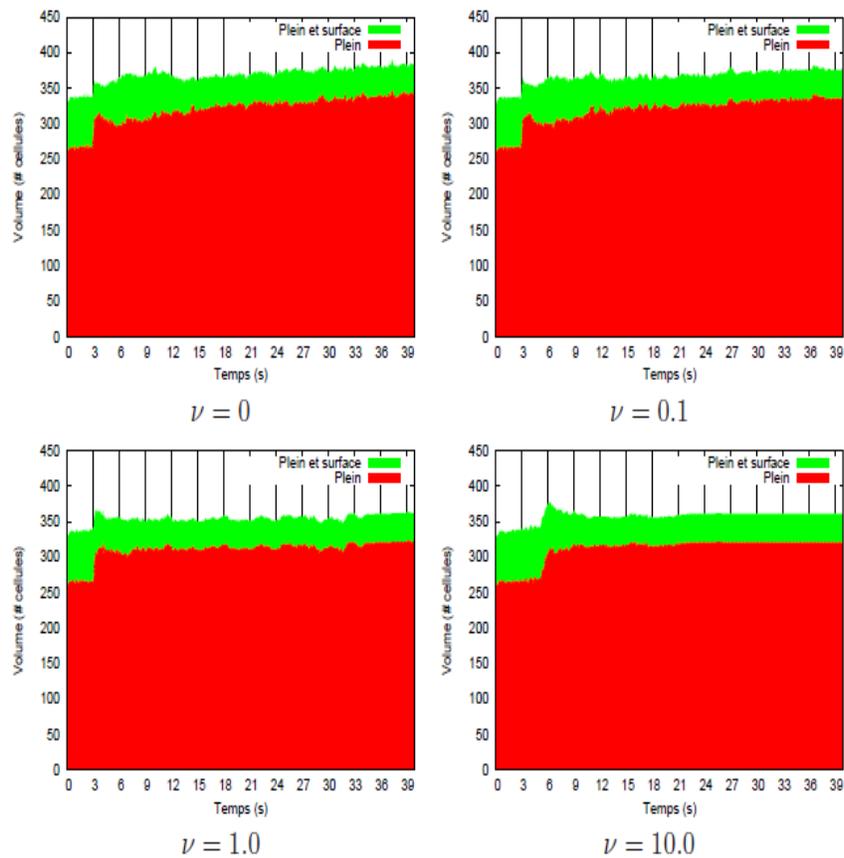


Figure 4.8: Conservation du volume de liquide pour les différentes situations de la figure 4.7.

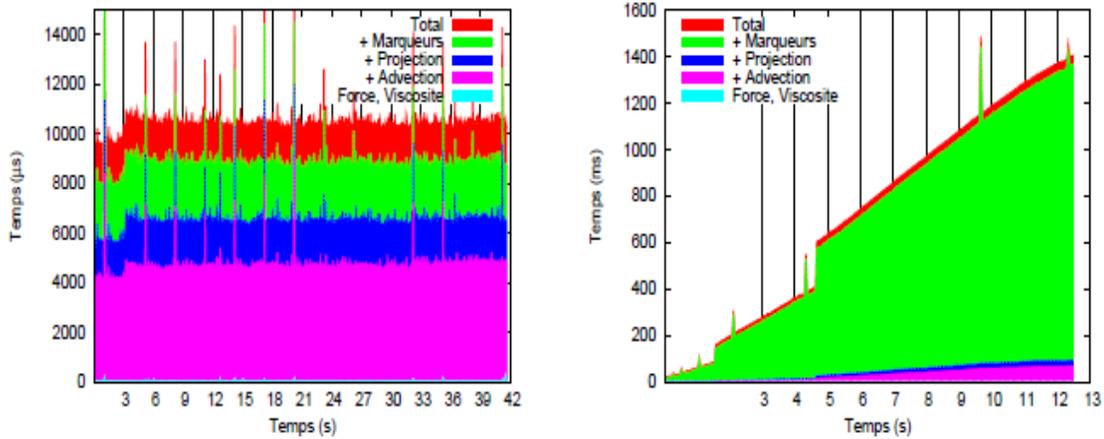


Figure 4.9: Temps d'exécution de simulateur MAC.

La figure de gauche: temps correspondant au disque tombant dans le bac.

La figure de Droite: Boite percée.

Les temps reportées pour les deux simulations correspondent à un pas de temps de $\frac{1}{24}$ de seconde.

4.2 Interaction avec des solides déformables

Cette section présente l'extension proposée aux simulateurs MAC pour permettre une interaction automatique du liquide avec des objets déformables.

Le contexte est le suivant: une solution au problème de l'interaction est de traiter les problèmes du fluide et du solide séparément, en employant un couplage par les conditions aux limites. Les solides fixent alors des conditions aux limites sur la vitesse du fluide, et simultanément le fluide impose des forces aux solides.

4.2.1 Interaction

Pour coupler directement le modèle du fluide et celui des solides, nous proposons de calculer une force d'interaction directe entre les deux milieux. Cette force est ensuite

réintroduite symétriquement dans les deux modèles. Une telle approche garantit une réelle interaction réciproque, ainsi qu'une cohérence de réaction, entre les solides et le fluide.

Notons que, dans ce cas, le solide apparaît pour le fluide comme une perturbation dynamique des forces externes, et *vice versa*. Le solide évolue alors dans le domaine du fluide en s'y superposant, sans le restreindre explicitement d'aucune manière.

Force d'interaction

Il est nécessaire de choisir une forme à cette force d'interaction. Rappelons qu'elle a pour rôle de modéliser du mieux possible l'intégralité de l'interaction entre solides et fluide. Elle doit donc avoir une action tentant d'empêcher d'une part la pénétration des objets par les marqueurs, et de favoriser d'autre part condition naturelle d'égalité des vitesses des deux milieux aux interfaces.

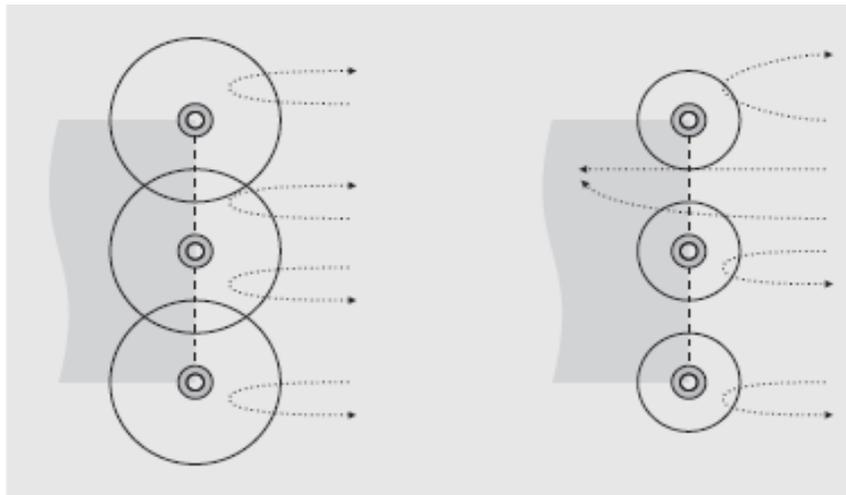


Figure 4.10: Répulsion des marqueurs par l'interaction.

A gauche, l'interaction couvre suffisamment la surface de l'objet pour empêcher les marqueurs de pénétrer dans le solide. A droite, les interactions sont trop limitées et pas assez raides pour repousser efficacement les marqueurs hors du solide.

L'intensité de la répulsion doit être assez forte pour prévenir efficacement l'intrusion de marqueurs dans le corps de l'objet et rendre ainsi les objets imperméables aux marqueurs. Toutefois, il faut souligner qu'il n'est pas possible de garantir une parfaite imperméabilité des objets.

Pertinence de l'interaction

Avec cette représentation, le choix des marqueurs comme représentants du liquide, et donc comme support de l'interaction, est tout à fait naturel: ils sont introduits dans le schéma MAC comme une forme de discrétisation de la présence du fluide dans l'environnement. Par définition, ils constituent donc l'information disponible la plus précise que nous puissions trouver sur la localisation du liquide.

Cette précision de localisation est un point important dans la mesure où la position de la surface du liquide varie et influe directement sur l'interaction. En effet, comme nous nous intéressons au cas d'un fluide à surface libre et à des objets de taille non négligeable par rapport au fluide, les solides peuvent se trouver partiellement immergés.

4.2.2 Résultats

Les figures 4.11-4.14 illustrent les résultats que nous obtenons en mettant en œuvre l'interaction proposée. Ces divers résultats, qui paraissent réalistes sont obtenus de manière totalement automatique.

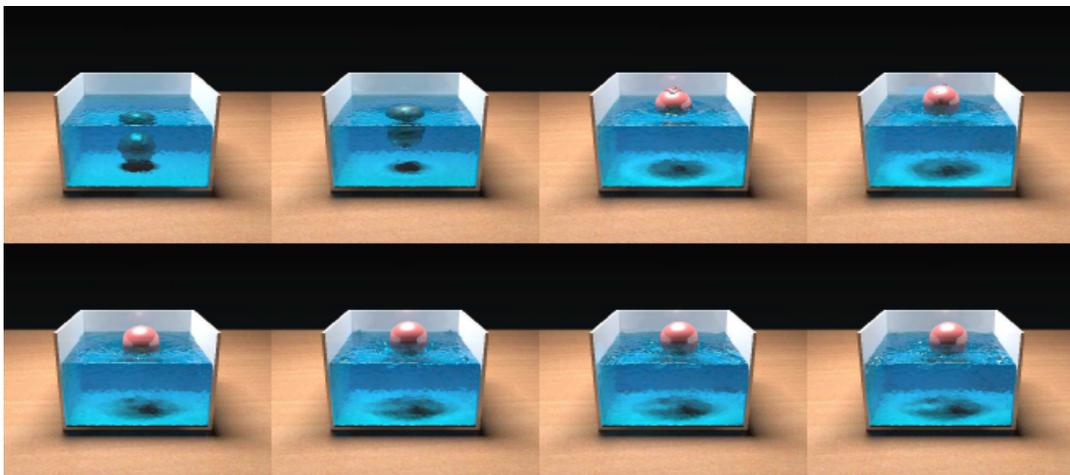
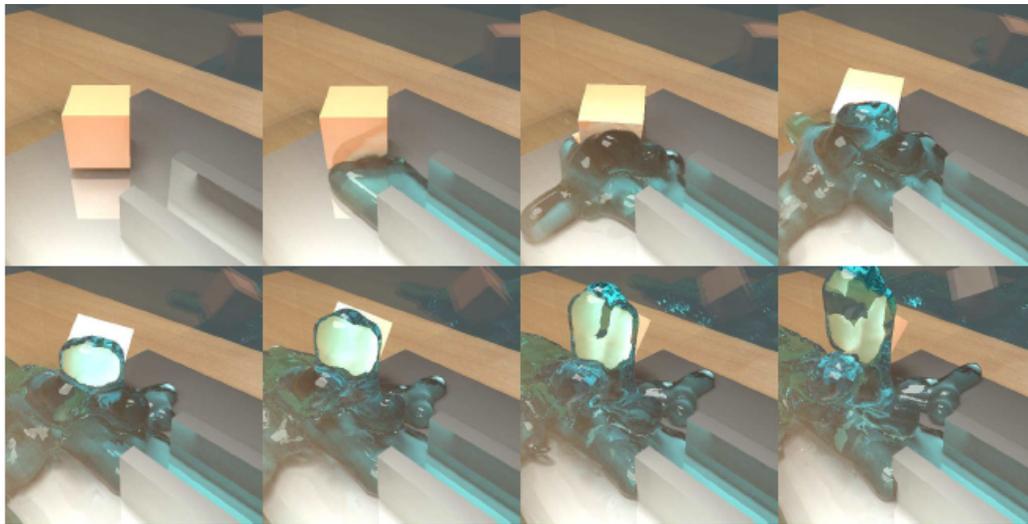
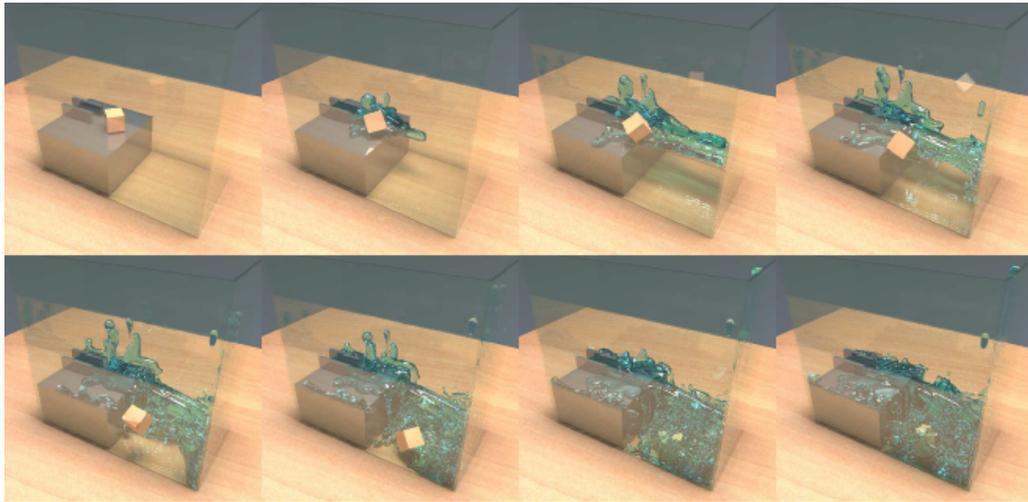


Figure 4.11: Exemple d'interaction: flottaison.

La masse et le fluide sont initialement au repos. Toutefois, la différence de pression dans le fluide, due à la gravité, pousse davantage les marqueurs contre le solide en dessous qu'au-dessus de lui, ce qui le fait émerger.

La figure 4.12 présente un jet entrant en collision avec un cube. Cette simulation prouve qu'il est possible de localiser l'interaction de manière suffisamment précise pour déformer le cube. L'interaction est également illustrée, puisque le jet est dévié par le cube tout en le propulsant.



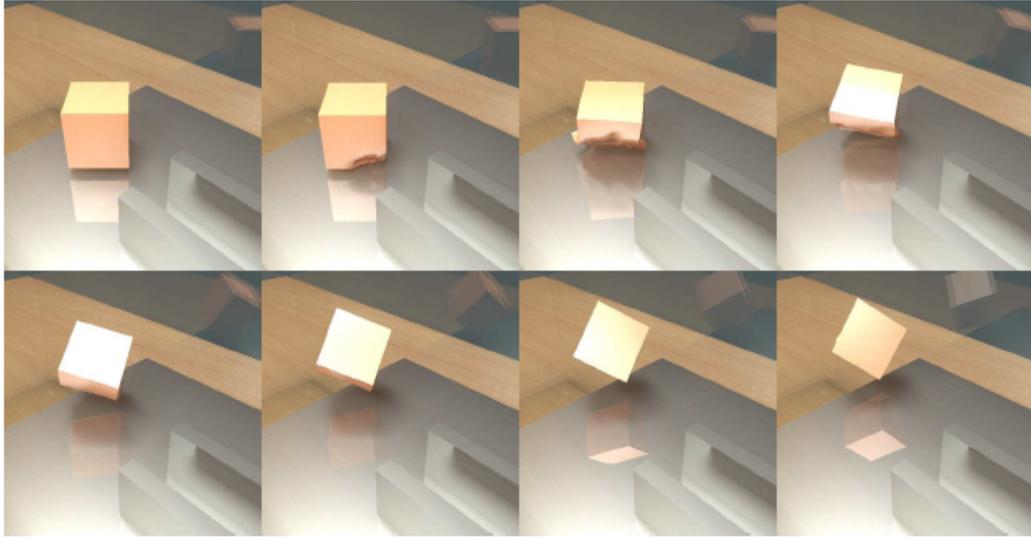


Figure 4.12: Exemple d'interaction: jet.

Animation générale, et gros plan sur le cube en contre-champ durant les premiers pas de temps. Le gros plan est présenté avec, et sans liquide, pour mieux apprécier la déformation du cube sous l'impact.

Les deux figures 4.13 et 4.14 illustrent également cette interaction automatique avec des jeux entre solides et liquide. Dans la figure suivante, deux cubes de masses différentes interagissent par l'intermédiaire du liquide: celui-ci étant incompressible et confiné, il transfère le mouvement d'un cube à l'autre, comme dans un système de freins.

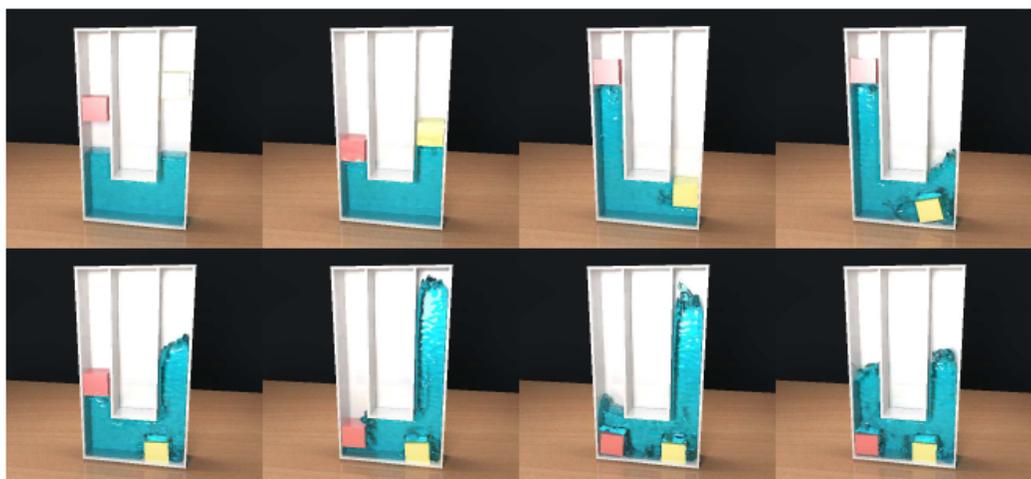


Figure 4.13: Exemple d'interaction: cubes.

Le cube de droite est plus lourd que celui de gauche. Le liquide est mis en mouvement sous la pression exercée par les cubes, mais repousse également un cube sous la pression de l'autre en transmettant le mouvement.

Dans celle-là, nous lançons une boule représentée par une masse dans un bac de liquide, et nous observons un ricochet: la boule rebondit sur la surface du liquide tout en la mettant en mouvement.

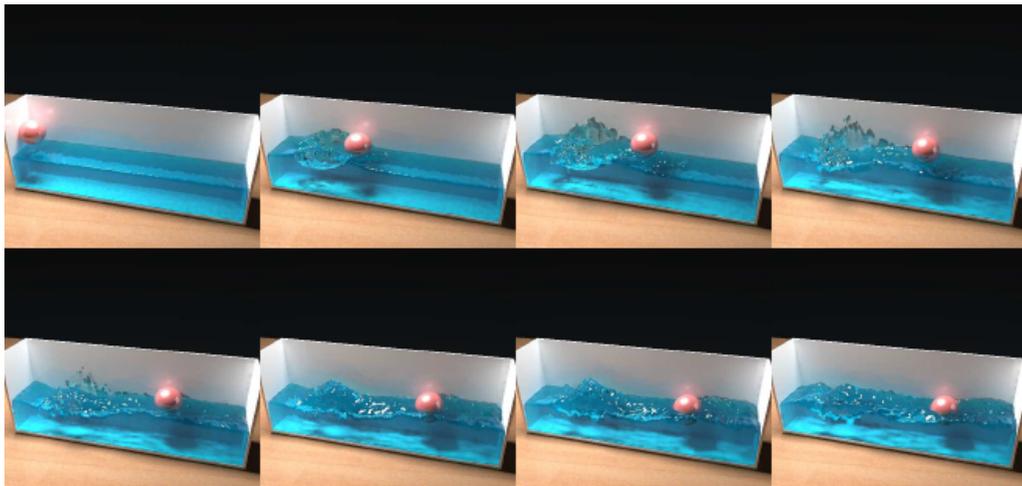


Figure 4.14: Exemple d'interaction: ricochet.

La balle rebondit sur la surface du liquide tout en la mettant en mouvement.

En conclusion, la simulations des fluides ne se restreint pas seulement à cela, nous pouvons cité beaucoup d'exemples où les simulations des fluides grâce aux équations de Navier-Stokes, qui sont très important dans la vie courantes, nous pouvons allez de l'amélioration de la qualité des jeux vidéo, c'est à dire du réalisme des personnages et de l'animation des jeux et dessin animée en 3D (3 dimensions), jusqu'à dans la prévention des risques et simulation des phénomènes naturels, tels que: les avalanches, le phénomènes des marées, les tornades, cyclones, tsunami,...etc. Nous pouvons aussi citer leurs applications en médecine, en ce qui concerne la localisation de certaine tumeurs, sans oublié tout ce qui concerne les moteurs et l'aérodynamique.

Conclusion

Nous avons présenté dans ce travail une méthode d'approximation du problème de Navier-Stokes en utilisant la méthode des éléments finis. Le but est de donner une méthode abstraite de résolution des problèmes non linéaires et de l'appliquer au cas des équations de Navier-Stokes. Il existe plusieurs autres méthodes d'approximation, mais pour les solutions exactes, elles n'existent que dans des cas de figure très particuliers. La méthode que nous avons proposée nous permet de répondre aux critères d'Hadamard, dans le cas stationnaire.

En perspective, il serait intéressant de voir s'il est possible d'appliquer la méthode de contrôlabilité exacte de solutions aux limites, c'est à dire, avoir l'état initial et l'état final auquel nous voulons aboutir, et "contrôler" nos équations pour qu'elles atteignent l'état final désiré.

Bibliographie

- [1] Allaire G. Analyse numérique et optimisation. Les éditions de l'école polytechnique, Paris. 2007.
- [2] Basset M. O. Simulation numérique d'écoulements multi-fluides sur grille de calcul. Thèse de doctorat, Ecole des mines de Paris. 2006.
- [3] Bourbaki N. Variétés différentielles et analytiques. Editions: N. Bourbaki et Springer-Verlag Berlin Heidelberg. 2007.
- [4] Brézis H. Analyse fonctionnelle, Théorie et applications. Editions: Masson, Paris. 1987.
- [5] Chorin A. J. Mathematics of computation, New York. 1968.
- [6] Danaila I., Joly P., Kaber S.M. et Postel M. Introduction au calcul scientifique par la pratique. Edition Dunod, Paris. 2005.
- [7] Demengel F. et Demengel G. Espaces Fonctionnels, Utilisation dans la résolution des équations aux dérivées partielles. EDP Sciences, CNRS Editions, 2007.
- [8] Doering C.R. et Gibbon J. D. Applied analysis of the Navier-Stokes equations, Cambridge University Press, 1995.
- [9] Durastanti J.F., Sfaxi Y. et Khelalfa R. Résolution des équations de Navier-Stokes par une méthode de réanalyse, 2009. (www.sft.asso.fr).
- [10] Euler L. Principles of the motion fluids, 1752.

(<http://adsabs.harvard.edu/abs/2008PhyD..237.1840E>).

- [11] Foster N. et Metaxas D. Realistic animation of liquids. Journal: Graphical Models and Image Processing, Academic Press, Inc. USA, 1996.
- [12] G enevaux O. Simulation de liquides à l'aide des équations de Navier-Stokes, et visualisation, à destination de l'infographie. Th ese de doctorat. Université Louis Pasteur de Strasbourg. 2006.
- [13] Girault V. et Raviart P. A. Finite Element Approximation of the Navier-Stokes Equations. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1979.
- [14] Guermond J. L. Sur l'approximation des équations de Navier-Stokes par une méthode de projection, 1994.
- [15] Harlow F.H. et Welch J.E. Numerical Calculation of Time-Dependent Viscous Incompressible Flow of Fluid with Free Surface. Physics of Fluids.
http://www.cs.rpi.edu/~cutler/classes/advancedgraphics/S09/papers/harlow_welch.pdf), 1965.
- [16] Heywood J. Masuda G., Rautmann K., Rautmann R. et Solonnikov V. A. The Navier-Stokes Equations II- Theory and Numerical Methods. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1992.
- [17] Johnson C. Numerical solutions of partial differential equations by the finite element method. Cambridge University Press, New-York, 1987.
- [18] Kern M. Introduction à la méthode des éléments finis. Ecole nationale supérieure des Mines de Paris, 2005.
- [19] Kreiss H. O. et Lorenz J. Initial-Boundary Value Problems and the Navier-Stokes Equations. SIAM, 2004.
- [20] Leborgne G. Approximations variationnelles de problèmes aux limites elliptiques et élément finis. Notes de cours de l'ISIMA, 2011.

-
- [21] Leray J. Essai sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace. *Acta Math.*, 1933.
- [22] Monier A. Le théorème de Brouwer. *Le journal de maths des élèves*, Volume 1, N°4, (page 202-206). Université de Provence, Marseille. 1998.
- [23] Munnier A. *Espaces de Sobolev et introduction aux équations aux dérivées partielles. Cours*, Université Henri Poincaré, Nancy, 2008.
- [24] Navier C. L. Mémoire sur les lois du mouvement des fluides. *Mémoires de l'Académie des Sciences de l'Institut de France*, 1822.
- [25] Oseen C. Sur les formules de Green généralisées qui se présentent dans l'hydrodynamique et sur quelques unes de leurs applications (première partie) ». *Acta Math.* (pages 205–284), 1911.
- [26] Oseen C. Sur les formules de Green généralisées qui se présentent dans l'hydrodynamique et sur quelques unes de leurs applications (deuxième partie) ». *Acta Math.* (pages 205–284). *Acta Math.* (pages 97–192), 1912.
- [27] Rautmann R. *Approximation Methods for Navier-Stokes Problems*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1980.
- [28] Riley N. et Drazin P. *The Navier-Stokes Equations: A Classification of Flows and Exact Solutions*. Cambridge University Press, 2006.
- [29] Stam J. Stable Fluids. In *SIGGRAPH 99 Conference Proceedings*, Annual Conference Series, Aout 1999.
- [30] Stokes G. On the Theory of Internal Friction of Fluids in Motion and of the Equilibrium and Motion of Elastic Solids. 1845.
- [31] Tas S. *Espaces de Sobolev. Cours Master*, 2012.
- [32] Tas S. *Formulation variationnelle des problèmes aux limites elliptiques linéaires. Cours Master*, 2013.

- [33] Taylor C. et Huhes T.G. Finite Element Programming of the Navier-Stokes Equations. Pineridge Press Limited Swansea, U.K., 1981.
- [34] Temam R. Navier-Stokes Equations, Theory and numerical analysis. North-Holland Publishing Compagny, 1979.
- [35] Temam R. Navier-Stokes Equations and Nonlinear Functional Analysis. SIAM edition, 1995.
- [36] Thomasset F. Implementation of Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations. Springer-Verlag, New-York, 1981.
- [37] Wolibner W. Un théorème sur l'existence du mouvement plan d'un fluide parfait, homogène, incompressible, pendant un temps infiniment long. Mathematische Zeitschrift, (pages 698 -726), 1918.
- [38] Zienkiewicz O.C. et Taylor R.L. The Finite Element Method, volume3: Fluid Dynamics, Fifth edition. Butterworth-Heinemann, 2000.

Résumé

Dans ce travail, nous nous intéressons à l'étude des équations de Navier-Stokes stationnaires. En mécanique des fluides, celles-ci sont des équations aux dérivées partielles non linéaires, censées décrire le mouvement des fluides (liquide ou gaz). Le but de ce travail est d'exposer une méthode de résolution de ces équations, mais nous nous limiterons au cas stationnaire. Notre travail est structuré en quatre chapitres. Nous allons retracer, dans le premier chapitre, le contexte dans lequel s'est faite la construction de ces équations, et suivre leurs évolutions dans le temps. Dans le second chapitre, nous donnerons quelques rappels d'analyse fonctionnelle et de formulation variationnelle, et introduirons la notion d'approximation numérique interne, nous n'exposerons que le cas particulier de la méthode des éléments finis. Le troisième chapitre constitue le cœur de notre travail, dans un premier temps, nous exhibons une méthode type pour la résolution d'une classe de problèmes non-linéaires, ensuite nous appliquons cette méthode au cas des équations de Navier-Stokes stationnaires. Nous approfondissons les notions de la méthode type proposée auparavant et nous présentons une méthode se basant sur la méthode des éléments finis pour approximer le problème de Navier-Stokes. Nous proposons dans le dernier chapitre, une méthode de simulation des fluides, ainsi que leurs interactions avec des solides grâce aux équations de Navier-Stokes.